Основы теории всплесков

Новиков И.Я. $\boxed{\text{Стечкин С.Б.}}$

Содержание

1 Введение

Всплеском, в самом общем виде, называют определенную на числовой оси функцию ψ, имеющую нулевое среднее и достаточно быстрое убывание на бесконечности. Термин всплеск предложен К.И.Осколковым в качестве эквивалента английского термина wavelet (фр. - ondelette), что буквально переводится как маленькая (имеется в виду продолжительность) волна, волночка. Термин всплеск лучше отражает суть дела, так как выше упомянутые свойства означают, что функция ψ представляет собой затухающее колебание. Всплески используются или в качестве ядра интегрального преобразования

$$(W_\psi f)(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbf{R}} f(t)\psi\left(\frac{t \Leftrightarrow b}{a}\right) dt,\ a,\, b \in \mathbf{R},\ a > 0; \qquad (1.1)$$

или в качестве генерирующей функции для построения базиса при помощи дилатаций, т.е. сжатий с сохранением нормы в $L^2(\mathbf{R})$ $\psi_j(t) := \psi_{j0}(t) := 2^{j/2}\psi(2^j t), j \in \mathbf{Z}$, и сдвигов $\psi_{jk}(t) := \psi_j(t \Leftrightarrow k2^{-j}) = 2^{j/2}\psi(2^j t \Leftrightarrow k), k \in \mathbf{Z}$.

Теория всплесков лежит на пересечении чистой математики, вычислительной математики, преобразования сигналов и изображений. Всплесковый анализ находит все более широкое применение в различных областях науки, так как он дает более подробную информацию о сигнале, изображении или операторе, чем стандартный анализ Фурье. Интегральное всплесковое преобразование дает одновременно локальную информацию о функции и о ее преобразовании Фурье, причем для анализа высокочастотных составляющих функции - локализация более сильная (для повышения точности), а для низкочастотных - локализация более слабая (для получения полной информации). Всплесковые ряды очень удобны для приближенных вычислений, поскольку количество операций, необходимых для вычисления коэффициентов разложения, так же как и количество операций для восстановления функции по ее всплесковым коэффициентам, пропорционально количеству отсчетов функции. Перечисленные особенности всплесков делают их очень популярными в самых различных приложениях: при анализе свойств сейсмических и акустических сигналов (именно здесь впервые возник термин wavelet [GM]); при обработке и синтезе различных сигналов, например речевых; при анализе изображений; для изучения турбулентных полей; для сжатия больших объемов информации и т.д.

Основными монографиями о всплесках являются [M],[D],[C].

На русском языке литературы по всплескам крайне мало. Отметим недавний обзор Н.М.Астафьевой [A] и предыдущую статью авторов [NS].

2 Обозначения и определения

$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{p}} = (\int_{\mathbf{R}^\mathbf{n}} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^{\mathbf{p}} \mathbf{dx})^{\mathbf{1/p}}$ - норма в пространстве $L^p(\mathbf{R}^n),\ 1 \leq p < \infty$.

$\kappa_{\mathbf{e}}$ – характеристическая функция множества e.

$|\mathbf{e}|$ – мера Лебега множества $e \subset \mathbf{R}^n$.

Модули непрерывности: $\omega(h, f) := \sup_{|x-y|<h} |f(x) \Leftrightarrow f(y)|$;
для $l \in \mathbf{N}$ l-ый модуль непрерывности определяется формулой:
$\omega_l(h, f) := \sup_{|y|<h} \sup_x |\Delta_y^l(x)|$, где $\Delta_y^l(x, f) := \sum_{j=0}^l (\Leftrightarrow 1)^{l-j} \binom{l}{j} f(x + jy)$.

$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{\mathbf{R}^\mathbf{n}} \mathbf{f}(\mathbf{t}) \overline{\mathbf{g}(\mathbf{t})}\, \mathbf{dt}$ – скалярное произведение.

$\mathbf{R}_+^{n+1} := \{(x, t) : x \in \mathbf{R}^n, t > 0\}$ - верхнее полупространство.

$[\mathbf{x_k}]_\mathbf{k}$ - замыкание линейной оболочки $\{x_k\}_k$ в рассматриваемом пространстве.

ОНБ - ортонормированный базис.

$C(A)$ - пространство функций, непрерывных на A.

$C^m(A)$ - пространство функций, m раз непрерывно дифференцируемых на A.

$D(\mathbf{R}^n)$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

$S(\mathbf{R}^n)$ - пространство Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций.

Преобразование Фурье функции $f \in S(\mathbf{R}^n)$ определяется формулой

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle x, \omega \rangle} f(x)\, dx, \quad \omega \in \mathbf{R}^n, \tag{2.1}$$

где $\langle x, \omega \rangle := \sum_1^n x_k \omega_k$. Тогда $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x, \omega \rangle} \widehat{f}(\omega)\, d\omega, \quad x \in \mathbf{R}^n$ и $(2\pi)^n \int_{\mathbf{R}^n} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 dx$ (тождество Планшереля).

Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \partial^\alpha := (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} + \cdots + (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$ и $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Определение 2.1 *Пусть* $z := x + it$, *где* $(x,t) \in \mathbf{R}_+^2$. *Функция* $f(z)$ *принадлежит пространству Харди* $\mathbf{H}^p(\mathbf{R}_+^2)$, $0 < p < \infty$, *если она голоморфна на* $\mathbf{R}_+^2$ *и*

$$\sup_{t>0} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x+it)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty. \tag{2.2}$$

Определение 2.2 *Ядро Пуассона на* $\mathbf{R}_+^{n+1}$ *определяется формулой*

$$p_a(x) := \pi^{-(n+1)/2} \mathbf{\Gamma}(\frac{n+1}{2}) \frac{a}{(|x|^2 + a^2)^{(n+1)/2}}, \ x \in \mathbf{R}^n, \ a > 0.$$

Интегралом Пуассона называют свертку функции f *с ядром* p_a :

$$F(x,a) := \int_{\mathbf{R}^n} p_a(x \Leftrightarrow y) f(y) dy, \ x \in \mathbf{R}^n, \ a > 0.$$

Функция F *является гармонической на* $\mathbf{R}_+^{n+1}$ *и совпадает на границе* $\mathbf{R}_+^{n+1}$ *с* f.

Некасательная максимальная функция равна $F^*(x) := \sup_{\gamma(x)} |F(y,a)|$, *где* $\gamma(x) := \{(y,a) \in \mathbf{R}_+^n : a > |y \Leftrightarrow x|\}$ *- конус Лузина.*

Вещественные классы Харди $H^p(\mathbf{R}^n)$, $p > 0$, *состоят из локально интегрируемых функций* f, *для которых* $\int_{\mathbf{R}^n} \frac{|f(x)|}{1+|x|^{n+1}} < \infty$ *и некасательная максимальная функция* F^* *принадлежит* $L^p(\mathbf{R}^n)$, $\|f\|_{H^p(\mathbf{R}^n)} = \|F^*\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}$.

Определение 2.3 *Функция* $f \in L_{loc}^2(\mathbf{R}^n)$ *принадлежит пространству* $BMO(\mathbf{R}^n)$, *если она имеет ограниченные средние осцилляции (Bounded Mean Oscillations)*

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) \Leftrightarrow f_B|^2 dx \right)^{1/2} = \|f\|_{BMO} < \infty,$$

где $\sup$ *берется по всем шарам* $B \subset \mathbf{R}^n$ *и* $f_B := \frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx$.

Определение 2.4 *Преобразованием Гильберта Hu действительной функции u называют действительную функцию v, такую, что функция* $u(x) + iv(x)$ *является следом на* $\mathbf{R}$ *голоморфной функции* $f(x+iy)$. *В терминах преобразования Фурье это эквивалентно тому, что* $\widehat{v}(\xi) = \Leftrightarrow i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{u}(\xi)$.

Определение 2.5 *Линейный оператор, определенный и ограниченный в* $L^2(\mathbf{R}^n)$, *называется оператором Кальдерона-Зигмунда, если существует функция* $K(x,y)$, *определенная при* $x, y \in \mathbf{R}^n$, $x \neq y$, *такая, что для некоторого* $\alpha > 0$

$$|K(x,y)| \leq \tfrac{C}{|x-y|^n};$$

$$|K(x,y) \Leftrightarrow K(x,y')| \leq C\tfrac{|y-y'|^\alpha}{|x-y|^{n+\alpha}}, \quad |y \Leftrightarrow y'| \leq \tfrac{1}{2}|x \Leftrightarrow y|;$$

$$|K(x,y) \Leftrightarrow K(x',y)| \leq C\tfrac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{n+\alpha}}, \quad |x \Leftrightarrow x'| \leq \tfrac{1}{2}|x \Leftrightarrow y|;$$

и для любой функции $f \in D(\mathbf{R}^n)$ *и для любого* $x \notin \mathrm{supp}\, f$ $Tf(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x,y)f(y)dy$.

Теорема 2.1 *Пусть* T *– оператор Кальдерона-Зигмунда. Тогда при* $1 < p < \infty$ $\quad \|Tf\|_p \leq C_p\,|||T|||\,\|f\|_p$, *где* $|||T||| := \|T\|_2 + \inf C$.

Определение 2.6 *Если* $s = 0$, *то пространство Соболева* $W_2^s(\mathbf{R}^n)$ *совпадает с* $L_2(\mathbf{R}^n)$. *Для* $s \in \mathbf{N}$ *функция* f *принадлежит* $W_2^s(\mathbf{R}^n)$, *если она принадлежит* $L_2(\mathbf{R}^n)$ *вместе со всеми своими производными* $\partial^\alpha f$ *(в смысле обобщенных функций) с* $|\alpha| \leq s$.

Известно, что последнее эквивалентно $\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\omega|^2)^s|\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega < \infty$, *что принимается в качестве определения при произвольном* $s \geq 0$.

Пространств $W_2^s(\mathbf{R}^n)$ *для* $s < 0$ *определяется как двойственное к* $W_2^{-s}(\mathbf{R}^n)$. *Применяя тождество Парсеваля, легко получить, что умеренное распределение* S *принадлежит* $W_2^s(\mathbf{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда его преобразование Фурье* $\widehat{S}$ *принадлежит* $L^2_{loc}(\mathbf{R}^n)$ *и удовлетворяет условию* $\int_{\mathbf{R}^n}|\widehat{S}(\omega)|^2(1+|\omega|^2)^s d\omega < \infty$.

Определение 2.7 *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$. *Если* $s \geq 0$ *и* s *– целое, то пространство* W_p^s *состоит из функций* f, *таких, что* f *и все ее производные* $\partial^\alpha f$ *с* $|\alpha| \leq s$ *принадлежат* $L^p(\mathbf{R}^n)$. *Это эквивалентно условию* $(I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} f \in L^p(\mathbf{R}^n)$. *Последнее условие определяет* W_p^s *для произвольного действительного* s.

Определение 2.8 *Пусть* $1 \leq p, q \leq \infty$, $s > 0$ *и* $s < m \in \mathbf{N}$. *Функция* f *принадлежит пространству Бесова* $B_p^{s,q}$, *если* $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ *и существуют последовательность положительных чисел* ϵ_j *из* $l^q(\mathbf{N})$ *и последовательность функций* f_j *из* $L^p(\mathbf{R}^n)$, *такие, что*

$$\|f \Leftrightarrow f_j\|_p \leq \epsilon_j 2^{-js}, j \in \mathbf{N}, \tag{2.3}$$

и

$$\|\partial^\alpha f_j\|_p \leq \epsilon_j 2^{(m-s)j}, \tag{2.4}$$

для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbf{N}^n$ *с* $|\alpha| = m$.

Определение 2.9 *При* $0 < s < 1$ *пространство Гельдера* $\mathbf{C}^s(\mathbf{R}^n)$ *состоит из функций* $f \in C(\mathbf{R}^n)$ *таких, что* $\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |f(x)| < \infty$ *и* $\sup_{h>0} \frac{\omega(h)}{h^s} < \infty$.

$\mathbf{C}^1(\mathbf{R}^n)$ - *это класс Зигмунда:*

$$\mathbf{C}^1(\mathbf{R}^n) := \{f \in C(\mathbf{R}^n) : \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |f(x)| < \infty, \quad \sup_{h>0} \frac{\omega_2(h, f)}{h} < \infty\}.$$

Для $s \in (m, m+1]$, $m \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{C}^s(\mathbf{R}^n) := \{f \in C^m(\mathbf{R}^n) : \forall |\alpha| \leq m \quad \partial^\alpha f \in \mathbf{C}^{s-m}\}.$$

3 Прототипы всплесков в работах Лузина и Кальдерона

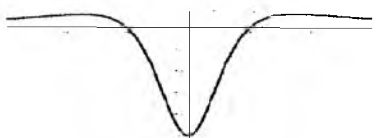
Одно из первых появлений всплесков в математическом анализе относится к 30-тым годам. Хорошо известная характеризация пространств $\mathbf{H}^p$ в терминах интеграла площадей или функции Лузина [L] содержит прототипы всплесков (см. [CW]).

Работа Н.Н.Лузина [L] посвящена анализу и синтезу функций из $\mathbf{H}^p(\mathbf{R}^2_+)$ при помощи интегрального представления

$$f(x) = \frac{2i}{\pi} \iint_{\mathbf{R}^2_+} t f'(y + it) \frac{dydt}{(x \Leftrightarrow y + it)^2}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{3.1}$$

Представлению (3.1) можно придать всплесковый вид (1.1). Рассмотрим функцию $\psi(t) := (t+i)^{-2}, t \in \mathbf{R}$, которая осциллирует (т.е.

$\int_{\mathbf{R}} \psi(t)dt = 0$), регулярна и локализована. Благодаря этим свойствам родоначальники всплесков А.Гроссман (A.Grossman) и Ж.Морле (J.Morlet) [GM] назвали ψ - wavelet, буквально маленькая (имеется в виду продолжительность) волна.



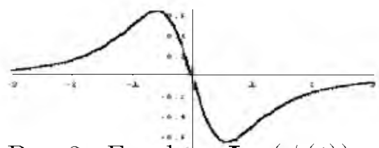


Рис.1. График $\mathbf{Re}(\psi(t))$. Рис.2. График $\mathbf{Im}(\psi(t))$.

Рассмотрим $\psi_{a,b}(t) := a^{-1/2}\psi(\frac{t-b}{a}) = a^{3/2}(t \Leftrightarrow b + ia)^{-2}$ для $a > 0, b \in \mathbf{R}$. Определим

$$(W_\psi f)(a,b) := \langle f, \psi_{a,b}\rangle = 2\pi i a^{3/2} f'(b+ia). \tag{3.2}$$

В силу (3.1) функция f представима в виде суперпозицию всплесков $\psi_{a,b}(t)$ с коэффициентами $(W_\psi f)(a,b)$. Для любой функции $f \in \mathbf{H}^2(\mathbf{R}^2_+)$ имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{2i}{\pi} \iint_{\mathbf{R}^2_+} af'(b+ia)\tfrac{dbda}{(x-b+ia)^2} = \\ &= \tfrac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \left[\int_{\mathbf{R}} (W_\psi f)(a,b)\psi_{a,b}(x)\, db\right] \tfrac{da}{a^2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Представление (3.1) позволяет охарактеризовать функции из $\mathbf{H}^p(\mathbf{R}^2_+)$.

Определение 3.1 *Интегралом площадей или функцией Лузина называется*

$$(Sf)(x) = \left(\iint_{\gamma(x)} |f'(y+it)|^2 dydt\right)^{1/2}, \quad x \in \mathbf{R} \tag{3.4}$$

где $\gamma(x) = \{(y,t) \in \mathbf{R}^2 : t > |y \Leftrightarrow x|\}$ *- конус Лузина.*

Теорема 3.1 *Пусть* $0 < p < \infty$. *Тогда* $f \in \mathbf{H}^p(\mathbf{R}^2_+)$ *если, и только если,* $Sf \in L^p(\mathbf{R})$.

Для $1 < p < \infty$ это классический результат (см. [S],[Z]). Для $0 < p \le 1$ это результат А.Кальдерона [Ca].

Рассмотренные формулы обобщаются в тождестве Кальдерона [Ca1]. Пусть $\psi \in L^1(\mathbf{R}^n)$, $\int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)dx = 0$ и преобразование Фурье $\widehat{\psi}(\omega), \omega \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty |\widehat{\psi}(t\omega)|^2 \frac{dt}{t} = 1 \quad \text{для любых} \quad \omega \neq 0. \tag{3.5}$$

Например, если ψ достаточно регулярна, локализована, имеет нулевое среднее и радиальна, то существует константа $c > 0$, такая, что $c\psi(x)$ удовлетворяет (3.5).

Положим $\psi_a(x) = a^{-n/2}\psi(\frac{x}{a})$ и $\psi_{a,b}(x) = a^{-n/2}\psi(\frac{x-b}{a})$. Следуя [GM], определим

$$(W_\psi f)(a,b) := \langle f, \psi_{a,b} \rangle. \tag{3.6}$$

Тогда имеет место следующая формула восстановления

$$f(x) = \int_0^\infty \left[\int_{\mathbf{R}^n} (W_\psi f)(a,b)\psi_{a,b}(x)\, db \right] \frac{da}{a^{n+1}}. \tag{3.7}$$

Эквивалентная формулировка для (3.7) имеет вид

$$I = \int_0^\infty Q_a Q_a^* \frac{da}{a^{n+1}}, \tag{3.8}$$

где I - тождественный оператор, $Q_a(f) = f * \psi_a$ - оператор свертки, а Q_a^* - сопряженный к Q_a оператор. Тождество Кальдерона (3.8) имеет важные приложения в анализе классических функциональных пространств посредством условий, использующих модуль градиента гармонического продолжения (см. [S]). Например, для полугруппы Пуассона $P_a f(x) := F(x,a)$ (опр. 2.2), оператор Q_a имеет вид $Q_a = \Leftrightarrow a(\partial/\partial a)P_a$.

В формулах (3.6) и (3.7) функции $\psi_{a,b},\ b \in \mathbf{R}^n,\ a > 0$, используются так, как будто они образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R}^n)$: коэффициенты разложения вычисляются по формуле (3.6), а представление функции f в терминах этих коэффициентов дается (3.7).

Можно заменить избыточное множество функций $\psi_{a,b}, b \in \mathbf{R}^n, a > 0$, на ортогональный базис $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$, который конструируется по тем же алгебраическим правилам (путем сжатий и сдвигов). Ортонормированный базис $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$, оказывается универсальным безусловным базисом для классических пространств функций и распределений.

4 Преобразование Габора

Другим предшественником всплесковых преобразований является преобразование Габора. Пусть функция f принадлежит $L^2(\mathbf{R})$ и $\widehat{f}$ - ее преобразование Фурье (2.1). Для вычисления $\widehat{f}(\omega)$ в любой точке ω в равной степени используются все значения f, поэтому $\widehat{f}$ не отражает изменений частотных характеристик f по времени t. Кроме того, изменение функции f в сколь угодно малой окрестности произвольной точки t_0 приводит к изменению всего спектра.

Для исправления этих недостатков Д.Габор рассмотрел в [G] следующее преобразование. Пусть

$$g_\alpha(t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}, \tag{4.1}$$

где α - фиксированный параметр.

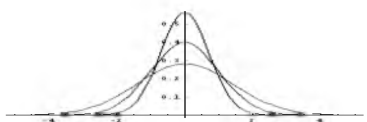


Рис.1. График g_α, $\alpha = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

Функция g_α используется в качестве так называемого временного окна. Преобразование Габора функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ определяется формулой

$$(\Gamma_b^\alpha f)(\omega) := \int_{\mathbf{R}} (e^{-i\omega t} f(t)) g_\alpha(t \Leftrightarrow b)\, dt. \tag{4.2}$$

Ясно, что $(\Gamma_b^\alpha)(\omega)$ локализует преобразование Фурье вокруг точки $t = b$.

Так как $\int_{\mathbf{R}} g_\alpha(t \Leftrightarrow b)\, db = \int_{\mathbf{R}} g_\alpha(x)\, dx = 1$, то $\int_{\mathbf{R}} (\Gamma_b^\alpha f)(\omega)\, db = \widehat{f}(\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$. Таким образом, преобразование Габора разлагает преобразование Фурье на локальную спектральную информацию.

Приведем общее определение оконной функции. Функцию w называют оконной, если $w \in L^2(\mathbf{R})$ и $xw(x) \in L^2(\mathbf{R})$. Для количественной характеристики локализованности функции w используются следующие величины:

$$t^* := \frac{1}{\|w\|_2^2} \int_{\mathbf{R}} x|w(x)|^2\, dx \qquad \text{- центр;}$$

$$\Delta_w := \frac{1}{\|w\|_2^2} \{\int_{\mathbf{R}} (x \Leftrightarrow t^*)^2 |w(x)|^2\, dx\}^{1/2} \qquad \text{- радиус.}$$

Ширина функции w полагается равной двум радиусам. Легко вычислить, что $\Delta g_\alpha = \sqrt{\alpha}$.

Преобразование Габора можно интерпретировать следующим образом. Пусть $G^{\alpha}_{b,\omega}(t) := e^{i\omega t} g_{\alpha}(t \Leftrightarrow b)$.

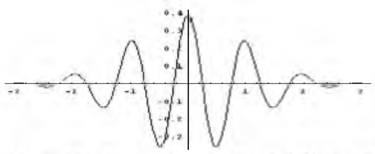


Рис.2. График $\mathbf{Re}(G^{0.5}_{0,2\pi}(t))$.

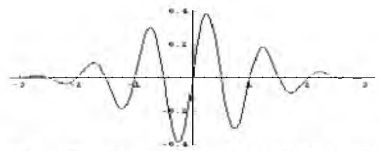


Рис.3. График $\mathbf{Im}(G^{0.5}_{0,2\pi}(t))$.

Тогда

$$(\Gamma^{\alpha}_{b} f)(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{G^{\alpha}_{b,\omega}(t)}\, dt. \tag{4.3}$$

Преимущество (4.3) состоит в возможности применить тождество Планшереля. Действительно, $\widehat{G^{\alpha}_{b.\omega}}(\eta) = e^{-ib(\eta-\omega)} e^{-\alpha(\eta-\omega)^2}$. Поэтому

$$(\Gamma^{\alpha}_{b} f)(\omega) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\eta) e^{ib(\eta-\omega)} e^{-\alpha(\eta-\omega)^2}\, d\eta =$$
$$= \tfrac{e^{-ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_{\mathbf{R}} (e^{ib\eta}\widehat{f}(\eta)) g_{1/4\alpha}(\eta \Leftrightarrow \omega)\, d\eta = \tfrac{e^{-ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} (\Gamma^{1/4\alpha}_{\omega} \widehat{f})(\Leftrightarrow b).$$

Таким образом, преобразование Габора функции f с оконной функцией g_{α} в точке $t = b$ с точностью до множителя совпадает с преобразованием Габора функции $\widehat{f}$ с оконной функцией $g_{1/4\alpha}$ в точке $\eta = \omega$. Произведение ширины окна g_{α} на ширину окна $g_{1/4\alpha}$ равно 2. Декартово произведение $[b \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}, b + \sqrt{\alpha}] \times [\omega \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \omega + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}]$ этих двух окон называют прямоугольным время-частотным окном. Ширина $2\sqrt{\alpha}$ временного окна называется шириной время-частотного окна, а ширина $1/\sqrt{\alpha}$ частотного окна называется высотой время-частотного окна. Отметим, что ширина время-частотного окна в преобразовании Габора не изменяется при наблюдении спектра на всех частотах.

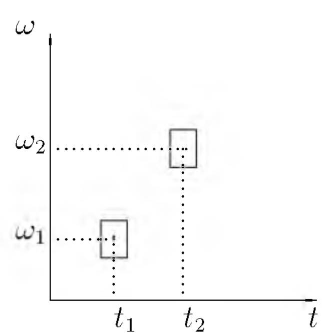


Рис.4. Окна Габора.

5 Оконное преобразование Фурье

Преобразование Габора можно обобщить. Пусть

$$w \in L^2(\mathbf{R}) \quad \text{и} \quad tw(t) \in L^2(\mathbf{R}). \tag{5.1}$$

Оконным преобразованием Фурье называется

$$(\widetilde{\Gamma_b})(\omega) := \int_{\mathbf{R}} (e^{-i\omega t} f(t)) \overline{w(t \Leftrightarrow b)}\, dt.$$

Полагая

$$\begin{aligned} W_{b,\omega}(t) &:= e^{i\omega t} w(t \Leftrightarrow b), \\ V_{b,\omega}(\eta) &:= \tfrac{1}{2\pi} \widehat{W}_{b,\omega}(\eta) = \tfrac{e^{ib\omega}}{2\pi} e^{-ib\eta} \widehat{w}(\eta \Leftrightarrow \omega), \end{aligned}$$

имеем

$$(\widetilde{\Gamma_b})(\omega) := \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{W_{b,\omega}(t)}\, dt = \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\eta) \overline{V_{b,\omega}(\eta)}\, d\eta.$$

Таким образом, оконное преобразование дает локальную информацию об f во временном окне $[t^* + b \Leftrightarrow \Delta_w, t^* + b + \Delta_w]$ и локальную информацию об $\widehat{f}$ в частотном окне $[\omega^* + \omega \Leftrightarrow \Delta_{\widehat{w}}, \omega^* + \omega + \Delta_{\widehat{w}}]$, где ω^* - центр $\widehat{w}$. Если и w, и $\widehat{w}$ удовлетворяют (5.1), то время-частотное окно $[t^* + b \Leftrightarrow \Delta_w, t^* + b + \Delta_w] \times [\omega^* + \omega \Leftrightarrow \Delta_{\widehat{w}}, \omega^* + \omega + \Delta_{\widehat{w}}]$ имеет постоянную ширину $2\Delta_w$ и постоянную площадь $4\Delta_w \Delta_{\widehat{w}}$.

Произведение $\Delta_w \Delta_{\widehat{w}}$ характеризует время-частотную локализацию w и называется константой неопределенности w. Напомним принцип неопределенности (см., например, [La]).

Теорема 5.1 *Пусть $w \in L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет (5.1) вместе с $\widehat{w}$. Тогда $\Delta_w \Delta_{\widehat{w}} \geq \frac{1}{2}$. Более того, равенство достигается тогда и только тогда, когда $w(t) = ce^{iat} g_\alpha(t \Leftrightarrow b)$, где $c \neq 0, \alpha > 0; a, b \in \mathbf{R}$.*

Таким образом, преобразование Габора имеет наименьшее время-частотное окно. В некоторых приложениях приходится использовать большие окна для получения дополнительных свойств, например легкости вычислений.

Приведем формулу обращения для оконных преобразований Фурье.

Теорема 5.2 *Пусть $w \in L^2(\mathbf{R}), \|w\|_2 = 1$, w и $\widehat{w}$ удовлетворяют (5.1). Тогда*

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \langle f, W_{b,\omega} \rangle \overline{\langle g, W_{b,\omega} \rangle}\, db\, d\omega = 2\pi \langle f, g \rangle.$$

Если x - точка непрерывности f, то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}[e^{i\omega x}(\widetilde{\Gamma_b} f)(\omega)]w(x \Leftrightarrow b)\,d\omega\,db.$$

Как уже отмечалось выше, в оконном преобразовании Фурье ширина окна не изменяется при изучении любой частотной полосы. Однако, частота прямо пропорциональна числу периодов в единицу времени, поэтому для локализации высокочастотных изменений естественно брать более узкое окно для увеличения точности вычислений, а для низкочастотных - более широкое для получения полной информации. Таким образом, оконное преобразование Фурье не применимо к изучению сигналов, содержащих как очень высокие, так и очень низкие частоты.

Данный недостаток исправляется в интегральном всплесковом преобразованиии, время-частотное окно которого автоматически сужается при наблюдении высокочастотных изменений и расширяется для изучения низкочастотных.

6 Интегральное всплесковое преобразование

Определение 6.1 *Функцию $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называют базовым всплеском, если она удовлетворяет условию:*

$$C_\psi := \int_{\mathbf{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\,d\omega < \infty.$$

При помощи базового всплеска определяется интегральное всплесковое преобразование (ИВП) на $L^2(\mathbf{R})$:

$$(W_\psi f)(b,a) := |a|^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{\psi\left(\frac{t \Leftrightarrow b}{a}\right)}\,dt, \quad f \in L^2(\mathbf{R}),$$

где $a, b \in \mathbf{R}$ с $a \neq 0$.

Полагая

$$\psi_{b,a}(t) := |a|^{-1/2}\psi\left(\frac{t \Leftrightarrow b}{a}\right), \tag{6.1}$$

имеем
$$(W_\psi f)(b,a) = \langle f, \psi_{b,a} \rangle. \tag{6.2}$$
В дальнейшем, будем считать что и ψ, и $\widehat{\psi}$ удовлетворяют (5.1). Тогда, если центр и радиус ψ равны t^* и Δ_ψ,соответственно, то функция $\psi_{b,a}$ является оконной с центром в $b + at^*$ и радиусом $a\Delta_\psi$. Значит ИВП дает локальную информацию о функции f с временным окном $[b + at^* \Leftrightarrow a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi]$. Это окно сужается при малых значениях a и расширяется при больших.

