Анри Пуанкаре

О НАУКЕ

Перевод с французского

Под редакцией
Л. С. ПОНТРЯГИНА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

ББК 22.1г
П88
УДК 51(091)

Пуанкаре А. О науке: Пер. с фр./Под ред. Л. С. Понтрягина.— 2-е изд., стер.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— 736 с.— ISBN 5-02-014328-6.

Включает четыре произведения выдающегося французского математика Анри Пуанкаре (1854—1912): «Наука и гипотеза», «Ценность науки», «Наука и метод» и «Последние мысли», которые посвящены рассмотрению путей познания в математике, механике и физике.

1-е изд.— 1983 г.

Для математиков, физиков, механиков, философов.

П $\frac{1602010000-003}{053(02)-90}$ 29-90

ISBN 5-02-014328-6

ОТ РЕДАКТОРА

Одно из самых ярких и глубоких впечатлений моих юных лет связано с работами великого французского ученого Анри Пуанкаре, посвященными научному творчеству и развитию науки. С годами это впечатление не потускнело. Я уверен, что для формирования научной молодежи, творчески работающей в области математики, физики, механики и, разумеется, философии, эти работы имеют непреходящее значение. Да и для всякого, кого волнуют философско-методологические проблемы развития науки, играющей такую важную роль в современном обществе, они полны живейшего интереса.

К сожалению, русские издания книг «Наука и гипотеза», «Ценность науки», «Наука и метод», «Последние мысли», о которых идет речь, давно уже стали библиографической редкостью. Лишь отдельные фрагменты из них были включены в трехтомное издание избранных трудов А. Пуанкаре, вышедшее в 1974 г.

Таковы причины, побудившие меня внести предложение о выпуске сборника упомянутых работ. Эта идея была поддержана Редакционно-издательским советом Академии наук СССР, утвердившим решение о включении сборника в план изданий Главной редакции физико-математической литературы.

В настоящее издание включены целиком книги «Наука и гипотеза» и «Ценность науки». Из книги «Наука и метод» исключен третий раздел, совпадающий со статьей «Динамика электрона», которая вошла в третий том избранных трудов А. Пуанкаре. Из книги «Последние мысли» исключена по той же причине шестая глава «Гипотеза квантов». Зато сборник дополнен докладом «Новая механика», прочитанным Пуанкаре в 1909 г. в Гёттингене, и посмертно изданной его статьей «Новые концепции материи», впервые публикуемой на русском языке (перевод В. К. Сусленко). При издании остальных работ использованы прежние переводы, текстологически обработанные с целью уточнения и исправления отдельных мест, улучшения стилистики и осовременивания русской терминологии. По книгам «Наука и метод» и «Последние мысли» эта работа проведена Т. Д. Блохинцевой и А. С. Шибановым. Что же касается двух первых книг Пуанкаре «Наука и гипотеза» и «Ценность науки», то была использована находившаяся в распоряжении издательства текстологическая обработка их переводов, выполненная ранее С. Г. Суворовым.

Необходимый критический разбор взглядов Пуанкаре с позиций марксистско-ленинской методологии дается в статье М. И. Панова, А. А. Тяпкина и А. С. Шибанова. Он органически соединен с описанием исторической обстановки создания работ Пуанкаре и читается с большим интересом.

Л. С. Понтрягин

НАУКА И ГИПОТЕЗА

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для поверхностного наблюдателя научная истина не оставляет места никаким сомнениям: логика науки непогрешима, и если ученые иногда ошибаются, то это потому, что они забывают логические правила.

Математические истины выводятся из небольшого числа очевидных предложений при помощи цепи непогрешимых рассуждений: эти истины присущи не только нам, но и самой природе. Они, так сказать, ставят границы свобод творца и позволяют ему делать выбор только между несколькими относительно немногочисленными решениями. Тогда нескольких опытов будет достаточно, чтобы раскрыть нам, какой выбор им сделан. Из каждого опыта с помощью ряда математических дедукций можно вывести множество следствий, и таким образом каждый из них позволит нам познать некоторый уголок Вселенной.

Вот в таком виде представляется широкой публике или учащимся, получающим первые познания по физике, происхождение научной достоверности. Так они понимают роль опыта и математики. Так же понимали ее сто лет тому назад и многие ученые, мечтавшие построить мир, заимствуя из опыта возможно меньше материала.

Но, вдумавшись, заметили, что математик, а тем более экспериментатор, не может обойтись без гипотезы. Тогда возник вопрос, достаточно ли прочны все эти построения, и явилась мысль, что при малейшем дуновении они могут рухнуть. Быть скептиком такого рода значит быть только поверхностным. Сомневаться во всем, верить всему — два решения, одинаково удобные: и то и другое избавляет нас от необходимости размышлять.

Итак, вместо того чтобы произносить огульный приговор, мы должны тщательно исследовать роль гипотезы; мы узнаем тогда, что она не только необходима, но чаще всего и законна. Мы увидим также, что есть гипотезы разного рода: одни допускают проверку и, подтвержденные опытом, становятся плодотворными истинами; другие, не приводя нас к ошибкам, могут быть полезными, фиксируя нашу мысль, наконец, есть гипотезы, только кажущиеся таковыми, но сводящиеся к определениям или к замаскированным соглашениям.

Последние встречаются главным образом в науках математических и соприкасающихся с ними. Отсюда именно и проистекает точность этих наук; эти условные положения представляют собой продукт свободной деятельности нашего ума, который в этой области не знает препятствий. Здесь наш ум может утверждать, так как он здесь предписывает; но его предписания налагаются на нашу науку, которая без них была бы невозможна, они не налагаются на природу. Однако произвольны ли эти предписания? Нет; иначе они были бы бесплодны. Опыт предоставляет нам свободный выбор, но при этом он руководит нами, помогая выбрать путь, наиболее удобный. Наши предписания, следовательно, подобны предписаниям абсолютного, но мудрого правителя, который советуется со своим государственным советом.

Некоторые были поражены этим характером свободного соглашения, который выступает в некоторых основных началах наук. Они предались неумеренному обобщению и к тому же забыли, что свобода не есть произвол. Таким образом, они пришли к тому, что называется *номинализмом*, и пред ними возник вопрос, не одурачен ли ученый своими определениями и не является ли весь мир, который он думает открыть, простым созданием его прихоти [1]). При таких условиях наука была бы достоверна, но она была бы лишена значения.

Если бы это было так, наука была бы бессильна. Но мы постоянно видим перед своими глазами ее плодотворную работу. Этого не могло бы быть, если бы она не открывала нам чего-то реального; но то, что она может постичь, не суть вещи в себе, как ду-

[1]) См. Le Roy. Science et Philosophie//Revue de Metaphysique et de Morale. — 1901.

мают наивные догматики, а лишь отношения между вещами; вне этих отношений нет познаваемой действительности.

Таково заключение, к которому мы придем; но для этого нам придется подвергнуть беглому обзору ряд наук от арифметики и геометрии до механики и экспериментальной физики.

Какова природа умозаключения в математике? Действительно ли она дедуктивна, как думают обыкновенно? Более глубокий анализ показывает нам, что это не так, — что в известной мере ей свойственна природа индуктивного умозаключения и потому-то она столь плодотворна. Но от этого она не теряет своего характера абсолютной строгости, что прежде всего мы и покажем.

Познакомившись ближе с одним из орудий, которые математика дает в руки естествоиспытателя, мы обратимся к анализу другого основного понятия — понятия математической величины. Находим ли мы ее в природе или сами вносим ее в природу? И в последнем случае не подвергаемся ли мы риску все извращать? Сличая грубые данные наших чувств и то крайне сложное и тонкое понятие, которое математики называют величиной, мы вынуждены признать их различие; следовательно, эту раму, в которую мы хотим заключить все, создали мы сами; но мы создали ее не наобум, мы создали ее, так сказать, по размеру и потому-то мы можем заключать в нее явления, не искажая в существенном их природы.

Другая рама, которую мы налагаем на мир, — это пространство. Откуда происходят первоначальные принципы геометрии? Предписываются ли они логикой? Лобачевский, создав неевклидовы геометрии, показал, что нет. Не открываем ли мы пространства при помощи наших чувств? Тоже нет, так как то пространство, которому могут научить нас наши чувства, абсолютно отлично от пространства геометра. Проистекает ли вообще геометрия из опыта? Глубокое исследование покажет нам, что нет. Мы заключим отсюда, что эти принципы суть положения условные; но они не произвольны, и если бы мы были перенесены в другой мир (я называю его неевклидовым миром и стараюсь изобразить его), то мы остановились бы на других положениях.

В механике мы придем к аналогичным заключениям и увидим, что принципы этой науки, хотя и более непосредственно опираются на опыт, все-таки еще разделяют условный характер геометрических постулатов. До сих пор преобладает номинализм; но вот мы приходим к физическим наукам в собственном смысле. Здесь картина меняется; мы встречаем гипотезы иного рода и видим всю их плодотворность. Без сомнения, они с первого взгляда кажутся нам хрупкими, и история науки показывает нам, что они недолговечны; но они не умирают целиком, и от каждой из них нечто остается. Это нечто и надо стараться распознать, потому что здесь, и только здесь, лежит истинная реальность.

Метод физических наук основывается на индукции, заставляющей нас ожидать повторения какого-нибудь явления, когда воспроизводятся обстоятельства, при которых оно произошло в первый раз. Если бы могли повториться вместе *все* эти обстоятельства, то этот принцип мог бы быть применим без всякого опасения; но этого никогда не случится: всегда некоторые из обстоятельств будут отсутствовать. Абсолютно ли мы уверены, что они не имеют значения? Конечно, нет. Это может быть вероятно, но не может быть строго достоверно. Отсюда — значительная роль, которую играет в физических науках понятие вероятности. Таким образом, исчисление вероятностей не есть только забава или руководство для игроков в баккара, и мы должны стараться точнее обосновать его принципы. В этом отношении я мог дать лишь неполные результаты, поскольку тот неясный инстинкт, который руководит нами при решении вопроса о вероятности, мало поддается анализу.

Изучив условия, в которых работает физик, я счел нужным показать его за работой. Для этого я взял несколько примеров из истории оптики и электричества. Мы увидим, откуда вышли идеи Френеля, Максвелла и какие гипотезы бессознательно создавали Ампер и другие основатели электродинамики.

Часть I

ЧИСЛО И ВЕЛИЧИНА

Глава I

О ПРИРОДЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ

I

Самая возможность математического познания кажется неразрешимым противоречием. Если эта наука является дедуктивной только по внешности, то откуда у нее берется та совершенная строгость, которую никто не решается подвергать сомнению? Если, напротив, все предложения, которые она выдвигает, могут быть выведены один из других по правилам формальной логики, то каким образом математика не сводится к бесконечной тавтологии? Силлогизм не может нас научить ничему существенно новому, и если все должно вытекать из закона тождества, то все также должно к нему и приводиться. Но неужели возможно допустить, что изложение всех теорем, которые заполняют столько томов, есть не что иное, как замаскированный прием говорить, что A есть A!

Конечно, можно добраться до аксиом, которые лежат в источнике всех этих рассуждений. И если, с одной стороны, держаться того мнения, что их нельзя свести к закону противоречия, с другой — не желать видеть в них только факты опыта, которые не могли бы обладать характером математической необходимости, то имеется еще надежда отнести их к числу синтетических априорных суждений. Но это не значит разрешить затруднение; это значит только дать ему название: даже если бы природа синтетических суждений перестала быть для нас тайной, все же противоречие не было бы устранено, оно было бы только отодвинуто; силлогистическое умозаключение неспособно прибавить что-либо к тем данным, которые ему предоставляются; эти данные сводятся к нескольким аксиомам, и, кроме них, ничего нового нельзя было бы найти в заключениях.

Никакая теорема не должна была бы являться новой, если в ее доказательство не входила бы новая аксиома; умозаключение могло бы только возвращать нам истины, непосредственно очевидные, имеющие источником интуицию; оно являлось бы только промежуточным пустословием. Тогда, пожалуй, возник бы вопрос: не служит ли вообще силлогистический аппарат единственно для того, чтобы маскировать делаемые нами заимствования?

Противоречие поразит нас еще больше, если мы откроем какую-нибудь математическую книгу: на каждой странице автор будет выражать намерение обобщить уже известную теорему. Значит ли это, что математический метод ведет от частного к общему, и каким образом можно называть его тогда дедуктивным?

Наконец, если бы наука о числе была чисто аналитической или могла вытекать аналитически из небольшого числа синтетических суждений, то достаточно сильный ум мог бы, по-видимому, с первого взгляда заметить все содержащиеся в них истины; более того: можно было бы даже надеяться, что когда-нибудь для их выражения будет изобретен язык настолько простой, что эти истины будут непосредственно доступны и заурядному уму.

Если отказаться от допущения этих выводов, то необходимо придется признать, что математическое умозаключение само в себе заключает род творческой силы и что, следовательно, оно отличается от силлогизма.

И отличие это должно быть глубоким. Так, например, мы не найдем ключа к тайне в многократном применении того правила, по которому одна и та же операция, одинаково примененная к двум равным числам, дает тождественные результаты.

Все эти формы умозаключения — все равно, приводимы ли они к силлогизму в собственном смысле или нет, — сохраняют аналитический характер и поэтому являются бессильными.

II

Вопросы этого рода обсуждаются давно. Еще Лейбниц пытался доказать, что 2 да 2 составляют 4; рассмотрим вкратце его доказательство.

Я предполагаю, что определены число 1 и операция $x+1$, состоящая в прибавлении 1 к данному числу x. Эти определения, каковы бы они ни были, не будут входить в последующие рассуждения.

Я определяю затем числа 2, 3 и 4 равенствами:

$$(1)\quad 1+1=2;\qquad (2)\quad 2+1=3;\qquad (3)\quad 3+1=4.$$

Я определяю также операцию $x+2$ соотношением

$$(4)\quad x+2=(x+1)+1.$$

Установив это, мы имеем

$$\begin{aligned} 2+2&=(2+1)+1 && \text{(определение (4))},\\ (2+1)+1&=3+1 && \text{(определение (2))},\\ 3+1&=4 && \text{(определение (3))}, \end{aligned}$$

откуда

$$2+2=4 \text{ (что и требовалось доказать).}$$

Нельзя отрицать того, что это рассуждение является чисто аналитическим. Но спросите любого математика, и он вам скажет: «Это, собственно говоря, не доказательство, а проверка». Мы просто ограничились сближением двух чисто условных определений и констатировали их тождество; ничего нового мы не узнали. *Проверка* тем именно и отличается от истинного доказательства, что, будучи чисто аналитической, она остается бесплодной. Она бесплодна, потому что заключение есть только перевод предпосылок на другой язык. Истинное же доказательство, наоборот, плодотворно, ибо в нем заключение является в некотором смысле более общим, чем посылки.

Равенство $2+2=4$ могло подлежать проверке только потому, что оно является частным случаем. Всякое частное выражение в математике всегда может быть таким образом проверено. Но если бы математика должна была сводиться к ряду таких проверок, то она не была бы наукой. Ведь шахматист, например, не создает еще науки тем, что он выигрывает партию. Всякая наука есть наука об общем.

Можно даже сказать, что точные науки имеют своей задачей избавить нас от необходимости таких прямых проверок.

III

Итак, посмотрим на математика за его делом и постараемся объяснить себе успешность его приемов. Задача эта не лишена трудностей; недостаточно открыть случайно попавшееся сочинение и проанализировать там какое-нибудь доказательство.

Мы должны прежде всего исключить геометрию, где вопрос усложняется трудными задачами, относящимися к роли постулатов, к природе и к происхождению понятия пространства. По аналогичным основаниям мы не можем обращаться и к анализу бесконечно малых. Нам надо искать математическую мысль там, где она осталась чистой, т. е. в арифметике.

Надо еще продолжить отбор; в высших отделах теории чисел первоначальные математические понятия подверглись столь глубокой разработке, что становится трудно их анализировать.

Следовательно, именно в началах арифметики мы должны надеяться найти искомое объяснение; но как раз в доказательстве наиболее элементарных теорем авторы классических сочинений обнаружили меньше всего точности и строгости. Не надо ставить им это в вину; они подчинялись необходимости; начинающие не подготовлены к настоящей математической строгости; они усмотрели бы в ней только пустые и скучные тонкости; было бы бесполезной тратой времени пытаться скорее внушить им бо́льшую требовательность; надо, чтобы они быстро, без остановок, прошли путь, который некогда медленно проходили основатели науки.

Почему же нужна столь продолжительная подготовка, чтобы привыкнуть к этой совершенной строгости, которая, кажется, должна была бы быть от природы присущей всякому нормальному уму? Это логическая и психологическая проблема, которая достойна обсуждения.

Но мы не будем останавливаться на ней; она является посторонней для нашего предмета. Я буду лишь помнить, что нам надо, из опасения не достигнуть цели, привести заново доказательства наиболее элементарных теорем и вместо той грубой формы, которую им придают, чтобы не утомить начинающих, придать такую, которая может удовлетворить ученого-математика.

Определение сложения. Я предполагаю, что предварительно была определена операция $x+1$, состоящая в прибавлении числа 1 к данному числу x. Это определение, каково бы оно ни было, не будет играть никакой роли в последующих рассуждениях.

Дело идет теперь об определении операции $x+a$, состоящей в прибавлении числа a к данному числу x.

Предположим, что определена операция

$$x+(a-1).$$

Тогда операция $x+a$ будет определена равенством

$$x+a=[x+(a-1)]+1. \tag{1}$$

Таким образом, мы узнáем, что такое $x+a$, когда будем знать, что такое $x+(a-1)$; а так как я вначале предположил, что известно, что такое $x+1$, то можно определить последовательными «рекурренциями» операции $x+2$, $x+3$ и т. д.[1])

Это определение заслуживает некоторого внимания, так как оно имеет особенную природу, отличающую его от определения чисто логического; в самом деле, равенство (1) содержит бесчисленное множество различных определений, и каждое из них имеет смысл только тогда, когда известно другое, ему предшествующее.

Свойства сложения. *Ассоциативность.* Я утверждаю, что

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

В самом деле, теорема справедлива для $c=1$; в этом случае она изображается равенством

$$a+(b+1)=(a+b)+1.$$

---

[1]) Термином «рекурренция» (recurrence) обозначается логическая операция возврата к своему началу. — *Примеч. ред.*

А это — помимо различия в обозначениях — есть не что иное, как равенство (1), при помощи которого я только что определял сложение.

Предположим, что теорема будет справедлива для $c = \gamma$; я говорю, что она будет справедлива и для $c = \gamma + 1$; пусть, в самом деле,

$$(a + b) + \gamma = a + (b + \gamma);$$

отсюда следует

$$[(a + b) + \gamma] + 1 = [a + (b + \gamma)] + 1$$

или в силу определения (1)

$$(a + b) + (\gamma + 1) = a + (b + \gamma + 1) = a + [b + (\gamma + 1)],$$

а это показывает с помощью ряда чисто аналитических выводов, что теорема верна для $\gamma + 1$.

Но так как она верна для $c = 1$, то последовательно усматриваем, что она верна для $c = 2$, для $c = 3$ и т. д.

Коммутативность. 1. Я утверждаю, что

$$a + 1 = 1 + a.$$

Теорема, очевидно, справедлива для $a = 1$; путем чисто аналитических рассуждений можно проверить, что если она справедлива для $a = \gamma$, то она будет справедлива для $a = \gamma + 1$; но раз она справедлива для $a = 1$, то она будет справедлива и для $a = 2$, для $a = 3$ и т. д.; это выражают, говоря, что высказанное предложение доказано путем рекурренции.

2. Я утверждаю, что

$$a + b = b + a.$$

Теорема только что была доказана для $b = 1$; можно аналитически *проверить*, что если она справедлива для $b = \beta$, то она будет справедлива для $b = \beta + 1$.

Таким образом, предложение доказано путем рекурренции.

Определение умножения. Мы определим умножение при помощи равенств

$$a \times 1 = a,$$
$$a \times b = [a \times (b - 1)] + a. \qquad (2)$$

Равенство (2), как и равенство (1), заключает в себе бесчисленное множество определений; после того как дано определение $a \times 1$, оно позволяет определить последовательно $a \times 2$, $a \times 3$ и т. д.

Свойства умножения. *Дистрибутивность.* Я утверждаю, что

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c).$$

Мы проверяем аналитически справедливость этого равенства для $c = 1$; а потом проверяем, что если теорема справедлива для $c = \gamma$, то она будет справедлива и для $c = \gamma + 1$.

Предложение опять доказано рекурренцией.

Коммутативность. 1. Я утверждаю, что

$$a \times 1 = 1 \times a.$$

Теорема очевидна для $a = 1$.

Проверяем аналитически, что если она справедлива для $a = \alpha$, то она будет справедлива и для $a = \alpha + 1$.

2. Я утверждаю, что

$$a \times b = b \times a.$$

Теорема только что была доказана для $b = 1$. Аналитически проверяем, что если она справедлива для $b = \beta$, то она будет справедлива и для $b = \beta + 1$.

IV

Здесь я прерываю этот монотонный ряд рассуждений. Но именно эта монотонность и способствовала лучшему выделению того однообразного процесса, который мы находим на каждом шагу.

Этот процесс есть доказательство путем рекуррениции. Сначала формулируется теорема для $n = 1$; потом доказывается, что если она справедлива для $n - 1$, то она справедлива и для n, и отсюда выводится заключение о справедливости ее для всех целых чисел.

Мы только что видели, как можно воспользоваться этим для доказательства правил сложения и умножения, т. е. правил алгебраического вычисления; это вычисление есть орудие преобразования, которое применяется в гораздо большем числе разнообразных комбинаций, чем простой силлогизм; но это орудие еще чисто аналитическое, оно неспособно научить нас ничему новому. Если бы математика не имела ничего другого, она тотчас же остановилась бы в своем развитии; но она получает новое средство в том же процессе, т. е. в рассуждении путем рекурренции, и потому может непрерывно продолжать свое поступательное движение.

В каждом шаге, если его хорошенько рассмотреть, мы находим этот способ рассуждения — или в той простой форме, которую мы только что ему придали, или в форме более или менее видоизмененной.

В нем, следовательно, по преимуществу заключается математическое рассуждение, и нам следует изучить его ближе.

V

Существенная черта умозаключения путем рекурренции заключается в том, что оно содержит в себе бесчисленное множество силлогизмов, сосредоточенных, так сказать, в одной формуле.

Чтобы лучше можно было себе это уяснить, я сейчас расположу эти силлогизмы один за другим в виде некоторого каскада. Это, в сущности,— гипотетические силлогизмы.

Теорема верна для числа 1.

Если же она справедлива для 1, то она справедлива для 2.

Следовательно, она верна для 2.

Если же она верна для 2, то она верна для 3.

Следовательно, она верна для 3 и т. д.

Очевидно, что заключение каждого силлогизма служить следующему меньшей посылкой.

Бóльшие посылки всех наших силлогизмов могут быть приведены к одной формуле:

Если теорема справедлива для $n - 1$,
то она справедлива для n.

Таким образом, очевидно, что в рассуждении путем рекурренции ограничиваются выражением меньшей посылки первого силлогизма и общей формулы, которая в виде частных случаев содержит в себе все бóльшие посылки.

Этот никогда не оканчивающийся ряд силлогизмов оказывается приведенным к одной фразе в несколько строк.

Теперь легко понять, почему всякое частное следствие, вытекающее из теоремы, может быть, как я изложил выше, проверено чисто аналитическим процессом.

Если, вместо того чтобы доказывать справедливость нашей теоремы для всех чисел, мы желаем обнаружить ее справедливость, например, только для числа 6, для нас будет достаточно обосновать 5 первых силлогизмов нашего последовательного ряда; если бы мы пожелали доказать теорему для числа 10, надо было бы взять их 9; для большого числа надо было бы взять их еще больше; но как бы велико ни было это число, мы всегда в конце концов его достигли бы, и аналитическая проверка была бы возможна.

Однако как бы далеко мы ни шли, мы никогда не могли бы дойти до общей применимой ко всем числам теоремы, которая одна только и может быть предметом науки. Чтобы ее достигнуть, понадобилось бы бесконечно большое число силлогизмов — нужно перескочить бездну, которую никогда не будет в состоянии заполнить терпение аналитика, ограниченное одними средствами формальной логики.

Вначале я поставил вопрос, почему нельзя было бы вообразить ум, достаточно мощный для того, чтобы сразу подметить всю совокупность математических истин.

Ответ теперь нетруден; шахматный игрок может рассчитать вперед четыре, пять ходов, но, каким бы необыкновенным его ни представляли, он всегда предусмотрит только конечное число ходов; если он применит свои способности к арифметике, то он не будет в состоянии подметить в ней общих истин путем одной непосредственной интуиции; он не будет в состоянии обойтись без помощи рассуждения путем рекурренции при доказательстве самой незначительной теоремы, ибо это и есть то орудие, которое позволяет переходить от конечного к бесконечному.

Это орудие всегда полезно, ибо оно позволяет нам сразу пройти любое число ступеней и избавляет нас от долгих, скучных и однообразных проверок, которые скоро стали бы практически невыполнимыми.

Но оно делается неизбежным, раз мы имеем в виду общую теорему, к которой аналитическая проверка нас непрерывно приближала бы, никогда не позволяя ее достигнуть.

В этой области арифметики кто-нибудь, пожалуй, счел бы себя далеким от анализа бесконечно малых; между тем мы сейчас видели, что идея математической бесконечности уже здесь играет весьма важную роль, и без нее не было бы арифметики как науки, так как не было бы идеи общего.

VI

Суждение, на котором основан способ рекурренций, может быть изложено в других формах; можно сказать, например, что в бесконечно большом собрании различных целых чисел всегда есть одно, которое меньше всех других. Можно легко переходить от одного выражения к другому и таким образом создавать иллюзию доказательства законности рассуждения путем рекурренции. Но в конце концов всегда придется остановиться; мы всегда придем к недоказуемой аксиоме, которая, в сущности, будет не что иное, как предложение, подлежащее доказательству, но только переведенное на другой язык.

Таким образом, нельзя не прийти к заключению, что способ рассуждения путем рекурренции несводим к закону противоречия.

Это правило не может происходить и из опыта; опыт нас может научить только тому, что это правило справедливо, например, для 10, для 100 первых чисел; он не может простираться на бесконечный ряд чисел, а лишь на бóльшую или меньшую часть этого ряда, всегда ограниченную.

Если бы дело шло только об этом, закон противоречия был бы достаточен — он всегда позволил бы нам развить столько силлогизмов, сколько мы желаем; лишь когда дело идет об охвате бесконечности одной формулой, лишь перед бесконечным рушится этот закон; но там становится бессилен и опыт. Это правило, недоступное ни для аналитического, ни для опытного доказательства, есть истинный образец синтетического априорного суждения. С другой стороны, нельзя видеть в нем только соглашение, как в некоторых постулатах геометрии.

