КЛАССИКИ ФИЗИКИ

АРХИМЕД

УЧПЕДГИЗ · 1957

КЛАССИКИ ФИЗИКИ

ПРОФ. И. Н. ВЕСЕЛОВСКИЙ

АРХИМЕД

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1957

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является плодом моей работы по переводу всех дошедших до нас произведений Архимеда.

Моими основными целями были две: во-первых, дать такое популярное изложение, которое могло бы быть усвоено школьниками старших классов, и, во-вторых, дать характеристику Архимеда, которая могла бы добавить новые черты к его облику. Для специалистов — историков физико-математических наук (а также и для рецензентов) я сообщаю, что новым в моей работе является следующее:

а) Установление факта, что все дошедшие до нас полностью математические произведения Архимеда написаны им уже в зрелом возрасте (около 50 лет).

б) Характеристика развития античной механики в эпоху до Архимеда.

в) Эволюция метода исчерпания у Архимеда.

г) Установление сравнительно позднего происхождения книг «О равновесии плоских фигур».

д) Анализ книг «О плавании».

Я старался представить Архимеда в той научно-общественной обстановке, в которой ему пришлось работать: это в свою очередь потребовало описания эволюции греческой арифметики, геометрии, механики и астрономии.

В этих описаниях читатель тоже может найти интересные факты. В частности, нужно обратить внимание на великого предшественника Архимеда в астрономии — Аристарха Самоского, результаты исследований которого в нашей литературе излагаются неполно, а иногда неверно.

1. ВВЕДЕНИЕ

Имя Архимеда хорошо известно каждому образованному человеку. Слышащий это имя сейчас же вспоминает гордую фразу Архимеда, произнесенную в связи с установлением теории рычага: «Дайте мне точку опоры, и я подыму весь мир», анекдотический эпизод, связанный с открытием известного закона гидростатического давления, когда он выбежал из ванны голый на улицу с криком «эврика». Вспоминается, как он сумел установить обман ювелира, скрывшего часть золота, предназначенного для венца царя Гиерона, определил отношение длины окружности к диаметру — знаменитое число $\pi = \frac{22}{7}$, и, наконец, как он с успехом защищал от римлян и свой родной город и свои геометрические чертежи и сказал готовящемуся убить его римскому солдату: «Не трогай моих чертежей!»

Однако написанное в предыдущей фразе заключает почти все то, что известно об Архимеде широким слоям не только образованных людей, но даже и ученых, не занимавшихся специально историей науки. В известной степени это объясняется тем, что биография Архимеда, составленная в древности его учеником Гераклидом, до нас не дошла. Сведения об его жизни приходится черпать у писателей, упоминавших об Архимеде, или в общих исторических трудах, как например у историков Полибия и Тита Ливия, или писателей, которые занимались Архимедом случайно, как например у Плутарха. Последний дал много сведений об Архимеде лишь попутно в биографии совершенно постороннего ему человека, а именно, римского полководца Марцелла, взявшего Сиракузы — родину Архимеда.

При взятии Сиракуз и погиб Архимед.

Вследствие этого обстоятельства нам более всего известен конец жизни великого ученого. Вот почему, стоя на почве достоверности, приходится рассказ об Архимеде начинать не с начала, а с конца, тем более что в этом рассказе содержатся данные, могущие дать нам важные черты, характеризующие Архимеда и как человека и как ученого.

2. ОСАДА СИРАКУЗ РИМЛЯНАМИ

Осада Сиракуз, во время которой погиб Архимед, происходила во время Второй Пунической, или Ганнибаловой, войны, когда решался вопрос, кто будет господствовать в Средиземноморье: земледельческий ли Рим с его суровой военной дисциплиной или торгово-промышленный Карфаген, предпочитавший вести войны при помощи чужестранных наемников. Обстоятельства этой войны хорошо известны каждому школьнику; он знает, как один из величайших полководцев мира Ганнибал совершил большой и трудный переход из Испании через Альпы в Италию, как он последовательно в битвах при Требии, при Тразименском озере и при Каннах сумел разбить и даже уничтожить одну за другой три римские армии. Эта великая война захватила большую часть народов Западного Средиземноморья: в ней, кроме непосредственно заинтересованных карфагенян и римлян, участвовали и испанцы, и галлы, и македоняне, и греки, в числе последних родина Архимеда — сицилийский город Сиракузы.

Осада Сиракуз римскими войсками под начальством Марка Клавдия Марцелла и Аппия Клавдия происходила в 212 году до н. э., что дает нам первую точно установленную дату биографии Архимеда, а именно, дату его смерти.

Вот как рассказывает об этой осаде греческий историк Полибий в восьмой книге своей «Истории», описывающей события последней четверти III и первой половины II века до н. э., в течение которых Рим установил свое главенство во всем Средиземноморском мире *:

* Приводим соответствующее место в переводе Ф. Г. Мищенко.

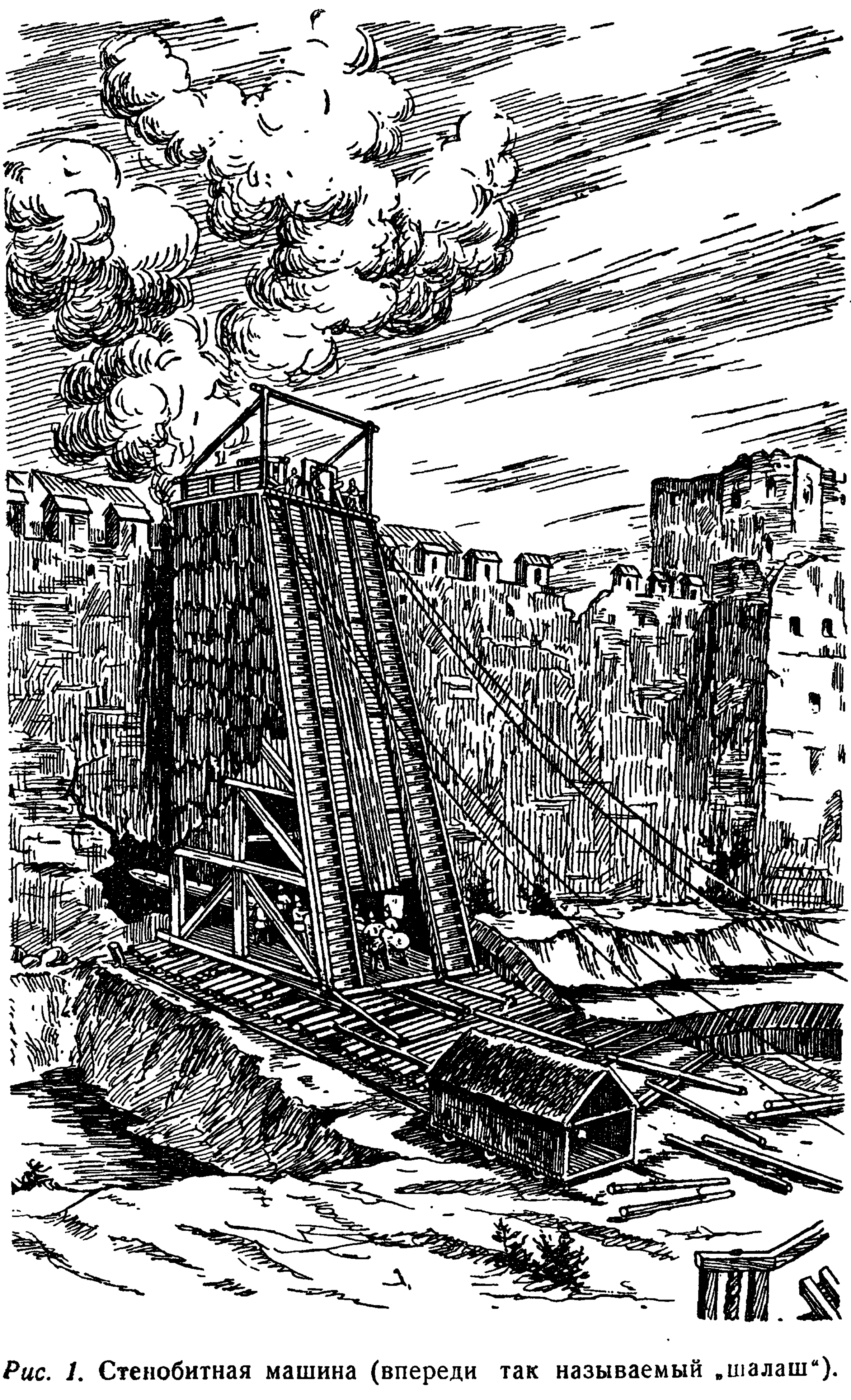


Рис. 1. Стенобитная машина (впереди так называемый „шалаш“).

«Римляне выбрали в проконсулы Аппия Клавдия, дали в его распоряжение сухопутные войска, а начальство над флотом возложили на Марка Клавдия. Начальники расположились станом невдалеке от города и решили, что сухопутное войско поведет приступ против города со стороны Гексапил, а флот против Ахрадины у портика, именуемого Скитским, где стена тянется вдоль моря на собственном основании. Приготовив шалаши *, метательные орудия и все прочее, нужное для осады, римляне надеялись при многочисленности рабочих рук покончить с приготовлениями в течение пяти дней и предупредить неприятеля. Но при этом они не приняли в расчет искусства Архимеда, не догадались, что иногда дарование одного человека способно сделать больше, чем огромное множество рук. Теперь они убедились в этом по опыту. Город был достаточно крепок тем уже, что облегающая кругом стена покоилась на высотах и поднимающемся перед городом утесе; к ним трудно подойти даже и тогда, если бы осаждаемые не оказывали никакого сопротивления, за исключением немногих определенных пунктов. Кроме того, упомянутый выше Архимед заготовил внутри города, а равно и против нападающих с моря, такие средства обороны, что защитникам не было нужды утруждать себя непредусмотренными работами на случай неожиданных способов нападения: у них заранее готово было все к отражению врага во всяких случаях.

Итак, Аппий сделал попытку приблизиться с шалашами и лестницами к той части стены, которая с востока упирается в Гексапилы, а Марк с шестьюдесятью пятипалубными судами направился против Ахрадины. Находившиеся на каждом судне люди вооружены были луками, пращами и легкими дротиками, чтобы прогонять врага, нападающего со стенных зубцов. Вместе с тем римляне сняли весла у восьми пятипалубных судов, у одних с правой стороны, у других с левой, связали суда попарно открытыми стенками и, действуя веслами только с наружных боков, стали подвозить к городской стене так называемые самбуки. Устройство этого осадного орудия следующее: делается лестница в четыре фута ши-

---

* Так назывались подвижные крытые галереи, подвозимые или подносимые к стенам для прикрытия бойцов и рабочих.

рины и такой длины, чтобы она при установке достигала верхнего края стены; с обеих сторон ее ограждают и закрывают высокими перилами, потом кладут ее наискось вдоль соприкасающихся стенок связанных между собой судов, так что лестница выступает далеко за корабельные носы. На вершинах мачт укрепляют блоки с канатами. Когда нужно действовать, канат привязывают к верхнему краю лестницы, и люди, стоящие на корме, тянут его на блоке, а другие, находящиеся на передней части корабля, следят за правильным подъемом лестницы и подпирают ее шестами. Наконец, при помощи гребцов, размещенных по обеим наружным сторонам, римляне подходят с кораблями к берегу и стараются приладить к стене только что описанное сооружение. На вершине лестницы находится доска, огороженная с трех сторон плетнем; на ней стоят четыре человека, которые и ведут борьбу с неприятелем, находящимся на зубцах стены и мешающим установке самбуки. Как только лестница установлена так, что эти четыре воина возвышаются над стеной, боковые стенки плетня снимаются и воины с двух сторон тотчас взбираются на зубцы или башни; прочие товарищи их следуют за ними по самбуке, надежно прикрепленной канатами к обоим кораблям. Сооружение это не без основания получило свое название: когда машина поднята, то корабль в соединении с лестницей напоминает по виду самбуку *.

Итак, по изготовлении самбуки римляне решились подойти к башням. Однако Архимед соорудил машины, приспособив их к метанию снарядов на любое расстояние. Так, если неприятель подплывал издали, то Архимед поражал его из дальнобойных камнеметальниц тяжелыми снарядами или стрелами и ставил неприятеля в трудное и беспомощное положение. Когда же снаряды начали летать поверх неприятеля, то Архимед употреблял меньшие машины, каждый раз сообразуясь с расстоянием, и наводил на римлян такой ужас, что они никак не решались идти на приступ или приблизиться к городу на судах. Наконец, Марк, раздосадованный неудачами, вынужден был сделать еще попытку — тайком ночью подойти на кораблях к городу. Когда римляне

* Самбукой назывался у древних один из музыкальных струнных инструментов.

подошли к берегу на расстояние выстрела, Архимед употребил другое средство, направленное против сражавшихся с судов воинов, а именно: он велел сделать в стене приблизительно на высоте человеческого роста множество отверстий, с наружной стороны имевших ширину пальца в четыре; у отверстий изнутри стены он поставил стрелков и маленькие скорпионы *, через отверстия обстреливал находящихся на кораблях воинов и тем отнимал у них всякую возможность что-нибудь сделать. Таким образом, далеко ли, или близко находился неприятель, Архимед не только разрушал все его планы, но и производил большие опустошения в его рядах. Как только римляне покушались поднять самбуки, Архимед приводил машины в боевое состояние по всей стене. Все время они оставались невидимыми, но лишь только требовалось употребить их в дело, машины выдвигались над стеной изнутри и простирали свои жерла далеко за зубчатые укрепления. Некоторые машины метали камни весом не менее десяти талантов **, другие выбрасывали груды свинца. Каждый раз, как только самбуки приближались, жерла архимедовых машин вместе с подставкой отклонялись вправо или влево, смотря по надобности, и при помощи освобождаемого блока сбрасывали камни на неприятельское сооружение. Вследствие этого ломалась не только машина римлян, но подвергался большой опасности и корабль вместе с находившимися на нем солдатами.

Некоторые машины отражали нападение неприятеля, защищенного и прикрытого плетнем от стрел, выпускаемых через отверстия в стене; бросаемые соответствующего веса камни прогоняли нападающих римлян с передних частей корабля. Кроме того, с машины спускалась прикрепленная к цепи железная лапа; человек, управлявший машиной, захватывал этой лапой нос корабля в каком-нибудь месте, а затем опускал вниз конец машины, находившийся внутри города. Когда нос судна был таким образом поднят и судно поставлено отвесно на корму, то плечо рычага закреплялось неподвижно, а лапа вместе с цепью при помощи освобождающего приспособления отделялась от машины. Вследствие этого

---

* Стрелометы небольшого калибра.

** Около 250 *кГ*.

некоторые суда ложились на бок, другие совсем опрокидывались, большинство же погружалось от падения с значительной высоты в море и наполнялось водой к большому расстройству и ужасу экипажа. Изобретательность Архимеда приводила в отчаяние Марка; с прискорбием он глядел, как осажденные смеются над его усилиями и какие потери они ему причиняют. Однако, подшучивая над своим положением, Марцелл говорил, что Архимед угощает морской водой его корабли и как бы с позором прогоняет с попойки его самбуки палочными ударами. Так окончилась осада Сиракуз с моря.

Аппий с сухопутным войском очутился в столь же трудном положении и потому совсем отказался от приступа. Действительно, находясь еще на далеком расстоянии от города, римляне сильно терпели от камнеметальниц и катапульт, из которых были обстреливаемы; ибо сиракузяне имели в запасе множество превосходных и метких метательных оружий. Оно и понятно, так как Гиерон дал на них средства, а Архимед изобрел и мастерски построил машины. Итак, когда римляне приближались к городу, то их непрерывно обстреливали через упомянутые выше отверстия в стене так, что они терпели урон и не могли продолжать наступление; те же, которые рассчитывали пробиться вперед силой, огражденные плетенками, гибли под ударами камней и бревен, падавших сверху. Много бед римлянам сиракузяне причиняли и теми лапами у машин, о которых я говорил раньше: лапы поднимали воинов в полном вооружении и кидали их оземь. Наконец, Аппий с товарищами возвратился на стоянку и устроил совещание с трибунами, на котором и было единогласно принято решение испытать всевозможные другие средства, но только отказаться от надежды взять приступом Сиракузы; они так и действовали согласно принятому решению. Итак, римляне оставались под стенами города в течение восьми месяцев, и не было такой уловки или отважного дела, перед которым они остановились бы, но на приступ идти они уже ни разу не осмеливались. Такова чудесная сила одного человека, одного дарования, умело направленного на какое-либо дело. Вот и теперь, располагая столь значительными сухопутными и морскими силами, римляне могли бы быстро овладеть городом, если бы кто-либо изъял из среды сиракузян одного старца. Но так как этот один был среди сиракузян, то римляне не дерзали нападать на город или по крайней мере употреблять те способы нападения, отразить которые был в силах Архимед».

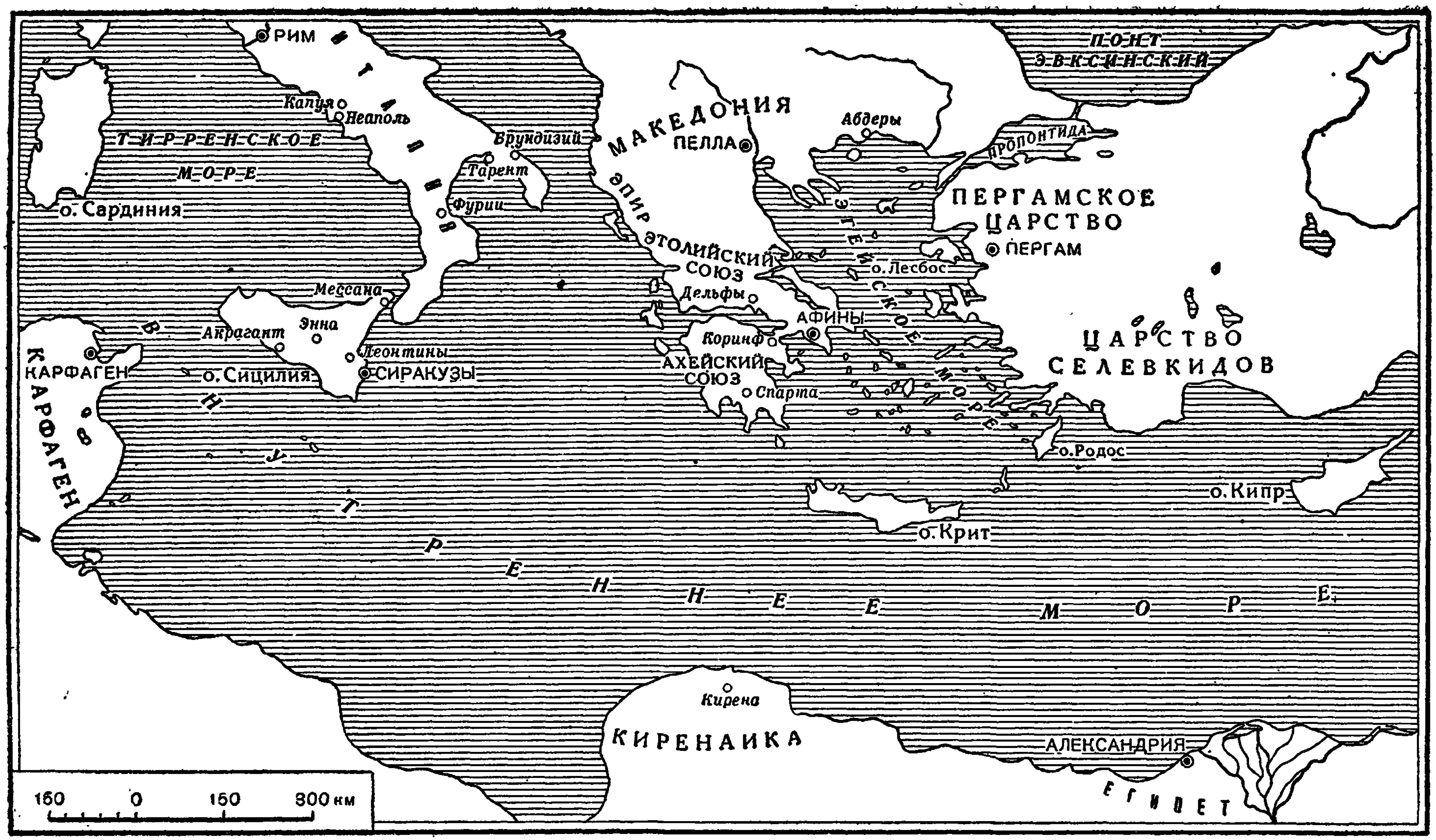
3. ОЧЕРК ИСТОРИИ СИРАКУЗ

Полибий, из истории которого мы заимствовали вышеприведенный текст, принадлежит к поколению, жившему непосредственно после Архимеда. Его жизнь охватывает всю первую половину II века до н. э.; можно сказать, что он родился тогда, когда Архимед умер. Полибий был свидетелем большей части событий, описанных в его истории, а именно, утверждения римского владычества в Греции и Македонии. Его отец и он сам были государственными деятелями греческого ахейского союза, и ему пришлось провести много времени в Риме в качестве заложника. Он был близок к семье Сципионов, из которой вышел знаменитый победитель Ганнибала. Его «История», написанная в высшей степени трезвым, можно сказать, даже сухим языком, дает вполне надежный и достоверный материал для суждения об описываемых им событиях. Сухость языка и отсутствие литературных украшений была причиной того, что его большой труд не дошел до нас полностью (мы имеем только первые шесть книг и большие отрывки из следующих), но он был основным источником для дошедшего до нас полностью описания Второй Пунической войны, сделанного знаменитым римским историком Титом Ливием, жившим в эпоху Августа, т. е. приблизительно через двести лет после смерти Архимеда.

Рассказ Тита Ливия не прибавляет существенно новых черт к облику Архимеда, данному Полибием, за исключением одной: Тит Ливий называет Архимеда «единственным в своем роде наблюдателем неба и звезд». Наиболее подробная характеристика Архимеда была сделана философом и моралистом Плутархом, жившим приблизительно спустя сто лет после Тита Ливия, в упомянутой уже нами «Жизни Марцелла» *. Плутарх, характеристикой которого нам еще придется заниматься, рисует

---

* Рассказ Плутарха об Архимеде можно прочесть в русском переводе в биографии Архимеда, написанной В. Ф. Каганом (Гостехиздат, 1951).



Эллинистический мир во времена Архимеда.

Архимеда отвлеченным математиком, забывающим ради своей науки решительно все и не заботящимся об ее практических приложениях. Как это ни странно, Плутархова характеристика Архимеда сделалась основной у очень большого числа историков; некоторые из них даже ставят в особенно большую заслугу Архимеду то, что он все-таки нашел время помочь в беде родному городу и с таким громадным успехом обеспечил его защиту.

Однако если внимательно прочитать рассказ Полибия, то перед нами предстанет совершенно другая картина. Прежде всего мы видим, что римляне рискнули только на один приступ и притом очень скоро после своего прихода, так что для подготовки защиты времени совершенно не было; наоборот, оборона города была подготовлена заблаговременно. Из рассказа Полибия видно, что по мере приближения римлян к городу в дело вводились сначала дальнобойные метательные машины, а затем машины более близкого действия; для этого следовало бы предварительно произвести то, что современные артиллеристы называют «пристрелкой по квадратам»; сделать эту пристрелку в виду у неприятеля совершенно невозможно; это обязательно должно быть сделано заблаговременно. О том, что город уже был готов к осаде заранее, Полибий говорит совершенно определенно: «...оно и понятно, так как Гиерон дал на них (метательные орудия) средства, а Архимед изобрел и мастерски построил машины». Упоминаемый в тексте Гиерон, правитель Сиракуз, умер незадолго до осады Сиракуз; следовательно, участие Архимеда в обороне не было случайным. Перед нами вместо рассеянного ученого-математика встает образ Архимеда — главного военного инженера царя Гиерона. Это, конечно, не приходится понимать в том смысле, что Архимед был только военным инженером, но во всяком случае этот факт открывает перед нами тот фундамент, на котором строились математические и механические достижения Архимеда.

Наше представление об Архимеде прежде всего как о военном инженере еще более укрепится, если мы рассмотрим ту среду, в которой протекла его жизнь, иными словами, познакомимся хотя бы вкратце с историей его родного города — Сиракуз.

Сиракузы были самым большим городом древней Сицилии, богатого и плодородного острова, из-за обладания которым шла долгая и ожесточенная борьба между прилегающими государствами древнего мира. В этой борьбе туземное население Сицилии (сиканы или сикулы) было отброшено в середину острова, а берега были заняты колонистами — на западе карфагенянами, а на востоке греками. Основанные примерно в VII веке до н. э. Сиракузы были одной из сравнительно немногочисленных дорийских колоний (их основали выходцы из Коринфа), и следы дорийского наречия хорошо заметны в языке тех известных нам произведений Архимеда, которые дошли до нас без больших переделок.

Основным врагом греческих колонистов было, однако, не туземное население, а карфагеняне. Первое известное нам из истории крупное столкновение с карфагенянами имело место во время греко-персидских войн (начало V века до н. э.). В то время когда на востоке греки с успехом отбивались от персидских полчищ Дария и Ксеркса, на западе напавшие на Сиракузы карфагеняне были разбиты при Гимере Гелоном, правителем Сиракуз. Приблизительно через полвека после этого Сиракузы подвергаются нападению с другой стороны: во время Пелопоннесской войны попытку обосноваться в Сицилии и захватить Сиракузы делают афиняне, желая получить в свое распоряжение плодоносные сицилийские поля, необходимые для снабжения хлебом разросшегося городского населения Афин. Общеизвестно, чем кончилась эта начатая под водительством Алкивиада сицилийская экспедиция; афинская армия во главе с Никием и Демосфеном погибла, в результате чего афинская гегемония в Греции потерпела полное крушение. Но если Сиракузы были избавлены от страха перед афинским вторжением, то с запада им, а равно и всем греческим колонистам в Сицилии стала грозить новая, еще более грозная опасность. Уже в самом конце Пелопоннесской войны в Сицилии высадилась новая карфагенская армия, которая теперь стала вести дело совершенно по другому; эта новая карфагенская война сыграла огромную роль в развитии греческой военной техники.

В раннюю эпоху истории Греции войска ее государств плохо умели справляться с укрепленными городами; последние большей частью брались не при помощи штурма; если не удалось взять город хитростью или предательством, то приходилось прибегать к продолжительной осаде, во время которой опустошались окружающие город поля и осажденный гарнизон вымаривался голодом. Всем известна легендарная десятилетняя осада Трои, но и в историческую эпоху — во время уже упомянутой нами Пелопоннесской войны — самое лучшее сухопутное войско в Греции— спартанское — с большим трудом и только после долгой осады смогло справиться с небольшим городком Платеями в Беотии, стоявшим на стороне афинян. Этому в известной степени способствовал характер греческого войска, представлявшего ополчение граждан, вооружавшихся каждый на свой счет и служивших даром в качестве государственной повинности. Для снаряжения флота требовались специальные средства, получавшиеся или от государственных серебряных рудников (в Афинах), или же за счет обложения состоятельных граждан; последним поручалось каждому в отдельности или в кооперировании с другими сооружение судна. Таким образом, возникновение большого военного флота было возможно только при достижении греческим государством известного уровня торгового и промышленного благосостояния. Карфаген стоял в конце V века до н. э. на высокой ступени развития; представители господствующих классов обладали уже большими состояниями, полученными или в результате торговых операций, или от эксплуатации крупных земельных поместий (в конце своей истории Карфаген был классической страной крупного землевладения; составленные в нем большие агрономические трактаты переводились впоследствии на греческий и латинский языки). В результате такого развития изменился и строй войска: вместо гражданского ополчения стали использоваться наемные специализированные войска, ведение войны требовало больших расходов. Затягивающиеся на долгое время осады стали уже невыгодными, а это в свою очередь потребовало усовершенствования военной техники.

Карфагеняне создали некоторые новые типы стенобитных машин (первое употребление тарана имело место еще на древнем Востоке в эпоху последних ассирийских царей VIII века до н. э.) и при помощи их во время своего вторжения в Сицилию успевали за время одной летней кампании успешно довести до конца осаду нескольких городов. Агрессия Карфагена имела своим следствием ликвидацию ряда мелких городов-государств греческой Сицилии; их население бежало под защиту Сиракуз; последние из города средней руки превратились в самый крупный город Сицилии с большим населением.

Под давлением внешних событий в Сиракузах возникла военная монархия Дионисия Старшего. Последний в борьбе с карфагенянами произвел первую в мировой истории мобилизацию промышленности: он собрал большое количество мастеров — своих и чужестранных — и поставил перед ними задачу создания мощных военных орудий; в это время и была изобретена греческая осадная артиллерия — камнемечущие катапульты и баллисты. В этой «артиллерии» движущей силой была сила упругости или большой величины лука, тетива которого натягивалась при помощи механизмов или закручивающихся упругих тяжей (в качестве наилучших древние авторы рекомендовали обильно умасленные женские волосы), в которые вставлялись деревянные шесты, заканчивающиеся приспособлением, в которое вкладывался бросаемый камень; при «заряжении» шест отводился назад, причем тяж закручивался; при выстреле шест отпускался, ударялся о стоящую впереди горизонтальную стойку, а освободившийся камень летел вдаль.