Рассмотрим теперь
$$\frac{1}{2\pi}\widehat{\psi}_{b,a}(\omega) = \frac{|a|^{-1/2}}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{-i\omega t}\psi\left(\frac{t \Leftrightarrow b}{a}\right) dt = \frac{a|a|^{-1/2}}{2\pi}e^{-ib\omega}\widehat{\psi}(a\omega), \tag{6.3}$$
и предположим, что центр и радиус функции $\widehat{\psi}$ равны ω^* и $\Delta_{\widehat{\psi}}$, соответственно. Полагая $\eta(\omega) := \widehat{\psi}(\omega + \omega^*)$, получаем оконную функцию η с центром в нуле и радиусом $\Delta_{\widehat{\psi}}$. Применяя тождество Планшереля к (6.2), имеем
$$(W_\psi f)(b,a) = \frac{a|a|^{-1/2}}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\omega)e^{ib\omega}\overline{\eta(a(\omega \Leftrightarrow \frac{\omega^*}{a}))}\, d\omega.$$
Ясно, что оконная функция $\eta(a(\omega \Leftrightarrow \frac{\omega^*}{a})) = \eta(a\omega \Leftrightarrow \omega^*) = \widehat{\psi}(a\omega)$ имеет радиус $\frac{1}{a}\Delta_{\widehat{\psi}}$. Поэтому, с точностью до множителя $\frac{a|a|^{-1/2}}{2\pi}$ и линейного фазового сдвига $e^{ib\omega}$, ИВП $W_\psi f$ дает локальную информацию об $\widehat{f}$ с частотным окном
$$\left[\frac{\omega^*}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a}\Delta_{\widehat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\widehat{\psi}}\right]. \tag{6.4}$$

В дальнейшем будем считать центр ω^* функции $\widehat{\psi}$ положительным. Тогда окно (6.4) является частотной полосой (или октавой) с центральной частотой ω^*/a и шириной полосы $2\Delta_{\widehat{\psi}}/a$. Важно, что отношение
$$\frac{\text{центральная частота}}{\text{ширина}} = \frac{\omega^*/a}{2\Delta_{\widehat{\psi}}/a} = \frac{\omega^*}{2\Delta_{\widehat{\psi}}}$$
не зависит от масштаба a.

Итак, для ИВП имеем прямоугольное время-частотное окно

$$[b + at^* \Leftrightarrow a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi] \times [\frac{\omega^*}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a}\Delta_{\widehat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\widehat{\psi}}]$$

Отметим еще раз, что окно сужается для выявления высокочастотных явлений и расширяется для исследования низкочастотных.

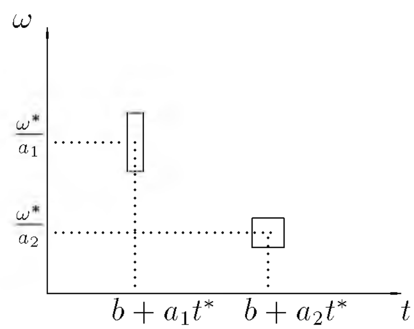


Рис.1. Окна ИВП.

Следующий результат показывает, как восстановить функцию по ее ИВП.

Теорема 6.1 *Пусть* ψ *- базовый всплеск. Тогда для любых* $f, g \in L^2(\mathbf{R})$

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} [(W_\psi f)(b,a)\overline{(W_\psi g)(b,a)}] \frac{da}{a^2} db = C_\psi \langle f, g \rangle.$$

Более того, для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ *и любой точки* x*, в которой* f *непрерывна,*

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} [(W_\psi f)(b,a)] \psi_{b,a}(x) \frac{da}{a^2} db,$$

где $\psi_{b,a}$ *определены в (6.1).*

Доказательство. В силу (6.3) и тождества Планшереля

$$(W_\psi f)(b,a) = \langle f, \psi_{b,a} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\omega) a |a|^{-1/2} e^{-ib\omega} \widehat{\psi}(a\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \widehat{F}_a(b),$$

где $F_a(\omega) := a|a|^{-1/2}\widehat{f}(\omega)\widehat{\psi}(a\omega)$. Поэтому, опять используя тождество Паншереля, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}[(W_\psi f)(b,a)\overline{(W_\psi g)(b,a)}]\tfrac{da}{a^2}db = \\
&= \tfrac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\widehat{F}_a(b)\overline{\widehat{G}_a(b)}db\tfrac{da}{a^2} = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\left\{\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\int_{\mathbf{R}}\tfrac{|\widehat{\psi}(a\omega)|^2}{|a|}da\right\}d\omega = \\
&= \tfrac{1}{2\pi}C_\psi\langle\widehat{f},\widehat{g}\rangle = C_\psi\langle f,g\rangle.
\end{aligned}$$

Второе утверждение теоремы следует из первого, если взять в качестве функций g гауссовские функции $g_\alpha(\cdot \Leftrightarrow x)$ (см. (4.1)) и устремить α к нулю. $\square$

Замечание 6.1 *Во всплесковых преобразованиях основную роль играет коммутативная локально компактная группа отображений* $\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ *вида* $g(x) = ax + b,\ a \in \mathbf{R}\backslash\{0\},\ b \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}$ *с мерой Хаара* $a^{-2}da\,db$. *Т.П.Лукашенко [Lu] обобщил теорему 6.1 на произвольную коммутативную локально компактную группу.*

При анализе физических сигналов рассматриваются только положительные частоты. Так как частота обратно пропорциональна параметру сжатия a: $\omega = \omega^*/a$, то в этом случае необходимо рассматривать только положительные a и восстанавливать сигнал по значениям $(W_\psi f)(b,a), a > 0$. Для этого на базовый всплеск надо наложить дополнительное требование:

$$\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}\,d\omega = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{\omega}\,d\omega = \frac{1}{2}C_\psi < \infty. \tag{6.5}$$

Теорема 6.2 *Пусть базовый всплеск ψ удовлетворяет (6.5). Тогда для любых* $f, g \in L^2(\mathbf{R})$

$$\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (W_\psi f)(b,a)\overline{(W_\psi g)(b,a)}\,db\right]\frac{da}{a^2} = \frac{1}{2}C_\psi\langle f,g\rangle.$$

Более того, для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ *и любой точки x, в которой f непрерывна,*

$$f(x) = \frac{2}{C_\psi}\int_0^\infty\left[\int_{\mathbf{R}}(W_\psi f)(b,a)\psi_{b,a}(x)\,db\right]\frac{da}{a^2},$$

где $\psi_{b,a}$ определены в (6.1).

7 Двоичные всплески и формулы обращения

При анализе сигналов частотную ось часто разбивают на дизъюнктные частотные полосы (или октавы). Рассмотрим двоичное разбиение: $(0, \infty) = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty}(2^j \Delta_{\widehat{\psi}}, 2^{j+1}\Delta_{\widehat{\psi}})]$, где $\Delta_{\widehat{\psi}} > 0$ - радиус преобразования Фурье $\widehat{\psi}$ базового всплеска ψ. Мы, как обычно, предполагаем, что $\widehat{\psi}$ удовлетворяет (5.1). Заметим, что, не ограничивая общности, можно считать $\omega^* = 3\Delta_{\widehat{\psi}}$ (достаточно применить к ψ соответствующий фазовый сдвиг: $\psi^0(t) := e^{i\alpha t}\psi(t)$). Тогда при $a_j := 2^{-j}$ имеем

$$(\frac{\omega^*}{a_j} \Leftrightarrow \frac{1}{a_j}\Delta_{\widehat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a_j} + \frac{1}{a_j}\Delta_{\widehat{\psi}}] = (2^{j+1}\Delta_{\widehat{\psi}}, 2^{j+2}\Delta_{\widehat{\psi}}].$$

Центральная частота этой полосы равна $\omega_j := \frac{\omega^*}{a_j} = 3 \times 2^j \Delta_{\widehat{\psi}}$.

При дополнительных предположениях на базовый всплеск ψ оказывается возможным восстановить функцию, используя значения ИВП $(W_\psi f)(b, a)$ только на дискретном множестве частот $\{\omega_j = 3 \times 2^j \Delta_{\widehat{\psi}}\}_{j \in \mathbf{Z}}$ (т.е. $a = a_j,\ j \in \mathbf{Z}$).

Определение 7.1 *Функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется двоичным всплеском, если существуют две положительные константы A и B, $0 < A \le B < \infty$, такие, что почти всюду (п.в.)*

$$A \le \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \le B. \tag{7.1}$$

Условие (7.1) называют условием устойчивости.

Пусть $f^-(x) := f(\Leftrightarrow x)$. Определим нормированное ИВП

$$(W_j^\psi f)(b) := 2^{j/2}(W_\psi f)(b, 2^{-j}) = 2^j(f * \overline{\psi^-(2^j \cdot)})(b).$$

Используя тождество Планшереля, легко показать, что (7.1) эквивалентно

$$A\|f\|_2^2 \le \sum_{j \in \mathbf{Z}} \|W_j^\psi f\|_2^2 \le B\|f\|_2^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}).$$

Следующий результат показывает, что двоичный всплеск всегда является базовым.

Теорема 7.1 *Пусть ψ удовлетворяет (7.1). Тогда ψ является базовым всплеском и*

$$A \ln 2 \le \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}\, d\omega, \quad \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\Leftrightarrow\omega)|^2}{\omega} \le B \ln 2.$$

Более того, если $A = B$, то

$$C_\psi := \int_{\mathbf{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\, d\omega = 2A \ln 2.$$

Для восстановления $f \in L^2(\mathbf{R})$ по значениям ИВП $(W_\psi f)(b, 2^{-j})$, $j \in \mathbf{Z}$, легче всего использовать другой двоичный всплеск ψ^*, определяемый в образах Фурье следующим образом:

$$\widehat{\psi}^*(\omega) := \frac{\widehat{\psi}(\omega)}{\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}} (W_j^\psi f)(b)\{2^j \psi^*(2^j(x \Leftrightarrow b))\}\, db = \\
&= \textstyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} (\widehat{W_j^\psi f})(\omega) \widehat{\psi}^*(2^{-j}\omega) e^{ix\omega}\, d\omega = \\
&= \textstyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi}}(2^{-j}\omega) \widehat{\psi}^*(2^{-j}\omega) e^{ix\omega}\, d\omega = \\
&= \textstyle\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\omega) e^{ix\omega}\, d\omega = f(x).
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Определение 7.2 *Функция $\widetilde{\psi} \in L^2(\mathbf{R})$ называется двоично-двойственной к двоичному всплеску ψ, если каждая функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ может быть представлена в виде*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \textstyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}} (W_j^\psi f)(b)\{2^j \widetilde{\psi}(2^j(x \Leftrightarrow b))\}\, db = \\
&= \textstyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} 2^{3j/2} \int_{\mathbf{R}} (W_\psi f)(b, \frac{1}{2^j}) \widetilde{\psi}(2^j(x \Leftrightarrow b))\, db.
\end{aligned}$$

В силу (7.2) функция ψ^* является двоично-двойственной к ψ. Кроме того, ψ^* является двоичным всплеском:

$$\frac{1}{B} \le \sum_{j\in\mathbf{Z}} |\widehat{\psi}^*(2^{-j}\omega)|^2 \le \frac{1}{A}.$$

Отметим, что двоично-двойственный всплеск к данному всплеску ψ не единственен.

Теорема 7.2 *Пусть ψ - двоичный всплеск и $\widetilde{\psi}$ - произвольная функция из $L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющая условию*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbf{R}} \sum_{j\in\mathbf{Z}} |\widehat{\widetilde{\psi}}(2^{-j}x)|^2 < \infty.$$

Функция $\widetilde{\psi}$ является двоично-двойственной к ψ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} \overline{\widehat{\psi}(2^{-j\omega})}\widehat{\widetilde{\psi}}(2^{-j}\omega) = 1, \text{ п.в.}$$

8 Фреймы

Для вычислительной эффективности можно дискретизировать и параметр сдвига b, рассматривая только дискретное множество значений: $b_{j,k} := \frac{k}{2^j}b_0, \quad j,k, \in \mathbf{Z}$, где $b_0 > 0$ - фиксированная константа, называемая темпом измерений. Обозначим

$$\psi_{b_0,j,k}(t) := \psi_{b_{j,k},a_j}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t \Leftrightarrow kb_0).$$

Будем рассматривать только следующие значения ИВП:

$$(W_\psi f)(b_{j,k}, a_j) = \langle f, \psi_{b_0,j,k}\rangle, \quad j,k \in \mathbf{Z}. \tag{8.1}$$

Если существуют константы A и B, $0 < A \le B < \infty$, такие, что

$$A\|f\|_2^2 \le \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{b_0,j,k}\rangle|^2 \le B\|f\|_2^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}), \tag{8.2}$$

то функцию $f \in L^2(\mathbf{R})$ можно восстановить по значениям ИВП из (8.1).

Определение 8.1 *Говорят, что функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ порождает фрейм в $L^2(\mathbf{R})$ с темпом измерений $b_0 > 0$, если выполняется (8.2) с константами A и B, которые называются границами фрейма. Если $A = B$, то фрейм называют жестким (естественно называть жесткий фрейм обобщенной системой Парсеваля).*

Рассмотрим линейный оператор T на $L^2(\mathbf{R})$:

$$Tf := \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} \langle f, \psi_{b_0,j,k,}\rangle\psi_{b_0,j,k}, \quad f \in L^2(\mathbf{R}).$$

Из (8.2) следует, что T является взаимно-однозначным. Действительно,

$$\langle Tf, f\rangle = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{b_0,j,k}\rangle|^2.$$

Поэтому для $g = Tf$ имеем

$$A\|T^{-1}g\|_2^2 = A\|f\|_2^2 \leq \langle Tf, f\rangle = \langle g, T^{-1}g\rangle \leq \|g\|_2\|T^{-1}g\|_2.$$

Откуда $\|T^{-1}g\|_2 \leq \frac{1}{A}\|g\|_2$ или $\|T^{-1}\| \leq A^{-1}$.

Таким образом, любую функцию $f \in L^2(\mathbf{R})$ можно восстановить по значениям ИВП из (8.1), применяя формулу

$$f = T^{-1}Tf = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} \langle f, \psi_{b_0,j,k}\rangle T^{-1}\psi_{b_0,j,k}. \tag{8.3}$$

Полагая $\psi_{b_0}^{j,k} := T^{-1}\psi_{b_0,j,k}, \quad j,k \in \mathbf{Z}$, можно переписать формулу (8.3) следующим образом: для любых $f, g \in L^2(\mathbf{R})$

$$\langle f, g\rangle = \textstyle\sum_{j,k\in\mathbf{Z}}\langle f, \psi_{b_0,j,k}\rangle\langle\psi_{b_0}^{j,k}, g\rangle;$$

$$f = \textstyle\sum_{j,k\in\mathbf{Z}}\langle f, \psi_{b_0,j,k}\rangle\psi_{b_0}^{j,k}.$$

Естественно называть $\{\psi_{b_0}^{j,k}\}$ двойственным фреймом к фрейму $\{\psi_{b_0,j,k}\}$.

Определение 8.2 *Говорят, что функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ порождает базис Рисса (или безусловный базис) $\{\psi_{b_0,j,k}\}$ с темпом измерений b_0, если выполнены следующие два условия:*

(i) линейная оболочка $\{\psi_{b_0,j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ плотна в $L^2(\mathbf{R})$;

(ii) существуют положительные константы A и B, $0 < A \leq B < \infty$, такие, что для любых $\{c_{j,k}\} \in l^2(\mathbf{Z}^2)$

$$A\|\{c_{j,k}\}\|_{l^2}^2 \leq \left\|\sum_{j,k\in\mathbf{Z}} c_{j,k}\psi_{b_0,j,k}\right\|_2^2 \leq B\|\{c_{j,k}\}\|_{l^2}^2.$$

Константы A и B называют константами Рисса для $\{\psi_{b_0,j,k}\}$. Если $b_0 = 1$, то функция ψ называется R-функцией.

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$\psi_{j,k}(x) := \psi_{1,j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x \Leftrightarrow k),$$

которое не надо путать с $\psi_{b,a}$ из (6.1).

Следующий результат показывает разницу между фреймом и базисом Рисса.

Теорема 8.1 *Пусть $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ и $b_0 > 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\{\psi_{b_0,j,k}\}$ - базис Рисса в $L^2(\mathbf{R})$;

(ii) $\{\psi_{b_0,j,k}\}$ - фрейм в $L^2(\mathbf{R})$ и l^2-линейно независимое семейство, т.е. если $\sum c_{j,k}\psi_{b_0,j,k} = 0$ и $\{c_{j,k}\} \in l^2$, то $c_{j,k} = 0$.

Более того, константы Рисса совпадают с границами фрейма.

Функция, порождающая фрейм, всегда является двоичным всплеском.

Теорема 8.2 *Пусть $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ порождает фрейм $\{\psi_{b_0,j,k}\}$ в $L^2(\mathbf{R})$ с границами A, B и темпом измерений $b_0 > 0$. Тогда*

$$b_0 A \le \sum_{j\in\mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \le b_0 B, \quad \text{п.в.}$$

9 Всплесковые ряды

В дальнейшем будем предполагать темп измерений $b_0 = 1$. Пусть ψ - R-функция, $\{\psi_{j,k}\}$ - базис Рисса, $\{\psi^{j,k} = T^{-1}\psi_{j,k}\}$ - двойственный фрейм (см.(8.3)).

В классе R-функций выделяют два важных подмножества.

Определение 9.1 *Пусть $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ - R-функция. Тогда*

(i) ψ называют ортогональным всплеском, если $\psi_{j,k}$ удовлетворяют условию ортогональности:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l}\delta_{k,m}, \quad j, k, l, m \in \mathbf{Z};$$

(ii) ψ называют полуортогональным всплеском, если $\psi_{j,k}$ удовлетворяют условию:

$$\langle \psi_{j,k}\psi_{l,m} \rangle = 0, \quad j \ne l; \quad j, k, l, m \in \mathbf{Z}.$$

Очевидно, что ортогональные всплески являются самодвойственными: $\psi^{j,k} = \psi_{j,k}, \quad j,k \in \mathbf{Z}$.

Для того, чтобы указать двойственный фрейм в полуортогональном случае, приведем следующий критерий ортогональности.

Теорема 9.1 *Для любой функции $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\{\phi(x \Leftrightarrow k) : k \in \mathbf{Z}\}$ - ортонормированное семейство:

$$\langle \phi(\cdot \Leftrightarrow k), \phi(\cdot \Leftrightarrow l) \rangle = \delta_{k,l}, \quad k,l \in \mathbf{Z}.$$

(ii) преобразование Фурье $\widehat{\phi}$ удовлетворяет условию:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-ijx} |\widehat{\phi}(x)|^2 \, dx = \delta_{j,0}, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

(iii) Для почти всех x

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} |\widehat{\phi}(x + 2\pi k)|^2 = 1.$$

Более слабым, чем условие ортогональности, является условие Рисса или условие безусловности.

Теорема 9.2 *Для любой функции ϕ и констант $0 < A \leq B < \infty$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\{\phi(\cdot \Leftrightarrow k) : \ k \in \mathbf{Z}\}$ удовлетворяет условию Рисса с константами A и B, т.е. для любых $\{c_k\} \in l^2$

$$A \|\{c_k\}\|_{l^2}^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \phi(\cdot \Leftrightarrow k) \right\|_2^2 \leq B \|\{c_k\}\|_{l^2}^2.$$

(ii) преобразование Фурье $\widehat{\phi}$ удовлетворяет п.в. условию

$$A \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\phi}(x + 2\pi k)|^2 \leq B.$$

Теорема 9.3 *Пусть $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ - полуортогональный всплеск. Определим $\widetilde{\psi}$ в образах Фурье*

$$\widehat{\widetilde{\psi}}(\omega) := \frac{\widehat{\psi}(\omega)}{\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2}.$$

Тогда функция $\widetilde{\psi}$ двойственна к ψ, т.е.

$$\langle \psi_{j,k}, \widetilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l}\delta_{k,m}, \quad j,k,l,m \in \mathbf{Z}, \tag{9.1}$$

где $\widetilde{\psi}_{l,m}(x) := 2^{l/2}\widetilde{\psi}(2^l x \Leftrightarrow m)$. Таким образом, двойственный фрейм к $\{\psi_{j,k}\}$ - это $\{\psi^{j,k} = \widetilde{\psi}_{j,k}\}$.

Эта теорема указывает, как исправить полуортогональный всплеск в ортогональный. Действительно, полагая

$$\widehat{\psi^\perp}(\omega) := \frac{\widehat{\psi}(\omega)}{(\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2)^{1/2}}, \tag{9.2}$$

получаем, что

$$\widehat{\widetilde{\psi^\perp}}(\omega) = \frac{\widehat{\psi^\perp}(\omega)}{\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\psi^\perp}(\omega + 2\pi k)|^2} = \widehat{\psi^\perp}(\omega).$$

Таким образом, $\widetilde{\psi^\perp} = \psi^\perp$, т.е. $\psi^\perp$ - самодвойственен.

Существуют R-функции, у которых нет двойственных, т.е. двойственный базис $\{\psi^{j,k}\}$ к базису Рисса $\{\psi_{j,k}\}$ не имеет вида $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}$ ни для какой функции $\widetilde{\psi} \in L^2(\mathbf{R})$.

Определение 9.2 *R-функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется всплеском, если существует двойственная функция $\widetilde{\psi} \in L^2(\mathbf{R})$, такая что $\{\psi_{j,k}\}$ и $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}$, удовлетворяют (9.1).*

Очевидно, что $\widetilde{\psi}$ - тоже всплеск с двойственным ψ.

Если ψ - всплеск с двойственным $\widetilde{\psi}$, то любую функцию $f \in L^2(\mathbf{R})$ можно разложить в ряды:

$$f(x) = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k} = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} d_{j,k}\widetilde{\psi}_{j,k}. \tag{9.3}$$

Оба этих ряда называются всплесковыми. В силу (9.1)

$$c_{j,k} = \langle f, \widetilde{\psi}_{j,k} \rangle; \quad d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

Теорема 9.4 *Пусть ψ - всплеск с двойственным $\widetilde{\psi}$. Для произвольной функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ вычислим ИВП с ψ и $\widetilde{\psi}$ в точках $(b,a) = (\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}),\ j,k \in \mathbf{Z}$:*

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = (W_\psi f)(\tfrac{k}{2^j}, \tfrac{1}{2^j}); \quad c_{j,k} = \langle f, \widetilde{\psi}_{j,k} \rangle = (W_{\widetilde{\psi}} f)(\tfrac{k}{2^j}, \tfrac{1}{2^j}).$$

Тогда f можно восстановить или по $\{d_{j,k}\}$, или по $\{c_{j,k}\}$, используя ряды (9.3). Более того, скалярное произведение любых двух функций из $L^2(\mathbf{R})$ можно также вычислить при помощи дискретных значений ИВП:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \langle \widetilde{\psi}_{j,k}, g \rangle.$$

10 Система Хаара на прямой

Система Хаара на всей прямой является самым простым, но вместе с тем и одним из самых модельных примеров ортогональных всплесков. Мы расскажем о ней с современных позиций теории всплесков, подготавливая читателей к пониманию общей схемы построения всплесков, так называемому кратномасштабному анализу (multiresolution analysis).

Пусть $\varphi^H(t) = \kappa_{[0,1]}(t)$ (в современной терминологии, это - масштабирующая функция Хаара). Рассмотрим замыкание по норме $L^2(\mathbf{R})$ линейной оболочки целочисленных сдвигов функции φ^H:

$$V_0 := [\varphi_{0k}^H(\cdot) := \varphi^H(\cdot \Leftrightarrow k)]_{k \in \mathbf{Z}} = \{\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{0k} \varphi_{0k}^H : \sum_{k \in \mathbf{Z}} \mid c_{0k} \mid^2 < \infty\}.$$

Естественно назвать это подпространство подпространством функций масштаба 1. Для анализа функций из $L^2(\mathbf{R})$ нужны подпространства функций с различными масштабами. Определим последовательность подпространств $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}} : V_j := [\varphi_{jk}^H(t) := 2^{j/2} \varphi^H(2^j t \Leftrightarrow k)]_{k \in \mathbf{Z}}$ (V_j - подпространство функций масштаба 2^{-j}). Отметим, что последовательность $\{\varphi_{jk}^H\}_{k \in \mathbf{Z}}$ образует ортонормированный базис в V_j. Очевидно, что

$$\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\} \tag{10.1}$$

и

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}). \tag{10.2}$$

Здесь $\overline{X}$ обозначает замыкание подпространства X по норме $L^2(\mathbf{R})$.

Последнее свойство наталкивает на мысль получить ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$, используя совокупность ортонормированных базисов в V_j. На этом пути есть небольшое препятствие. Несмотря на вложение $V_j \subseteq V_{j+1}$, ортонормированный базис $\{\varphi^H_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ в V_j не является частью ортонормированного базиса $\{\varphi^H_{j+1,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ в V_{j+1}. Поэтому необходимо рассуждать следующим образом. Пусть W_0 - это ортогональное дополнение V_0 до V_1: $V_0 \oplus W_0 = V_1$. Базис пространства V_0 состоит из целочисленных сдвигов функции φ^H_{00}. Базис пространства V_1 состоит из сдвигов на $k/2$ ($k \in \mathbf{Z}$) функции $\varphi^H_1(t) = \sqrt{2}\varphi(2t) : \varphi^H_{1,k}(t) = \varphi^H_1(t \Leftrightarrow k/2)$. В силу этих фактов естественно попытаться найти функцию ψ, целочисленные сдвиги которой образуют ортонормированный базис в W_0. Таким свойством обладает функция

$$\psi^H(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,\, 1/2); \\ \Leftrightarrow 1, & t \in (1/2,\, 1); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это и есть всплеск Хаара.

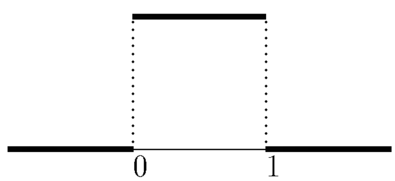


Рис.1. Масштабирующая функция Хаара.

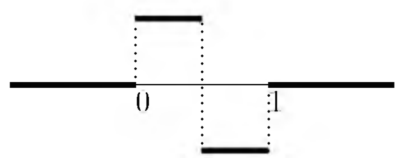


Рис.2. Всплеск Хаара.

Итак, $W_0 = [\psi^H_{0k}(\cdot) := \psi^H(\cdot \Leftrightarrow k)]_{k\in\mathbf{Z}}$. Если определить $W_j := [\psi^H_{jk}(t) := 2^{j/2}\psi^H(2^j t \Leftrightarrow k)]_{k\in\mathbf{Z}}$, то очевидно

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}. \tag{10.3}$$

Из (10.1), (10.2), (10.3) следует, что

$$L^2(\mathbf{R}) = \oplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j. \tag{10.4}$$

Поскольку пространства W_j взаимно ортогональны, то, объединяя все ортонормированные базисы в W_j, мы получим ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$: $\{\psi^H_{jk}\}_{j\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z}}$. Отметим сразу, что в приложениях чаще всего удобнее заменить в (10.4) $\oplus_{j=-\infty}^{-1} W_j$ на V_0: $V_0 \oplus \{\oplus_{j=0}^{\infty} W_j\} = L^2(\mathbf{R})$.

В этом случае ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$ состоит из $\{\varphi_{0k}^H\}_{k\in\mathbf{Z}}$ и $\{\psi_{jk}^H\}_{j\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z},j\geq 0}$.

Таким образом, любую функцию из $L^2(\mathbf{R})$ можно разложить в ряд

$$f = \sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} d_{jk}\psi_{jk}^H = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{0k}\varphi_{0k}^H + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbf{Z}} d_{jk}\psi_{jk}^H.$$

Последний ряд удобен, в частности, потому, что легко переносится со всей прямой на отрезок $[0,1]$. Для $f\in L^2[0,\,1]$ имеем

$$f = c_0 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} d_{jk}\psi_{jk}^H. \tag{10.5}$$

Именно в таком виде систему определил А.Хаар [H].

Перечислим преимущества (10.5) по сравнению с классическим рядом Фурье по тригонометрической системе

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{l=1}^{\infty}(a_l\cos lt + b_l\sin lt). \tag{10.6}$$

Первое преимущество состоит в том, что ряд Хаара является хорошо локализованным. Если мы интересуемся поведением функции f на подинтервале $[a,b]$, то в разложении (10.5) нам нужны только те индексы j и k, для которых $\operatorname{supp}\psi_{jk}^H = [k2^{-j},\,(k+1)2^{-j}]$ пересекается с $[a,\,b]$, тогда как в разложении (10.6) нам потребуются все коэффициенты. Второе отличие состоит в том, что частичная сумма ряда Хаара по $j = 0,\,1,\,2,\,\ldots,\,N$ является приближением исходной функции с точностью до масштаба 2^{-N-1}. Эти два свойства, локализованность и масштабирование, являются характерными для всех всплесковых разложений.

Прежде чем рассказать о других всплесках, изложим наиболее общий метод построения всплесков, так называемый кратномасштабный анализ.

11 Кратномасштабный анализ в $L^2(\mathbf{R})$

Определение 11.1 *Кратномасштабный анализ (КМА) - это последовательность* $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ *замкнутых подпространств* $L^2(\mathbf{R})$, *удовлетворяющая следующим свойствам:*

$$V_j \subset V_{j+1}; \tag{11.1}$$

$$\overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}); \tag{11.2}$$

$$\cap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}; \tag{11.3}$$

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}\cdot) \in V_0; \tag{11.4}$$

$$f \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot \Leftrightarrow k) \in V_0 \text{ для любого } k \in \mathbf{Z}; \tag{11.5}$$

существует функция $\varphi \in V_0$ *такая, что последовательность*

$$\{\varphi(\cdot \Leftrightarrow k)\}_{k\in\mathbf{Z}} \text{ образует базис Рисса в } V_0. \tag{11.6}$$

Это понятие введено и исследовано в [Ma].

Если обозначить через P_j ортогональный проектор на V_j, то из условия (11.2) следует, что $\lim_{j\to\infty} P_j f = f$ для любой функции $f \in L^2(\mathbf{R})$. Условие (11.4) означает, что все подпространства V_j однозначно определяются из центрального подпространства V_0 при помощи соответствующей замены переменных (соответствующего изменения масштаба). Из (11.4) и (11.5) следует, что для любой функции $f \in V_j$ функция $f(\cdot \Leftrightarrow 2^{-j}k)$ также принадлежит V_j при любом $k \in \mathbf{Z}$. Пусть $\varphi_{jk}(t) := 2^{j/2}\varphi(2^j t \Leftrightarrow k)$; $j,\ k \in \mathbf{Z}$. Из (11.4) и (11.6) следует, что последовательность $\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ является базисом Рисса в V_j для любого $j \in \mathbf{Z}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\{\varphi(\cdot \Leftrightarrow k)\}_{\mathbf{Z}}$ - ОНБ в V_0 (этого всегда можно достичь за счет ортогонализации (9.2)).