Почему же это суждение стоит перед нами с непреодолимой очевидностью? Здесь сказывается только утверждение могущества разума, который способен постичь бесконечное повторение одного и того же акта, раз этот акт оказался возможным однажды. В силу этого могущества разум обладает непосредственной интуицией, а опыт может быть для него только поводом воспользоваться ею и осознать ее.

Но скажут: если чистый опыт не может оправдать суждения путем рекурренции, то будет ли то же самое относительно опыта, поддерживаемого индукцией? Мы последовательно видим, что теорема верна для чисел 1, 2, 3 и т. д.; мы говорим: *закон очевиден*, и присваиваем ему тот же ранг, какой свойствен всякому физическому закону, опирающемуся на наблюдения, число которых очень велико, но все же ограничено.

Нельзя не признать, что здесь существует поразительная аналогия с обычными способами индукции. Однако есть и существенное различие. Индукция, применяемая в физических науках, всегда недостоверна, потому что она опирается на веру во всеобщий порядок Вселенной — порядок, который находится вне нас. Индукция математическая, т. е. доказательство путем рекурренции, напротив, представляется с необходимостью, потому что она есть только подтверждение одного из свойств самого разума.

VII

Выше я сказал, что математики стараются всегда *обобщать* полученные ими предложения; например, мы только что доказали равенство

$$a+1=1+a,$$

а затем воспользовались им для обоснования равенства

$$a+b=b+a,$$

которое, очевидно, является более общим.

Таким образом, математика, как и другие науки, может идти от частного к общему.

Это — факт, который в начале этого сочинения казался нам непонятным, но который теряет всю таинственность для нас, после того как была установлена аналогия между доказательством путем рекурренции и между обычной индукцией.

Нет сомнения, что математическое рассуждение посредством рекурренции и индуктивное физическое рассуждение покоятся на различных основаниях; но ход их параллелен — они движутся в том же направлении, т. е. от частного к общему.

Рассмотрим это несколько ближе. Чтобы доказать равенство

$$a+2=2+a,$$

нам достаточно применить два раза правило

$$a+1=1+a \tag{1}$$

и написать

$$a+2=a+1+1=1+a+1=1+1+a=2+a. \tag{2}$$

Однако равенство (2), выведенное таким образом чисто аналитически из равенства (1), не есть просто его частный случай: это нечто иное.

Поэтому нельзя сказать, что мы даже в действительно аналитической и дедуктивной части математических рассуждений двигались от общего к частному в обычном смысле слова.

Два члена равенства (2) суть просто сочетания, более сложные, чем два члена равенства (1), и анализ служит только для отделения элементов, которые входят в эти сочетания, и для изучения их соотношений.

Следовательно, математики действуют, применяя процесс «конструирования»; они «конструируют» сочетания все более и более сложные. Возвращаясь затем путем анализа этих сочетаний — этих, так сказать, совокупностей — к их первоначальным элементам, они раскрывают отношения этих элементов и выводят отсюда отношения самих совокупностей.

Это — процесс чисто аналитический, однако он направлен не от общего к частному, ибо совокупности, очевидно, не могут быть рассматриваемы как нечто более частное, чем их составные элементы.

Этому процессу «конструирования» справедливо приписывали большое значение и желали в нем видеть необходимое и достаточное условие прогресса точных наук.

Несомненно, что оно необходимо; но оно не является достаточным.

Для того чтобы конструирование могло быть полезным, чтобы оно не было бесплодным трудом для разума, чтобы оно могло служить опорой для дальнейшего поступательного движения, надо, чтобы оно прежде всего обладало некоторым родом единства, которое позволяло бы видеть в нем нечто иное, чем простое наращивание составных частей. Говоря точнее, надо, чтобы в анализе конструкции выявлялось некоторое преимущество сравнительно с анализом ее составных элементов.

В чем же может заключаться это преимущество?

Зачем, например, надо рассуждать не об элементарных треугольниках, а о многоугольнике, который ведь всегда разложим на треугольники?

Это делается потому, что существуют свойства, принадлежащие многоугольникам с каким угодно числом сторон, которые можно непосредственно применить к любому частному многоугольнику.

Весьма часто, напротив, только ценой продолжительных усилий можно бывает найти эти свойства, изучая непосредственно соотношения элементарных треугольников. Знание общей теоремы освобождает нас от этих усилий.

Если четырехугольник есть не что иное, чем соединенные рядом два треугольника, то это потому, что он принадлежит к роду многоугольников.

Конструирование становится интересным только тогда, когда его можно сравнить с другими аналогичными конструкциями, образующими виды того же родового понятия.

Необходимо еще, чтобы было возможно доказывать родовые свойства, не будучи вынужденным обосновывать их последовательно для каждого вида.

Чтобы достигнуть этого, необходимо вновь подняться от частного к общему, пройдя одну или несколько ступеней.

Аналитический процесс «конструирования» не вынуждает нас опускаться ниже, а оставляет все на том же уровне.

Мы можем подняться выше только благодаря математической индукции, которая одна может научить нас чему-либо новому. Без помощи такой индукции, отличной в известных отношениях от индукции физической, но столь же плодотворной, как и последняя, процесс конструирования был бы бессилен создать науку.

Заметим, наконец, что эта индукция возможна только тогда, когда одна и та же операция может повторяться бесконечное число раз. Вот причина, почему теория шахматной игры никогда не может стать наукой; там различные ходы одной и той же партии не похожи друг на друга.

Глава II

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА И ОПЫТ

Если вы хотите знать, что понимают математики под непрерывностью, то ответа следует спрашивать не у геометра. Геометр всегда так или иначе старается представить себе фигуры, которые он изучает, но его представления являются для него только орудием; занимаясь геометрией, он употребляет пространство так же, как употребляет мел; поэтому следует остерегаться приписывать слишком большое значение случайностям, которые часто имеют не больше значения, чем белизна мела.

Чистому аналитику нечего бояться этой опасности. Он освободил математическую науку от всех посторонних элементов и может ответить на ваш вопрос: что представляет собой на самом деле та непрерывность, о которой рассуждают математики? Многие из них, умеющие размышлять о своей науке, уже сделали это, как например Таннери в своем «Введении в теорию функций одной переменной».

Будем исходить из последовательности целых чисел; между двумя соседними числами вставим одно или несколько промежуточных чисел, потом между этими числами вставим еще новые и так далее до бесконечности. Мы будем иметь, таким образом, неограниченное число членов: это будут числа, называемые дробно-рациональными или соизмеримыми. Но этого еще недостаточно; между этими членами, число которых однако уже бесконечно, надо вставить еще другие, так называемые иррациональные или несоизмеримые.

Прежде чем идти дальше, сделаем одно важное замечание. Непрерывность, понимаемая таким образом, есть не более чем собрание отдельных единиц, расположенных в известном порядке, правда, в бесконечном числе, но *внешних* друг другу. Это не соответствует обычной концепции, которая между элементами непрерывного предполагает некоторый род внутренней связи, составляющей из них целое,— где не точка предшествует существованию линии, а линия предшествует существованию точки. От знаменитой формулы: непрерывность есть единство во множественности — остается только множественность; единство исчезло. Это обстоятельство не лишает аналитиков основания определять свою непрерывность так, как они это делают, ибо, рассуждая именно об этом, они постоянно спорят друг с другом по поводу строгости. Но для нас достаточно указать, что настоящая математическая непрерывность есть нечто совсем иное, чем непрерывность физиков или непрерывность метафизиков.

Быть может, скажут, что математики, которые довольствуются этим определением, обмануты словами, что надо было бы точно сказать, что представляет собой каждый из промежуточных членов, выяснить, как надо их вставить, и показать, что эта операция возможна. Но это было бы несправедливо; единственным свойством этих членов, входящим в рассуждения о них[1]), является свойство находиться прежде или после таких-то других членов; поэтому оно только и должно входить в их определение.

Таким образом, нечего беспокоиться о том, каким способом следует вставлять промежуточные члены; с другой стороны, никто не усомнится, что эта операция возможна, если только не забывать, что это последнее слово на математическом языке означает просто: свободна от противоречия.

Все же наше определение непрерывности не полно, и я возвращаюсь к нему после этого слишком длинного отступления.

[1]) Сюда входят специальные соглашения, служащие для определения сложения; о них мы будем говорить ниже.

Определение несоизмеримых величин. Математики Берлинской школы, и в частности Кронекер, занимаются построением этой непрерывной последовательности дробных и иррациональных чисел, не пользуясь никаким другим материалом, кроме целого числа. С этой точки зрения математическая непрерывность явится чистым созданием разума, в котором опыт совершенно не участвует.

Понятие рационального числа для них не представляет затруднения; предметом их особенных усилий служит определение несоизмеримого числа. Но прежде чем воспроизвести здесь это определение, я должен сделать одно замечание, чтобы предупредить удивление, которое оно не замедлило бы вызвать у читателей, мало знакомых с математическими обычаями.

Математики изучают не предметы, а лишь отношения между ними; поэтому для них безразлично, будут ли одни предметы замещены другими, лишь бы только не менялись их отношения. Для них не важно материальное содержание; их интересует только форма.

Кто забудет это, тот не поймет, что Дедекинд под именем *несоизмеримого числа* разумеет простой символ, т. е. нечто, совершенно отличное от представления, которое создают себе обыкновенно относительно величины, считая ее измеряемой, почти осязаемой.

Итак, вот каково определение Дедекинда: *соизмеримые числа могут быть бесконечным числом способов распределены на два класса при соблюдении условия, что любое число первого класса должно быть больше любого числа второго класса.*

Может случиться, что между числами первого класса будет одно, которое меньше всех других; например, если поместим в первый класс все числа, бо́льшие чем 2, и само 2, а во второй класс — все числа, меньшие чем 2, то ясно, что 2 будет наименьшее из всех чисел первого класса. Число 2 может быть принято в качестве символа этого распределения.

Можно представить себе, напротив, что между числами второго класса имеется одно, большее всех других; так, это имеет место, если первый класс заключает все числа, бо́льшие чем 2, а второй — все числа, меньшие чем 2, и само 2. Здесь опять число 2 могло бы быть избрано как символ этого распределения.

Но может также случиться, что нельзя будет найти ни в первом классе число, меньшее чем все другие, ни во втором — число, большее чем все другие. Предположим, например, что в первом классе помещают все соизмеримые числа, квадрат которых больше чем 2, а во втором все те, квадрат которых меньше чем 2. Известно, что нет такого числа, квадрат которого в точности был бы равен 2. И в первом классе не будет, очевидно, числа, меньшего чем все другие, потому что, как бы ни был квадрат некоторого числа близок к 2, всегда можно найти соизмеримое число, квадрат которого будет еще ближе к 2.

С точки зрения Дедекинда, несоизмеримое число

$$\sqrt{2}$$

есть не что иное, как символ этого особого способа распределения соизмеримых чисел; таким образом, каждому способу распределения соответствует одно число — соизмеримое или несоизмеримое,— которое и служит символом распределения.

Но удовольствоваться этим значило бы совсем забыть о происхождении этих символов; остается еще выяснить, каким образом математики пришли к тому, что приписали им особого рода конкретное существование, и, с другой стороны, не появляется ли трудность уже и в отношении дробных чисел? Могли бы мы иметь понятие об этих числах, если бы заранее не знали о материи, которую мы понимаем как нечто делимое до бесконечности, т. е. как непрерывность?

Физическая непрерывность. Итак возникает вопрос, не заимствовано ли понятие математической непрерывности просто из опыта. Если бы это было так, то это означало бы, что данные непосредственного опыта, каковыми являются наши ощущения, доступны измерению.

Может явиться искушение поверить, что это и в самом деле так, потому что в последнее время пытались измерить их, и был даже сформулирован закон, известный под именем закона Фехнера, по которому ощущение пропорционально логарифму раздражения.

Но если ближе присмотреться к опытам, которыми пытались обосновать этот закон, то можно прийти к совершенно противоположному заключению. Например, было замечено, что вес A, равный 10 граммам, и вес B, равный 11 граммам, производят тождественные ощущения, что вес B нельзя отличить от веса C, равного 12 граммам; но что вес A можно легко отличить от веса C. Таким образом, непосредственные результаты опыта могут быть выражены следующими соотношениями:

$$A = B, \quad B = C, \quad A < C,$$

которые можно рассматривать как формулу физической непрерывности. Эта формула заключает в себе недопустимое разногласие с законом противоречия; необходимость избежать его и заставила нас изобрести идею математической непрерывности.

Итак, необходимо заключить, что это понятие всецело создано разумом, но что опыт доставил ему повод для этого.

Мы не можем допустить, что два количества, равные одному и тому же третьему, не равны между собой; и это обстоятельство вынуждает нас предположить, что A отличается от B и B от C, но несовершенство наших чувств не позволило нам этого заметить.

Создание математической непрерывности. *Первая стадия.* До сих пор, чтобы изобразить действительность, нам достаточно было бы вставить между A и B небольшое число отдельных членов. Но что произойдет, если мы для возмещения несовершенства наших чувств прибегнем к какому-нибудь инструменту, например, если мы воспользуемся микроскопом? Члены A и B, которых ранее мы не могли отличить друг от друга, теперь нам представятся различными; но между A и B, которые стали различимыми, поместится новый член D, который мы не будем в состоянии отличить ни от A ни от B. Несмотря на употребление самых совершенных методов, непосредственные результаты нашего опыта будут всегда сохранять свойства физической непрерывности с присущим ей противоречием.

Мы освободимся от этого противоречия только тем, что будем беспрестанно помещать новые члены между членами, уже *различенными*, и эта операция должна будет продолжаться до бесконечности. Мы могли бы подумать, что она будет остановлена, если мы представим себе некое орудие, достаточно мощное для разложения физической непрерывности на раздельные элементы, подобно тому как телескоп разлагает Млечный Путь на звезды. Но мы не можем так думать. В самом деле, инструментами мы пользуемся всегда при помощи наших чувств; так, увеличенное микроскопом изображение мы рассматриваем нашим глазом, следовательно, оно должно всегда сохранять характер зрительного ощущения, а потому сохранять и характер физической непрерывности.

Длина, рассматриваемая непосредственно, ничем не отличается от половины этой длины, удвоенной микроскопом. Целое однородно с частью; здесь заключается новое противоречие, или скорее это было бы противоречием, если бы число членов предполагалось конечным; в самом деле, ясно, что часть, которая содержит менее членов сравнительно с целым, не может быть подобной целому.

Противоречие снимается лишь тогда, когда число членов рассматривается как бесконечное; ничто, например, не мешает рассматривать совокупность целых чисел подобной совокупности четных чисел, которая представляет собою однако только часть всего ряда; в самом деле, каждому целому числу соответствует в этом ряду одно четное число, которым является то же число, увеличенное вдвое.

Однако разум приходит к созданию понятия о непрерывном, образованном из бесконечного числа членов, не только для того, чтобы избавиться от этого противоречия, содержащегося в эмпирических данных.

Дело обстоит совершенно так же, как для ряда целых чисел. Мы обладаем способностью понять, что единица может быть прибавлена к собранию единиц; благодаря опыту мы имеем повод упражнять эту способность и сознавать ее: но с этого момента мы чувствуем, что наше могущество не имеет предела и что мы могли бы считать бесконечно, хотя бы и имели для счета всегда только конечное число предметов.

Точно так же, как только мы пришли к идее поместить между двумя последовательными членами некоторого ряда промежуточные члены, мы пришли к выводу, что эта операция может быть продолжена беспредельно и что нет, так сказать, никакого существенного основания для остановки.

Я позволю себе упростить речь, назвав математической непрерывностью первого порядка всякую совокупность членов, образованных по тому же закону, что и последовательность соизмеримых чисел. Если мы затем поместим в ней новые промежуточные члены, следуя закону образования несоизмеримых чисел, мы получим то, что мы назовем непрерывностью второго порядка.

Вторая стадия. До сих пор мы сделали только первый шаг: мы объяснили происхождение непрерывностей первого порядка; теперь надо убедиться, почему их было еще недостаточно и почему понадобилось изобретать несоизмеримые числа.

Если мы хотим представить себе линию, то это возможно сделать, только пользуясь свойствами физической непрерывности; т. е. ее можно представить себе не иначе, как обладающей некоторой шириной. Две линии явятся для нас тогда в форме двух узких полос, и если удовольствоваться этим грубым изображением, то очевидно, что при пересечении две линии будут иметь общую часть.

Но чистый геометр делает еще одно усилие: не отказываясь совершенно от помощи своих чувств, он хочет дойти до понятия линии без ширины, точки без протяжения. Он может достичь этого, только рассматривая линию как предел, к которому стремится полоса, все более и более суживающаяся, и точку — как предел, к которому стремится площадь, все более и более уменьшающаяся. Тогда наши две полосы, как бы узки они ни были, всегда будут иметь общую площадь, тем меньшую, чем меньше будет их ширина, и пределом ее будет то, что чистый геометр называет точкой.

Вот почему говорят, что две пересекающиеся линии имеют общую точку, и эта истина представляется интуитивной.

Но она содержала бы противоречие, если бы понимать линии как непрерывности первого порядка, т. е. если на линиях, проводимых геометром, должны находиться только точки, координаты которых — рациональные числа. Противоречие станет очевидным, лишь только установят, например, существование прямых и кругов.

В самом деле, ясно, что если бы в качестве действительных рассматривались только точки с соизмеримыми координатами, то круг, вписанный в квадрат, и диагональ этого квадрата не пересекались бы, потому что координаты точки их пересечения несоизмеримы.

Этого еще недостаточно, потому что таким образом мы имели бы не все несоизмеримые числа, а только некоторые из них.

Но представим себе прямую, разделенную на две полупрямые. Каждая из этих полупрямых явится в нашем воображении как полоса известной ширины; притом эти полосы будут покрывать одна другую, потому что между ними не должно быть никакого промежутка. Когда мы пожелаем воображать наши полосы все более и более узкими, общая часть представится нам точкой, которая будет существовать постоянно; так что мы допустим в качестве интуитивной истины, что если прямая разделена на две полупрямые, то общая граница этих двух прямых есть точка; мы узнаем здесь концепцию Кронекера, согласно которой несоизмеримое число рассматривается как граница, общая двум классам рациональных чисел.

Таково происхождение непрерывности второго порядка, которая и является математической непрерывностью в собственном смысле.

Вывод. В итоге можно сказать, что разум обладает способностью создавать символы; благодаря этой способности он построил математическую непрерывность, *которая представляет собой только особую систему символов*. Его могущество ограничено лишь необходимостью избегать всякого противоречия; однако разум пользуется своей силой исключительно в том случае, когда опыт доставляет ему для этого основание.

В занимающем нас случае этим основанием было понятие физической непрерывности, выведенное из непосредственных данных чувственного восприятия.

Но это понятие приводит к ряду противоречий, от которых надо последовательно освобождаться. Таким образом, мы вынуждены воображать все более и более усложненную систему символов. Та система, на которой мы, наконец, останавливаемся, не только свободна от внутреннего противоречия — ведь она уже оказалась такой на всех пройденных этапах,— но она также не противоречит различным так называемым интуитивным положениям, которые извлечены из более или менее обработанных эмпирических понятий.

Измеримая величина. Величины, изучавшиеся нами до сих пор, не были *измеримыми*, мы умели сказать, которая из двух величин является большей, но в два ли, в три ли раза она больше — этого мы не умели сказать.

В самом деле, до сих пор я занимался только порядком, в котором наши члены были размещены. Но для большинства применений этого недостаточно. Надо научиться сравнивать промежутки, отделяющие два каких-нибудь члена. Только при этом условии непрерывность делается измеримой и в ней оказывается возможным применить арифметические операции.

Это можно сделать только при помощи нового и особого *соглашения*. *Условливаются*, что в таком-то случае интервал, заключенный между членами A и B, равен интервалу, отделяющему C от D. Так, в начале нашей работы мы исходили из последовательности целых чисел и предполагали, что между двумя последовательными членами ее помещены n промежуточных; эти-то новые члены будут теперь в силу соглашения рассматриваться как равноотстоящие.

Отсюда-то и вытекает способ определения сложения двух величин; так, если интервал AB по определению равен интервалу CD, то интервал AD по определению будет суммой интервалов AB и CD.

Это определение в весьма значительной мере произвольно. Однако оно произвольно не вполне. Оно подчинено известным соглашениям, например правилам коммутативности и ассоциативности сложения. Но как только выбранное определение удовлетворяет этим правилам, выбор делается безразличным, и более точное определение — бесполезным.

Различные замечания. Мы можем поставить перед собой несколько важных вопросов:

1. Исчерпывается ли творческое могущество разума созданием математической непрерывности?

Нет: труды Дюбуа-Реймона служат поразительным доказательством этого.

Известно, что математики различают бесконечно малые разных порядков, так что бесконечно малые второго порядка не только бесконечно малы в абсолютном смысле, но еще и являются таковыми по отношению к бесконечно малым первого порядка. Нетрудно представить себе бесконечно малые дробного и даже иррационального порядка, и, таким образом, мы снова находим ту последовательность математической непрерывности, которой посвящены предшествующие страницы. Более того: существуют такие бесконечно малые величины, которые бесконечно малы по отношению к бесконечно малым первого порядка и, напротив, бесконечно велики по отношению к бесконечно малым порядка $1+\varepsilon$, как бы ни было мало ε. Итак, вот еще новые члены, разместившиеся в нашем ряду; и если мне будет позволено вернуться к терминологии, которой я недавно держался и которая является достаточно удобной, хотя еще и не используется широко, я скажу, что этим создан вид непрерывности третьего порядка.

Легко было бы идти дальше, но это было бы бесполезной игрой ума; пришлось бы воображать себе одни символы без возможности их применения; на это никто не отважится. Даже непрерывность третьего порядка, к которой приводит рассмотрение различных порядков бесконечно малых, сама по себе является слишком мало полезной, чтобы приобрести право быть упоминаемой, и геометры рассматривают ее только просто как курьез. Разум пользуется своей творческой силой только тогда, когда опыт принуждает его к этому.

2. Раз мы обладаем понятием математической непрерывности, гарантированы ли мы от противоречий, аналогичных тем, которые положили начало этому понятию?

Нет; и я сейчас дам этому пример.

Надо быть очень сведущим, чтобы не считать очевидным, что каждая кривая имеет касательную:

и в самом деле, если представлять себе эту кривую и некоторую прямую как две узкие полосы, то всегда можно расположить их так, что они будут иметь общую часть, не пересекаясь. Теперь вообразим себе, что ширина этих двух полос бесконечно уменьшается; существование их общей части будет всегда возможным, и в пределе, так сказать, две линии будут иметь общую точку, не пересекаясь, т. е. они будут взаимно касаться друг друга.

Геометр, рассуждающий таким образом, сделал бы — сознательно или нет — то же самое, что мы сделали раньше, желая доказать, что две пересекающиеся линии имеют общую точку; и его интуиция могла бы показаться такой же законной.

Между тем она его обманула бы. Можно доказать, что существуют кривые, не имеющие касательных, если эта кривая определена как аналитическая непрерывность второго порядка.

Несомненно, какая-нибудь уловка, аналогичная раньше изученным нами, позволила бы устранить противоречие, но так как оно встречается только в весьма исключительных случаях, то им и не занимаются. Вместо того чтобы стараться примирить интуицию с анализом, удовольствовались тем, что пожертвовали одним из двух; и так как анализ должен остаться непогрешимым, то всю вину отнесли на счет интуиции.

Физическая непрерывность нескольких измерений. Выше я исследовал физическую непрерывность такою, какой она вытекает из непосредственных данных наших чувств или, если угодно, из прямых результатов опытов Фехнера; я показал, что эти результаты резюмируются противоречивыми формулами

$$A = B, \quad B = C, \quad A < C.$$

Посмотрим теперь, как это понятие было обобщено и как оказалось возможным вывести из него понятие непрерывностей многих измерений.

Рассмотрим две любые группы ощущений. Мы или будем в состоянии различить их или нет, подобно тому как в опытах Фехнера вес в 10 граммов можно было отличить от веса в 12 граммов, но не от веса в 11 граммов. Ничего другого не нужно для построения непрерывности многих измерений.

Назовем *элементом* одну из этих групп ощущений. Это будет нечто аналогичное математической *точке*, однако не совсем то же самое. Мы не можем определить размеры нашего элемента, так как мы не умеем отличить его от соседних элементов, он как бы окутан туманом. Если бы можно было употребить астрономическое сравнение, наши «элементы» были бы подобны туманностям, между тем как математические точки уподоблялись бы звездам.

Если так, то система элементов образует *непрерывность*, раз есть возможность перейти от любого из них к какому угодно другому через ряд последовательных элементов — таких, что каждый из них не мог бы быть различен от предыдущего. Этот *линейный ряд* является по отношению к *линии* математика тем же, чем является изолированный *элемент* по отношению к точке.

Прежде чем идти дальше, я должен разъяснить, что такое *купюра*. Рассмотрим непрерывность C и возьмем у нее некоторые из ее элементов, которые на одно мгновение будем рассматривать не принадлежащими больше к этой непрерывности. Совокупность элементов, взятых таким образом, будет называться купюрой. Может статься, что вследствие этой операции C окажется *подразделенной* на несколько отдельных непрерывностей, так как совокупность остающихся элементов не будет более составлять единую непрерывность.

Тогда у C найдутся два элемента A и B, которые необходимо будет считать принадлежащими двум различным непрерывностям; мы узнаем это потому, что нельзя будет найти в C линейный ряд последовательных элементов (каждый из этих элементов не может отличаться от предыдущего; за первый возьмем A, а за последний B), *если хоть один из элементов этого ряда не будет неотличим от одного из элементов купюры.*

Может, напротив, случиться, что реализация купюры будет недостаточна для подразделения непрерывности C. В целях классификации физических непрерывностей мы должны исследовать, каковы должны быть купюры, которые необходимы для подразделения непрерывности.

Если физическую непрерывность C можно подразделить, реализуя купюру, состоящую из конечного числа различимых один от другого элементов (и не образующую ни одной непрерывности, ни нескольких непрерывностей), то мы скажем, что C есть непрерывность *одного измерения.*

Если, напротив, можно подразделить C только при помощи купюр, которые сами представляют собой непрерывности, то мы скажем, что C — непрерывность нескольких измерений. Если это достигается купюрами, которые являются непрерывностями одного измерения, то мы скажем, что C имеет два измерения; если достаточно купюр, имеющих два измерения, то мы скажем, что C имеет три измерения, и т. д.

Таким образом, понятие физической непрерывности многих измерений оказывается определенным благодаря тому весьма простому факту, что две группы ощущений могут быть различимыми или же неразличимыми.

Математическая непрерывность нескольких измерений. Понятие математической непрерывности n измерений вытекает отсюда совершенно естественно при помощи процесса, вполне подобного тому, который мы изучили в начале этой главы. Точка подобной непрерывности, как известно, представляется нам определенной при помощи системы n различных величин, называемых ее координатами.