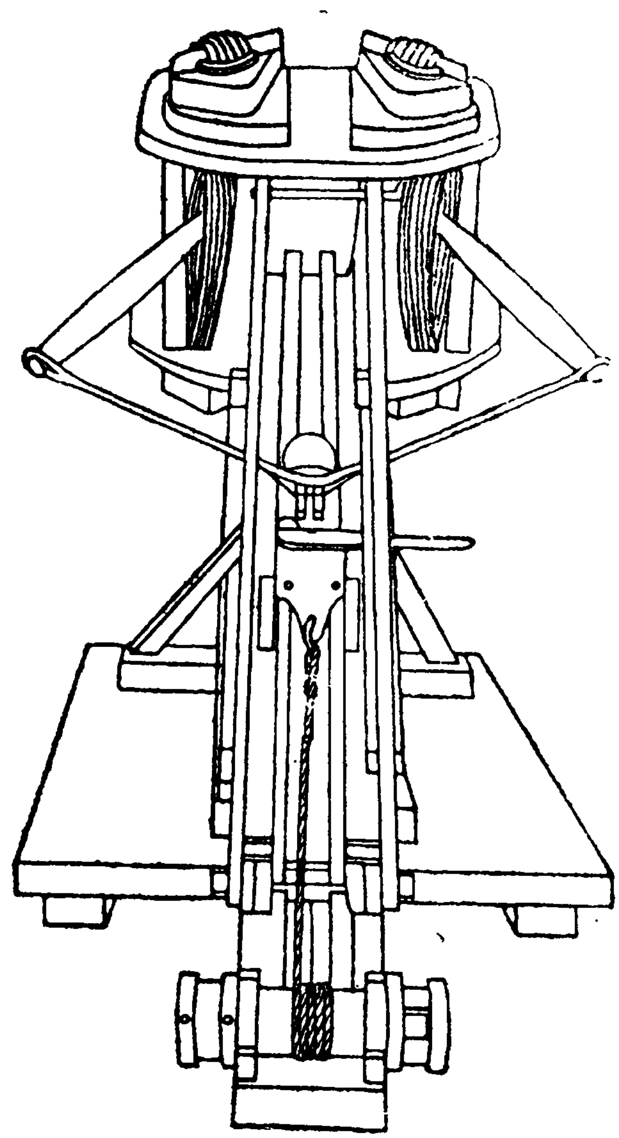


Рис. 2. Катапульта.

Величина расстояния, на которое мог улететь камень, при одинаковой степени напряжения тяжа считалась пропорциональной объему последнего; изменяя объем тяжа, можно было получать бо́льшую или меньшую дальность полета снаряда (между прочим, сделанные на основании современной механики расчеты подтверждают правильность высказанного предположения).

Новая артиллерия позволила Дионисию иметь ряд успехов в борьбе с карфагенянами. Правда, полностью

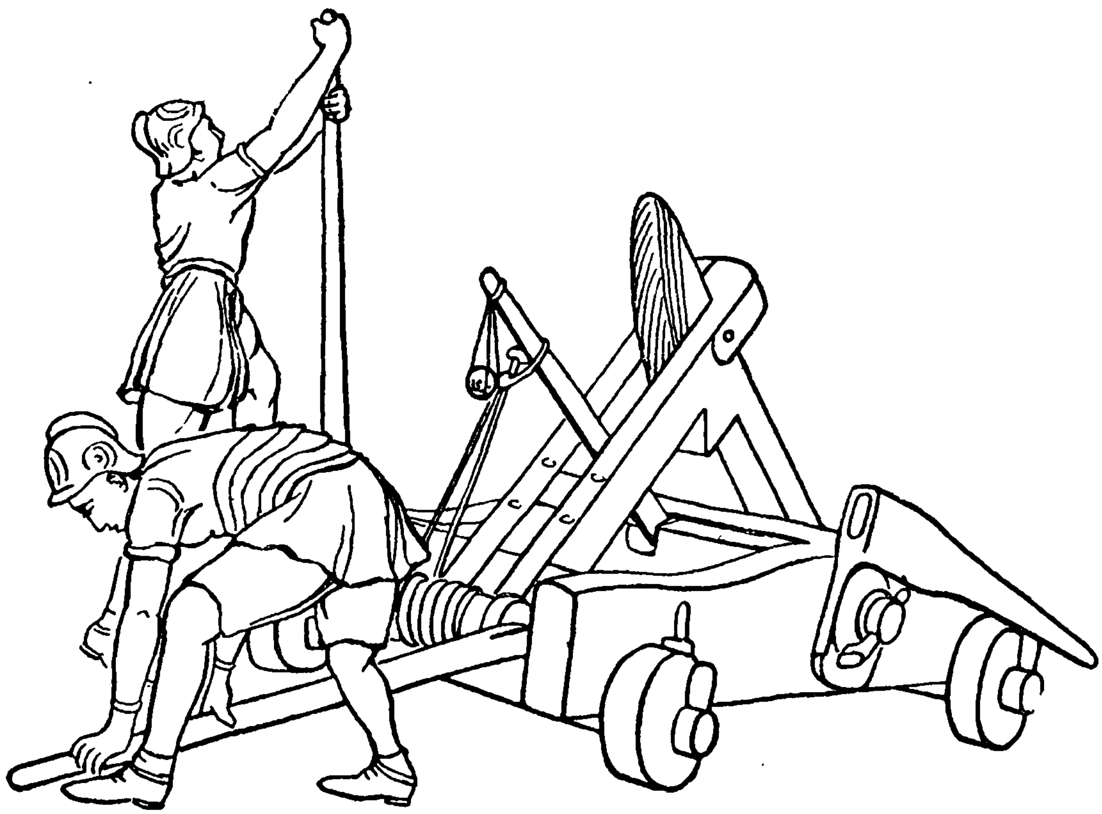


Рис. 3. Онагр.

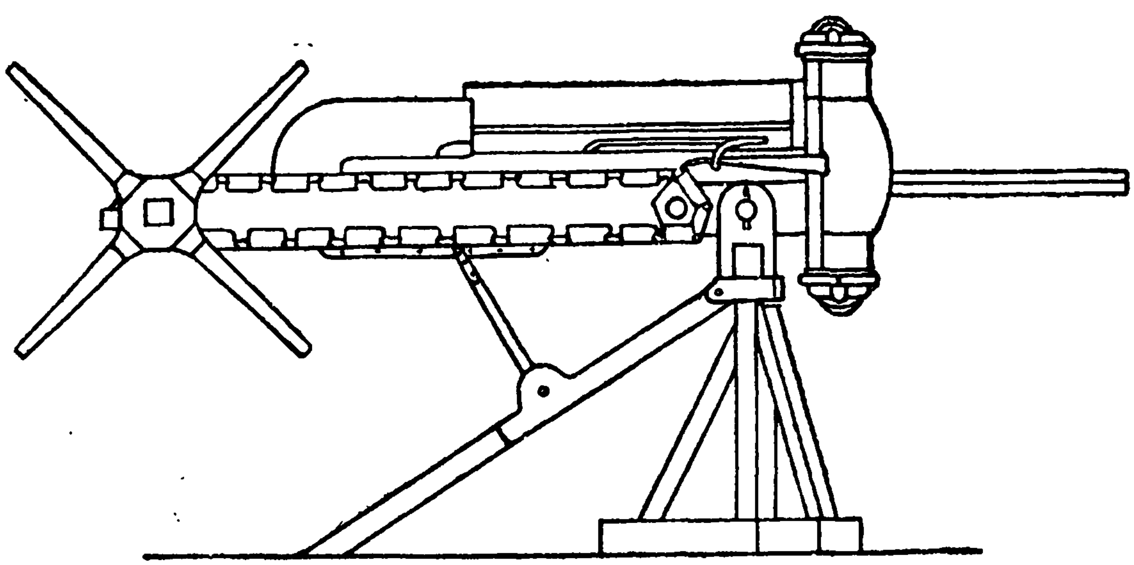


Рис. 4. Полибол, или стреломет.

выгнать карфагенян из Сицилии не удалось: западная половина острова еще оставалась в их руках, но во всяком случае безопасность Сиракуз была на значительный промежуток времени обеспечена.

Новые технические изобретения никогда не остаются одинокими. То обстоятельство, что дальность полета оказалась прямо пропорциональной объему упругих тяжей, способствовало развитию стереометрии; появился ряд решений основной задачи измерения объемов — получения объема, в заданное число раз превышающего имеющийся. В связи с решением задачи об удвоении куба стала развиваться теория новых кривых, открытых выдающимся греческим математиком Евдоксом и его братом Менехмом, так называемых конических сечений — эллипса, гиперболы и параболы.

В инженерном деле стала развиваться теория механического подобия: выяснилось, что не всегда простое увеличение объема дает соответствующее увеличение полезных результатов; если построенная модель машины может совершить какую-нибудь работу, то увеличение последней в определенное число раз, например в десять, не всегда может быть получено путем простого десятикратного увеличения размеров машины — существенную поправку в работу машины обязательно должно внести увеличение веса последней, которое в очень значительной степени изменит условия ее действия. Уяснение этого обстоятельства имело большое значение для теории и практики сооружений и прежде всего для постройки более крупных типов военных машин и морских судов.

В V веке до н. э. классическим типом греческого судна был трехпалубный корабль с тремя рядами весел, построенный еще в VII или VI веке в Коринфе — триера, или, как называли римляне, трирема. В IV веке строятся более крупные типы судов. В приведенном выше рассказе Полибия упоминаются пятипалубные суда — пентеры, а у греков дело доходило и до десятипалубных — декер.

Военно-инженерная часть начинает играть все бо́льшую роль в греческом военном деле: появляется значительная инженерная литература, в войсках Филиппа и Александра Македонских служат выдающиеся инженеры, например Диад. При их помощи достигаются значительные успехи в осаде городов. Так, например, Александру удалось взять город, стоящий на острове Тир, что до него не смог сделать ни один монарх древнего Востока. Война становится дорогостоящим предприятием, посильным только крупному государству, обладающему большими денежными средствами, и время небольших городов-государств отходит в невозвратное прошлое. Осадные машины в конце IV века начинают играть такую роль в ведении войны, что один спартанский полководец назвал их «могилой человеческой доблести».

На рубеже IV и III веков мы опять застаем Сиракузы в тяжелой борьбе с Карфагеном. Положение было одно время настолько угрожающим, что карфагенская армия стояла под самыми стенами Сиракуз и правителю последних Агафоклу удалось избавиться от опасности при помощи необычайно смелого шага: покинув осажденный город, он перенес войну на территорию самого Карфагена.

В начале III века появляются новые претенденты на владение Сицилией, а именно, эпирский царь Пирр, пытавшийся создать на западе империю, равносильную той, которую на востоке завоевал Александр Македонский. Призванный греческим городом южной Италии Тарентом в качестве союзника против римлян, он, одержавши над последними две победы, переходит в Сицилию и в короткое время почти полностью «освобождает» ее от карфагенян. Однако успехи его не были достаточно прочными: победы римлян на материке Италии заставляют его уйти из Сицилии, а нанесенное ими поражение под Беневентом ставит крест на его мечтах о западной «империи».

В борьбе против Пирра выдвинулся родственник Архимеда Гиерон, сделавшийся в 270 году правителем Сиракуз. Положение Гиерона при его воцарении тоже не было легким: на горизонте появляется еще один претендент на обладание Сицилией — римляне, которые ведут за нее борьбу с Карфагеном — так называемую Первую Пуническую войну (264—241). Во время этой войны Гиерон первоначально был в союзе с карфагенянами, но своевременно вышел из войны (263), сохраняя нейтралитет. После окончания войны Гиерон придерживается той же политики сохранения хороших отношений с обеими сторонами: когда после конца войны карфагеняне оказались в тяжелом положении в результате восстания наемников, приведшего к так называемой наемнической войне, то Гиерон помог карфагенянам.

После Первой Пунической войны Рим завладел всей Сицилией, за исключением лишь непосредственной территории Сиракуз. В течение этого времени Гиерон деятельно повышал обороноспособность Сиракуз. Результаты его работы мы уже могли оценить, читая Полибиево описание осады Сиракуз.

Таким образом, мы видим, что история Сиракуз есть история маленького государства, основанного в чужой стране и находящегося под угрозой быть уничтоженным одним из окружающих более мощных государств. Оба основных противника — и Рим и Карфаген — стояли во главе мощных союзов — один италийских, другой северо-африканских городов. Сиракузы никогда не могли объединить даже греческую часть Сицилии, не говоря уже о всей Сицилии с ее туземным населением: только карфагенское завоевание, уничтожившее свободу и независимость ряда сицилийских городов и заставившее их население искать убежище в крепких Сиракузах, сделало последние государством рангом немного выше среднего. Такое государство могло сохранять свою независимость или при помощи искусного дипломатического лавирования, используя противоречия интересов своих возможных врагов, или противопоставляя им нечто, могущее уравновесить сравнительную малочисленность своего населения и сил. Этим нечто и была зародившаяся в Сиракузах военная техника. Мы видели, что оба эти средства и были надлежащим образом использованы правителями Сиракуз и прежде всего умным Гиероном, деятельным помощником которого был Архимед.

4. ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ БИОГРАФИИ АРХИМЕДА

Нам остается теперь обратиться к собиранию всех фактов, могущих послужить к установлению хотя бы самых основных линий жизни Архимеда.

В сочинениях византийского писателя XII века н. э. Цеци говорится, что в момент смерти Архимеду было 75 лет. Этим определяется дата рождения Архимеда — 287 год до н. э.

Отцом Архимеда, как он сам говорит в своем «Псаммите», был астроном Фидий, состоявший в каких-то родственных отношениях с Гиероном Сиракузским.

Дальнейшие указания надо отыскивать в сохранившихся произведениях Архимеда, установив прежде всего возможный их хронологический порядок.

Прежде всего идут пять посланий к Досифею. Самым ранним из них является «Квадратура параболы», говорящая об определении площади параболического сегмента. Затем идут два послания, составляющие две книги сочинения «О шаре и цилиндре», в которых Архимед определяет поверхность и объем шара и его частей. После этого идут сочинения «О спиралях» и «О коноидах и сфероидах». В первом Архимед рассматривает основные свойства некоторой кривой, так называемой Архимедовой спирали, придуманной им для построения прямой, длина которой равнялась бы окружности некоторого круга; во втором Архимед определяет объемы сегментов эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения. Последовательность этих сочинений устанавливается совершенно точно на основании написанных Архимедом введений к этим книгам. Мы даже знаем, что по первоначальному плану Архимеда книга «О спиралях» должна была стоять последней в этом ряду, и только трудности, встретившиеся ему во время работы над «Коноидами», заставили задержать выпуск этой книги; она вышла самой последней.

Затем идет сочинение «О равновесии плоских фигур», в котором решается задача об определении центра тяжести параболического сегмента: она, естественно, должна быть написана позже «Квадратуры параболы». Вопросы определения центров тяжести сегментов шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения рассматриваются в «Эфодике», который, таким образом, должен быть написанным после всех посланий к Досифею. Далее мы имеем две книги «О плавающих телах», вторая из которых уже предполагает написанными «Коноиды» и «Эфодик».

Особняком стоят две книги: «Измерение круга» и «Псаммит». Первая, дошедшая до нас в искалеченном виде, посвящена числовому определению длины окружности (именно в ней и устанавливается архимедово значение $\pi = \frac{22}{7}$), т. е. в ней разбирается задача, геометрическое решение которой уже было дано Архимедом в книге «О спиралях». Некоторые особенности примененного в ней метода доказательства позволяют думать, что она по крайней мере одновременна двум последним посланиям к Досифею. Что касается «Псаммита», или «Исчисления песка», в котором разбирается вопрос о числе песчинок, содержащихся в объеме мира, то относительно него можно сказать, что оно написано после «Измерения круга», которое в нем цитируется, и до 216 года — года смерти Гелона, сына и соправителя царя Гиерона.

Таким образом, мы видим, что самым ранним из дошедших до нас сочинений является «Квадратура параболы». Оно было направлено к некоему Досифею, ученику александрийского астронома и математика Конона Самосского, которому Архимед имел обыкновение, как он сам пишет, посылать для критики свои сочинения. Так как Конон уже умер, то Архимед пытается найти ему замену в лице наиболее способного его ученика, уже упомянутого Досифея. Упоминание о смерти Конона позволяет нам установить дату, ранее которой не могли быть написаны по крайней мере все дошедшие до нас сочинения Архимеда.

Имя Конона известно широким кругам историков благодаря эпизоду с волосами Вереники. Когда в 246 году египетский царь Птоломей III Эвергет (246—221) начал Третью Сирийскую войну и отправился походом на Антиохию, то его супруга Вереника, молясь за его благополучное возвращение, принесла в храм в жертву богам свои роскошные волосы. После возвращения Птоломея через некоторое время обнаружилось, что волосы царицы исчезли из храма. Для успокоения разгневанного царя придворный астроном Конон заявил, что эти волосы были помещены богами на небе в качестве «нового» созвездия, известного под именем «Волос Вереники». Это выдающееся событие было прославлено в стихах не менее выдающимся придворным поэтом Каллимахом.

Галантный придворный астроном был выдающимся математиком: критику его высоко ценил Архимед, получавший от него даже темы для математических работ (в частности, для упомянутой уже спирали Архимеда).

Для биографии Архимеда упомянутый факт имеет следующее значение. В 246 году Архимеду был уже 41 год. Следовательно, дошедшие до нас и создавшие Архимеду славу математические произведения написаны были им в возрасте приблизительно 45—50 лет — факт в истории математических наук необычайный: математические способности в человеке обычно пробуждаются очень рано.

Чем же занимался Архимед до этого времени?

Точных сведений об этом мы не имеем, но все же можем сделать довольно правдоподобное предположение. В очерке истории Сиракуз мы уже видели, что в течение более двадцати лет, от 264 до 241 года, шла Первая Пуническая война, в которой Гиерон принимал участие, выступив в самом начале на стороне карфагенян. Правда, скоро он вышел из войны и стал держаться политики нейтралитета, но и эта политика тоже была делом опасным: он мог теперь в случае успеха карфагенян ожидать их мести за свою измену. Война велась с переменным успехом: римские победы сменялись поражениями, а после неудачной экспедиции Регула в Африку война сосредоточилась в Сицилии, где в последний период честь карфагенского оружия с успехом защищал Гамилькар Барка, отец Ганнибала. Поэтому можно предположить, что в это время Архимед работал преимущественно по своей первой специальности, а именно военного инженера: занимался конструированием военных машин, строительством укреплений и т. п. Конечно, и в это время чисто теоретическими исследованиями Архимед не пренебрегал, но эти исследования носили несколько специальный характер — это были работы в области механики. «Квадратура параболы» была первой дошедшей до нас работой Архимеда, но не была первой его работой вообще. В ней Архимед пользуется понятием центра тяжести, условиями равновесия рычага и ссылается на свои прежние работы, заглавия которых носят ярко выраженный механический характер.

В 241 году блестящая победа Лутация Катулла при Эгатских островах закончила войну в пользу римлян; вся Сицилия, за исключением небольшой области Сиракуз, сделалась римской провинцией. Дипломатические расчеты Гиерона оправдались, и для него настало более спокойное время; Архимед тоже мог получить отдых от своих инженерных занятий. По-видимому, именно в это время он смог побывать в Александрии и завязать знакомства с тамошними учеными.

Основанная в 332 году Александром Македонским Александрия скоро сделалась центром эллинистической науки. Уже Птолемей первый положил начало Александрийской библиотеке и музею при ней, в котором работали выдающиеся ученые. Правда, Александрия не дала таких всеобъемлющих ученых, какими были Аристотель и Демокрит, но зато в области развития специальных отраслей знания александрийские ученые сделали очень много

В Александрии была создана научная филология и развивались точные науки, в особенности медицина и математика. Мы уже упоминали одного из александрийских друзей Архимеда: это астроном Конон Самосский, с которым Архимед мог познакомиться и ранее, даже непосредственно в Сицилии, где Конон производил одно время астрономические наблюдения. Однако второй знакомый Архимеду александриец, знаменитый Эратосфен, указывает определенно на более позднюю эпоху.

Эратосфен был несколько моложе Архимеда (его жизнь датируестя приблизительно 280—195 годами до н. э.). Он родился в Кирене, получил философское образование в Афинах; после смерти уже знакомого нам галантного поэта Каллимаха — первого директора александрийской библиотеки, положившего начало систематической библиографии, — Эратосфен был приглашен в Александрию, где занял пост директора александрийской библиотеки и воспитателя наследника престола Птолемея IV Филопатора; это событие относят примерно ко второй половине сороковых годов (что-нибудь между 245 и 240 годами).

Эратосфен был весьма разносторонним ученым: он занимался арифметикой (ему принадлежит хорошо известное каждому школьнику «эратосфеново решето» — способ нахождения простых чисел), известны его работы по геометрии (в частности, его решение задачи об удвоении куба, сохранившееся в комментариях к Архимеду, сделанных Евдокием Аскалонским), он составил описание звездного неба («Катастеризмы»), произвел очень точное измерение дуги меридиана между Сиеной и Александрией, положил начало математической географии и хронологии, а также писал о древнегреческой комедии. За его разносторонность его друзья (а может быть, и враги) прозвали его «бета» — вторая буква греческой азбуки, числовое значение которой есть «два» — «во всем второй». Действительно, Эратосфен, бывший очень трудолюбивым и способным ученым, все-таки никоим образом не мог сравняться с Архимедом, и последний, по-видимому, давал это ему чувствовать.

В Кононе Архимед видел если не учителя, то наставника, мнением которого о своих работах он дорожил; по отношению же к Эратосфену Архимед держал себя как равный с равным, а может быть, даже немножко и как высший. Мы знаем два его послания к Эратосфену: это упомянутый нами «Эфодик», в котором Архимед сообщает Эратосфену свои механические методы, служившие ему для доказательства геометрических теорем, а также некоторые новые механические и геометрические теоремы и задачи (мнения Эратосфена Архимед уже не спрашивает); затем «Задача о быках», открытая в XVIII веке немецким драматургом и поэтом Лессингом (принадлежность ее Архимеду некоторыми оспаривается, но без достаточных оснований). В этом послании Архимед предлагает Эратосфену решить задачу о числе быков разных мастей в стаде солнечного бога Гелиоса, пасшихся на полях Сицилии. Арифметические соотношения между числами быков разных мастей таковы, что приводят к неопределенному уравнению второй степени типа:

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

(так называемому уравнению Пелля), наименьшее решение которого выражается настолько громадным числом, что является практически невыполнимым. Последние строки этого послания, написанного в стихотворной форме, дышат прямым издевательством.

Вероятно, пребывание в Александрии и в особенности знакомство с Кононом (если оно имело место именно в это время) дало новое направление научной деятельности Архимеда. Он пишет целый ряд выдающихся математических произведений, о которых мы уже говорили выше.

Из своих математических открытий этой эпохи сам Архимед выше всего ценил теорему о том, что поверхность шара равна боковой поверхности цилиндра, описанного около этого шара; он даже завещал изобразить на своей могиле шар, вписанный в цилиндр. По этому изображению через полтораста лет после смерти Архимеда его могила была найдена знаменитым римским оратором Цицероном во время службы последнего в Сицилии. Однако механическая жилка Архимеда продолжала действовать: во время пребывания в Египте, как говорит историк Диодор Сицилийский (живший во второй половине I века до н. э.), Архимед изобретает кохлею, или Архимедов винт, служащий для поднятия воды.

Дальнейшая биография Архимеда по существу сводится к описанию его достижений в различных областях

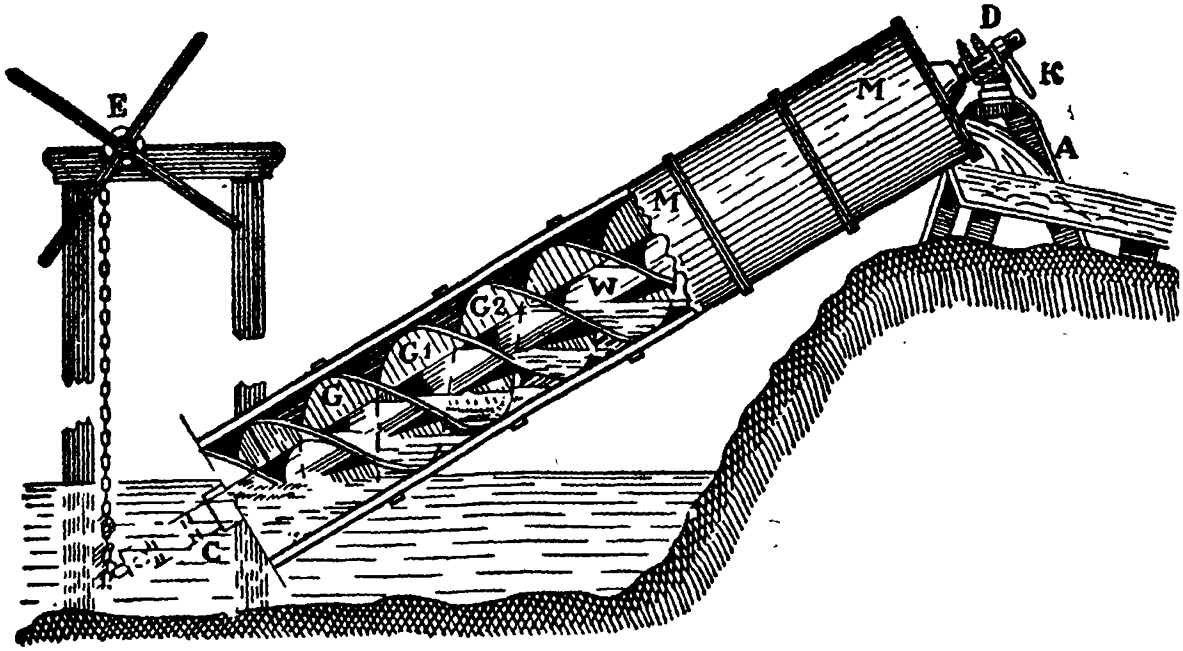


Рис. 5. Архимедов винт.

механики и математики. Для их оценки надо предварительно познакомиться с тем, что представляли в эпоху Архимеда греческие механика и математика.

5. ГРЕЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ЭПОХУ АРХИМЕДА

Так как первые работы Архимеда были посвящены механике, то естественно будет начать наше изложение с рассмотрения того, каким образом возникли и как сложились основные представления греческой механики.

Само слово «механика» произошло от греческого mechanê — механэ, что первоначально обозначало подъемную машину, употреблявшуюся в греческих театрах для подъема и опускания на сцену греческих богов, которые должны были разрешить запутанный ход представлявшейся драмы; отсюда произошла часто употребляющаяся латинская поговорка: deus ex machina — бог из машины. Позднее слово mechanê стало употребляться для обозначения военных машин, а затем и для машин вообще.

Если обратить серьезное в смешное, то можно было бы сказать, что греческая механика получила свое рождение в театре; однако это не только шутка: именно в театре и при том в то же самое время — в V веке до н. э. — зародилась еще одна отрасль науки — перспектива, которой пришлось заняться в связи с построением сценических декораций.

Греки различали два вида движений — естественные и искусственные, или насильственные. К естественным относились движения, которые совершались сами собой без вмешательства посторонних факторов: такими были прямолинейное свободное падение тяжелых и подъем легких тел (например, огня), а также круговые движения небесных светил. Первые всегда имели начало и конец, они стремились или к центру земли внизу, или к сфере огня вверху — во всяком случае к своему «естественному месту»; движения небесных светил не имели ни начала, ни конца, а совершались вечно; этим отличался совершенный мир неба от несовершенного земного. Что касается насильственных движений, то для их совершения, например, для того чтобы поднять тяжелое тело вверх или сбить пламя вниз, требовалось некоторое постороннее вмешательство, некоторый двигатель, который греки называли dynamis.

В том, с точки зрения техники, сравнительно простом мире, в котором жили греки V века до н. э., единственными силами, с которыми приходилось иметь дело, были: сила тяжести и сила трения, пропорциональная весу тел. С этой точки зрения является вполне понятным данное Аристотелем количественное определение dynamis: она является пропорциональной весу движимого тела, длине, на которое оно перемещено, и обратно пропорциональной времени, в течение которого было произведено это перемещение. Если мы обозначим вес через P, длину через S и время через T и будем считать коэффициент пропорциональности равным единице, то величину «силы» по Аристотелю можно выразить формулой:

$$F = \frac{P \cdot S}{T}.$$

Что представляет эта «сила», легко определит каждый школьник, знакомый с началами механики. Произведение веса на перемещение имеет размерность работы, а работа, деленная на время ее совершения, представляет мощность. Таким образом, аристотелевская dynamis будет тождественной с нашей мощностью.