Основным свойством КМА является возможность построения ортонормированного всплеского базиса $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$, $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t \Leftrightarrow k)$, такого, что для любой функции f из $L^2(\mathbf{R})$

$$P_{j+1}f = P_j f + \sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk}. \tag{11.7}$$

Опишем процесс построения такого базиса. Пусть W_j - это ортогональное дополнение V_j до $V_{j+1} : W_j \oplus V_j = V_{j+1}$. В силу (11.1)

$$W_j \perp W_{j_1} \text{ при } j \neq j_1, \tag{11.8}$$

и при любых $j_0 < j$

$$V_j = V_{j_0} \oplus \left(\oplus_{l=j_0}^{j-1} W_l \right). \tag{11.9}$$

Из (11.2) и (11.3) следует, что

$$L^2(\mathbf{R}) = \oplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j. \tag{11.10}$$

Последовательность $\{W_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ наследует от V_j свойство (11.4):

$$f \in W_j \Leftrightarrow f(2^{-j}\cdot) \in W_0. \tag{11.11}$$

Формула (11.7) эквивалентна тому, что при фиксированном j последовательность $\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ образует ортонормированный базис в W_j. В силу (11.10) последнее означает, что $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ - ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$. Заметим теперь, что свойство (11.11) гарантирует, что $\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ будет базисом в W_j, если $\{\psi_{0k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ является базисом в W_0. Таким образом, задача построения всплеского базиса со свойством (11.7) сводится к нахождению функции ψ такой, что последовательность $\{\psi(\cdot \Leftrightarrow k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ образует ортонормированный базис в W_0.

Для построения функции ψ нам потребуются некоторые свойства φ и W_0. Так как $\varphi \in V_0 \subset V_1$ и $\{\varphi_{1k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ - ортонормированный базис в V_1, то

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k \, \varphi_{1k}, \tag{11.12}$$

где

$$h_k := \langle \varphi, \varphi_{1k} \rangle, \quad \sum_{k\in\mathbf{Z}} |h_k|^2 = 1. \tag{11.13}$$

Переходя к образам Фурье, имеем

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m(\omega/2)\widehat{\varphi}(\omega/2), \tag{11.14}$$

где $m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k e^{-ik\omega}$. Функцию φ называют масштабирующей (scaling), равенство (11.12) - масштабным, равенство (11.14) - уточняющим (refinement), функцию m - уточняющей маской (refinement mask) или масштабирующим фильтром (scaling filter).

В силу теоремы 9.1

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + 2\pi l)|^2 = 1 \tag{11.15}$$

для почти всех ω. Если подставить (11.14) в (11.15), то получим, что $\sum_{l\in\mathbf{Z}} |m(\omega/2+\pi l)\hat{\varphi}(\omega/2+\pi l)|^2 = 1$. Разбивая сумму на две (по четным и по нечетным l) и учитывая 2π-периодичность m, имеем

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}} |m(\omega/2+2\pi l)\hat{\varphi}(\omega/2+2\pi l)|^2 + \sum_{l\in\mathbf{Z}} |m(\omega/2+2\pi l+\pi)\hat{\varphi}(\omega/2+2\pi l+\pi)|^2 =$$

$$= |m(\omega/2)|^2 + |m(\omega/2+\pi)|^2 = 1. \qquad (11.16)$$

Охарактеризуем подпространство W_0 в терминах образов Фурье. Любая функция f из W_0 принадлежит V_1 и ортогональна V_0. Первое свойство означает, что $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f_k\varphi_{1k}$ где $f_k = \langle f, \varphi_{1k}\rangle$. В образах Фурье имеем

$$\hat{f}(\omega) = m_f(\omega/2)\,\hat{\varphi}(\omega/2), \qquad (11.17)$$

где $m_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} f_k\, e^{-ik\omega}$ – 2π-периодическая функция из $L^2[0,\, 2\pi]$. Условие ортогональности f к V_0 эквивалентно тому, что $f \perp \varphi_{0k}$ для любого $k \in \mathbf{Z}$, т.е. $\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\varphi}(\omega)}\, e^{ik\omega}\, d\omega = 0$. Заметим,что

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\varphi}(\omega)}\, e^{ik\omega}\, d\omega = \int_0^{2\pi} e^{ik\omega} \sum_{l\in\mathbf{Z}} \hat{f}(\omega+2\pi l)\overline{\hat{\varphi}}(\omega+2\pi l)\, d\omega = 0. \qquad (11.18)$$

Так как равенство (11.18) имеет место для любого $k \in \mathbf{Z}$, то

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}} \hat{f}(\omega+2\pi l)\overline{\hat{\varphi}}(\omega+2\pi l) = 0. \qquad (11.19)$$

Ряд в (11.19) сходится абсолютно в $L^1([0,\, 2\pi])$. Подставляя (11.14) и (11.17) в (11.19) и группируя суммы с четными и нечетными l, получим, учитывая (11.15), что

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{l\in\mathbf{Z}} \hat{f}(\omega+2\pi l)\overline{\hat{\varphi}}(\omega+2\pi l) = \\ &= m_f(\omega/2)\overline{m}(\omega/2) + m_f(\omega/2+\pi)\overline{m}(\omega/2+\pi) = 0.\end{aligned}$$

В силу (11.16) $\overline{m}(\omega)$ и $\overline{m}(\omega+\pi)$ не могут обратиться в ноль одновременно, поэтому существует 2π-периодическая функция $\lambda(\omega)$ такая, что

$$m_f(\omega) = \lambda(\omega)\overline{m}(\omega+\pi) \;\; .. \qquad (11.20)$$

и $\lambda(\omega)+\lambda(\omega+\pi) = 0$. Последнее равенство можно переписать, как $\lambda(\omega) = e^{-i\omega}\nu(2\omega)$, где ν - некоторая 2π-периодическая функция. Таким образом, преобразование Фурье произвольной функции из W_0 имеет вид

$$\hat{f}(\omega) = e^{-i\omega/2}\overline{m}(\omega/2+\pi)\,\nu(\omega)\hat{\varphi}(\omega/2), \qquad (11.21)$$

где ν – некоторая 2π-периодическая функция. Кроме того,

$$\|f\|_{L^2(\mathbf{R})} = \tfrac{1}{2\pi}\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbf{R})} =$$
$$= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\nu|^2 \sum_{l\in\mathbf{Z}} |m(\omega/2+\pi l+\pi)\widehat{\varphi}(\omega/2+\pi l)|^2\, d\omega =$$
$$= \|\nu\|_{L^2([0,2\pi])}.$$

Таким образом, 2π-периодическая функция ν является квадратично суммируемой.

Имея описание (11.21) пространства W_0 легко найти функцию $\psi \in W_0$, целые сдвиги которой $\{\psi(\cdot \Leftrightarrow k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ образуют ортонормированный базис в W_0. Пусть ψ - искомая функция. Тогда $\widehat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega/2}\overline{m}(\omega/2+\pi)\nu_\psi(\omega)\widehat{\varphi}(\omega/2)$. Подставляя это выражение в (11.15), получаем, используя (11.16), что

$$|\nu_\psi(\omega)|^2 \equiv 1 \text{ п.в.} \tag{11.22}$$

Проще всего положить $\nu_\psi(\omega) \equiv 1$. В силу (11.21) целые сдвиги функции ψ, определяемой равенством

$$\widehat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega/2}\overline{m}(\omega/2+\pi)\widehat{\varphi}(\omega/2), \tag{11.23}$$

будут базисом в W_0. Действительно, если $\nu(\omega) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \nu_k\, e^{-ik\omega}$, то $\widehat{f}(\omega) = \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} \nu_k\, e^{-ik\omega}\right)\widehat{\psi}(\omega)$ или $f(\cdot) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \nu_k\, \psi(\cdot \Leftrightarrow k)$.

Заметим, что в силу (11.22) образ Фурье любой функции, целые сдвиги которой образуют ортонормированный базис в W_0, отличается от образа Фурье функции ψ из (11.23) лишь некоторым 2π-периодическим множителем по модулю равным 1.

Таким образом, имея кратномасштабный анализ $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$, порождаемый масштабирующей функцией φ, всегда можно построить ортонормированный всплесковый базис $\{\psi_{jk}\}_{j,\,k\in\mathbf{Z}}$ в $L^2(\mathbf{R})$, обладающий свойством (11.7).

Из формулы (11.23) следует, что

$$\psi(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (\Leftrightarrow 1)^{k-1} h_{-k+1}\varphi_{1k}(t). \tag{11.24}$$

В литературе для сокращения записей чаще всего используют

$$\psi(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (\Leftrightarrow 1)^{k} h_{-k+1}\varphi_{1k}(t). \tag{11.25}$$

В заключение этого параграфа проанализируем, более подробно, свойства (11.2) и (11.3). Приводимые ниже результаты доказаны в [BDR].

Пусть $\widehat{V} := \{\widehat{f} : f \in V\}$. Из тождества Планшереля и свойств (11.4-11.6) следует, что $f \in V_j$ тогда и только тогда, когда

$$\widehat{f}(\omega) = m(\xi 2^{-j})\,\widehat{\varphi}(\omega 2^{-j}), \quad \widehat{f}(\omega) \in L_2(\mathbf{R}), \tag{11.26}$$

где m - некоторая 2π-периодическая функция.

Лемма 11.1 *Из свойств (11.4) и (11.5) следует, что пространство* $\overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j}$ *инвариантно относительно сдвигов.*

Доказательство. В силу (11.4-11.5) из $f \in \cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j$ следует, что $f(\cdot + t) \in \cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j$ для любого двоично-рационального $t = 2^{-j}l,\ l,k \in \mathbf{Z}$. Так как сдвиг является непрерывной операцией в $L_2(\mathbf{R})$, то $f(\cdot + t) \in \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j}$ для любого $t \in \mathbf{R}$. Если теперь $g \in \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j}$, то, приближая g функциями $f \in \cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j$, и, замечая, что $\|f(\cdot + t) \Leftrightarrow g(\cdot + t)\|_{L_2(\mathbf{R})} = \|g \Leftrightarrow f\|_{L_2(\mathbf{R})}$, получаем утверждение леммы. $\square$

Хорошо известно, что замкнутое подпространство X в $L_2(\mathbf{R})$ является инвариантным относительно сдвигов тогда и только тогда, когда $\widehat{X} = L_2(\Omega)$ для некоторого измеримого множества Ω.

В дальнейшем равенства между множествами понимаются с точностью до множеств нулевой меры.

Теорема 11.1 *Пусть последовательность* $\{V_j,\}_{j\in\mathbf{Z}}$ *удовлетворяет свойствам (11.4-11.6). Тогда* $\overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L_2(\mathbf{R})$ *тогда и только тогда, когда* $\Omega_0 := \cup_{j\in\mathbf{Z}} \operatorname{supp}\, \widehat{\varphi}(2^{-j}\cdot) = \mathbf{R}$.

Доказательство. Пусть $X := \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j}$. Тогда $\widehat{X} = L_2(\Omega)$. Таким образом, $X = L_2(\mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда $\Omega = \mathbf{R}$. Так как $\varphi(2^j\cdot) \in V_j,\ j \in \mathbf{Z}$, то $\operatorname{supp}\, \widehat{\varphi}(2^{-j}\cdot) \subset \Omega$. Поэтому $\Omega_0 \subset \Omega$. Предположим теперь, что $\Omega \backslash \Omega_0$ содержит множество положительной меры Ω_1. В силу (11.26) преобразование Фурье любого элемента из V_j обнуляется на Ω_1. Следовательно, тоже самое верно для любого элемента из $\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j$, Переходя к пределу, получаем, что преобразование Фурье любого элемента из X обнуляется на Ω_1, что противоречит тому, что $\widehat{X} \supset L_2(\Omega_1)$. $\square$

Следствие 11.1 *Пусть последовательность* $\{V_j,\}_{j\in\mathbf{Z}}$ *удовлетворяет свойствам (11.4-11.6) и* $\widehat{\varphi}$ *не равно нулю почти всюду на некоторой окрестности нуля. Тогда* $\overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}}V_j} = L_2(\mathbf{R})$.

Докажем теперь, что условие (11.3) следует из свойств (11.4-11.6) кратномасштабного анализа. Для доказательства нам потребуются две леммы, первая из которых хорошо известна.

Лемма 11.2 *Пусть* Ω *- измеримое подмножество* $\mathbf{R}$, *причем* $\Omega + \alpha t = \Omega$ *для некоторого действительного числа* $\alpha \neq 0$ *и для любого двоично-рационального числа* $t \in \mathbf{R}$. *Тогда* $\Omega = \mathbf{R}$ *или* $\Omega = \emptyset$.

Кроме того, если f *- некоторая измеримая функция на* $\mathbf{R}$, *удовлетворяющая условию* $f(\cdot + \alpha t) = f(\cdot)$ *для любого двоично-рационального* t, *то* $f = const$ *почти всюду.*

Доказательство этой леммы основано на свойствах точек Лебега измеримой функции.

Лемма 11.3 *Пусть последовательность* $\{V_j,\}_{j\in\mathbf{Z}}$ *замкнутых подпространств* $L_2(\mathbf{R})$ *удовлетворяет свойствам (11.4-11.6) кратномасштабного анализа. Тогда* $Y = \cap_{j\in\mathbf{Z}}V_j$ *имеет размерность* ≤ 1.

Доказательство. Предположим, что $Y \neq \{0\}$. Докажем, что в этом случае $\dim Y = 1$. Пусть f, g - две произвольные функции из Y. Рассмотрим отображение $F : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^2$:

$$F(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega) = 0, \\ \frac{(\widehat{f}(\omega), \widehat{g}(\omega))}{\widehat{f}(\omega)}, & \text{если } \widehat{f}(\omega) \neq 0,\ \widehat{g}(\omega) = 0, \\ \frac{(\widehat{f}(\omega), \widehat{g}(\omega))}{\widehat{g}(\omega)}, & \text{если } \widehat{g}(\omega) \neq 0. \end{cases}$$

Докажем, что отображение F постоянно на своем носителе. Для этого рассмотрим произвольное измеримое подмножество $K \subset \mathbf{C}^2\backslash\{0\}$. Предположим, что $A := F^{-1}(K)$ имеет положительную меру. Пусть D - это множество точек вида $2^j k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $j \in \mathbf{Z}$. Рассмотрим $\omega \in A$ и $t = 2^{j+1}k\pi \in D$. В силу (11.26) существуют 2π-периодические функции

τ и ν такие, что $\widehat{f}(\omega) = \tau(\omega 2^{-j})\,\widehat{\varphi}(\omega 2^{-j}), \quad \widehat{g}(\omega) = \nu(\omega 2^{-j})\,\widehat{\varphi}(\omega 2^{-j})$ п.в. Так как $0 \notin K$, то $F(\omega) \neq 0$, и значит $\widehat{\varphi}(\omega 2^{-j}) \neq 0$. Поэтому

$$(\widehat{f}(\omega+t), \widehat{g}(\omega+t)) = \widehat{\varphi}(2^{-j}(\omega+t))(\tau(2^{-j}\omega + 2k\pi), \nu(2^{-j}\omega + 2k\pi)) =$$

$$= \widehat{\varphi}(2^{-j}(\omega+t))(\tau(2^{-j}\omega), \nu(2^{-j}\omega)) = \tfrac{\widehat{\varphi}(2^{-j}(\omega+t))}{\widehat{\varphi}(2^{-j}\omega)}(\widehat{f}(\omega), \widehat{g}(\omega)).$$

Полученное равенство означает, что либо $F(\omega + t) = 0$, либо $F(\omega + t) = F(\omega)$. Поэтому $F(A + D) \subset K \cup \{0\}$. В силу леммы 11.2 $A + D = \mathbf{R}$, так как A имеет положительную меру. Таким образом, все ненулевые значения F принадлежат K. Поскольку K можно выбрать сколь угодно малым, отображение F постоянно на своем носителе. Последнее означает, что функции f и g линейно зависимы. $\square$

Теорема 11.2 *Пусть последовательность $\{V_j,\}_{j\in\mathbf{Z}}$ замкнутых подпространств $L_2(\mathbf{R})$ удовлетворяет свойствам (11.4-11.6) КМА. Тогда $Y := \bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $f \in Y$ и $f \neq 0$. В силу (11.4) V_j является сжатием в два раза V_{j-1}, поэтому подпространство Y инварианто относительно сжатия в 2 раза. С другой стороны, в силу леммы 11.3 $\dim Y \leq 1$, поэтому существует константа λ, такая, что

$$f(2\cdot) = \lambda f(\cdot) \text{ п.в. на } \mathbf{R}. \tag{11.27}$$

Докажем, что (11.27) противоречит $f \in L_2(\mathbf{R})\backslash\{0\}$. Действительно, для любого $C > 0$ множества $F_j := \{t : \; 2^j \leq |t| < 2^{j+1} \quad \text{и} \quad |f(t)| > C|\lambda|^j\}$ имеют следующие свойства: $F_j = 2F_{j-1}, \quad |F_j| = 2|F_{j-1}|, \quad j \in \mathbf{Z}$. Если $f \neq 0$, то существует $C > 0$, такое, что $|F_0| \neq 0$. Из (11.27) следует, что $|f(t)| > C|\lambda|^k$ для $t \in 2^k F_0$. Поэтому, $\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\,dt \geq |F_0| \sum_{k\in\mathbf{Z}} (2|\lambda|^2)^k$, что противоречит $f \in L_2(\mathbf{R})$. $\square$

12 Система Уиттакера-Шеннона-Котельникова

Другим простейшим примером ортогональных всплесков является система Уиттакера-Шеннона-Котельникова (см., например, [W]). Рассмотрим функцию φ^S, имеющую образ Фурье

$$\widehat{\varphi}^S(\omega) := \kappa_{[-\pi,\,\pi]}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\omega| \le \pi; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi^S(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$. Очевидно, что $\widehat{\varphi}^S$ удовлетворяет условию (11.15), значит функции $\varphi^S_{0k}(\cdot) := \varphi^S(\cdot \Leftrightarrow k)$ образуют ортонормированный базис в $V_0 := [\varphi^S_{0k}]_{k \in \mathbf{Z}}$. Легко видеть, что $\widehat{V_0} := \{\widehat{f} \ : \ f \in V_0\} = L^2([\Leftrightarrow\pi, \pi])$. Кроме того, если $f \in V_0$, то

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(k) \varphi^S(t \Leftrightarrow k). \tag{12.1}$$

Дело в том, что $\langle f, \varphi^S_{0k} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi}^S_{0k} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\omega) e^{ik\omega}\, dt = f(k)$. Если теперь определить для любого целого j $V_j := [\varphi^S_{jk}]_{k \in \mathbf{Z}}$, то легко видеть, что $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ образуют КМА. Построим соответствующий всплесковый базис. Заметим, что $\widehat{\varphi}^S(\omega) = m^S(\omega/2) \widehat{\varphi}^S(\omega/2)$, где 2π-периодическая уточняющая маска m^S равна

$$m^S(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\omega| \le \pi/2; \\ 0, & \text{если } \frac{\pi}{2} \le |\omega| \le \pi. \end{cases}$$

Коэффициенты $\{h_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ из (11.12) можно найти, пользуясь формулой (12.1) (точнее ее аналогом для функций из V_1):

$$\varphi^S(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \varphi^S(k/2)\, \varphi^S(2t \Leftrightarrow k). \tag{12.2}$$

Значит

$$h^S_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0; \\ \frac{\sqrt{2}}{k\pi} (\Leftrightarrow 1)^{(k-1)/2}, & \text{если } k \text{ - нечетное;} \\ 0, & \text{если } k \text{ - четное.} \end{cases}$$

В соответствие с общей схемой всплеск Уиттакера-Шеннона-Котельникова имеет образ Фурье, равный

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}^S &= e^{-i\omega/2} \overline{m^S}(\omega/2 + \pi) \widehat{\varphi}^S(\omega/2) = e^{-i\omega/2} \kappa_{[-2\pi,\,\pi] \cup [\pi,\,2\pi]}(\omega) = \\ &= e^{-i\omega/2} (\widehat{\varphi}^S(\omega/2) \Leftrightarrow \widehat{\varphi}^S(\omega)). \end{aligned}$$

Откуда $\psi^S(t) = 2\varphi^S(2t \Leftrightarrow 1) \Leftrightarrow \varphi^S(t \Leftrightarrow 1/2)$.

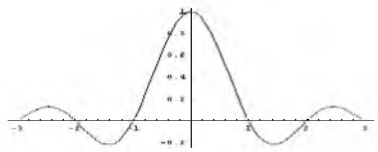


Рис.1. График $\varphi^S(t)$.

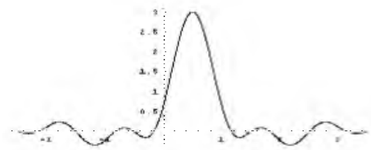


Рис.2. График $\psi^S(t)$.

13 Константы неопределенности

Всплески Хаара и Уиттакера-Шеннона-Котельникова представляют собой, условно говоря, два полюса в шкале всплесков. Всплески Хаара имеют прекрасную временную локализованность (компактный носитель), однако плохо локализованы по частоте (преобразование Фурье всплеска Хаара убывает на бесконечности как $|\omega|^{-1}$). Всплески же Уиттакера-Шеннона-Котельникова наоборот имеют компактный спектр (носитель преобразования Фурье), но убывают на бесконечности как $|t|^{-1}$.

Заметим, что $\Delta_{\psi_{jk}} = 2^{-j}\,\Delta_{\psi}$, $\Delta_{\widehat{\psi}_{jk}} = 2^{j}\,\Delta_{\widehat{\psi}}$, $j,k \in \mathbf{Z}$. Таким образом, константа неопределенности (см. с. 12) для всех элементов всплескового базиса одна и таже. Для всплесков Хаара и Уитаккера-Шеннона-Котельникова константа неопределенности равна бесконечности: $\Delta_{\widehat{\psi}^H} = \infty$, $\Delta_{\psi^S} = \infty$. Примерами всплесковых базисов с конечной константой неопределенности являются всплески Мейера, Стремберга, Лемари-Бэтла и Добеши.

14 Всплески Мейера

Всплески Мейера являются сглаженным вариантом всплесков Уиттакера-Шеннона-Котельникова. Масштабирующая функция Мейера φ^M определяется следующим образом. Пусть $\theta(\omega)$ - нечетная бесконечно дифференцируемая функция, равная $\pi/4$ при $\omega > \pi/3$ и $\Leftrightarrow\pi/4$ при $\omega < \Leftrightarrow\pi/3$. Определим четную функцию $\lambda(\omega)$ формулой

$$\lambda(\omega) = \begin{cases} \pi/4 + \theta(\omega \Leftrightarrow \pi), & \text{если } \omega \in [2\pi/3,\ 4\pi/3]; \\ \pi/4 \Leftrightarrow \theta(\frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \pi), & \text{если } \omega \in [4\pi/3,\ 8\pi/3]; \\ 0, & \text{если } \omega \in [0,\ 2\pi/3) \cup (8\pi/3,\ \infty]. \end{cases}$$

Преобразование Фурье масштабирующей функции Мейера равно

$$\widehat{\varphi}^M(\omega) = \begin{cases} \cos(\lambda(\omega)), & \text{если } |\omega| \le 4\pi/3; \\ 0, & \text{если } |\omega| > 4\pi/3. \end{cases}$$

Откуда $\varphi^M(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \cos(t\omega)\,\cos(\lambda(\omega))\,d\omega$. Легко проверить, что $\widehat{\varphi}^M$ удовлетворяет (iii) из теоремы 9.1. Кроме того, $\widehat{\varphi}^M(\omega) = m^M(\omega/2)\,\widehat{\varphi}^M(\omega/2)$, где 2π-периодическая уточняющая маска $m^M(\omega)$ равна $\sum_{l\in\mathbf{Z}} \widehat{\varphi}^M(2\omega + 4l\pi)$. Поэтому, масштабирующая функция φ^M порождает кратномасштабный анализ, и, значит, существует соответствующий всплесковый базис $\{\psi^M_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$, где $\widehat{\psi}^M(\omega) := e^{-i\omega/2}\overline{m(\omega/2+\pi)}\widehat{\varphi}^M(\omega/2) = e^{-i\omega/2}\,\sin(\lambda(\omega))$ или

$$\psi^M(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \cos((t-1/2)\omega)\,\sin(\lambda(\omega))\,d\omega. \tag{14.1}$$

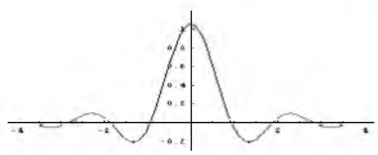


Рис.1. График $\varphi^M(t)$.

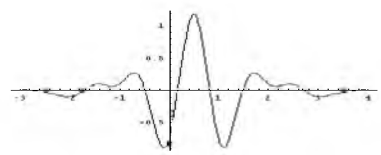


Рис.2. График $\psi^M(t)$.

Отметим, что масштабирующая функция Мейера, также как и масштабирующая функция Шеннона (см. (12.2)), удовлетворяет равенству $\varphi^M(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi^M(k/2)\,\varphi^M(2t-k)$. Действительно, $\langle\varphi^M, \varphi^M(2\cdot -k)\rangle =$
$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}} \widehat{\varphi}^M(\omega)\widehat{\varphi}^M(\omega/2)e^{-ik\omega/2}\,d\omega = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}} \widehat{\varphi}^M(\omega)e^{-ik\omega/2}\,d\omega = \frac{1}{2}\varphi^M(k/2)$.

15 Всплески Лемари-Бэтла и Стремберга

Зафиксируем произвольное натуральное число m. Рассмотрим для любого целого j подпространство V_j^m, состоящее из $(m-2)$ раза непрерывно дифференцируемых функций из $L^2(\mathbf{R})$, которые на любом интервале вида $[k2^{-j},\ (k+1)2^{-j}]$, $k\in\mathbf{Z}$, совпадают с некоторым полиномом степени не выше $m-1$. Совершенно очевидно, что последовательность $\{V_j^m\}_{j\in\mathbf{Z}}$ удовлетворяет свойствам кратномасштабного анализа.

В качестве масштабирующей функции можно взять B-сплайн

$$N^m(x) := (N^{m-1} * N^1)(x) = \int_0^1 N^{m-1}(x-t)\,dt, \quad m \ge 2, \tag{15.1}$$

где $N^1 = \kappa_{[0,1)}$. Ясно, что целые сдвиги N^m не ортогональны друг другу при $m > 1$. Например, при $m = 2$

$$N^2(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0,\, 1]; \\ 2 \Leftrightarrow t, & \text{если } t \in (1,\, 2]; \\ 0, & \text{если } t \notin [0,\, 2]; \end{cases}$$

и функции $N^2(\cdot)$ и $N^2(\cdot \pm 1)$ не ортогональны друг другу.

Из (15.1) следует, что

$$\widehat{N^m}(\omega) = \left(\tfrac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}\right)^m, \ |\widehat{N^m}(\omega)| = \left|\tfrac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right|^m,$$

$$\textstyle\sum_{l\in\mathbf{Z}} |\widehat{N^m}(\omega + 2l\pi)|^2 = \sum_{l\in\mathbf{Z}} \left|\tfrac{\sin(\omega/2+l\pi)}{\omega/2+l\pi}\right|^{2m}.$$

Поэтому, в силу теоремы 9.2 $\{N^m(\cdot \Leftrightarrow k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ - базис Рисса в V_0^m.

Для построения ортогональных сплайн-всплесков определим сначала ортогональную масштабирующую функцию (см. теорему 9.1)

$$\widehat{\varphi}^{B,m}(\omega) = \widehat{N^m}(\omega)\Big(\sum_{l\in\mathbf{Z}} |\widehat{N}^m(\omega + 2l\pi)|^2\Big)^{-1/2}. \tag{15.2}$$

(Верхний индекс B - первая буква фамилии Ж.Бэтла, всплески которого получатся при таком выборе ортогональной масштабирующей функции.)

Рассмотрим два случая. Пусть m - четное, $m = 2s, s \in \mathbf{N}$. Тогда $\widehat{N^m}(\omega) = ((\sin\omega/2)/(\omega/2))^{2s} e^{-i\omega s}$. Для упрощения выкладок заменим $N^m(t)$ на $N^m(t+s)$. Тогда $\widehat{N^m}(\omega) = ((\sin\omega/2)/(\omega/2))^{2s}$. Для ортогонализации надо посчитать

$$\left(\sum_{l\in\mathbf{Z}} |\widehat{N^m}(\omega + 2l\pi)|^2\right)^{1/2} = (\sin\,\omega/2)^{2s}(\sum_{l\in\mathbf{Z}}(\omega/2 + l\pi)^{-4s})^{1/2}.$$

Это можно сделать, дифференцируя тождество $\sum_{l\in\mathbf{Z}}(\omega + l\pi)^{-1} = \operatorname{ctg}\omega$. Продифференцировав $(q \Leftrightarrow 1)$ раз, получим

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(\omega + l\pi)^q} = \frac{P_q(\cos\omega)}{(\sin\omega)^q}, \tag{15.3}$$

где P_q - полином степени $q \Leftrightarrow 2$. Для четных q очевидно, что $P_q(t)$ строго положителен на $[0, 1]$. Окончательно имеем

$$\widehat{\varphi}^{B,m}(\omega) = ((\sin \omega/2)/(\omega/2))^m \, (P_{2m}(\cos \omega/2))^{-1/2}.$$

Функция $\varphi^{B,m}$ действительнозначна и симметрична относительно $t = 0$.