Не всегда необходимо, чтобы величины эти были измеримыми. В геометрии имеется целая отрасль, в которой отвлекаются от измерения этих величин; в ней занимаются, например, только изучением вопроса, лежит ли точка B на кривой ABC между точками A и C, и не стараются узнать, равна ли дуга AB дуге BC, или она в два раза больше ее. Это — так называемый Analysis Situs [1]).

В этом вся сущность учения, привлекшего к себе внимание величайших геометров, учения, из которого вытекает ряд замечательных теорем. Эти теоремы отличаются от теорем обыкновенной геометрии тем, что они являются чисто качественными, и они остались бы справедливыми, если бы фигуры копировались не-

---

[1]) Analysis Situs — анализ положения, в современной терминологии — топология.— *Примеч. ред.*

искусным чертежником, который грубо нарушал бы их пропорции и заменял бы прямые линии более или менее искривленными.

Когда в только что определенную нами непрерывность пожелали ввести меру, эта непрерывность превратилась в пространство: родилась геометрия. Но я откладываю это исследование для второй части.

Часть II

ПРОСТРАНСТВО

Глава III

НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Всякое заключение предполагает наличие посылок; посылки же эти или сами по себе очевидны и не нуждаются в доказательстве, или могут быть установлены, только опираясь на другие предположения. Но так как этот процесс не может продолжаться беспредельно, то всякая дедуктивная наука, и в частности геометрия, должна основываться на некотором числе недоказуемых аксиом. Поэтому все руководства по геометрии прежде всего излагают эти аксиомы. Но между этими аксиомами приходится делать различие; некоторые их них, как, например, аксиома: «две величины, равные одной и той же третьей, равны между собой», суть предложения не геометрии, а анализа. Я рассматриваю их как аналитические априорные суждения и не буду заниматься ими. Но я должен остановиться на других аксиомах, которые относятся к геометрии. Большинство руководств излагают три такие аксиомы:

1. Между двумя точками можно провести лишь одну прямую.

2. Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками.

3. Через данную точку можно провести лишь одну прямую, параллельную данной.

Хотя вообще и обходятся без доказательства второй из этих аксиом, но было бы возможно вывести ее из двух остальных и из тех гораздо более многочисленных аксиом, которые допускаются скрыто, как я выясню это далее.

Долгое время тщательно искали доказательства третьей аксиомы, известной под названием *постулата Евклида.* Сколько было потрачено сил в этой химерической надежде, положительно не поддается описанию. Наконец, в начале прошлого столетия и почти одновременно двое ученых, русский — Лобачевский и венгерский — Бояи, установили неопровержимо, что это доказательство невозможно; этим они почти совсем избавили нас от изобретателей геометрии без постулата Евклида; с тех пор парижская Академия наук получает не более одного-двух новых доказательств в год. Но вопрос не был исчерпан; его разработка не замедлила сделать новый большой шаг с опубликованием знаменитого мемуара Римана «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zum Grunde liegen»[1]. Эта маленькая работа вызвала к жизни большинство новых работ, о которых я буду говорить дальше и среди которых следует назвать работы Бельтрами и Гельмгольца.

Геометрия Лобачевского. Если бы возможно было вывести постулат Евклида из других аксиом, то, отбрасывая этот постулат и допуская другие аксиомы, мы, очевидно, должны были бы прийти к следствию, заключающему в себе противоречие; поэтому было бы невозможно на таких положениях построить цельную геометрическую систему.

Но как раз это и сделал Лобачевский. Он допускает сначала, что

Через точку можно провести несколько прямых, параллельных данной прямой.

Кроме этой, все другие аксиомы Евклида он сохраняет. Из этих гипотез он выводит ряд теорем, между которыми нельзя указать никакого противоречия, и строит геометрию, непогрешимая логика которой ни в чем не уступает евклидовой геометрии. Теоремы, конечно, весьма отличаются от тех, к которым мы привыкли, и вначале кажутся несколько странными.

Так, сумма углов треугольника всегда меньше двух прямых углов; разность между этой суммой и двумя прямыми углами пропорциональна площади треугольника.

Невозможно построить фигуру, подобную данной, но имеющую иные размеры.

---

[1]) См. русский перевод: Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии//Об основаниях геометрии. — М.: Гостехиздат, 1956. — С. 309. — *Примеч. ред.*

Если разделить окружность на n равных частей и провести в точках деления касательные, то эти n касательных образуют многоугольник, если радиус окружности достаточно мал; но если этот радиус достаточно велик, они не встретятся.

Бесполезно было бы увеличивать число этих примеров; теоремы Лобачевского не имеют никакого отношения к евклидовым, но тем не менее они логически связаны между собой.

Геометрия Римана. Вообразим себе мир, заселенный исключительно существами, лишенными толщины, и предположим, что эти «бесконечно плоские» существа расположены все в одной плоскости и не могут из нее выйти. Допустим далее, что этот мир достаточно удален от других миров, чтобы не подвергаться их влиянию. Раз мы начали делать такие допущения, ничто не мешает нам наделить эти существа способностью мышления и считать их способными создать геометрию. В таком случае они, конечно, припишут пространству только два измерения.

Но предположим теперь, что эти воображаемые существа, оставаясь все еще лишенными толщины, имеют форму поверхности шара, а не форму плоскости, и расположены все на одной и той же сфере, с которой не могут сойти. Какую геометрию они могут построить? Прежде всего, ясно, что они припишут пространству только два измерения; роль прямой линии для них будет играть кратчайшее расстояние от одной точки до другой на сфере, т. е. дуга большого круга; одним словом, их геометрия будет геометрией сферической.

То, что они назовут пространством, будет эта сфера, с которой они не могут сойти и на которой происходят все явления, доступные их познанию. Их пространство будет *безгранично*, так как по сфере всегда можно безостановочно идти вперед, и тем не менее оно будет *конечно*; никогда нельзя дойти до края, но можно совершить кругообразное движение.

Геометрия Римана есть не что иное, как сферическая геометрия, распространенная на три измерения. Чтобы построить ее, немецкий математик должен был отбросить не только постулат Евклида, но, кроме того, еще и первую аксиому: *через две точки можно провести только одну прямую.*

На сфере через две данные точки можно провести *вообще* один большой круг (который, как мы сейчас видели, играл бы роль прямой для наших воображаемых существ); но есть одно исключение: если две данные точки диаметрально противоположны, то через них можно провести бесконечное множество больших кругов. Так и в геометрии Римана (по крайней мере в одной из ее форм) через две точки вообще можно провести только одну прямую; но есть исключительные случаи, когда через две точки можно провести бесконечное количество прямых.

Между геометриями Римана и Лобачевского существует в некотором смысле противоположность.

Так, сумма углов треугольника:

равна двум прямым в геометрии Евклида;

меньше двух прямых в геометрии Лобачевского;

больше двух прямых в геометрии Римана.

Число линий, которые можно провести через данную точку параллельно данной прямой:

равно единице в геометрии Евклида;

нулю в геометрии Римана;

бесконечности в геометрии Лобачевского.

Прибавим, что пространство Римана конечно, хотя и безгранично, в указанном выше смысле этих двух слов.

Поверхности с постоянной кривизной. Остается возможным одно возражение. Действительно, теоремы Лобачевского и Римана не содержат никакого противоречия; но как бы ни были многочисленны следствия, которые вывели из своих допущений эти два геометра, все же последние должны были остановиться, не исчерпав всех возможных выводов, потому что число их бесконечно. Но тогда кто поручится, что если бы они продолжали свои выводы далее, то все же не пришли бы к противоречию?

Это затруднение не существует для геометрии Римана, если ограничиваться двумя измерениями; в самом деле, геометрия Римана для двух измерений не отличается, как мы видели, от сферической геометрии, которая есть только ветвь обыкновенной геометрии и которая, следовательно, стоит вне всякой дискуссии.

Бельтрами, сведя также и геометрию Лобачевского для двух измерений к тому, что она стала только ветвью обыкновенной геометрии, опроверг таким же образом направленное против нее возражение. Вот как он пришел к этому. Рассмотрим на некоторой поверхности произвольную фигуру. Представим себе, что эта фигура начерчена на гибком и нерастяжимом полотне, наложенном на эту поверхность, так что, когда полотно перемещается и деформируется, различные линии этой фигуры могут изменять форму, не меняя длины. Вообще, эта гибкая и нерастяжимая фигура не может перемещаться, не оставляя поверхности; но есть некоторые особые поверхности, для которых подобное движение было бы возможно: это — поверхности с постоянной кривизной.

Возвратимся к сравнению, которое мы сделали выше, и вообразим себе существа без толщины, живущие на одной из таких поверхностей. Движение фигуры, все линии которой сохраняют постоянную длину, с их точки зрения будет возможно. Подобное движение, наоборот, казалось бы абсурдным для существ без толщины, живущих на поверхности с переменной кривизной.

Поверхности с постоянной кривизной бывают двух родов. Одни из них — поверхности *с положительной кривизной*; они могут быть деформированы так, что накладываются на сферу. Следовательно, геометрия этих поверхностей сводится к сферической геометрии, которая есть геометрия Римана. Другие — поверхности *с отрицательной кривизной.* Бельтрами показал, что геометрия этих поверхностей есть не что иное, как геометрия Лобачевского. Таким образом, геометрии двух измерений, как Римана, так и Лобачевского, оказываются связанными с евклидовой геометрией.

Истолкование неевклидовых геометрических систем. Таким образом, устраняется возражение, касающееся геометрических систем двух измерений.

Легко было бы распространить рассуждение Бельтрами на геометрии трех измерений. Умы, не отрицающие пространства четырех измерений, не увидят в этом никакой трудности, но таковых немного. Поэтому я предпочитаю поступить иначе.

Возьмем некоторую плоскость, которую я буду называть основной, и построим нечто вроде словаря, установив соответствие в двойном ряду членов, написанных в двух столбцах, таким же образом, как в обычных словарях соответствуют друг другу слова двух языков, имеющие одинаковое значение.

Пространство	Часть пространства, расположенная ниже основной плоскости.
Плоскость	Сфера, ортогонально пересекающая основную плоскость.
Прямая	Круг, ортогонально пересекающий основную плоскость.
Сфера	Сфера.
Круг	Круг.
Угол	Угол.
Расстояние между двумя точками	Логарифм ангармонического отношения этих двух точек и пересечений основной плоскости с кругом, проходящим через эти две точки и пересекающим ее ортогонально

и т. д.

Возьмем затем теоремы Лобачевского и переведем их с помощью этого словаря, как мы переводим немецкий текст с помощью немецко-французского словаря. *Мы получим таким образом теоремы обыкновенной геометрии.*

Например, теорема Лобачевского: «сумма углов треугольника меньше двух прямых» переводится так: «если криволинейный треугольник имеет сторонами дуги кругов, которые при продолжении пересекают основную плоскость ортогонально, то сумма углов этого криволинейного треугольника будет меньше двух прямых». Таким образом, как бы далеко мы ни развивали следствия из допущений Лобачевского, мы никогда не натолкнемся на противоречие. В самом деле, если бы две теоремы Лобачевского находились в противоречии, то то же самое имело бы место и для переводов этих двух теорем, сделанных при помощи нашего словаря; но эти переводы суть теоремы обыкновенной геометрии, а никто не сомневается, что обыкновенная геометрия свободна от противоречий. Однако откуда происходит в нас эта уверенность и справедлива ли она? Это — вопрос, который я не буду разбирать здесь, так как он потребовал бы подробного развития. Во всяком случае, указанное выше возражение отпадает полностью.

Это еще не все. Геометрия Лобачевского, допускающая таким образом конкретное истолкование, перестает быть пустым логическим упражнением и может получить применение; я не имею времени говорить здесь ни об ее приложениях, ни о той пользе, которую Клейн и я извлекли из нее для интегрирования линейных уравнений.

Указанное истолкование, впрочем, не единственное. Можно было бы установить несколько словарей, аналогичных предыдущему, и все они позволяли бы простым «переводом» преобразовывать теоремы Лобачевского в теоремы обыкновенной геометрии.

Скрытые аксиомы. Являются ли аксиомы, явно формулируемые в руководствах, единственными основаниями геометрии? Мы можем убедиться в противном, замечая, что даже если одну за другой отвергнуть эти аксиомы, все-таки еще останутся нетронутыми некоторые предложения, общие теориям Евклида, Лобачевского и Римана. Эти предложения должны опираться на некоторые предпосылки, которые геометры допускают в скрытой форме. Интересно попытаться выделить их из классических доказательств.

Стюарт Милль утверждал, что всякое определение содержит аксиому, так как, определяя, скрыто утверждают существование определяемого предмета. Это значило бы заходить слишком далеко; редко бывает, чтобы математики давали определение, не доказав существования определяемого объекта; если же они избавляют себя от этого труда, то обыкновенно в тех случаях, когда читатель сам легко может сделать соответствующее дополнение. Но не следует забывать, что слово «существование» имеет различный смысл тогда, когда речь идет о математическом объекте, и тогда, когда вопрос касается материального предмета. Математический объект существует, если его определение не заключает противоречия ни в самом себе, ни с предложениями, допущенными раньше.

Но если замечание Стюарта Милля не может быть приложено ко всем определениям, оно тем не менее остается справедливым для некоторых из них. Например, плоскость иногда определяют так: плоскость есть поверхность такого рода, что прямая, соединяющая две любые точки ее, укладывается целиком на этой поверхности.

Это определение, очевидно, скрывает в себе новую аксиому; правда, можно было бы его изменить, и это было бы лучше, но тогда надо было явно указать эту аксиому.

Другие определения могут дать повод к размышлениям, не менее важным.

Таково, например, определение равенства двух фигур: две фигуры равны, когда их можно наложить одну на другую. Чтобы сделать это, надо одну из них перемещать до тех пор, пока она не совпадет с другой; но как надо ее перемещать? Если мы зададим этот вопрос, то, без сомнения, нам ответят, что надо сделать это, не деформируя ее, — как если бы дело шло о неизменяемом твердом теле. Но тогда порочный круг будет очевиден.

Фактически это определение ничего не определяет; оно не имело бы никакого смысла для существа, обитающего в мире, где имеются только жидкости. Если оно кажется нам ясным, то просто потому, что мы привыкли к свойствам реальных твердых тел, которые не отличаются значительно от свойств идеальных твердых тел, сохраняющих все свои размеры неизменными.

Между тем, как ни несовершенно это определение, оно скрывает в себе некоторую аксиому.

Возможность движения неизменной фигуры не есть истина, очевидная сама по себе; порядок очевидности ее во всяком случае не превышает порядка очевидности постулата Евклида и несравним с порядком очевидности аналитических априорных суждений.

Впрочем, изучая геометрические определения и доказательства, мы видим, что приходится допустить без доказательства не только возможность этого движения, но и еще некоторые из его свойств. И прежде всего — то, которое вытекает из определения прямой линии. Ей дано много несовершенных определений, но истинным является следующее, подразумеваемое во всех доказательствах, где используется прямая линия:

«Может случиться, что движение неизменной фигуры будет таково, что все точки некоторой линии, принадлежащей этой фигуре, остаются неподвижными, между тем как все точки, расположенные вне этой линии, движутся. Подобная линия будет называться прямой». В этой формулировке мы намеренно отделили определение от аксиомы, которую оно скрывает в себе.

Многие из доказательств — как, например, доказательства равенства треугольников, доказательство возможности опустить перпендикуляр из точки на прямую — предполагают предложения, которые прямо не указываются, так как они требуют допущения возможности переносить фигуру в пространстве определенным образом.

Четвертая геометрия. Среди этих скрытых аксиом, мне кажется, есть одна, которая заслуживает некоторого внимания, так как, опуская ее, можно построить четвертую геометрию, столь же свободную от внутренних противоречий, как и геометрии Евклида, Лобачевского и Римана.

Чтобы доказать, что всегда можно восставить из точки A перпендикуляр к прямой AB, рассматривают прямую AC, вращающуюся около точки A и сначала сливающуюся с неподвижной прямой AB; ее поворачивают около A до тех пор, пока она не образует продолжения AB.

Таким образом допускаются два предположения: во-первых, что подобное вращение возможно и, во-вторых, что можно продолжать его до тех пор, пока две прямые не составят продолжение одна другой. Если мы допустим первое и откинем второе, то придем к ряду теорем, еще более странных, чем теоремы Лобачевского и Римана, но в такой же степени свободных от противоречия.

Я приведу только одну из этих теорем и притом не из самых странных: *действительная прямая может быть перпендикулярна сама к себе.*

Теорема Ли. Число аксиом, скрытым образом введенных в классические доказательства, больше, чем это необходимо. Было бы интересно свести это число к минимуму. Можно спросить себя сначала, осуществимо ли это желание — не беспредельно ли и число необходимых аксиом и число воображаемых геометрий. В этого рода исследованиях первое место занимает теорема Софуса Ли. Ее можно выразить так:

Предположим, что допускаются следующие положения:

1. Пространство имеет n измерений.
2. Движение неизменяемой фигуры возможно.

3. Необходимо p условий, чтобы определить положение этой фигуры в пространстве.

Число геометрий, совместимых с этими положениями, будет ограниченное.

Я могу даже прибавить, что если n дано, то для p можно указать высший предел.

Следовательно, если допустить возможность движения неизменяемой фигуры, то можно будет придумать лишь конечное число (и даже довольно ограниченное) геометрических систем трех измерений.

Геометрии Римана. Между тем этот результат, по-видимому, находится в противоречии с заключениями Римана, так как этот ученый построил бесчисленное множество различных геометрий (та, которой обыкновенно дают его имя, есть не более чем частный случай).

Все зависит, говорит Риман, от способа, которым определяют длину кривой. Но существует бесконечное множество способов определять эту длину, и каждый из них может сделаться точкой отправления новой геометрии. Это совершенно верно; но большинство этих определений несовместимо с движением неизменяемой фигуры, которое предполагается возможным в теореме Ли. Эти геометрии Римана, столь интересные с различных точек зрения, могут быть лишь чисто аналитическими, и они не поддаются доказательствам, которые были бы аналогичны евклидовым.

Геометрии Гильберта. Наконец, Веронезе и Гильберт придумали новые, еще более странные геометрии, которые они назвали *неархимедовыми.* Они построили их, устранив аксиому Архимеда, в силу которой любая данная протяженность, умноженная на целое достаточно большое число, в конечном счете превзойдет любую данную протяженность, сколь бы велика она ни была. На неархимедовой прямой существуют все точки нашей обычной геометрии, но имеются множества других, которые вставляются между ними, так что между двумя отрезками, которые геометры старой школы рассматривали как смежные, оказывается возможным поместить множество новых точек. Одним словом, неархимедовы пространства уже не являются более непрерывностью второго порядка, если применять язык предыдущей главы, они суть непрерывность третьего порядка.

О природе аксиом. Большинство математиков смотрят на геометрию Лобачевского как на простой логический курьез; но некоторые из них идут дальше. Раз возможно несколько геометрий, то достоверно ли, что наша геометрия есть истинная? Без сомнения, опыт учит нас, что сумма углов треугольника равна двум прямым; но это потому, что мы оперируем треугольниками слишком малыми; разность, по Лобачевскому, пропорциональна площади треугольника; не может ли она сделаться заметной, когда мы будем оперировать большими треугольниками или когда наши измерения сделаются более точными? Таким образом, евклидова геометрия была бы только временной геометрией.

Чтобы обсудить это мнение, мы должны сначала спросить себя, в чем состоит природа геометрических аксиом. Не являются ли они синтетическими априорными суждениями, как говорил Кант?

Будь это так, они навязывались бы нам с такой силой, что мы не могли бы ни вообразить себе положение противоположного содержания, ни основать на нем теоретическое построение. Неевклидовых геометрий не могло бы быть.

Чтобы убедиться в этом, возьмем настоящее синтетическое априорное суждение, например то, которое, как мы видели в первой главе, играет первенствующую роль: *если теорема верна для числа* 1 *и если доказано, что раз она справедлива для n, то она верна и для $n+1$; в таком случае она будет справедлива для всех положительных целых чисел.*

Попытаемся затем отвлечься от этого положения и, откинув его, построить ложную арифметику по аналогии с неевклидовой геометрией. Это нам не удастся. Сначала было даже стремление рассматривать эти суждения как аналитические.

С другой стороны, обратимся снова к нашим воображаемым существам без толщины; могли ли бы мы допустить, чтобы эти существа, если бы их ум был устроен по образу нашего, приняли евклидову геометрию, которая противоречила бы всему их опыту?

Итак, не должны ли мы заключить, что аксиомы геометрии суть истины экспериментальные? Но над идеальными прямыми или окружностями не экспериментируют; это можно делать только над материальными объектами. К чему же относятся опыты, которые служили бы основанием геометрии?

Ответ ясен. Выше мы видели, что рассуждения ведутся постоянно так, как если бы геометрические фигуры были подобны твердым телам. Следовательно, вот что заимствовала геометрия у опыта: свойства твердых тел.

Свойства света и его прямолинейное распространение также были поводом, из которого вытекли некоторые предложения геометрии, в частности предложения проективной геометрии; так что с этой точки зрения можно было бы сказать, что метрическая геометрия есть изучение твердых тел, а проективная геометрия — изучение света.

Но трудность остается в силе, и она непреодолима. Если бы геометрия была опытной наукой, она не была бы наукой точной и должна была бы подвергаться постоянному пересмотру. Даже более, она немедленно была бы уличена в ошибке, так как мы знаем, что не существует твердого тела абсолютно неизменного.

Итак, *геометрические аксиомы не являются ни синтетическими априорными суждениями, ни опытными фактами.* Они суть *условные положения* (соглашения): при выборе между всеми возможными соглашениями мы *руководствуемся* опытными фактами, но самый выбор остается *свободным* и ограничен лишь необходимостью избегать всякого противоречия. Поэтому-то постулаты могут оставаться *строго* верными, даже когда опытные законы, которые определяли их выбор, оказываются лишь приближенными.

Другими словами, *аксиомы геометрии* (я не говорю об аксиомах арифметики) *суть не более чем замаскированные определения.*

Если теперь мы обратимся к вопросу, является ли евклидова геометрия истинной, то найдем, что он не имеет смысла. Это было бы все равно, что спрашивать, какая система истинна — метрическая или же система со старинными мерами, или какие координаты вернее — декартовы или же полярные. Никакая геометрия не может быть более истинна, чем другая; та или иная геометрия может быть только *более удобной.* И вот, евклидова геометрия есть и всегда будет наиболее удобной по следующим причинам:

1. Она проще всех других; притом она является таковой не только вследствие наших умственных привычек, не вследствие какой-то, я не знаю, непосредственной интуиции, которая нам свойственна по отношению к евклидову пространству; она наиболее проста и сама по себе, подобно тому как многочлен первой степени проще многочлена второй степени; формулы сферической тригонометрии сложнее формул прямолинейной тригонометрии, и они показались бы еще более сложными для аналитика, который не был бы знаком с геометрическими обозначениями.

2. Она в достаточной степени согласуется со свойствами реальных твердых тел, к которым приближаются части нашего организма и наш глаз и на свойстве которых мы строим наши измерительные приборы.

Глава IV

ПРОСТРАНСТВО И ГЕОМЕТРИЯ

Начнем с маленького парадокса.

Существа, разум которых был бы подобен нашему и которые имели бы такие же органы чувств, как и мы, но которые не получили бы никакого предварительного воспитания, могли бы получить от соответственно подобранного внешнего мира такие впечатления, что им пришлось бы построить геометрию иную, чем евклидова, и разместить явления этого внешнего мира в пространстве неевклидовом или даже в пространстве четырех измерений.

Для нас, ум которых сформировался под влиянием окружающего нас мира, не составило бы никакой трудности отнести к нашему евклидову пространству явления этого нового мира, если бы мы были в него внезапно перенесены. И, напротив, если бы существа из того мира были перенесены к нам, они должны были бы отнести наши явления к неевклидову пространству.

Но ведь с небольшими усилиями этого же могли бы достигнуть и мы.

Тот, кто всю свою жизнь посвятил бы такой задаче, может быть, оказался бы в состоянии представить себе четвертое измерение.

Пространство геометрическое и пространство представлений. Часто говорят, что образы внешних предметов локализованы в пространстве, что они даже не могут образоваться иначе как при этом условии. Говорят также, что это пространство, которое таким образом служит готовым *кадром* наших ощущений и представлений, тождественно с пространством геометров, всеми свойствами которого оно обладает.

Всем, кто так думает, предыдущая фраза должна показаться крайне странной. Но надо рассмотреть, не обманываются ли они некоторой иллюзией, которую более глубокий анализ мог бы рассеять.

Каковы, прежде всего, свойства пространства в собственном смысле? Я хочу сказать — того пространства, которое является предметом геометрии и которое я назову *пространством геометрическим*. Вот некоторые из наиболее существенных его свойств:

1. Оно непрерывно.
2. Оно бесконечно.
3. Оно имеет три измерения.
4. Оно однородно, т. е. все точки его тождественны между собой.
5. Оно изотропно, т. е. все прямые, которые проходят через одну и ту же точку, тождественны между собой.

Сравним теперь его с кадром наших представлений и ощущений, который я мог бы назвать *пространством представлений*.

Пространство визуальное. Рассмотрим сначала чисто зрительное впечатление, обусловливаемое изображением, возникающим на сетчатке. Краткий анализ показывает, что это изображение непрерывно, но обладает только двумя измерениями; это уже составляет отличие между пространством геометрическим и тем, что можно было бы назвать *чисто визуальным пространством*. Далее, этот образ заключен в ограниченном кадре.

Наконец, существует еще одно отличие, не менее важное: *это чисто визуальное пространство неоднородно*. Различные точки сетчатки — независимо от изображений, которые могут на них возникать,— играют не одну и ту же роль. Никак нельзя считать желтое пятно тождественным с точкой, лежащей у края сетчатки. В самом деле, здесь не только самый предмет производит гораздо более живые впечатления, но здесь, как и во всяком *ограниченном* кадре, точка, занимающая центр кадра, не будет казаться тождественной с точкой, близкой к одному из кадров.

Более глубокий анализ, без сомнения, показал бы нам, что эта непрерывность визуального пространства и его два измерения суть не более чем иллюзия; этот анализ еще более отдалил бы визуальное пространство от геометрического. Но мы ограничимся здесь только этим замечанием, следствия из которого были достаточно рассмотрены в главе II.

Однако зрение позволяет нам оценивать расстояния и, следовательно, воспринимать третье измерение. Но всякий знает, что это восприятие третьего измерения сводится к ощущению усилия, сопровождающему аккомодацию, которую надо выполнить, и к ощущению, сопровождающему то схождение обеих глазных осей, которое необходимо для отчетливого восприятия предмета.