Что это так, легко может заметить каждый, который заинтересуется филологической стороной дела. Греческая dynamis переводилась на латинский язык словом potentia, которое в свою очередь передавалось на французском языке словом puissance, а затем уже на русском словом «мощность».

Насколько определение Аристотеля было естественным в мире, где основными двигателями были люди и животные, можно видеть из того, что даже в XVIII веке при установлении оценки работоспособности паровых машин по сравнению с живыми двигателями за основную единицу измерения была принята мощность в одну «лошадиную силу». Действительно, и в настоящее время, для того чтобы свезти вдвое больший груз, мы берем вдвое более мощный двигатель; равным образом, если нам нужно во сколько-нибудь раз увеличить скорость движения, мы во столько же раз увеличиваем мощность автомобильного двигателя.

В популярных книгах очень часто упрекают Аристотеля и за то, что он установил свое понятие силы чисто кабинетным путем, не производя никаких опытных исследований, и за то, что данное им неверное определение силы надолго задержало развитие механики, так как тяжесть авторитета Аристотеля и отсутствие опытных исследований не позволяло заменить его другим, более верным, и что только Галилею удалось низвергнуть Аристотеля с высоты его пьедестала, и т. д. Во всех этих рассуждениях верно только одно: Аристотель был гораздо больше естественником, как мы сказали бы теперь, чем математиком. Вместе с тем мы видели, что определение аристотелевской dynamis вполне соответствовало технике его эпохи и, конечно, было взято из опыта.

Равным образом неверна и вторая часть утверждения относительно авторитета Аристотеля. В действительности авторитет этот был установлен лишь значительно позже, в конечный период существования римской империи (II—III века н. э.), когда, с одной стороны, получили большое развитие консервативные тенденции, а с другой, при переходе от рабовладельческой формации к феодальной, основанной в первую очередь на натуральном хозяйстве, стали забываться достижения античной техники. В рассматриваемую нами эллинистическую эпоху аристотелевское определение не имело никакого значения; более того, оно по существу стало устаревшим даже при самом Аристотеле в IV веке до н. э.

Аристотелевское определение силы вполне подходило к состоянию техники, когда единственными силами, с которыми приходилось иметь дело, были тяжесть и трение. Когда же технике пришлось столкнуться и с другими видами сил — в первую очередь с силой упругости, то это определение сразу стало неверным. Действительно, из него вытекало, что если сила равна нулю, то и скорость должна обратиться в нуль, иными словами, если устранить двигатель, то прекратится и насильственное движение, а если движение существует, то должна существовать и вызывающая это движение сила. Был один вопрос, который ставил в тупик Аристотеля: каким образом объяснить движение выпущенной из лука стрелы, откуда взять силу, необходимую для этого движения? Аристотель выходил из затруднения при помощи предположения, что стрелу несет воздух, приведенный в движение спущенной тетивой, причем факт возмущения воздуха устанавливался на основании наличия звука, получавшегося при спуске тетивы (о том, что звук есть движение воздуха, Аристотелю уже было известно). Для полета стрелы это объяснение еще годилось с грехом пополам, но уже объяснить таким образом движение камня, брошенного катапультой, было совершенно невозможно. Таким образом, аристотелевское определение силы было отброшено.

Какое же определение пришло ему на смену? Ввиду почти полного исчезновения эллинистической литературы приходится это определение устанавливать филологическим путем, исследуя сочинения более поздних авторов, главным образом комментаторов Аристотеля. У одного из таких комментаторов, а именно Александра Афродизского, жившего около 200 г. н. э., основатель современной динамики Галилей нашел, что знаменитый астроном древности Гиппарх (около 150 г. до н. э.), работавший и в области механики, объяснял движение брошенного тела следующим образом: двигатель сообщает брошенному телу некоторую «силу», которая поддерживает движение, постепенно расходуясь; когда эта «сила» полностью иссякнет, движение прекращается. Вряд ли можно считать, что Гиппарх действительно является автором такого определения силы; ведь механика не была его основной специальностью, и по всей вероятности, он просто воспроизводит обычное в его эпоху определение силы. Естественность этого определения бросается в глаза: если аристотелевское определение еще живет до сих пор в нашей «лошадиной силе», то эллинистическому определению соответствует современное понятие «живой силы», введенной германским математиком и философом Лейбницем. Чтобы привести тело в движение, надо произвести некоторую работу; эта работа переходит в кинетическую энергию движущегося тела, измеряемую половиной произведения массы его на квадрат скорости; когда сообщенная телу кинетическая энергия иссякнет, скорость тела обратится в нуль и оно остановится. При стрельбе из катапульты кинетическая энергия брошенного камня получается за счет потенциальной энергии, накопленной в упругом тяже; при одинаковой степени напряжения тяжа потенциальная энергия будет пропорциональна объему последнего, и механики эллинистической эпохи это знали. В пояснениях к своему методу решения задачи об удвоении куба Эратосфен совершенно определенно говорит о том, какое значение эта задача имеет для конструкторов метательных орудий.

Интересно отметить, что в XIV—XV веках н. э. после появления огнестрельной артиллерии эллинистическое определение силы возродилось у итальянских инженеров (в частности, оно имеется у Леонардо да Винчи) под именем «импето» или импульса — одинаковые причины порождают и одинаковые следствия. Можно думать, что в какой-то степени имел о нем понятие и сам Аристотель: по крайней мере только так можно рационально объяснить встречающиеся в его физических произведениях места, касающиеся соотношений между «величинами» движущего и движимого тел.

Во всяком случае Архимед как конструктор метательных машин должен был знать это определение; если оно не оставило никакого следа в дошедших до нас его механических сочинениях, то это может быть объяснено очень просто: исходя из одного этого определения нельзя было построить количественной теории движения тел, как это и не удалось ни итальянским инженерам, ни даже самому Леонардо да Винчи. Выражаясь формально, в аристотелевском выражении для силы:

$$F = \frac{P \cdot S}{T},$$

эллинистическое определение зачеркнуло только стоящую в знаменателе букву T. Для создания современной динамики надо было зачеркнуть и стоящее в числителе S и рассмотреть движение, получающееся под действием одной только силы веса. Это было сделано только Галилеем, давшим законченное решение не только задачи о свободном падении тел, но и о движении тела, брошенного с некоторой скоростью под углом к горизонту.

Во всяком случае Архимед, насколько мы знаем, занимался решением таких вопросов античной техники, которые поддавались математической обработке. Существенная разница между современной и античной техникой заключается в следующем. Для нас в настоящее время не является проблемой получение мощностей в несколько десятков тысяч лошадиных сил и даже более, но в наших конструкциях мы принуждены очень сильно экономить материалы, не тратить их более того, что является строго необходимым: за этим следит созданная еще во времена Галилея специальная отрасль механики — сопротивление материалов. В античном мире положение было как раз обратным: постройки античного времени не требовали экономии материала, но зато в области двигательной силы наибольшей мощностью, которую могли получить древние, была мощность в одну слоновую силу, да и та применялась только в военном деле. Поэтому основной задачей античной техники было получение большой силы при помощи небольшой. Эту задачу древние решали при помощи машин.

Из законов для двух основных видов простых машин — рычага и наклонной плоскости — древние знали только законы равновесия рычага (законы равновесия сил на наклонной плоскости были установлены только в Западной Европе в XIII веке н. э.).

Состояние античной техники в эпоху, предшествующую Архимеду, мы можем представить себе по «Механическим проблемам», приписываемым Аристотелю и во всяком случае вышедшим из его школы. Из них мы можем видеть, что в то время были хорошо известны закон параллелограмма скоростей, законы действия рычага и их приложения, хотя не всегда правильные. Так, например, автор «Механических проблем» на основании закона рычага объяснял, почему корабль может получить большую скорость при увеличении высоты мачты, несущей паруса. Правда, нельзя считать это сочинение охватывающим всю область античной механики (в нем полностью отсутствует военная техника), но все-таки оно оставляет впечатление чего-то достаточно примитивного. Единственным установленным количественным отношением является закон обратной пропорциональности между плечами рычага и приложенными к их концам грузами. Автор даже пытается доказать этот закон математически, но его доказательство нельзя признать ни ясным, ни верным.

Что же было внесено в механику Архимедом в ранний период его деятельности до того времени, когда им были написаны знаменитые послания к Досифею? О ранних произведениях Архимеда мы можем составить себе некоторое представление по дошедшим до нас отрывкам. Одним из таких произведений является какое-то не дошедшее до нас сочинение по механике, точное название которого не установлено: то ли это «О рычагах», то ли просто «Механика». Составить себе представление об этом сочинении можно по сохранившимся из него фрагментам, имеющимся у позднейших авторов, а также и у самого Архимеда.

Стержневым понятием всей статики Архимеда является понятие о центре тяжести, которое, по всей видимости, и было установлено самим Архимедом. Архимедово определение центра тяжести мы находим в «Математической библиотеке» Паппа Александрийского, жившего в конце III века н. э., где оно сформулировано так:

«Центром тяжести каждого тела является некоторая расположенная внутри его точка — такая, что если за нее мысленно подвесить тело, то оно остается в покое и сохраняет первоначальное положение».

Понятие о центре тяжести сложилось у Архимеда, вероятно, на основании чисто практических исследований о распределении давления груза между поддерживающими его опорами. В недавно открытой в арабском переводе «Механики» Герона Александрийского (жившего в первом веке нашей эры) * находятся некоторые отрывки из сочинения Архимеда под названием «Книга опор». Из этих отрывков можно видеть, что Архимед определял давление тяжелых балок на опоры путем разложения на параллельные силы веса балки, сосредоточенного в ее центре тяжести. В случае балки, лежащей на двух опорах, Архимед получал совершенно правильное решение, если только опоры находились по концам балки. В случае так называемой консольной балки (когда часть последней свободно висит в воздухе) он не был таким счастливым, а в случае балки, лежащей на трех опорах, его рассуждения приводили к неверному выводу, что средняя опора несет половину веса всей балки независимо от того, где эта опора будет находиться.

Удивляться этому не приходится: при сравнительно небольших масштабах греческих сооружений не было нужды добиваться точных значений для давлений на опоры. В этой связи интересно отметить, что даже Леонардо да Винчи всегда ошибался при определении давлений на опоры и подставки, хотя натяжения веревок под тяжестью данного груза определялись им совершенно правильно; что же касается многоопорной балки, то правильное решение этой задачи было получено только в XVIII веке после работ Эйлера.

6. ГРЕЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА

После рассмотрения ранних механических работ Архимеда мы переходим к его основным математическим работам. Подобно тому как мы это сделали для механики, мы начнем с того, что познакомим читателей с основными линиями развития и характерными чертами греческой математики, важными для понимания творчества Архимеда.

* Имя Герона должно быть известно ученикам средней школы и из уроков физики (Геронов фонтан) и из уроков математики (знаменитая формула для площади треугольника $S = \sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)}$; правда, в действительности она была выведена не Героном, а Архимедом. Сам Герон, приводя эту формулу, не говорит, что она была выведена им самим, а вывод Архимеда может быть восстановлен на основании недавно открытой в арабском переводе «Книге о семиугольнике».

Одной из основных целей первоначального развития математики (или, пожалуй, лучше будет сказать — геометрии) было определение площадей и объемов геометрических фигур тел. В математике народов древнего Востока — египтян и вавилонян — накопилось большое количество полуэмпирических правил для определения площадей и объемов.

В настоящее время является общепризнанным, что греки были в достаточной степени знакомы с математическими результатами древних египтян и вавилонян. Однако колоссальным достижением греческого гения было то, что греки свели математические открытия Востока в единую, строго логически обоснованную систему математических теорем.

Честь создания логически обоснованной, стройной математической системы сами греки приписывали легендарному мудрецу Пифагору Самосскому (вторая половина VI века до н. э.). Нам очень трудно выяснить, какие именно математические теоремы принадлежат самому Пифагору, личность которого покрылась легендами уже скоро после его смерти, но составить себе представление о математике ранней пифагорейской школы мы в состоянии.

Когда дело идет об определении длины какой-нибудь линии, то мы представляем себе ее составленной из километров, метров, сантиметров, миллиметров и т. д., во всяком случае из целого числа каких-нибудь достаточно мелких единиц; это число и определяет длину измеряемой линии. Чем меньше соответствующие части, тем более точно будет нам известна длина этой линии. Что случится, если мы будем все время подразделять линию на все более и более мелкие части? Последние через некоторое время сделаются настолько мелкими, что обратятся в точки; таким образом, получается представление, что каждая линия состоит непременно из целого числа точек.

Аналогично мы можем мыслить, что площадь какой-нибудь плоской фигуры составлена из прилегающих друг к другу весьма тонких линий, каждая из которых в свою очередь состоит из точек. Если рассматриваемая площадь будет прямоугольником, то все составляющие его линии будут иметь одинаковую длину и, следовательно, одинаковое количество точек. Перемножая число линий на число точек, содержащихся в каждой линии, мы получаем число точек во всем прямоугольнике; таким образом, площадь последнего определяется как произведение основания прямоугольника на его высоту. Аналогично для вычисления объема какого-нибудь тела мы можем разложить его на ряд весьма тонких пластинок — сечений; в случае прямоугольного параллелепипеда объем последнего будет определяться как произведение трех чисел, выражающих его измерения.

После определения площади прямоугольника или вообще параллелограмма, мы можем определить площадь треугольника, как половину площади соответствующего прямоугольника, а затем и вообще площадь любой прямолинейной фигуры. При помощи средней пропорциональной мы можем площадь любого прямоугольника представить как площадь равновеликого ему квадрата, а при помощи теоремы Пифагора сумеем получать квадраты, площади которых будут равны сумме или разности площадей двух заданных квадратов, а следовательно, сможем всегда построить квадрат, площадь которого будет равна площади заданной прямолинейной фигуры. Обратно, если нам дан некоторый квадрат y^2 и заданная длина a, то мы всегда сможем найти такую длину x, чтобы прямоугольник, построенный на сторонах a и x, равнялся заданному квадрату y^2. Операция определения этой длины x, соответствующая нашему делению $x = \frac{y^2}{a}$, носила у греков название «параболе» — приложение.

Однако представление, что каждая линия состоит из целого числа точек, уже очень скоро при логическом обосновании греческой математики встретилось с большими затруднениями. Возьмем квадрат со стороной, равной единице; диагональ этого квадрата, как известно, будет равна $\sqrt{2}$. Если каждая линия состоит из целого числа точек, то диагональ квадрата должна быть соизмеримой с его стороной; иными словами, $\sqrt{2}$ должен изображаться некоторой дробью с целым числителем и знаменателем.

Однако уже пифагорейские математики сумели убедиться в том, что это невозможно; более того, на основании некоторых указаний, содержащихся в произведениях Аристотеля, мы в состоянии восстановить общий ход их рассуждений.

Предположим, что $\sqrt{2}$ равняется некоторой дроби $\frac{a}{b}$, которую мы всегда можем считать несократимой. В таком случае или оба числа a и b, или по крайней мере одно из них должно быть нечетным. Предположим, что нечетным будет a. Тогда из равенства $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ следует: $2b^2 = a^2$. Так как квадрат нечетного числа будет тоже нечетным, то в правой части мы будем иметь нечетное число, а в левой четное, что невозможно. Пусть теперь a будет четное число, равное $2c$, а b нечетное. Повторяя аналогичные рассуждения, приходим к равенству $2b^2 = (2c)^2$, или после сокращения $b^2 = 2c^2$, т. е. опять нечетное число будет равно четному. Таким образом, мы приходим к выводу, что $\sqrt{2}$ не может выражаться никакой рациональной дробью.

Открытие иррациональности $\sqrt{2}$ имело громадное значение для дальнейшего развития греческой математики. Мы не можем точно вычислить длину диагонали квадрата, но зато построение ее не представляет никаких затруднений. Это обстоятельство способствовало тому, что в дальнейшем развитии греческой математики построения стали преобладать над вычислениями; греческая математика приобрела преимущественно геометрический характер. Арифметическая математика пифагорейцев получила тяжелый удар; сохранилась даже легенда, что геометр Гиппас, разоблачивший «секрет иррациональности» квадратного корня из двух, в наказание за свое преступление погиб во время кораблекрушения.

В противовес пифагорейской философии, которую можно назвать основанной на *математическом атомизме*, возникла элейская философия, подчеркивавшая единство и непрерывность строения мира. Один из представителей этой школы Зенон Элейский (V век до н. э.) впервые выдвинул понятие о бесконечности в четырех парадоксах, направленных, как показал французский историк математики Поль Таннери, против самой идеи делимости. Ввиду большого математического значения этих парадоксов остановимся на них более подробно.

Мы можем говорить о бесконечной или конечной делимости пространства. Первые два парадокса направлены против идеи бесконечной делимости.

Прежде чем пройти какое-нибудь расстояние полностью, человек должен пройти половину его, одну четверть, одну восьмую и т. д., т. е. бесконечно большое множество конечных частей этого расстояния, иными словами, он совсем не может начать движения. В этом заключается первый парадокс Зенона.

Второй парадокс, известный под названием «Ахиллес и черепаха», представляет своего рода обращение первого; если в первом доказывается, что движение не может начаться, то во втором — что оно не может кончиться: быстроногий Ахиллес не может догнать черепахи. Пусть Ахиллес бежит в десять раз быстрее черепахи, которая находится впереди него на некотором расстоянии; примем последнее за единицу. Когда Ахиллес пройдет это расстояние, то черепаха будет впереди него на $\frac{1}{10}$ этого расстояния; когда Ахиллес пройдет эту десятую часть, то черепаха будет впереди него на одну сотую, и т. д.; иными словами, при бесконечной делимости пространства всегда между Ахиллесом и черепахой будет какая-нибудь часть первоначального расстояния.

Мы опровергаем этот парадокс, подсчитывая расстояние, которое Ахиллес должен пройти до встречи с черепахой; оно будет равно $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots=1{,}111\cdots=1\frac{1}{9}$ первоначального расстояния. Однако это рассуждение, показывая, что Ахиллес может догнать черепаху и когда он ее догонит, ничего не говорит о том, *как* он это может сделать. Для того чтобы пояснить это, возьмем пример из современной практики. В настоящее время мы имеем счетные машины, которые могут очень быстро производить вычисления. Представим себе такую машину, которая первое действие выполняет в одну минуту, второе в полминуты, третье в четверть минуты и т. д. Всякий скажет, что такую машину построить невозможно, потому что она в две минуты выполнила бы бесконечное множество вычислений, соответствующее натуральному ряду чисел, который не имеет конца.

Мы можем решить второй парадокс Зенона, предположив, что пространство не делимо до бесконечности и существуют наименьшие атомы пространства; тогда мы можем сказать, что Ахиллес догонит черепаху, когда он будет вместе с ней находиться в одном и том же атоме пространства. Против такого предположения Зенон выставил два своих последних парадокса, введя дополнительно идею о том, что время, так же как и пространство, составляется из отдельных наименьших моментов времени. Каким же образом выделять эти моменты времени? Можно предположить, что каждый момент времени определяется нахождением движущегося тела в данной точке — атоме пространства. Против этого предположения Зенон выдвигает третий парадокс со стрелой. Если в течение хотя бы и очень малого, но все же имеющего некоторую конечную величину момента времени летящая стрела находится на одном и том же месте — атоме пространства, то это значит, что в рассматриваемое время стрела стоит на месте, т. е. не двигается.

Можно предположить, что момент времени соответствует переходу из одного атома пространства в другой. Тогда Зенон выдвигает четвертый парадокс — так называемых стадий *. Суть этого парадокса можно пояснить следующим примером. Предположим, что рядом стоят два поезда с одинаковой длины вагонами; длина одного вагона соответствует атому пространства, а время прохождения поездом расстояния, равного длине одного вагона, соответствует атому (моменту) времени. Если один поезд стоит, а другой проезжает мимо него, то в этом времени последний продвигается на атом пространства; если же первый поезд движется навстречу второму с такой же скоростью, то в один атом времени второй поезд пройдет расстояние, соответствующее длине двух вагонов, т. е. двух атомов пространства; иными словами, согласно определению, атом времени распадается на два, т. е. оказывается делимым, что противоречит основной предпосылке.

Эти остроумные парадоксы Зенона показывают, как осторожно надо обходиться с понятием о бесконечности и с делимостью пространства.

При помощи математического атомизма иногда удавалось достигнуть весьма ценных научных результатов. В качестве примера можно рассказать о том, как вели-

* Стадий или стадион — место бегов.

кий материалист древности Демокрит, основатель учения об атомах вещества, определял объем пирамиды или конуса.

7. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

Древние египтяне и вавилоняне знали, что объем квадратной пирамиды, боковые грани которой образуют с основанием углы в 45°, равен, выражаясь нашим языком, одной трети произведения основания на высоту, и умели даже определять объем усеченных пирамид такого же вида. Можно составить представление о том пути, по которому они шли для получения этого результата. Изображенный на рисунке 6 куб $ABCDEFGH$ может быть разделен на три одинаковые пирамиды с квадратными основаниями $EABCD$, $EBFGC$ и $ECDHG$; таким образом, для полученных пирамид доказываемая теорема становится очевидной, а после этого, составляя вместе четыре пирамиды $EABCD$, можно будет доказать теорему и для пирамиды, высота которой будет равна EA, а основание — учетверенный квадрат $ABCD$; в этом основании точка A является центром, т. е. точкой, в которую падает высота EA. В общем же случае, когда в основании пирамиды лежит не квадрат, или боковые грани не образуют с основанием углов в 45°, теорема оставалась недоказанной; честь первого доказательства ее принадлежит Демокриту.

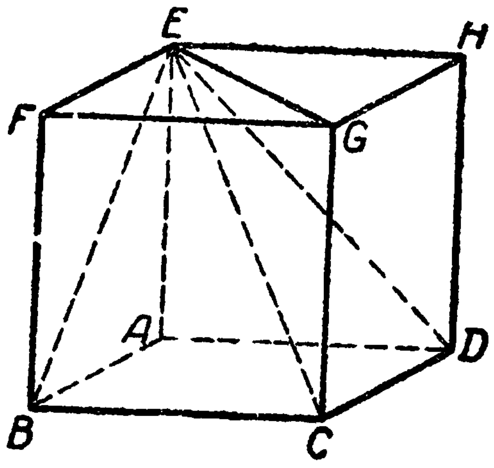


Рис. 6.

Для того чтобы провести это доказательство полностью, нужно знать формулу, определяющую сумму квадратов n первых натуральных чисел. Эта формула находится в вавилонских математических текстах, правда, по времени относящихся к эпохе более поздней, чем эпоха Демокрита, но весьма возможно, что эта формула была получена в более раннюю эпоху; вопрос, получил ли эту формулу Демокрит от вавилонян или нашел ее сам, для нас существенного значения не имеет. Во всяком случае, поскольку нахождение суммы квадратов натуральных чисел не проходится в курсе средней школы, вывод соответствующей формулы не будет лишним.

Метод, которым соответствующая формула была получена древними вавилонянами, был восстановлен проф. С. Я. Лурье.

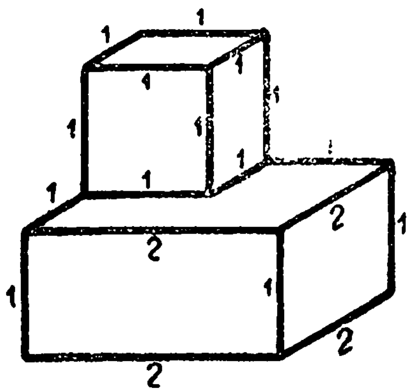


Рис. 7.

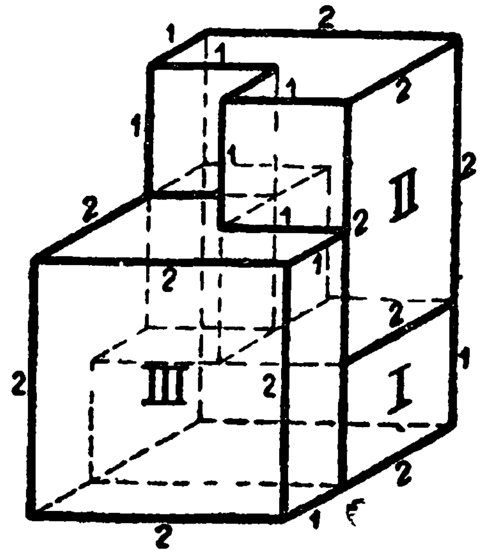


Рис. 8.

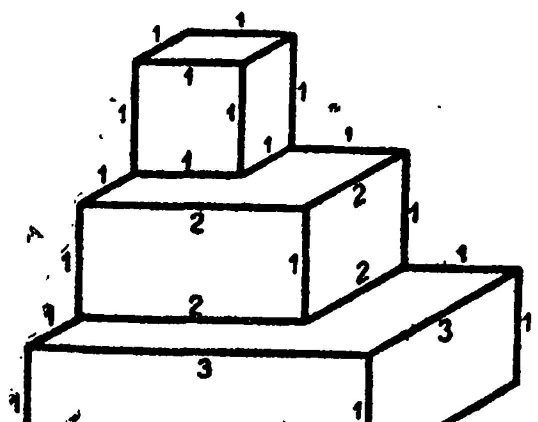


Рис. 9.

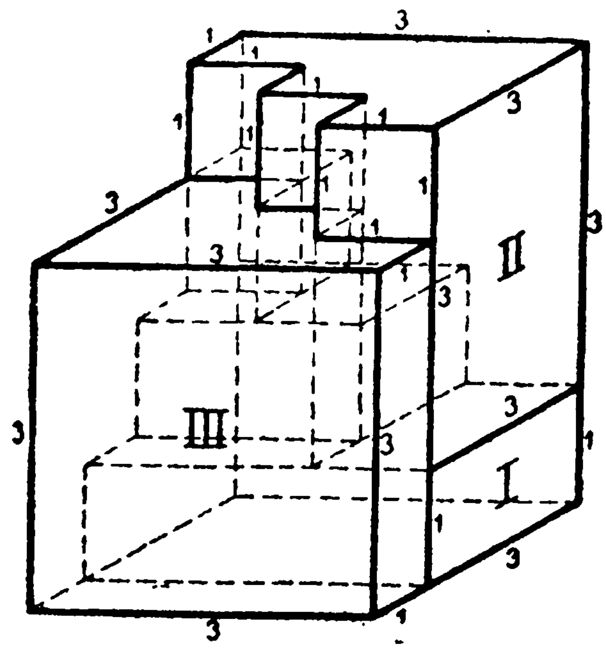


Рис. 10.

Сумму $1^2 + 2^2$ можно представить в виде ступенчатой пирамиды из двух слоев, имеющей в нижнем слое четыре кубика, а в верхнем один (рис. 7). Возьмем три таких пирамиды и сложим их вместе, как показано на рис. 8; тогда утроенную сумму $1^2 + 2^2$ мы можем рассматривать как состоящую из куба со стороной 2, к которому спереди приставлена квадратная призма, состоящая из четырех кубиков, а сверху положено $1 + 2$ кубика. Таким образом, мы получаем:

$$3(1^2 + 2^2) = 2^3 + 2^2 + (1 + 2)$$

Аналогично этому, сумму кубов $1^2 + 2^2 + 3^2$ мы можем представить в виде ступенчатой пирамиды, изображенной на рис. 9. Сложим три таких пирамиды, как показано на рис. 10; мы получим, что утроенная сумма $1^2 + 2^2 + 3^2$ равняется кубу со стороной 3, к которому спереди приставлена квадратная призма из девяти кубиков, а сверху положено $1 + 2 + 3$ кубика. Таким образом:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2) = 3^3 + 3^2 + (1 + 2 + 3)$$

Поступая таким образом дальше, получаем общую формулу:

$$3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = n^3 + n^2 + (1 + 2 + \cdots + n),$$

или:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^3 = \frac{1}{3}\left\{n^3 + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}\right\}.$$

После этого мы можем перейти к определению объема пирамиды или конуса. Разобьем высоту h рассматриваемого тела на n равных достаточно малых частей толщины Δh, тогда мы можем рассматривать его как составленное из ряда весьма тонких пластинок толщиной Δh. Так как площади оснований этих пластинок относятся как квадраты высот, то, если обозначим коэффициент пропорциональности через k, будем иметь, что площади оснований этих пластинок будут:

$$k(\Delta h)^2, k(2\Delta h)^2, \ldots, k(n\Delta h),$$

а их объемы:

$$k(\Delta h)^2 \Delta h,\ k(2\Delta h)^2 \Delta h, \ldots, k(n\Delta h)^2 \Delta h.$$

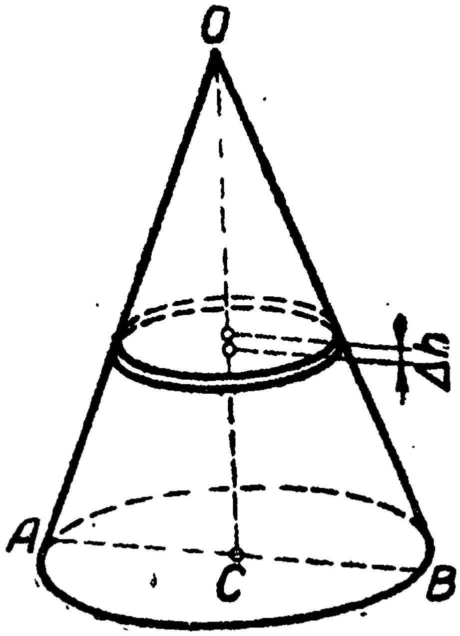


Рис. 11.