Если m - нечетно, то аналогичные выкладки показывают, что

$$\widehat{\varphi}^{B,m}(\omega) = e^{-i\omega/2} \, ((\sin \omega/2)/(\omega/2))^m \, (P_{2m}(\cos \omega/2))^{-1/2}.$$

В этом случае, функция $\varphi^{B,m}$ действительнозначна и симметрична относительно $t = 1/2$.

В соответствии с общей схемой, КМА с масштабирующей функцией $\varphi^{B,m}$ позволяет построить всплесковый базис $\{\psi_{jk}^{B,m}\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$. Этот базис был построен (без использования КМА) в работах: [B], [L].

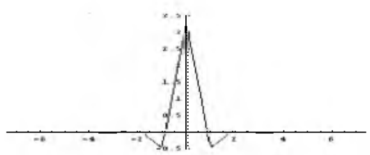


Рис.1. График $\varphi^{B,2}(t)$.

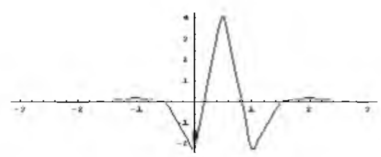


Рис.2. График $\psi^{B,2}(t)$.

Ортогонализовать B-сплайн N^m можно чуть-чуть по-другому. Из (15.3) следует, что

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} |\widehat{N^m}(\omega + 2l\pi)|^2 = P_{2m}(\cos\, \omega/2). \tag{15.4}$$

Коэффициенты полинома $P_{2m}(\cos\, \omega/2)$ нетрудно найти из следующих соображений. Очевидно, что

$$\text{supp}\ N^m = [0,\, m]. \tag{15.5}$$

Остается заметить, что по формуле Планшереля

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2\pi} \textstyle\int_0^{2\pi} e^{ik\omega} \sum_{l \in \mathbf{Z}} |\widehat{N^m}(\omega + 2l\pi)|^2 \, d\omega = \tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{ik\omega} |\widehat{N^m}(\omega)|^2 \, d\omega = \\ &= \textstyle\int_{\mathbf{R}} N^m(t) N^m(t+k) \, dt.\end{aligned} \tag{15.6}$$

Кроме того, $\langle N_{0k}^m,\, N_{00}^m \rangle = \langle N_{0,-k}^m,\, N_{00}^m \rangle$.

Напомним хорошо известную лемму Рисса [R, Задача 40].

Лемма 15.1 *Пусть $A(\xi) = \sum_{-T}^{T} \gamma_k e^{ik\xi}$ - тригонометрический полином, положительный или равный нулю на действительной оси. Тогда существует тригонометрический полином $h(\xi) = \sum_0^T \alpha_k e^{ik\xi}$, такой, что $|h(\xi)|^2 = A(\xi)$. Более того, если коэффициенты γ_k действительны, то $h(\xi)$ можно тоже выбрать с действительными α_k.*

Из этой леммы следует, что

$$P_{2m}(\cos\omega/2) = a_m |(1 + z_1\, e^{i\omega}) \cdots (1 + z_{m-1}\, e^{i\omega})|^2,$$

где $\{z_l\}_{l=1}^{m-1}$ всегда можно выбрать внутри единичного круга: $|z_l| < 1$. Более того, из результатов И.Шонберга (I.J.Shoenberg) [Sh] следует, что $\{z_l\}_{l=1}^{m-1}$ положительные числа. Обозначим их $s_{m-1} < \cdots < s_1$. Пусть

$$A_m(w) := \sqrt{a_m}(1 + s_1\, e^{iw}) \cdots (1 + s_{m-1}\, e^{iw}).$$

Тогда функция $\varphi^{St,m}$, определяемая

$$\widehat{\varphi^{St,m}}(\omega) = \frac{\widehat{N^m}(\omega)}{A_m(\omega)}, \tag{15.7}$$

также как и $\varphi^{B,m}$, удовлетворяет условию (iii) из теоремы 9.1 и, следовательно, является ортогональной масштабирующей для $\{V_j^m\}_{j\in\mathbf{Z}}$. Так как $(1 + s\, e^{iw})^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} (\Leftrightarrow s\, e^{iw})^l$, равенство (15.7) означает, что $\varphi^{St,m}$ разлагается в ряд по целым сдвигам влево B-сплайна N^m, причем коэффициенты разложения убывают как геометрическая прогрессия. Значит, $\mathrm{supp}\ \varphi^{St,m} = (\Leftrightarrow\infty, m]$ и $\varphi^{St,m}(t)$ убывает экспоненциально при $t \to \Leftrightarrow\infty$. КМА с такой масштабирующей функцией порождает всплесковый базис $\{\psi_{jk}^{St,m}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$, построенный (без использования КМА) в [St].

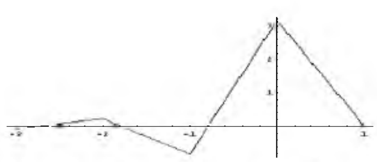


Рис.1. График $\varphi^{St,2}(t)$.

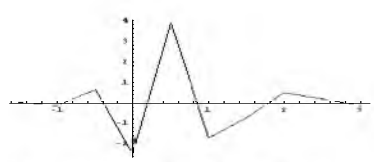


Рис.2. График $\psi^{St,2}(t)$.

16 Ортогональные всплески с компактным носителем

Простейший способ построения ортогональных всплесков с компактным носителем основан на использовании ортогональных масштабирующих функций с компактным носителем. В этом случае, в последовательности $h_n := \sqrt{2}\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\overline{\varphi(2x \Leftrightarrow n)}\,dx,\ n \in \mathbf{N}$, из (11.12) только конечное число h_n отлично от нуля, и поэтому соответствующий всплеск ψ (см.(11.25)) является конечной линейной комбинацией функций с компактным носителем, т.е. сам имеет компактный носитель. Уточняющий фильтр m_0 будет тригонометрическим полиномом $m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n e^{-in\omega}$. В силу (11.16) $|m_0(\omega/2)|^2 + |m_0(\omega/2+\pi)|^2 \equiv 1$.

Естественно стараться построить φ и ψ достаточно регулярными. Отметим здесь следующее необходимое условие [D].

Теорема 16.1 *Пусть $f \in L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет условиям $\langle f_{j,k}, f_{l,m}\rangle = \delta_{j,l}\delta_{k,m}$, где $f_{j,k}(x) = 2^{j/2}f(2^j x \Leftrightarrow k)$. Предположим, что f имеет компактный носитель, $f \in C^m(\mathbf{R})$ и $f^{(l)}$ ограничены при $l \le m$. Тогда*

$$\int_{\mathbf{R}} x^l f(x)\,dx = 0 \qquad \textit{для} \qquad l = 0, 1, ..., m. \tag{16.1}$$

Свойство (16.1) эквивалентно тому, что $\widehat{\psi}^{(l)}(0) = 0$ при $l = 0, 1, ..., m$. Так как $\widehat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega/2}\overline{m_0(\omega/2+\pi)}\widehat{\varphi}(\omega/2)$ и $\widehat{\varphi}(0) = 1$, то из $\psi \in C^m(\mathbf{R})$ следует, что m_0 имеет ноль кратности $m+1$ в π или $m_0(\omega) = (\frac{1+e^{i\omega}}{2})^{m+1}L(\omega)$, где L - некоторый тригонометрический полином.

Итак, будем искать решения (11.16) в виде $m_0(\omega) = (\frac{1+e^{i\omega}}{2})^N L(\omega)$. Заметим, что $|m_0(\omega)|^2 = \left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^N |L(\omega)|^2 = \left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^N P(\sin^2\frac{\omega}{2})$, где $P(\sin^2\frac{\omega}{2}) := |L(\omega)|^2$. Подставляя это выражение в (11.16), получаем уравнение на P :

$$x^N P(1 \Leftrightarrow x) + (1 \Leftrightarrow x)^N P(x) = 1. \tag{16.2}$$

Так как x^N и $(1 \Leftrightarrow x)^N$ - взаимно-простые полиномы степени N, то по теореме Безу существует единственный полином P_{N-1} степени $N \Leftrightarrow 1$, удовлетворяющий (16.2): $P_{N-1}(x) = \sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1+k}{k}x^k$. Очевидно, что $P_{N-1}(x) > 0$. Существуют решения (16.2) более высокой степени

$P(x) = P_{N-1}(x) + x^N R(x - \frac{1}{2})$, где R - произвольный нечетный полином. Для простоты рассмотрим здесь только случай $R = 0$.

Зная P, полином m_0 находится при помощи леммы 15.1.

Итак, пусть $N \in \mathbf{N}$. Фильтрами Добеши называют тригонометрические полиномы $d_N(\omega) = 2^{-1/2} \sum\limits_{l=0}^{2N-1} h_N(l) e^{il\omega}$, $\quad h_N(l) \in \mathbf{R}$, удовлетворяющие равенствам $|d_N(\omega)|^2 = \left(\cos^2 \frac{\omega}{2}\right)^N P_{N-1}(\sin^2 \frac{\omega}{2})$. В [D1] доказана следующая

Теорема 16.2 *Функция $\varphi^{D,N}$, определенная в образах Фурье как $\widehat{\varphi^{D,N}}(\omega) := \prod_{l=1}^{\infty} d_N(\omega 2^{-l})$, является ортогональной масштабирующей функцией. Соответствующий всплеск $\psi^{D,N}$, определяемый формулой $\widehat{\psi^{D,N}}(\omega) = e^{-i\omega/2} \overline{d_N(\omega/2 + \pi)} \widehat{\varphi^{D,N}}(\omega/2)$, порождает ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$: $\{\psi_{jk}^{D,N}(\cdot) := 2^{j/2} \psi^{D,N}(2^j \cdot - k)\}_{j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}}$. Более того, $supp\, \psi^{D,N} = [-(N - 1), N]$, и существует $\lambda > 0$, такая, что $\psi^{D,N} \in C^{\lambda N}$, где $C^{\alpha} := \{f : \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega)(1 + |\omega|)^{\alpha} d\omega < \infty\}$, $\alpha > 0$.*

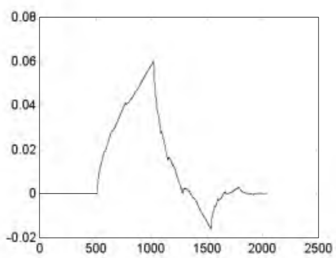


Рис.1. График $\varphi^{D,2}(t)$.

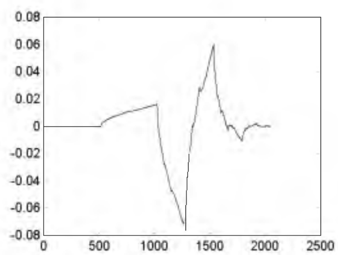


Рис.2. График $\psi^{D,2}(t)$.

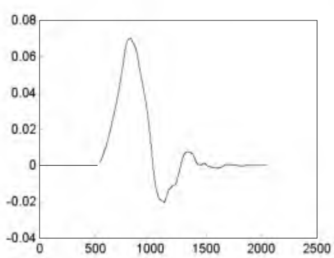


Рис.1. График $\varphi^{D,4}(t)$.

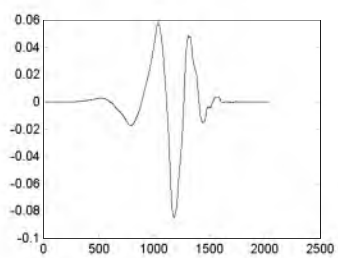


Рис.2. График $\psi^{D,4}(t)$.

17 Быстрые алгоритмы

Кратномасштабный анализ позволяет быстро вычислять всплесковые коэффициенты заданной функции. Предположим, что нам известны скалярные произведения f с $\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ для некоторого j. Не ограничивая общности, можно считать $j = 0$ (к этому случаю всегда можно перейти соответствующей заменой переменных). Зная $\langle f,\, \varphi_{0k}\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$, легко подсчитать $\langle f,\, \psi_{jk}\rangle$ для $j < 0$. Действительно, $\psi = \sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k\, \varphi_{1k}$, где $g_k = (\Leftrightarrow 1)^k h_{1-k}$ (см.(11.25)). Следовательно,

$$\begin{aligned} &\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t \Leftrightarrow k) = 2^{j/2} \textstyle\sum_{l\in\mathbf{Z}} \varphi(2^j t \Leftrightarrow 2k \Leftrightarrow l) = \\ &= \textstyle\sum_{l\in\mathbf{Z}} g_l\, \varphi_{j+1,2k+l}(t) = \sum_{l\in\mathbf{Z}} g_{l-2k}\, \varphi_{j+1,l}(t). \end{aligned} \tag{17.1}$$

Значит $\langle f, \psi_{-1,k}\rangle = \sum_{l\in\mathbf{Z}} \overline{g_{l-2k}}\langle f,\, \phi_{0l}\rangle$, т.е. $\{\langle f,\, \psi_{-1,k}\rangle\}_{k\in\mathbf{Z}}$ получается сверткой последовательности $\{\langle f,\, \varphi_{0l}\rangle\}_{l\in\mathbf{Z}}$ с $\{\overline{g_{-l}}\}_{l\in\mathbf{Z}}$ с последующим выбором только четных элементов. Аналогично выполняется переход от слоя j к $j \Leftrightarrow 1$

$$\langle f, \psi_{j-1,k}\rangle = \sum_{l\in\mathbf{Z}} \overline{g_{l-2k}}\langle f,\, \varphi_{j,l}\rangle, \tag{17.2}$$

правда при этом нужно предварительно вычислить $\{\langle f,\, \varphi_{j,k}\rangle\}_{k\in\mathbf{Z}}$. Но, в силу масштабного равенства

$$\varphi_{j,k} = \sum_{l\in\mathbf{Z}} h_{l-2k}\varphi_{j+1,l}. \tag{17.3}$$

Поэтому,

$$\langle f,\, \varphi_{j,k}\rangle = \sum_{l\in\mathbf{Z}} \overline{h_{l-2k}}\langle f,\, \varphi_{j+1,l}\rangle. \tag{17.4}$$

Итак, начиная с $\{\langle f,\, \varphi_{0,k}\rangle\}_{k\in\mathbf{Z}}$, можно вычислить $\{\langle f,\, \psi_{-1,k}\rangle\}_{k\in\mathbf{Z}}$ по (17.2) и $\{\langle f,\, \varphi_{-1,k}\rangle\}_{k\in\mathbf{Z}}$ по (17.4). Затем мы можем применить (17.2) и (17.4) снова и получить $\{\langle f,\, \psi_{-2,k}\rangle\}_{k\in\mathbf{Z}}$ и $\{\langle f,\, \varphi_{-2,k}\rangle\}_{k\in\mathbf{Z}}$, используя $\{\langle f,\, \varphi_{-1,k}\rangle\}_{k\in\mathbf{Z}}$. Таким образом, на каждом шаге вычисляются не только всплесковые коэффициенты j - го слоя, но и вспомогательные коэффициенты $\{\langle f,\, \varphi_{j,k}\rangle\}_{k\in\mathbf{Z}}$ которые потребуются для нахождения всплесковых коэффициентов в $(j \Leftrightarrow 1)$-ом слое.

В целом весь процесс можно рассматривать как последовательное вычисление более грубых приближений функции f вместе с фиксацией деталей, необходимых для получения более точного приближения из более грубого. С этой точки зрения, мы начинаем с приближения $f^0 = P_0 f$ (напоминаем, что P_j - это ортогональный проектор на V_j; через Q_j мы будем обозначать проектор на W_j). Далее мы разлагаем $f^0 \in V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$ на f^{-1} и $\delta^{-1} : f^0 = f^{-1} + \delta^{-1}$, где $f^{-1} = P_{-1} f^0 = P_{-1} f$ - более грубое приближение f в шкале кратномасштабного анализа , а $\delta^{-1} = f^0 \Leftrightarrow f^{-1} = Q_{-1} f^0 = Q_{-1} f$ - это "потеря" в информации при отображении $f^0 \to f^{-1}$. В каждом из пространств V_j и W_j есть ортонормированный базис $\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ и $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$, поэтому

$$f^0 = \sum_{k\in\mathbf{Z}} s_k^0 \varphi_{0k}, \quad f^{-1} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} s_k^{-1} \varphi_{-1,k}, \quad \delta^{-1} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} d_k^{-1} \psi_{-1,k}.$$

Таким образом, формулы (17.2), (17.4) задают преобразование коэффициентов при переходе от ортонормированного базиса $\{\varphi_{0k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ в V_0 к ортонормированному базису $\{\varphi_{-1,k}\}_{k\in\mathbf{Z}} \bigcup \{\psi_{-1,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$:

$$s_k^{-1} = \sum_{l\in\mathbf{Z}} \overline{h_{l-2k}}\, s_k^0, \quad d_k^{-1} = \sum_{l\in\mathbf{Z}} \overline{g_{l-2k}}\, s_k^0. \tag{17.5}$$

Если обозначить $a := \{a_l\}_{l\in\mathbf{Z}}$, $A := \{a_{-l}\}_{l\in\mathbf{Z}}$ и $(Ab)_k = \sum_{l\in\mathbf{Z}} A_{2k-l}\, b_l$, то (17.5) можно записать в виде $s^{-1} = \overline{H} s^0$, $d^{-1} = \overline{G} s^0$.

Приближение $f^{-1} \in V_{-1} = V_{-2} \oplus W_{-2}$ может быть снова разложено:

$$\begin{aligned} &f^{-1} = f^{-2} + \delta^{-2}, \quad f^{-2} \in V_{-2}, \quad \delta^{-2} \in W_{--2}, \\ &f^{-2} = \textstyle\sum_{k\in\mathbf{Z}} s_k^{-2} \varphi_{-2,k}, \quad \delta^{-2} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} d_k^{-2} \psi_{-2,k}. \end{aligned}$$

Опять $s^{-2} = \overline{H} s^{-1}$, $d^{-2} = \overline{G} s^{-1}$. Схематично, весь процесс можно изобразить так:

$$\begin{array}{ccccccccc} s^0 & \overset{\overline{H}}{\underset{\overline{G}}{\Leftrightarrow}} & s^{-1} & \overset{\overline{H}}{\underset{\overline{G}}{\Leftrightarrow}} & s^{-2} & \cdots & s^j & \overset{\overline{H}}{\underset{\overline{G}}{\Leftrightarrow}} & s^{j-1} \\ & \searrow & & \searrow & & & & \searrow & \\ & & d^{-1} & & d^{-2} & \cdots & d^j & & d^{j-1} \end{array}$$

На практике, после выполнения конечного числа шагов процесс прекращается, что означает, что исходная информация $\{\langle f, \varphi_{0k}\rangle\}_{k\in\mathbf{Z}} = s^0$ преобразована в d^{-1}, $d^{-2}, \cdots, d^{-j_0}$ и s^{-j_0}, т.е. в $\{\langle f, \psi_{-j,k}\rangle\}_{j=1,\cdots j_0;\, k\in\mathbf{Z}}$ и $\{\langle f, \varphi_{-j_0,k}\rangle\}_{k\in\mathbf{Z}}$. Так как преобразования выполнялись при помощи изменения ортогональных базисов, обратная операция задается сопряженной матрицей. Точнее: $f^{j+1} = f^j + \delta^j = \sum_{k\in\mathbf{Z}} s^j_k\,\varphi_{jk} + \sum_{k\in\mathbf{Z}} d^j_k\,\psi_{jk}$, Следовательно (см. (17.1), (17.3))

$$\begin{aligned} s^{j+1}_k &= \langle f^{j+1}, \varphi_{j+1,k}\rangle = \\ &= \sum_{l\in\mathbf{Z}} s^j_l\,\langle \varphi_{jl}, \varphi_{j+1,k}\rangle + \sum_{l\in\mathbf{Z}} d^j_l\,\langle \psi_{jl}, \psi_{j+1,k}\rangle = \\ &= \sum_{l\in\mathbf{Z}} h_{k-2l}\,s^j_l + \sum_{l\in\mathbf{Z}} g_{k-2l}\,d^j_l. \end{aligned} \tag{17.6}$$

Если обозначить $(\tilde{a}b)_k := \sum_{l\in\mathbf{Z}} a_{k-2l}\,b_l$, то $s^{j+1} = \tilde{h}s^j + \tilde{g}d^j$ и схематично процесс восстановления выглядит так:

$$\begin{array}{ccccccccc} s^j & \xrightarrow{\tilde h} & s^{j+1} & \xrightarrow{\tilde h} & s^{j+2} & \cdots & s^{-1} & \xrightarrow{\tilde h} & s^0 \\ & \overset{\tilde g}{\nearrow} & & \overset{\tilde g}{\nearrow} & & & & \overset{\tilde g}{\nearrow} & \\ d^j & & d^{j+1} & & d^{j+2} & \cdots & d^{-1} & & \end{array}$$

Важнейшей чертой изложенного алгоритма разложения и восстановления является его быстрота. Например, для системы Хаара имеем следующее. Пусть исходная информация состояла из 2^N чисел $\{s^0_k\}_{k=0}^{2^N-1}$. Тогда, на первом шаге вычисляется 2^{N-1} вспомогательных чисел $\{s^{-1}_k\}_{k=0}^{2^{N-1}-1} : s^{-1}_k = (s^0_{2k} + s^0_{2k+1})/\sqrt{2}$ и 2^{N-1} коэффициентов $\{d^{-1}_k\}_{k=0}^{2^{N-1}-1}$: $d^{-1}_k = (s^0_{2k} \Leftrightarrow s^0_{2k+1})\sqrt{2}$. На каждом следующем шаге количество вспомогательных чисел и коэффициентов уменьшается в два раза. Количество операций во всем алгоритме разложения равно $2\cdot 2^N(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots) = 2\cdot 2^N$. Для более сложных всплесковых базисов вычисления вспомогательных чисел (условно говоря, "средних") и коэффициентов ("разностей") требуют более чем два предыдущих числа, но рассуждения о количестве коэффициентов на каждом слое остаются в силе. Если "обобщенные средние" и "разности" используют K предыдущих чисел, то общее число операций равно $2KN$ (KN - умножений, KN - сложений).

Следует отметить, что быстрый алгоритм разложения и восстановления по всплесковому базису (коротко, быстрое всплесковое преобразование (БВП)) был известен в цифровой обработке сигналов под названием полосовая фильтрация с точным восстановлением (subband filtering scheme with exact reconstruction). Эта схема была предложена до появления теории всплесков в работах: [Sm], [Mi], [V].

18 Полуортогональные сплайн-всплески с компактным носителем

Пусть φ - масштабирующая функция с компактным носителем, порождающая КМА $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ в $L^2(\mathbf{R})$. В этом случае можно построить соответствующий полуортогональный всплеск ψ с компактным носителем. В этом параграфе мы не предполагаем ортонормированность последовательности $\{\varphi(\cdot \Leftrightarrow k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ (дело в том, что ортогонализация (9.2) масштабирующей функции с компактным носителем приводит к потере компактного носителя).

Пусть $\operatorname{supp}\varphi = [0, M]$, $M \in \mathbf{N}$. Тогда $\varphi = \sum_{-M+1}^{2M-1} h_k\varphi_{1k}$. Для удобства будем рассматривать действительнозначные φ. Очевидно, что автокорреляционная функция $\Phi(t) := \int_{\mathbf{R}} \varphi(x \Leftrightarrow t)\varphi(x)dx$ является четной функцией и $\operatorname{supp}\Phi = [\Leftrightarrow M, M]$. Пусть n_φ - наибольшее целое, для которого $\Phi(n_\varphi) \neq 0$. Так как Φ - непрерывная функция, то $\Phi(M) = 0$ и $0 \le n_\varphi \le M \Leftrightarrow 1$. Аналогично (15.6) получаем, что $\sum_{l\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega+2l\pi)|^2 = E_\varphi(e^{-i\omega})$, где $E_\varphi(z) := \sum_{k=-n_\varphi}^{n_\varphi} \Phi(k)z^k$. Полином $P_\varphi(z)$ называют полиномом Эйлера-Фробениуса для масштабирующей функции φ.

Построение полуортогонального всплескового базиса аналогично построению ортогонального (см. параграф 11). Прежде всего охарактеризуем функции $\psi \in W_0$, где $V_0 \oplus W_0 = V_1$, $W_0 \perp V_0$. Так как $W_0 \subset V_1$, то $\psi = \sum_k r_k\varphi_{1k}$. В образах Фурье имеем $\widehat{\psi}(\omega) = R(e^{-i\omega/2})\,\widehat{\varphi}(\omega/2)$, где $R(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} r_k\, z^k$ – 2π-периодическая функция из $L^2[0, 2\pi]$. Аналогично для φ : $\varphi = \sum_k p_k\varphi_{1k}$, $\widehat{\varphi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2})\,\widehat{\varphi}(\omega/2)$, $P(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} p_k\, z^k$. Пусть $z = e^{-i\omega/2}$. Применяя тождество Планшереля, имеем

$$\langle\varphi(\cdot \Leftrightarrow l), \psi(\cdot)\rangle = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \widehat{\varphi}(\omega)e^{-il\omega}\overline{\widehat{\psi}(\omega)}d\omega =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} |\widehat{\varphi}(\omega/2)|^2 P(z)\overline{R(z)}e^{-il\omega}d\omega =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} \left\{\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega/2 + 2\pi k)|^2\right\} P(z)\overline{R(z)}e^{-il\omega}d\omega =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} E_\varphi(z)P(z)\overline{R(z)}e^{-il\omega}d\omega =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{E_\varphi(z)P(z)\overline{R(z)} + E_\varphi(\Leftrightarrow z)P(\Leftrightarrow z)\overline{R(\Leftrightarrow z)}\}e^{-il\omega}d\omega.$$

Откуда следует, что $\psi \in W_0$ тогда и только тогда, когда

$$E_\varphi(z)P(z)\overline{R(z)} + E_\varphi(-z)P(-z)\overline{R(-z)} = 0, \quad |z| = 1. \tag{18.1}$$

Если предположить, что коэффициенты R действительны, то нетрудно указать общее решение (18.1):

$$R(z) = zK(z^2)P(-\frac{1}{z})E_\varphi(-z), \quad |z| = 1, \tag{18.2}$$

где $K(z)$ - произвольная квадратично-суммируемая функция на единичной окружности $|z| = 1$. Здесь использовано то, что $E_\varphi(z^{-1}) = E_\varphi(z)$ при $|z| = 1$, так как $\Phi(-k) = \Phi(k)$.

Если φ имеет компактный носитель, то P и E_φ являются полиномами Лорана. Из (18.2) следует, что R будет тоже полиномом Лорана, если K - полином Лорана.

Теорема 18.1 *Полуортогональный всплеск с минимальным компактным носителем, соответствующий φ, определяется двух-масштабным соотношением*

$$\psi := \sum_k q_k \varphi_{1,k}$$

или, в образах Фурье,

$$\widehat{\psi}(\omega) := Q(e^{-i\omega/2})\widehat{\varphi}(\omega/2),$$

где $Q(z) := \frac{1}{\sqrt{2}} q_k z^k = cz^{2N+1}P(-\frac{1}{z})E_\varphi(-z)$. Здесь N - произвольное целое, c - произвольная ненулевая константа. В частности, если положить N равным целой части $(M + n_\varphi)/2$, то Q будет алгебраическим полиномом и $\psi := \sum_{k=0}^{M+2n_\varphi} q_k \varphi_{1,k}$.

Последовательность $\{\psi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ образует базис Рисса в W_0, а $\{\psi_{j,k}(t) := 2^{j/2}\psi(2t - k)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ – полуортогональный базис в $L^2(\mathbf{R})$.

Применим эту теорему к B-сплайну $\varphi = N^m, \quad m \in \mathbf{N}$. В этом случае $M = m, \quad n_\varphi = m - 1$. Полагая $N = m - 1, \quad c = -1$, имеем

$$Q_m(z) = -z^{2m-1}P(-\tfrac{1}{z})E(-z) =$$

$$= -z^{2m-1}\left(\tfrac{z-1}{2z}\right)^m \sum_{k=-m+1}^{m-1}(-1)^k N^{2m}(m+k)z^k =$$

$$= \left(\tfrac{1-z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{2m-2}(-1)^k N^{2m}(k+1)z^k = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{3m-2} q_{m,k}z^k,$$

где $q_{m,k} = \frac{(-1)^k}{2^{m-\frac{1}{2}}} \sum_{l=0}^{m} N^{2m}(k \Leftrightarrow l+1), \quad k = 0, \dots, 3m \Leftrightarrow 2$. Здесь использованы легко проверяемые соотношения:
$N^m(t) = \sum_{k=0}^{m} 2^{-m+1}\binom{m}{k} N^m(2t \Leftrightarrow k), \quad E_{N^m}(z) = \sum_{-m+1}^{m-1} N^{2m}(m+k)z^k$.
Окончательно, полуортогональный сплайн-всплеск порядка m равен $\psi^m(t) = \sum_{k=0}^{3m-2} \sqrt{2} q_{m,k} N^m(2t \Leftrightarrow k), \quad \operatorname{supp} \psi^m = [0, 2m \Leftrightarrow 1]$.

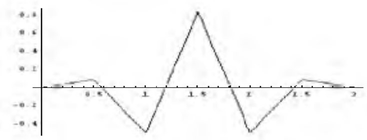
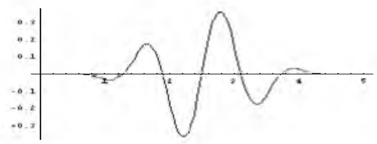


Рис.1. График $\psi^2(t)$.



Рпс.2. График $\psi^3(t)$.