Мы имеем здесь мускульные ощущения, совершенно отличные от ощущений зрительных, которые дали нам познание первых двух измерений. Таким образом, третье измерение выступит перед нами не в той же роли, какую играют два других. А следовательно, то, что можно назвать *полным визуальным пространством*, не есть пространство изотропное.

Правда, оно имеет как раз три измерения, т. е. элементы наших зрительных ощущений (по крайней мере те из них, которые, слагаясь, образуют представление протяженности) будут вполне определены, когда известны три из них; выражаясь математическим языком, они будут функциями трех независимых переменных.

Но исследуем предмет несколько ближе. Третье измерение открывается нам двумя различными способами: благодаря усилию при аккомодации и вследствие схождения глазных осей.

Эти два рода показаний, без сомнения, всегда согласованы друг с другом. Между ними существует постоянное соотношение; выражаясь математически, две переменные, измеряющие оба типа мускульного ощущения, не выступают перед нами в качестве независимых, или еще,— чтобы не прибегать к математическим понятиям достаточно высокой сложности,— мы можем снова воспользоваться языком предыдущей главы и выразить тот же факт следующим образом: если два ощущения схождения осей A и B неразличимы, то и два соответственно сопровождающих их ощущения аккомодаций A' и B' будут также неразличимы.

Но такое соотношение ощущений — это, так сказать, опытный факт; ничто не мешает á priori допустить обратное, и если окажется, что это обратное действительно имеет место, если эти два типа мускульных ощущений изменяются независимо один от другого, то мы должны будем ввести новую независимую переменную, и «полное визуальное пространство» выступит перед нами как физическая непрерывность четырех измерений.

Я даже прибавлю, что это представляет собою факт *внешнего* опыта. Ничто не мешает предположить, что существо, имеющее ум, подобный нашему, и такие же органы чувств, как и мы, помещено в мире, куда свет достигает, только пройдя через преломляющие среды сложной формы. Тогда два показания, служащие нам для оценки расстояний, перестали бы быть связанными постоянным соотношением. Существо, которое получило бы в подобном мире воспитание своих чувств, без сомнения, приписало бы полному визуальному пространству четыре измерения.

Пространство тактильное и пространство моторное. «Тактильное пространство» еще более сложно, чем визуальное, и еще более, чем оно, удаляется от пространства геометрического. Бесполезно было бы повторять для осязания анализ, проведенный мною относительно зрения.

Но вне данных зрения и осязания существуют другие ощущения, которые так же, как и эти ощущения, и даже более способствуют образованию понятия пространства. Это — те всем известные ощущения, которыми сопровождаются все наши движения и которые обыкновенно называются мускульными.

Соответствующий им кадр (le cadre) образует то, что можно назвать *моторным пространством.*

Каждый мускул дает происхождение особому ощущению, способному делаться больше или меньше, так что совокупность наших мускульных ощущений будет зависеть от стольких переменных, сколько у нас мускулов. С этой точки зрения *моторное пространство имело бы столько измерений, сколько мы имеем мускулов.*

Я знаю, мне тотчас скажут, что если мускульные ощущения способствуют образованию понятия пространства, то это потому, что мы имеем чувство *направления* каждого движения, и оно является составной частью ощущения. Если бы это было так, если бы мускульное ощущение не могло зародиться иначе, как сопутствуемое геометрическим чувством направления, то геометрическое пространство было бы формой, присущей нашей способности к ощущению. Но когда я анализирую свои ощущения, я этого совершенно не замечаю. Я вижу, что ощущения, соответствующие движениям того же направления, связаны в моем уме простой *ассоциацией идей.* К этой ассоциации идей и сводится то, что мы называем «чувством направления». Следовательно, этого чувства нельзя было бы найти в единичном ощущении.

Эта ассоциация крайне сложна, так как сокращение того же мускула может отвечать, смотря по положению членов, движениям самых различных направлений.

Она, кроме того, очевидно, является приобретенной; как все ассоциации идей, она есть результат *привычки*; эта привычка сама вытекает из крайне многочисленных *опытов*; не подлежит никакому сомнению, что если бы воспитание наших чувств происходило в иной среде, где мы получали иные впечатления, то возникли бы иные привычки, и наши мускульные ощущения были бы ассоциированы по иным законам.

Характерные черты пространства представлений. Таким образом, пространство представлений в своих трех формах — визуального, тактильного и моторного пространства — существенно отличается от геометрического пространства.

Оно ни однородно, ни изотропно; нельзя даже сказать, что оно имеет три измерения.

Часто говорят, что мы «проектируем» в геометрическое пространство предметы наших внешних восприятий, что мы «локализуем» их. Имеет ли это смысл и какой? Должно ли это обозначать, что мы *представляем* себе внешние предметы в геометрическом пространстве?

Наши представления суть только воспроизведение наших ощущений, поэтому они могут разместиться только в том же кадре, в каком и последние, т. е. в пространстве представлений.

Нам так же невозможно представить себе внешние тела в геометрическом пространстве, как невозможно художнику рисовать на плоской картине предметы с их тремя измерениями.

Пространство представлений есть только образ геометрического пространства — образ, видоизмененный некоторым родом перспективы; мы не можем представить себе предметы иначе, как подчиняя их законам этой перспективы.

Мы не *представляем* себе, следовательно, внешних тел в геометрическом пространстве, но мы *рассуждаем* об этих телах, как если бы они были помещены в геометрическом пространстве.

С другой стороны, когда говорят, что мы «локализуем» данный предмет в данной точке пространства, что хотят этим сказать?

Это просто означает, что мы представляем себе движения, которые надо совершить, чтобы достигнуть этого предмета.

И пусть не говорят, что для того, чтобы представить себе эти движения, их надо проектировать сначала в пространство и что понятие пространства должно, следовательно, существовать раньше.

Когда я говорю, что мы представляем себе эти движения, я хочу сказать только, что мы представляем себе мускульные ощущения, которые сопровождают их и которые вовсе не имеют геометрического характера, а следовательно, отнюдь не предполагают предсуществования понятия пространства.

Изменения состояния и изменения положения. Но скажут, если идея геометрического пространства не присуща нашему уму и, с другой стороны, если никакое из наших ощущений не может нам доставить ее, то как она могла возникнуть?

Это — тема нашего ближайшего исследования. Оно потребует у нас некоторого времени; но я могу резюмировать в нескольких словах конечную цель рассуждения, которое мне предстоит развить.

Никакое из наших ощущений, взятое в отдельности, не могло бы привести нас к идее пространства; мы пришли к ней, только изучая законы, по которым эти ощущения следуют друг за другом. Мы видим прежде всего, что наши впечатления подвержены изменению; но между изменениями, которые мы констатируем, мы скоро бываем вынуждены делать различие.

Мы говорим, или что некоторые предметы, вызывающие эти впечатления, изменили свое состояние, или что они изменили свое положение — что они просто переместились.

Меняет ли предмет свое состояние или только положение, это передается нам всегда одним и тем же способом: *изменением во всем составе впечатлений.*

Каким же образом мы могли прийти к различию обоих изменений? Если произошло только изменение положения, то мы можем восстановить прежнюю совокупность впечатлений, совершая движения, ставящие нас в то же *относительное* положение к подвижному предмету. Мы *компенсируем* таким образом происшедшее изменение, восстанавливая начальное состояние обратным изменением.

Так, если речь идет о зрении и если предмет перемещается перед нашими глазами, мы можем за ним «следить глазами» и удерживать его изображение в той же точке сетчатки посредством соответственных движений глазного яблока.

Эти движения мы сознаем, так как они являются волевыми и сопровождаются мускульными ощущениями; но это не значит, что мы представляем их происходящими в геометрическом пространстве.

Именно этим характеризуется изменение положения, и оно отличается от изменения состояния тем, что всегда может быть *компенсировано* указанным способом.

Следовательно, может случиться, что мы переходим от системы впечатлений A к системе B двумя различными способами: 1) непроизвольно и без каких-либо мускульных ощущений — когда перемещается предмет; 2) произвольно и при наличии мускульных ощущений — когда предмет неподвижен, но перемещаемся мы таким образом, что предмет имеет по отношению к нам относительное движение.

Если дело происходит указанным образом, то переход от системы впечатлений A к системе B есть только изменение положения.

Отсюда следует, что зрение и осязание не могли бы нам дать понятие пространства без помощи «мускульного чувства».

Это понятие не могло бы образоваться не только из единичного ощущения, но даже *из ряда* ощущений; кроме того, существо *неподвижное* никогда не могло бы приобрести его, так как, если бы оно не имело возможности *компенсировать* своими движениями эффектов, зависящих от изменений положения внешних предметов, оно не имело бы никакого основания отличать их от изменений состояния. Оно не могло бы также приобрести это понятие, если бы движения его не были произвольными или если бы они не сопровождались некоторыми ощущениями.

Условия компенсации. Каким образом возможно явление такого рода, что два изменения, не зависящие друг от друга, взаимно компенсируются?

Ум, *знакомый уже с геометрией,* рассуждал бы так. Для того чтобы произошла компенсация, очевидно, нужно, чтобы различные части внешнего предмета, с одной стороны, и различные органы наших чувств, с другой, приходили после двойного изменения опять в то же *относительное* положение. А для этого надо, чтобы различные части внешнего предмета равным образом сохранили друг к другу то же самое относительное положение и чтобы то же имело место для взаимного расположения различных частей нашего тела.

Другими словами, при первом изменении внешний предмет должен перемещаться как неизменное твердое тело; то же самое должно произойти с системой нашего тела при втором изменении, компенсирующем первое.

При этих условиях компенсация может произойти. Но мы, *не будучи еще знакомы с геометрией,*— потому что у нас еще не образовалось понятие пространства,— не можем рассуждать таким образом; мы не можем предвидеть a priori, возможна ли компенсация. Но опыт учит нас, что она иногда имеет место, и это — тот опытный факт, из которого мы исходим для различения изменений состояния от изменений положения.

Твердые тела и геометрия. Среди окружающих нас предметов есть такие, которые часто испытывают перемещения, способные быть компенсированными *соответственным* (коррелятивным) движением нашего собственного тела. Это — *тела твердые.*

Другие предметы, форма которых способна изменяться, испытывают подобные перемещения (изменения положения без изменения формы) только в исключительных случаях. Когда тело перемещается, *изменяя форму*, мы уже не можем соответственными движениями привести органы наших чувств в то же *относительное* положение к этому телу; следовательно, мы более не в состоянии восстановить начальную совокупность впечатлений.

Только позднее и вследствие новых опытов мы научаемся разлагать тела переменной формы на меньшие элементы такого рода, что каждый из них перемещается почти по тем же законам, что и твердые тела. Мы таким образом отличаем «деформации» от других изменений состояния; при таких деформациях каждый элемент испытывает простое изменение положения, которое может быть компенсировано, но изменение, испытываемое всей совокупностью элементов, более глубоко и уже не способно компенсироваться коррелятивным движением [1].

Подобное понятие, будучи уже очень сложным, могло явиться только относительно поздно; кроме того, оно не могло бы зародиться, если бы наблюдение твердых тел уже не научило нас отличать изменения положения.

Следовательно, если бы не было твердых тел в природе, не было бы и геометрии.

Другое замечание также заслуживает того, чтобы на нем остановиться. Вообразим твердое тело, занимающее сначала положение α и затем переходящее в положение β; в первом своем положении оно про-

[1] То есть коррелятивным движением нашего собственного тела (см. выше). — *Примеч. ред.*

изведет на нас систему впечатлений A и во втором — систему впечатлений B. Пусть имеется теперь второе твердое тело, качественно вполне отличное от первого, например, иного цвета. Предположим еще, что оно переходит от положения α', в котором оно производит на нас систему впечатлений A', к положению β', в котором оно вызывает в нас систему впечатлений B'.

Вообще, ни система A не будет иметь ничего общего с системой A', ни система B с системой B'. Переход от системы A к системе B и переход от системы A' к системе B' суть, следовательно, два изменения, которые *сами по себе*, вообще говоря, ничего общего не имеют. Между тем и то и другое изменение мы рассматриваем как перемещения; более того, мы рассматриваем их как *то же самое* перемещение. Каким образом это происходит?

Это — просто потому, что и то и другое перемещение может быть компенсировано *одним и тем же* коррелятивным движением нашего тела.

Следовательно, не что иное, как «коррелятивное движение», составляет *единственную связь* между двумя явлениями, которые иначе мы никогда и не подумали бы сближать.

С другой стороны, наше тело, благодаря огромному числу его сочленений и мускулов, может предпринимать множество различных движений; но не все они способны «компенсировать» изменение внешних предметов; к этому способны только те, при которых или все наше тело, или по крайней мере те из органов наших чувств, которых касается дело, перемещаются как целое, т. е. не изменяя относительных положений, — подобно твердому телу.

Итак:

1. Мы должны прежде всего различать две категории явлений. Одни, непроизвольные, не сопровождаемые мускульными ощущениями, приписываются нами внешним предметам; это суть внешние изменения. Другие, противоположного характера, которые мы приписываем движениям нашего собственного тела, суть изменения внутренние.

2. Мы замечаем, что известные изменения каждой из этих категорий могут быть компенсированы коррелятивным изменением другой категории.

3. Среди внешних изменений мы отличаем те, которые имеют коррелятивное изменение в другой категории; мы называем их перемещениями; среди изменений внутренних мы также отличаем те, которые имеют коррелятивное изменение в первой категории. Таким образом, благодаря этой взаимности определяется особый класс явлений, которые мы называем перемещениями.

Законы этих явлений и составляют предмет геометрии.

Закон однородности. Первый из этих законов есть закон однородности.

Предположим, что благодаря внешнему изменению α мы пришли от системы впечатлений A к системе B; потом это изменение α компенсировано соответственным волевым движением β так, что мы пришли опять к системе A.

Предположим теперь, что другое внешнее изменение α' снова приводит нас от системы A к системе B.

Опыт учит нас тогда, что это изменение α', как и α, способно компенсироваться коррелятивным волевым движением β' и что это движение β' соответствует тем же мускульным ощущениям, что и движение β, которое компенсировало α.

Именно этот факт и выражается обыкновенно словами: *пространство однородно и изотропно.*

Можно сказать также, что движение, происшедшее один раз, может повториться второй раз, третий раз и т. д., не меняя своих свойств.

В первой главе, где мы изучали природу математического умозаключения, мы видели, какое важное значение следует приписать возможности повторять неопределенное число раз одну и ту же операцию.

Именно от этого повторения математическое умозаключение приобретает свою силу; и если эта сила распространяется также на геометрические факты, то это — благодаря закону однородности.

Для полноты изложения надо было бы присоединить к закону однородности множество других аналогичных законов; я не хочу входить по поводу их в подробности, но математики резюмируют их одним словом, говоря, что перемещения образуют «группу».

Неевклидов мир. Если бы геометрическое пространство выступало в качестве кадра для *каждого* нашего представления, взятого в отдельности, то было бы невозможно представить себе образ, отделенный от этого кадра, и мы не могли бы ничего изменить в нашей геометрии.

На деле это не так: геометрия есть только резюме законов, по которым эти образы *следуют друг за другом.* В таком случае ничто не мешает нам вообразить себе ряд представлений, во всем подобных нашим обычным представлениям, но следующих друг за другом по законам, отличным от тех, к которым мы привыкли.

Поэтому понятно, что существа, умственное воспитание которых проходило бы в такой среде, где эти законы не выполняются, могли бы иметь геометрию, в значительной степени отличную от нашей.

Вообразим, например, мир, заключенный внутри большой сферы и подчиненный следующим законам. Температура здесь не равномерна; она имеет наибольшее значение в центре и понижается по мере удаления от него, делаясь равной абсолютному нулю на шаровой поверхности, которая является границей этого мира.

Я определю в точности даже закон, по которому изменяется эта температура. Пусть R будет радиус граничной поверхности, r — расстояние рассматриваемой точки от центра сферы. Абсолютная температура пусть будет пропорциональна $R^2 - r^2$.

Я предположу далее, что в этом мире все тела имеют один и тот же коэффициент расширения, именно такой, что длина какой-нибудь линейки пропорциональна абсолютной температуре.

Наконец, я предположу, что предмет, перенесенный из одной точки в другую, где температура иная, тотчас же приходит в состояние теплового равновесия со своей новой средой. В этих допущениях нет ничего ни противоречивого, ни немыслимого.

В таком случае движущийся предмет будет все уменьшаться по мере приближения к граничной сфере. Теперь заметим, что хотя этот мир ограничен с точки зрения нашей обычной геометрии, тем не менее он будет казаться бесконечным для его обитателей.

В самом деле, когда они пожелали бы приблизиться к граничной сфере, они охлаждались бы и становились бы все меньше и меньше. Поэтому шаги их постоянно укорачивались бы, и они никогда не могли бы достигнуть граничной сферы.

Если для нас геометрия есть не что иное, как изучение законов, по которым движутся неизменные твердые тела, то для этих воображаемых существ она была бы изучением законов, по которым движутся твердые тела, *изменяющиеся вследствие тех различий в температуре*, о которых я только что говорил.

Без сомнения, и в нашем мире реальные твердые тела также испытывают изменения формы и объема вследствие нагревания и охлаждения. Но устанавливая основы геометрии, мы пренебрегаем этими изменениями, так как, помимо того, что они крайне незначительны, они еще беспорядочны и, следовательно, кажутся нам случайными.

В воображаемом нами мире это было бы уже не так; эти изменения следовали бы правильным и очень простым законам. С другой стороны, различные твердые составные части тела обитателей этого мира испытывали бы такие же изменения формы и объема.

Я сделаю еще другое допущение. Я предположу, что свет здесь проходит через среды различной преломляющей способности, именно такие, что показатель преломления обратно пропорционален $R^2 - r^2$. Легко видеть, что в этих условиях световые лучи были бы не прямолинейными, а круговыми.

Чтобы оправдать все предыдущее, мне остается показать, что известные изменения, происходящие в положении внешних предметов, могут быть *компенсированы* коррелятивными движениями чувствующих существ, которые заселяют этот воображаемый мир; таким образом, может быть восстановлен первоначальный комплекс впечатлений, испытываемых этими существами.

Предположим в самом деле, что предмет перемещается, деформируясь: не как неизменное твердое тело, но как твердое тело, испытывающее неравномерные расширения, в точности соответствующие допущенному выше закону изменения температур.

Для краткости я позволю себе называть подобное движение *неевклидовым перемещением.*

Если по соседству находится чувствующее существо, его впечатления будут изменены благодаря перемещению предмета, но оно будет в состоянии восстановить их в прежнем виде, передвигаясь само надлежащим образом. Достаточно, чтобы в результате система, состоящая из предмета и чувствующего существа, рассматриваемая как одно тело, испытывала одно из тех особых перемещений, которые я назвал неевклидовыми. Это возможно, если допустить, что члены этих существ расширяются по тому же закону, что и другие тела заселяемого ими мира.

Хотя с точки зрения нашей обычной геометрии тела окажутся после такого перемещения деформированными и различные их части отнюдь не возвратятся в прежнее относительное расположение, но мы увидим, что впечатления чувствующего существа окажутся теми же.

В самом деле, если взаимные расстояния различных частей и могли измениться, тем не менее части, бывшие вначале в соприкосновении, опять будут в соприкосновении. Следовательно, осязательные впечатления не изменятся. С другой стороны, если учесть гипотезу о преломлении и кривизне световых лучей, мы убедимся, что и зрительные впечатления останутся прежними.

Итак, наши воображаемые существа должны будут, как и мы, классифицировать наблюдаемые ими явления и выделить из них «изменения положения», которые можно компенсировать соответственным волевым движением.

Если они создадут геометрию, то она не будет, подобно нашей, изучением движений наших неизменных твердых тел; это будет наука об изменениях положения, изменениях, которые они выделят в особую группу и которые будут представлять не что иное, как «неевклидовы перемещения». *Это будет неевклидова геометрия.*

Таким образом, такие же существа, как мы, воспитание которых происходило бы в подобном мире, имели бы геометрию, отличную от нашей.

Мир четырех измерений. Так же, как неевклидов мир, можно представить себе мир четырех измерений.

Чувство зрения, даже при единственном глазе, в соединении с мускульными ощущениями, сопровождающими движения глазного яблока, могло бы оказаться достаточным для познания пространства трех измерений.

Образы внешних предметов рисуются на сетчатке, которая является картиной двух измерений; это — *перспективные изображения.*

Но так как эти предметы, а также и наш глаз, подвижны, то мы последовательно видим различные перспективные изображения одного и того же тела, схваченные с нескольких различных точек зрения.

В то же время мы убеждаемся, что переход от одного перспективного изображения к другому часто сопровождается мускульными ощущениями. Если переходы от перспективы A к перспективе B и от перспективы A' к перспективе B' сопровождаются одними и теми же мускульными ощущениями, то мы сближаем их между собой как операции одной и той же природы.

Изучая затем законы, по которым сочетаются между собой эти операции, мы убеждаемся в том, что они образуют группу, которая имеет такую же структуру, как и группа движений неизменных твердых тел.

Но мы видели, что именно из свойств этой группы мы извлекли понятие геометрического пространства и пространства трех измерений.

Мы понимаем, таким образом, как идея пространства трех измерений могла возникнуть из наблюдения этих перспективных изображений, хотя каждое из них имеет только два измерения; дело в том, что *они следуют друг за другом по определенным законам.*

Теперь таким же образом, как на плоскости можно сделать перспективное изображение фигуры трех измерений, можно сделать изображение фигуры четырех измерений на экране трех (или двух) измерений. Для геометра эта задача в высшей степени простая.

Можно также получить несколько перспективных изображений одной и той же фигуры с нескольких различных точек зрения. Мы можем легко представить себе эти перспективные изображения, так как они имеют только три измерения.

Вообразим, что различные перспективные изображения одного и того же предмета следуют одно за другим и что переход от одного к другому сопровождается мускульными ощущениями.

Ясно, что два из таких переходов будут рассматриваться нами как две операции одной и той же природы, если они будут связаны с такими же мускульными ощущениями.

Теперь ничто не мешает нам вообразить себе, что эти операции сочетаются по любому заданному закону, например так, что образуют группу такой же структуры, как и группа движений неизменного твердого тела четырех измерений.

В таком представлении нет ничего невозможного, и однако это как раз такие же ощущения, которые испытывало бы существо, обладающее сетчаткой двух измерений и возможностью перемещаться в пространстве четырех измерений.

В этом именно смысле допустимо говорить о возможности представить себе четвертое измерение.

Было бы невозможно представить себе этот вид пространства Гильберта, о котором мы говорили в предыдущей главе, так как это пространство уже не является непрерывностью второго порядка. Следовательно, оно слишком глубоко отличается от нашего обычного пространства.

Выводы. Мы видим, что опыт играет необходимую роль в происхождении геометрии; но было бы ошибкой заключить, что геометрия — хотя бы отчасти — является экспериментальной наукой.

Если бы она была экспериментальной наукой, она имела бы только временное, приближенное — и весьма грубо приближенное! — значение. Она была бы только наукой о движении твердых тел. Но на самом деле она не занимается реальными твердыми телами; она имеет своим предметом некие идеальные тела, абсолютно неизменные, которые являются только упрощенным и очень отдаленным отображением реальных тел.

Понятие об этих идеальных телах целиком извлечено нами из недр нашего духа, и опыт представляет только повод, побуждающий нас его использовать.

Предмет геометрии составляет изучение лишь частной «группы» перемещений, но общее понятие группы существует раньше в нашем уме* (dans notre esprit), по крайней мере в виде возможности. Оно присуще нам не как форма нашего восприятия, а как форма нашей способности суждений. Надо только среди всех возможных групп выбрать ту, которая служила бы, так сказать, *эталоном*, с которым мы соотносили бы реальные явления. Опыт направляет нас при этом выборе, но не делает его для нас обязательным; он показывает нам не то, какая геометрия наиболее правильна, а то, какая наиболее *удобна*.

Читатель заметит, что я был бы в состоянии описывать фантастические миры, которые я представлял себе выше, *не переставая пользоваться языком обыкновенной геометрии.*

И в самом деле, мы не изменили бы его, даже если бы были перенесены в такой мир.

Существа, получившие там свое развитие, нашли бы без сомнения более удобным создать геометрию, отличную от нашей, которая лучше соответствовала бы их впечатлениям. Что же касается нас, то наверное даже при наличии *тех же* впечатлений мы нашли бы более удобным не изменять наших привычек.

Глава V

ОПЫТ И ГЕОМЕТРИЯ

1. В предыдущем я уже неоднократно старался показать, что принципы геометрии не являются фактами опыта и что, в частности, постулат Евклида не мог бы быть доказан опытом. Какими бы доказательными ни представлялись мне вышеприведенные соображения, я считаю нужным еще остановиться на этом вопросе, так как здесь мы встречаем ложную идею, глубоко укоренившуюся во многих умах.

2. Пусть мы изготовили материальный круг, измерили его радиус и окружность и желаем убедиться, равно ли отношение этих величин числу π. Что мы делаем в этом случае? Мы производим опыт не над

свойствами пространства, а над свойствами как того материала, из которого приготовлен этот *диск*, так и того, из которого сделан метр, служащий для измерений.

3. Геометрия и астрономия. Но вопрос ставят еще иначе. Если справедлива геометрия Лобачевского, то параллакс очень удаленной звезды будет конечным; если справедлива геометрия Римана, то он будет отрицательным. Эти результаты, по-видимому, допускают опытную проверку; можно было надеяться, что астрономические наблюдения могут решить выбор между тремя геометриями.

Но то, что в астрономии называется прямой линией, есть просто траектория светового луча. Если, следовательно, сверх ожидания, удалось бы открыть отрицательные параллаксы или доказать, что все параллаксы больше известного предела, то представлялся бы выбор между двумя заключениями: мы могли бы или отказаться от евклидовой геометрии, или изменить законы оптики и допустить, что свет распространяется не в точности по прямой линии. Бесполезно добавлять, что всякий счел бы второе решение более удобным.

Таким образом, евклидовой геометрии нечего опасаться новых опытов.

4. Можно ли утверждать, будто некоторые явления, возможные в евклидовом пространстве, невозможны в неевклидовом, так что опыт, констатируя эти явления, прямо противоречил бы гипотезе о неевклидовом пространстве? По моему мнению, подобный вопрос не может возникнуть. С моей точки зрения, он вполне равносилен следующему вопросу, нелепость которого всякому бросится в глаза: существуют ли длины, которые можно выразить в метрах и сантиметрах, но которых нельзя измерить туазами, футами и дюймами,— так что опыт, констатируя существование этих длин, прямо противоречил бы тому допущению, что существуют туазы, делящиеся на 6 футов.

Рассмотрим вопрос ближе. Допустим, что прямая линия в евклидовом пространстве обладает некоторыми двумя свойствами, которые я назову A и B; что в неевклидовом пространстве она по-прежнему обладает свойством A, но уже не обладает свойством B;

допустим, наконец, что в евклидовом — как и в неевклидовом — пространстве прямая линия есть единственная линия, обладающая свойством A.