Таким образом, объем рассматриваемого конуса или призмы представится в виде суммы:

$$V = k(\Delta h)^2 \Delta h + k(2\Delta h)^2 \Delta h + \cdots + k(n\Delta h)^2 \cdot \Delta h =$$
$$= k(\Delta h)^3 (1 + 2^2 + \cdots + n^2) =$$
$$= k(\Delta h)^3 \cdot \frac{1}{3}\left\{n^3 + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{3} n\Delta h \cdot k(n\Delta h)^2 + \frac{1}{3}\left\{n^2 + \frac{n(n+1)}{2}\right\} k(\Delta h)^3.$$

Так как $n\Delta h = h$, а $k(n\Delta h)^2 = S$ — площади основания конуса, то первый член во второй части формулы обращается в $\frac{1}{3} Sh$, а второй принимает вид:

$$\frac{\Delta h}{3}\left\{S + \frac{S}{2} + kn\Delta h\right\}.$$

Пренебрегая этим членом в виду малости Δh, мы получаем:

$$V = \frac{1}{3} Sh.$$

Теперь формула объема является доказанной для всякой пирамиды независимо от вида ее основания и наклона боковых граней. Правда, отбрасывание второго слагаемого позволяет усомниться в ее точности, не говоря уже о том, что по существу мы определяли объем не обыкновенной пирамиды или конуса, а скорее ступенчатой. Можно думать, что этот недостаток сознавал уже сам Демокрит, но во всяком случае Архимед отдавал должное Демокриту как первому математику, определившему объем пирамиды, хотя настоящее доказательство, по словам Архимеда в «Эфодике», было дано только Евдоксом.

8. МЕТОД ИСЧЕРПАНИЯ ЕВДОКСА

В лице Евдокса Книдского (ок. 410—356 гг. до н. э.) мы встречаемся с одним из величайших математиков древности. Это был человек, настолько опередивший свое время, что его значение было как следует понято только во второй половине XIX века, когда был произведен критический пересмотр оснований математики. Результаты его работы дошли до нас в изложении Евклида (пятая и отчасти шестая книга, а также вторая половина одиннадцатой и вся двенадцатая книга «Начал»). Далее, Евдокс был первым человеком, который создал кинематическую модель, воспроизводившую запутанные видимые движения планет вокруг Земли (гомоцентрические сферы Евдокса). В настоящее время нас интересует только чисто математическое наследство Евдокса, сохранившееся в перечисленных книгах «Начал» Евклида.

В пятой книге «Начал» мы имеем распространение теории отношений на случай несоизмеримых величин. Для соизмеримых величин a и b, отношение которых равнялось рациональной дроби $\frac{m}{n}$, равенство отношений выражается простой пропорцией:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n},$$

или соотношением:

$$na = mb.$$

Для несоизмеримых величин, отношение которых к единице не могло быть выражено ни целым числом, ни рациональной дробью, этот путь был, конечно, закрыт, но вместе с тем, поскольку никаких других чисел, кроме целых и рациональных, в распоряжении греческой математики не было, приходилось отношение несоизмеримых величин выражать именно при помощи этих чисел. В качестве признака, или определения равенства отношений двух несоизмеримых величин, Евдокс воспользовался второй формой, в которой мы выражали выше равенство отношений. Он назвал отношения величин a и b, а также c и d равными, если для всякой пары чисел m и n, удовлетворяющей одному из соотношений:

$$na > mb, \quad na = mb, \quad na < mb,$$

имеет место аналогичное соотношение из ряда:

$$nc > md, \quad nc = md, \quad nc < md.$$

Если все такие равенства справедливы, то можно утверждать, что:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

При этом Евдокс высказал необходимое условие, при котором можно было говорить об отношении двух величин. Эти величины должны, конечно, быть однородными (т. е. обе должны быть или длинами, или углами, или площадями и т. д.) и, кроме того, такими, что для двух величин a и b, где $a > b$, мы всегда могли бы подобрать такое число n, чтобы меньшая величина b, повторенная слагаемой n раз, могла бы превзойти большую:

$$nb > a.$$

Последнее требование представляется нам почти что ненужным в виду своей как будто бы очевидности; однако можно показать, что в глазах Евдокса это требование имело определенный смысл.

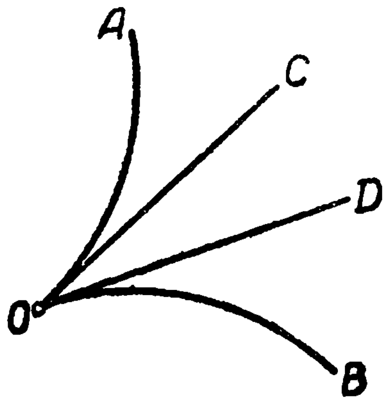


Рис. 12.

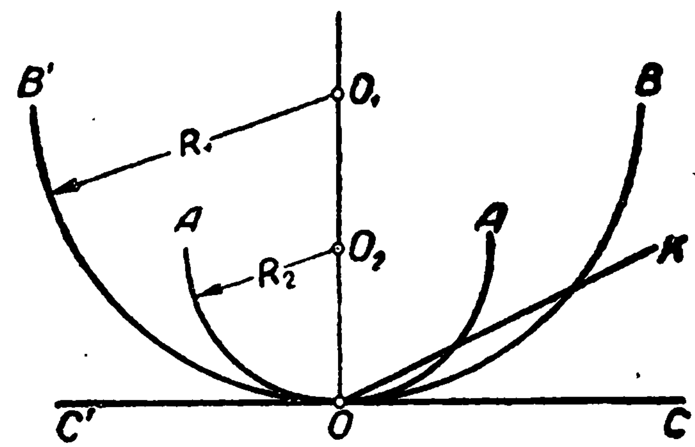


Рис. 13.

В некоторых старых учебниках геометрии встречалось такое определение угла:

Углом называется часть плоскости, заключенная между двумя прямыми линиями.

Если мы определяем угол как часть плоскости, то ничто не мешает нам говорить о криволинейных углах, сторонами которых являются не прямые, а кривые линии, например об угле AOB (рис. 12), образованном двумя пересекающимися кривыми AO и BO. Проведя в точке O касательные OC и OD к обеим кривым, мы всегда можем рассматриваемый криволинейный угол представить в виде суммы (или разности) прямолинейного угла COD и двух углов AOC и BOD, которые данные кривые образуют со своими касательными. Будем называть эти углы рогообразными и поставим вопрос о способе измерения этих углов. Так как небольшую часть любой кривой можно всегда заменить некоторой окружностью, то в дальнейшем мы можем ограничиться рассмотрением лишь рогообразных углов, одной стороной которых является окружность.

На рис. 13 изображено несколько таких окружностей, имеющих общую касательную. Угол BOC имеет одной стороной окружность с центром O_1 и радиусом R_1, угол AOC — окружность с центром O_2 и радиусом R_2. Так как кривизна окружности AOA_1 больше кривизны окружности BOB_1, то мы считаем, что угол AOC будет больше угла BOC. В таком случае естественно принять за меру каждого угла кривизну образующей его окружности, т. е. обратную величину ее радиуса. Положим, что R_2 вдвое меньше R_1; тогда, согласно нашему условию, мы будем считать, что угол AOC будет вдвое больше угла BOC. Если мы разделим отрезок OO_2 пополам и из полученной точки как из центра опишем окружность, проходящую через точку O, то образованный ею рогообразный угол будет в четыре раза больше угла BOC. Проводя через точку O окружности с еще меньшими радиусами, например с радиусом $\frac{R_1}{n}$, мы будем получать рогообразные углы, в любое число n раз превышающие угол BOC, но как бы мы ни увеличивали число n, мы никогда не сможем получить рогообразного угла, который был бы больше любого даже очень малого прямолинейного угла KOC, имеющего ту же вершину O и сторону OC. Таким образом, криволинейные и прямолинейные углы, хотя, по-видимому, и принадлежат к одному роду величин, но не могут стоять ни в каком отношении между собой. Этим объясняется то, что криволинейные углы, которыми первоначально занималась греческая геометрия (небольшие следы их употребления заметны в определениях и некоторых теоремах третьей книги «Начал» Евклида), в дальнейшем исчезли из греческих математических произведений.

Мы уже говорили, что пифагорейцы умели определять площади и объемы фигур и тел, ограниченных прямыми линиями и плоскостями. После этого перед греческой математикой, естественно, встала следующая задача — определение площадей и объемов тел, ограниченных кривыми линиями и поверхностями. Простейшей задачей такого рода была задача о квадратуре круга — построении квадрата, площадь которого равнялась бы площади заданного круга. Эту задачу, по-видимому, поставил Гиппократ Хиосский, автор первого сводного учебника по геометрии типа Евклидовых «Начал» (вторая половина V века до н. э.). Ему удалось в трех случаях найти прямолинейную площадь, равновеликую некоторой, ограниченной дугами кругов (так называемые гиппократовы луночки). Но до полного решения поставленной задачи было еще далеко. Стоящие на точке зрения математического атомизма геометры предлагали вписать в круг правильный многоугольник и, постепенно удваивая число его сторон, так сказать, «исчерпать» его, считая, что при достаточно большом числе сторон многоугольника, периметр последнего вполне совпадет с обводом окружности, после чего остается лишь превратить полученный многоугольник в квадрат. Это имеется в виду, когда мы говорим, что круг есть правильный многоугольник с бесконечно большим числом сторон. Этот метод вполне годится для приближенного решения поставленной задачи (Архимед воспользовался им при вычислении приближенного отношения длины окружности к диаметру), но для точного решения он не пригоден.

В этом отношении большой интерес представляют идеи знаменитого философа Анаксагора (вторая половина V века), друга Перикла, первого зачинателя философских занятий в Афинах. Мы знаем, что Анаксагор занимался квадратурой круга. Математические произведения его до нас не дошли, хотя бы даже и в отрывках, но мы можем составить представление об его геометрических идеях, рассматривая его философские теории.

Анаксагор является в философии в некоторой степени противоположностью Демокриту. Последний считал, что делимость вещества имеет некоторые пределы; в результате деления мы приходим к частицам — атомам, которые являются уже неделимыми. Это воззрение Демокрита на строение вещества позднее легло в основу молекулярно-атомного учения. В противоположность этому Анаксагор считает, что вещество можно делить до бесконечности. Как бы далеко мы ни вели деление вещества, например мяса, получающиеся при этом мельчайшие частички все равно будут мельчайшими частичками мяса. Эта теория кажущаяся нам настолько нелепой, что мы даже затрудняемся высказать предположение о том, как Анаксагор пришел к ней, становится совершенно ясной, если мы переходим на математическую почву. Она представляет ответ на вышеприведенную методику получения квадратуры круга: как бы далеко мы ни проводили деление окружности на части, мы всегда будем получать дуги окружности, но ни в коем случае не прямые линии или точки.

Введенная Анаксагором идея о неисчерпаемости бесконечности легла в основу метода Евдокса определения площадей и объемов, метода, который не совсем правильно называется методом исчерпания. Для получения точного доказательства, устраняющего всякую идею о бесконечных процессах, пришлось идти обходным путем; вместо того чтобы, например, доказывать, что объем конуса или пирамиды равняется одной трети произведения основания на высоту, приходится доказывать, что он не может быть ни больше, ни меньше указанной величины.

В одиннадцатой и двенадцатой книгах «Начал» Евклида методом Евдокса доказываются следующие теоремы:

1°. Площади двух кругов относятся как квадраты диаметров.

2°. Объемы двух треугольных пирамид с равными высотами относятся как площади оснований.

3°. Конус равен третьей части цилиндра с теми же основанием и высотой.

4°. Объемы двух равновысоких конусов или цилиндров относятся как площади их оснований.

5°. Объемы подобных конусов или цилиндров относятся как кубы их диаметров.

Разберем доказательство первой теоремы, сопоставляя рассуждения Евдокса с современным доказательством.

Мы доказываем, что площадь круга является пределом для площадей вписанных и описанных многоугольников при неограниченном удвоении их сторон. Евдокс, опираясь на лемму о том, что если от некоторой величины отнять больше половины, от остатка тоже отнять более его половины и делать так постоянно, то можно получить остаток, меньший любой заданной величины, доказывает, что разность между площадью круга и площадью вписанного в него многоугольника может быть сделана меньше любой величины при неограниченном удвоении числа сторон многоугольника; действительно, площадь треугольника, вписанного в какой-нибудь сегмент, больше половины площади этого сегмента и т. д.

Затем мы, а также и Евдокс, доказываем, что площади подобных многоугольников, вписанных в круги, относятся как квадраты диаметров этих кругов.

После этого мы замечаем, что если две переменные величины находятся все время в одинаковых отношениях, то в таких же отношениях будут находиться и их пределы, чем и заканчиваем наше доказательство. При этом наше исходное положение долгое время считалось почти аксиомой; лишь в середине XIX века пришли к заключению, что оно само нуждается в доказательстве. Евдокс в данном случае был умнее нас, и положение, равносильное вышеприведенному, он доказывает.

Отметим, что если две переменных величины находятся все время в постоянном отношении, то, не меняя общности рассуждений, мы можем считать это отношение равным единице; действительно, для этого достаточно будет умножить одну из этих переменных на это отношение*.

Теперь доказательство Евдокса может быть представлено в таком виде.

Мы имеем две последовательности величин (в нашем случае соответственно измененные площади вписанных в оба круга многоугольников с одинаковым числом сторон):

$$a_1\ a_2 \cdot \cdot \cdot a_n$$
$$b_1\ b_2 \cdot \cdot \cdot b_n,$$

причем все время сохраняется равенство:

$$a_n = b_n.$$

При увеличении n члены первой последовательности неограниченно приближаются к некоторой величине S_a, а члены второй последовательности — к величине S_b, причем члены каждой последовательности все время остаются меньше своих соответственных пределов. Требуется доказать, что в данном случае:

$$S_a = S_b.$$

---

* В нашем случае, если радиус одного круга в k раз больше другого, то мы множим на k^2 площади многоугольников, вписанных в меньший круг.

Предположим, что это неверно, но одна из них, например S_a, будет равна меньшей, чем S_b, величине T:

$$S_a = T < S_b.$$

При увеличении числа n обе последовательности будут неограниченно приближаться к своим предельным величинам, так что разность $S_b - b_n$ может быть сделана меньше любой заданной величины, например разности $S_b - T$; это значит, что при некотором n мы будем иметь:

$$b_n = T + \Sigma \quad (\Sigma > O).$$

Но $b_n = a_n$ и $T = S_a$; таким образом:

$$a_n = S_a + \Sigma,$$

что невозможно, поскольку переменная a_n все время изменения остается меньше величины S_a.

Таким образом, остается только предположение, что $S_b = S_a$.

Евдокс и его школа не ограничились областью, которая в настоящее время относится к элементарной математике: они положили начало теории кривых, которые теперь относят уже к ведению высшей математики; это так называемые конические сечения.

Греки имели два способа получения кривых: новые кривые получались или в результате движения точки, или в результате сечения некоторой поверхности. Первой кривой, полученной в результате движения, была так называемая квадратрисса, придуманная во второй половине V века софистом Гиппием Элидским для деления окружности на любое число равных частей и примененная позднее Динократом для выполнения квадратуры круга. Другой способ получения кривых был дан Евдоксом и его братом и учеником Менехмом: кривые получались в результате сечения плоскостью криволинейной поверхности. В IV веке были известны три криволинейные поверхности: шар, цилиндр и конус. Из этих поверхностей наиболее интересной для получения кривых методом сечения был конус. Если мы рассечем его плоскостью, перпендикулярной его оси, то в сечении получится окружность. Если мы наклоним секущую плоскость так, чтобы она пересекала все образующие конуса, то мы в сечении получим вторую кривую — так называемый эллипс. Если мы, продолжая наклонять секущую плоскость, сделаем ее параллельной самой дальней образующей, то в сечении получится новая кривая — парабола. Наконец, если мы будем еще дольше наклонять секущую плоскость, то получится еще одна кривая — так называемая гипербола *.

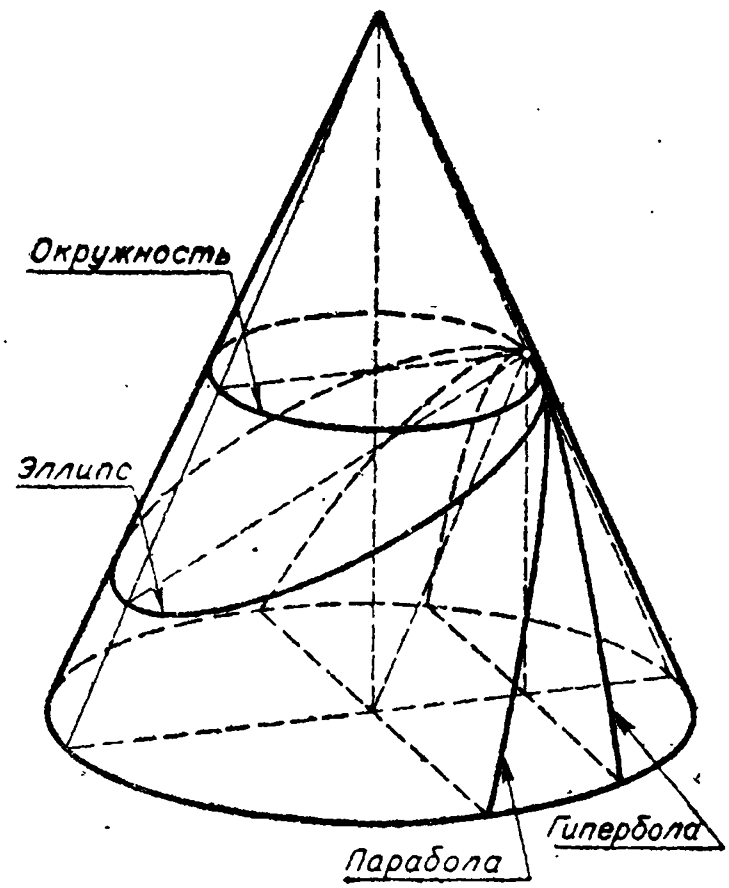


Рис. 14.

Для того чтобы объяснить современные названия рассматриваемых кривых, мы должны вернуться немного назад.

Мы называли «параболе» (приложение) определение

* Мы описали позднейший способ получения конических сечений. Во времена Архимеда все три новые кривые получались каждая в сечении особого конуса и секущая плоскость проводилась перпендикулярно к одной из образующих. Если наибольший угол между образующими в вершине конуса был острым, то в результате сечения этого так называемого остроугольного конуса плоскостью, перпендикулярной его образующей, получался эллипс. Если соответствующий угол в вершине был прямым, то в сечении такого прямоугольного конуса получалась парабола. Наконец, в сечении тупоугольного конуса получалась гипербола. Поэтому первоначально все эти три кривые носили название сечений остроугольного, прямоугольного и тупоугольного конусов.

такой прямой x, чтобы прямоугольник, построенный на этой и другой заданной прямой $2p$ был равновелик с площадью некоторого квадрата y^2:

$$y^2 = 2px.$$

Возьмем две взаимно-перпендикулярные прямые; по горизонтальной прямой Ox будем откладывать от точки O прямые $x = OA$, в полученных точках A будем восстанавливать перпендикуляры в обе стороны от прямой Ox и на них откладывать отрезки AC и AC_1, равные соотвествующим значениям y, определяемым из вышенаписанного уравнения. Получаемые таким образом точки C будут лежать на некоторой кривой, которая, как можно показать, и будет той самой параболой, которая получается при вышеописанном сечении конуса. Построив эту кривую для заданной прямой $2p$, мы можем легко выполнять «приложение» к ней любой площади, изображаемой заданным квадратом y, этим и объясняется то, что полученную кривую называют «параболой».

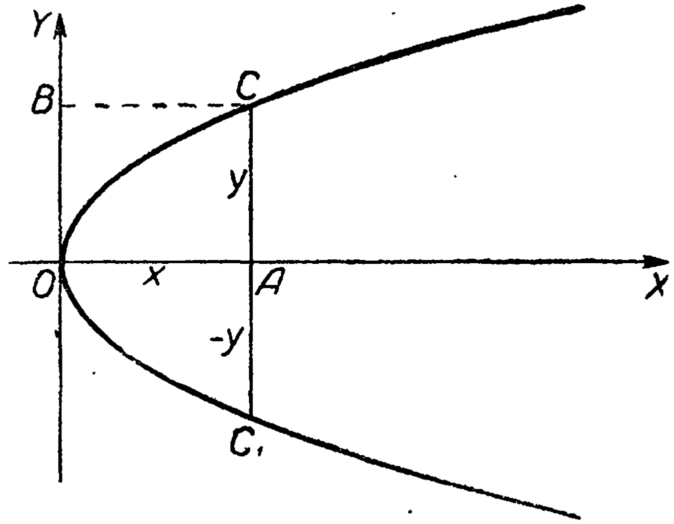


Рис. 15.

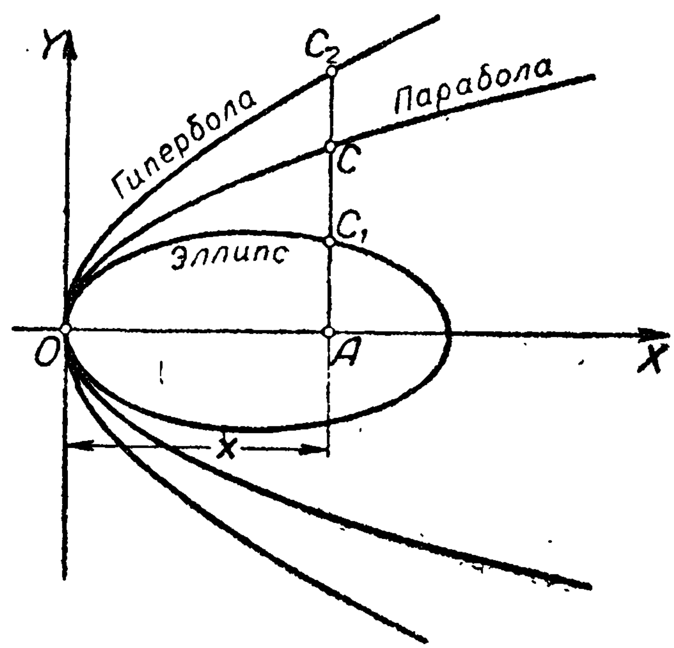


Рис. 16.

Построим теперь на тех же самых взаимно-перпендикулярных прямых остальные две кривые так, чтобы в точке O они имели общую касательную Oy и прямая Ox была общей осью симметрии для всех трех кривых (рис. 16). Если теперь мы отложим по оси Ox некоторый отрезок $OA = x$ и в полученной точке A восставим перпендикуляр AC_2, то последний пересечет наши кривые в точках C, C_1, C_2. Если обозначим отрезки AC, AC_1, AC через y, то для параболы будем иметь:

$$y^2=2px;$$

для эллипса получим:

$$y^2 < 2px,$$

или, если обозначить через k^2 некоторый положительный коэффициент:

$$y^2 =2px - k^2x^2,$$

иными словами «приложение» совершается с «недостатком» (по-гречески «эллипсом»), откуда и происходит название кривой. Для гиперболы мы будем иметь:

$$y^2 > 2px$$

или:

$$y^2 = 2px + k^2x^2;$$

«приложение» совершается с избытком «гиперболе», почему третье коническое сечение и называется гиперболой.

9. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ АРХИМЕДА

Теперь мы можем обратиться к рассмотрению того, что сделал Архимед в геометрии: к атомистике Демокрита и методу исчерпания Евдокса он, как истый инженер, добавил методы, основанные на механических соображениях.

Самое раннее из дошедших до нас полностью произведений Архимеда представляет первое послание к Досифею, ученику Конона, известное под названием «Квадратура параболы».

Это послание представляет соединение двух вполне самостоятельных работ, посвященных решению одной и той же задачи — нахождению площади параболического сегмента, отсеченного прямой, перпендикулярной к оси параболы. В первой работе задача решается механическим методом, представляющим собственное изобретение Архимеда, во второй Архимед дает чисто геометрическое решение задачи методом Евдокса.

Пусть требуется определить площадь параболического сегмента AOC, имеющего основание $AC = 2l$ и высоту $OF = h$, если соотношение между отрезками x и y для параболы определяется уравнением:

$$y^2 = 2px,$$

или:

$$x = \frac{1}{2p} y^2 = ay^2.$$

Архимед определяет площадь сегмента AOC; мы для большей простоты определим его методом площадь сегмента AOB, заключенного между прямой Oy, дугой параболы OA и прямой AB. Если $OB = y = l$, то, согласно основному уравнению, отрезок $x = BA$ будет равняться al^2.

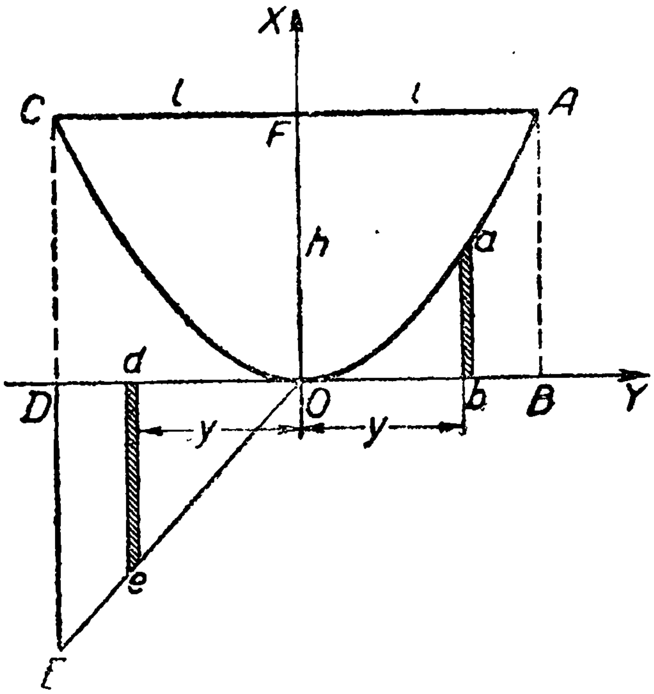


Рис. 17.

Вообразим равноплечий рычаг DOB, длины плеч которого равны l, подпертый в своей середине O. На плече OB расположим, как показано на рисунке, определяемую площадь AOB (рис. 17), которую будем считать тяжелой. Разобьем ее на ряд весьма тонких полосок шириной Δy, одна из которых ab, находящаяся на расстоянии y от точки O, изображена на рисунке. Площадь ΔS этой полоски равна:

$$\Delta S = x\Delta y = ay^2 \Delta y;$$

будем считать ее площадь равной весу.

Перенесем эту полоску на конец B рычага и постараемся уравновесить ее полоской, помещенной на левом плече рычага на таком же расстоянии y от точки O. Произведение силы на плечо, или, как говорят, момент для площадки ΔS, помещенной на конце B, взятый относительно опорной точки O, будет:

$$\Delta S \cdot l = aly^2 \Delta y.$$

Для того чтобы уравновесить эту площадку на плече y, надо в соответствующей точке d приложить полоску, площадь которой будет $aly\Delta y$, а высота $de = aly$. Если мы соберем все полоски ΔS на конце B рычага, уравновешивая каждую из них на левом плече, как было сделано выше, то высоты всех таких полосок расположатся по прямой OE (так как эти высоты пропорциональны расстояниям $Od = y$ от точки O) и все эти полоски сложатся в площадь треугольника ODE, основание OD которого равняется l, а высота DE получится, если в формуле для высоты aly мы положим $y = l$; таким образом:

$$DE = al^2.$$

Теперь мы видим, что вся площадь S сегмента OAB, сосредоточенная в точке B, уравновешивается площадью треугольника ODE, расположенного на левом плече OD рычага; величина этой площади $\frac{1}{2}\, OD \cdot DE = \frac{1}{2} al^2 \cdot l$, а расстояние центра тяжести этой площади от точки O, измеренное по горизонтали, будет $\frac{2}{3}\, OD = \frac{2}{3}\, l$. Составляя уравнение равновесия относительно опорной точки O рычага, будем иметь:

$$S \cdot l = \frac{1}{2}\, al^3 \cdot \frac{2}{3}\, l.$$

Заметим кстати, что это уравнение можно понимать так: момент относительно точки O площади S равняется моменту относительно той же точки площади треугольника ODE (в такой форме написанное уравнение — так называемое уравнение моментов — можно применять и тогда, когда к рычагу приложено несколько сил).