19 Регулярные КМА в $L^2(\mathbf{R}^n)$

Перейдем от рассмотрения одномерных КМА к многомерным. Следующее определение обобщает определение 11.1

Определение 19.1 *Кратномасштабный анализ (КМА) - это последовательность $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ замкнутых подпространств $L^2(\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющая следующим свойствам:*

$$V_j \subset V_{j+1}; \tag{19.1}$$

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n); \tag{19.2}$$

$$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}; \tag{19.3}$$

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}\cdot) \in V_0; \tag{19.4}$$

$$f \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot \Leftrightarrow k) \in V_0 \text{ для любого } k \in \mathbf{Z}^n; \tag{19.5}$$

существует функция $g \in V_0$ такая, что последовательность

$$\{g(\cdot \Leftrightarrow k)\}_{k\in\mathbf{Z}^n} \text{ образует базис Рисса в } V_0. \tag{19.6}$$

Напомним, что последовательность $\{g_{0k}(\cdot) := g(\cdot \Leftrightarrow k)\}_{k\in\mathbf{Z}^n}$ является базисом Рисса в V_0, если $[g_{0k}]_{k\in\mathbf{Z}^n} = V_0$ и существуют две константы $A > 0$, $B > 0$ такие, что

$$A(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |c_k|^2)^{1/2} \le \| \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\, g_{0k}\|_{L^2(\mathbf{R})} \le B(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |c_k|^2)^{1/2}$$

для любой последовательности чисел $\{c_k\}_{k\in\mathbf{Z}^n}$.

Эффективность использования всплесковых базисов в функциональных пространствах, отличных от $L^2(\mathbf{R}^n)$, зависит от регулярности соответствующего КМА.

Определение 19.2 *КМА $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}^n}$ называется r-регулярным ($r \in \mathbf{N}$), если функция $g(x)$ в (19.6) может быть выбрана так, что*

$$|\partial^\alpha g(x)| \leq C_m\,(1+|x|)^{-m} \tag{19.7}$$

для любого целого $m \in \mathbf{N}$ и для любого мульти-индекса $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, удовлетворяющего $|\alpha| \leq r$.

Следующая теорема показывает, как перейти от базиса Рисса к каноническому ортонормированному базису (см. для сравнения одномерный случай в теоремах 9.1, 9.2, 9.3).

Теорема 19.1 *Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ – КМА в $L^2(\mathbf{R}^n)$. Тогда существуют две константы $c_2 \geq c_1 > 0$, такие, что для почти всех $\omega \in \mathbf{R}^n$ имеем*

$$c_1 \leq \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{g}(\omega + 2k\pi)|^2\right)^{1/2} \leq c_2. \tag{19.8}$$

Далее, если $\varphi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ определена в образах Фурье

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{g}(\omega)\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{g}(\omega + 2k\pi|^2\right)^{-1/2}, \tag{19.9}$$

то $\{\varphi(x \Leftrightarrow k)\}_{k\in\mathbf{Z}^n}$ является ОНБ в V_0.

Наконец, пусть последовательность $\{f(x \Leftrightarrow k)\}_{k\in\mathbf{Z}^n}$ ортонормирована, где функция $f \in V_0$. Тогда эта последовательность является ОНБ в V_0 и $\widehat{f}(\omega) = \theta(\omega)\widehat{\varphi}(\omega)$, где $\theta(\omega) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\quad |\theta(\omega)| = 1$ почти всюду, и $\theta(\omega + 2k\pi) = \theta(\omega)$ для любого $k \in \mathbf{Z}^n$.

Следующая теорема показывает, что ортогонализация (19.9) сохраняет регулярность КМА.

Теорема 19.2 *Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ – r-регулярный КМА в $L^2(\mathbf{R}^n)$. Тогда функция $\varphi \in V_0$, определенная в (19.9), удовлетворяет оценке*

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \le C_m (1+|x|)^{-m}, \tag{19.10}$$

для любого целого $m \in \mathbf{N}$ и для любого мульти-индекса $\alpha \in \mathbf{N}^n$, удовлетворяющего $|\alpha| \le r$.

Покажем, как получить КМА в $L^2(\mathbf{R}^2)$, используя одномерный КМА $\{\mathcal{V}_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ в $L^2(\mathbf{R})$. Определим $V_j \subset L^2(\mathbf{R}^2)$ как замыкание в $L^2(\mathbf{R}^2)$⇔норме алгебраического тензорного произведения $\mathcal{V}_j \otimes \mathcal{V}_j$. Полученный КМА называют сепарабельным. Если многомерный КМА нельзя получить описанным способом, то его называют несепарабельным.

В сепарабельном случае ортонормированный базис в V_0 состоит из произведений $\varphi(x \Leftrightarrow k)\varphi(y \Leftrightarrow k)$, $(k,l) \in \mathbf{Z}^2$. Другими словами, полагая $\varphi(x,y) := \varphi(x)\varphi(y)$, получаем, что ортонормированный базис в V_0 является орбитой функции φ под действием $\mathbf{Z}^2$.

Пусть $\mathcal{W}_0$ - ортогональное дополнение $\mathcal{V}_0$ до $\mathcal{V}_1$. Тогда

$$V_1 = V_0 \oplus \overline{\mathcal{V}_0 \otimes \mathcal{W}_0} \oplus \overline{\mathcal{W}_0 \otimes \mathcal{V}_0} \oplus \overline{\mathcal{W}_0 \otimes \mathcal{W}_0}.$$

Действительно, $V_1 = \overline{(\mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0) \otimes (\mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0)}$, и достаточно воспользоваться дистрибутивностью тензорного произведение по отношению к сложению. Пусть W_0 обозначает ортогональное дополнение V_0 до V_1. Тогда $W_0 = W_{0,1} \oplus W_{1,0} \oplus W_{1,1}$, где $W_{0,1} = \overline{\mathcal{V}_0 \otimes \mathcal{W}_0}$, $W_{1,0} = \overline{\mathcal{W}_0 \otimes \mathcal{V}_0}$, $W_{1,1} = \overline{\mathcal{W}_0 \otimes \mathcal{W}_0}$.

Для получения ортонормированного базиса в W_0 надо взять объединение последовательностей $\varphi(x \Leftrightarrow k)\psi(y \Leftrightarrow l)$, $\psi(x \Leftrightarrow k)\varphi(y \Leftrightarrow l)$, и $\psi(x \Leftrightarrow k)\psi(y \Leftrightarrow l), k, l \in \mathbf{Z}^2$, которые являются ортонормированными базисами в $W_{0,1}, W_{1,0}$ и $W_{1,1}$.

Проблема построения всплескового базиса на основе КМА в $L^2(\mathbf{R}^n)$ в общем случае является более сложной. Однако в [Gr] доказана

Теорема 19.3 *Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ – r-регулярный КМА в $L^2(R^n)$. W_j - ортогональное дополнение V_j до V_{j+1}. Тогда существуют $q := 2^n \Leftrightarrow 1$ функций $\psi_1, ..., \psi_q$ из V_1 со следующими свойствами:*

$$|\partial^\alpha \psi_l(x)| \le C_N (1+|x|)^{-N} \tag{19.11}$$

для любого мульти-индекса $\alpha \in \mathbf{N}^n$ *с* $|\alpha| \le r$, *любого* $x \in \mathbf{R}^n$ *и любого* $N \ge 1$;

$$\{\psi_l(x \Leftrightarrow k), 1 \le l \le q, k \in \mathbf{Z}^n\} \text{ является ОНБ в } W_0.$$

Следствие 19.1 *Функции* $2^{nj/2}\psi_l(2^j x \Leftrightarrow k)$, $1 \le l \le q$, $k \in \mathbf{Z}^n$, $j \in \mathbf{Z}$, *образуют ортонормированный базис в* $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Замечание 19.1 *Не известен метод построения несепарабельного многомерного КМА* $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ *в* $L^2(\mathbf{R}^n)$, *у которого всплесковый базис состоит из компактных функций. Дело в том, что алгоритм К.Грошенига (K.Gröchenig) даже при применении к компактной масштабирующей функции* φ *не дает всплесков с компактным носителем. Очевидно, что сепарабельные многомерные всплески, полученные на основе всплесков Добеши, имеют компактный носитель.*

20 Неравенства Бернштейна

Регулярность масштабирующей функции (19.7) позволяет рассматривать КМА $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ не только в $L^2(\mathbf{R}^n)$, но и в других функциональных пространствах, например, в $L^p(\mathbf{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$.

Лемма 20.1 *Пусть ортогональная масштабирующая функция* φ *удовлетворяет (19.7). Тогда существуют две константы* $c_2 > c_1 > 0$ *такие, что для любого* $p \in [1,\infty]$ *и любой конечной суммы* $f(x) = \sum_k \alpha(k)\varphi(x \Leftrightarrow k)$ *выполнены неравенства*

$$c_1\|f\|_p \le (\sum_k |\alpha(k)|^p)^{1/p} \le c_2\|f\|_p. \tag{20.1}$$

Доказательство. Начнем с крайних случаев. При $p = \infty$

$$|f(x)| \le \sum_k |\alpha(k)||\varphi(x \Leftrightarrow k)| \le \sup_k |\alpha(k)|C(\varphi),$$

где $C(\varphi) := \sup_{x\in\mathbf{R}^n}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\varphi(x \Leftrightarrow k)|$. В другую сторону воспользуемся тем, что $\alpha(k) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\overline{\varphi}(x \Leftrightarrow k)dx$, поэтому $|\alpha(k)| \le \|f\|_\infty\|\varphi\|_1$.

Случай $p = 1$ разбирается также:

$$\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|dx \le \int_{\mathbf{R}^n}\sum_k|\alpha(k)||\varphi(x \Leftrightarrow k)|dx \le \sum_k|\alpha(k)|\|\varphi\|_1;$$

$$\sum_k|\alpha(k)| \le \int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|\sum_k|\varphi(x \Leftrightarrow k)|dx \le C(\varphi)\|f\|_1.$$

Рассмотрим общий случай. Пусть q – сопряженный показатель к p, т.е. $1/p+1/q=1$. Запишем $|\varphi(x \Leftrightarrow k)| = |\varphi(x \Leftrightarrow k)|^{1/p}|\varphi(x \Leftrightarrow k)|^{1/q}$, что дает

$$|f(x)| \leq \sum_k |\alpha(k)||\varphi(x \Leftrightarrow k)| \leq$$

$$\leq (\sum_k |\alpha(k)|^p|\varphi(x \Leftrightarrow k)|)^{1/p}(\sum_k |\varphi(x \Leftrightarrow k)|)^{1/q} \leq C(\varphi)(\sum_k |\alpha(k)|^p)^{1/p},$$

откуда следует левая часть неравенства (20.1). Для доказательства правой части используем то, что $\alpha(k) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\overline{\varphi}(x \Leftrightarrow k)dx$, поэтому $|\alpha(k)| \leq (\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p|\varphi(x \Leftrightarrow k)|dx)^{1/p}\|\varphi\|_1^{1/q}$.□

Определим $V_0(p)$ как пересечение $V_0 \cap L^p(\mathbf{R}^n)$ для $1 \leq p \leq 2$, и как замыкание V_0 по $L^p(\mathbf{R}^n)$-норме для $2 \leq p < \infty$. По лемме 20.1 $f \in V_0(p)$ тогда и только тогда, когда $f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \alpha(k)\varphi(x \Leftrightarrow k)$, где $\alpha(k) \in l^p(\mathbf{Z}^n)$.

Определим $V_0(\infty)$ как векторное пространство, чьи элементы могут быть записаны как $f(x) = \lim f_m(x)$, где предел является равномерным на компактах и где $f_m \in V_0$ и $\sup_{m\geq 0} \|f_m\|_\infty < \infty$. Другими словами, $f \in V_0(\infty)$ тогда и только тогда, когда $f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \alpha(k)\varphi(x \Leftrightarrow k)$, где $\alpha(k) \in l^\infty(\mathbf{Z}^n)$.

Наконец, определим $V_j(p)$: $f(\cdot) \in V_j(p) \Leftrightarrow f(2^{-j}\cdot) \in V_0(p)$. Очевидно, что $V_j(p)$ вложено в $L^p(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 20.1 *[M, с.32] Пусть $V_j, j \in Z$ – r-регулярный КМА в $L_2(\mathbf{R}^n)$. Тогда существует константа C такая, что для $1 \leq p \leq \infty, j \in \mathbf{Z}$, $f \in V_j(p)$ и $|\alpha| \leq r$ выполнено неравенство*

$$\|\partial^\alpha f\|_p \leq C2^{|\alpha|j}\|f\|_p. \tag{20.2}$$

Доказательство. Заменой переменной все сводится к случаю $j=0$. Пусть $f(x) = \sum_k \alpha(k)\varphi(x \Leftrightarrow k)$. Тогда $|\partial^\alpha f(x)| \leq \sum_k |\alpha(k)||\partial^\alpha\varphi(x \Leftrightarrow k)|$. Повторение рассуждений доказательства левой части (20.1) дает $\|\partial^\alpha f\|_p \leq C(\sum_k |\alpha(k)|^p)^{1/p}$, что можно оценить, используя правую часть (20.1). □

Напомним, что классическое неравенство Бернштейна утверждает, что для любого $\alpha \in \mathbf{N}^n$ $\|\partial^\alpha f\|_p \leq R^{|\alpha|}\|f\|_p$. где f – произвольная функция из $L^p(\mathbf{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$, чье преобразование Фурье имеет носитель в шаре $|\omega| \leq R$.

Таким образом, теорема 20.1 показывает, что по своим дифференциальным свойствам элементы V_j близки к целым функциям экспоненциального типа 2^j, их преобразование Фурье сосредоточено в полосе $[\Leftrightarrow 2^j, 2^j]$.

21 Регулярные КМА и полиномы

Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ – r-регулярный кратномасштабный анализ в $L_2(\mathbf{R}^n)$, $\{P_j : L^2(\mathbf{R}) \to V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ – ортогональные проекторы. Очевидно, что

$$P_0 f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} E(x,y) f(y) dy, \tag{21.1}$$

где $E(x,y) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x \Leftrightarrow k)\overline{\varphi}(y \Leftrightarrow k)$, φ – ортогональная масштабирующая функция. Для произвольного $j \in \mathbf{Z}$

$$P_j f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} E_j(x,y) f(y) dy,$$

где $E_j(x,y) := 2^{nj} E(2^j x, 2^j y)$. Перечислим простейшие свойства ядер.

Лемма 21.1

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta E(x,y)| \le C_m (1 + |x \Leftrightarrow y|)^{-m}, \tag{21.2}$$

для любых $m \in \mathbf{N}, |\alpha| \le r, |\beta| \le r$;

$$E(x+k, y+k) = E(x,y), \quad k \in \mathbf{Z}^n; \tag{21.3}$$

$$\lim_{j\to\infty} \|P_j f \Leftrightarrow f\|_{L^2(\mathbf{R})} = 0.$$

Для доказательства последнего свойства в функциональных пространств, отличных от $L^2(\mathbf{R}^n)$, нам потребуется следующий фундаментальный результат, показывающий, что полиномы степени не выше r инвариантны относительно проекторов P_j r-регулярного КМА (точная формулировка в следствии 21.2 ниже).

Теорема 21.1 *[M, с.33] Для любого мультииндекса* $\alpha \in \mathbf{N}^n$ *с порядком* $|\alpha| \le r$ *выполняется равенство*

$$\int_{\mathbf{R}^n} E(x,y) y^\alpha dy = x^\alpha. \tag{21.4}$$

Схема доказательства. В доказательстве существенную роль играет вложение $V_0 \subset V_j, j \in \mathbf{N}$, которое на языке проекторов превращается в равенство $P_0 = P_j P_0$ или в терминах ядер:

$$E(x,y) = 2^{nj} \int_{\mathbf{R}^n} E(2^j x, 2^j u) E(u,y) du. \tag{21.5}$$

Рассмотрим сначала случай $r = 0$. Надо доказать, что

$$\int_{\mathbf{R}^n} E(x,y) dy = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \tag{21.6}$$

Свойство (21.2) имеет вид:

$$|E(x,y)| \leq C_m (1 + |x \Leftrightarrow y|^{-m}), \quad \forall m \in \mathbf{N}. \tag{21.7}$$

Пусть $\mu_0(x) := \int_{\mathbf{R}^n} E(x,y) dy$. В силу (21.3) μ_0 является $\mathbf{Z}^n$-периодической функцией

$$\mu_0(x+k) = \mu_0(x) \quad \forall k \in \mathbf{Z}^n. \tag{21.8}$$

Равенство (21.6) получается предельным переходом из (21.5) при помощи следующего результата.

Лемма 21.2 *[M, c.34] Для любого $y \in \mathbf{R}^n$ и для почти всех $x \in \mathbf{R}^n$ имеем*

$$\lim_{j \to \infty} \left\{ 2^{nj} \int_{\mathbf{R}^n} E(2^j x, 2^j u) E(u,y) du \Leftrightarrow \mu_0(2^j x) E(x,y) \right\} = 0. \tag{21.9}$$

Доказательство этой леммы основано на свойствах точек Лебега.

Из (21.9) с помощью (21.5) получаем, что для почти всех $x \in \mathbf{R}^n$

$$\lim_{j \to \infty} (1 \Leftrightarrow \mu_0(2^j x)) E(x,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbf{R}^n. \tag{21.10}$$

Умножая (21.10) на $f \in V_0$ и интегрируя, имеем

$$\lim_{j \to \infty} \mu_0(2^j x) f(x) = f(x) \quad \forall f \in V_0. \tag{21.11}$$

Заменой переменных получаем тоже самое для $f \in V_{j_0}, j_0 \geq 0$. Так как μ_0 принадлежит $L_\infty(\mathbf{R}^n)$, сходимость в (21.11) имеет место в $L_2(\mathbf{R}^n)$.

Из (19.2) следует, что (21.11) имеет место для любой $f \in L_2(\mathbf{R}^n)$. В частности, полагая $f = \kappa_{[0,1]^n}$ и используя периодичность μ_0 (см.(21.8)), имеем

$$\int_{[0,1]^n} |1 \Leftrightarrow \mu_0(x)|^2 dx = \int_{[0,1]^n} |1 \Leftrightarrow \mu_0(2^j x)|^2 dx \to 0 \text{ при } j \to \infty.$$

Откуда следует, что $\mu_0(x) = 1$.

Для $r = 0$ результат можно доказать проще, однако приведенное доказательство без больших изменений переносится на $r \geq 1$. Разложим $E(u, y)$ в ряд Тейлора по степеням $u \Leftrightarrow x$ для того, чтобы оценить $2^{nj} \int E(2^j x, 2^j u) E(u, y) du$. Имеем

$$E(u, y) = \sum_{0 \leq |\alpha| < r} \frac{(u \Leftrightarrow x)^\alpha}{\alpha!} \partial_x^\alpha E(x, y) + R(u, x, y), \tag{21.12}$$

где

$$R(u, x, y) := \textstyle\sum_{|\alpha| = r} \frac{(u-x)^\alpha}{\alpha!} S_\alpha(u, x, y),$$

$$S_\alpha(u, x, y) := r \textstyle\int_0^1 \partial_x^\alpha E(tu + (1 \Leftrightarrow t)x, y)(1 \Leftrightarrow t)^{r-1} dt.$$

Сделаем замену $u = x + 2^{-j} s$, которая превращает $S_\alpha(u, x, y)$ в

$$S_\alpha^{(j)}(s, x, y) = r \int_0^1 \partial_x^\alpha E(x + t 2^{-j} s, y)(1 \Leftrightarrow t)^{r-1} dt. \tag{21.13}$$

Обозначим

$$\mu_\alpha(x) := \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbf{R}^n} E(x, u)(u \Leftrightarrow x)^\alpha du. \tag{21.14}$$

Функция $\mu_\alpha(x)$ является непрерывной и $\mathbf{Z}^n$-периодической (см. (21.8)). Подставляя (21.13-21.14) в (21.12) и в (21.5), получим, что

$$\begin{aligned} &2^{nj} \textstyle\int_{\mathbf{R}^n} E(2^j x, 2^j u) E(u, y) du = \sum_{0 \leq \alpha < r} 2^{-j|\alpha|} \mu_\alpha(2^j x) \partial_x^\alpha E(x, y) + \\ &+ r 2^{-jr} \textstyle\sum_{|\alpha| = r} \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^1 E(2^j x, 2^j x + s) \frac{s^\alpha}{\alpha!} \partial_x^\alpha E(x + t 2^{-j} s, y)(1 \Leftrightarrow t)^{r-1} dt ds = \\ &= E(x, y). \end{aligned} \tag{21.15}$$

Доказательство того, что $\mu_\alpha(x) = 0$ проводится индукцией по $p := |\alpha| \in [1, r]$. Разберемся случай $p = 1$. В (21.15) $E(x, y)$ сокращается, т.к. $\mu_0(x) = 1$. Поэтому

$$\sum_{1 \leq |\alpha| \leq r-1} 2^{-j|\alpha|} \mu_\alpha(2^j x) \partial_x^\alpha E(x, y) + O(2^{-jr}) = 0, \tag{21.16}$$

где оценка O равномерна по x и y. Умножим (21.16) на 2^j и перейдем к пределу

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{|\alpha|=1}\mu_\alpha(2^jx)\partial_x^\alpha E(x,y)=0. \tag{21.17}$$

Теперь мы повторяем анализ, проделанный для случая $r=0$. Умножим (21.17) на $f\in V_0$ и проинтегрируем:

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{|\alpha|=1}\mu_\alpha(2^jx)\partial^\alpha f=0. \tag{21.18}$$

Пусть g – непрерывная $\mathbf{Z}^n$-периодическая функция. Умножим (21.18) на произведение $g(2^jx)h(x)$, где $h\in D(\mathbf{R}^n)$, и проинтегрируем. Перейдем к пределу по $j\to\infty$ и воспользуемся хорошо известной леммой.

Лемма 21.3 *Если $u(x)\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ является $\mathbf{Z}^n$-периодической функцией и $v(x)\in L^1(\mathbf{R}^n)$, то*

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}u(Nx)v(x)dx=(\int u)\int_{\mathbf{R}^n}v(x)dx, \tag{21.19}$$

где

$$\int u=\int_0^1\cdots\int_0^1u(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n.$$

Окончательно получим, что

$$\sum_{|\alpha|=1}(\int g\mu_\alpha)\langle\partial^\alpha f,h\rangle=0. \tag{21.20}$$

Полагая $c_\alpha=\int g\mu_\alpha$, из (21.20) получаем, что векторное поле $\sum_{|\alpha|=1}c_\alpha\partial^\alpha$ аннулирует любую функцию из V_0. Заменой переменной устанавливается, что аннигиляция имеет место для любой функции из $V_j, j\in\mathbf{N}$. Учитывая (19.2), получаем это свойство (в смысле обобщенных функций) для всех $f\in L^2(\mathbf{R}^n)$. Таким образом, $c_\alpha=0$ для любой функции g, что означает, что $\mu_\alpha=0$ при $|\alpha|=1$.

Для $p=|\alpha|<r$ доказательство проходит без каких-либо изменений. Мы получаем, что $\mu_\alpha=0$ при $|\alpha|<r$.

Остается разобраться со случаем $|\alpha|=r$. Равенство (21.15) превращается в

$$r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbf{R}^n}\int_0^1E(2^jx,2^jx+s)\frac{s^\alpha}{\alpha!}\partial_x^\alpha E(x+t2^{-j}s,y)(1-t)^{r-1}dtds=0. \tag{21.21}$$

Воспользуемся тем, что $\partial_x^\alpha E(x,y) \in L^\infty(dx)$ для любого фиксированного y. Почти все точки $x \in \mathbf{R}^n$ являются точками Лебега рассматриваемой функции. Если x – точка Лебега, то в (21.21) $\partial_x^\alpha E(x+t2^{-j}s,y)$ можно заменить на $\partial_x^\alpha E(x,y)$. Таким образом, предел по j

$$S_j(x,y) := r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbf{R}^n}\int_0^1 E(2^jx, 2^jx+s)\tfrac{s^\alpha}{\alpha!}\partial_x^\alpha E(x,y)(1 \Leftrightarrow t)^{r-1}dtds =$$

$$= r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbf{R}^n} E(2^jx, 2^jx+s)\tfrac{s^\alpha}{\alpha!}\partial_x^\alpha E(x,y)ds\int_0^1(1 \Leftrightarrow t)^{r-1}dt =$$

$$= \sum_{|\alpha|=r}\mu_\alpha(2^jx)\partial_x^\alpha E(x,y)$$

равен 0 для любого $y \in \mathbf{R}^n$ и для почти всех $x \in \mathbf{R}^n$. Функции $S_j(x,y)$ удовлетворяют равномерной оценке $|S_j(x,y)| \le C_m(1+|x \Leftrightarrow y|)^{-m}$. Умножая на $f \in V_0$ и интегрируя, находим, что $\sum_{|\alpha|=r}\mu_\alpha(2^jx)\partial^\alpha f$ сходится к 0 почти всюду и в $L^2(\mathbf{R}^n)$, так как можно применить теорему Лебега. Также как и в случае $s<r$, заключаем, что все коэффициенты μ_α обнуляются при $|\alpha|=r$.

Итак, доказано, что $\int_{\mathbf{R}^n} E(x,y)(x \Leftrightarrow y)^\alpha dy = 0$ для $1 \le |\alpha| \le r$ и $\int_{\mathbf{R}^n} E(x,y)dy = 1$. Отсюда следует, что $\int_{\mathbf{R}^n} E(x,y)y^\alpha dy = x^\alpha$ при $|\alpha| \le r$. Действительно, запишем $\frac{y^\alpha}{\alpha!} = \sum_{\beta+\gamma=\alpha}\frac{(y-x)^\beta}{\beta!}\frac{x^\gamma}{\gamma!}$ и, после интегрирования по y, все члены в правой части обнуляются, за исключением $\beta=0$ и $\gamma=\alpha$.$\square$

Теорема 21.1 может быть переформулирована, если расширить область определения проекторов P_j на объединение пространств $L^2(\mathbf{R}^n,(1+|x|)^{-m}dx)$, $m \in \mathbf{N}$. Такое расширение возможно, т.к. ядра проекторов P_j убывают быстрее любой степени при $|y \Leftrightarrow x|$ стремящемся к бесконечности. Пространство образов теперь будет отличаться от V_j, но будет полным по норме $L^2(\mathbf{R}^n,(1+|x|)^{-m}dx)$.

Следствие 21.1 *Пусть V_j – r-регулярный КМА в $L_2(\mathbf{R}^n)$ и пусть $P_j : L^2(\mathbf{R}^n) \to V_j$ ортогональный проектор на V_j. Тогда $P_j(M) = M$ для любого полинома M степени меньше или равной r.*

Значение теоремы 21.1 состоит в том, что она устанавливает сходство проекторов P_j с операторами свертки. Последние коммутируют с операторами частичного дифференцирования, тогда как операторы P_j коммутируют приближенно с ∂^α при $|\alpha| \le r$.

Зафиксируем функцию $g \in D(\mathbf{R}^n)$ с интегралом, равным 1. Обозначим через g_j функцию $2^{nj}g(2^jx)$ и через G_j – оператор свертки с g_j, $j \in \mathbf{Z}$.

Теорема 21.1 позволяет сравнить $\partial^\alpha P_j$ с $G_j \partial^\alpha$ для мультииндексов α с $|\alpha| \le r$.

Теорема 21.2 *Пусть V_j, $j \in \mathbf{Z}$, – r-регулярный КМА в $L^2(\mathbf{R}^n)$. Тогда для любого мультииндекса α с $|\alpha| \le r$ существуют функции $R^{(\alpha,\beta)}(x,y) \in L^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, заиндексированные мультииндексами β с $|\beta| = |\alpha|$ и удовлетворяющие неравенствам*

$$|R^{(\alpha,\beta)}(x,y)| \le C_m(1 + |x \Leftrightarrow y|)^{-m} \tag{21.22}$$

для любого $m \in \mathbf{N}$. Эти функции удовлетворяют также равенству

$$\int_{\mathbf{R}^n} R^{(\alpha,\beta)}(x,y)dy = 0 \tag{21.23}$$

тождественно по x и определяют для любого $j \in \mathbf{Z}$ операторы

$$\mathsf{R}_j^{(\alpha,\beta)} f(x) := 2^{nj} \int_{\mathbf{R}^n} R^{(\alpha,\beta)}(2^j x, 2^j y) f(y) dy, \tag{21.24}$$

для которых верно следующее тождество

$$\partial^\alpha P_j = G_j \partial^\alpha + \sum_{|\beta| = |\alpha|} \mathsf{R}_j^{(\alpha,\beta)} \partial^\beta, \tag{21.25}$$

где $\partial^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$.

Доказательство. Ясно, что (21.25) достаточно доказать для $j = 0$. Общий случай получается заменой переменных.

Зафиксировав x, рассмотрим $\partial_x^\alpha E(x,y)$ как функцию по y. По теореме 21.1 имеем $\int_{\mathbf{R}^n} \partial_x^\alpha E(x,y) y^\beta dy = 0$ при $|\beta| \le |\alpha|$ и $\beta \ne \alpha$, тогда как $\int_{\mathbf{R}^n} \partial_x^\alpha E(x,y) y^\alpha dy = \alpha!$.

Заметим теперь, что ядро $g(x \Leftrightarrow y)$ оператора $G := G_0$ имеет такие же свойства: $\int_{\mathbf{R}^n} \partial_x^\alpha g(x \Leftrightarrow y) y^\beta dy = 0$ при $|\beta| \le |\alpha|$ и $\beta \ne \alpha$, $\int_{\mathbf{R}^n} \partial_x^\alpha g(x \Leftrightarrow y) y^\alpha dy = \alpha!$.

Рассмотрим разность $R^\alpha(x,y) := \partial_x^\alpha E(x,y) \Leftrightarrow \partial_x^\alpha g(x \Leftrightarrow y)$, для которой $\int_{\mathbf{R}^n} R^\alpha(x,y) y^\beta dy = 0$ при $|\beta| \le |\alpha|$. Рассмотрим $f^\alpha(x,y) := R^\alpha(x, x+y) = \partial_x^\alpha E(x, x+y) \Leftrightarrow \partial_x^\alpha g(\Leftrightarrow y)$, как функцию от y при фиксированном x. Эта функция принадлежит пространству $S_r(\mathbf{R}^n)$, которое определяется следующим образом.