Если бы это было так, то опыт мог бы решить выбор между гипотезами Евклида и Лобачевского. Представим себе, что мы констатировали бы, что известный конкретный предмет, доступный опыту, например пучок световых лучей, обладает свойством A; отсюда мы заключили бы, что он прямолинейный, и исследовали бы затем, обладает он свойством B или нет.

Но *это не так*; не существует свойства, которое могло бы, как это свойство A, быть абсолютным критерием, позволяющим признать, что данная линия есть прямая, и отличить ее от всякой другой линии.

Скажут, например, что это свойство следующее: «прямая линия есть такая линия, что фигура, часть которой она составляет, может двигаться без изменения взаимных расстояний ее точек, причем все точки этой линии остаются неподвижными».

В самом деле, здесь мы имеем свойство, которое и в евклидовом и в неевклидовом пространстве принадлежит прямой и только прямой. Но как узнать на опыте, обладает ли этим свойством тот или другой конкретный предмет? Для этого понадобится измерить расстояния между некоторыми его точками, но как убедиться, что та конкретная величина, которую я измерил своим материальным прибором, в точности представляет собой абстрактное расстояние между этими точками?

Таким образом, мы лишь отодвинули трудность.

И действительно, свойство, которое я изложил, не есть свойство лишь одной прямой линии, оно есть свойство как прямой, так и расстояния. Чтобы оно могло служить абсолютным критерием, надо иметь возможность установить не только то, что оно не принадлежит никакой иной линии, кроме прямой, и принадлежит расстоянию, но еще то, что оно не принадлежит никакой другой линии, кроме прямой, и никакой другой величине, кроме расстояния. А именно это неверно.

Поскольку невозможно указать конкретный опыт, который мог бы быть истолкован в евклидовой системе и не мог бы быть истолкован в системе Лобачевского, то я могу заключить: никогда никакой опыт не окажется в противоречии с постулатом Евклида, но зато и никакой опыт не будет никогда в противоречии с постулатом Лобачевского.

5. Итак, евклидова (или неевклидова) геометрия никогда не может оказаться в прямом противоречии с опытом. Но этого недостаточно. Возникает вопрос: не может ли случиться, что ее можно будет согласовать с опытом лишь путем нарушения принципа достаточного основания и принципа относительности пространства?

Объясняюсь подробнее. Рассмотрим какую-нибудь материальную систему; мы обратим внимание, с одной стороны, на «состояние» различных тел этой системы (например, на их температуру, электрический потенциал и т. д.), с другой стороны — на их положение в пространстве; и среди данных, которые позволяют определить это положение, мы различим еще взаимные расстояния этих тел, определяющие их относительные положения, и условия, которые определяют абсолютное положение системы и ее абсолютную ориентировку в пространстве.

Законы явлений, которые будут происходить в этой системе, могут зависеть от состояния этих тел и их взаимных расстояний; но вследствие относительности и пассивности пространства они не будут зависеть от абсолютного положения и абсолютной ориентировки системы.

Другими словами, состояние тел и их взаимные расстояния в какой-нибудь момент будут зависеть от состояния этих же тел и их взаимных расстояний в начальный момент; но они ни в каком случае не будут зависеть от абсолютного начального положения системы и ее абсолютной начальной ориентировки. Это свойство для краткости я буду называть *законом относительности*.

Я говорил до сих пор как геометр, следующий Евклиду. Всякий опыт, как я уже сказал, допускает истолкование на почве евклидовой гипотезы; но он допускает его и на почве гипотезы неевклидовой. Мы произвели ряд опытов; мы их истолковали на основании евклидовой гипотезы и нашли, что это истолкование согласно с «законом относительности».

Истолкуем их теперь по неевклидовой гипотезе. Это всегда возможно; отличие же лишь в том, что в этом новом истолковании неевклидовы расстояния между отдельными телами вообще не будут теми же, что евклидовы расстояния в первом истолковании.

Но будут ли истолкованные таким новым способом опыты по-прежнему оставаться в согласии с нашим «законом относительности»? И если это согласие не сохранится, то не будем ли мы все-таки вправе сказать, что опыт доказал неправильность неевклидовой геометрии?

Легко видеть, что это опасение напрасно; в самом деле, для того чтобы можно было приложить закон относительности во всей строгости, надо было бы приложить его ко всей Вселенной. Если же иметь в виду только часть этой Вселенной и если абсолютное положение этой части изменилось, то и расстояния ее относительно других тел Вселенной также изменились, следовательно, их влияние на рассматриваемую часть Вселенной могло увеличиться или уменьшиться; а это может изменить законы происходящих здесь явлений.

Но если система, о которой у нас идет речь, есть вся Вселенная, то опыт бессилен дать нам указания о ее абсолютном положении и ориентировке в пространстве. Все, что могут обнаружить наши инструменты, сколь бы совершенны они ни были,— это состояние различных частей Вселенной и их взаимные расстояния.

Таким образом, наш закон относительности может быть формулирован так:

Отсчеты, которые мы можем производить в какой-нибудь момент на наших инструментах, будут зависеть только от отсчетов, которые мы могли бы произвести на тех же инструментах в начальный момент.

Но подобная формулировка не зависит ни от какого истолкования опытов. Если закон верен в евклидовом истолковании, он будет верен также и в неевклидовом истолковании.

Я позволю себе по этому поводу сделать маленькое отступление. Выше я говорил о данных, определяющих положение различных тел системы; мне следовало бы сказать также о данных, определяющих их скорости; тогда мне пришлось бы различать, с одной стороны, скорость, с которой изменяются взаимные расстояния различных тел, а с другой — скорости переноса и вращения системы, т. е. скорости, с которыми изменяются ее абсолютное положение и ориентировка.

Для полного удовлетворения ума надо было бы закон относительности формулировать так:

Состояние тел и их взаимные расстояния в какой-нибудь момент, так же, как и скорости, с которыми изменяются эти расстояния в тот же момент, зависят только от состояния этих тел, их взаимных расстояний в начальный момент, а также от скоростей, с которыми последние изменялись в этот начальный момент; но они не будут зависеть ни от начального абсолютного положения системы, ни от ее абсолютной ориентировки, ни от скоростей, с которыми изменялись это абсолютное положение и ориентировка в начальный момент.

К сожалению, закон, сформулированный таким образом, не находится в согласии с опытами, по крайней мере с обычным их истолкованием.

Представим себе человека, перенесенного на некоторую планету, где небо постоянно закрыто густым покровом облаков, так что никогда не видно других светил; пусть жизнь этой планеты течет так, как если бы она была изолирована в пространстве. Все же этот человек мог бы заметить ее вращение, измеряя, например, ее сжатие (это производится обыкновенно при помощи астрономических наблюдений, но могло бы быть произведено и средствами чисто геодезическими) или повторяя опыт Фуко с маятником. Следовательно, абсолютное вращение этой планеты могло бы быть обнаружено.

Факт этот смущает философа, но физик вынужден его принять.

Известно, что из этого факта Ньютон заключил о существовании абсолютного пространства; я никак не могу согласиться с таким заключением; причины этого я покажу в третьей части, так как я не хотел бы касаться такого трудного вопроса мимоходом.

Таким образом, мне поневоле пришлось в формулировку закона относительности ввести скорости всякого рода среди данных, определяющих состояние тел.

Во всяком случае, трудность эта остается одной и той же как для геометрии евклидовой, так и для геометрии Лобачевского; поэтому я особенно не был обеспокоен ею и упомянул о ней только к случаю. Что важно, так это вывод: опыт не может решить выбор между Евклидом и Лобачевским.

Итак, как ни взглянуть на дело, невозможно найти разумное основание для геометрического эмпиризма.

6. Опыты обнаруживают только взаимные отношения тел; никакой опыт не даст и не может дать указаний об отношениях тел к пространству или о взаимных отношениях различных частей пространства.

«Да,— скажете вы на это,— единичный опыт недостаточен, так как он дает только одно уравнение со многими неизвестными; но когда я произведу достаточное количество опытов, я буду иметь достаточно уравнений, чтобы вычислить все мои неизвестные».

Но недостаточно знать высоту грот-мачты,— возражаю я,— чтобы вычислить возраст капитана. Определив все размеры корпуса корабля, вы будете иметь много уравнений, но все-таки вы не узнаете этого возраста. Все ваши измерения, относящиеся к частям корабельного корпуса, не могут обнаружить вам ничего, кроме того, что касается этих частей. Точно так и ваши опыты, как бы многочисленны они ни были: указывая только на взаимные отношения тел, они не скажут нам ничего о взаимных отношениях различных частей пространства.

7. Вы скажете, что если опыты относятся к телам, то они относятся по крайней мере к геометрическим свойствам тел.

Но, прежде всего,— что вы понимаете под геометрическими свойствами тел? Допустим, что здесь речь идет об отношениях тел к пространству; но эти свойства недоступны опытам, которые касаются только взаимного отношения между телами. Одного этого замечания было бы достаточно, чтобы показать, что речь идет о другом.

Постараемся прежде всего понять смысл выражения: геометрические свойства тел. Когда я говорю, что тело слагается из нескольких частей, я думаю, что этим я не высказываю суждения о геометрическом свойстве; это осталось бы справедливым, даже если бы я условился пользоваться неподходящим названием точек для наименьших рассматриваемых мною частей.

Когда я говорю, что такая-то часть такого-то тела находится в соприкосновении с такой-то частью другого какого-нибудь тела, я высказываю предложение, касающееся взаимных отношений этих двух тел, но не их отношений к пространству.

Я думаю, вы согласитесь со мной, что здесь мы имеем дело не с геометрическими свойствами; по крайней мере, вы, наверно, согласитесь, что эти свойства независимы от каких бы то ни было понятий метрической геометрии.

После этого представим себе, что имеется твердое тело, состоящее из восьми тонких железных стержней OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG и OH, соединенных вместе своими концами O.

Пусть, с другой стороны, мы имеем второе твердое тело, например кусок дерева, на котором отметим чернилами три маленьких пятнышка; я назову их α, β, γ.

Пусть мы убедились затем, что можно привести в соприкосновение $\alpha\beta\gamma$ с AGO (т. е. одновременно α с A, β с G и γ с O), потом — что последовательно можно привести в соприкосновение $\alpha\beta\gamma$ с BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, затем с AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO, потом $\alpha\gamma$ последовательно с AB, BC, CD, DE, EF, FA.

Вот опытные факты, в которых можно удостовериться, не имея наперед никакого знания о форме или метрических свойствах пространства. Они никоим образом не относятся к «геометрическим свойствам тел». И эти факты будут невозможны, если тела, над которыми экспериментируют, движутся, следуя группе такой же структуры, как группа Лобачевского (я хочу сказать — по законам движения твердых тел в геометрии Лобачевского). Значит, достаточно этих фактов, чтобы убедиться, что тела эти движутся, следуя евклидовой группе, или, по крайней мере, что они движутся не в соответствии с группой Лобачевского.

Что эти факты совместимы с евклидовой группой, легко убедиться: стоит только представить себе $\alpha\beta\gamma$ неизменяемым твердым телом нашей обычной геометрии, имеющим форму прямоугольного треугольника, а точки A, B, C, D, E, F, G, H — вершинами многогранника, образованного двумя правильными шестигранными пирамидами нашей обыкновенной геометрии, имеющими общим основанием $ABCDEF$, а вершинами — одна G, другая H.

Предположим теперь, что вместо предыдущих фактов мы наблюдали, что можно опять-таки наложить $\alpha\beta\gamma$ последовательно на AGO, BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO, а потом можно $\alpha\beta$ (отнюдь не $\alpha\gamma$) наложить последовательно на AB, BC, CD, DE, EF и FA.

Вот опытные факты, которые можно было бы наблюдать, если бы неевклидова геометрия была правильна и если бы $\alpha\beta\gamma$ и $OABCDEFGH$ были неизменяемыми твердыми телами: первое — в форме прямоугольного треугольника, а второе — в форме двойной правильной шестигранной пирамиды соответствующих размеров.

Итак, эти новые факты невозможны, раз тела движутся, следуя евклидовой группе; но они стали бы возможны, если бы допустить, что тела движутся подобно группе Лобачевского. Их было бы, следовательно, достаточно (если бы они наблюдались), чтобы убедиться, что рассматриваемые тела не движутся, следуя евклидовой группе.

Таким образом, не вводя никакой гипотезы о форме и природе пространства, об отношениях тел к пространству, не приписывая телам никакого геометрического свойства, я нашел факты, позволяющие мне показать, что доступные опытам тела в одном случае движутся, следуя структуре группы Евклида, в другом — следуя структуре группы Лобачевского.

Однако нельзя сказать, что первый ряд фактов может составить опыт, доказывающий, что пространство является евклидовым, а второй — опыт, доказывающий, что пространство неевклидово.

В самом деле, можно было бы представить себе тела, движущиеся таким образом, что они осуществляют второй ряд фактов. Доказательством служит то, что любой механик мог бы их построить, если бы он захотел взять на себя этот труд и если бы придавал этому значение. Однако из этого вы не заключили бы, что пространство неевклидово, тем более, что обыкновенные твердые тела продолжали бы существовать и тогда, когда механик построил бы странные тела, упомянутые мною: так что пришлось бы даже заключить, что пространство является одновременно евклидовым и неевклидовым.

Предположим, например, что мы имеем большую сферу радиуса R и что температура убывает от центра к поверхности этой сферы по закону, о котором я говорил, описывая неевклидов мир.

Мы могли бы иметь тела, расширением которых можно было бы пренебречь и которые вели бы себя как обыкновенные неизменяемые твердые тела; с другой стороны, мы могли бы иметь тела очень растяжимые, которые вели бы себя как неевклидовы твердые тела. Мы могли бы иметь две двойные пирамиды $OABCDEFGH$ и $O'A'B'C'D'E'F'G'H'$ и два треугольника $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$. Первая двойная пирамида была бы прямолинейной, вторая — криволинейной; треугольник $\alpha\beta\gamma$ был бы сделан из нерастяжимого, а треугольник $\alpha'\beta'\gamma'$ — из очень растяжимого вещества.

Тогда можно было бы обнаружить первый ряд фактов с двойной пирамидой OAH и треугольником $\alpha\beta\gamma$ и второй — с двойной пирамидой $O'A'H'$ и треугольником $\alpha'\beta'\gamma'$. И тогда опыт, по-видимому, убеждал бы сначала, что евклидова геометрия истинна, а затем — что она ложна.

Таким образом, опыты относятся не к пространству, а к телам.

8. Добавление. Для полноты мне следовало бы еще сказать о вопросе очень тонком, который потребовал бы подробного развития; я ограничусь здесь только резюмированием того, что я изложил в «Revue de Métaphysique et de Morale» и в «The Monist». Что мы хотим сказать, когда говорим, что пространство имеет три измерения?

Мы видели важность тех «внутренних изменений», которые нам открываются нашими мускульными ощущениями. Они могут служить для характеристики различных *положений* нашего тела. Возьмем за начальное одно из этих положений A. Когда мы переходим от этого начального положения к какому-нибудь другому положению B, мы испытываем ряд мускульных ощущений S, и этим рядом S определится B. Однако заметим, что часто мы рассматриваем два ряда S и S' как определяющие одно и то же положение B (потому что начальное и конечное положение A и B остаются теми же, но промежуточные положения и соответствующие ощущения могут различаться). Как же мы узнаем об эквивалентности этих двух рядов? Это возможно потому, что они могут служить для компенсации одного и того же внешнего изменения, или, более общо, потому, что когда речь идет о компенсации внешнего изменения, один из рядов может быть заменен другим.

Среди этих рядов мы выделили те, которые одни могут компенсировать внешнее изменение и которые мы назвали «перемещениями». Так как мы не можем различать два слишком близких перемещения, то совокупность этих перемещений представляет характерные черты физической непрерывности; опыт учит нас, что эта физическая непрерывность имеет шесть измерений; но мы не знаем еще, сколько измерений имеет пространство само по себе; нам надо решить сначала другой вопрос.

Что такое точка пространства? Все думают, что знают это, но это только иллюзия. Когда мы стараемся представить себе точку пространства, то она выступает в виде черного пятна на белой бумаге или как белое пятно от мела на черной доске; это всегда объект. Поэтому вопрос должен быть поставлен следующим образом: что значит, когда я говорю, что предмет B находится в той же точке, которую только что занимал предмет A? И еще: какой критерий позволит мне узнать это?

Я хочу этим сказать, что *хотя сам я не шевелился* (о чем свидетельствует мое мускульное чувство), но мой указательный палец, который только что касался предмета A, теперь касается предмета B. Я мог бы воспользоваться другими критериями, например средним пальцем или чувством зрения. Но первый критерий достаточен, я знаю, что если он отвечает утвердительно, то все другие критерии дадут тот же ответ. Я знаю это *из опыта* — я не могу знать этого à priori.

Поэтому-то я говорю также, что осязание не может действовать на расстоянии; это — только другой способ выражения того же экспериментального факта. И если я говорю, наоборот, что зрение действует на расстоянии, то это значит, что критерий, доставляемый зрением, может отвечать утвердительно, тогда как другие отвечают отрицательно.

В самом деле, пусть некоторый предмет даже после удаления дает свое отображение в той же точке сетчатки. Тогда зрение дает положительный ответ: предмет пребывает в той же точке, но осязание отвечает отрицательно, ибо палец, только что касавшийся предмета, теперь уже больше его не касается. Если бы опыт показал нам, что касание одним пальцем дает отрицательный ответ, тогда как касание другим — положительный, то мы сказали бы то же самое: что осязание действует на расстоянии.

Итак, для каждого положения моего тела мой указательный палец определяет некоторую точку; это и только это определяет точку пространства.

Каждому положению соответствует, таким образом, одна точка; но часто бывает, что та же точка соответствует нескольким различным положениям (например, в том случае, когда мы говорим, что наш палец не двигался, между тем как остальная часть тела переместилась). Мы выделяем, следовательно, среди изменений положения такие, при которых палец не двигается. Как мы приходит к этому? Только благодаря тому, что мы часто замечаем, как при этих изменениях предмет, находящийся в контакте с пальцем, не разрывает этого контакта.

Отнесем к одному и тому же классу все те положения, которые вытекают одни из других путем одного из выделенных нами таким образом изменений. Всем положениям одного и того же класса будет соответствовать одна и та же точка пространства. Поэтому каждому классу будет соответствовать точка, и каждой точке — класс. Но можно сказать: то, к чему относится опыт, не есть точка; это есть указанный класс изменений или лучше — соответственный класс мускульных ощущений.

И когда мы говорим, что пространство имеет три измерения, мы хотим просто сказать, что совокупность этих классов выступает перед нами с характерными чертами физической непрерывности трех измерений.

Мог бы показаться заманчивым тот вывод, что именно опыт показал нам, сколько измерений имеет пространство. Но в действительности наши опыты имели здесь дело еще не с пространством, а с нашим телом и с его отношениями к соседним предметам. Кроме того, они слишком грубы.

В нашем уме предсуществовала скрытая идея известного числа групп: это — те группы, теорию которых создал Ли. Какую из них мы выберем в качестве как бы эталона, с которым будем сравнивать реальные явления? И, выбрав эту группу, какую из ее подгрупп мы возьмем для характеристики точки пространства? Раньше нами руководил опыт, показывая, какой выбор лучше соответствует свойствам нашего тела. Но тут его роль ограничивается.

Опыт предков. Часто говорят, что если индивидуальный опыт не мог породить геометрию, то это не относится к опыту всего человеческого вида. Но что под этим понимается? Не хотят ли этим сказать, что если мы не в состоянии доказать постулат Евклида, то наши предки могли это сделать? Ни в коем случае. Этим хотят сказать, что в силу естественного отбора наш ум приспособился к условиям внешнего мира, что он усвоил себе геометрию, наиболее выгодную для вида, или, другими словами, наиболее удобную. Но это соответствует нашим выводам о том, что геометрия не истинна, а только выгодна.

Часть III

СИЛА

Глава VI

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Англичане преподают механику как науку экспериментальную; на континенте же ее всегда излагают как науку более или менее дедуктивную и априорную. Бесспорно, правы англичане; но как же оказалось возможным так долго держаться другого способа изложения? Почему ученые на континенте, старавшиеся избежать привычек своих предшественников, чаще всего оказывались не в состоянии полностью от них освободиться?

С другой стороны, если принципы механики не имеют иного источника, кроме опыта, не являются ли они в силу этого только приближенными и временными? Не могут ли новые опыты когда-нибудь заставить нас видоизменить эти принципы или даже совсем отказаться от них?

Трудность решения этих естественно возникающих вопросов происходит главным образом от того, что руководства по механике не вполне ясно различают, где опыт, где математическое суждение, где условное соглашение, где гипотеза.

Это еще не все:

1) Абсолютного пространства не существует; мы познаем только относительные движения; между тем механические факты чаще всего излагают так, как если бы существовало абсолютное пространство, к которому их можно было бы отнести.

2) Не существует абсолютного времени; утверждение, что два промежутка времени равны, само по себе не имеет смысла и можно принять его только *условно.*

3) Мы не способны к непосредственному восприятию не только равенства двух промежутков времени,

но даже простого факта одновременности двух событий, происходящих в различных местах; я разъяснил это в статье, озаглавленной «La mesure du temps» [1]).

4) Наконец, наша евклидова геометрия есть лишь род условного языка; мы могли бы изложить факты механики, относя их к неевклидову пространству, которое было бы основой, менее удобной, но столь же законной, как и наше обычное пространство; изложение слишком осложнилось бы, но осталось бы возможным.

Таким образом, абсолютное пространство, абсолютное время, даже сама геометрия не имеют характера вещей, обусловливающих собой механику; они так же мало предваряют существование механики, как мало французский язык логически предваряет существование истин, выражаемых по-французски.

Можно было бы попытаться изложить основные законы механики на языке, независимом от всех этих соглашений; тогда, без сомнения, можно было бы лучше отдать себе отчет в том, что представляют эти законы сами по себе; как раз это и попытался сделать (по крайней мере отчасти) Андрад в своих «Leçons de Mécanique physique».

Формулировка этих законов оказалась бы, конечно, гораздо более сложной, потому что все указанные выше соглашения и созданы именно для того, чтобы сократить и упростить эту формулировку.

Здесь я оставляю в стороне все эти трудности, за исключением вопроса об абсолютном пространстве. Я далек от мысли пренебрегать ими; но мы достаточно разобрали их в двух первых частях.

Итак, я допущу *временно* абсолютное время и евклидову геометрию.

Принцип инерции. Тело, на которое не действует никакая сила, может двигаться только прямолинейно и равномерно.

Есть ли это истина, присущая à priori нашему разуму? Если бы это было так, то как же не знали ее

---

[1]) Revue de Métaphysique et de Morale. — Janvier, 1898. — T. 6. — P. 1—13. Статья вошла в виде второй главы книги «Ценность науки», см. наст. изд., с. 218. Ранее перевод ее публиковался: Пуанкаре А. Избранные труды, т. III. — М.: Наука, 1974. — С. 419; Принцип относительности. — М.: Атомиздат, 1973. — С. 12. — *Примеч. ред.*

греки? Как могли они думать, что движение прекращается, как только перестает действовать вызвавшая его причина, или что всякое тело, не встречающее никаких препятствий со стороны, принимает круговое движение, как наиболее совершенное из всех движений?

Говорят, что скорость тела не может измениться, раз нет основания для ее изменения; но не можем ли мы с таким же правом утверждать, что не может измениться положение тела или кривизна его траектории, раз внешняя причина не вызывает их изменения?

Если принцип инерции не принадлежит к числу априорных истин, то не значит ли это, что мы имеем в нем экспериментальный факт? Но разве когда-нибудь экспериментировали над телами, на которые не действовала никакая сила? И как можно было бы получить уверенность, что на эти тела не действует никакая сила? Обыкновенно ссылаются на пример бильярдного шара, очень долгое время катящегося по мраморному столу; но на каком основании мы говорим, что на него не действует никая сила? Не на том ли, что он слишком удален от всех других тел, чтобы испытывать от них сколько-нибудь заметное действие? Однако он не дальше от земли, чем в том случае, если бы был свободно брошен в воздухе; а всякий знает, что в таком случае он подвергся бы влиянию тяжести, обусловленному земным притяжением.

Преподаватели механики обычно быстро излагают пример с шаром; но они прибавляют, что принцип инерции проверяется косвенно в своих следствиях. Это — неправильное выражение; очевидно, они хотят сказать, что можно проверить различные следствия более общего принципа, по отношению к которому принцип инерции является только частным случаем.

Этот общий принцип я предложу сформулировать так:

Ускорение тела зависит только от положения этого тела и соседних тел и от их скоростей. Математик сказал бы, что движения всех материальных частиц Вселенной определяются дифференциальными уравнениями второго порядка.

Чтобы уяснить, что здесь мы имеем дело с естественным обобщением закона инерции, я позволю себе привести один воображаемый случай. Выше я указывал, что закон инерции не присущ нам à priori; другие законы были бы столь же хорошо, как и он, совместимы с принципом достаточного основания. Когда на тело не действует никакая сила, то мы могли бы вообразить, что неизменным является не скорость его, а его положение или его ускорение.

Итак, представим себе на минуту, что один из этих двух гипотетических законов есть закон природы и заступает место нашего закона инерции. Каково было бы его естественное обобщение? Поразмыслив минуту, мы это уясним.

В первом случае пришлось бы допустить, что скорость тела зависит только от его положения и от положения соседних тел; во втором — что изменение ускорения тела зависит только от положения этого тела и соседних тел, от их скоростей и от их ускорений.

Или, говоря математическим языком, дифференциальные уравнения движения были бы в первом случае первого порядка, во втором — третьего.

Видоизменим несколько наш воображаемый пример. Представим себе мир, аналогичный нашей Солнечной системе, лишь с тем отличием, что здесь все орбиты планет благодаря чистой случайности не имеют эксцентриситетов и наклонений. Представим себе далее, что массы этих планет слишком ничтожны, чтобы их взаимные возмущения были ощутимы. Астрономы, населяющие одну из этих планет, не преминули бы заключить, что орбита светила может быть только круговой и параллельной определенной плоскости; тогда положения светила в данный момент было бы достаточно для определения его скорости и всей его траектории. Закон инерции, который они установили бы, был бы первый из двух гипотетических законов, о которых я только что говорил.

Вообразим теперь, что вдруг через эту систему проходит с огромной скоростью массивное тело, пришедшее из отдаленных созвездий. Все орбиты окажутся сильно возмущенными. Но это еще не очень смутило бы наших астрономов; они догадались бы, что это новое светило является единственным виновником всего зла. Стоит ему удалиться,— сказали бы они,— и порядок восстановится сам собой; конечно, расстояния планет от Солнца уже не станут вновь такими же, какими они были до катастрофы, но когда не будет более возмущающего светила, орбиты снова станут круговыми. И только тогда, когда возмущающее тело было бы уже далеко, а орбиты, вместо того чтобы опять стать круговыми, превратились бы в эллиптические,— только тогда эти астрономы заметили бы свою ошибку и необходимость переделать всю свою механику.