Из полученного уравнения мы видим:

$$S = \frac{1}{3}\, al^3 = \frac{1}{3}\, l \cdot al^2,$$

или:
$$S = \frac{1}{3}\, OB \cdot AB.$$

После этого уже нетрудно видеть, что площадь рассматриваемого Архимедом сегмента AOC равна $\frac{2}{3}$ площади прямоугольника $ABCD$.

Что касается строгого доказательства по методу Евдокса, то достаточно будет лишь указать общую его идею, чтобы не затруднять читателя техническими подробностями, еще более усложняющимися вследствие того, что Архимед, как и все древнегреческие математики, не имел нашей алгебраической символики; вместе с тем полностью опустить воспроизведение этого доказательства было бы нежелательно, так как это лишило бы нас возможности проследить за эволюцией математической методики Архимеда.

Примененный в «Квадратуре параболы» метод заключается в следующем:

Представляем нашу площадь S приближенно в виде суммы некоторой последовательности $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, члены которой представляют вписанные в параболический сегмент полоски (теперь уже конечной ширины при механическом способе доказательства) или ряд последовательно вписываемых треугольников — первый треугольник в заданный сегмент, затем еще два треугольника — в два сегмента, оставшиеся после вписывания первого треугольника, затем четыре — в четыре сегмента, оставшиеся после предыдущей пары, и т. д. Оказывается, что при подходящем выборе числа n разность $S - S_n$ может быть сделана меньше произвольно выбранной величины.

Затем определяется величина K, разность d которой с S_n была бы меньше последнего члена a_n последовательности:

$$S_n + d = K$$
$$d < a_n,$$

и высказывается утверждение, что $S = K$.

Доказательство ведется от противного: предположим, что S не равняется K; тогда или S будет больше K, или же меньше K.

Пусть $S > K$; тогда определяем такое число n, чтобы имело место неравенство:

$$S - S_n < S - K.$$

В таком случае $K < S_n$, что противоречит сделанному предположению.

Пусть теперь $S < K$; определяем такое число n, чтобы a_n было меньше разности $K - S$ и, следовательно:

$$d < K - S.$$

Тогда на основании равенства $d = K - S_n$ получаем:

$$K - S_n < K - S,$$

т. е. $S < S_n$, что противоречит сделанному определению. Таким образом, мы приходим к равенству $S = K$, которое нам и нужно было доказать.

Мы видим, что метод, которому следует Архимед, очень близок к изложенному нами в предыдущей главе способу доказательства Евдокса. В дальнейшем Архимед начинает уже несколько отклоняться от методики Евдокса; так, в следующем послании к Досифею, составляющем первую книгу сочинения «О шаре и цилиндре», он дает основную аксиому Евдокса уже в несколько отличной формулировке, которая сводится к тому, что из двух неравных линий, поверхностей или объемов большая превышает меньшую на величину, которая, будучи сложена достаточное число раз сама с собой, может превзойти любую заданную величину того же рода. Основным в этой формулировке является не имеющееся у Евдокса предположение, что разность двух величин одного рода является величиной того же рода. Такая формулировка Архимеда непосредственно направлена против математического атомизма Демокрита, где каждое сечение тела может быть рассматриваемо как разность двух объемов, из которых один содержит, а другой не содержит это сечение, и вместе с тем это сечение не является объемом.

Таким образом, Архимед, признавая всю пользу метода Демокрита для чернового решения задачи, отказывает ему в математической строгости; по своим математическим идеям он является последователем Евдокса, а не Демокрита.

Основное содержание второго послания к Досифею (первой книги «О шаре и цилиндре») является определение поверхности и объема шара. Так как соответствующая теорема вошла в основной фонд, которым пользуются при изучении элементарной математики, то не лишним будет показать, каким путем Архимед пришел к полученному им результату. Соответствующий метод изложен им самим в послании к Эратосфену, так называемом «Эфодике», откуда мы и заимствуем последующее изложение.

Пусть $ABCD$ (рис. 18) будет большой круг шара, а AC и BD — два взаимно-перпендикулярных диаметра последнего.

Через конец A диаметра AC и окружность большого круга с диаметром BD проводим коническую поверхность $ABEFD$ до пересечения с плоскостью, проведенной через

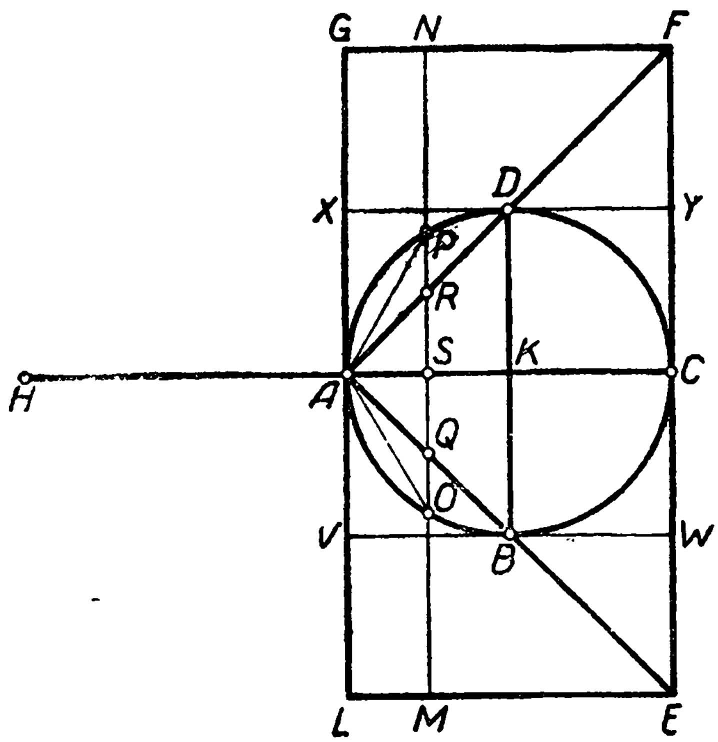


Рис. 18.

другой конец C диаметра AC перпендикулярно этому последнему. На получившемся круге с диаметром EF строим цилиндр $EFGL$, высота которого равна AC. Затем откладываем $AH = AC$ и рассматриваем равноплечий рычаг HAC с точкой опоры в A.

Через какую-нибудь точку S диаметра AC проводим перпендикулярную ему плоскость MN; она пересечет цилиндр FL по окружности с диаметром MN, шар — по окружности с диаметром PO и, наконец, конус — по окружности с диаметром QR.

Так как $MS = AC$ и $QS = AS$, то мы можем написать:

$$MS \cdot SQ = AC \cdot AS = AP^2$$

(по известной теореме о пропорциональных линиях в круге).

Затем:

$$AP^2 = AS^2 + SP^2 = SP^2 + SQ^2.$$

Далее, поскольку $AH = AC$, то:

$$AH : AS = AC : AS = MS : SQ = MS^2 : (MS \cdot SQ),$$

или согласно вышенаписанному:

$$AH : AS = MS^2 : (SP^2 + SQ^2).$$

Если числитель и знаменатель правой части мы помножим на π, то получится:

$$\frac{AH}{AS} = \frac{\pi MS^2}{\pi SP^2 + \pi SQ^2},$$

или:

$$AH(\pi \cdot SP^2 + \pi \cdot SQ^2) = AS \cdot \pi MS^2.$$

Это уравнение мы можем рассматривать как уравнение моментов относительно опорной точки A, выражающее, что помещенный в S круг с диаметром MN уравновешивается двумя кругами на диаметрах OP и RQ, подвешенными в точке H.

Так как то же самое можно сказать относительно всех кругов, получающихся в сечениях, проведенных через различные точки диаметра AC перпендикулярно ему, то мы приходим к выводу, что помещенные в H все круги с диаметрами типа OP, т. е. шар $ABCD$ вместе со всеми кругами с диаметрами типа RQ, т. е. конусом AEF, уравновесят остающиеся на своих местах все круги с диаметрами MN, т. е. цилиндр $EFGL$, ось которого совпадает с плечом AC рычага. Поскольку центр тяжести цилиндра $EFGL$ находится в центре шара K, то это значит, что конус AEL и шар $ABCD$, помещенные в точке H, уравновешивают цилиндр EFL, вес которого сосредоточен в точке K:

$$(\text{конус } AEF + \text{шар } ABCD) \cdot AH = \text{цилиндр } FELG \cdot AK.$$

Так как $AH = 2\ AK$ и конус AEF составляет одну треть цилиндра $EFLG$, то мы будем иметь:

$$2\,(\text{конус } AEF + \text{шар } ABCD) = 3 \text{ конуса } AEF,$$

откуда получается, что два шара $ABCD$ равняются по объему одному конусу AEF. Поскольку же $AC = 2\ AK$ и, следовательно, конус AEF в восемь раз больше конуса, основание которого равно большому кругу BD шара $ABCD$, то получается, что объем шара $ABCD$ равняется четырем объемам конуса ABD. Таким образом, если через R мы обозначим радиус шара, то объем V шара будет:

$$V = 4 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

так как высота AK конуса ABD и радиус KD его основания равняются радиусу R шара $ABCD$.

После этого Архимед указывает, что поскольку шар в четыре раза больше конуса, основание которого равно большому кругу шара, а высота — радиусу последнего, то можно считать, что поверхность шара будет в четыре раза больше площади его большого круга, опираясь на аналогию с кругом, площадь которого в два раза больше площади треугольника, основание которого равно длине окружности круга, а высота — радиусу последнего.

Так Архимед пишет в «Эфодике». В окончательном тексте в первой книге «О шаре и цилиндре», он вытравляет всякий след атомистических представлений; более того, он даже меняет порядок изложения: сначала дает теорию определения поверхности шара, а потом уже переходит к его объему.

Строгий математический вывод, который дал Архимед, уже по своей структуре несколько отличается от того, который он дал в «Квадратуре параболы». Основная его идея заключается теперь в следующем.

Определяемую величину S, в нашем случае поверхность шара, он заключает между двумя последовательностями величин (в нашем случае боковыми поверхностями ряда усеченных конусов, вписанных и описанных вокруг шара), из которых одни (суммы боковых поверхностей вписанных конусов) все время возрастают, а другие (суммы поверхностей описанных) все время убывают. Пусть при заданном числе n (количество отдельных конусов, из боковых поверхностей которых составляются указанные суммы) величина вписанной поверхности будет A_n, а описанной B_n. После этого доказывается, что отношение B_n к A_n при подходящем выборе может быть сделано меньше отношения большей из двух произвольно выбранных величин к меньшей. Затем определяется некоторая величина K, при любом n удовлетворяющая неравенству:

$$A_n < K < B_n,$$

после чего утверждается, что определяемая величина S равняется этой K.

Предположим, что S не равна K; тогда или S больше K, или S меньше K.

Пусть $S>K$; определяем такое число n, чтобы отношение B_n к A_n было меньше отношения S к K:

$$B_n : A_n < S : K.$$

Поскольку B_n больше S, то отсюда следует, что:

$$S : A_n < S : K,$$

т. е. K будет меньше A_n, что противоречит сделанному предположению.

Если $S<K$, то определяем такое n, чтобы имело место неравенство:

$$B_n : A_n < K : S.$$

В таком случае:

$$B_n : S < K : S,$$

т. е. $B_n<K$, что опять противоречит сделанному предположению. Таким образом, остается только положение, что $S = K$.

Последние два послания к Досифею носят названия «О коноидах и сфероидах» и «О спиралях». В первом произведении рассматриваются объемы сегментов, получаемых при рассечении плоскостью тел, образующихся при вращении вокруг оси эллипса, параболы или гиперболы. В первом случае получается эллипсоид вращения, который Архимед называет сфероидом, а в двух последних — параболоид и гиперболоид вращения, называемые Архимедом коноидами. Среди доказанных теорем нужно отметить следующую.

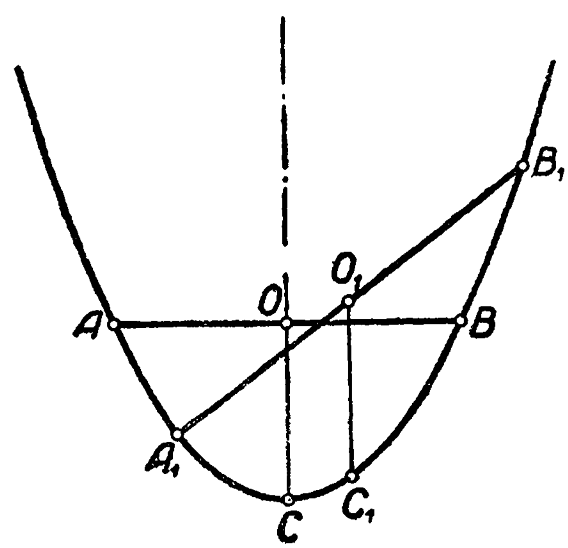


Рис. 19.

Пусть мы имеем коноид, полученный в результате вращения вокруг своей оси параболы ACB (рис. 19). Пересечем его двумя плоскостями AB и A_1B_1 так, чтобы проведенные через середины O и O_1 прямых AB и A_1B_1 параллельно оси параболы отрезки OC и O_1C_1 были равны. В таком случае объемы сегментов ACB и $A_1C_1B_1$ параболоида тоже будут равны.

Во втором произведении «О спиралях» Архимед вводит еще одну кривую, получающуюся в результате движения, а именно так называемую Архимедову спираль.

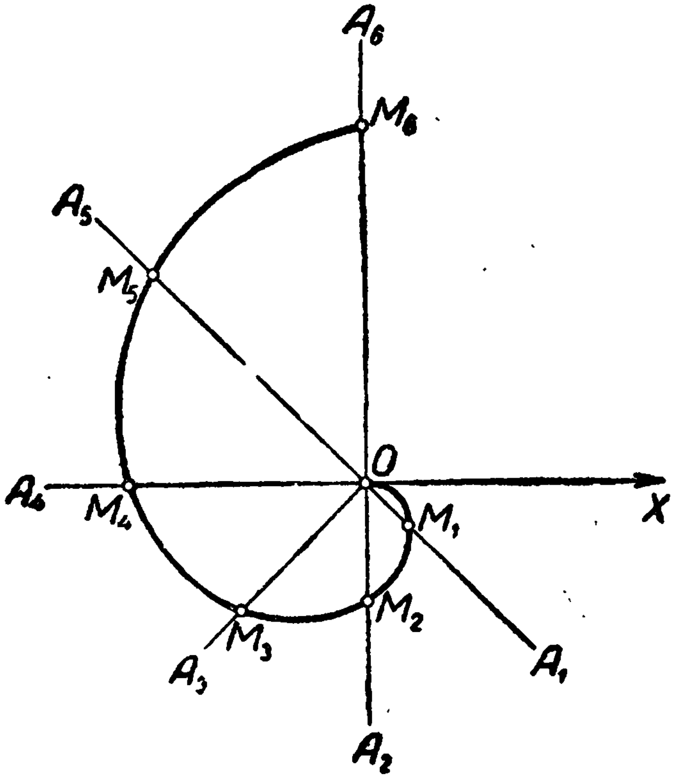


Рис. 20.

Представим себе, что вокруг точки O в плоскости чертежа (рис. 20) вращается прямая OA с постоянной угловой скоростью, т. е. поворачиваясь в равные промежутки времени на одинаковые углы; при вращении прямая OA будет занимать ряд последовательных положений: OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, OA_5 и т. д. По этой прямой тоже с постоянной скоростью движется выходящая из O точка M, расстояния которой OM_1, OM_2, OM_3 и т. д. возрастают пропорционально соответствующим временам. Тогда точка M в своем движении по плоскости чертежа опишет на ней некоторую кривую, которую мы и называем архимедовой спиралью (сам Архимед называл ее просто спиралью, или, еще точнее, если перевести на русский язык употребленный им термин, «улиткой»).

Нетрудно догадаться, почему Архимед и давший ему эту тему Конон заинтересовались этой кривой. Дело шло о решении одной из великих задач древности — нахождении квадратуры круга, или, точнее, построении прямой, длина которой была бы равна длине окружности некоторого круга. И эту задачу Архимед решил при помощи некоторых механических соображений, относящихся в данном случае уже не к статике — учению о равновесии, а к кинематике — геометрическому учению о движении. Если несколько модернизировать рассуждения Архимеда, то основная его идея заключается в следующем.

Направление скорости точки, описывающей некоторую кривую, или, как говорят, траекторию, определяется направлением касательной к этой траектории. Скорость точки M в ее движении по плоскости чертежа складывается из относительной скорости u по прямой OA и переносной скорости вместе с этой прямой; если через ω

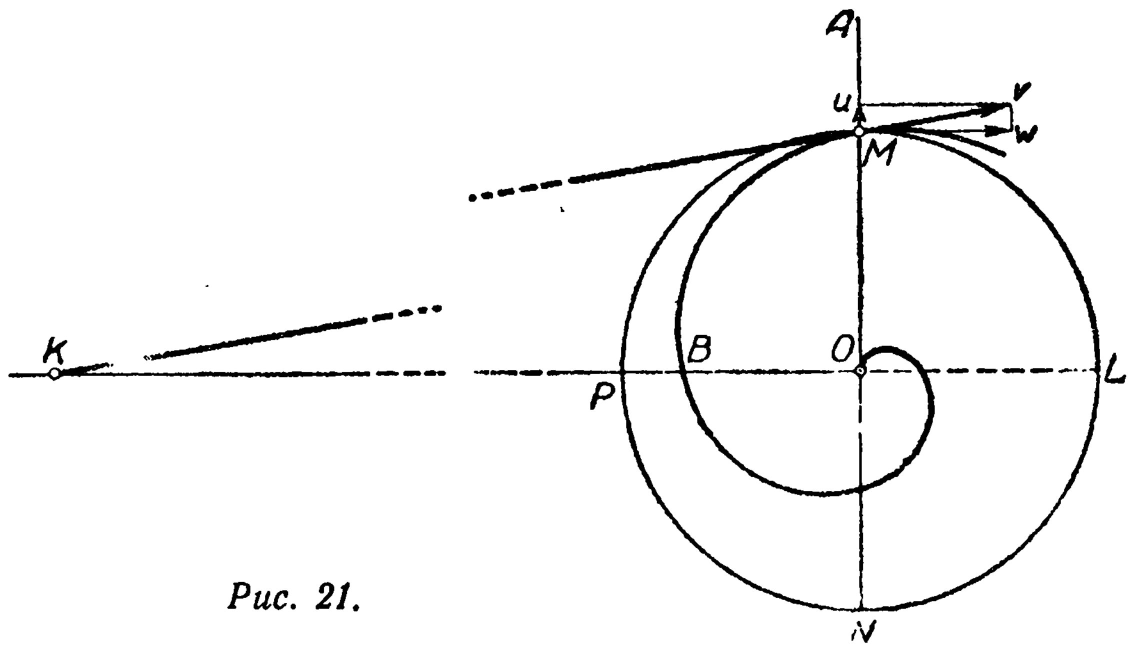


Рис. 21.

обозначить угловую скорость * вращения прямой OA, а через r расстояние OM точки от начала O, то переносная скорость w будет направлена перпендикулярно прямой OA в сторону ее вращения и равна wr. Так как правило сложения скоростей в форме параллелограмма было известно уже в эпоху Аристотеля (оно содержится в приписываемых ему «Механических проблемах»), то Архимед легко получает направление касательной к спирали. Дальнейшее рассуждение идет так.

---

* Угловая скорость равномерного вращения определяется как отношение выраженного в радианах угла поворота φ к соответствующему времени: $\omega = \frac{\varphi}{t}$. Так как дуга окружности S равна произведению центрального угла поворота φ на радиус r, то скорость v точки, описывающей при вращении окружность, изобразится формулой $v = \frac{s}{t} = \frac{r\varphi}{t} = \omega r$.

Пусть OBM (рис. 21) будет дуга спирали, которую описала вышедшая из O точка за время полного оборота прямой OA. В положении M движущаяся по спирали точка имеет две скорости — относительную u и переносную $w = \omega r$, где r представляет отрезок OM. Сложив эти скорости, мы получим направление абсолютной скорости v и вместе с тем направление касательной MK к спирали. За время полного оборота прямой OA точка M, вышедшая из O, прошла путь $OM = r$ со скоростью u, а соответствующая точка M прямой в равномерном движении со скоростью $w = \omega r$ описала окружность $MLNP$ радиуса r. Поскольку проходимые равномерным движением пути пропорциональны соответствующим скоростям, то мы можем написать:

$$\frac{\text{Дуга } MGNPM}{OM} = \frac{w}{u}.$$

В точке O восставим перпендикуляр OP к прямой OM и продолжим его до пересечения в точке K с касательной MK к спирали. Так как треугольник OMK подобен треугольнику Mvw, то, сравнивая отношения сходственных сторон, получаем:

$$\frac{OK}{OM} = \frac{w}{u}.$$

Сопоставив это с предыдущей пропорцией, мы приходим к выводу, что длина прямой OK будет равна длине окружности $MLNPM$.

Во второй половине книги «О спиралях» Архимед определяет площади, ограниченные дугами спирали и движущимся радиусом OM за время первого полного оборота (площадь $OBMO$), второго, третьего и т. д.

При определении этих площадей, а также и объемов сегментов коноидов и сфероидов в предыдущей книге Архимед еще несколько видоизменяет метод Евдокса. Он точно так же заключает определяемую величину между двумя последовательностями, из которых одна A_n все время возрастает, а другая B_n все время убывает, но только вместо отношения $B_n : A_n$ он берет разность $B_n - A_n$ и доказывает, что при подходящем выборе n эта разность может быть сделана меньше всякой наперед заданной величины. Затем определяется величина K при любом n, удовлетворяющая неравенству $A_n < K < B_n$, и доказывается, что определяемая величина S будет равна K.

Действительно, если бы S была больше K, то можно было бы найти такое n, чтобы имело место неравенство:

$$B_n - A_n < S - K.$$

Так как B_n больше S, то мы будем иметь также:

$$S - A_n < S - K,$$

откуда $K < A_n$, что противоречит сделанному предположению.

Если бы, наоборот, S была меньше K, то мы определили бы такое n, чтобы было:

$$B_n - A_n < K - S,$$

откуда согласно определению:

$$B_n - S < K - S,$$

т. е. $B_n < K$, что опять противоречит условию.

Этот метод Архимед употребляет также в сочинении «Об измерении круга». Воспользуемся этим для того, чтобы показать, как именно выглядел этот метод в изложении самого Архимеда. Приведем текст первого предложения «Измерение круга» *.

«Всякий круг равен прямоугольному треугольнику, у которого одна из сторон, прилежащих к прямому углу, равна радиусу круга, а другая его окружности.

Пусть будет круг $ABCD$ и такой, как сказано, треугольник E (рис. 22). Я говорю, что он равен треугольнику E.

Действительно, пусть, если возможно, круг будет больше. Впиши в него квадрат AC и разделяй дуги пополам, и пусть, наконец, оставшиеся отрезки будут меньше избытка круга над треугольником; тогда полученная прямолинейная фигура будет также больше треугольника. Возьми центр N и проведи перпендикуляр NO. Итак, NO меньше одной из сторон треугольника E, а очертание прямолинейной фигуры меньше другой стороны, ибо оно меньше окружности круга; поэтому прямолинейная фигура будет меньше треугольника, что невозможно.

---

* Текст приводится в несколько модернизованном переводе, Ф. Петрушевского: Архимед, «Две книги о шаре и цилиндре», «Измерение круга» и «Леммы», СПБ, 1823.

Но тогда, если возможно, пусть круг будет меньше треугольника E. Опиши квадрат, раздели дуги пополам и через точки сечения проведи касательные. Угол PAR прямой, поэтому PR больше MR, ибо MR равна RA, и потому треугольник RPQ больше половины фигуры $PFAM$. Пусть останутся такие, как QFA, отрезки, которые будут

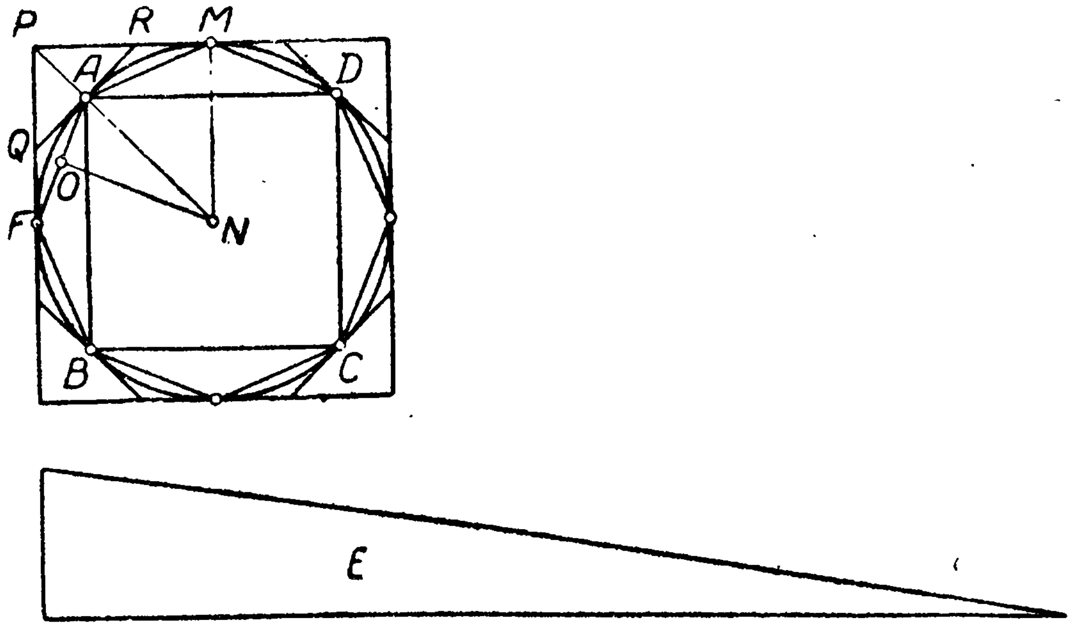


Рис. 22.

меньше избытка треугольника E над кругом $ABCD$. Следовательно, описанная прямолинейная фигура будет также меньше треугольника E, что невозможно, ибо она больше, потому что NA равна высоте треугольника, а очертание фигуры больше его основания.

Таким образом, круг равен треугольнику E».

10. АРХИМЕД И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

За посланиями к Досифею идет группа сочинений, имеющих более или менее ярко выраженный механический характер. Это будут «О равновесии плоских фигур» (две книги), «Эфодик» и «О плавающих телах» (две книги). Первое произведение, венцом которого является определение центра тяжести параболического сегмента, должно быть написано после «Квадратуры параболы», второе произведение, содержащее определение центров тяжестей сегментов шара, эллипсоида, параболоида и гиперболоида вращения, должно быть написано после

«Равновесия плоских фигур», а также «Коноидов и сфероидов», наконец, последнее, опирающееся на некоторые предложения «Коноидов» и «Эфодика», должно быть последним в этом ряду, а, может быть, и вообще в ряду всех произведений Архимеда.

Первая книга «О равновесии плоских фигур» содержит математическое доказательство закона равновесия рычага и определение центра тяжести треугольника, параллелограмма и трапеции. Вторая книга посвящена определению центра тяжести параболического сегмента, а также трапеции, боковыми сторонами которой служат дуги параболы. Имеет место мнение, что первая и вторая книги представляют самостоятельные произведения; первая из них считается самым ранним произведением Архимеда; при этом опираются на то, что в «Квадратуре параболы» Архимед уже пользуется центрами тяжести треугольника и трапеции. Согласиться с этим нельзя по двум причинам. Во-первых, совершенно такую же структуру имеет сочинение «О плавающих телах», первая книга которого рассматривает общие вопросы, а вторая посвящена только одной теме — исследованию условий равновесия плавающего в жидкости сегмента параболоида вращения. Во-вторых (и это самое главное), характер изложения полностью исключает возможность того, что эта книга является первым произведением Архимеда, посвященным теории центров тяжести. В ней нет самого главного — определения центра тяжести, которое нам известно из других источников; оно, конечно, отсутствует по той причине, что Архимед считал его уже общеизвестным. Затем все доказательства ведутся, мы сказали бы, с излишней строгостью, причем, как правило, преобладают доказательства от противного.

Наиболее простым и естественным предположением будет то, что Архимед в этой книге попытался сделать то, что до него в геометрии уже сделал Евклид, а именно, изложить теорию равновесия строго логически, представить ее как математическую науку. Чтобы понять важность этого шага, достаточно припомнить, что в древней Греции (а также и в Европе до самого XVII века) физика составляла часть философии и излагалась без больших математических мудростей. Поэтому мы с полным правом можем назвать Архимеда основателем математической физики.

Так как идеи Архимеда интересуют нас более, чем их формальное воплощение, то доказательство закона равновесия рычага мы приведем в том виде, какой ему дал Галилей, бывший страстным поклонником Архимеда и ставивший его выше Аристотеля и всех других мудрецов древней Греции.