Определение 21.1 *$S_r(\mathbf{R}^n)$ – это векторное пространство функций f, удовлетворяющих неравенствам $|\partial^\alpha f(x)| \leq C_m(1+|x|)^{-m}$ для любого $m \in \mathbf{N}$ и любого мультииндекса $\alpha \in \mathbf{N}^n$ с $|\alpha| \leq r$.*

Лемма 21.4 *Пусть $0 \leq s \leq r$. Если f принадлежит $S_r(\mathbf{R}^n)$ и удовлетворяет условиям $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)x^\alpha dx = 0$ для любого $\alpha \in \mathbf{N}^n$ с $|\alpha| \leq r$, то*

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=s} \partial^\alpha f_\alpha(x),$$

где $f_\alpha \in S_r(\mathbf{R}^n)$ и $\int_{\mathbf{R}^n} f_\alpha(x)dx = 0$ для любого $\alpha \in \mathbf{N}^n$ с $|\alpha| = s$.

Доказательство леммы проводится индукцией по размерности n. При $n = 1$ f_s является первообразной для f порядка s, которая стремится к 0 на бесконечности.

Применим лемму к функции $f^\alpha(x,y)$, которую будем рассматривать как функцию по y, зависящую от параметра x. Получаем, что

$$\partial_x^\alpha E(x,y) = (\Leftrightarrow 1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha g(x \Leftrightarrow y) + \sum_{|\beta|=|\alpha|} \partial_y^\beta R^{(\alpha,\beta)}(x,y), \tag{21.26}$$

где $|R^{(\alpha,\beta)}(x,y)| \leq C_m(1+|x \Leftrightarrow y|)^{-m}$ для любых $m \in \mathbf{N}$. Более того, $\int_{\mathbf{R}^n} R^{(\alpha,\beta)}(x,y)dy = 0$ для любого x.

Интегрирование по частям показывает, что ядро оператора $G_0\partial^\alpha$ совпадает с $(\Leftrightarrow 1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha g(x \Leftrightarrow y)$. $\Box$

Замечание 21.1 *Функции f_α из леммы 21.4 линейно и непрерывно зависят от f. Например, если f является непрерывной функцией некоторых параметров, то тоже будет верно для функций f_α. Это означает, что функции $R^{(\alpha,\beta)}$ будут непрерывными по всем переменным, если масштабирующая функция φ принадлежит $C^r(\mathbf{R}^n)$.*

Замечание 21.2 *Аналогичными рассуждениями доказывается, что*

$$P_{j+1} \Leftrightarrow P_j = 2^{-jr} \sum_{|\beta|=r} \mathsf{R}_j^{(\beta)}\partial^\beta,$$

где $\mathsf{R}_j^{(\beta)}$ определяются ядрами $2^{nj}R^{(\beta)}(2^jx, 2^jy)$ и $R^{(\beta)}$ удовлетворяют свойствам, аналогичным свойствам $R^{(\alpha,\beta)}$.

22 КМА в пространствах Соболева

Теорема 22.1 *Пусть* $r \in \mathbf{N}$ *и* $V_j, j \in \mathbf{Z}$, *является* r*-регулярным КМА в* $L_2(\mathbf{R}^n)$. *Если* f *принадлежит пространству Соболева* $W_2^s(\mathbf{R}^n)$ *и* $-r \leq s \leq r$, *то* $P_j(f)$ *сходится к* f *в* $W_2^s(\mathbf{R}^n)$*-норме.*

В доказательстве этой теоремы используется следующая лемма.

Лемма 22.1 *Пусть* $K(x,y)$ *– функция из* $L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, *удовлетворяющая неравенству* $|K(x,y)| \leq C(1 + |x - y|)^{-n-1}$, *и*

$$T_\lambda : L^p(\mathbf{R}^n) \to L^p(\mathbf{R}^n), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \lambda > 0,$$

операторы с ядрами $\lambda^n K(\lambda x, \lambda y)$, $\quad T_\lambda f(x) = \lambda^n \int_{\mathbf{R}^n} K(\lambda x, \lambda y) f(y) dy$. *Если* $\int_{\mathbf{R}^n} K(x,y)dy = 0$ *тождественно по* x *и* $1 \leq p < \infty$, *то*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|T_\lambda(f)\|_p = 0 \quad \textit{для} \quad f \in L^p.$$

Если $\int_{\mathbf{R}^n} K(x,y)dy = 1$ *тождественно по* x *и* $1 \leq p < \infty$, *то*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|T_\lambda(f) - f\|_p = 0 \quad \textit{для} \quad f \in L^p.$$

При $p = \infty$ *предположим в дополнение, что* f *является равномерно непрерывной и что* $K(x,y)$ *является непрерывной функцией по* x *при каждом фиксированном* y. *Тогда, если* $\int_{\mathbf{R}^n} K(x,y)dy = 1$ *и* $f \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, *то*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|T_\lambda(f) - f\|_\infty = 0.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что норма оператора $T_\lambda : L^p(\mathbf{R}^n) \to L^p(\mathbf{R}^n)$ является конечной и не зависит от λ.

Если $1 \leq p < \infty$, то достаточно рассмотреть плотное подмножества в $L_p(\mathbf{R}^n)$. Пусть f непрерывная функция с компактным носителем. Тогда $T_\lambda f(x)$ является $O(|x|^{-n-1})$ при $|x| \to \infty$ равномерно по $\lambda \geq 1$. Так как $\int_{\mathbf{R}^n} K(x,y)dy = 0$, то

$$T_\lambda f(x) = \lambda^n \int_{\mathbf{R}^n} K(\lambda x, \lambda y) f(y) dy = \lambda^n \int_{\mathbf{R}^n} K(\lambda x, \lambda y)(f(y) - f(x)) dy,$$

что меньше, чем $C \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |y|)^{-n-1} w(\lambda^{-1}|y|, f) dy =: \epsilon(\lambda)$, где w – модуль непрерывности f. Из теоремы Лебега о доминируемой сходимости следует, что $\lim_{\lambda \to \infty} \epsilon(\lambda) = 0$. Таким образом, функции $T_\lambda f(x)$ сходятся к 0 равномерно по x и равномерно по λ являются $O(|x|^{-n-1})$ при $|x| \to \infty$. Значит они сходятся к 0 в $L^p(\mathbf{R}^n)$-норме.

Второй случай леммы, когда $\int_{\mathbf{R}^n} K(x,y)dy = 1$, является следствием первого. Пусть g – непрерывная функция с компактным носителем, чей интеграл равен 1. Заменим $K(x,y)$ на $R(x,y) := K(x,y) \Leftrightarrow g(x \Leftrightarrow y)$ и применим первый случай.

Доказательство теоремы 22.1. Пусть $s = r$. Надо доказать, что для $f \in W_2^s(\mathbf{R}^n)$ и $|\alpha| \le r \quad \lim_{j\to\infty} \|\partial^\alpha P_j(f) \Leftrightarrow \partial^\alpha f\|_2 = 0$. По теореме 21.2 имеем $\partial^\alpha P_j = G_j \partial^\alpha + \sum_{|\beta|=|\alpha|} \mathsf{R}_j^{(\alpha,\beta)} \partial^\beta$, поэтому достаточно применить лемму 22.1.

Если s не целое и $0 < s < r$, то заметим, что операторы $P_j : W_2^s \to W_2^s$ равномерно ограничены. Это следует из крайних случаев $s = 0$, $s = r$ и следующей интерполяционной теоремы.

Утверждение 22.1 *Любой непрерывный оператор $T : L^2 \to L^2$, чье сужение на пространство Соболева W_2^r является непрерывным линейным оператором из W_2^r в W_2^r, является также непрерывным оператором из W_2^s в W_2^s для $0 < s < r$. Если нормы T как оператора в L^2 и W_2^r обозначить как C_0 и C_1 соответственно, то норма T как оператора в $W_2^s, 0 < s < r$, не превосходит $\max(C_0, C_1)$.*

Из равномерной ограниченности операторов P_j и плотности $W_2^r(\mathbf{R}^n)$ в $W_2^s(\mathbf{R}^n)$ следует утверждение теоремы.

Для доказательства теоремы 22.1 при $\Leftrightarrow r \le s \le 0$ нужно сначала определить P_j на $W_2^s(\mathbf{R}^n)$. Заметим, что $L^2(\mathbf{R}^n)$ плотно в $W_2^s(\mathbf{R}^n)$. Если f и g принадлежат $L_2(\mathbf{R}^n)$, то $(P_j(f), g) = (f, P_j(g))$. Теперь мы предположим, что f принадлежит $W_2^s(\mathbf{R}^n)$, где $\Leftrightarrow r \le s \le 0$, и что f_m – это последовательность функций $L^2(\mathbf{R}^n)$, сходящаяся к f в $W_2^s(\mathbf{R}^n)$-норме. Тогда, для $t = \Leftrightarrow s$ и $g \in W_2^t(\mathbf{R}^n)$, имеем

$$(P_j(f_m), g) = (f_m, P_j(g)) \to (f, P_j(g)) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Поэтому мы определяем $P_j(f) \in W_2^s(\mathbf{R}^n)$ следующим образом: $(P_j(f), g) = (f, P_j(g))$. Так как $P_j^2 = P_j$, то $(P_j(f), P_j(g)) = (P_j(f), g)$.

По двойственности операторы $P_j : W_2^s(\mathbf{R}^n) \to W_2^s(\mathbf{R}^n)$ равномерно ограничены. Кроме того, $L^2(\mathbf{R}^n)$ плотно в $W_2^s(\mathbf{R}^n)$ и $P_j(f)$ сходится к f для $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Из этого следует, что $P_j(f)$ сходится к f в $W_2^s(\mathbf{R}^n)$-норме. Стандартным способом доказывается, что $\lim_{j\to\infty} P_j(f) = f$ для распределений f, принадлежащих $W_2^s(\mathbf{R}^n)$ при $\Leftrightarrow r \le s < 0$.□

Замечание 22.1 *Теорему 22.1 можно обобщить на пространства* W_p^s *с* $\Leftrightarrow r \le s \le r$ *и* $1 < p < \infty$*. Для функций и распределений* $f \in W_p^s$ *проекции* $P_j(f)$ *сходятся к* f *в* W_p^s*-норме.*

Случай $p = \infty$ *требует отдельного рассмотрения. Определим пространство* $W_\infty^m, m \in \mathbf{N}$*, условием, что* $\partial^\alpha f$ *принадлежат* $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ *для любых* α *с* $|\alpha| \le m$*. Тогда, для* $f \in W_\infty^m, \quad 0 \le m \le r$*, последовательность* $P_j(f)$ *равномерно ограничена в* W_∞^m *и слабо сходится к* f*, т.е.*

$$\int P_j(f) g dx \to \int f g dx \quad \forall g \in S(\mathbf{R}^n).$$

Можно заменить $W_\infty^m(\mathbf{R}^n)$ *на пространство* $C_\infty^m(\mathbf{R}^n)$*, определяемое условием, что все производные* $\partial^\alpha f, |\alpha| \le m$*, ограничены и равномерно непрерывны на* $\mathbf{R}^n$*. Тогда, для любой функции* $f \in C_\infty^m(\mathbf{R}^n)$ *проекции* $P_j(f)$ *сходятся к* f *в* $C_\infty^m(\mathbf{R}^n)$*-норме при* $0 \le m < r$*. Если масштабирующая функция* φ *принадлежала* $C_\infty^m(\mathbf{R}^n)$ *и быстро убывает на бесконечности вместе со всеми производными порядка* $|\alpha| \le r$*, то сходимость имеет место и при* $m = r$*.*

Если $\varphi \in C^m(\mathbf{R}^n)$ *и имеет компактный носитель, то* $P_j(f)$ *сходятся к* $f \in C^m(\mathbf{R}^n)$ *в* $C^m(\mathbf{R}^n)$*-норме.*

23 Операторы $Q_j = P_{j+1} - P_j$

Пусть $V_j, j \in \mathbf{Z}$, – r-регулярный КМА в $L^2(\mathbf{R}^n)$ и W_j – ортогональное дополнение V_j до V_{j+1}. Ортогональный проектор из $L^2(\mathbf{R}^n)$ на W_j равен $Q_j = P_{j+1} \Leftrightarrow P_j$. Ясно, что $f(\cdot) \in W_0$ тогда и только тогда, когда $f(2^j \cdot) \in W_j$. Кроме того,

$$L^2(\mathbf{R}^n) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} W_j, \tag{23.1}$$

т.к. объединение V_j плотно в $L^2(\mathbf{R}^n)$, а пересечение V_j равно $\{0\}$. Любую функцию $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ можно разложить в ортогональный ряд

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} Q_j(f). \tag{23.2}$$

Покажем, что классические нормы пространств функций и распределений легко вычисляются с использованием этого разложения.

Распространим разложение (23.1) на $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Если $1 \le p \le 2$, то $W_j(p)$ определим как пересечение W_j с $L^p(\mathbf{R}^n)$, что согласовано с определением $V_j(p)$ (см. с. 51). Тогда $V_{j+1}(p) = V_j(p) + W_j(p)$, где сумма прямая, но не ортогональная. Операторы P_j и Q_j, проектирующие $V_{j+1}(p)$ на $V_j(p)$ и $W_j(p)$ соответственно, являются непрерывными в $L^p(\mathbf{R}^n)$ (см. лемму 22.1). Кроме того, при $1 < p \le 2$ для любой функции $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ $\quad \|P_j f\|_p \to 0$ при $j \to \Leftrightarrow\infty$. Таким образом, функция $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ может быть единственным образом записана в виде

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} q_j, \quad \text{где} \quad q_j \in W_j(p), \tag{23.3}$$

где частные суммы сходятся к f в $L_p(\mathbf{R}^n)$ при $1 < p \le 2$.

В случае $2 \le p < \infty$ пространства $W_j(p)$ определяются как замыкание W_j в $L^p(\mathbf{R}^n)$. Тогда (23.3) распространяется на $L^p(\mathbf{R}^n)$, $2 \le p < \infty$.

Для $p = \infty$ $\quad W_j(p)$ – это замыкание W_j в $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ с топологией $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Следующий результат дополняет и уточняет неравенства Бернштейна.

Теорема 23.1 *Пусть* $V_j, j \in \mathbf{Z}$, *–* r*-регулярный КМА в* $L^2(\mathbf{R}^n)$. *Тогда существуют две константы* $C_2 \ge C_1 > 0$ *такие, что для любого целого* $s \in \mathbf{N}, s \in [0, r]$, *для любого* $p \in [1, \infty]$ *и любой функции* $f \in W_0(p)$

$$C_1 \|f\|_p \le \sum_{|\alpha|=s} \|\partial^\alpha f\|_p \le C_2 \|f\|_p. \tag{23.4}$$

Если s *нецелое и* $0 < s < r$, *то*

$$C_1 \|f\|_p \le \|\Lambda^s f\|_p \le C_2 \|f\|_p, \tag{23.5}$$

где $\Lambda = (\Leftrightarrow\Delta)^{1/2}$.

Доказательство. Правая часть (23.4) полностью совпадает с (20.2). Для доказательства левой части обозначим через $Q(x, y)$ ядро проектора $Q_0 = P_1 \Leftrightarrow P_0$. Тогда очевидно, что $f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} Q(x, y) f(y) dy$, если $f \in W_0$. С одной стороны, $|Q(x, y)| \le C_m (1 + |x \Leftrightarrow y|)^{-m}$ для любого $m \in \mathbf{N}$. С другой, $Q(x, y) = 2^n E(2x, 2y) \Leftrightarrow E(x, y)$, где $E(x, y)$ – ядро P_0, следовательно по теореме 21.1 $\int_{\mathbf{R}^n} Q(x, y) y^\alpha dy = 0$ при $|\alpha| \le r$.

Используя лемму 21.4, получим, что $Q(x,y) = \sum_{|\beta|=s} \partial_y^\beta Q_\beta(x,y)$, где функции Q_β также удовлетворяют условиям $|Q_\beta(x,y)| \le C'_m(1+|x \Leftrightarrow y|)^{-m}$ для любого $m \in \mathbf{N}$. Таким образом

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} Q(x,y)f(y)dy = (\Leftrightarrow 1)^s \sum_{|\beta|=s} \int_{\mathbf{R}^n} Q_\beta(x,y)\partial^\beta f(y)dy.$$

Так как ядра $Q_\beta(x,y)$ определяют ограниченные операторы в $L^p(\mathbf{R}^n)$ при $1 \le p \le \infty$ (см. доказательство леммы 22.1), то левая часть (23.4) доказана.

Пусть s – нецелое и $m \in \mathbf{Z}$ такое, что $m < s < m+1$. Для Q_0 имеют место два представления $Q_0 = \sum_{|\beta|=m} Q_\beta \partial^\beta = \sum_{|\beta|=m+1} Q_\beta \partial^\beta$, которые приводят к равенству $Q_0 = G\Lambda^s$, где G – оператор, который ограничен во всех $L_p(\mathbf{R}^n), 1 \le p \le \infty$. Действительно, определим оператор свертки U, соответствующий мультипликатору $u(\xi) \in D(\mathbf{R}^n)$, который радиален, равен 1 при $|\xi| \le 1/2$ и равен 0 при $|\xi| \ge 1$. Пусть $V := I \Leftrightarrow U$. Тогда

$$Q_0 = Q_0U + Q_0V = \sum_{|\beta|=m+1} Q_\beta \partial^\beta \Lambda^{-s} U \Lambda^s + \sum_{|\beta|=m} Q_\beta \partial^\beta \Lambda^{-s} V \Lambda^s =$$

$$= \left(\sum_{|\beta|=m+1} Q_\beta \partial^\beta \Lambda^{-s} U + \sum_{|\beta|=m} Q_\beta \partial^\beta \Lambda^{-s} V\right) \Lambda^s =: G\Lambda^s.$$

Непрерывность G в $L^p(\mathbf{R}^n)$ следует из непрерывности операторов $\partial^\beta \Lambda^{-s} U$, $|\beta| = m+1$, и $\partial^\beta \Lambda^{-s} V$, $|\beta| = m$, в $L^p(\mathbf{R}^n)$, которые являются операторами свертки, соответствующими мультипликаторам $\xi^\beta |\xi|^{-s} u(\xi)$, $|\beta| = m+1$, и $\xi^\beta |\xi|^{-s}(1 \Leftrightarrow u(\xi))$, $|\beta| = m$, (с точностью до степени i). Эти функции являются преобразованиями Фурье интегрируемых функций, что завершает доказательство. □

Следствие 23.1 *Если $1 \le p \le \infty$ и f принадлежит $W_j(p)$, то*

$$C_1 2^{js}\|f\|_p \le \sum_{|\alpha|=s} \|\partial^\alpha f\|_p \le C_2 2^{js}\|f\|_p \tag{23.6}$$

при целом $s \in [0,r]$.

В общем случае действительного $s \in [0,r]$

$$C_1 2^{js}\|f\|_p \le \|\Lambda^s f\|_p \le C_2 2^{js}\|f\|_p. \tag{23.7}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно сделать замену переменных в (23.4) и (23.5). □

Заметим, что при $j \in \mathbf{N}$ Λ^s можно заменить в (23.7) на $(I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2}$. Ясно, что при $1 \le p \le \infty$ $\|\Lambda^s f\|_p \le C(s,n)\|(I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} f\|_p$. Достаточно сравнить преобразования Фурье $\Lambda^s f$ и $(I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} f$. С другой стороны, $\|(I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} f\|_p \le C'(s,n)\|(I+\Lambda^s)f\|_p$ при $1 \le p \le \infty$.

Утверждение 23.1 *Если* $\Leftrightarrow r \le s \le r, 1 \le p \le \infty$ *и* $f \in W_j(p)$ *для* $j \in \mathbf{N}$, *то*

$$C_1' 2^{js}\|f\|_p \le \|(I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} f\|_p \le C_2' 2^{js}\|f\|_p, \tag{23.8}$$

где $C_2' > C_1' > 0$ *– константы.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только случай $\Leftrightarrow r \le s < 0$, т.к. случай $0 \le s \le r$ рассмотрен в следствие 23.1. Замена переменной $x \mapsto 2^j x$ сводит доказательство к следующим неравенствам

$$C_1'\|f\|_p \le \|(\epsilon I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} f\|_p \le C_2'\|f\|_p, \tag{23.9}$$

для $f \in W_0(p)$ и $\epsilon := 4^{-j}$.

Для доказательства правой части воспользуемся тождеством $I = U+V$ (см. доказательство теоремы 23.1). Оператор $(\epsilon I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2}$ разлагается на сумму $(\epsilon I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} U$ и $(\epsilon I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} V$. Второе выражение – это оператор свертки, соответствующий мультипликатору $(\epsilon+|\omega|^2)^{s/2}(1 \Leftrightarrow u(\omega))$. Так как $u(\omega) = 1$ при $|\omega| \le 1/2$, сингулярности первого множителя в нуле уничтожаются за счет второго. Таким образом, оператор $(\epsilon I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} V$ равномерно ограничен на $L^p(\mathbf{R}^n)$ при $1 \le p \le \infty$.

Для изучения действия $(\epsilon I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} U$ на $W_0(p)$ используем воспроизводящее ядро $Q(x,y)$ подпространства W_0. Тогда $f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} Q(x,y) f(y)dy$ для $f \in W_0$. Оператор Q_0 является самосопряженным и тождество $Q_0 = \sum_{|\beta|=r} Q_\beta \partial^\beta$ приводит к $Q_0 = \sum_{|\beta|=r} \partial^\beta \tilde{Q}_\beta$, где $\tilde{Q}_\beta$ равномерно ограничены в $L^p(\mathbf{R}^n)$ при $1 \le p \le \infty$. Таким образом, имеем

$$(\epsilon I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} U f = \sum_{|\beta|=r} ((\epsilon I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} U \partial^\beta) \tilde{Q}_\beta f,$$

и операторы $(\epsilon I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} U \partial^\beta : L^p(\mathbf{R}^n) \to L^p(\mathbf{R}^n)$ равномерно ограничены в $L^p(\mathbf{R}^n)$ при $|\beta| = r > |s|$ и $0 \le \epsilon \le 1$, т.к. соответствующие мультипликаторы равны $(\epsilon+|\omega|^2)^{s/2} u(\omega)\omega^\beta$ (с точностью до степени i) и совпадают с преобразованием Фурье интегрируемых функций. Правая часть неравенства (23.9) доказана.

Пусть $t = \Leftrightarrow s$. Тогда $f = E_0(f) = E_0(\epsilon I \Leftrightarrow \Delta)^{t/2}(\epsilon I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} f$. Операторы $E_0(\epsilon I \Leftrightarrow \Delta)^{t/2}$ равномерно ограничены в $L^p(\mathbf{R}^n)$ при $1 \leq p \leq \infty$, т.к. сопряженные к ним операторы равномерно ограничены в $L^p(\mathbf{R}^n)$ в силу теоремы 20.1. $\Box$

Охарактеризуем пространства Соболева $W_2^s(\mathbf{R}^n)$ в терминах разложения (23.2).

Теорема 23.2 *Если $V_j, j \in \mathbf{N}$, – r-регулярный КМА в $L_2(\mathbf{R}^n)$ и $s \in (\Leftrightarrow r, r)$, то функция f принадлежит пространству Соболева $W_2^s(\mathbf{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $P_0(f) \in L^2(\mathbf{R}^n)$ и $\|Q_j f\|_2 = \epsilon_j 2^{-js}$ для всех $j \in \mathbf{N}$, где $\{\epsilon_j\}_0^\infty \in l^2(\mathbf{N})$. Более того, W_2^s-норма f эквивалентна сумме L^2-нормы $P_0(f)$ и $l^2(\mathbf{N})$-нормы последовательности ϵ_j.*

Доказательство. Из теоремы 20.1 следует, что $V_0 \subset W_2^s(\mathbf{R}^n)$. Поэтому для доказательства достаточности нужно показать, что сумма функций $q_j \in W_j$ с $\|q_j\|_2 = \epsilon_j 2^{-js}$, где $\epsilon_j \in l^2(\mathbf{N})$, принадлежит $W_2^s(\mathbf{R}^n)$. Зафиксируем положительное ϵ, для которого $|s| + 2\epsilon \leq r$. Пространство W_2^s является гильбертовым со скалярным произведением $\langle (I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} u, (I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} v\rangle$. Обозначим через $\|\cdot\|_s$ соответствующую норму в W_2^s. Заметим, что $|\langle (I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} u, (I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2} v\rangle| = = \langle (I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2+\epsilon} u, (I \Leftrightarrow \Delta)^{s/2-\epsilon} v\rangle \leq \|u\|_{s+2\epsilon}\|v\|_{s-2\epsilon}$. Поэтому $\|\sum_0^\infty q_j\|_s^2 \leq 2\sum\sum_{j<k}\|q_j\|_{s+2\epsilon}\|q_k\|_{s-2\epsilon} + \sum_j \|q_j\|_s^2$. Из утверждения 23.1 следует, что $\|q_j\|_\sigma \asymp 2^{j\sigma}2^{-js}\epsilon_j$ для $\sigma \in [\Leftrightarrow r, r]$. Поэтому $\|q_j\|_{s+2\epsilon}\|q_k\|_{s-2\epsilon} \leq \leq C\epsilon_j\epsilon_k 4^{\epsilon(j-k)}$. Ряд $\sum\sum_{j<k}\epsilon_j\epsilon_k 4^{-\epsilon|j-k|}$ сходится, т.к. свертка l^1-последовательности $\{4^{-\epsilon|j-k|}\}$ с l^2-последовательностью является l^2-последовательностью (далее неравенство Коши).

Необходимость условий $P_0(f) \in L^2(\mathbf{R}^n)$ и $\|Q_j f\|_2 \leq \epsilon_j 2^{-js}$ для принадлежности f к W_2^s следует из достаточности условий для $t = \Leftrightarrow s$ и соображений двойственности. $\Box$

Следствие 23.2 *Если $\Leftrightarrow r < s < r$, $f \in W_2^s(\mathbf{R}^n)$ и $g \in W_2^{-r}(\mathbf{R}^n)$, то*

$$\langle f, g\rangle = \langle P_0 f, P_0 g\rangle + \sum_0^\infty \langle Q_j f, Q_j g\rangle, \tag{23.10}$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно.

Доказательство. Действительно, $\|Q_j(f)\|_2 \leq \epsilon_j 2^{-js}$ и $\|Q_j g\|_2 \leq \eta_j 2^{js}$, поэтому $\langle Q_j(f), Q_j(g)\rangle \leq \epsilon_j \eta_j$ и ряд $\sum_0^\infty \epsilon_j \eta_j$ сходится абсолютно.$\Box$

24 Пространства Бесова

Если в определении 2.8 пространств Бесова положить $g_j := f_{j+1} \Leftrightarrow f_j$, то

$$f = f_0 + \sum_0^\infty g_j, \tag{24.1}$$

где $\partial^\alpha g_j \leq \epsilon_j 2^{(m-s)j}$ при $|\alpha| = m$ и $\|g_j\| \leq \epsilon_j 2^{-js}$. Очевидно, что верно и обратное.

Пусть $V_j, j \in \mathbf{Z}$ – r-регулярный КМА в $L^2(\mathbf{R}^n)$, $P_j : L^2(\mathbf{R}^n) \to V_j$ – ортогональный проектор, $Q_j = P_{j+1} \Leftrightarrow P_j$.

Утверждение 24.1 *Пусть $0 < s < r$ и $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$. Функция f принадлежит пространству Бесова $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{2^{js}\|Q_j(f)\|_p\}_{j\in\mathbf{N}}$ принадлежит $l^q(\mathbf{N})$. Более того, норма f в $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ эквивалентна сумме l^q-нормы этой последовательности и $\|P_0(f)\|_p$.*

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 20.1.

Необходимость. Из (24.1) следует, что $Q_j(f) = Q_j(f_0) + \sum_{k=0}^\infty Q_j(g_k)$. Для $k \geq j$ $\|Q_j(g_k)\|_p \leq C\|g_k\|_p$, т.к. операторы $Q_j : L^p \to L^p$ равномерно ораничены при $1 \leq p \leq \infty$. Для $k < j$ в силу замечания 21.2 $Q_j = 2^{-jr}\sum_{|\alpha|=r} \mathsf{R}_j^{(\alpha)}\partial^\alpha$. Поэтому $\|Q_j(g_k)\|_p \leq C\epsilon_k 2^{(r-s)k}2^{-rj}$. Окончательно,

$$\|Q_j(f)\|_p \leq C2^{-rj}\sum_{k=0}^{j} \epsilon_k 2^{(r-s)k} + C\sum_{k=j+1}^{\infty} \epsilon_k 2^{-js} \leq C'\tilde{\epsilon}_j 2^{-sk},$$

где $\tilde{\epsilon}_j := \sum_k \epsilon_k 2^{-(r-s)|j-k|}$ принадлежит l^q, как свертка l^q-последовательности с l^1-последовательностью.$\Box$

По аналогии с пространствами Соболева определение пространств Бесова можно распространить на неположительные s.

Определение 24.1 *Пусть $s \leq 0$, $|s| < r \in \mathbf{N}$. Будем говорить, что $f \in B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$, если $P_0 f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ и $\|Q_j f\|_p \leq \epsilon_j 2^{-js}$, где $\{\epsilon_j\}_{j=0}^\infty \in l^q(\mathbf{N})$.*

Легко видеть, что при $s' = \Leftrightarrow s$, $s' > 0$, $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$ двойственность между распределениями $f \in B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ и пробными функциями $g \in B_{p'}^{s',q'}(\mathbf{R}^n)$ определяется следующим образом

$$\langle f, g\rangle = \langle P_0 f, P_0 g\rangle + \sum_0^\infty \langle Q_j f, Q_j g\rangle.$$

Если $p > 1$ и $q > 1$, то $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ – двойственное пространство к $B_{p'}^{s',q'}(\mathbf{R}^n)$ и его определение не зависит от выбора КМА. Для $p = 1$ или $q = 1$ независимость определения от КМА проверяется непосредственно.