Я несколько подробнее остановился на этих гипотезах, потому что, как мне думается, уяснить себе содержание нашего обобщенного закона инерции можно, только сопоставляя его с противоположным допущением.

Мы возвращаемся теперь к этому обобщенному закону инерции. Спрашивается, проверен ли он в настоящее время на опыте, и возможно ли это вообще? Когда Ньютон писал свои «*Начала*» [1]), он смотрел на эти истину как на выработанную и доказанную экспериментально. Таковой она была в его глазах не только благодаря антропоморфному представлению, о котором речь будет дальше, но благодаря трудам Галилея; она была таковой и в силу законов Кеплера; действительно, согласно этим законам траектория планеты полностью определяется ее начальными положением и скоростью; а это как раз то, чего требует наш обобщенный принцип инерции.

Чтобы этот принцип оказался истинным только по внешнему виду, чтобы можно было опасаться, что когда-нибудь он будет заменен одним из принципов, которые я сейчас противопоставлял ему, пришлось бы допустить, что мы введены в заблуждение какой-нибудь удивительной случайностью вроде той, которая в развитом мною выше примере ввела в заблуждение наших воображаемых астрономов.

Подобная гипотеза слишком неправдоподобна, чтобы на ней останавливаться. Никто не поверит в возможность таких случайностей. Конечно, вероятность того, чтобы два эксцентриситета были как раз

---

[1]) Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1686. Русский перевод: Ньютон И. Математические начала натуральной философии/Пер. А. Н. Крылова//Собрание трудов академика А. Н. Крылова, т. VII. — М.; Л.: Изд. АН СССР, 1936. — *Примеч. ред.*

равны нулю (в пределах погрешностей наблюдения), не меньше, чем вероятность того, чтобы один был равен, например, 0,1, а другой 0,2 (тоже в пределах погрешностей наблюдения). Вероятность простого события не меньше вероятности сложного; и тем не менее, когда такое простое событие наступает, мы не согласимся приписать его случайности; мы не захотим верить, что природа умышленно ввела нас в заблуждение. Устраняя гипотезу о возможности заблуждений такого рода, мы можем признать, что, поскольку дело касается астрономии, наш закон был проверен на опыте.

Но астрономия еще не составляет всей физики. Не можем ли мы опасаться, что какой-нибудь новый опыт когда-нибудь обнаружит несостоятельность закона в том или другом отделе физики? Экспериментальный закон всегда подвержен пересмотру; мы всегда должны быть готовы к тому, что он может быть заменен другим законом, более точным.

Однако никто не выражает серьезных опасений, что закон, о котором идет речь, когда-нибудь придется отклонить или исправить. Почему же? Именно потому, что его никогда нельзя будет подвергнуть решающему испытанию.

Прежде всего, для полноты такого испытания было бы необходимо, чтобы по истечении известного времени все тела Вселенной вернулись вновь к своим начальным положениям и к своим начальным скоростям. Тогда мы увидели бы, примут ли они с этого момента вновь те траектории, по которым они уже следовали один раз.

Но такое испытание невозможно: его можно осуществить только в отдельных частях и при этом всегда будут тела, которые не вернутся к своему начальному положению; таким образом, всякое нарушение этого закона легко найдет себе объяснение.

Но это не все: в астрономии мы *видим* тела, движения которых изучаем, и мы в большинстве случаев допускаем, что они не подвержены действию других тел, которых мы не видим. Таковы те условия, в которых проверяется наш закон.

В физике дело обстоит не совсем так: если в основе физических явлений и лежит движение, то это — движение молекул, которых мы не видим. В таком случае, если ускорение одного из видимых тел представится нам зависящим от *чего-то иного*, кроме положений или скоростей других видимых тел или невидимых молекул, существование которых мы должны были допустить раньше, то ничто не помешает нам допустить, что это *что-то иное* есть положение или скорость других молекул, присутствия коих мы до сих пор не подозревали. Закон окажется спасенным.

Я позволю себе на минуту воспользоваться математическим языком, чтобы выразить ту же мысль в иной форме. Я допускаю, что мы наблюдаем n молекул и констатируем, что их $3n$ координат удовлетворяют системе $3n$ дифференциальных уравнений четвертого порядка (не второго, как того требовал бы закон инерции). Мы знаем, что, вводя $3n$ вспомогательных переменных, мы можем свести систему $3n$ уравнений четвертого порядка к системе $6n$ уравнений второго порядка. Тогда стоит допустить, что эти $3n$ вспомогательных переменных представляют координаты n невидимых молекул, и результат снова окажется в согласии с законом инерции.

Итак, этот закон, проверенный экспериментально в некоторых частных случаях, может быть без опасения распространен на самые общие случаи, так как мы знаем, что в этих общих случаях опыт уже не может ни подтвердить его, ни быть с ним в противоречии.

Закон ускорения. Ускорение тела равно действующей на него силе, деленной на его массу.

Можно ли проверить на опыте этот закон? Для этого нужно было бы измерить три величины, входящие в его выражение: ускорение, силу и массу.

Отвлекаясь от трудности, связанной с измерением времени, допустим, что возможно измерить ускорение. Но как измерить силу или массу? Мы не знаем даже, что это такое.

Что такое *масса*? Это, отвечает Ньютон, произведение объема на плотность. Лучше сказать, возражают Томсон и Тэт, что плотность есть частное от деления массы на объем. Что такое *сила*? Это, отвечает Лагранж, причина, производящая или стремящаяся произвести движение тела. Это, скажет Кирхгоф, произведение массы на *ускорение*. Но тогда почему не сказать, что масса есть частное от деления силы на ускорение.

Эти трудности непреодолимы. Определяя силу как причину движения, мы становимся на почву метафизики, и если бы таким определением пришлось удовольствоваться, оно было бы абсолютно бесплодно. Чтобы определение могло быть к чему-нибудь пригодно, оно должно научить нас *измерению* силы; к тому же этого условия и достаточно; нет никакой необходимости, чтобы определение научило нас тому, что такое сила *сама по себе*, или тому, есть ли она причина или следствие движения.

Итак, прежде всего надо определить равенство двух сил. Когда говорят, что две силы равны? Тогда, отвечают нам, когда, будучи приложены к одной и той же массе, они сообщают ей одно и то же ускорение или когда, будучи прямо противоположно направлены, они взаимно уравновешиваются. Но это определение совершенно призрачно. Силу, приложенную к данному телу, нельзя отцепить от него и прицепить затем к другому телу вроде того, как отцепляют локомотив, чтобы сцепить его с другим поездом. Поэтому и нельзя знать, какое ускорение данная сила, приложенная к данному телу, сообщила бы другому телу, *если бы была* к нему приложена. Нельзя также знать, каково было бы действие двух сил, не прямо противоположных, в том случае, *если бы* они были прямо противоположны.

Это именно определение и стараются, так сказать, материализовать, когда измеряют силу динамометром или уравновешивают ее грузом. Две силы F и F', которые я для простоты предположу вертикальными и направленными снизу вверх, приложены соответственно к двум телам C и C'; я подвешиваю одно и то же тело веса P сначала к телу C, потом к C'; если в обоих случаях имеет место равновесие, то я заключу, что две силы F и F', будучи обе равны весу P, равны между собою.

Но уверен ли я, что тело P сохранило тот же вес, когда я перенес его от первого тела ко второму? Вовсе нет, *я уверен как раз в противном*; я знаю, что напряжение силы тяжести меняется при переходе от одной точки к другой и что оно, например, больше на полюсе, чем на экваторе. Бесспорно, эта разница ничтожна, и на практике я не стал бы принимать ее в расчет; но правильное определение должно обладать математической точностью, а этой точности здесь нет. Сказанное относительно тяжести, очевидно, применимо и к упругой силе динамометра, которая может меняться в зависимости от температуры и от многих других обстоятельств.

Это не все: нельзя сказать, что вес тела P приложен к телу C и прямо уравновешивает силу F. То, что приложено к телу C, есть действие A тела P на тело C; тело P в свою очередь находится под действием, с одной стороны, своего собственного веса, с другой — противодействия R тела C на тело P. В результате сила F равна силе A, потому что уравновешивает ее; сила A равна R в силу принципа равенства действия противодействию; наконец, сила R равна весу P, потому что его уравновешивает. Уже как следствие этих трех равенств мы выводим равенство F и веса P.

Таким образом, при определении равенства двух сил нам приходится опираться на принцип равенства действия и противодействия; *значит, этот последний принцип мы должны считать уже не как экспериментальный закон, а как определение.*

Итак, устанавливая равенство двух сил, мы пользуемся двумя правилами: равенством двух взаимно уравновешивающихся сил и равенством действия противодействию. Но выше мы видели, что этих двух правил недостаточно; мы вынуждены прибегнуть к третьему правилу и допустить, что некоторые силы, как, например, вес тела, постоянны по величине и направлению. Но это третье правило, как я сказал, представляет собой экспериментальный закон и оно верно лишь приближенно; *опирающееся на него определение — плохое определение.*

Итак, нам приходится вернуться к определению Кирхгофа: *сила равна массе, умноженной на ускорение.* Теперь этот «закон Ньютона» выступает уже не как экспериментальный закон, а только как определение. Но это определение еще недостаточно, так как мы не знаем, что такое масса. Правда, он позволяет нам вычислить отношение двух сил, приложенных к одному и тому же телу в разные моменты, но он ничего не сообщает нам об отношении двух сил, приложенных к двум различным телам.

Для дополнения его придется снова прибегнуть к третьему закону Ньютона (равенство действия и противодействия), рассматривая последний опять-таки не как экспериментальный закон, а как определение. Два тела A и B действуют друг на друга; ускорение A, умноженное на массу A, равно действию B на A, таким же образом, произведение ускорения B на его массу равно противодействию A на B. И так как по определению действие равно противодействию, то массы A и B будут обратно пропорциональны ускорениям двух этих тел. Этим отношение наших двух масс определено, и дело опыта — проверить, что это отношение постоянно.

Все было бы хорошо, если бы два тела A и B были единственными, с которыми приходится считаться, и были изолированы от действия остального мира. Но этого нет; ускорение тела A зависит не только от действия тела B, но и от действия множества других тел: C, D и т. д. Поэтому, чтобы применить предыдущее правило, нужно было бы разложить ускорение тела A на несколько составляющих и выделить из них ту, которая обусловлена действием тела B.

Это разложение было бы еще возможно, если бы мы *допустили*, что действие C на A просто прикладывается к действию B на A, так что присутствие тела C не изменяет действия B на A и присутствие B не изменяет действия C на A; следовательно, если бы мы допустили, что любые два тела притягиваются, что их взаимное действие направлено по соединяющей их прямой и зависит только от их расстояния, словом — если бы мы допустили *гипотезу центральных сил*.

Известно, что для определения масс небесных тел пользуются совершенно иным принципом. Закон тяготения учит нас, что притяжение двух тел пропорционально их массам; если r есть расстояние между ними, m и m' — их массы, K — некоторая постоянная, то притяжение их будет равно

$$\frac{Kmm'}{r^2}.$$

То, что измеряют в этом случае, не есть масса как отношение силы к ускорению — это есть масса притягивающая; это — не инерция тела, а его притягательная способность.

Применение такого косвенного приема не является теоретически необходимым. Легко могло бы случиться, что притяжение было бы обратно пропорционально квадрату расстояния, не будучи пропорционально произведению масс; оно равнялось бы

$$\frac{f}{r^2},$$

но равенство

$$f = Kmm'$$

не имело бы места.

При таких условиях все-таки было бы возможно на основании наблюдений над *относительными* движениями небесных тел измерять их массы.

Но имеем ли мы право допускать гипотезу центральных сил? Верна ли она в точности? Можно ли быть уверенным, что она никогда не окажется в противоречии с опытом? Кто взял бы на себя смелость утверждать это? А ведь если нам придется оставить эту гипотезу, то рушится и все здание, воздвигнутое с таким трудом. И тогда мы уже не имеем более права говорить о составляющей ускорения A, зависящей от действия B. Мы не имеем никакого средства отличить ее от той, которая обусловлена действием C или другого тела. Правило для измерения масс становится неприложимым.

Что же тогда остается от принципа равенства действия и противодействия? Если гипотеза центральных сил отброшена, то этот принцип, очевидно, должен быть сформулирован так: геометрическая равнодействующая всех сил, приложенных к различным телам системы, изолированной от всякого внешнего воздействия, равна нулю. Или, иными словами: *движение центра тяжести этой системы является прямолинейным и равномерным.*

Здесь-то, казалось бы, мы имеем средство определить массу: положение центра тяжести зависит, очевидно, от значений, какие мы припишем массам; надо распределить эти значения таким образом, чтобы движение центра тяжести было прямолинейно и равномерно; если третий закон Ньютона верен, это всегда возможно и может быть выполнено вообще только одним способом.

Однако дело в том, что не существует системы, которая была бы изолирована от всякого внешнего воздействия; все части Вселенной подвержены более или менее сильному воздействию со стороны всех других частей. *Закон движения центра тяжести строго верен только в применении ко всей Вселенной в целом.*

Но в таком случае, чтобы извлечь из него значения масс, нужно было бы наблюдать движение центра тяжести Вселенной. Нелепость этого следствия очевидна; мы знаем только относительные движения; движение центра тяжести Вселенной навсегда останется для нас неизвестным.

Итак, у нас не остается ничего, и все наши усилия были напрасны; нет иного выхода, как остановиться на следующем определении, которое является только признанием нашего бессилия: *массы суть коэффициенты, которые удобно ввести в вычисления.*

Мы могли бы перестроить всю механику, приписывая всем массам другие значения. Эта новая механика не была бы в противоречии ни с опытом, ни с общими принципами динамики (принципом инерции, пропорциональностью сил массам и ускорениям, равенством действия и противодействия, прямолинейным и равномерным движением центра тяжести, законом площадей). Только уравнения этой новой механики были бы *менее просты.* Говоря точнее, менее просты были бы только первые члены, т. е. те, которые нам уже открыл опыт. Быть может, удалось бы изменять массы в пределах малых величин так, чтобы простота *полных* уравнений ничего бы не теряла и не приобретала.

Герц задался вопросом, строго ли верны принципы динамики. «Многим физикам, — говорит он, — покажется немыслимым, чтобы самый отдаленный опыт мог когда-нибудь что-нибудь изменить в незыблемых принципах механики; однако же то, что исходит из опыта, всегда может быть и поправлено опытом».

После того, что мы сейчас говорили, все эти опасения являются излишними. Принципы динамики выступали перед нами сначала как опытные истины; но мы вынуждены были пользоваться ими как определениями. Только *по определению* сила равна произведению массы на ускорение; вот принцип, который отныне поставлен вне пределов досягаемости любого будущего опыта. Точно так же и действие равно противодействию только по определению. Но тогда, скажут, эти недоступные проверке принципы абсолютно лишены всякого значения; опыт не может им противоречить; но они не могут и научить нас ничему полезному; зачем же тогда изучать динамику?

Такой слишком поспешный приговор был бы несправедлив. Правда, в природе нет системы, *совершенно* изолированной, совершенно изъятой от всякого внешнего воздействия; но есть системы *почти* изолированные.

Наблюдая подобную систему, можно изучать не только относительное движение ее различных частей — одних по сравнению с другими, — но и движение ее центра тяжести относительно других частей Вселенной. Тогда мы убеждаемся, что движение этого центра тяжести *почти* прямолинейно и равномерно сообразно с третьим законом Ньютона.

Это — опытная истина; но она не может быть поколеблена опытом. В самом деле, что мог бы открыть нам более точный опыт? Он открыл бы, что закон только приближенно верен; но это мы уже знаем.

Теперь выясняется, каким образом опыт, с одной стороны, мог служить основанием для принципов механики, а с другой — никогда не будет в состоянии стать с ними в противоречие.

Антропоморфная механика. Кое-кто скажет: Кирхгоф только поддался общей склонности математиков к номинализму; талант, присущий ему как физику, не предохранил его от этого. Он сделал попытку дать определение силы и взял для этого первое попавшееся предложение; но в определении силы мы и не нуждаемся: идея силы есть понятие первичное, которое ни к чему не сводится и через что-либо не определяется, мы все знаем, что́ это такое, — мы имеем его в прямой интуиции. Эта прямая интуиция проистекает из понятия усилия (de la notion d'effort), хорошо знакомого нам с детства.

Но если бы даже эта прямая интуиция и открывала нам истинную природу силы самой по себе, она была бы недостаточна для обоснования механики; мало того, она была бы совсем бесполезна. Не важно знать, что́ такое сила, а важно знать, как ее измерить.

Все, что не научает нас измерять силу, так же бесполезно механику, как было бы, например, бесполезно субъективное понятие теплого и холодного для физика, изучающего теплоту. Это субъективное понятие не может быть переведено на язык чисел; значит, оно бесполезно: ученый, у которого кожа была бы абсолютно дурным проводником тепла и который, следовательно, никогда не испытывал бы ощущений ни холода, ни тепла, мог бы не хуже других наблюдать термометр, и этого ему было бы достаточно, чтобы построить всю теорию тепла.

Так и непосредственное понятие усилия не может служить нам для измерения силы; ясно, например, что, поднимая тяжесть в пятьдесят килограммов, я утомился бы сильнее, чем человек, привыкший таскать тяжести. Более того: это понятие усилия не открывает нам истинной природы силы; оно сводится в конце концов к воспоминанию мускульных ощущений; но никто не стал бы утверждать, что Солнце испытывает мускульное ощущение, притягивая Землю.

Все, что можно найти в нем, есть символ, менее точный и менее удобный, чем стрелки, которыми пользуются геометры, но столь же далекий от действительности.

Антропоморфизм сыграл важную историческую роль в происхождении механики; быть может, он доставит иной раз символ, который покажется некоторым умам удобным; но он не может обосновать ничего, что имело бы истинно научный или истинно философский характер.

«Школа нити». Андрад в своих «Лекциях по физической механике» возродил антропоморфную механику. Школе механиков, к которой принадлежит Кирхгоф, он противополагает ту, которую он довольно своеобразно называет школой нити.

Эта школа стремится свести все к «рассмотрению некоторых материальных систем с ничтожно малой массой, находящихся в состоянии напряжения и способных передавать значительные силы отдаленным телам, — систем, идеальным типом которых является *нить*».

Нить, передающая какую-нибудь силу, под действием ее слегка удлиняется; направление нити указывает нам направление силы, а величина последней измеряется удлинением нити.

Поэтому можно предпринять, например, такой опыт. Тело A прикреплено к нити; к другому ее концу прилагают силу, величину которой изменяют до тех пор, пока нить не получит удлинения α; замечают ускорение тела A; затем отвязывают A и прикрепляют тело B; снова прилагают ту же или другую силу и изменяют ее до тех пор, пока нить снова получит удлинение α; замечают ускорение тела B. Затем опыт повторяют как с телом A, так и с телом B, но уже таким образом, чтобы нить получала удлинение β. Четыре отмеченных ускорения должны быть пропорциональными. Таким образом получается опытная проверка сформулированного выше закона ускорения.

Далее подвергают тело совместному действию нескольких тождественных нитей, равно натянутых, и исследуют на опыте, как должны быть расположены все эти нити, чтобы тело оставалось в равновесии. Получается опытная проверка правила сложения сил.

Однако чего же мы достигли в конце концов? Мы определили силу, приложенную к нити, деформацией, испытываемой этою нитью, — это довольно основательно; мы допустили затем, что если тело привязано к нити, то сила, передаваемая ему этой нитью, равна действию, которое это тело оказывает на нить; в конце концов мы воспользовались принципом равенства действия противодействию, рассматривая его не как опытную истину, но как само определение силы.

Это определение совершенно так же условно, как и определение Кирхгофа, но оно гораздо менее общо. Не все силы могут быть передаваемы при помощи нитей (к тому же для возможности сравнивать их необходимо было бы, чтобы все они передавались совершенно одинаковыми нитями). Если бы даже допустить, что Земля привязана к Солнцу какой-нибудь невидимой нитью, то по меньшей мере надо согласиться с тем, что мы не имеем никакого средства измерить ее удлинение.

Следовательно, в девяти случаях из десяти наше определение было бы недостаточно; ему нельзя было бы придать никакого смысла и пришлось бы вернуться к определению Кирхгофа.

Но тогда к чему же весь этот окольный путь? Вы допускаете известное определение силы, которое имеет смысл только в некоторых частных случаях. В этих случаях вы убеждаетесь при помощи опыта, что оно приводит к закону ускорения. Опираясь на этот опыт, вы принимаете затем закон ускорения за определение силы во всех других случаях.

Не проще ли было бы смотреть на закон ускорения как на определение во всех случаях и рассматривать перечисленные опыты не как подтверждение этого закона, а как проверку принципа противодействия или как доказательство того, что деформации упругого тела зависят только от сил, действующих на это тело? Мы не говорим уже о том, что условия, в которых ваше определение могло бы быть принято, никогда не выполняются в совершенстве — что нить никогда не бывает лишена массы, что она никогда не бывает изолирована от действия других сил, кроме противодействия тел, привязанных к ее концам.

Тем не менее идеи Андрада очень интересны; хотя они не удовлетворяют нашей логической потребности, зато они позволяют лучше понять историческое происхождение основных механических понятий. Размышления, которые они вызывают у нас, показывают нам, как человеческий ум поднимался от наивного антропоморфизма к современным научным идеям.

В точке отправления мы видим опыт, имеющий весьма частное значение и вообще довольно грубый; в конечной точке имеем совершенно точный закон, достоверность коего мы принимаем за абсолютную. Этой достоверностью наделили его мы сами, — так сказать, по доброй воле, — рассматривая его как результат соглашения.

Значит, закон ускорения, правило сложения сил — только произвольные соглашения? Да, это соглашения, но не произвольные. Они были бы произвольными, если бы мы потеряли из виду те опыты, которые привели основателей науки к их принятию и которые, как бы несовершенны они ни были, достаточны для их оправдания. Хорошо, если время от времени наше внимание бывает обращено на опытное происхождение этих соглашений.

Глава VII

ДВИЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЕ И ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНОЕ

Принцип относительного движения. Были попытки связать закон ускорения с некоторым более общим принципом. Движение всякой системы должно подчиняться одним и тем же законам независимо от того, относить ли его к неподвижным осям или к подвижным, перемещающимся прямолинейно и равномерно. Это — принцип относительного движения, который внушается нам двумя обстоятельствами: во-первых, его подтверждает самый обыденный опыт, и, во-вторых, противоположное допущение совершенно противоречило бы нашему разуму.

Итак, допустим его и рассмотрим тело, находящееся под действием силы. Относительное движение этого тела для наблюдателя, перемещающегося с постоянной скоростью, равной начальной скорости тела, должно быть таким же, каким было бы абсолютное движение этого тела, если бы оно выходило из состояния покоя. Из этого заключают, что ускорение тела не должно зависеть от его абсолютной скорости, и отсюда пытаются извлечь доказательство закона ускорения.

Долгое время следы этого доказательства сохранялись в экзаменационных программах на степень бакалавра философских наук. Но эта попытка, очевидно, безнадежна. Препятствие, мешавшее нам доказать закон ускорения, было обусловлено отсутствием определения силы, и оно нисколько не устраняется, так как приведенный принцип не дает требуемого определения.

Но принцип относительного движения от этого не делается менее интересным; он заслуживает изучения сам по себе. Постараемся прежде всего дать ему точную формулировку.

Выше мы сказали, что ускорения различных тел, входящих в состав изолированной системы, зависят только от их скоростей и положений (относительных, а не абсолютных), если только подвижные оси, к которым отнесено движение, перемещаются прямолинейно и равномерно. Или, если угодно, эти ускорения зависят только от разностей скоростей и разностей координат тел, а не от абсолютных значений этих скоростей и координат.

Если этот принцип верен для относительных ускорений (или, лучше сказать, для разностей ускорений), то, сочетая его с законом противодействия, можно вывести, что он верен также и для абсолютных ускорений.

Остается, таким образом, рассмотреть, как можно доказать, что разности ускорений зависят только от разностей скоростей и координат или, говоря математическим языком, что эти разности координат удовлетворяют дифференциальным уравнениям второго порядка.

Можно ли это доказательство вывести из опытов или же из априорных соображений?

Припоминая сказанное выше, читатель сам даст на это ответ. В самом деле, в такой формулировке принцип относительного движения очень похож на то, что выше я назвал обобщенным принципом инерции. Это не совсем то же самое, потому что здесь речь идет о разностях координат, а не о самих координатах. Следовательно, новый принцип учит нас кое-чему большему сравнительно с прежним. Однако те же рассуждения приложимы и к нему, и они привели бы к тем же заключениям; возвращаться к этому было бы бесполезно.

Аргумент Ньютона. Здесь мы сталкиваемся с вопросом, крайне важным и в какой-то степени внушающим беспокойство. Я сказал, что принцип относительного движения не только был для нас результатом опыта, но и что à priori никакая иная гипотеза не допускается нашим разумом.

Но тогда почему принцип верен только в случае прямолинейного и равномерного движения подвижных осей? Казалось бы, он должен внушаться нам с той же силой и в случае, когда это движение переменно или, по крайней мере, когда оно сводится к равномерному вращению. Однако в этих двух случаях принцип неверен.

Я не стану подробно останавливаться на том случае, когда движение осей прямолинейно, но не равномерно; парадокс устраняется сейчас же при исследовании. Я нахожусь в вагоне, и если поезд, натолкнувшись на какое-нибудь препятствие, внезапно останавливается, я буду отброшен на противоположную скамейку, хотя прямо на меня не действовала никакая сила. Здесь нет ничего загадочного: я не подвергся действию никакой внешней силы, зато поезд испытал внешний толчок. Нет ничего парадоксального в том, что относительное движение двух тел оказывается возмущенным, раз движение того или другого тела изменено внешней причиной.

Остановлюсь подробнее на случае относительных движений, относимых к равномерно вращающимся осям. Если бы небо было беспрестанно покрыто тучами, если бы мы не имели никакого средства наблюдать светила, мы все-таки могли бы заключить, что Земля вращается; мы узнали бы об этом по ее сжатию или — еще лучше — из опыта с маятником Фуко.

Однако имело ли бы смысл говорить в этом случае, что Земля вращается? Если нет абсолютного пространства, то как можно вращаться, не вращаясь по отношению к чему-либо, а с другой стороны, как могли бы мы принять заключение Ньютона и верить в абсолютное пространство?

Но недостаточно констатировать, что все возможные решения одинаково не удовлетворяют нас; надо для каждого из них проанализировать основания, по которым мы отвергаем его, чтобы сделать наш выбор сознательно. Да простятся мне поэтому последующие длинные рассуждения.