Представим себе однородный стержень AB длины $2(a+b)$, подвешенный горизонтально за свою середину O (рис. 23). К нему при помощи бесчисленного множества ниточек подвешен другой однородный стержень CD такой же длины; будем для простоты считать, что на единицу длины этого стержня приходится единица веса; тогда вес этого стержня численно будет равен $2(a+b)$. Вся наша система будет, очевидно, находиться в равновесии; это равновесие не нарушится, если мы стержень CD разрежем в сечении EF так, что обе получившиеся части будут соответственно иметь длины $2a$ и $2b$. Равновесие каждого из отрезков не нарушится также, если мы на части ED оборвем все ниточки, кроме одной LL_1, приходящейся против середины длины этого отрезка, а на части CE оборвем все ниточки, кроме средней LL_1, В таком случае мы можем рассматривать закрепленный в точке O стержень AB как находящийся в равновесии под действием двух сил, одна из которых $2a$ приложена в точке K, находящейся на расстоянии b от опоры O, а другая $2b$ приложена в точке L на расстоянии $OL=a$ от опоры O. Таким образом, сила $2a$ на плече b уравновешивается силой $2b$ на плече a; отсюда следует, что рычаг KL, если его рассматривать как не имеющий веса (последний уравновешивается сопротивлением опоры O), будет находиться в равновесии, если приложенные на его концах K и L силы будут обратно пропорциональны длинам соответствующих плеч.

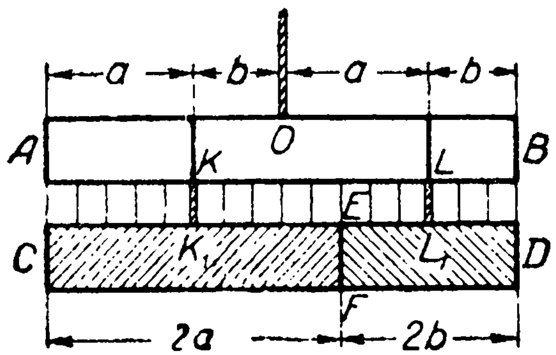


Рис. 23.

Во второй книге «Равновесия плоских фигур» Архимед определяет положение центра тяжести параболического сегмента и усеченной параболической трапеции.

Покажем в современном обозначении, каким образом Архимед определил положение центра тяжести параболического сегмента.

Все вычисление может быть легко проведено, если мы знаем существующее для параболы соотношение между отрезком x (абсциссой) оси параболы и перпендикулярным к последней, доходящим до кривой отрезком y (так называемой ординатой). Это соотношение, данное нами в конце главы VI, имеет вид:

$$y^2 = 2px.$$

Если в эллипсе мы проведем ряд параллельных хорд, то их середины будут лежать на одной прямой, проходящей через центр O эллипса (рис. 24); в этом центре будут пересекаться все диаметры эллипса. Так как параболу мы можем рассматривать как эллипс, центр ко-

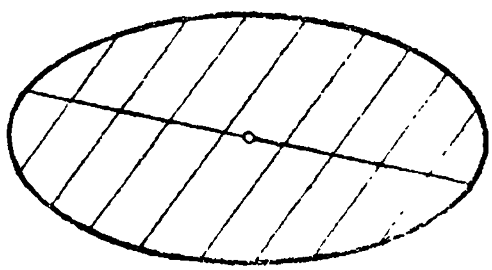


Рис. 24.

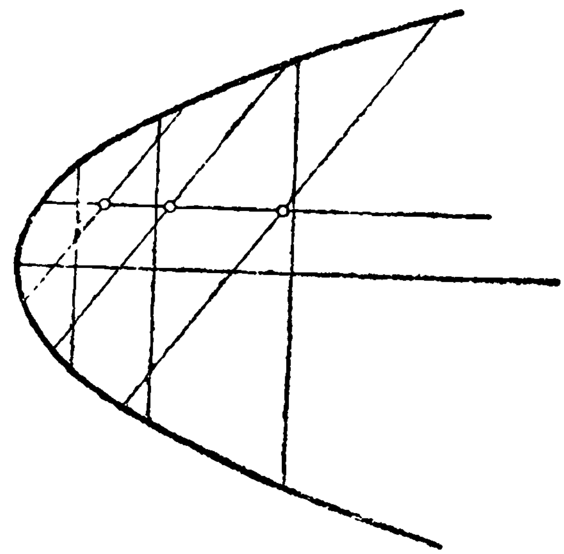


Рис. 25.

торого удален в бесконечность (при непрерывном вращении плоскости, образующей в сечении конуса эллипс, последний переходит в параболу, когда секущая плоскость становится параллельной образующей конуса), то все диаметры параболы (линии, на которых лежат середины параллельных одному направлению хорд) будут пересекаться в бесконечно удаленном центре, иными словами, будут параллельны между собой (рис. 25).

Если к этому добавить еще найденное Архимедом предложение, что площадь параболического сегмента составляет две трети площади прямоугольника, построенного на основании и высоте параболического сегмента, то в нашем распоряжении будет все необходимое для доказательства интересующего нас предложения.

Пусть AOB (рис. 26) будет сегмент, центр тяжести которого предлагается определить. Если O будет вершина параболы, а C — середина хорды AB, то центр тяжести параболического сегмента будет находиться где-то на диаметре OC (на последнем лежат середины всех параллельных AB хорд, из которых мы можем рассматривать составленным сегмент AOB параболы). Соединим вершину O параболы с концами A и B хорды; так как площадь треугольника AOB составляет половину площади прямоугольника с основанием AB и высотой OC, а площадь параболического сегмента — две трети того же прямоугольника, то площадь параболического сегмента будет равна $^3/_4$ площади треугольника AOB; если мы положим последнюю равной *3*, то площадь параболического сегмента AOB будет равна *4*, а сумма площадей обоих параболических сегментов AGO и BHO равна *1*. Центр тяжести каждого из этих сегментов будет лежать на прямой, соединяющей середины хорд, параллельных основанию AO (или соответственно OB) сегмента; это будут параллельные OC диаметры GE и HF обоих сегментов, пересекающие пополам в точках E, F стороны AO и OB.

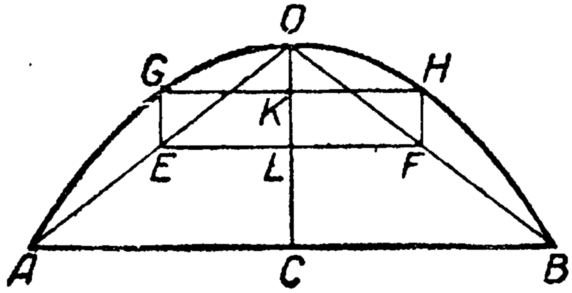


Рис. 26.

Проведем прямые EF и GH. Если через h обозначим длину высоты OC, то нетрудно видеть, что $OL = LC = \frac{1}{2}h$, а $EL = LF = \frac{1}{2}AC$. Если GK параллельна AC, то GE будет равна KL. Отрезки OK и OC мы можем назвать абсциссами x_1 и x_2, а GK и AC соответствующими им ординатами y_1 и y_2. Мы имеем:

$$y_1^2 = 2px_1 \qquad y_2^2 = 2px_2.$$

Но y_2 вдвое больше y_1; следовательно, абсцисса $x_2 = OC$ будет вчетверо больше абсциссы OK_1 *.

---

* Так как такое же рассуждение можно повторить относительно отрезков OK и KH, то отсюда следует, что прямые GK, KH составляют продолжение одна другой, т. е. прямая, соединяющая вершины G и H сегментов AGO и HOB, будет параллельна AB.

Но $OL = \frac{1}{2} h$, а $OK = \frac{1}{4} h$; отсюда следует, что $KL = GE = HF$ будет равняться $\frac{1}{4} h$.

Теперь представим себе горизонтальный равноплечий рычаг O_1CO (рис. 27), на одно плечо которого насажен, как показано, в вертикальной плоскости целый параболический сегмент AO_1B, а на другое — такой же сегмент, но разрезанный на те же части, что и на рис. 26. Очевидно, что нагруженный таким образом рычаг O_1CO будет находиться в равновесии. Будем для простоты считать вес каждой части численно равным ее площади. На левое плечо рычага действует равный 4 вес параболического сегмента, приложенный в его центре тяжести M; на правое плечо действует равный 3 вес треугольника AOB, сосредоточенный в его центре тяжести P, и приложенные в центрах тяжести M_1 и M_2 сегментов AGO и BFO их веса, равные в сумме 1 и действующие по одной вертикали, пересекающей плечо OC рычага в точке N. Так как при равновесии рычага взятая относительно точки опоры сумма моментов весов, действующих на правое плечо рычага, должна равняться сумме моментов весов, действующих на его левое плечо, то мы имеем:

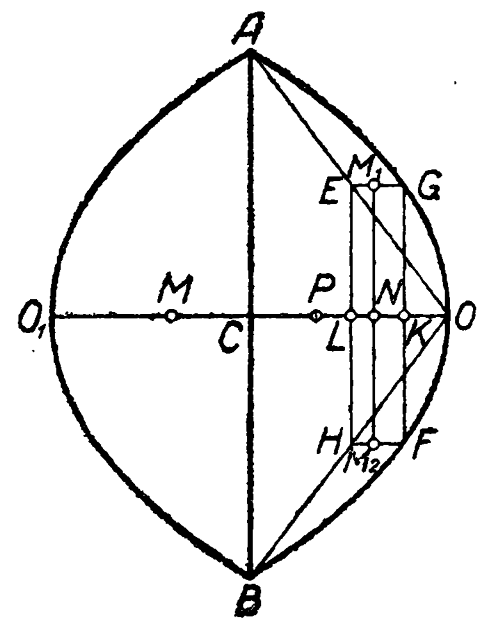


Рис. 27.

$$4 \cdot MC = 3 \cdot CP + 1 \cdot CN.$$

Центр тяжести M сегмента AO_1B отсекает от его диаметра OC некоторый отрезок MC, равный длине h этого диаметра, помноженной на некоторую правильную дробь n:

$$MC = nh.$$

Так как сегменты AGO и BFO совершенно так же составлены из хорд, параллельных основаниям AO и BO, как сегмент AOB из хорд, параллельных основанию AB, то на диаметре EG центр тяжести M_1 отсекает такой же отрезок EM_1, какой M отсекает на диаметре O_1C, и мы можем написать:

$$EM_1 = HM_2 = LN = n \cdot EG,$$

или, поскольку $EG = \frac{1}{4} h$:

$$LN = n \cdot \frac{h}{4}.$$

Так как расстояние CP центра тяжести треугольника AOC от его основания равно $\frac{1}{3}$ его высоты OC, т. е. $\frac{1}{3} h$, и отрезок Ch равен $\frac{1}{2} h$, то наше равенство мы можем переписать в виде:

$$4 \cdot nh = 3 \cdot \frac{h}{3} + 1 \cdot \left(\frac{h}{2} + n \cdot \frac{h}{4} \right),$$

или:

$$4n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} n,$$

откуда:

$$n = \frac{2}{5}.$$

Таким образом, центр тяжести M параболического сегмента находится на его диаметре на расстоянии $^2/_5$ длины этого диаметра, считая от основания сегмента.

Очень интересна судьба следующего произведения Архимеда, его знаменитого «Эфодика». Греческое слово «эфодос» обозначает «путь, средство, приступ»; под этим именем Архимед подразумевает методы, при помощи которых он пришел к открытию своих знаменитых теорем и которые он теперь сообщает Эратосфену, адресату интересующего нас послания, для того, чтобы побудить его и других научных работников Александрии к открытию новых геометрических теорем. Это произведение долгое время считалось потерянным, но в начале XX века приват-доцент Петербургского университета Попандопуло-Керамевс нашел в библиотеке иерусалимского монастыря написанный на древнем пергаменте молитвенник. Первоначальный текст этого пергамента был смыт монахами, но многие отрывки можно было разобрать. Прочтя эти отрывки, обнародованные Попандопуло-Керамевсом, датский филолог Гейберг догадался, что рассматриваемый текст принадлежит Архимеду, и при помощи лупы восстановил почти весь текст «Эфодика», обнародованный им в 1907 году.

Рассматриваемое сочинение состоит из двух частей: в первой Архимед сообщает Эратосфену первоначальные механические доказательства, при помощи которых он пришел к своим знаменитым теоремам; образец их мы уже приводили, рассказывая в предыдущей главе, каким образом Архимед сумел определить объем шара; во второй Архимед ставит перед Эратосфеном новые задачи. Кроме того, параллельно с изложением Архимед дает новые теоремы, определяющие положение центра тяжести полушара (на расстоянии $^3/_8$ радиуса от основания), затем произвольного сегмента шара, а также сегментов параболоида, гиперболоида и эллипсоида вращения. Для двух последних он сообщает Эратосфену только результаты, считая, что адресат и сам сумеет найти надлежащее доказательство при помощи таких же рассуждений, которые понадобились Архимеду для доказательства, что центр тяжести сегмента параболоида вращения находится на прямой, соединяющей вершину сегмента с центром его основания на расстоянии одной трети этой прямой, считая от основания.

На этом же пергаменте Гейберг нашел около половины греческого текста третьего интересующего нас механического сочинения Архимеда, а именно, его трактата «О плавающих телах». До Гейберга текст этого трактата был известен лишь в латинском переводе, сделанном в XIII веке бельгийским монахом Вильгельмом из Мербеке для известного католического богослова Фомы Аквината. В этом сочинении Архимед доказывает носящий его имя закон о потере веса телами, погруженными в воду, и использует его для определения положений равновесия погруженных в жидкость сегментов шара и параболоида вращения.

В популярных учебниках физики и истории физики рассказывается, каким образом Архимед пришел к открытию своего закона. Говорится, что сиракузский царь Гиерон после победы захотел пожертвовать богам золотой венец и дал для этой цели золотых дел мастеру определенное по весу количество золота. Получив от мастера изготовленный венец соответствующего веса, Гиерон стал подозревать мастера в утайке некоторого количества золота и предложил Архимеду изобличить мошенника, не портя сделанного венца. Архимед некоторое время был в затруднении, но однажды, садясь в ванну, он заметил, что из нее после погружения вылилась часть воды; после этого он понял, каким образом нужно решить задачу, и в радости, выскочив из ванны, побежал голым по городу, крича «Эврика, эврика!», т. е. «нашел». Таким образом, говорят, и был открыт закон Архимеда.

Некоторое размышление показывает, что к открытию закона Архимеда (который гласит, что всякое погруженное в жидкость тело теряет в своем весе столько, сколько весит вода в объеме этого тела) приведенная история с венцом царя Гиерона никакого отношения не имеет. Для того чтобы разоблачить обман, Архимеду нужно было только найти объем венца; зная последний, а также вес единицы объема золота, можно было определить, сколько должен был бы весить золотой венец, если бы он был приготовлен из чистого золота; после этого простое сравнение полученного веса с весом представленного венца легко показало бы, имела ли место утайка золота или нет.

Садясь в ванну и наблюдая вылившуюся воду, Архимед понял, что для определения объема венца нужно просто погрузить его в полный сосуд и смерить объем вылившейся после погружения воды; зная объем вылившейся воды, мы без всякого закона Архимеда можем найти и объем венца, после чего решение поставленной задачи требует только четырех правил арифметики. Таким образом, еще раз мы видим, каким осторожным нужно быть историку науки при использовании ходячих анекдотов о том, как было сделано то или другое открытие.

В первой книге своего сочинения «О плавающих телах» Архимед доказывает, что при равновесии свободная часть поверхности жидкости является частью шаровой поверхности, центр которой совпадает с центром Земли. Затем формулируется закон Архимеда и разбираются условия равновесия шарового сегмента, погруженного в жидкость, причем свободная поверхность жидкости предполагается сферической. Разбираются два случая, а именно, когда сегмент плавает, имея плоское основание над поверхностью жидкости, и когда он плавает с основанием, погруженным в жидкость.

Вторая книга начинается с предложения, что у тела, более легкого, чем жидкость, и плавающего на поверхности жидкости, объем погруженной части так относится к объему всего тела (последнее молчаливо предполагается однородным), как плотность тела к плотности жидкости. После этого идет определение положений равновесия плавающего на поверхности жидкости сегмента параболоида вращения, причем рассматриваются только положения равновесия, когда сегмент плавает, имея плоскость основания или целиком погруженной в жидкость, или полностью находящейся над поверхностью жидкости. При этом Архимед свободную поверхность в жидкости считает уже плоской.

Задача определения положений равновесия тела, плавающего на поверхности жидкости, была полностью решена только в XIX веке французским механиком Дюпеном и русским математиком А. Ю. Давидовым. Это обстоятельство сразу ставит вопрос, в какой мере методика Архимеда при решении интересующей его задачи отличается от современной.

Общий ход решения задачи в настоящее время сводится к следующему. Так как вес воды в объеме погруженной части должен равняться весу всего плавающего тела (в случае однородных тел мы вместо весов можем просто говорить об объемах), то тело, опускаемое в жидкость в каком-нибудь положении, погрузится до тех пор, пока плоскость, совпадающая со свободной поверхностью жидкости, не отсечет от этого тела объем, вес воды в котором будет равняться весу всего тела; плоскость получаемого в теле сечения носит название п л о с к о с т и п л а в а н и я. Если мы будем погружать наше тело в жидкость в различных положениях, удерживая его от поворачивания при помощи прикладываемых к нему горизонтальных сил, то мы получим для каждого положения свою плоскость плавания. Все полученные плоскости будут огибать, т. е. касаться некоторой поверхности, которая называется п о в е р х н о с т ь ю р а в н ы х о б ъ е м о в, или п о в е р х н о с т ь ю п л а в а н и я; каждая плоскость, касательная в какой-нибудь точке к этой поверхности, будет представлять одну из возможных плоскостей плавания.

Направленная вверх сила давления жидкости на погруженное тело будет приложена в центре тяжести погруженного объема тела (это положение Архимед формулирует в виде аксиомы без доказательства). Если мы возьмем центры тяжести объемов погруженных частей, отсеченных соответствующей плоскостью плавания, то все они будут лежать на некоторой поверхности, называемой **поверхностью центров**. Эту поверхность мы можем рассматривать как геометрическое место точек приложения направленных вверх сил давления жидкости.

Можно показать, что положение равновесия плавающего тела будет соответствовать такому случаю, когда вертикаль, проходящая через центр тяжести всего тела, будет перпендикулярна к поверхности центров, причем касательная плоскость к поверхности центров в такой точке будет параллельна соответствующей плоскости плавания. Таким образом, дело сводится к тому, чтобы определить на поверхности центров точки, в которых перпендикуляры, или, как говорят, нормали к поверхности центров, будут проходить через центр тяжести тела; касательные плоскости в этих точках определят положение соответствующей плоскости плавания, которая будет параллельна касательной плоскости.

После того как мы определили возможные положения равновесия, нам остается еще исследовать, какие из них будут соответствовать положению устойчивого равновесия и какие из них дадут лишь неустойчивое равновесие.

Как известно, устойчивым положением равновесия называется такое, когда тело, будучи несколько отклонено от положения равновесия, само собой стремится вернуться к этому положению. В положении равновесия перпендикуляр, опущенный из центра тяжести тела на поверхность центров, будет направлен по вертикали. Проведем через эту вертикаль плоскость; она в сечении с поверхностью центров образует кривую, небольшую часть которой вблизи основания этого перпендикуляра мы можем принять за дугу окружности; центр этой окружности — точка пересечения двух весьма близких нормалей к кривой сечения — называется центром кривизны кривой, в нашем случае кривой сечения проведенной нами вертикальной плоскости с поверхностью центров. Мы можем рассматривать этот центр как точку, остающуюся неподвижной при небольших колебаниях тела, происходящих параллельно проведенной вертикальной плоскости сечения. После этого дело сводится к хорошо известной задаче элементарной физики: если тяжелое тело может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, то устойчивое положение равновесия соответствует случаю, когда центр тяжести тела будет расположен на одной вертикали с точкой опоры и ниже последней. В нашем случае положение равновесия плавающего тела будет устойчивым (для отклонений, параллельных проведенной вертикальной плоскости сечения), если центр тяжести тела будет лежать ниже центра кривизны соответствующей кривой сечения.

Но через данную вертикаль можно провести бесчисленное множество вертикальных плоскостей сечения; каждая из них в пересечении с поверхностью центров образует свою кривую сечения; центры кривизны этих кривых, вообще говоря, будут различны и расположатся на нашей вертикали между двумя точками, соответствующими наибольшей и наименьшей кривизне полученных кривых сечения. Самый низкий из этих центров носит название **метацентра** и условие устойчивости равновесия будет заключаться в том, что центр тяжести плавающего тела должен лежать ниже метацентра; тогда равновесие будет устойчивым для **любых** отклонений от положения равновесия.

Теперь мы можем уже подойти современными методами к решению поставленной Архимедом задачи. Прежде всего мы сообразили бы, что поскольку рассматриваемый сегмент параболоида представляет тело вращения, то все кривые, получаемые в сечении его плоскостями, проведенными через ось вращения, будут одинаковы; поверхность плавания и поверхность центров будут тоже поверхностями вращения вокруг оси сегмента; для построения этих поверхностей достаточно будет получить образующие их своим вращением кривые, найденные для какой-нибудь одной плоскости, проходящей через ось сегмента.

Таким образом, задача из пространственной сразу превращается в плоскую.

Сечение нашего сегмента плоскостью, проведенной через его ось, будет парабола (рис. 28); пусть это будет парабола ACB. Прямая AB представляет сечение плоскостью чертежа основания нашего сегмента параболоида, OC — его ось, точка Q, лежащая на расстоянии $OQ = \frac{2}{3}CO$, будет центром тяжести сегмента параболоида. Опустим наш сегмент в воду в вертикальном положении; он будет погружаться до тех пор, пока объем сегмента RCS не станет таким, что вес воды в объеме этого сегмента будет равняться весу всего плавающего тела; прямая RS будет представлять сечение плоскостью чертежа плоскости плавания сегмента в рассматриваемом положении, а отрезок LC будет измеренной по оси высотой объема погруженной в жидкость части. Так как в «Коноидах и сфероидах» Архимед доказал, что объемы сегментов параболоида вращения, имеющие одинаковые оси, будут тоже одинаковы и все диаметры параболы параллельны, то поверхность плавания мы получим, сдвинув на расстояние CL поверхность нашего основного параболоида; сечение этой поверхности плоскостью чертежа будет представлять параболу KLM; назовем ее параболой плавания; все прямые, касательные к этой параболе, будут представлять сечения различных плоскостей плавания. Правда, параболой плавания будет не вся кривая KLM, а только часть ее, заключенная между двумя касательными AN и BP, проведенными к параболе KLM из концов A и B нашего сегмента (действительно, касательные к параболе, проведенные на отрезке NLP, будут пересекать и основание AB; проведенные через них плоскости плавания уже не будут отсекать таких сегментов параболоида вращения, объемы которых Архимед умел определить).

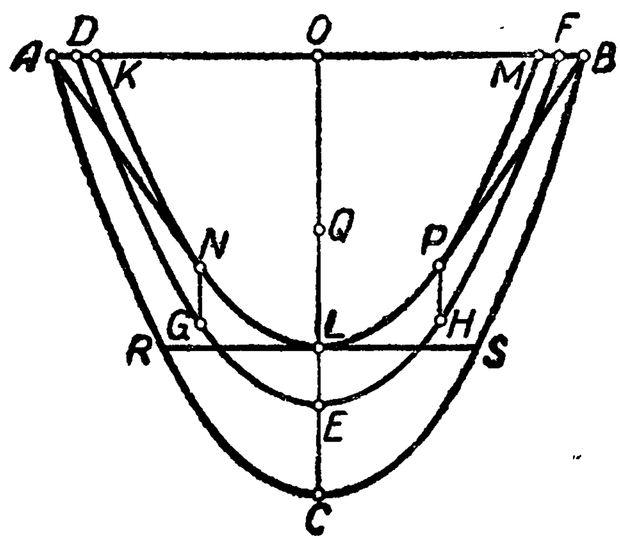


Рис. 28.

Все оси полученных сегментов параболоида вращения будут параллельны оси OC основного параболоида; так как центры тяжести соответствующих объемов будут лежать на этих осях на расстоянии $\frac{2}{3}$ от вершины, то, если мы через точку E, для которой $CE = \frac{2}{3} CL$, проведем параболу GEH, то эта парабола (назовом ее параболой центров) даст в результате вращения ее около оси OC поверхность центров, соответствующих таким положениям сегмента, когда плоское основание плавающего сегмента будет находиться над свободной поверхностью жидкости, касаясь ее в предельном случае только одной своей точкой.

Получивши параболу центров GEH для плавания сегмента основанием вверх, мы можем аналогичным образом построить параболу центров для плавания сегмента с основанием, полностью погруженным в жидкость; в этом случае объем погруженной части найдется простым вычитанием из объема всего сегмента объема той части, которая будет находиться вне жидкости.

После нахождения двух этих кривых нам придется лишь опускать на них перпендикуляры из центра тяжести Q сегмента. Нетрудно видеть, что один из этих перпендикуляров всегда будет OE; будут ли другие возможные перпендикуляры, зависит от относительного положения точки Q и параболы GEH; положение точки Q меняется в зависимости от длины оси OC сегмента, а положение кривой GEH определяется отношением плотностей плавающего тела и жидкости.

В заключение нам при помощи метацентра придется исследовать, соответствуют ли найденные положения устойчивому или неустойчивому равновесию. Если мы проверим современными методами вычисления Архимеда, то найдем, что все найденные им положения равновесия определены совершенно правильно. Однако из этого нельзя еще заключить, что Архимед действительно вел свои рассуждения современным методом; для решения этого вопроса надо обратиться к подлинному сочинению Архимеда.

После уже разобранного нами первого предложения второй книги идут четыре пары предложений (II—IX). В каждой паре при сделанных определенных предпосылках относительно величины (длины оси) параболоидального сегмента и отношения его плотности к плотности жидкости находится положение устойчивого равновесия сегмента сначала при плавании его вершиной вниз, а затем во втором предложении этой пары при плавании его вершиной вверх. Затем идет 10-е предложение, занимающее немного менее половины всей книги, в котором рассматривается сразу целый ряд различных случаев для разных предположений относительно величины сегмента и плотности жидкости; все эти предложения разбирают только случай плавания сегмента, когда его основание находится над поверхностью жидкости; разбора же условий равновесия сегмента с основанием под поверхностью жидкости, которого мы в праве ожидать на основании предыдущего изложения, в книге не имеется.

К этому следует добавить еще некоторую неровность доказательств, имеются ссылки на вспомогательные предложения, доказательство которых так и не приводится, и т. д.

Отсюда, естественно, вытекает такого рода вывод: Архимед не закончил своего произведения. Этим объясняется и отсутствие парного предложения относительно плавания сегмента с вершиной под поверхностью жидкости (разбор этого случая не представил бы никаких затруднений) и незаконченность разработки 10-го предложения; издатель после смерти Архимеда выпустил в свет сочинение в том виде, в каком оно существовало.

Для исследователя жизни и деятельности Архимеда это обстоятельство является необычайно ценным, так как отсутствие окончательной обработки позволяет нам несколько глубже заглянуть в тайники творчества Архимеда.

Обратимся к чертежам такого типа, какой изображен на рис. 29. Парабола ABL представляет очертания сечения сегмента (она соответствует параболе ACB на рис. 28). Внутри этой параболы находятся две параболы ATD и AEI; вторая парабола проходит через точку K — центр тяжести плавающего сегмента параболоида — и рассекает все отрезки, заключающиеся между параболами ATD и ACB в отношении $1:2$;

$$DK = \frac{1}{3} DB, \quad PE = \frac{1}{3} PS, \quad TF = \frac{1}{3} TR.$$

Вторая парабола соответствует параболе центров DEF, (рис. 28). Наконец, последняя парабола ATD, кончающаяся в точке D — середине отрезка Ah — соответствует параболе KLM на рис. 28. Каждая тройка парабол на рис. 28 и 29 находятся между собой в одинаковых отношениях, но только с одной существенной разницей: все параболы рис. 28 имеют общую ось и представляют одну и ту же параболу, сдвинутую вдоль этой оси, параболы же рис. 29 исходят из одной и той же точки A, и вершины их T, E, B лежат на одной прямой AB. На рис. 28 отрезки, заключенные между параболами ACB и KLM, представляют оси погруженных сегментов при изменении угла наклона плавающего сегмента, на рис. 29 отрезки между параболами ATD и ABL представляют те же самые оси при изменении отношения плотности погруженного тела и жидкости. Если это отношение равно 1, то соответствующая ось погруженной части будет равна оси BD всего сегмента, если же отношение плотности тела к плотности жидкости равно нулю, то обе оси сводятся к точке A, отрезки же типа TR, PS представляют величины осей погруженных сегментов при промежуточных значениях отношения плотностей между 0 и 1. Поэтому и рассуждения Архимеда при определении положений равновесия носят другой характер: мы можем сказать, что Архимед стоит на высоте методов XIX века, но было бы непростительной модернизацией утверждать, что Архимед имел понятие о поверхностях плавания и центров. Можно легко объяснить причину того, что Архимед не пользовался таким, казалось бы, вполне естественнным понятием как поверхность плавания. На рис. 28 мы видели, каким образом можно построить часть этой поверхности, соответствующую плаванию сегмента с основанием, лежащем полностью над поверхностью жидкости. Аналогично этому Архимед вполне мог бы построить и часть поверхности плавания для положений сегмента с основанием целиком под поверхностью жидкости. Но промежуточных частей поверхности плавания,

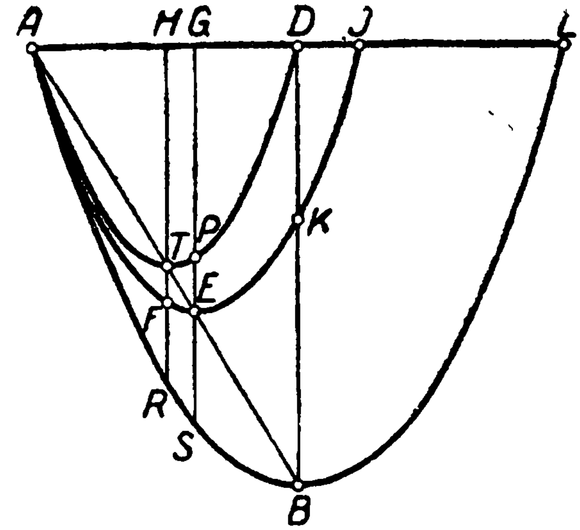


Рис. 29.