Используя утверждение 24.1, нетрудно показать, что

$$\mathbf{C}^r(\mathbf{R}^n) = B_\infty^{r,\infty}(\mathbf{R}^n) = (B_1^{-r,1})^*(\mathbf{R}^n). \tag{24.2}$$

Утверждение 24.2 *Пусть $V_j, j \in \mathbf{Z}$ – r-регулярный КМА в $L^2(\mathbf{R}^n)$, $r > s$. Тогда $f \in \mathbf{C}^s(\mathbf{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $P_0 f \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $\|Q_j f\|_\infty \leq C 2^{-js}$ для некоторой константы C.*

25 Проекторы P_j и псевдодифференциальные операторы

Определение 25.1 *Пусть символ $\sigma(x, \omega)$ является функцией от $x \in \mathbf{R}^n$ и от $\omega \in \mathbf{R}^n$ (иногда дополнительно требуют, чтобы $\omega \neq 0$). Псевдодифференциальный оператор (**ПДО**) T определяется посредством формального правила*

$$T(e^{ix\cdot\omega}) = \sigma(x, \omega) e^{ix\cdot\omega}. \tag{25.1}$$

Определение 25.2 *Класс Хермандера $S^0_{\rho,\delta}$ определяется условием*

$$|\partial_\omega^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \omega)| \leq C(\alpha, \beta)(1 + |\omega|)^{\rho|\beta| - \delta|\alpha|}, \tag{25.2}$$

где случай $\rho = \delta = 1$ исключается из рассмотрения.

Произвольная функция из $S(\mathbf{R}^n)$ равна $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\omega} \hat{f}(\omega) d\omega$, поэтому для линейного T получаем, что

$$Tf(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\omega} \sigma(x, \omega) \hat{f}(\omega) d\omega. \tag{25.3}$$

Формула (25.3) имеет смысл для $\sigma(x,\omega) \in L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$.

Пусть $V_j, j \in \mathbf{Z}$, – r-регулярный КМА в $L^2(\mathbf{R}^n)$, φ – ортогональная масштабирующая функция, $P_j : L^2(\mathbf{R}^n) \to V_j$ – ортогональные проекторы.

Утверждение 25.1 *Символ проектора* P_j *равен* $\sigma(2^j x, 2^{-j}\omega)$, *где*

$$\sigma(x,\omega) := \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} e^{2\pi i k\cdot x}\widehat{\varphi}(\omega + 2k\pi)\overline{\widehat{\varphi}(\omega)}. \tag{25.4}$$

Доказательство. Пусть $\sigma(x,\omega)$ символ P_0. Легко видеть, что для любого $a \in \mathbf{R}^n$ $\sigma(x \Leftrightarrow a, \omega)$ является символом оператора $R_a P_0 R_a^{-1}$, где $R_a f(x) := f(x \Leftrightarrow a)$. Так как оператор P_0 коммутирует со сдвигами $R_k, k \in \mathbf{Z}^n$, его символ $\sigma(x,\omega)$ является $\mathbf{Z}^n$-периодической функцией по x. Заметим, что $\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} e^{2\pi i k\cdot x}\widehat{\varphi}(\omega+2k\pi) = \sum_{l\in\mathbf{Z}^n} e^{-i\omega\cdot(x+l)}\varphi(x+l)$ т.к.

$$\int_{[0,1]^n} e^{-2\pi i k\cdot x}\left(\sum_{l\in\mathbf{Z}^n} e^{-i\omega\cdot(x+l)}\varphi(x+l)\right)dx =$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i k\cdot x} e^{-i\omega\cdot x}\varphi(x)dx = \widehat{\varphi}(\omega + 2\pi k).$$

Таким образом (25.4) переписывается в виде

$$\sigma(x,\omega) = \Big(\sum_{l\in\mathbf{Z}^n} e^{-i\omega\cdot(x+l)}\varphi(x+l)\Big)\overline{\widehat{\varphi}(\omega)}. \tag{25.5}$$

Для доказательства (25.5) воспользуемся тождеством $P_0(e^{ix\cdot\omega}) = \sigma(x,\omega)e^{ix\cdot\omega}$. Так как $E_0(x,y) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x \Leftrightarrow k)\overline{\varphi(y \Leftrightarrow k)}$, то

$$P_0(e^{ix\cdot\omega}) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x \Leftrightarrow k) \int_{\mathbf{R}^n} \overline{\varphi}(y \Leftrightarrow k)e^{iy\cdot\omega}dy =$$
$$= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x \Leftrightarrow k)e^{i(k-x)\cdot\omega}\overline{\widehat{\varphi}(\omega)}e^{ix\cdot\omega} = \sigma(x,\omega)e^{ix\cdot\omega}.$$

□

Так как производные φ порядка невыше r быстро убывают, то

$$|\partial_\omega^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\omega)| \leq C(\alpha), \tag{25.6}$$

для любого $\alpha \in \mathbf{N}^n$ и любого $\beta \in \mathbf{N}^n$, $|\beta| \leq r$.

Исследуем какие свойства символа $\sigma(x,\omega)$ следуют из теоремы 21.1. Вычислим $P_0(x^\alpha)$, используя (25.3). Для этого приблизим x^α функциями из класса Шварца. Рассмотрим для любого $\epsilon > 0$ функцию

$f_\epsilon(x) = x^\alpha e^{-\epsilon|x|^2}$, преобразование Фурье которой равно $i^{|\alpha|}\partial_\omega^\alpha g_\epsilon(\omega)$, где $g_\epsilon(\omega) := (\pi/\epsilon)^{n/2}e^{-|\omega|^2/4\epsilon}$. Тогда

$$P_0 f_\epsilon(x) = \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\omega}\sigma(x,\omega)\partial_\omega^\alpha g_\epsilon(\omega)d\omega.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$P_0 f_\epsilon(x) = \frac{(\Leftrightarrow i)^{|\alpha|}}{(2\pi)^n}\int \partial_\omega^\alpha(e^{ix\cdot\omega}\sigma(x,\omega))g_\epsilon(\omega)d\omega. \tag{25.7}$$

Так как ядро $E(x,y)$ оператора P_0 есть $O(|x \Leftrightarrow y|^{-m})$ на бесконечности для любого $m \in \mathbf{N}$, по теореме Лебега получаем, что $P_0(x^\alpha) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} P_0(f_\epsilon)(x)$. Переходя к пределу в (25.7), имеем

$$x^\alpha = (\Leftrightarrow i)^{|\alpha|}\partial_\omega^\alpha(e^{ix\cdot\omega}\sigma(x,\omega))|_{\omega=0}. \tag{25.8}$$

Равенство (25.8) выполнено для любых $\alpha \in \mathbf{N}^n$ с $|\alpha| \le r$. Поэтому $\sigma(x,0) = 1$ и $\partial_\omega^\alpha\sigma(x,\omega)|_{\omega=0} = 0$ при $1 \le |\alpha| \le r$.

Учитывая (25.4), имеем $\sigma(x,0) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} e^{2\pi ik\cdot x}\widehat{\varphi}(0+2k\pi)\overline{\widehat{\varphi}(0)} = 1$, откуда следует, что

$$\widehat{\varphi}(2k\pi) = 0 \quad \forall k \ne 0. \tag{25.9}$$

По индукции получим, что $(\partial^\alpha\widehat{\varphi})(2k\pi) = 0 \quad \forall k \ne 0, \quad |\alpha| \le r$.

Так как $\varphi(x) \le C_m(1+|x|)^{-m}$ для любого $m \in \mathbf{N}$, то ряд $\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}|\widehat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2$ и все его производные равномерно сходятся на компактах. Из теорему 9.1 следует

Утверждение 25.2

$$|\widehat{\varphi}(\omega)|^2 = 1 + O(|\omega|^{2r+2}) \quad \textit{при} \quad |\omega| \to 0. \tag{25.10}$$

Всегда можно скорректировать φ таким образом, чтобы скорректированная функция $\tilde{\varphi}$ удовлетворяла условиям

$$\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\varphi}(x)dx = 1 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbf{R}^n}x^\alpha\tilde{\varphi}(x)dx = 0, \tag{25.11}$$

при $1 \le |\alpha| \le r$, сохраняя при этом свойство ортогональности $\{\tilde{\varphi}(\cdot \Leftrightarrow k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ и быстрого убывания на бесконечности производных $\partial^\alpha\tilde{\varphi}$

при $|\alpha| \leq r$. Для этого умножим сначала $\widehat{\varphi}$ на константу, по модулю равную 1, для того, чтобы $\widehat{\tilde{\varphi}}(0) = 1$. Далее, пусть $\alpha(\omega)$ – аргумент $\widehat{\varphi}(\omega)$ в окрестности 0, т.е. $\widehat{\varphi}(\omega) = |\widehat{\varphi}(\omega)|e^{i\alpha(\omega)}$ для $|\omega| < \delta$, где $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(\omega)$ бесконечно дифференцируемая функция на $|\omega| < \delta$. Пусть действительная, бесконечно дифференцируемая функция $\beta(\omega)$ является 2π-периодическим продолжением $\alpha(\omega)$ на $\mathbf{R}^n$. Определим $\widehat{\tilde{\varphi}}(\omega)$ как $e^{-i\beta(\omega)}\widehat{\varphi}(\omega)$. Тогда $\widehat{\tilde{\varphi}}(\omega) = |\widehat{\varphi}(\omega)|$ в окрестности 0 и выполнено (25.11).

Утверждение 25.3 *Всплески* $\psi_1, \ldots, \psi_q$, $\quad q := 2^n \Leftrightarrow 1$, *определенные в теореме 19.3 удовлетворяют условиям*

$$\int_{\mathbf{R}^n} x^\alpha \psi_l(x) dx = 0, \tag{25.12}$$

для $|\alpha| \leq r$ *и* $1 \leq l \leq q$.

Доказательство. Пусть $\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(\omega/2)\widehat{\varphi}(\omega/2)$, $\widehat{\psi_l}(\omega) = m_l(\omega/2)\widehat{\varphi}(\omega/2)$, где m_l – бесконечно дифференцируемые $2\pi\mathbf{Z}^n$-периодические функции. Аналогично одномерному случаю доказывается, что $|m_0(\omega)|^2 + |m_1(\omega)|^2 + \cdots + |m_q(\omega)|^2 = 1$, откуда следует, что $|\widehat{\varphi}(\omega)|^2 + |\widehat{\psi_1}(\omega)|^2 + \cdots + |\widehat{\psi_q}(\omega)|^2 = |\widehat{\varphi}(\omega/2)|^2$. Из (25.10) следует, что $\widehat{\psi_l}(\omega) = O(|\omega|^{r+1}), 1 \leq l \leq q$. Так как ψ_l быстро убывают на бесконечности, их преобразование Фурье бесконечно дифференцируемо. Значит $\partial^\alpha \psi_l(\omega) = 0$ при $\omega = 0$ и $1 \leq l \leq q$, откуда следует (25.12).

Пример. Применим (25.4) к КМА Мейера (см. параграф 14). Так как $\operatorname{supp} \widehat{\varphi}^M = [\Leftrightarrow 4\pi/3, 4\pi/3]$, то в (25.4) всего три неравных нулю члена

$$\sigma(t,\omega) = e^{-2\pi i t}\widehat{\varphi}(\omega \Leftrightarrow 2\pi)\widehat{\varphi}(\omega) + (\widehat{\varphi}(\omega))^2 + e^{2\pi i t}\widehat{\varphi}(\omega + 2\pi)\widehat{\varphi}(\omega). \tag{25.13}$$

Пусть S_j – оператор свертки, соответствующий мультипликатору $(\widehat{\varphi}(2^{-j}\omega))^2$. Обозначим $\eta(\omega) := \widehat{\varphi}(\omega \Leftrightarrow 2\pi)\widehat{\varphi}(\omega)$ и $\theta(\omega) := \widehat{\varphi}(\omega + 2\pi)\widehat{\varphi}(\omega)$. Ясно, что $\operatorname{supp} \eta = [2\pi/3, 4\pi/3]$, $\eta(2\pi \Leftrightarrow \omega) = \eta(\omega)$, $\operatorname{supp} \theta = [\Leftrightarrow 4\pi/3, \Leftrightarrow 2\pi/3]$, $\theta(\Leftrightarrow 2\pi \Leftrightarrow \omega) = \theta(\omega)$. Пусть Δ_j^+ и Δ_j^- – операторы свертки, соответствующие мультипликаторам $\eta(2^{-j}\omega)$ и $\theta(2^{-j}\omega)$ соответственно. Пусть M_j – оператор поточечного умножения на $e^{2\pi i 2^j t}$. Из (25.13) следует, что проекторы КМА Мейера имеют вид

$$P_j = S_j + M_j \Delta_j^- + M_j^{-1} \Delta_j^+. \tag{25.14}$$

26 Всплесковая характеризация пространств Гельдера $\mathbf{C}^s$, Соболева W_2^s и Бесова $B_p^{s,q}$

Всплесковые ряды обладают следующими преимуществами:

- всплески, локализованные в области регулярности функции, имеют пренебрежимо маленькие коэффициенты, а всплески, локализованные около особенностей функции, наоборот имеют большие коэффициенты (эта особенность выражена тем ярче, чем больше нулевых моментов у всплеска);

-всплесковые коэффициенты позволяют вычислять, с точностью до эквивалентности, норму функции в большинстве функциональных пространств.

Пусть $\{\psi_l\}_{l=0}^{2^n-1}$ - функции, определенные в Теореме 19.3. Многомерный всплесковый ряд имеет вид

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle f, \psi_\lambda \rangle \psi_\lambda(x), \tag{26.1}$$

где $\Lambda := \{\lambda = (l, j, k) : \quad 1 \leq l \leq 2^n \Leftrightarrow 1, k \in \mathbf{Z}^n, j \in \mathbf{Z}\}$, $\psi_\lambda(x) := 2^{nj/2}\psi_l(2^j x \Leftrightarrow k)$.

В пространствах, отличных от $L^2(\mathbf{R}^n)$, использование (26.1) бывает затруднительным. Например, в $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ для $f \equiv 1$ (26.1) превращается в $1 = 0$. Двойственный пример: пусть $f \in D(\mathbf{R}^n)$ и $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = 1$. Так как $\int_{\mathbf{R}^n} \psi_l(x)dx = 0$, то ряд (26.1) не сходится в $L^1(\mathbf{R}^n)$.

Поэтому вместо (26.1) удобнее пользоваться рядом по сдвигам масштабирующей функции φ и всплескам, сжатым в 2^j раз с $j \geq 0$:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \langle f, \varphi_{0,k} \rangle \varphi_{0,k}(x) + \sum_{\lambda \in \cup_{j \geq 0} \Lambda_j} \langle f, \psi_\lambda \rangle \psi_\lambda(x), \tag{26.2}$$

где $\Lambda_j := \{\lambda = (l, j, k) : \ 1 \leq l \leq 2^n \Leftrightarrow 1, k \in \mathbf{Z}^n\}$.

Ряд (26.2) хорошо представляет функции из пространств, которые характеризуются некоторым локальным условием и некоторым глобальным условием роста на бесконечности.

Проиллюстрируем использование (26.1) и (26.2) на примере пространств Соболева $W_2^s(\mathbf{R}^n)$ (Определение 2.6), Гельдера $\mathbf{C}^s(\mathbf{R}^n)$ (Определение 2.9) и Бесова $B_p^{s,q}$ (Определение 2.8). Будем рассматривать всплески, полученные из r-регулярного КМА. При этом порядок распределения, для которого вычисляются коэффициенты, предполагается строго меньшим r. Равенство (26.1) понимается как равенство интегралов от обеих частей равенства, умноженных на функцию из $C^r(\mathbf{R}^n)$ с компактным носителем.

Теорема 26.1 *Распределение f принадлежит $W_2^s(\mathbf{R}^n)$ с $s \in (\Leftrightarrow r, r)$ тогда и только тогда, когда всплесковые коэффициенты $\alpha(\lambda) := \langle f, \psi_\lambda \rangle$ удовлетворяют условиям*

$$\sum_{j<0} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |\alpha(\lambda)|^2 + \sum_{j \geq 0} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} 4^{js} |\alpha(\lambda)|^2 < \infty. \tag{26.3}$$

Функция f принадлежит $\mathbf{C}^s(\mathbf{R}^n)$ с $s \in (0, r)$ тогда и только тогда, когда существуют две константы C_0 и C_1, такие, что коэффициенты $\beta(k) := (f, \varphi_{0,k}), k \in \mathbf{Z}^n$, и $\alpha(\lambda) := (f, \psi_\lambda), \lambda \in \Lambda_j, j > 0$, удовлетворяют условиям $|\beta(k)| \leq C_0, |\alpha(\lambda)| \leq C_1 2^{-nj/2} 2^{-js}$.

Доказательство. В случае пространств Соболева теорема следует из теоремы 23.2 и того, что $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_j}$ – ортонормированный базис в W_j, поэтому $\|Q_j f\|_2^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |\langle f, \psi_\lambda \rangle|^2$.

Для пространств Гельдера результат следует из утверждения 24.2 и того, что $\|f\|_\infty$ и $\sup_{\lambda \in \Lambda_0} |\langle f, \psi_\lambda \rangle|$ эквивалентны на W_0. Действительно, $|\langle f, \psi_\lambda \rangle| \leq \|\psi_\lambda\|_1 \|f\|_\infty = C\|f\|_\infty$ и $\sup_{\lambda \in \Lambda_0} |\psi_\lambda(x)| \leq C'$ в силу (19.11), откуда $|f(x)| \leq C' \sup_{\lambda \in \Lambda_0} |\langle f, \psi_\lambda \rangle|$. □

Замечание 26.1 *Пространство $\mathbf{C}^s$ нельзя охарактеризовать, используя только модули коэффициентов ряда (26.1). Это связано с невозможностью охарактеризовать таким способом $L^\infty(\mathbf{R}^n)$. Например, при $x \in \mathbf{R}$ модули коэффициентов всплесков Мейера (см.(14.1)) для $\log|x|$ и для $x/|x|$ асимптотически совпадают. Это связано с тем, что преобразование Гильберта H отображает $x/|x|$ в $\log|x|$, а всплески Мейера $\psi_{j,k}^M$ преобразуются в совершенно аналогичные всплески $\tilde{\psi}_{j,k}^M$, где $\tilde{\psi}^M(t) := (H\psi^M)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \sin((t \Leftrightarrow 1/2)\xi) \operatorname{sgn}(\xi) \sin(\lambda(\xi))\, d\xi$.*

Замечание 26.2 *Пространство Соболева W_2^s можно охарактеризовать при помощи ряда (26.2): $f \in W_2^s, \Leftrightarrow r < s < r$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\beta(k)|^2 < \infty$ и $\sum_{j \geq 0} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} 4^{js} |\alpha(\lambda)|^2 < \infty$.*

Дело в том, что $\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\beta(k)|^2 = \sum_{j<0}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}|\alpha(\lambda)|^2 < \infty$, *так как* V_0 *- прямая сумма пространств* $W_j,\ j<0$.

Аналогично лемме 20.1 доказывается

Утверждение 26.1 *Пусть* $p \in [1,\infty]$. *Существуют константы* $C' > C > 0$, *такие, что для любой конечной суммы* $f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda_j}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x) \in W_j$

$$C\|f\|_p \leq 2^{nj(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}(\sum_{\lambda\in\Lambda_j}|\alpha(\lambda)|^p)^{1/p} \leq C'\|f\|_p.$$

Из утверждений 24.1 и 26.1 следует

Теорема 26.2 *Функция*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\beta(k)\varphi(x \Leftrightarrow k) + \sum_{j\geq 0}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$$

принадлежит $B_p^{s,q}$ *тогда и только тогда, когда* $\{\beta(k)\}_{k\in\mathbf{Z}^n} \in l^p(\mathbf{Z}^n)$ *и* $(\sum_{\lambda\in\Lambda_j}|\alpha(\lambda)|^p)^{1/p} = 2^{-nj(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}2^{-js}a_j$, *где* $\{a_j\}_{j\in\mathbf{N}} \in l^q(\mathbf{N})$.

27 Всплесковая характеризация пространств $H^1(\mathbf{R}^n)$ и BMO

Пусть $\{\psi_l\}_{l=0}^{2^n-1}$ - всплески, определенные в Теореме 19.3, $r \geq 1$, $\Lambda := \{\lambda = (l,j,k) : 1 \leq l \leq 2^n \Leftrightarrow 1,\ k \in \mathbf{Z}^n,\ j \in \mathbf{Z}\}$, $\psi_\lambda(x) := 2^{nj/2}\psi_l(2^jx \Leftrightarrow k)$.

Теорема 27.1 *Всплески* $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *образуют безусловный базис в вещественном классе Харди* $H^1(\mathbf{R}^n)$.

Схема доказательство. Сначала рассмотрим всплески с компактным носителем. Не ограничивая общности можно считать, что $\int_{[0,1]^n}|\psi_l(x)|^2dx \neq 0,\ 1 \leq l < 2^n$ (этого всегда можно добиться за счет соответствующего сдвига). Тогда существуют константы $c>0,\ \gamma>0$ и кубы $A_l \subset [0,1)^n$, такие, что $|\psi_l(x)| \geq c$, если $x \in A_l$, и $|A_l| \geq \gamma$.

Если $\lambda = (l, j, k)$, $1 \le l \le 2^n \Leftrightarrow 1, k \in \mathbf{Z}^n, j \in \mathbf{Z}$, то по определению $Q(\lambda) := Q(j,k) := \{x \in \mathbf{R}^n : 2^j x \Leftrightarrow k \in [0,1)^n\}$ и $R(\lambda) := \{x \in \mathbf{R}^n : 2^j x \Leftrightarrow k \in A_l\}$.

Пусть $f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$. Утверждение теоремы следует из того, что $\|f\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$ эквивалентна следующим величинам:

$$\|(\sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha(\lambda)|^2 |\psi_\lambda(x)|^2)^{1/2}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}; \tag{27.1}$$

$$\|(\sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha(\lambda)|^2 |Q(\lambda)|^{-1} \kappa_{R(\lambda)}(x))^{1/2}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}; \tag{27.2}$$

$$\|(\sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha(\lambda)|^2 |Q(\lambda)|^{-1} \kappa_{Q(\lambda)}(x))^{1/2}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}. \tag{27.3}$$

Здесь $|e|$ - мера Лебега множества e.

В доказательстве используется атомарное описание $H^1(\mathbf{R}^n)$.

Определение 27.1 *Атомом в $H^1(\mathbf{R}^n)$ называют функцию $a(x)$ из $L^2(\mathbf{R}^n)$, для которой существует шар $B \subset \mathbf{R}^n$ такой, что выполнены три свойства*

$$a(x) = 0, \text{ если } x \notin B; \tag{27.4}$$

$$\|a\|_2 \le |B|^{-1/2}; \tag{27.5}$$

$$\int_B a(x)dx = 0. \tag{27.6}$$

Теорема 27.2 *[CW] Функция $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ принадлежит $H^1(\mathbf{R}^n)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность атомов $a_j(x)$ и последовательность чисел λ_j такие, что*

$$\sum_0^\infty |\lambda_j| < \infty \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_0^\infty \lambda_j a_j(x). \tag{27.7}$$

Оказывается возможным сгруппировать члены всплескового ряда $f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ так, что частные суммы $\sum_{\lambda\in\Lambda(l,m,r)} \alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$, где $\{\Lambda(l,m,r)\}$ – дизъюнктное разбиение Λ, образуют атомарное представление f. Множества $\Lambda(l,m,r)$ определяются следующим образом. Пусть $\sigma_l(x) := (\sum_{Q\in\Omega} |\alpha(l,Q)|^2 |Q|^{-1} \kappa_{R(l,Q)}(x))^{1/2}$, где Ω - совокупность всех двоичных кубов, $\alpha(l,Q) = \alpha(l,j,k)$ для $Q = Q(j,k)$,

$R(l,Q) := R(l,j,k)$. Пусть $E(l,m) := \{x : \sigma_l(x) > 2^m\}, \quad m \in \mathbf{Z}$. Ясно, что

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}} 2^m |E(l,m)| \le 2\int_{\mathbf{R}^n} \sigma_l(x)dx. \tag{27.8}$$

Обозначим через $\Omega(l,m)$ совокупность двоичных кубов Q, для которых $|Q\cap E(l,m)| \ge \beta|Q|$, где $\beta \in (0,\gamma)$ – фиксированная постоянная. Пусть $\{A(l,m,r)\}_r$ – совокупность всех максимальных по включению кубов в $\Omega(l,m)$. Легко видеть, что

$$|\bigcup_r A(l,m,r)| < \frac{1}{\beta}|E(l,m)|. \tag{27.9}$$

Наконец, $\Lambda(l,m,r)$ состоит из тех $\lambda = (l,j,k) \in \Lambda$, для которых $Q(\lambda) \in \Omega(l,m)\backslash\Omega(l,m+1)$ и $Q(\lambda) \subset A(l,m,r)$. Нетрудно показать, что

$$\sum_{\lambda\in\Lambda(l,m,r)} |\alpha(\lambda)|^2 \le \frac{1}{\gamma \Leftrightarrow \beta} 4^{m+1}|A(l,m,r)|. \tag{27.10}$$

Пусть $b(l,m,r) := |A(l,m,r)|^{1/2}(\sum_{\lambda\in\Lambda(l,m,r)}|\alpha(\lambda)|^2)^{1/2}$, $\tilde\alpha(\lambda) := (b(l,m,r))^{-1}\alpha(\lambda)$ для $\lambda \in \Lambda(l,m,r)$ и $\tilde\alpha(\lambda) := 0$ в противном случае. Из (27.9),(27.10) и (27.8) следует, что для любого l, $1 \le l \le 2^n \Leftrightarrow 1$,

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_r b(l,m,r) \le \frac{2}{(\gamma-\beta)^{1/2}}\sum_{m\in\mathbf{Z}} 2^m|\bigcup_r A(l,m,r)| \le\\ &\le \textstyle\frac{2}{\beta(\gamma-\beta)^{1/2}}\sum_{m\in\mathbf{Z}} 2^m|E(l,m)| \le \frac{4}{\beta(\gamma-\beta)^{1/2}}\|\sigma_l\|_1.\end{aligned} \tag{27.11}$$

Так как мы пока рассматриваем всплески с компактным носителем, то существует $d \in \mathbf{N}$ такое, что $\operatorname{supp}\psi_\lambda \subset dQ(\lambda)$, где dQ обозначает куб с тем же центром и в d-раз большей, чем у Q длиной стороны. Функции $a(l,m,r,x) := d^{-n/2}\sum_{\lambda\in\Lambda(l,m,r)}\tilde\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ являются атомами в $H^1(\mathbf{R}^n)$. Действительно, $\operatorname{supp} a(l,m,r,x) \subset dQ(l,m,r)$ и $\|a(l,m,r,\cdot)\|_2 \le$ $\le d^{-n/2}(\sum_{\lambda\in\Lambda(l,m,r)}|\tilde\alpha(\lambda)|^2)^{1/2} \le |dQ(l,m,r)|^{-1/2}$. Поэтому ряд, определяющий $a(l,m,r,x)$, сходится в $L^1(\mathbf{R}^n)$ и почленное интегрирование дает последнее свойство атома $\int_{\mathbf{R}^n} a(l,m,r,x)dx = 0$ в силу (25.12).

Таким образом, доказано, что из конечности (27.2) следует возможность атомарного представления функции f.

Покажем, что из атомарного представления f следует интегрируемость функции $Sf(x) := (\sum_{\lambda\in\Lambda}|\langle f,\psi_\lambda\rangle|^2|\psi_\lambda(x)|^2)^{1/2}$. Ясно, что для этого достаточно проверить выполнение этого свойства для произвольного атома в $H^1(\mathbf{R}^n)$. Пусть f – атом, B – соответствующий шар с центром в x_0 и радиусом $r > 0$. Пусть C – некоторая константа, значение которой будет определено ниже. Разобьем $\mathbf{R}^n$ на центральный шар $\tilde{B} := \{x : |x \Leftrightarrow x_0| \le Cr\}$ и двоичные оболочки $R_m := \{x : 2^m Cr \le |x \Leftrightarrow x_0| < 2^{m+1}Cr\}$, $m \in \mathbf{N}$. Тогда $\int_{\mathbf{R}^n} Sf(x)dx = \int_{\tilde{B}} Sf(x)dx + \sum_0^\infty \int_{R_m} Sf(x)dx$. Первый интеграл оценивается при помощи неравенства Коши

$$\int_{\tilde{B}} Sf(x)dx \le |\tilde{B}|^{1/2} \|Sf\|_2 = C^{n/2}|B|^{1/2}\|f\|_2 \le C^{n/2}.$$

Для оценки остальных интегралов заметим, что $\langle f, \psi_\lambda \rangle = 0$, если $dQ(\lambda)$ не пересекается с B. Обозначим через Λ^m совокупность тех λ, для которых $dQ(\lambda)$ пересекается как с B, так и с R_m. Если константа C достаточно большая, то существует $c > 0$ такое, что из $\lambda \in \Lambda^m$ следует неравенство $2^{-j} \ge cr2^m$, где 2^{-j} – длина стороны куба $Q(\lambda)$. Из регулярности всплесков ψ_λ и того, что $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = 0$, следует, что $|\langle f, \psi_\lambda \rangle| \le C2^{nj/2}2^j r$. Поэтому при $x \in R_m$ $Sf(x) \le C' 2^{-m(n+1)} r^{-n}$ и $\sum_0^\infty \int_{R_m} Sf(x)dx < \infty$.

Если всплески не имеют компактного носителя, то вместо атомарной характеризации $H^1(\mathbf{R}^n)$ используется молекулярная.