Вернемся к нашему воображаемому случаю: густые тучи скрывают звезды от людей, и те не могут наблюдать их и даже не знают об их существовании. Как эти люди узнают, что Земля вращается? Еще увереннее, чем наши предки, они будут считать Землю, которая носит их, неподвижной и непоколебимой; им придется слишком долго ждать появления Коперника. Но, наконец, этот Коперник все-таки явится. Почему же это должно случиться?

Механики воображаемого нами мира сначала не натолкнулись бы ни на какое безусловное противоречие. В теории относительного движения рассматривают, кроме реальных сил, две фиктивные силы, которые называются: одна — обыкновенной, а другая — сложной центробежной силой. Наши воображаемые ученые могли бы, следовательно, все объяснить, рассматривая эти две силы как реальные, и они не увидели бы здесь противоречия с обобщенным принципом инерции, так как эти силы зависели бы: одна, подобно действительно существующему притяжению, от относительных положений различных частей системы; другая, подобно реальному трению, от их относительных скоростей.

Тем не менее некоторые трудности не замедлили бы пробудить их внимание. Если бы им удалось осуществить изолированную систему, то движение центра тяжести этой системы по траектории, почти прямолинейной, не имело бы места. Для объяснения этого факта они могли бы сослаться на центробежные силы, которые они рассматривали бы как реальные и которые они, несомненно, приписали бы взаимным действиям тел. Но они увидели бы, что эти силы не уничтожаются на значительных расстояниях, т. е. по мере того, как изоляция становилась бы совершенной: напротив, центробежная сила бесконечно возрастает с расстоянием.

Это затруднение казалось бы им уже довольно значительным; однако оно не остановило бы их надолго. Они не замедлили бы вообразить себе какую-нибудь среду, крайне тонкую, вроде нашего эфира, в которой плавали бы все тела и которая оказывала бы на них отталкивающее действие.

Но это не все. Пространство симметрично, а между тем законы движения не представляли бы симметрии; эти законы должны были бы отличать правую сторону от левой. Увидели бы, например, что циклоны вращаются всегда в одну и ту же сторону, между тем как по симметрии можно было бы ожидать этого вращения как в ту, так и в другую сторону, безразлично в какую. Если бы ценой труда наши ученые пришли к представлению о совершенной симметрии своей Вселенной, то эта симметрия не осуществлялась бы, хотя и не было бы никакого видимого основания для преимущественного нарушения ее в одну определенную сторону.

Без сомнения, они нашлись бы и здесь: они придумали бы что-нибудь, во всяком случае не более странное, чем хрустальные сферы Птолемея, и так нагромождали бы все более сложные построения, пока долгожданный Коперник не устранил бы одним ударом все эти нагромождения, сказав: гораздо проще допустить, что Земля вращается.

И совершенно так же, как наш Коперник сказал нам: удобнее предположить, что Земля вращается, потому что тогда законы астрономии выражаются более простым языком, тот Коперник сказал бы: удобнее предположить, что Земля вращается, потому что тогда законы механики выражаются более простым языком.

Это не противоречит тому, что абсолютное пространство — та, так сказать, веха, к которой надо было бы отнести Землю, чтобы знать, действительно ли она вращается, — объективно не существует. Ведь и утверждение: «Земля вращается» не имеет никакого смысла, ибо никакой опыт не позволит проверить его; ибо такой опыт не только не мог бы быть ни осуществлен, ни вызван смелой фантазией Жюля Верна, но даже не мог бы быть понят без противоречия! Или, лучше сказать, два положения: «Земля вращается» и «удобнее предположить, что Земля вращается» имеют один и тот же смысл; в одном ничуть не больше содержания, чем в другом.

Может быть, кто-нибудь останется еще недоволен этим и найдет даже что-то неприятно поражающее в том, что среди всех гипотез или — лучше — среди всех соглашений, которые мы можем сформулировать относительно этого предмета, есть одно, которое удобнее других.

Но если мы без труда допустили это, когда речь шла о законах астрономии, почему это должно смущать, если дело касается механики?

Мы видели, что координаты тел определяются дифференциальными уравнениями второго порядка, и то же самое имеет место для разностей этих координат. Это — то, что мы назвали обобщенным принципом инерции и принципом относительного движения.

Если бы расстояния этих тел определялись также дифференциальными уравнениями второго порядка, то, кажется, ум должен бы быть вполне удовлетворен. В какой мере он получает это удовлетворение и почему он им не довольствуется?

Чтобы дать себе в этом отчет, лучше всего взять простой пример. Вообразим систему, аналогичную нашей Солнечной системе, но такую, что из нее нельзя было бы видеть неподвижных звезд, не принадлежащих к этой системе, так что астрономы могли бы наблюдать только взаимные расстояния планет и Солнца, но не абсолютные долготы планет. Если мы выведем непосредственно из закона Ньютона дифференциальные уравнения, определяющие изменение этих расстояний, то эти уравнения не будут второго порядка. Я хочу сказать, что если бы, кроме закона Ньютона, были известны начальные значения этих расстояний и их производных по времени, то этого было бы достаточно для определения значений тех же расстояний для какого-нибудь последующего момента. Недоставало бы еще одного данного, и этим данным могло бы быть, например, то, что астрономы называют константой площадей.

Но здесь можно стать на две различные точки зрения; мы можем различать два рода констант. В глазах физика мир сводится к ряду явлений, зависящих единственно, с одной стороны, от начальных явлений, с другой — от законов, связывающих последующие явления с предыдущими. Если теперь наблюдение откроет нам, что некоторая величина есть константа, то нам представится выбор между двумя точками зрения.

Или мы допустим, что существует закон, требующий неизменяемости этой величины, но дело случая, что она в начальный момент имела именно такое значение, а не иное,— значение, которое она должна была потом сохранять. Такую величину можно было бы назвать тогда *случайной* константой.

Или, напротив, мы допустим, что существует закон природы, сообщающий этой величине именно такое значение, а не иное. Здесь мы будем иметь то, что можно назвать *существенной* константой.

Например, в силу законов Ньютона время обращения Земли должно быть постоянно. Но если оно равно 366 звездным суткам с дробью, а не 300 или 400, то это — результат какой-то неизвестной мне начальной случайности. Это — случайная константа. Если, напротив, показатель степени расстояния, входящий в выражение гравитационной силы, равен 2, а не 3, то это не случайно — этого требует закон Ньютона. Это — существенная константа.

Я не знаю, будет ли законно само по себе придавать какое-то значение случайности и не является ли такое разграничение искусственным; во всяком случае, пока в природе существуют тайны, оно будет применяться с широким произволом, всегда оставаясь ненадежным.

Что касается константы площадей, то мы привыкли рассматривать ее как случайную. Так ли поступили бы наши воображаемые астрономы? Если бы они имели возможность сравнивать две различные Солнечные системы, то у них появилась бы идея, что эта константа может иметь различные значения; но я как раз предположил вначале, что их система изолирована и они не могли наблюдать никакого светила, не принадлежащего к их системе. В этих условиях они могли бы знать единственную константу, которая имела бы единственное, абсолютно неизменяемое значение; без сомнения, они были бы склонны рассматривать ее как константу существенную.

Выскажу попутно несколько слов в предупреждение возражений: обитатели нашего воображаемого мира не могли бы ни наблюдать, ни определить константу площадей, как это делаем мы, потому что абсолютные долготы были бы им недоступны; но это не помешало бы им скоро подметить определенную константу, которая естественно входила бы в их уравнения и которая была бы не чем иным, как тем, что мы называем константой площадей.

Но тогда бы имело место следующее. Если рассматривать константу площадей как существенную, как обусловленную законом природы, то для вычисления расстояний планет в любой момент достаточно знать начальные значения этих расстояний и их первых производных. С этой новой точки зрения расстояния будут определяться дифференциальными уравнениями второго порядка.

Однако был ли бы ум этих астрономов вполне удовлетворен? Я не думаю; прежде всего, они скоро заметили бы, что, продифференцировав свои уравнения и таким образом повысив их порядок, они привели бы их к более простой форме. В особенности они были бы поражены трудностью, связанной с симметрией. Пришлось бы допускать различные законы, смотря по тому, представляет ли совокупность планет фигуру какого-либо определенного многогранника, в частности симметричного многогранника; этого следствия можно было бы избегнуть, только рассматривая константу площадей как случайную.

Я взял довольно частный пример, вообразив астрономов, которые совсем не занимаются земной механикой и кругозор которых ограничен Солнечной системой. Но наши заключения приложимы ко всем случаям. Наша Вселенная шире по сравнению с их миром, потому что у нас есть неподвижные звезды, но она все же ограничена, и поэтому мы могли бы так же рассуждать о нашей Вселенной, взятой в целом, как эти астрономы — о своей Солнечной системе.

В конце концов, как из всего этого видно, пришлось бы заключить, что порядок уравнений, определяющих расстояния, выше второго. Почему бы это могло смущать нас, почему мы находим вполне естественным, что ряд явлений зависит от начальных значений первых производных расстояний, и в то же время не решаемся допустить, что они могут зависеть от начальных значений вторых производных? Это может быть только следствием известных привычек, выработанных в нашем сознании постоянным изучением обобщенного принципа инерции и его следствий.

Значения расстояний во всякий момент зависят от их начальных значений, начальных значений их первых производных и еще от чего-то другого. Чем же является это *другое*?

Если не хотят признать в этом просто одну из вторых производных, то остается только выбор гипотез. Обыкновенно полагают, что это «другое» есть абсолютная ориентация Вселенной в пространстве или быстрота, с которой ориентация изменяется. Возможно и даже несомненно, что такая гипотеза является самой удобной для геометра; но она никак не самая удовлетворительная с точки зрения философа, потому что такой ориентации не существует.

Можно допустить, что это «другое» есть положение или скорость какого-нибудь невидимого тела: так и поступали те, которые даже дали этому телу название «альфа-тело», хотя нам и не суждено ничего знать об этом теле, кроме его названия. Это — уловка, совершенно аналогичная той, о которой я говорил в конце параграфа, посвященного моим размышлениям о принципе инерции.

Однако в конечном счете указанные трудности имеют искусственный характер. Все, что необходимо, — это то, чтобы будущие показания наших инструментов определялись только теми показаниями, которые они нам дали или могли дать прежде. Но в этом отношении мы можем быть спокойны.

Глава VIII

ЭНЕРГИЯ И ТЕРМОДИНАМИКА

Энергетическая система. Трудности, возникшие в классической механике, побудили некоторые умы отдать предпочтение новой системе — так называемой *энергетике*. Энергетическая система получила свое начало вслед за открытием принципа сохранения энергии. Окончательная форма была ей дана Гельмгольцем.

Начнем с определения двух величин, которые играют фундаментальную роль в этой теории. Это следующие величины: во-первых, *кинетическая энергия*, или живая сила; во-вторых, *потенциальная энергия*.

Все перемены, какие могут происходить с телами природы, управляются двумя экспериментальными законами:

1) Сумма кинетической энергии и потенциальной энергии не меняется. Это — принцип сохранения энергии.

2) Если система тел в момент t_0 имеет конфигурацию A, а в момент t_1 — конфигурацию B, то переход от первой конфигурации ко второй всегда совершается таким путем, что *среднее* значение разности между двумя видами энергии за промежуток времени от t_0 до t_1 является величиной, самой малой из всех возможных. Это — принцип Гамильтона, представляющий одну из форм принципа наименьшего действия.

Энергетическая теория сравнительно с классической имеет следующие преимущества:

1) она является более полной, т. е. принцип сохранения энергии и принцип Гамильтона сообщают

нам больше, чем сообщали основные принципы классической теории; они исключают некоторые движения, которые не реализуются в природе, но совместимы с классической теорией;

2) она освобождает нас от атомистической гипотезы, которую было почти невозможно избежать в классической теории.

Но в свою очередь энергетическая система создает и новые трудности. Именно, определение двух видов энергии представляет почти столь же значительные трудности, как и определение силы и массы в первой системе. Однако избавиться от них легче, по крайней мере в наиболее простых случаях.

Представим себе изолированную систему, состоящую из некоторого числа материальных точек; пусть эти точки находятся под действием сил, зависящих только от их расстояний и относительного расположения, но не зависящих от их скоростей. В силу принципа сохранения энергии система должна иметь силовую функцию.

В этом простом случае выражение принципа сохранения энергии крайне просто. Некоторая доступная измерению величина должна оставаться постоянной. Эта величина представляет собой сумму двух членов; первый зависит только от положения материальных точек и не зависит от их скоростей; второй представляет собой линейную функцию квадратов скоростей. Такое разложение может быть сделано только одним способом. Первый член, который я обозначу через U, будет потенциальной энергией, второй, который я обозначу через T, будет кинетической энергией.

Конечно, если $T+U$ равняется постоянной величине, то это же самое будет иметь место для любой функции величины $T+U$, т. е. для

$$\varphi(T+U).$$

Но эта функция $\varphi(T+U)$ не будет суммой двух членов, из которых один был бы независим от скоростей, а другой зависел бы линейно от их квадратов. Между функциями, сохраняющими постоянную величину, есть только одна, обладающая таким свойством, а именно $T+U$ (или любая линейная функция $T+U$ — это не имеет значения, ибо такая линейная функция всегда может быть приведена к виду $T+U$ путем преобразования масштаба и перемены начала). Это выражение мы и назовем энергией; первый член будет иметь значение кинетической энергии, второй — значение потенциальной энергии. Таким образом, определение обоих видов энергии может быть доведено до конца без всякой двусмысленности. Точно так же может быть дано определение масс. Кинетическая энергия, или живая сила, весьма просто выражается через массы материальных точек и через их скорости, соотнесенные к какой-нибудь одной из них. Эти относительные скорости доступны наблюдению, и если мы будем знать выражение кинетической энергии как функции относительных скоростей, то массы представятся коэффициентами этого выражения.

Итак, в этом простом случае определение основных понятий является делом легким. Но трудности опять возникают в более сложных случаях, как например, если силы зависят не только от расстояний, но и от скоростей. Вебер предполагает, что взаимодействие двух электрических частиц зависит не только от их расстояния, но также от их скорости и ускорения. Если бы материальные точки притягивались по тому же закону, U зависело бы от скоростей и могло бы содержать член, пропорциональный квадрату скорости. Но как в этом случае можно было бы среди членов, пропорциональных квадратам скоростей, отличить те, которые относятся к T, и те, которые относятся к U? Как, следовательно, различить два вида энергии? Даже больше того, как определить самую энергию? Ведь теперь мы не имеем уже никаких оснований предпочесть $T+U$ какой-либо другой функции $T+U$, раз исчезло свойство, отличавшее $T+U$ и состоявшее в возможности разделения ее на два слагаемых специальной формы.

Однако это не все. Необходимо принять в расчет не только механическую энергию в собственном смысле, но также другие виды энергии: теплоту, химическую энергию, электрическую энергию и другие. Тогда принцип сохранения энергии примет вид

$$T+U+Q=\text{const},$$

где T означает воспринимаемую кинетическую энергию, U — потенциальную энергию положения, зависящую исключительно от расположения тел, Q — внутреннюю молекулярную энергию в тепловой, химической или электрической форме.

Все шло бы хорошо, если бы эти три члена можно было резко различить: если бы T было пропорционально квадратам скоростей, U не зависело ни от скоростей, ни от состояния тела, Q зависело не от скоростей и расположения тел, а исключительно от их внутреннего состояния. Тогда выражение энергии допускало бы только единственное разложение на три члена указанной формы. На самом деле это не так; рассмотрим наэлектризованные тела: электростатическая энергия, обусловленная их взаимодействием, будет, очевидно, зависеть от их заряда, т. е. от их состояния, но также и от их расположения. Если эти тела находятся в движении, то они будут действовать друг на друга электродинамически, и электродинамическая энергия будет зависеть не только от их состояния и их расположения, но и от их скоростей. Таким образом, у нас не оказывается никакого средства выделить три подразделения энергии, рассортировав члены так, чтобы каждый относился к T, U и Q в отдельности.

Если $T+U+Q$ есть постоянная величина, то постоянной будет и любая ее функция

$$\varphi(T+U+Q).$$

Если бы $T+U+Q$ имело вышеуказанную специальную форму, неопределенности не могло бы возникнуть; между всеми функциями $\varphi(T+U+Q)$, сохраняющими постоянную величину, нашлась бы только одна, имеющая этот частный вид, и она была бы тем, что мы условились называть энергией. Но это, по вышесказанному, не выполняется: между функциями, сохраняющими неизменную величину, нет таких, которые бы в точности подходили под нашу специальную форму, — следовательно, как найти между ними ту, которую следует именовать энергией? У нас нет никакой путеводной нити для этих поисков.

Поэтому нам остается выразить принцип сохранения энергии только таким образом: *есть нечто, сохраняющее неизменную величину.* Но в такой форме он оказывается вне пределов досягаемости опыта и сводится к некоторого рода тавтологии, ибо ясно, что если мир управляется законами, то существуют некоторые величины, которые остаются постоянными. Подобно принципам Ньютона (и по тем же основаниям), принцип сохранения энергии, основанный на опыте, не может быть опровергнут этим последним.

Это исследование показывает, что с переходом от классической системы к системе энергетической осуществляется известный прогресс, но что в то же время этот прогресс недостаточен.

Еще более серьезным кажется мне другое возражение: принцип наименьшего действия приложим к обратимым процессам; но он оказывается совершенно недостаточным, коль скоро речь идет о необратимых процессах. Попытка Гельмгольца распространить его на эту область явлений не имела и не могла иметь успеха: здесь все еще принадлежит будущему.

Самая формулировка принципа наименьшего действия имеет в себе нечто, неприятно поражающее наш ум. При переходе от одной точки к другой материальная частица [1]), не подверженная действию какой-либо силы, но подчиненная условию не сходить с некоторой поверхности, движется по геодезической линии, т. е. по кратчайшему пути. Эта частица как будто бы знает ту точку, куда ее желают привести, предвидит время, которое она затратит, следуя по тому или иному пути, и, наконец, выбирает путь наиболее подходящий. В такой формулировке принципа частица представлена нам как бы одушевленным существом, обладающим свободой воли. Ясно, что следовало бы заменить эту формулировку другой, более подходящей, в которой, выражаясь языком философа, конечные причины не становились бы явным образом на место причин действующих.

Термодинамика [2]). Значение двух основных принципов термодинамики для всех областей физики становится с каждым днем все более важным. Оставляя предложенные сорок лет назад претенциозные теории, насыщенные молекулярными гипотезами, мы

---

[1]) В подлиннике une molécule.— *Примеч. ред.*

[2]) Следующие строки представляют собой частичное воспроизведение предисловия в моей книге «Термодинамика».

пытаемся ныне воздвигнуть все здание математической физики единственно на термодинамической основе.

Способны ли два принципа — Майера и Клаузиуса — сообщить этому зданию на известное время достаточную прочность? В этом никто не сомневается; но откуда мы получаем такую уверенность?

Один выдающийся физик говорил мне однажды по поводу закона погрешностей: «Все крепко верят в него: математики считают его результатом наблюдений, а наблюдатели — математической теоремой». В течение долгого времени можно было сказать то же самое относительно принципа сохранения энергии. Но в настоящее время всем уже известно, что он представляет собою экспериментальный факт.

Но в таком случае, что дает нам право приписывать самому принципу бо́льшую общность и точность сравнительно с теми опытами, которые послужили для его доказательства? Это равносильно вопросу: законны ли делаемые на каждом шагу обобщения эмпирических данных? У меня не хватает смелости разбирать этот вопрос после того, как столько философов тщетно искали его решения. Достоверно одно: если бы мы не имели способности к обобщению, наука не могла бы существовать или, по крайней мере, свелась бы к простой описи, к установлению единичных фактов, — она не имела бы для нас никакой ценности, так как не могла бы удовлетворить наше стремление к порядку и гармонии и в то же время была бы неспособна делать предсказания. Обстоятельства, предшествовавшие известному факту, по всей вероятности, никогда более не повторятся в своей совокупности: поэтому первое обобщение необходимо уже просто для того, чтобы предвидеть, повторится ли этот факт после того, как произойдет самое незначительное изменение в этих обстоятельствах.

Но всякое положение можно обобщить бесчисленным множеством способов. Между всеми возможными обобщениями нам необходимо выбрать только одно, а именно, самое простое. Таким образом, мы вынуждены поступать так, как если бы простой закон при прочих равных условиях имел бо́льшую вероятность сравнительно со сложным законом.

Полвека тому назад было общераспространенным убеждение, что природа любит простоту. С тех пор мы имели от нее много опровержений. Ныне мы такой тенденции уже не приписываем природе и сохраняем от этой тенденции лишь то, что необходимо, чтобы наука не уклонялась со своего пути. Таким образом, формулируя общий, простой и точный закон на основании сравнительно малочисленных и не абсолютно точных опытов, мы лишь повинуемся необходимости, которой не может избежать человеческий ум. Но здесь имеется и кое-что большее, и это объясняет, почему я так настойчив.

Никто не сомневается в том, что принципу Майера предстоит пережить все частные законы, из которых он был извлечен, подобно тому как закон Ньютона пережил законы Кеплера, послужившие его источником и являющиеся лишь приближенными, если принять в расчет возмущения. Спрашивается, почему же этот принцип занимает привилегированное положение среди всех физических законов?

Для этого имеется ряд оснований — не очень значительных. Прежде всего, полагают, что мы не можем его отвергнуть, даже сомневаться в его абсолютной строгости, без того чтобы не допустить возможности «вечного движения»; мы, разумеется, не боимся такой перспективы, но считаем, что осторожнее признать принцип Майера, чем его отрицать. Быть может, это и не вполне точно: невозможность «вечного движения» влечет за собой сохранение энергии лишь для обратимых явлений.

Величавая простота принципа Майера также способствует укреплению нашей веры в него. В законе, выведенном непосредственно из опыта, каков, например, закон Мариотта, подобная простота внушала бы нам скорее недоверие. Но здесь это не так. Здесь мы видим, как элементы, которые на первый взгляд кажутся лишенными взаимной связи, неожиданно упорядочиваются, образуя гармоническое целое; и мы отказываемся думать, чтобы эта непредвиденная гармония была следствием простого случая. Наше приобретение как будто делается тем дороже для нас, чем бóльших усилий оно нам стоило; мы как будто тем сильнее убеждаемся в том, что действительно исторгли у природы ее тайну, чем ревнивее она, казалось, скрывала эту тайну от нас.

Однако все это — не слишком веские доводы; чтобы возвести закон Майера в ранг абсолютного принципа, нужно было бы представить более глубокий разбор вопроса. Но пытаясь выполнить это, мы видим, что этот абсолютный принцип нелегко даже сформулировать. В каждом частном случае мы ясно видим, что́ такое энергия, и можем определить ее — по крайней мере предварительно; но найти общее определение ее невозможно. Как только мы хотим выразить принцип во всей его общности и приложить его ко Вселенной, мы видим, что он, так сказать, испаряется и от него остается только следующее: *существует нечто, что́ остается постоянным.*

Но имеет ли это какой-нибудь смысл? По детерминистской гипотезе состояние Вселенной определяется чрезвычайно большим числом n параметров, которые я обозначу $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если известны значения параметров для одного какого-нибудь момента, а также производные этих параметров по времени, то можно высчитать значения их для всякого другого момента, предшествующего или последующего. Другими словами, наши n параметров удовлетворяют n дифференциальным уравнениям первого порядка. Эти уравнения имеют $n-1$ интегралов, не содержащих времени; таким образом, существует $n-1$ функций от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, сохраняющих неизменную величину. Поэтому, говоря, что *существует нечто, что остается постоянным*, мы высказываем простую тавтологию. Трудно было бы даже сказать, которому из этих интегралов должно принадлежать название энергии.

Впрочем, принцип Майера понимается иначе, когда он прилагается к ограниченной системе. В этом случае принимают, что p из наших n параметров изменяются под влиянием самостоятельных причин, так что мы имеем всего $n-p$ уравнений (вообще линейных) между нашими n пара́метрами и их производными.

Для большей простоты предположим, что сумма работ внешних сил равна нулю, так же как и сумма рассеянных системой количеств тепла. В таком случае принцип получит следующее выражение: *существует такое сочетание этих $n-p$ уравнений, первый член которого является точным дифференциалом*; так как в силу наших $n-p$ соотношений этот дифференциал равен нулю, то интеграл его равняется постоянной величине, и этот интеграл есть то, что называется энергией.

Но каким образом возможно, что некоторые из параметров обнаруживают изменения, независимые от остальных? Это имеет место лишь под воздействием внешних сил (хотя мы для простоты и предположили, что алгебраическая сумма работ этих сил равна нулю). В самом деле, если бы система была совершенно изолирована от всякого внешнего воздействия, то знания величин наших n параметров в данный момент было бы достаточно для определения состояния системы в любой последующий момент (предполагая, что мы по-прежнему держимся детерминистской гипотезы), т. е. мы опять встретили бы прежнюю трудность.

Если будущее состояние системы не вполне определяется ее настоящим состоянием, то это значит, что оно зависит еще от состояния тел, внешних по отношению к системе. Но в таком случае правдоподобно ли, чтобы между параметрами x, определяющими положение системы, существовали уравнения, не зависящие от состояния этих внешних тел? И если в некоторых случаях мы, по-видимому, можем их составить, то не является ли это лишь следствием нашего незнания, следствием того, что влияние этих тел слишком слабо, чтобы наш опыт мог его обнаружить?

Если система не рассматривается как вполне изолированная, то вероятно, что строго точное выражение ее внутренней энергии должно зависеть от состояния внешних тел. Кроме того, выше мы предположили, что сумма внешних работ равна нулю; если бы мы пожелали освободиться от этого несколько искусственного ограничения, формулировка принципа стала бы делом еще более трудным. Поэтому для формулировки принципа Майера в абсолютном смысле необходимо распространять его на всю Вселенную, а тогда перед нами встает та самая трудность, которой мы желали избежать. Говоря кратко и обычным языком, закон сохранения энергии может иметь только один смысл, а именно: существует некоторое свойство, присущее всем возможностям; но по детерминистской гипотезе существует лишь единственная возможность, а тогда закон теряет свой смысл.

Напротив, при допущении индетерминистской гипотезы он имел бы смысл и тогда, когда бы мы пожелали придать ему абсолютное значение: он представился бы ограничением, наложенным на свободу.

Но слово «свобода» напоминает мне, что я выхожу за пределы физико-математической области. Поэтому я останавливаюсь и от всего предыдущего обсуждения сохраняю только один вывод: закон Майера является формой достаточно гибкой, чтобы можно было вложить в нее почти все, что угодно. Я не хочу этим сказать, ни то, что он не соответствует никакой объективной реальности, ни то, что он сводится к простой тавтологии, так как в каждом частном случае он имеет совершенно ясный смысл, если только не пытаются возвести его до степени абсолютного принципа.