когда основание сегмента частью было погружено в жидкость, частью же находилось вне последней, Архимед получить не мог по очень простой причине: он не имел в своем распоряжении способов, которые позволили бы ему определить в этом случае объем погруженной части сегмента параболоида, а в таком случае возможность использования поверхности плавания полностью отпадает. Поэтому Архимед полностью исключил из своего рассмотрения случаи плавания с полупогруженным основанием. Если же рассматривать только другие положения плавающего сегмента и взять в качестве основной переменной изменения отношения плотностей тела и жидкости, то для каждого из двух возможных случаев — плавания с основанием над и под поверхностью жидких — соответствующие кривые можно построить полностью, что Архимедом и было сделано.

В заключение можно поставить вопрос, какие причины побудили Архимеда заняться определением равновесия плавающих тел, или, точнее, законом, носящим его имя, если устранить эпизод с золотой короной царя Гиерона. Конечно, в этом случае мы можем высказать лишь догадки, но все же кажется, что рассмотрение приведенного выше рассказа Полибия об осаде Сиракуз позволяет высказать некоторые предположения.

В рассказе Полибия говорится, что Архимед при помощи лап захватывал подплывающие корабли римлян и затем машинами подтягивал их вверх. В экспериментах с такого рода машинами и хотя бы даже в очень приблизительных их расчетах Архимед мог найти почву для установления и разработки своего закона, в особенности, если считать, что все приготовления к обороне Сиракуз были им сделаны заблаговременно.

11. АРХИМЕД И ПРАКТИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Нам осталось рассмотреть еще два произведения Архимеда «Измерение круга» и «Псаммит», которые характеризуют еще две тесно связанные друг с другом стороны деятельности Архимеда, а именно, его работы в области практики вычислений и в астрономии.

«Измерение круга» в дошедшем до нас виде состоит всего из трех предложений. Первое из них было приведено нами полностью в конце VI главы, третье, которым

Архимед.

нам еще придется заниматься, касается определения численной величины отношения окружности к диаметру, второе, которое логически должно быть поставлено после третьего, определяет численную величину площади круга. Комментатор Архимеда Евтокий Аскалонский в VI веке н. э. читал рассматриваемое сочинение в том виде, в каком мы его теперь имеем, но упоминания у Паппа Александрийского (конец III века н. э.) и других писателей позволяют думать, что это сочинение было значительно бо́льшим. С нашей точки зрения поражает отсутствие такой важной (имеющейся у Паппа) теоремы, что длины различных окружностей пропорциональны их радиусам или диаметрам. Искалеченный вид «Измерения круга» очень затрудняет определение времени его написания; мы можем только сказать, что поскольку Архимед пользуется видоизмененным Евдоксовым методом в третьей форме его, то составление «Измерения круга» вряд ли может относиться к более раннему времени, чем эпоха написания «Коноидов» и «Спиралей».

Второе сочинение «Псаммит», или «исчисление песчинок», написано после «Измерения круга» и до 216 года до н. э. — года смерти Гелона (сына и соправителя царя Гиерона), к которому обращено рассматриваемое сочинение. Таким образом, оставаясь на почве твердо установленных фактов, мы можем только сказать, что астрономическая и вычислительная деятельность Архимеда шла или параллельно с его занятиями математической физикой, или в несколько более позднюю эпоху. Несмотря на очень тесную связь между обеими упомянутыми областями деятельности Архимеда, нам все же придется рассмотреть каждую из них в отдельности; в первую очередь мы займемся вычислительными работами Архимеда.

В греческом устном счете основными числовыми классами были единицы, десятки, сотни, тысячи и десятки тысяч, так называемые мириады. Мириада была единицей первого высшего разряда; за ней шли единицы, десятки, сотни и тысячи мириад; дальше этих границ устный счет не распространялся.

В письменном счислении греки пользовались способом изображения чисел при помощи букв греческой азбуки. Для изображения единиц греки брали первые девять букв ее:

$1=\alpha$ (альфа)	$2=\beta$ (бэта)	$3=\gamma$ (гамма)
$4=\delta$ (дельта)	$5=\varepsilon$ (эпсилон)	$6=F$ (вау)
$7=\zeta$ (дзета)	$8=\eta$ (эта)	$9=\Theta$ (тэта)

Следующие девять букв обозначали десятки:

$10=\iota$ (йота)	$20=\varkappa$ (каппа)	$30=\lambda$ (ламбда)
$40=\mu$ (ми)	$50=\nu$ (ни)	$60=\xi$ (кси)
$70=o$ (омикрон)	$80=\pi$ (пи)	$90=q$ (коппа)

Сотни обозначались так:

$100 = \rho$ (ро)	$200 = \sigma$ (сигма)	$300 = \tau$ (тау)
$400 = \upsilon$ (ипсилон)	$500 = \varphi$ (фи)	$600 = \chi$ (хи)
$700 = \psi$ (пси)	$800 = \omega$ (омега)	$900 = ϡ$ (сампи)

В первоначальной греческой азбуке имелось 26 букв: две из них «вау» и «коппа», давшие начало латинским F и Q, в дальнейшем отпали, и вместо F для обозначения «6» употреблялась конечная сигма, так называемая «эписемон» (S). Нехватавший знак для обозначения 900 получился в виде комбинации букв σ (дорийское название «сан») и π.

Тысячи обозначались знаками для единиц, перед которыми слева внизу ставилась черточка; так, число 1955 греки изобразили бы так:

$$'\alpha\,\upsilon\,\nu\,\varepsilon.$$

Для обозначения мириад употреблялась буква M, над которой сверху ставилось соответствующее число:

$$\overset{\varkappa\alpha}{M}'\,\beta\xi\beta = 212\,062.$$

Для обозначения дробей со знаменателем, равным единице, ставилась черточка справа вверху:

$$\beta' = \frac{1}{4}, \quad \iota\alpha' = \frac{1}{11};$$

только для половины употреблялся специальный знак, встречавшийся также у древних египтян ($\angle$).

Если числитель не равнялся единице, то изображающее его число ставилось перед знаменателем.

$$\Theta\,\iota\alpha' = \frac{9}{11} \quad \bar{\iota}\,\upsilon\alpha' = \frac{10}{71}.$$

Вообще в рукописях над числовыми знаками полагалось сверху ставить черточку, чтобы отличить знаки для чисел от обычных букв.

Хотя в надписях упомянутое обозначение чисел встречается начиная лишь с V века до н. э., но сохранение древних букв «вау» и «коппы» показывает, что оно возникло почти одновременно с греческой письменностью (VIII—VII века до н. э.). Буквенное обозначение чисел представляет специально греческое изобретение; на Востоке оно встречается лишь в элинистическую эпоху в некоторых поздних книгах Ветхого Завета и является определенным заимствованием у греков.

Вычисления производились или на пальцах, или на абаке — счетном приборе вроде наших счетов: на горизонтальных полосках клались камешки или жетоны, соответственно обозначавшие единицы, десятки, сотни и т. д. Единственным принципиальным отличием от наших счетов было то, что на сохранившихся до нашего времени образцах абака (саламинская счетная доска III или II века до н. э., а также римские абаки) горизонтальные полоски делились пополам вертикальной чертой (у римлян слева ставился единственный жетон, обозначавший пятерку, а справа до четырех жетонов, каждый из которых равнялся единице). Такого рода разделение, совершенно ненужное при чистой десятичной системе счисления, имело определенный смысл, если в каждом разряде количество единиц выражалось двузначным с нашей точки зрения числом, состоявшим из десятков и единиц.

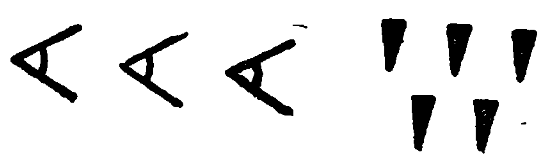
Это обстоятельство позволяет думать, что абак первоначально возник в стране, имевшей такую «двузначную» систему обозначения чисел в пределах одного разряда; это действительно имело место в древней Вавилонии, где пользовались шестидесятеричной системой счисления. Эта система в связи с развитием вычислительной астрономии проникла и в греко-римский мир, употреблялась в астрономических вычислениях вплоть до XVII века и до сих пор еще живет в наших минутах и секундах. Хотя появление ее на греческой почве относится ко времени, непосредственно следующему за смертью Архимеда, изложение вавилонской системы счисления имеет интерес и само по себе, поскольку она является непосредственным предком современной позиционной системы счисления и простейших арифметических действий, установленные вавилонянами правила которых, как можно утверждать с вероятностью очень близкой к достоверности, применялись и в греческой математике.

Шестидесятеричная система счисления возникла еще в IV тысячелетии до н. э. у первого культурного населения Вавилонии — сумерийцев. История ее возникновения совершенно ясно записана в сумерийских названиях числительных. Первые пять чисел имели особые названия, числа от шести до девяти обозначались как пять плюс один, пять плюс два и т. д. Число «десять» имело особое название, так же как и «двадцать»; «тридцать» обозначалось как «двадцать и десять», «сорок» как «дважды двадцать» и «пятьдесят» как «дважды двадцать и десять», для «шестидесяти» было опять особое название.

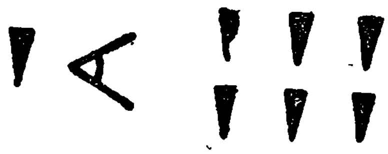
Наличие особых названий для 5, 10 и 20 совершенно ясно показывает, что сумерийская система счисления возникла из счета на пальцах. Что так обстояло и в дальнейшем развитии, видно из того, что сумерийское название для шестидесяти «шуши (греческое «сосе») одновременно обозначало и «палец», «дюйм» (мера длины, связанная с шириной пальца). Каким образом это произошло, можно представить себе, разобравшись в правилах счета на пальцах, употреблявшегося у древних римлян и перешедшего от них в средневековую Европу.

Счет единиц и десятков производился при помощи левой руки, большой и указательный пальцы которой были соединены своими концами, девять суставов остальных трех пальцев служили для счета единиц, а десятки отсчитывались при помощи двух первых пальцев, которые приходилось различным образом выгибать.

Небольшое размышление показывает, что для счета до сотни такой способ не очень пригоден, но пять видных суставов первого и указательного пальцев легко позволяют отсчитать от одного до пяти десятков; таким образом, при помощи одной руки можно было довести счет до 59. При помощи правой руки римляне аналогичным образом отсчитывали сотни и тысячи; вавилоняне могли таким же образом отсчитывать шестидесятки и десятки шестидесятков. Наибольшее число, которое таким образом можно было получить, равнялось $60^2=3600$. Интересно отметить, что это число долгое время считалось наибольшим и изображалось кругом (земным — символом бесконечности). Для письменного изображения чисел вавилонские математики пользовались двумя знаками — угловатым клином для десятков и простым клином — черточкой для единиц. Таким образом, число 35 вавилоняне изображали так:



а большее шестидесяти, например 76, так:

 $= 1 \cdot 60 + 16,$

или, как принято в настоящее время записывать — 1,16. Так как «шестидесятки» и «десятки шестидесятков» обозначались такими же знаками, как простые единицы и десятки, то мы имеем несомненную позиционную систему счисления, при помощи которой можно было изображать любые числа.

Не надо думать, что изложенная письменная система счисления была установлена с самого начала. В хозяйственных текстах третьего тысячелетия до н. э. употреблялась шестидесятеричная система счисления, в которой для «шестидесятки» и единицы существовали различные знаки, притом неодинаковые для различных родов величин; так, для единиц длины и площади существовали различные знаки, не требовавшие поэтому, как в настоящее время, указания соответствующих единиц. Можно сказать, что сумерийцы III тысячелетия до н. э. знали только «именованные» числа, но не «отвлеченные». Появление отвлеченных чисел относится ко времени около 2000 лет до н. э., когда сумерийскому объединенному государству эпохи третьей династии Ура понадобился большой административный и счетный аппарат для управления хозяйством всего междуречья Тигра и Евфрата.

В математических текстах последовавшей за ней вавилонской династии знаменитого Гаммураби мы имеем уже вышеприведенную систему письменного обозначения для всех чисел и всех родов величин, причем интересно, что числовые обозначения теряют свою абсолютную величину; так, вышенаписанное выражение для 76 можно было бы прочесть и как $1 \cdot 60^2 + 16 \cdot 60 = 45{,}60$, и даже как $1 + 16 \cdot 60 - 1 = 1\frac{16}{60} = 1\frac{4}{15}$.

На первый взгляд, такого рода способ обозначения должен был породить невообразимую путаницу; однако, при более детальном изучении вавилонских математических текстов оказывается, что старый непозиционный способ продолжал сохраняться для записи начальных данных и окончательных результатов задачи, а смущающая нас форма записи применялась главным образом для записи промежуточных вычислений.

Так как трудно предположить, чтобы вавилонский математик держал все время в уме абсолютные величины употребляемых им числовых групп, то наиболее вероятным предположением будет то, что эти абсолютные величины были каким-нибудь образом обозначены, и проще всего на абаке, при помощи которого читающий математический текст проверял все вычисления его составителя.

Предположение об абаке сразу объясняет и позиционность нового вавилонского числового обозначения и его неопределенность. В пользу абака говорит еще и то, что вавилонские математические тексты классической эпохи (II тысячелетие до н. э.) не знали нуля (который на абаке совсем не нужен; просто соответствующая линия, или ее половина, оставалась незанятой). Заметим также, что в рассматриваемых математических текстах (даже определенно носящих черновой характер и не имеющих словесных пояснений) не содержится никаких записей промежуточных вычислений — умножений и делений, а последние при шестидесятеричной системе счисления представляли большие затруднения и не могли быть выполнены в уме даже при наличии имевшихся в распоряжении вавилонских математиков таблиц умножения и деления. Об этом, между прочим, приходится пожалеть, так как нам не являются вполне ясными правила производства вавилонского деления во всех случаях.

От вавилонян абак перешел к египтянам в середине II тысячелетия до н. э. (это можно заключить из того, что в математических текстах Среднего царства египтяне полностью записывали все промежуточные вычисления и поэтому, вероятно, абака еще не знали), а во времена Геродота (V век до н. э.) абак был уже в употреблении у египтян; к грекам он попал в VII—VI веках до н. э. вместе с заимствованием вавилонских денежных единиц (талант, мина).

Сложение и вычитание на абаке специальных действий не составляли, как и на наших счетах. Умножение древние греки производили совершенно так же, как и мы, с тем лишь исключением, что они, как и вавилонские математики (а также и средневековые абацисты), начинали действие с высших разрядов множимого и множителя, а не с низших, как делаем мы. Что касается деления, то у нас нет совершенно достоверных сведений о том, как его выполняли греки. Относительно вавилонян мы знаем тоже не особенно много. Основной их прием заключался в том, что они сводили деление к умножению чисел (цифр) делимого на некоторое так называемое «обратное» число, получающееся в результате деления на делителя какой-нибудь степени 60; это равносильно тому, если бы мы, вместо того чтобы разделить на 125, умножили делимое на $\frac{1000}{125}=8$ и результат разделили бы на 1000. Различие заключается только в том, что вследствие особых свойств 60 (делится на 2, 3, 5), у вавилонян этот способ был развит значительно больше, чем у нас, и для него были даже составлены вспомогательные таблицы таких «обратных» чисел.

У абацистов на том же принципе было основано так называемое «железное» деление (наш способ деления у абацистов был известен под именем «золотого»), которое они применяли во всех случаях, тогда как родственный ему способ «обратных» чисел вавилоняне применяли только в тех случаях, когда делитель не содержал других множителей, кроме 2, 3 и 5.

Для нашей цели наиболее интересен способ, при помощи которого вавилоняне извлекали квадратный корень. Если подкоренное выражение представляет точный квадрат, то его можно представить в виде произведения двух равных чисел; если оно не представляет точного квадрата, то его можно представить в виде произведения двух почти равных чисел, например $20 = 4 \cdot 5$. Из этих двух чисел одно будет меньше, а другое больше истинного корня; следовательно, истинный корень будет лежать между ними; мы можем в качестве этого корня взять среднее арифметическое между обоими множителями; в нашем случае $\sqrt{20} = \frac{1}{2}\left(4+5\right) = 4\frac{1}{2}$. В качестве одного из этих множителей мы можем взять любое приближенное значение нашего корня; тогда второй получится в результате деления подкоренного выражения на первый множитель.

Попробуем по этому способу найти квадратный корень из 5. Первое приближенное значение корня будет 2, второе получится от деления 5 на 2, и извлекаемый корень будет равен:

$$\sqrt{5}=\frac{1}{2}\left(2+\frac{5}{2}\right)=2\frac{1}{4}.$$

Это значение лишь в третьем знаке отличается от точного значения корня $\left(\sqrt{5}=2{,}23\right)$ и может быть использовано для всех практических надобностей; если бы мы захотели получить более точное значение извлекаемого корня, то могли бы получить аналогично:

$$\sqrt{5}=\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{4}+\frac{5}{2\frac{1}{4}}\right)=2\frac{17}{72}=2{,}235,$$

и продолжать так сколь угодно далеко.

В греческой литературе этот способ извлечения корня документально засвидетельствован лишь в не так давно найденной «Метрике» Герона Александрийского (I век н. э.), но можно утверждать, что греки его знали уже в V веке до н. э. В это время в греческой математике уже были в употреблении так называемые три средних: среднее геометрическое двух чисел a и b, а именно, $x=\sqrt{ab}$, среднее арифметическое $x_1=\frac{a+b}{2}$ и среднее гармоническое $\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. Из этих средних первое представляет точный корень из произведения ab, второе, т. е. среднее арифметическое, представляет приближенное значение этого корня (и, как легко могут показать наши читатели, с избытком), среднее же гармоническое, которое мы можем переписать в виде:

$$x_2=\frac{2ab}{a+b}=ab:\frac{a+b}{2},$$

представляет результат деления подкоренного выражения на первое приближение, т. е. второе приближение по вавилонскому способу, а именно с недостатком.

Для нас среднее геометрическое и среднее арифметическое являются совершенно несвязанными между собой; то обстоятельство, что греки связывали оба эти средних как друг с другом, так и со средним гармоническим показывает, что все они имели общность происхождения, которым может быть только извлечение корня по вавилонскому способу.

Теперь мы можем приступить к разбору методики Архимеда при определении числа π. Он заключал окружность между описанным и вписанным около нее правильными многоугольниками и, удваивая число их сторон, приближал их к окружности. При этом он начинал с правильных шестиугольников; для определения длины их сторон ему пришлось найти приближенные значения квадратного корня из трех с избытком и недостатком. В тексте «Измерения круга» Архимед без всяких пояснений дает результат, который в современном обозначении может быть записан так:

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} < \frac{265}{153}.$$

В настоящее время мы можем составить довольно вероятное предположение относительно того, каким образом Архимед мог получить эти приближения.

Вавилонские математики располагали таблицами, которые давали числовые значения квадратов всех чисел от 1 до 59. Задача была бы решена совершенно точно, если бы по этим таблицам удалось найти два квадрата, из которых один был бы ровно втрое больше другого; тогда квадратный корень из трех выразился бы совершенно точно дробью, в числителе и знаменателе которой стояли те числа, квадрат одного из которых был бы втрое больше другого. Поскольку, однако, такого рода равенство невозможно, то придется найти два таких числа, утроенный квадрат одного из которых отличался бы на единицу от квадрата другого. По указанной таблице мы могли бы найти:

$$3 \cdot 4^2 = 7^2 - 1$$

$$3 \cdot 15^2 = 26^2 - 1.$$

Если бы мы пренебрегли в первом равенстве единицей, то получили бы для корня из трех очень простое значение:

$$\sqrt{3} = \frac{7}{4} = 1{,}75,$$

которое только в третьем знаке дает неверную цифру (более точное значение будет: $\sqrt{3}=1{,}73$).

Архимед в своих вычислениях исходил из второго равенства:

$$\sqrt{3}=\sqrt{\frac{26^2-1}{15^2}}=\frac{1}{15}\sqrt{26^2-1}.$$

Извлекая корень по вавилонскому методу, мы получаем:

$$\sqrt{26^2-1}=\frac{1}{2}\left(26+\frac{26^2-1}{26}\right)=26-\frac{1}{2\cdot 26}=26-\frac{1}{52}.$$

Это приближение, как мы уже говорили, будет с избытком; чтобы получить приближение с недостатком, достаточно будет, как могут убедиться наши читатели самостоятельно, уменьшить на единицу знаменатель вычитаемой дроби (или увеличить его на единицу в случае, если эта дробь прибавляется). Последнего правила в греческой математике мы непосредственно не находим, но оно есть в трудах некоторых арабских математиков, хорошо знакомых с результатами, достигнутыми греческими учеными.

Таким образом, мы получаем:

$$\sqrt{3}<\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{52}\right)=\frac{26\cdot 52-1}{15\cdot 52}=\frac{1351}{780},$$

$$\sqrt{3}>\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{51}\right)=\frac{26\cdot 51-1}{15\cdot 51}=\frac{1325}{15\cdot 51}=\frac{265}{153}.$$

Для получения верхнего предела для длины окружности Архимед рассматривает правильный шестиугольник, описанный около круга. Пусть (рис. 30) точка O представляет центр окружности, OA — ее радиус, AC — половину стороны описанного шестиугольника; тогда угол AOC будет равняться 30°. Если принять OA за единицу, то AC будет $=\frac{1}{\sqrt{3}}$, а $OC=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

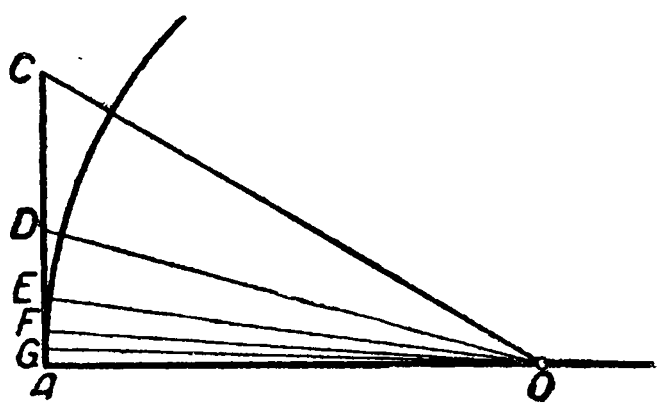


Рис. 30.

При вычислении верхнего предела мы должны для AC брать приближенное значение с избытком и, следовательно, вычислять $\sqrt{3}$ с недостатком. Это позволяет нам положить:

$$AC = 153 \quad ; \qquad OA = 265 \quad ; \qquad OC = 306.$$

Проводим OD — биссектрису угла AOC; тогда AD будет половиной стороны описанного 12-угольника. По свойству биссектрис имеем:

$$AD : DC = AO : OC,$$

или, составив производную пропорцию:

$$\frac{AD}{AD + DC} = \frac{AO}{AO + OC},$$

откуда:

$$AD = AC \cdot \frac{AO}{AO + OC}.$$

Проведя OE — биссектрису угла AOD, находим аналогично AE — половину стороны описанного 24-угольника:

$$AE = AD \cdot \frac{AO}{AO + OD}.$$

Сторону OD мы можем вычислить как гипотенузу в треугольнике AOD по известным катетам AO и AD.

Продолжая аналогично, мы определяем AF и AG — половины сторон описанных 48- и 96-угольников; верхний предел отношения длины окружности к диаметру будет меньше:

$$96 \cdot \frac{AG}{AO} = \frac{14\,688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7}.$$

Таким образом, окружность круга, меньшая периметра описанного правильного 96-угольника, будет и подавно меньше взятого $3\frac{1}{7}$ раз диаметра круга.

При определении нижнего предела Архимед исходит из вписанного в окружность правильного шестиугольника. Пусть (рис. 31) O будет центр окружности, AB — ее диаметр, BC — сторона правильного шестиугольника, а AC — сторона правильного треугольника. Тогда:

$$\frac{CB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Так как при нахождении нижнего предела мы должны брать CB с недостатком и, следовательно, $\sqrt{3}$ с избытком, то мы можем положить

$$CB = 780; \quad AC = 1351; \quad AB = 1560.$$

Деля пополам угол BAC, равный 30°, мы получаем сторону BD правильного 12-угольника. Из подобия треугольников ABD и BDd находим:

$$BD : AD = Bd : AB.$$

Затем в треугольнике ABC по свойству биссектрисы имеем:

$$Bd : dC = AB : AC,$$

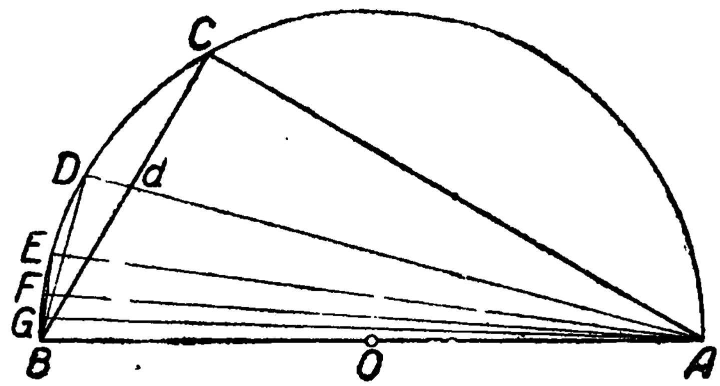


Рис. 31.

или после составления производной пропорции:

$$\frac{Bd}{BC} = \frac{AB}{AC + AB}.$$

Отсюда:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AB}{Bd} = \frac{AC + AB}{BC}.$$

Отношение, стоящее в правой части, нам известно. Обозначим его через k_1. Возведя обе части полученного равенства в квадрат и прибавив по единице к каждой части, получим:

$$\frac{AD^2 + BD^2}{BD^2} = k_1^2 + 1,$$

откуда:

$$\frac{AB}{BD} = \sqrt{k_1^2 + 1}.$$

Таким образом, мы нашли отношение стороны BD правильного 12-угольника к диаметру AB.

Разделив угол BAD пополам, мы получаем сторону

BE правильного 24-угольника. Поступая аналогично предыдущему, приходим к равенству:

$$\frac{AE}{BE}=\frac{AD+AB}{BD}=k_2,$$

откуда:

$$\frac{AB}{BE}=\sqrt{k_2^2+1}.$$

Мы нашли отношение стороны BE правильного 24-угольника к диаметру AB.

Проведя биссектрису AF угла BAE, найдем:

$$\frac{AF}{BF}=\frac{AE+AB}{BE}=k_3$$

и

$$\frac{AB}{BF}=\sqrt{k_3^2+1},$$

где BF представляет сторону правильного 48-угольника.

Наконец, после проведения биссектрисы AG угла BAF найдем для стороны BG правильного 96-угольника отношение:

$$\frac{AG}{BG}=\frac{AF+AB}{BF}=k_4$$

и

$$\frac{AB}{BG}=\sqrt{k_4^2+1}.$$

После этого можно найти отношение периметра правильного вписанного 96-угольника к диаметру AB. Архимед показал, что это отношение, а значит, и подавно отношение длины всей окружности к диаметру будет больше $3\frac{10}{71}$. Таким образом, величина отношения длины окружности к диаметру оказалась заключенной между двумя пределами:

$$3\frac{1}{7}=3{,}14286$$

и

$$3\frac{10}{11}=3{,}14084,$$

что дает для числа π три верные знака *.

---

* Читателей, которые захотели бы познакомиться с более детальной реконструкцией хода вычислений Архимеда, отсылаем к комментариям к «Началам» Евклида (пер. Д. Д. Мордухай-Болтовского, т. III, стр. 210—221, М.—Л., 1950).