Определение 27.2 *Пусть $s > n$. Молекулой с центром в x_0 и шириной $d > 0$ называют функцию f, удовлетворяющую трем условиям: $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = 0$, $\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 (1 + |x|)^s dx < \infty$ и*

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 \left(1 + \frac{|x \Leftrightarrow x_0|}{d} \right)^s dx \right)^{1/2} \le d^{-n/2}.$$

Нетрудно проверить, что в теореме 27.2 атомы можно заменить на молекулы.

В случае всплесков с некомпактным носителем ранее определенные функции $a(l, m, r, x) := d^{-n/2} \sum_{\lambda \in \Lambda(l,m,r)} \tilde{\alpha}(\lambda) \psi_\lambda(x)$, не будучи атомами, являются молекулами. □

Пространство $BMO(\mathbf{R}^n)$ является сопряженным к $H^1(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 27.3 *Если $f(x)$ принадлежит $BMO(\mathbf{R}^n)$, то всплесковые коэффициенты $\alpha(\lambda) := \langle f, \psi_\lambda \rangle$ удовлетворяют условию Карлесона*

$$\sum_{Q(\lambda) \subset Q} |\alpha(\lambda)|^2 \le C|Q| \qquad (27.12)$$

для любого двоичного куба Q.

Обратно, если коэффициенты $\alpha(\lambda), \lambda \in \Lambda$, удовлетворяют (27.12), то ряд $\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ сходится в слабой топологии $\sigma(BMO, H^1)$ к функции из BMO.

Доказательство. Для упрощения выкладок предполагаем, что всплески ψ_l, $1 \le l \le 2^n \Leftrightarrow 1$, имеют компактный носитель. Общий случай рассматривается аналогично.

Необходимость. Пусть $\operatorname{supp}\psi_\lambda \subset dQ(\lambda)$ (обозначения см. на с. 75). Зафиксируем произвольный двоичный куб Q. Представим $f \in BMO$ в виде $f = f_1 + f_2 + f_{dQ}$, где $f_{dQ} = \frac{1}{|dQ|}\int_{dQ} f(x)dx$, $f_1(x) = f(x) \Leftrightarrow f_{dQ}$ при $x \in dQ$ и $f_1(x) = 0$ при $x \notin dQ$. Ясно, что $\langle f_2, \psi_\lambda\rangle = 0$, если $Q(\lambda) \subset Q$. Учитывая (25.12), получаем, что $\langle f, \psi_\lambda\rangle = \langle f_1, \psi_\lambda\rangle$ при $Q(\lambda) \subset Q$. Поэтому

$$\sum_{Q(\lambda)\subset Q} |\alpha(\lambda)|^2 \le \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle f_1, \psi_\lambda\rangle|^2 = \|f_1\|_2^2 \le d^n\|f\|_{BMO}^2|Q|.$$

Достаточность. Пусть выполнено условие (27.12). Рассмотрим шар B радиуса r с центром в x_0. Выберем $q \in \mathbf{Z}$ так, чтобы $2^{-q} \le r < 2^{-q+1}$. Легко видеть, что при $j \ge q$ из того, что $dQ(\lambda) \cap B \ne \emptyset$ и длина стороны $Q(\lambda)$ равна 2^{-j}, следует, что $Q(\lambda) \subset MB$, где константа M зависит только от d. Пусть $\Lambda_{1,1} := \{\lambda = (l,j,k) \in \Lambda : \ j \ge q, \ Q(\lambda) \subset MB\}$, $\Lambda_{1,2} := \{\lambda = (l,j,k) \in \Lambda : \ j \ge q, \ \lambda \notin \Lambda_{1,1}\}$, $f_{1,1} := \sum_{\lambda\in\Lambda_{1,1}}\alpha(\lambda)\psi_\lambda$, $f_{1,2} := \sum_{\lambda\in\Lambda_{1,2}}\alpha(\lambda)\psi_\lambda$. Тогда функция $f_{1,2}$ равна нулю на B, а для $f_{1,1}$ имеем оценку $\|f_{1,1}\|_2^2 \le \sum_{Q(\lambda)\subset MB}|\alpha(\lambda)|^2 \le C|B|$.

Рассмотрим $j < q$. Для каждого такого j только M^n всплесков ψ_λ, с длиной стороны $Q(\lambda)$ равной 2^{-j}, не равны нулю тождественно на B. Для каждого такого всплеска в силу (19.11) имеем $|\psi_\lambda(x) \Leftrightarrow \psi_\lambda(x_0)| \le C2^j2^{nj/2}|x \Leftrightarrow x_0|$. Из (27.12) следует, что $|\alpha(\lambda)| \le C|Q(\lambda)|^{1/2} = C2^{-nj/2}$. Из всего сказанного получаем, что при $x \in B$

$$|\textstyle\sum_{\{\lambda=(l,j,k)\in\Lambda: j\le q\}}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x) \Leftrightarrow \sum_{\{\lambda=(l,j,k)\in\Lambda: j\le q\}}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x_0)| \le$$

$$\le CM^n\textstyle\sum_{j<q}2^j|x \Leftrightarrow x_0| = CM^n2^q|x \Leftrightarrow x_0| \le 2CM^n.$$

□

28 Всплесковая характеризация пространств $L^p(\mathbf{R}^n)$ и $W_p^s(\mathbf{R}^n)$

Пусть $\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda$ – всплески, построенные на основе r-регулярного КМА при помощи теоремы 19.3, $r \geq 1$. Используемые в дальнейшем обозначения определены на с. 74.

Теорема 28.1 *Пусть* $1 < p < \infty$. *Всплесковый ряд* $\sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ *принадлежит* $L^p(\mathbf{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда* $\|(\sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha(\lambda)|^2|\psi_\lambda(x)|^2)^{1/2}\|_p < \infty$. *Кроме того, норма* $\|(\sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha(\lambda)|^2|\psi_\lambda(x)|^2)^{1/2}\|_p$ *эквивалентна норме* $\|(\sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha(\lambda)|^2|Q(\lambda)|^{-1}\kappa_{Q(\lambda)}(x))^{1/2}\|_p$.

Доказательство. Пусть $\epsilon := \{\epsilon(\lambda) = \pm 1\}_{\lambda\in\Lambda}$ – произвольная расстановка знаков. Определим линейный оператор $T_\epsilon : L^2(\mathbf{R}^n) \mapsto L^2(\mathbf{R}^n)$, полагая $T_\epsilon\psi_\lambda = \epsilon(\lambda)\psi_\lambda$. Легко видеть, что операторы T_ϵ являются операторами Кальдерона-Зигмунда (определение 2.5) с ядрами $K_\epsilon(x,y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \epsilon(\lambda)\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)\overline{\psi}_\lambda(y)$, удовлетворяющими в силу (19.11) оценкам $|K_\epsilon(x,y)| \leq C|x - y|^{-n}$ и

$$\left|\frac{\partial K_\epsilon}{\partial x_j}\right| + \left|\frac{\partial K_\epsilon}{\partial y_j}\right| \leq C|x - y|^{-n-1}$$

равномерно по ϵ. В силу теоремы 2.1 операторы T_ϵ равномерно ограничены в $L^p(\mathbf{R}^n)$. Теперь первое утверждение теоремы следует из неравенств Хинчина.

Второе утверждение следует из того, что линейный оператор $U : L^2(\mathbf{R}^n) \mapsto L^2(\mathbf{R}^n)$, определяемый равенствами $U(\psi_l^H) = \psi_l$, $1 \leq l < 2^n$, где ψ_l^H – многомерные всплески Хаара, является изоморфизмом в $L^p(\mathbf{R}^n)$. Действительно, U – изоморфизм двоичного $H^1(\mathbf{R}^n)$ и обычного $H^1(\mathbf{R}^n)$ (двоичное $H^1(\mathbf{R}^n)$ состоит из функций, допускающих атомарное представление по атомам с носителями, равными двоичным кубам, см. теорему 27.1). Очевидно, что U – изометрия в $L^2(\mathbf{R}^n)$. Остается воспользоваться интерполяцией между H^1 и L^2 (см. [FS]). $\square$

Теорема 28.2 *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $0 \leq s < r$. *Всплесковый ряд* $\sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ *принадлежит* $W_p^s(\mathbf{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha(\lambda)|^2 (1 + 4^{js}) 2^{nj} \kappa_{Q(\lambda)}(x) \right)^{1/2} \in L^p(\mathbf{R}^n). \tag{28.1}$$

Если $\Leftrightarrow r < s \leq 0$, *то всплесковый ряд принадлежит* $W_p^s(\mathbf{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha(\lambda)|^2 (1 + 4^{-js})^{-1} 2^{nj} \kappa_{Q(\lambda)}(x) \right)^{1/2} \in L^p(\mathbf{R}^n). \tag{28.2}$$

Схема доказательства. Сначала рассмотрим всплески Мейера. Для них преобразование Фурье $\widehat{\psi}_l$ равно нулю в окрестности нуля и имеет компактный носитель. Поэтому для любого $\gamma \in \mathbf{R}$ можно определить функции $\psi_l^\gamma := (\Leftrightarrow\Delta)^{\gamma/2}\psi_l$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Ясно, что $\widehat{\psi}_l^\gamma(\xi) = |\xi|^\gamma \widehat{\psi}_l(\xi)$. Определим $\psi_\lambda^\gamma(x) := 2^{nj/2}\psi_l^\gamma(2^j x \Leftrightarrow k)$, где $\lambda = (l, j, k)$. Рассмотрим линейные операторы D_γ, определяемые формулами $D_\gamma(\psi_\lambda) = \psi_\lambda^\gamma$. Для любого $\gamma \in \mathbf{R}$ операторы D_γ являются изоморфизмами в $L^p(\mathbf{R}^n)$. Дело в том, что ψ_λ^γ, $\lambda \in \Lambda$, образуют базис Рисса в $L^2(\mathbf{R}^n)$, откуда следует, что D_γ – изоморфизм в $L^2(\mathbf{R}^n)$. Кроме того, ядро оператора D_γ равно $\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda^\gamma(x)\overline{\psi}_\lambda(y)$ и удовлетворяет требованиям определения 2.5. Значит по теореме 2.1 D_γ – непрерывный оператор в $L^p(\mathbf{R}^n)$. Обратный оператор исследуется аналогично.

Норма f в пространстве $W_p^s(\mathbf{R}^n)$ эквивалентна $\|f\|_p + \|(\Leftrightarrow\Delta)^{s/2} f\|_p$. Поэтому для оценки $W_p^s(\mathbf{R}^n)$-нормы ряда $\sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ необходимо вычислить $L^p(\mathbf{R}^n)$-норму $(\Leftrightarrow\Delta)^{s/2} \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha(\lambda)\psi_\lambda(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha(\lambda) 2^{js} \psi_\lambda^s(x)$. Остается использовать изоморфизм D_s в $L^p(\mathbf{R}^n)$ и теорему 28.1.

В общем случае r-регулярного КМА доказывается, что функции $(\Leftrightarrow\Delta)^{-s/2}\psi_l$, $1 \leq l < 2^n$, имеют нулевое среднее и вместе со всеми производными порядка $\leq r$ имеют порядок $O(|x|^{-n-r+s})$ на бесконечности. Аналогично, функции $(\Leftrightarrow\Delta)^{s/2}\psi_l$, $1 \leq l < 2^n$, принадлежат классу Гельдера H^{r-s}, убывают на бесконечности как $O(|x|^{-n-r+s})$ и имеют нулевое среднее. Эти свойства позволяют повторить рассуждения, использованные для всплесков Мейера.

Утверждение теоремы для $s < 0$ получается по двойственности.□

Следствие 28.1 *Ряд*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \beta(k)\varphi(x \Leftrightarrow k) + \sum_{\{\lambda=(l,j,k)\in\Lambda,\ j\geq 0\}} \alpha(\lambda)\psi_\lambda(x) \qquad (28.3)$$

принадлежит $W_p^s(\mathbf{R}^n),\ 1 < p < \infty, |s| < r$, *тогда и только тогда, когда* $\{\beta(k)\}_{k\in\mathbf{Z}^n} \in l^p(\mathbf{Z}^n)$ *и*

$$\left(\sum_{\{\lambda=(l,j,k)\in\Lambda,\ j\geq 0\}} 2^{nj}4^{js}|\alpha(\lambda)|^2\kappa_{Q(\lambda)}(x)\right)^{1/2} \in L^p(\mathbf{R}^n). \qquad (28.4)$$

29 Периодические всплески

На основе всплескового базиса на прямой можно построить всплесковый базис на отрезке $[0,1]$.

Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ — r-регулярный КМА в $L_2(\mathbf{R}), r \geq 1$, V_j^∞ – замыкание V_j в слабой топологии $\sigma(L^\infty, L^1)$. Пусть T_j подпространство функций из V_j^∞, имеющих период 1.

Лемма 29.1 *Если* $j \leq 0$, *то* T_j *совпадают и состоят только из постоянных функций. Если* $j > 0$, *то размерность* T_j *равна* 2^j.

Доказательство. Заметим, что константы принадлежат всем V_j, так как $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi(t \Leftrightarrow k) \equiv 1$. Последнее следует из (25.9), так как

$$\int_{-1}^{1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi(t \Leftrightarrow k)e^{-2\pi lt}\,dt = \int_{\mathbf{R}}\varphi(t)e^{-2\pi lt}\,dt = \widehat{\varphi}(2\pi l) = \delta_{l,0}.$$

Так как $V_j^\infty \subset V_{j+1}^\infty$, то первое утверждение леммы будет доказано, если любая функция $f \in T_0$ является константой. Действительно, если f 1-периодична, то последовательность коэффициентов $c_k := \int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{\varphi(t \Leftrightarrow k)}\,dt$ постоянна, а значит и $f(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\varphi(t \Leftrightarrow k)$ равна константе.

Пусть $j > 0$. Тогда любая функция $f \in T_j$ имеет вид $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\varphi(2^jt \Leftrightarrow k)$, где $c_k := 2^j\int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{\varphi(2^jt \Leftrightarrow k)}\,dt$. Из периодичности f следует, что $c_{k+2^j} = c_k$. Очевидно, что верно и обратное. Таким образом, размерность T_j равна 2^j.□

Лемма 29.2 *Объединение T_j, $j \geq 0$, плотно в банаховом пространстве непрерывных на действительной оси периодических с периодом 1 функций.*

Доказательство. Ортогональный проектор $P_j : L^2(\mathbf{R}) \to V_j$ определяется формулами $P_j f(t) = \int_{\mathbf{R}} E_j(t,s) f(s)\, ds$, где $E_j(t,s) := 2^j E(2^j t, 2^j s)$ и $E(t,s) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t \Leftrightarrow k)\varphi(s \Leftrightarrow k)$. Если f – ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$, то $\|f \Leftrightarrow P_j(f)\|_\infty \to 0$ при $j \to \infty$ (см. лемму 22.1). Остается заметить, что $P_j(f) \in T_j$ для любого $j \in \mathbf{N}$, если f периодична с периодом 1.□

Определение 29.1 *Вложенная последовательность $\{T_j\}_{j \in \mathbf{N}}$, определенная выше, называется r-регулярным КМА в $L^2(\mathbf{T})$, где $\mathbf{T}$ - отрезок $[0,1]$ с отождествленными концами.*

Пусть $\varphi_j^{per}(t) := 2^{j/2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \varphi(2^j(t \Leftrightarrow k))$.

Лемма 29.3 *Для любого $j \in \mathbf{N}$ функции $\varphi_j^{per}(t \Leftrightarrow k2^{-j})$, $0 \leq k < 2^j$, образуют ОНБ в T_j.*

Доказательство. Так как размерность T_j равна 2^j, то достаточно проверить ортонормированность функций $\varphi_j^{per}(t \Leftrightarrow k2^{-j})$, $0 \leq k < 2^j$, в $L^2[0,1]$. Для этого необходимо вычислить

$$2^j \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} \int_0^1 \varphi(2^j t \Leftrightarrow 2^j k \Leftrightarrow m)\overline{\varphi(2^j t \Leftrightarrow 2^j l \Leftrightarrow m')}\, dt.$$

Сделаем замену переменных $t \Leftrightarrow k = 2^{-j} t'$, где $0 \leq t < 1$, $k \in \mathbf{Z}$. Она приводит к выражению

$$\sum_{q \in \mathbf{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t' \Leftrightarrow m)\overline{\varphi(t \Leftrightarrow 2^j q \Leftrightarrow m')}\, dt.$$

Если $0 \leq m < 2^j, 0 \leq m' < 2^j$ и $m \neq m'$, то каждый из интегралов равен нулю. Если $m = m'$, то единственным неравным нулю интегралом является интеграл при $q = 0$, который равен 1.□

Пусть U_j обозначает ортогональное дополнение T_j до T_{j+1} и пусть

$$\psi_j(t) := 2^{j/2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \psi(2^j(t \Leftrightarrow k)).$$

Лемма 29.4 *Для любого $j \in \mathbf{N}$ функции $\psi_j(t \Leftrightarrow k2^{-j})$, $0 \le k < 2^j$, образуют ОНБ в U_j.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 29.3. Легко видеть, что функции $\psi_j(t \Leftrightarrow k2^{-j})$ принадлежат T_{j+1} и ортогональны к T_j. Кроме того, функции $\psi_j(t \Leftrightarrow k2^{-j}), 0 \le k < 2^j$, попарно ортогональны. Остается заметить, что размерность U_j равна 2^j, так как размерность T_j равна 2^j, а размерность T_{j+1} равна 2^{j+1}.□

Таким образом,

$$L^2(\mathbf{T}) = T_0 \oplus U_0 \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots,$$

откуда следует, что постоянная функция 1 вместе с последовательностью $\{\psi_j(t \Leftrightarrow k2^{-j})\}_{0 \le k < 2^j, j \in \mathbf{N}}$ образуют ОНБ в $L^2(\mathbf{T})$. Занумеруем эту последовательность лексикографически: $g_0(t) \equiv 1$; если $m = 2^j + k$, $0 \le k < 2^j$, то $g_m(t) := \psi_j(t \Leftrightarrow k2^{-j})$.

Теорема 29.1 *Пусть $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ – r-регулярный КМА в $L^2(\mathbf{R}), r \ge 1$. Тогда последовательность $\{g_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ является базисом Шаудера в $C(\mathbf{T})$ и $L^1(\mathbf{T})$. Она также является базисом Шаудера и в $C^k(\mathbf{T})$ при $0 \le k < r$. Таже последовательность $\{g_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ является безусловным базисом в пространстве Гельдера $\mathbf{C}^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$, в классе Зигмунда $\Lambda_\star = \mathbf{C}^1$ при $r \ge 2$, в пространствах L^p с $1 < p < \infty$, в пространстве Харди $H^1(\mathbf{T})$ и в его двойственном пространстве $BMO(\mathbf{T})$.*

Замечание 29.1 *Отметим, что тригонометрическая система не является базисом Шаудера в $C(\mathbf{T})$ и в $L^1(\mathbf{T})$. В пространствах L^p при $1 < p < \infty$ она образует базис Шаудера, но не безусловный.*

Доказательство. Так как $\bigcup T_j$ плотно в $C(\mathbf{T})$ (см. лемму 29.2), то для базисности $\{g_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ в $C(\mathbf{T})$ достаточно доказать, что $\|\sum_{m=0}^{l} \langle f, g_m \rangle g_m\|_\infty \le C\|f\|_\infty$ для любого $l \in \mathbf{N}$. Продолжим функцию $f \in C(\mathbf{T})$ по периодичности на всю прямую R. Тогда $\sum_{m=0}^{2^j} \langle f, g_m \rangle g_m = P_j f$, причем операторы P_j равномерно ограничены на $L^\infty(\mathbf{R})$, т.к. $\|P_j\|_\infty = \|P_0\|_\infty$. Пусть $2^j \le l < 2^{j+1}$. Заметим, что

$$\|\sum_{m=2^j}^{l} \langle f, g_m \rangle g_m\|_\infty \le \|f\|_\infty \left(\sup_{2^j \le m < 2^{j+1}} \|g_m\|_1 \right) \left\| \sum_{2^j \le m < 2^{j+1}} |g_m| \right\|_\infty$$

Легко видеть, что $\|g_m\|_{L^1(\mathbf{T})} = 2^{-j/2}\|\psi\|_{L^1(\mathbf{R})}$ при $2^j \le m < 2^{j+1}$. Кроме того,

$$\left\|\sum_{2^j \le m < 2^{j+1}} |g_m|\right\|_\infty = \left\|\sum_{k\in\mathbf{Z}} |2^{j/2}\psi(2^j \cdot \Leftrightarrow k)|\right\|_\infty =$$
$$= 2^{j/2} \left\|\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\psi(\cdot \Leftrightarrow k)|\right\|_\infty = C2^{j/2}.$$

Поэтому $\| \sum_{m=2^j}^{l} \langle f, g_m\rangle g_m\|_\infty \le C\|f\|_\infty$.

Случай $C^k(\mathbf{T})$ разбирается аналогично с использованием теоремы 21.2.

Базисность в $L^1(\mathbf{T})$ получается по двойственности.

Из теоремы 26.1 следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m g_m \in \mathbf{C}^s(\mathbf{T}) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_m = O(m^{-s-1/2}), \tag{29.1}$$

из чего следует безусловная базисность в $\mathbf{C}^s(\mathbf{T})$.

Результат для пространств $L^p(\mathbf{T}), H^1(\mathbf{T}), BMO(\mathbf{T})$ следует из теорем 28.1, 27.1 и 27.3. □

Сравним всплесковые ряды и ряды Фурье. Оказывается, что полные всплесковые ряды, имеющие много больших коэффициентов представляют собой патологические функции, тогда как всплесковые ряды хороших функций имеют мало больших коэффициентов. Это прямо противоположно ситуации с обычными рядами Фурье: для хороших функций они полные, а для патологических – лакунарные. Это объясняется тем, что всплесковый анализ носит локальный характер. Большие коэффициенты имеют всплески, локализованные вблизи особенностей анализируемой функции. Вне особенностей анализируемая функция является бесконечно дифференцируемой и соответствующие всплесковые коэффициенты являются пренебрежимо малыми за счет свойства (25.12).

Рассмотрим функцию $|\sin \pi t|^{-\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$. Ее коэффициенты Фурье c_k, $k \in \mathbf{Z}$, имеют следующую ассимптотику $c_k = \gamma(\alpha)|k|^{-1+\alpha} + O(k^{-3+\alpha})$, где $\gamma(\alpha) \ne 0$ (см.[Z, Глава 5].) Таким образом, особенность в 0 функции $|\sin \pi t|^{-\alpha}$ влияет на все коэффициенты Фурье. Всплесковые коэффициенты подвергаются влиянию особенности только, если интервал $I_m := [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, $m = 2^j + k$, $0 \le k < 2^j$, определяющий локализацию всплеска $g_m(t)$, находится близко к особенности. Более точно, для периодических всплесков, построенных на основе всплесков Мейера, имеем следующую оценку: если $2^j \le m < 2^{j+1}$

и $l := \min(m \Leftrightarrow 2^j, 2^{j+1} \Leftrightarrow m)$, то $|\alpha_m| \leq C_N 2^{j(\alpha-1/2)}/(1+l)^N$ для любого натурального N. Таким образом, большими будут только коэффициенты с номерами близкими к 2^j, $j \in \mathbf{N}$.

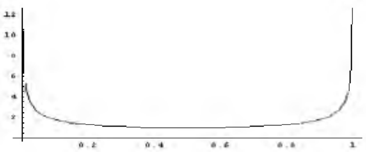


Рис.1. График $|\sin \pi t|^{-1/2}$.

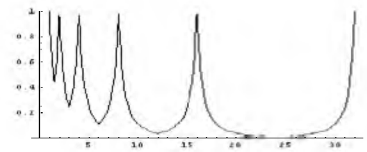


Рис.2. Оценка модулей всплесковых коэффициентов.

Рассмотрим патологические функции. Пусть $q > 1$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{k+1} > q\lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$, $\sum_0^\infty |\alpha_k| < \infty$, но $\alpha_k \lambda_k$ не стремится к 0. Известно [Z, Глава 2.], что при этих предположениях ряд $\sum_0^\infty \alpha_k \cos \lambda_k t$ определяет непрерывную нигде не дифференцируемую функцию.

Для всплесковых рядов имеем следующий результат.

Теорема 29.2 *Пусть $\{g_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ – периодические всплески, полученные из r-регулярного КМА с $r \geq 2$. Пусть $f(t) = \sum_0^\infty \alpha_m g_m(t)$ – непрерывная функция, дифференцируемая в точке t_0. Тогда для любого фиксированного $q \geq 1$ $\alpha_m = o(m^{-3/2})$ при m стремящемся к бесконечности и таком, что интервалы qI_m содержат точку t_0. Здесь $I_m := [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ при $m = 2^j + k, 0 \leq k < 2^j$, а qI_m - интервал с тем же, что и у I_m центром и длиной $q/2^j$.*

Доказательство. Результат легко следует из (19.11) и (25.12).□

Из теорем 29.1 и 29.2 следует

Следствие 29.1 *Пусть последовательность чисел α_m, $m \geq 1$ удовлетворяет неравенствам $C_1 m^{-3/2} \leq |\alpha_m| \leq C_2 m^{-3/2}$ для двух констант $_2 \geq C_1 > 0$. Тогда функция $f(t) = \sum_0^\infty \alpha_m g_m(t)$ принадлежит классу Зигмунда $\Lambda_\star = \mathbf{C}^1$, но нигде не дифференцируема.*

Функции Вейерштрасса являются частным случаем следствия 29.1. Пусть $\psi^{\cdot M}(t)$ - периодический всплеск Мейера. Прямые вычисления показывают, что $\sum_{-\infty}^\infty \psi^M(t \Leftrightarrow k) = \Leftrightarrow\sqrt{2}\cos 2\pi t$. Поэтому функция $f(t) = \sum_{j\in\mathbf{N}} \sum_0^{2^j-1} \alpha(j,k)\psi_j^{\cdot M}(t \Leftrightarrow \frac{k}{2^j})$ с коэффициентами $\alpha(j,k) = \alpha(j)$, не зависящих от k, равна $f(t) = \Leftrightarrow\sqrt{2}\sum_0^\infty 2^{j/2}\alpha(j)\cos(2\pi 2^j t)$. Таким образом, полный всплесковый ряд совпадает с лакунарным рядом Фурье.

Список литературы

[GM] Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J.Math.Anal.* 1984. 15. C.723-736.

[M] Meyer Y. *Ondelettes et operateurs.* Paris: Hermann. 1990.

[D] Daubechies. *Ten lectures on wavelets.* CBMS-NSF. Regional conference series in applied mathematics, SIAM. 1992.

[C] Chui C.K. *An Introduction to Wavelets.* New York: Academic Press. 1992.

[A] Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения. *УФН.* 166, 11. С.1145-1170.

[NS] Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основные конструкции всплесков. Фундаментальная и прикладная математика. 1997. 3, 4. С.999-1028.

[L] Лузин Н.Н. Sur une propriete des fonctions a carre sommable. *Bull.Calcutta Math.Soc.* 1930. 20. C.139-154.

[CW] Coifman R.R., Weiss G. Extentions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bull AMS.* 1977. 83. C.569-645.

[S] Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* Москва: Мир. 1973.

[Z] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды. I-II.* М.:Мир. 1965.

[Ca] Calderon A. P. Commutators of singular integral operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1965. 53. C.1092-1099. 15. C.723-736.

[Ca1] Calderon A. P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Math.* 1964. 24. C.113-190.

[G] Gabor D. Theory of communication. *J.IEE (London)* 1946. 93. C.429-457.

[La] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика, 3 изд.* М.:Наука. 1974.

[Lu] Лукашенко Т.П. Всплески на топологических группах. *ДАН.* 1993. 332, 1. С.15-17.

[H] Haar A. Zur theorie der orthogonalen functionensysteme. *Math.Annalen* 1910. 69. C.331-371.

[Ma] Mallat S. Multiresolution approximation and wavelets. *Trans.AMS* 1989. 315. C.69-88.

[BDR] de Boor C., DeVore R., Ron A. On the construction of multivariate (pre)wavelets. *Constr.Approx.* 1993. 2. 3. C.123-166.

[W] Whittaker J.T. *Interpolatory function theory.* Cambridge: Cambridge University Press. - 1935.

[M] Meyer Y. Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algebres d'operateurs. *Seminaire Bourbaki.* 1985-86. nr.662.

[B] Battle G. A block spin construction of ondelettes, Part II: QFT connection. *Comm. Math. Phys.* 1988. 114. C.93-102.

[L] Lemarie P.G. Une nouvelle base d'ondelettes de $L^2(\mathbf{R}^n)$. *J. de Math. Pures et Appl.* 1988. 67. C.227-236.

[R] Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа. Ч.2.* Москва: Наука. 1978.

[Sh] Schoenberg I.J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart.Appl.Math.* 1946. 4. C.45-99,112-141.

[St] Stromberg J.O. A modified Franklin system and higher order spline systems on $\mathbf{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces. *Conf. in honor of A.Zygmund, Vol. II.* 1982. C.475-493.

[D1] Daubechies I. Orthonormal basis of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* 1988. 46. C.909-996.

[Sm] Smith M.J.T.,Barnwell T.P. Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders. IEEE Trans.ASSP 1986. 34. C.434-441.

[Mi] Mintzer F. Filters for distortion-free two-band multirate filter banks. *IEEE Trans.Acoust.Speech Signal Process.* 1985. 33. C.626-630.

[V] Vetterli M. Filter banks allowing perfect reconstruction. *Signal Proc.* 1986. 10. C.219-244.

[Gr] Gröchenig K. Analyse multiéchelle et bases d'ondelettes. *C. R. Acad.Sci. Paris. Série I.* 1987. 305. C.13-17.

[FS] Fefferman C., Stein E.M. H^p spaces of several variables. *Acta Matematica.* 1972. 129. C.137-193.