12. АРХИМЕД КАК АСТРОНОМ

Нам остается познакомиться еще с одним произведением Архимеда, а именно «Исчислением песка (Псаммит)», которое прибавляет еще одну черту к характеристике великого сиракузца: оно рисует его как астронома. Основная задача упомянутого сочинения состоит в том, чтобы определить число песчинок в объеме мира; для ее решения надо было создать такую систему счисления, при помощи которой можно было бы изображать большие числа и, наконец, определить размеры вселенной. Это соединение вычислительной математики с астрономией не было случайным: оно лежало в самой сущности вавилонской вычислительной астрономии, которая в эпоху Архимеда все более и более стала завоевывать греческий мир. С вычислительными методами вавилонской математики мы уже познакомились; теперь нам остается вкратце рассмотреть ход развития вавилонской астрономии.

Основными предпосылками развития астрономии в Вавилонии, как и в любой другой стране, были потребности в правильном распределении сельскохозяйственных работ и установления календаря.

В основе вавилонского летоисчисления лежал лунный месяц $\left(29\frac{1}{2}\text{ суток}\right)$. Так как $12 \times 29\frac{1}{2} = 354$, то 12 лунных месяцев на 11 дней отличаются от солнечного года в $365\frac{1}{4}$ суток; поэтому для согласования календаря с солнечным годом, управляющим всеми сельскохозяйственными работами, приходилось вставлять иногда тринадцатый месяц. Первоначально эта вставка производилась по мере надобности и случайно, но с VI века до н. э. начинаются попытки привести в стройную систему порядок вставки дополнительных месяцев. Это потребовало более точного определения длины солнечного года и в конце концов привело к установлению в начале IV века до н. э. девятнадцатилетнего цикла, в котором было точно определено, в каких годах должны быть вставлены дополнительные месяцы. Вавилонский календарь с девятнадцатилетним циклом вставок и до сих пор существует в еврейском летосчислении и отчасти в церковном календаре при определении времени переходящих праздников.

Наибольшие достижения вавилонской астрономии были сделаны в то время, когда самостоятельное политическое существование древней Вавилонии было окончено сначала в результате персидского, а затем и македонского завоеваний. Это наложило тяжелый пессимистический оттенок на мышление древневавилонских ученых, а следовательно, и на созданную ими науку. В этой связи стоит подчеркнуть, что тот же самый VI век до н. э., в который началось бурное развитие греческой философии и математики, был также переломной эпохой и в развитии научной мысли древнего Востока: если в Греции была создана основанная на строго логических доказательствах геометрия, то на Востоке научная мысль пошла по линии создания методов вычислительной астрономии, при помощи которых можно было бы заранее предсказывать наступление определенных небесных явлений.

После установления достаточно точного значения продолжительности солнечного года вавилонские математики занялись определением периодов движения других небесных светил, в первую очередь Луны и планет. Исследования последнего времени позволяют составить достаточно ясное представление о том, как это происходило. От VIII—VII веков до н. э. до нас дошло большое количество донесений придворных гадателей ассирийским царям. В этих донесениях большое место занимали небесные знамения; мы узнаем, что вавилонские астрономы производили наблюдения ожидавшихся солнечных и лунных затмений, записывали положение различных планет и старались на их основании сделать предсказания относительно грядущих событий в жизни государства. В связи с более детальным исследованием движений луны и планет были установлены 12 зодиакальных созвездий. Эпоху их появления можно определить довольно точно: в донесениях придворных астрологов VIII—VII веков они еще не играют никакой существенной роли, но в конце VI века их уже знает греческий астроном Клеострат Тенедосский, а в вавилонских астрономических текстах несколько более поздней эпохи они уже являются основой для исследования планетных движений.

Политические перевороты, связанные с ассирийским, халдейским и персидским завоеваниями, привели к полному крушению местных религий, в которых каждый небольшой народец или город имели своего собственного бога-покровителя. То обстоятельство, что эти божества не смогли защитить свои народы от завоевания, привело к тому, что пропала прежняя слепая вера в могущество религии. Вместо отдельных богов-мироправителей стали признавать, что судьбы народов определяются вечным мировым законом — фатумом или роком, направляющим ход событий по строго определенным путям. Выразителями этого неумолимого хода событий стали небесные явления, и прежние боги — мироправители — стали лишь органами, возвещающими и проводящими в жизнь предначертания рока; с земли они перенеслись на небо и стали богами-правителями отдельных планет. Современные названия планет, дошедшие до нас через римлян и греков, происходят от этих вавилонских названий. Так, планета Венера называлась Иштар, Меркурий назывался раньше Набу (бог-покровитель Борсиппы, одного из предместий Вавилона), планета Марс была посвящена богу войны и чумы Нергалу, бывшему городским богом Куты-Сиппары, Юпитеру соответствовал Мардук — городской бог столицы Вавилона, наконец, прообразом Сатурна был бог осеннего солнца Нинурта (библейский охотник Немврод), принадлежавший к сонму богов Ниппура, религиозной столицы древних сумерийцев. Мы можем определенно сказать, когда приблизительно это случилось. В донесениях ассирийских астрономов планеты носят еще старые небожественные названия, пифагорейские философы V века до н. э. тоже пользовались другими названиями планет, но в эпоху Платона и Аристотеля (приблизительно в середине IV века) греки уже пользуются именами планет, происшедшими от вавилонских. За исключением отожествления планеты Венеры с Иштар, которое было произведено уже в очень отдаленную эпоху, остальные переименования были произведены в VII или VI веке, на что указывает посвящение самой яркой после Венеры планеты Юпитера городскому богу Вавилона Мардуку, игравшему в древнее время лишь очень незначительную роль. Что касается Набу и Нергала, то они были городскими божествами Борсиппы и Сиппара, центров двух астрономических вавилонских школ; равным образом, Иштар была одним из почитаемых божеств в третьем астрономическом центре Эрехе или Уруке.

Регулярные наблюдения велись с 747 года до н. э. (так называемая эра Набонассар), и накопившийся материал к III веку до н. э. позволил вавилонским астрономам предвычислять движение планет и затмения Солнца и Луны; соответствующие таблицы дошли до нас и даже позволили внести некоторые исправления в астрономические таблицы затмений XIX века: это объясняется тем, что к третьему веку вавилонские астрономы обладали почти 500-летними непрерывными наблюдениями, тогда как в Западной Европе непрерывные наблюдения стали вестись лишь с начала XVIII века (впервые в Гринвиче).

Наблюдения и методика вычислений вавилонских астрономов стали переходить в Грецию и особенно интенсивно после завоеваний Александром Македонским персидского царства. Около 300 г. до н. э. вавилонский жрец Берос устроил астрономическую обсерваторию на острове Косе и познакомил греков как с вавилонской астрономией, так и с историей Двуречья. Этому способствовало и то, что у греков с вавилонянами установились отношения лучшие, чем с каким-либо из народов, населявших Переднюю Азию. Эллинистические монархи династии Селевкидов покровительствовали вавилонской культуре и религии, видя в народах Двуречья свою опору против племен Ирана, отпадение которых началось уже менее чем через сто лет после завоевания Александра. В свою очередь восточная философия стала завоевывать греческий культурный мир; в особенности большую роль сыграл в этом отношении стоицизм, имевший в основе сильные материалистические черты, но признававший теорию фатума, веления которого можно прочесть при помощи различных гаданий, в первую очередь по небесным знамениям.

Нельзя, конечно, думать, что греки не внесли ничего нового ни в вавилонскую философию, ни в вавилонскую астрономию. Вавилонские гадатели (так называемые халдеи) занимались предсказанием судеб мира и, самое меньшее, судеб государств; демократический и индивидуалистический греческий мир потребовал предсказаний судеб отдельных людей на основании положений планет в момент рождения: астрологические занятия получили большое распространение в широких массах. Кроме такого «количественного» роста, греческие астрономы способствовали и качественному изменению астрономических знаний. Дело в том, что вавилонские астрономы, выработавшие точные математические методы определения движений планет, совершенно не интересовались ни их физическим строением, ни величинами и расстояниями, поскольку для целей предсказания все это было излишним. Наоборот, у греков с их пытливым умом, стремившемся проникнуть в тайны мироздания, вопрос о механизме планетных движений, о величинах и расстояниях небесных светил стал одним из главнейших вопросов астрономии. Уже упоминавшийся выше Евдокс Книдский, кроме своих чисто математических работ, построил механическую модель, довольно точно воспроизводившую планетные движения (гомоцентрические сферы Евдокса) и дал методы определения расстояний и величин Солнца и Луны, по-видимому, легшие в основу астрономических вычислений великого предшественника Архимеда в этой области, а именно, творца гелиоцентрической системы мира Аристарха Самосского, о котором упоминает Архимед в начале «Псаммита».

Поскольку Архимед по существу пользовался теми же методами, что и Аристарх, мы можем изложить данный Аристархом способ, указав лишь те видоизменения, которые внес в него Архимед; это представляет и само по себе большой интерес, поскольку дает возможность выяснить корни гелиоцентрической системы Аристарха, которого называют по праву Коперником античной эпохи.

Для определения отношения расстояний Солнца и Луны от Земли Аристарх воспользовался тем соображением, что, когда видимый лунный диск представляется нам точно разделенным пополам, Земля, Солнце и Луна находятся в вершинах прямоугольного треугольника, прямой угол которого находится в центре Луны (рис. 32). Тогда расстояния Солнца и Луны относятся как гипотенуза и катет полученного прямоугольника. Согласно измерениям Аристарха угол BAC оказался равным 87° (в действительности 89°50′); следовательно, отношение $AC : AB$ равно секансу 87°, т. е. приблизительно 19. Так как видимые диаметры Солнца и Луны приблизительно одинаковы, то отсюда следует, что истинный диаметр Солнца приблизительно в 19 раз больше диаметра Луны. Зная угол BAD, под которым виден радиус Луны, можно определить отношение радиуса Луны к расстоянию Луны от Земли; это отношение будет равно тангенсу угла BAD, или 1° по измерениям Аристарха, т. е. приблизительно $\frac{1}{60}$.

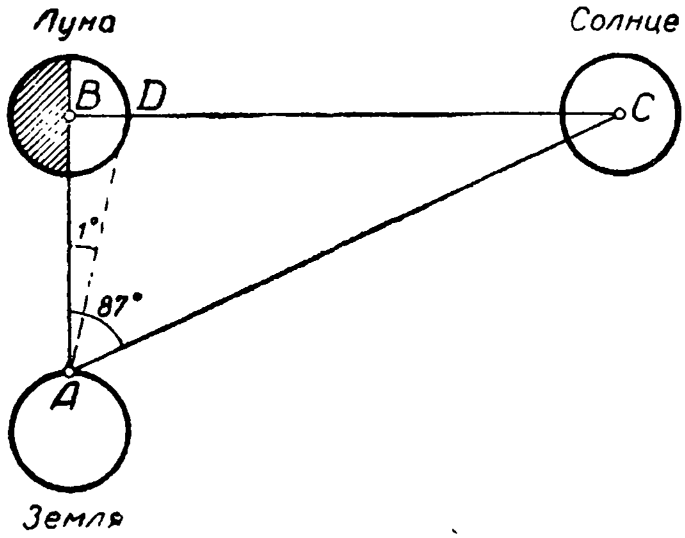


Рис. 32.

Затем Аристарх переходит к сравнению диаметров Солнца и Земли. Он считает, что диаметр конуса отбрасываемой Землей тени на расстоянии лунной орбиты равен двум диаметрам Луны, или приблизительно $\frac{2}{19}$ диаметра Солнца. Теперь мы будем иметь следующую картину. Пусть A, B, C представляют центры Солнца, Земли, Луны, а Aa, Bb, Cc — соответственно радиусы Солнца, Земли и земной тени на расстоянии Луны (рис. 33). Мы имеем:

$$AB = 19BC; \; Cc = \frac{2}{19} Aa.$$

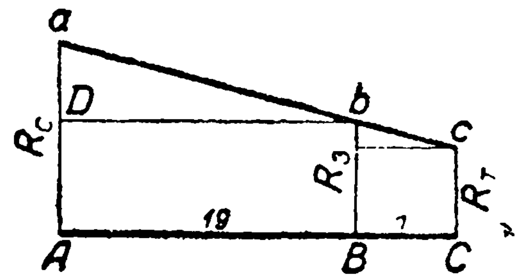


Рис. 33.

Проведя прямые Db и Ec параллельно AC, мы из подобия треугольников получаем:

$$\frac{R_c - R_з}{19} = \frac{R_з - R_m}{1},$$

где R_c и $R_з$ — радиусы Солнца и Земли, а $R_m = \frac{2}{19} R_c$.

$$\text{Отсюда: } R_c - R_з = 19\left(R_з - \frac{2}{19} R_c\right)$$

и окончательно: $$3R_c = 20R_з,$$

иными словами, истинный диаметр Солнца приблизительно в 7 раз больше диаметра Земли. Весьма вероятно, что именно это обстоятельство и было причиной, которая побудила Аристарха считать, что меньшее тело — Земля — должно вращаться вокруг большего — Солнца.

После этого мы можем выразить все интересующие нас расстояния через диаметр Земли.

Диаметр Солнца = 7 диаметрам Земли.

Диаметр Луны = $\frac{1}{20}$ диаметра Солнца = $\frac{7}{20}$ диаметра Земли.

Расстояние Луны от Земли = 30 диаметрам Луны = $10\frac{1}{2}$ диаметрам Земли.

Расстояние Солнца от Земли = 19 расстояниям Луны от Земли = 200 диаметрам Земли.

Теперь нам остается сравнить результаты Аристарха с тем, что было получено Архимедом. Прежде всего нужно отметить, что в то время как Аристарх, как видно из рис. 33, пренебрегал радиусом Земли, считая ее как бы за точку, Архимед учитывал, что наблюдатель находится не в центре, а на поверхности Земли и что, следовательно, необходимо привести наблюдения к центру Земли (между прочим, мы впервые находим это только у Архимеда) *. Затем Архимед пользовался более точными величинами угловых размеров диаметров Солнца и Луны (полградуса, что очень близко к действительности), полученными из произведенных им самим наблюдений. Помимо этого, Архимед, стремясь получить большие числа для размеров вселенной, по возможности брал верхние пределы измеряемых им величин, поэтому его результаты значительно больше Аристарховых. У него расстояние от центра Земли до центра Солнца составляет 5000 диаметров Земли, а расстояние от Земли до Луны — 120 диаметров Земли. Точно также Архимед берет очень сильно преувеличенные размеры земного диаметра.

После астрономической части своего сочинения Архимед занимается созданием такой системы счисления, которая позволила бы ему выразить числом количество песчинок в объеме вселенной. Он начинает с греческой мириады, которую в наших обозначениях мы можем

* Обычно считают, что понятие параллакса было введено в астрономию только Гиппархом (II век до н. э.).

записать как 10^4. Эту мириаду он рассматривает как единицу и ведет счет до мириады мириад — 10^8; соответствующие числа от 1 до 10^8 Архимед называет «первыми числами». Считая 10^8 за единицу и продолжая аналогично, Архимед получает «вторые числа» вплоть до $10^{2 \cdot 8}$. После этого он получает «третьи числа» до $10^{2 \cdot 8}$, и, продолжая таким же образом, доходит до числа $10^{8 \cdot 10^8}$, которое заканчивает «первый период», после которого идет аналогично «второй период» и т. д. Последнее полученное Архимедом число равно $10^{8 \cdot 10^8 \cdot 10^8}$.

Описав предложенную систему счисления, Архимед переходит к поставленной в самом начале задаче — определению числа песчинок в размере вселенной. Оказывается, что это число не так уже велико: по вычислениям Архимеда число песчинок, которые могли бы заполнить вселенную, не превышает тысячи мириад «восьмых» чисел, т. е. числа $10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{7 \cdot 8} = 10^{63}$.

В «Псаммите» мы сталкиваемся еще с одной стороной греческой вычислительной математики, а именно, с нарождающейся тригонометрией, развитие которой было тесно связано с потребностями астрономии. И Архимед и Аристарх уже пользовались как само собой разумеющейся фундаментальной теоремой греческой тригонометрии, которую в современном обозначении можно записать так:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{tg\beta}{tg\alpha},$$

или синус возрастает медленнее, а тангенс быстрее, чем соответствующий угол.

«Псаммитом» не ограничиваются астрономические занятия Архимеда; он перенес инженерное дело даже в область чистой астрономии и построил модель планетария — небесной сферы, описанной им в специальном, не дошедшем до нас сочинении. Эта небесная сфера после взятия Сиракуз была взята в качестве военной добычи Марцеллом, пожертвовавшим второй экземпляр сферы в храм Доблести. Об этой сфере упоминает Цицерон, говоря, что «в изобретении Архимеда чудесным было искусство, с которым он мог объединить в одной системе и воспроизвести при помощи одного вращения все очень отличающиеся друг от друга движения и различные периоды обращения различных светил. Когда сфера приводилась в движение, то при каждом обороте можно было видеть, как Луна появлялась вслед за Солнцем на земном горизонте подобно тому, как она появляется каждый день на небе; далее можно было видеть, как солнце исчезает так же, как и на небе, и затем, как Луна постепенно погружается в земную тень в тот самый момент, когда солнце располагается с противоположной стороны Земли» (Цицерон «О государстве», кн. 1, 14).

Сфера Архимеда, пожертвованная Марцеллом в храм Доблести, хранилась в последнем более половины тысячелетия; последнее упоминание о ней мы встречаем в стихотворении последнего талантливого римского поэта Клавдиана (около 400 г. н. э.):

Неба устав, законы богов, гармонию мира
  Все сиракузский старик хитро на землю принес.
Воздух, скрытый внутри, различные движет светила
  Точно по данным путям, сделав творенье живым.
Ложный бежит зодиак своего в течение года,
  Лик поддельный Луны вновь каждый месяц идет.
Смелым искусством гордясь, свой мир приводя во вращенье,
  Звездами вышних небес правит умом человек.

Это стихотворение позволяет думать, что сфера Архимеда приводилась в движение каким-то пневматическим прибором. Проходит десятилетие после написания этого гордого стихотворения, и готы захватывают Рим (410 год); в последовавшем грабеже языческих храмов, вероятно, погибла и небесная сфера Архимеда.

13. СМЕРТЬ АРХИМЕДА

Нам остается теперь только описать обстоятельства, сопровождавшие смерть Архимеда.

Мы видели уже, какие тяжелые пессимистические, пропитанные покорным подчинением судьбе настроения владели широкими народными массами восточного Средиземноморья под гнетом иностранных завоеваний. В III веке до н. э. эти настроения стали понемногу охватывать и греческий мир, где независимость отдельных городов-государств была ликвидирована вышедшими из среды полководцев Александра эллинистическими монархами. Но эти завоеватели были сравнительно очень кроткими и милостивыми по сравнению с тем новым претендентом на мировое господство, который в середине

III века появился на мировой арене в лице римского государства. В момент своего выступления римляне представляли великолепно организованную и дисциплинированную, но вместе с тем очень грубую и жестокую силу, порабощавшую окрестные народы. В середине III века им пришлось столкнуться с другим претендентом — Карфагеном: одержанная ими в первой Пунической войне победа еще не была решающей. Правителю Сиракуз Гиерону удалось остаться в стороне от борьбы двух гигантов, но он учитывал грядущую опасность и деятельно готовился к обороне родного города от всяких случайностей; в этой деятельности большую помощь ему оказывал Архимед. После смерти Гиерона, когда началась вторая Пуническая война, Сиракузам уже не удалось остаться в стороне от войны: началась описанная нами выше осада, которая в результате мер, принятых Архимедом, превратилась в блокаду. В конце концов римлянам удалось обмануть бдительность сиракузян и после одного большого праздника ворваться в город. Во время последовавшего грабежа и избиения погиб Архимед. Обстоятельства его смерти Плутарх в биографии Марцелла, рассказывает так:

> «Всего более жалел Марцелл о смерти Архимеда. Последний находился дома, рассматривая какую-то геометрическую фигуру; так как он погрузился в это исследование всем своим умом и всеми чувствами, то не заметил шума, производимого бегавшими туда и сюда римлянами, и не знал, что город уже был в их власти. Вдруг перед ним явился солдат с приказом следовать за ним к Марцеллу. Архимед отказался идти, пока не найдет решения своей задачи. Раздраженный римлянин вытащил меч и убил его. Другие говорят, что какой-то солдат бросился на него с мечом, а Архимед настоятельно стал просить его подождать немного, пока он не закончит задачу, но солдату, которому было мало дела до его доказательства, пронзил его мечом. Третьи передают, что Архимед сам пошел к Марцеллу, неся в ящике математические инструменты — солнечные квадранты, небесные глобусы и угломеры для измерения видимой величины Солнца, но попавшиеся ему по дороге солдаты подумали, что он несет в ящике золото, и убили его, что-

Рис. 34. Античное изображение смерти Архимеда.

бы овладеть последним. Во всяком случае все историки признают, что Марцелл был очень опечален смертью Архимеда, держал себя по отношению к убийце как к святотатцу и, приказавши отыскать родственников Архимеда, милостиво с ними обошелся». В этой же биографии Плутарх дает следующую характеристику Архимеда:

«Архимед имел возвышенную душу и глубокий ум; обладая громадным множеством геометрических теорий, он не хотел оставить ни одной книги относительно построения тех машин, которые доставили ему славу знания, превышающего способности человека и почти божественного. Рассматривая механику и вообще всякое, имеющее целью практические потребности, искусство как неблагородное и низменное занятие, он целиком отдавался только таким наукам, красота и совершенство которых свободны от законов необходимости. В его сочинениях доказательство спорит о первом месте с предметом исследования, последний придает красоту и величие, первое же производит убеждение и сообщает чудесную форму. Во всей геометрии нельзя найти более трудных и глубокомысленных задач, которые были бы решены так просто и ясно, как те, которые были предметом исследований Архимеда. Одни приписывают эту ясность его высоким дарованиям, другие же напряженному труду, при помощи которого ему удавалось дать своим открытиям такое выражение, что они становятся доступными без труда. Если читатель сам и не находит доказательства, то при изучении Архимедовых сочинений у него создается впечатление, что он и сам смог бы без труда найти решение: так легко и быстро Архимед приводил к тому, что он хотел доказать. Поэтому не кажется невероятным, что он, как рассказывают, будучи околдован геометрией как какой-то домашней сиреной, забывал о пище и пренебрегал заботами о своем теле. Часто его заставляли насильно принимать ванну и натираться мазями, а он чертил на золе геометрические фигуры и на своем намазанном маслом теле проводил пальцем линии, настолько он был охвачен этими занятиями и действительно одухотворен музами. Но хотя у него было много прекрасных открытий, он, говорят, просил своих родственников и друзей начертить на его могиле только цилиндр и вписанный в него шар и указать соотношение между объемами этих тел. Таков был Архимед, который благодаря своим глубоким познаниям в механике смог, насколько это от него зависело, сохранить от поражения и себя самого и свой город».

Эта характеристика слишком известна, чтобы ее можно было опустить, но тем не менее в настоящее время в нее приходится внести большое количество поправок. Плутарх рисовал Архимеда по образцу идеала ученого своего времени (около 46—126 гг. н. э.); в действительности Архимед много занимался и прикладной механикой, умел производить точные наблюдения, описанные, например, в «Псаммите». Он занялся математикой сравнительно поздно и то сумел приложить ее к исследованию явлений природы. Равным образом, нельзя согласиться и с мнением Плутарха относительно «легкости» чтения произведений Архимеда. Нас поражает только простота и изящество основной идеи каждого доказательства, но разобраться в этом и выделить идею из строго математически изложенного доказательства не так-то

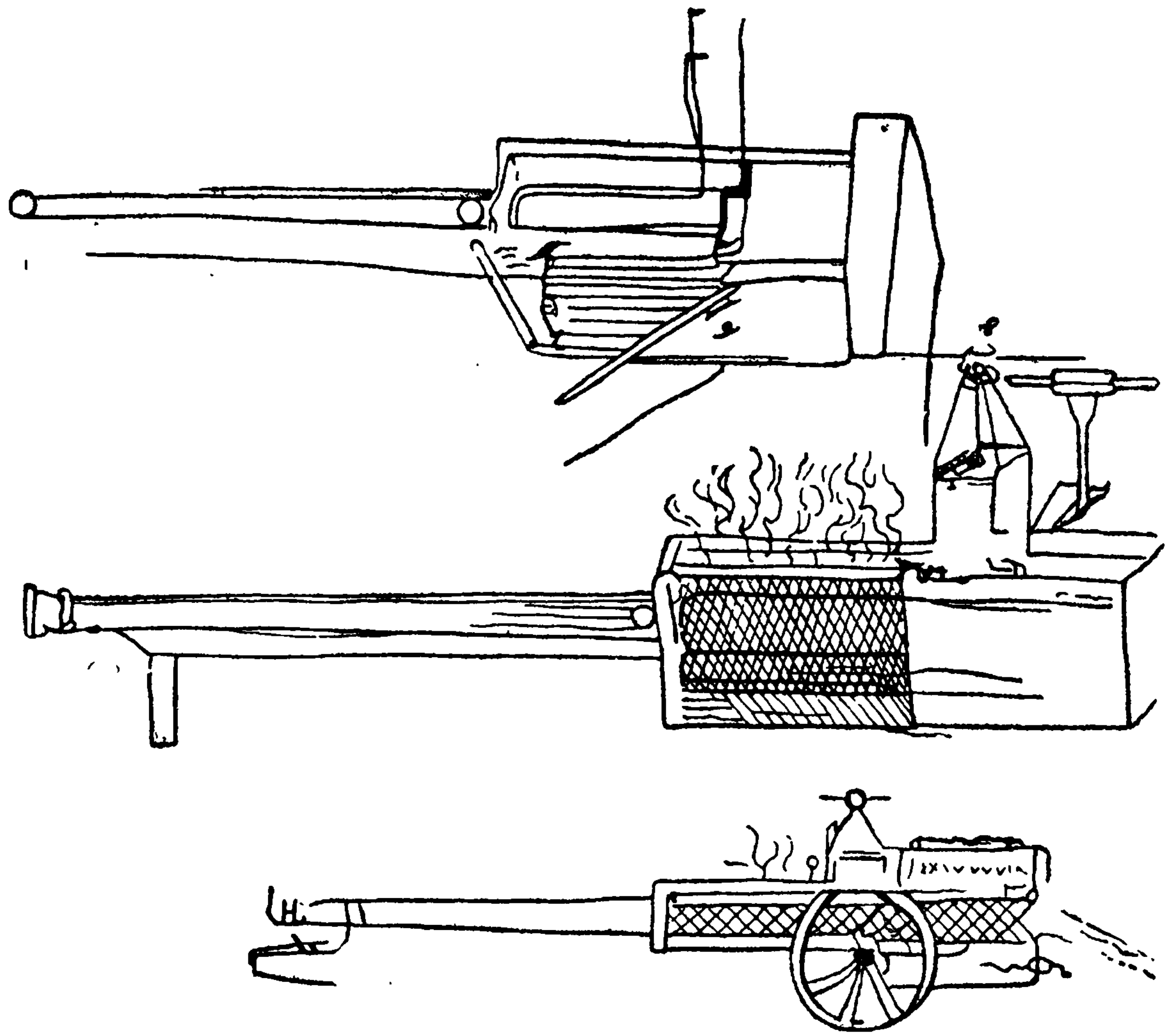


Рис. 35. **„Пушка" Архимеда (рисунок Леонардо да Винчи).**

легко, но в этом виноват уже не Архимед, а математические требования его времени. Даже в математику Архимед вводил, как мы видели, механические методы; поэтому рисовать Архимеда как отвлеченного геометра, как это делает Плутарх, просто нельзя. Наоборот, современного исследователя поражает в Архимеде именно разнообразие его дарований: в нем соединяются и математическое искусство (и не только геометрическое, а также и вычислительное), и механические дарования, и инженерное искусство, и астрономические и оптические работы. Наконец, что для нас особенно важно, он является предшественником современной математической физики и современного математического анализа.

Настоящих преемников Архимеда иам приходится искать только в XVII веке н. э., когда трудами Галилея, Гюйгенса и Ньютона было положено начало современным физико-математическим наукам.

СОДЕРЖАНИЕ

Проф. *Веселовский Иван Николаевич*

Архимед

Редактор *В. М. Дуков*
Художественный редактор *Б. М. Кисин*
Технический редактор *Н. В. Сахарова*
Корректор *А. Рукосуева*

Сдано в набор 27.XII.1956 г. Подписано
к печати 5.IX.1957 г. $84 \times 108^1/_{32}$
Печ. л. 7 (5,74). Уч.-изд. л. 5,42.
Тираж 30 000 экз. А 07723.

Учпедгиз. Москва, Чистые пруды, 6.

Смоленск, типография имени Смирнова, д. 2.
Заказ № 9054.
Цена 1 р. 35 к.

ОПЕЧАТКИ

№ пп.	Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
1	63	6 снизу	ϖr	ωr
2	72	9 сверху	Ch	CL
3	78	7 снизу	на отрезке	не на отрезке
4	81	1 сверху	Ah	AL
5	104	6 сверху	...третьи числа до $10^{2\cdot 8}$...	...третьи числа до 10^{3-8}...

Заказ № 9054. И. Н. Веселовский, Архимед.