Самая гибкость его дает основание верить в его высокую жизнеспособность; а так как, с другой стороны, он не может исчезнуть иначе, как растворившись в гармонии высшего порядка, то мы с доверием можем опираться на него в наших работах, наперед зная, что наш труд не пропадет даром.

Почти все сказанное выше применимо к принципу Клаузиуса. Различие в том, что последнее выражается неравенством. Кто-нибудь мог бы сказать, что это — свойство всех физических законов, так как точность их всегда ограничена погрешностями наблюдения. Но законы эти имеют притязание быть по меньшей мере первым приближением, и есть надежда на постепенное замещение их другими, все более точными. Напротив, если принцип Клаузиуса сводится к неравенству, то причина этого лежит не в несовершенстве наших средств наблюдения, а в самой природе вопроса.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ ИЗ ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЫ

Итак, принципы механики представляются нам в двух различных аспектах. С одной стороны, это — истины, обоснованные опытом, подтверждающиеся весьма приближенно для систем почти изолированных. С другой стороны, это — постулаты, которые прилагаются ко всей Вселенной и считаются строго достоверными.

Если эти постулаты обладают общностью и достоверностью, каких недостает экспериментальным истинам, из которых они извлекаются, то это оттого, что они в результате проведенного анализа сводятся к простому соглашению, которое мы имеем право сформулировать, будучи заранее уверены, что никакой опыт не станет с ним в противоречие. Однако это соглашение не абсолютно произвольно; оно не вытекает из нашей прихоти; мы принимаем его, потому что известные опыты доказали нам его удобство. Так объясняется и то, почему опыт был в состоянии создать принципы механики, и то, почему он не сможет их ниспровергнуть.

Проведем сравнение с геометрией. Основные положения геометрии, как, например, постулат Евклида, суть также не что иное, как соглашения, и было бы настолько же неразумно доискиваться, истинны ли они или ложны, как задавать вопрос, истинна или ложна метрическая система. Эти соглашения только удобны, и в этом нас убеждают известные опыты.

На первый взгляд аналогия является полной: роль опыта представляется в обоих случаях одной и той же. Кто-нибудь мог бы сказать: либо механика должна быть признаваема за науку экспериментальную, и тогда то же самое следует сказать про геометрию; либо, наоборот, геометрия является наукой дедуктивной, и тогда механика должна быть такой же.

Но подобное заключение было бы незаконно. Опыты, которые привели нас к принятию основных соглашений геометрии в качестве наиболее удобных, относятся к вещам, которые не имеют ничего общего с объектами изучения геометрии, они относятся к свойствам твердых тел, к прямолинейному распространению света. Это — опыты механические и оптические; их отнюдь нельзя рассматривать как опыты геометрические. А главное основание, по которому наша геометрия представляется нам удобной,— это то, что различные части нашего тела, наш глаз, наши члены обладают в точности свойствами твердых тел. В этом смысле нашими основоположными опытами являются прежде всего физиологические опыты, которые относятся не к пространству, составляющему предмет изучения для геометра, но к нашему собственному телу, т. е. к орудию, которым мы должны пользоваться при этом изучении.

Напротив, основные соглашения механики и те опыты, которыми доказывается их удобство, относятся к одним и тем же или к аналогичным предметам. Эти условные и общие принципы являются естественным и прямым обобщением принципов экспериментальных и частных.

Пусть не говорят, что здесь я провожу искусственные границы между науками; что если я отделяю геометрию в собственном смысле от изучения твердых тел, то я мог бы точно так же воздвигнуть стену между экспериментальной механикой и конвенциональной механикой общих принципов. В самом деле, кто не заметит, что, разделяя эти две науки, я исказил бы и ту и другую, что изолированная конвенциональная механика представляла бы собой нечто малозначащее, никак не могущее сравниться с величественным зданием геометрической науки?

Понятно теперь, почему преподавание механики должно оставаться экспериментальным. Только при таком методе оно может сделать понятным генезис науки, а это необходимо для полного понимания самой науки. Кроме того, механику изучают, чтобы ее применять; это возможно только при условии, что она остается объективной. Но, как мы видели, принципы механики, выигрывая в общности и достоверности, теряют в своей объективности. При первом ознакомлении с принципами особенно уместно подходить к ним с их объективной стороны; это можно сделать, только двигаясь от частного к общему, но не наоборот.

Принципы — это соглашения и скрытые определения. Тем не менее они извлечены из экспериментальных законов; эти последние были, так сказать, возведены в ранг принципов, которым наш ум приписывает абсолютное значение.

Некоторые философы довели процесс обобщения до крайностей; по их мнению, принципы составляют всю науку, которая, таким образом, вся принимает характер условного знания. Это парадоксальное учение, называемое номинализмом, не выдерживает критики.

Каким образом закон может стать принципом? Он выражал соотношение между двумя реальными членами A и B. Но он не был строго верным, а лишь приближенным. Мы произвольно вводим промежуточный, более или менее фиктивный член C, и C *в силу определения* связано с A *точным* отношением, которое выражено в законе. Таким образом, наш закон разложился на абсолютный, строгий принцип, выражающий соотношение A и C, и на приближенный, подлежащий пересмотру экспериментальный закон, который выражает соотношение между C и B. Ясно, что как бы далеко ни простиралось это расчленение, такие законы всегда будут иметь место.

Мы вступаем теперь в область законов в собственном смысле.

Часть IV

ПРИРОДА

Глава IX

ГИПОТЕЗЫ В ФИЗИКЕ[1])

Значение опыта и обобщения. — Опыт — единственный источник истины: только опыт может научить нас чему-либо новому, только он может вооружить нас достоверностью. Эти два положения никто не может оспорить.

Однако если опыт — все, то какое место остается для математической физики? Зачем экспериментальной физике это пособие, которое кажется бесполезным, а может быть, даже опасным? Тем не менее математическая физика существует; она оказала нам неопровержимые услуги. Это — факт, нуждающийся в объяснении.

Дело в том, что одних наблюдений недостаточно; ими надо пользоваться, а для этого необходимо их обобщать. Так всегда и поступали; однако поскольку память о бывших ошибках делала человека все более осмотрительным, то наблюдать стали все больше, а обобщать все меньше.

Каждое поколение смеется над предыдущим, обвиняя его в слишком поспешных и слишком наивных обобщениях. Декарт выражал сожаление по адресу философов-ионийцев; в свою очередь он вызывает улыбку у нас; без сомнения, когда-нибудь наши потомки посмеются над нами.

Но в таком случае нельзя ли нам уже теперь избрать путь, который устранил бы эти предвидимые нами насмешки? Нельзя ли нам удовольствоваться одним только чистым опытом?

Нет, это невозможно; такое стремление свидетельствовало бы о полном незнакомстве с истин-

[1]) Главы IX и X представляют собой доклады А. Пуанкаре на Международном конгрессе физиков в Париже в 1900 г.— *Примеч. ред.*

ным характером науки. Ученый должен систематизировать; наука строится из фактов, как дом из кирпичей; но простое собрание фактов столь же мало является наукой, как куча камней — домом.

И, прежде всего, ученый должен предвидеть. Карлейль[1]) в одном месте пишет примерно так: «Только факт имеет ценность; Иоанн Безземельный прошел здесь: вот что заслуживает удивления, вот реальность, за которую я отдал бы все теории мира». Карлейль был соотечественником Бэкона; подобно последнему он постоянно пропагандировал свою веру *for the God of Things as they are*[2]); но Бэкон не сказал бы предыдущих слов. Это — язык историка. Физик скорее выразился бы так: «Иоанн Безземельный прошел здесь; это меня мало интересует, потому что больше это не повторится».

Все мы знаем, что опыты бывают хорошие и плохие. Накопление плохих опытов совершенно бесполезно; будь их сотни или тысячи — все равно, довольно появиться единственному труду настоящего мастера, каковым был, например, Пастер, чтобы все они потонули в забвении. Это хорошо понимал Бэкон, изобретший термин experimentum crucis[3]). Но Карлейль этого не понял бы. Факт — всегда факт: студент сделал отсчет по своему термометру, не приняв никаких предосторожностей; пусть так — все же он сделал отсчет, и если во внимание принимаются одни только факты, то вот перед нами реальность такого же ранга, как странствования короля Иоанна Безземельного.

Почему же факт, который сообщил этот студент, не представляет интереса, между тем как факт, который умелый физик изложит в лекции, будет, напротив, очень важным? Это потому, что из первого сообщения мы не в состоянии сделать никакого вывода. Что же такое — хороший опыт? Это — опыт, который дает нам нечто большее по сравнению с единичным фактом; это — опыт, дающий нам возможность предвидеть, т. е. позволяющий делать обобщение.

---

[1]) Т. Карлейль (1795—1881) — английский философ и историк. Пантеист. Защищал идеи диктатуры буржуазии. Основные работы относятся к первой половине XIX в. — *Примеч. ред.*

[2]) В бога вещей, каковы они суть (*англ.*). — *Примеч. ред.*

[3]) Решающий эксперимент (*лат.*). — *Примеч. ред.*

В самом деле, без обобщения невозможно и предвидение. Условия произведенного опыта никогда не повторяются в точности. Наблюденный факт никогда не начнется сначала; единственное, что можно утверждать,— это что при аналогичных условиях произойдет аналогичное явление. Поэтому, чтобы предвидеть, надо по крайней мере опираться на аналогию, т. е. обобщать.

Как бы робок ни был исследователь, ему необходимо делать интерполяцию; опыт дает нам лишь некоторое число отдельных точек: их надобно соединить непрерывной линией, и это — настоящее обобщение. Этого мало: проводимую кривую строят так, что она проходит между наблюденными точками — близ них, но не через них. Таким образом, опыт не только обобщается, но и подвергается исправлению; а если бы физик захотел воздержаться от этих поправок и на самом деле удовольствоваться голым опытом, то ему пришлось бы высказывать очень странные законы.

Итак, голые факты не могут нас удовлетворить; иными словами, нам нужна наука упорядоченная, или, лучше сказать, организованная.

Нередко говорят, что следует экспериментировать без предвзятой идеи. Это невозможно; это не только сделало бы всякий опыт бесплодным, но это значило бы желать невозможного. Всякий носит в себе свое миропредставление, от которого не так-то легко освободиться. Например, мы пользуемся языком, а наш язык пропитан предвзятыми идеями и этого нельзя избежать; притом эти предвзятые идеи неосознанны, и поэтому они в тысячу раз опаснее других.

Можно ли сказать, что, допустив вторжение вполне осознанных нами предвзятых идей, мы этим усиливаем вред? Не думаю; по моему мнению, они скорее будут служить друг другу противовесом, так сказать, противоядием; они вообще будут плохо уживаться друг с другом; одни из них окажутся в противоречии с другими, и, таким образом, мы будем вынуждены рассматривать проблему с различных точек зрения. Этого достаточно для нашего высвобождения; кто может выбирать себе господина, тот уже больше не раб.

Итак, благодаря обобщению каждый наблюденный факт позволяет нам предвидеть множество других; однако не следует забывать, что из них только один первый достоверен, а все другие только вероятны. Как бы прочно обоснованным ни казалось нам наше предвидение, все же мы никогда не имеем *абсолютной* уверенности в том, что оно не будет опровергнуто опытом, предпринятым в целях его проверки. Однако вероятность часто бывает достаточно велика, чтобы практически мы могли ею удовлетвориться. Лучше предвидеть без абсолютной уверенности, чем не предвидеть вовсе.

Из предыдущего ясно, что не следует упускать ни одного случая выполнить проверочные опыты. Но всякое экспериментальное исследование продолжительно и сопряжено с трудностями; работников мало; число же фактов, которые нам нужно предвидеть, неизмеримо: в сравнении с количеством их число возможных для нас проверок всегда будет величиной ничтожно малой.

Из того немногого, что может быть нами достигнуто непосредственно, нужно извлечь возможно бóльшую пользу; нужно, чтобы каждый опыт позволял нам возможно больше увеличить как численность, так и вероятность предвидимых нами фактов. Задача состоит в том, чтобы повысить производительность научного познания.

Я позволю себе сравнить науку с библиотекой, которая должна беспрерывно расширяться; но библиотекарь располагает для своих приобретений лишь ограниченными кредитами; он должен стараться не тратить их понапрасну. Такая обязанность делать приобретения лежит на экспериментальной физике, которая одна лишь в состоянии обогащать библиотеку. Что касается математической физики, то ее задача состоит в составлении каталога. Если каталог составлен хорошо, то библиотека не делается от этого богаче, но читателю облегчается пользование ее сокровищами. С другой стороны, каталог, указывая библиотекарю на пробелы в его собраниях, позволяет ему дать его кредитам рациональное употребление; а это тем более важно ввиду их совершенной недостаточности.

Итак, вот в чем значение математической физики. Она должна руководить обобщением, руководить так, чтобы от этого увеличивалась производительность науки. Нам остается рассмотреть, какими путями она этого достигает и как может она это выполнить без опасных уклонений с правильного пути.

Единство природы. Заметим прежде всего, что всякое обобщение до известной степени предполагает веру в единство и простоту природы. Допущение единства не представляет затруднений. Если бы различные части Вселенной не относились между собой как органы одного и того же тела, они не обнаруживали бы взаимодействий — они, так сказать, взаимно игнорировали бы друг друга, и мы, в частности, знали бы только одну из них. Поэтому мы должны задавать вопрос не о том, едина ли природа, а о том, каким образом она едина.

Относительно второго положения дело обстоит сложнее, нельзя быть уверенным, что природа проста. Можем ли мы без опасения считать это допущение справедливым?

Было время, когда простота закона Мариотта служила аргументом в пользу его точности. Сам Френель, сказавший однажды в беседе с Лапласом, что природа не беспокоится об аналитических трудностях, считал себя обязанным дать по этому поводу объяснения, чтобы не встать в слишком резкое противоречие с господствовавшим тогда мнением.

С тех пор взгляды сильно изменились; однако те, которые не верят, что законы природы должны быть просты, все же часто бывают вынуждены поступать так, как если бы они разделяли эту веру. Они не могли бы совершенно отрешиться от этой необходимости, не разрушая тем самым всякой возможности обобщения, а следовательно, и науки.

Ясно, что любой факт может быть обобщен бесконечным множеством способов, из которых надо выбирать, а при выборе можно руководствоваться только соображениями простоты. Возьмем самый обыденный пример — интерполяцию. Между точками, полученными из наблюдений, мы проводим непрерывную, возможно более плавную линию. Отчего мы избегаем угловых точек и слишком резких поворотов? Отчего мы не чертим кривую в виде ряда самых причудливых зигзагов? Оттого, что мы заранее знаем (или считаем, что знаем), что закон, который нужно отобразить, не может быть очень сложным.

Массу Юпитера можно определять или из движений его спутников, или из возмущений больших планет, или из возмущений малых планет. Беря среднюю из величин, полученных по каждому способу, найдем три числа, весьма близкие друг к другу, но все же разные. Можно было бы объяснить этот результат, предположив, что коэффициент притяжения не является одинаковым в этих трех случаях; тогда, конечно, наблюдения были бы воспроизведены гораздо лучше. Почему же мы устраняем такое объяснение? Не потому, что оно было бы нелепо, а потому, что оно страдает бесполезной сложностью. Его примут лишь тогда, когда оно станет обязательным; а пока этого еще нет.

Словом, любой закон обычно считается простым, пока не доказано противоположное. Я только что указал основания, которые внушили физикам это воззрение; но как оправдать его, стоя лицом к лицу с открытиями, каждый день указывающими нам новые детали явлений, все более сложные, все более обильные? Помимо этого, как примирить его с допущением единства природы? Ибо если все вещи находятся во взаимной зависимости, то отношения, в которых принимает участие такая масса объектов, не могут быть просты.

Изучая историю науки, мы замечаем два явления, которые можно назвать взаимно противоположными: то за кажущейся сложностью скрывается простота, то, напротив, видимая простота на самом деле таит в себе чрезвычайную сложность.

Что может быть сложнее запутанных движений планет и что может быть проще закона Ньютона? Природа, играя (как говорил Френель) аналитическими трудностями, комбинацией простых элементов создает тут какие-то гордиевы узлы. Вот пример скрытой простоты, которую надо было обнаружить.

Примерам обратных случаев нет числа. В кинетической теории газов рассматриваются быстро движущиеся частицы, траектории которых, вследствие постоянных столкновений, принимают самые причудливые формы; они бороздят пространство по всем направлениям. Доступный наблюдению результат есть простой закон Мариотта, каждый отдельный факт был сложным, но закон больших чисел восстанавливает простоту в средних величинах. Эта простота — кажущаяся; лишь грубость наших чувств мешает нам видеть действительную сложность.

Множество явлений повинуется закону пропорциональности — почему? Потому что в них встречается какая-нибудь весьма малая величина. Выведенный из наблюдений простой закон является в этом случае лишь применением общего аналитического правила, по которому исчезающе малый прирост функции пропорционален приросту независимой переменной. Так как в действительности наблюдаемые нами приросты не бесконечно малы, а только очень малы, то закон пропорциональности является лишь приближенным и простота — кажущейся. То же самое применимо к правилу суперпозиции малых движений, столь плодотворному по своим применениям и образующему, между прочим, основу оптики.

А сам закон Ньютона? Простота его, так долго остававшаяся скрытой, быть может, просто кажущаяся. Кто знает, не лежит ли в основании управляемых им явлений некоторый сложный механизм (может быть, соударения тонкой материи, возбужденной беспорядочными движениями), и не есть ли простота этого закона лишь следствие игры средних величин и больших чисел? Во всяком случае, трудно удержаться от мысли, что истинный закон содержит добавочные члены, которые делаются значительными на малых расстояниях. Если в астрономии ими можно пренебрегать сравнительно с основным членом, так что здесь закон Ньютона является во всей своей простоте, то это имеет место лишь вследствие огромности небесных расстояний.

Нет сомнения, что если бы наши методы исследования становились все более и более проникающими, то мы открывали бы простое под сложным, потом сложное под простым, потом опять простое под сложным и т. д., причем невозможно было бы предвидеть, каково будет последнее звено. Где-нибудь да необходимо остановиться; и чтобы наука была возможна, надо остановиться, когда мы пришли к простоте. Простота — единственная почва, на которой мы можем воздвигнуть здание наших обобщений. Но если эта простота только кажущаяся, то будет ли такая почва достаточно надежной? Это — вопрос, заслуживающий исследования. Итак, рассмотрим, какую роль играет в наших обобщениях уверенность в простоте. Пусть мы установили, что некоторый простой закон подтверждается для достаточно большого числа отдельных случаев; тогда мы отказываемся допустить, что такое удачное совпадение было простой случайностью, и заключаем отсюда, что закон этот должен быть верен вообще.

Кеплер заметил, что все наблюденные Тихо Браге положения одной из планет лежат на одном и том же эллипсе. Ему ни на мгновение не приходит мысль, что благодаря странной игре случая Тихо смотрел на небо как раз в те моменты, когда истинная траектория планеты пересекала этот эллипс.

В таком случае не все ли равно, реальна ли простота или за ней скрывается сложная истина. Пусть простота будет следствием влияния больших чисел, которое сглаживает индивидуальные различия, или пусть она зависит от малости некоторых величин, позволяющей пренебрегать некоторыми членами,— как бы то ни было, она не случайна. Реальна ли эта простота или призрачна — она всегда имеет причину. Мы можем рассуждать таким образом всегда, и если простой закон был подтвержден большим числом отдельных наблюдений, то у нас есть законное право предположить, что он и впрямь будет верен в аналогичных случаях. Отказаться от этого — значило бы для нас приписать случайности недопустимую роль.

Однако имеется одно отличие. Простота реальная, глубоко коренящаяся, устояла бы перед увеличением точности наших измерительных средств. Если бы мы считали природу простою в основе, мы должны были бы сделать заключение от простоты приближенной к простоте строгой. Так прежде и поступали; но мы больше не имеем на это права.

Так, например, простота законов Кеплера — только кажущаяся. Это обстоятельство не мешает нам со значительным приближением прилагать эти законы ко всем системам, подобным Солнечной системе, но оно препятствует им быть строго точными.

Роль гипотезы. Всякое обобщение есть гипотеза. Поэтому гипотезе принадлежит необходимая, никем никогда не оспаривавшаяся роль. Она должна лишь как можно скорее подвергнуться и как можно чаще подвергаться проверке.

Если она этого испытания не выдерживает, то, само собой разумеется, ее следует отбросить без всяких сожалений. Так вообще и делают; но иногда не без некоторой досады. Но это чувство ничем не оправдано; напротив, физик, который пришел к отказу от одной из своих гипотез; должен был бы радоваться, потому что тем самым он нашел неожиданную возможность открытия. Я предполагаю, что его гипотеза не была выдвинута необдуманно, что она принимала в расчет все известные факторы, могущие помочь раскрыть явление! Если она не оправдывается, то это свидетельствует о чем-то неожиданном, необыкновенном; это значит, что предстоит найти нечто неизвестное, новое.

И была ли опровергнутая таким образом гипотеза бесплодной? Нисколько! Она, можно сказать, принесла больше пользы, чем иная верная гипотеза: не только потому, что она вызвала решающий опыт, но и потому, что, не будь ее, этот опыт был бы произведен наудачу, и в нем не увидели бы ничего чрезвычайного; только в списке фактов прибавился бы один лишний, не влекущий за собой никаких следствий.

Теперь выясним, при каком условии пользование гипотезой не представляет опасности? Одного твердого намерения руководиться опытом еще недостаточно; этим еще не исключается возможность влияния опасных гипотез; такими в особенности являются те, которые вводятся неосознанно, принимаются молчаливо, почему мы и не можем от них избавиться. Здесь-то и обнаруживается еще одна услуга, которую нам может оказать математическая физика. По свойственной ей точности она вынуждает нас формулировать все гипотезы, которые мы иначе могли бы допустить, сами не подозревая этого.

Заметим, с другой стороны, что весьма важно не множить гипотез чрезмерно и вводить их только одну после другой. Если мы создали теорию, основанную на множестве гипотез, и если опыт осуждает ее, то как найти между нашими предпосылками ту, которая должна быть изменена? Открыть ее было бы невозможно. И наоборот, если опыт согласуется с теорией, то можно ли считать, что подтверждены сразу все гипотезы? Можно ли надеяться из одного уравнения определить несколько неизвестных?

Равным образом нужно тщательно отличать различные виды гипотез. В числе их бывают, прежде всего, такие, которые вполне естественны и которых почти невозможно избежать; так, например, трудно не предположить, что влияние очень удаленных тел ничтожно, что малые движения подчинены линейной зависимости, что действие является непрерывной функцией причины. То же я скажу об условиях, вытекающих из понятия симметрии. Все эти гипотезы, так сказать, образуют общий фонд всех теорий математической физики. Если бы их пришлось оставить, то это уже после всех других.

Гипотезы второй категории я назову безразличными. В большинстве вопросов исследователь в самом начале своих вычислений предполагает, либо что материя непрерывна, либо, наоборот, что она состоит из атомов. Он мог бы изменить свое предположение на обратное, не меняя этих выводов; лишь получение их стало бы более трудным. Если теперь опыт подтверждает его заключения, станет ли он думать, что ему удалось доказать, например, реальность атомов?

В оптических теориях вводятся два вектора, из которых один рассматривается как скорость поступательного движения, другой — как вихрь (tourbillon). Это — пример безразличной гипотезы, так как те же самые выводы получаются и при обратном предположении; поэтому здесь согласие с опытом не может доказать, что действительно первый вектор есть поступательная скорость; оно подтверждает лишь, что величина, о которой идет речь, есть действительно вектор,— а это и есть единственная гипотеза, фактически введенная в число предпосылок. Мы рассматриваем этот вектор либо как скорость, либо как вихрь просто потому, что ограниченность нашего ума вынуждает нас облекать наши представления в некоторую конкретную форму. Пусть нам необходимо обозначить этот вектор буквой x или же y; подобно тому как результат опыта, каков бы он ни был, не дает оснований к тому, чтобы рассматривать вектор как скорость, он не может быть истолкован в том смысле, что его надо обозначать через x, а не через y.

Этого рода безразличные гипотезы никогда не представляют опасности, лишь бы только природа их была ясно понимаема. Они могут быть полезными то в качестве вычислительного приема, то как некоторая конкретная опора для нашей мыслительной способности. Поэтому нет оснований их осуждать.

Гипотезы третьей категории являются обобщениями в настоящем смысле слова. Дело опыта — подтвердить их или опровергнуть. Как в том, так и в другом случае они являются плодотворными; но, по изложенным мною основаниям, это имеет место лишь при условии ограниченности их числа.

Происхождение математической физики. Пойдем дальше, займемся более пристальным рассмотрением обстоятельств, обусловивших развитие математической физики. Прежде всего мы обнаруживаем, что усилия ученых всегда были направлены к тому, чтобы разложить сложное явление, данное непосредственно в опыте, на весьма большое число элементарных явлений.

Это осуществляется тремя различными способами. Сначала о разложении во времени: вместо того чтобы охватывать последовательное развитие явления в его целостности, стараются установить связь каждого момента с моментом, непосредственно предшествующим. Так, например, допускают, что нынешнее состояние мира полностью обусловливается его ближайшим прошлым, что на него, если можно так выразиться, прямо не влияет воспоминание об отдаленном прошлом. Благодаря этому постулату вместо непосредственного изучения всей последовательности явлений можно ограничиться составлением их «дифференциального уравнения», на место законов Кеплера становится закон Ньютона.

Далее стремятся расчленить явление по отношению к пространству. Опыт дает нам запутанную совокупность фактов, происходящих в пространстве некоторого объема. Надо постараться распознать в ней элементарное явление, которое, напротив, было бы локализовано в пределах весьма малой части пространства.

Несколько примеров, быть может, помогут лучше понять мою мысль. Никогда не достиг бы цели тот, кто захотел бы прямо изучить сложное распределение температур в охлаждающемся теле. Но все упрощается, если принять во внимание, что ни одна точка тела не может непосредственно передавать теплоту удаленной точке; теплота будет передаваться лишь точкам, лежащим в непосредственном соседстве; лишь постепенно тепловой поток достигнет других точек тела. Здесь элементарным явлением служит обмен теплоты между двумя смежными точками; этот процесс заключен в тесные пространственные пределы и является относительно простым, если ввести естественное допущение, что на него не влияет температура частиц, лежащих на заметном расстоянии.

Другой пример. Я сгибаю стержень; он принимает весьма сложную форму, прямое изучение которой было бы невозможно; я смогу приступить к ее исследованию, если замечу, что сгибание стержня является результатом деформации весьма малых элементов стержня и что деформация каждого из них зависит исключительно от сил, непосредственно к нему приложенных, а не от сил, действующих на другие элементы.

В этих примерах, которые можно было бы множить без труда, заключено допущение, что не существует действия на расстоянии (по крайней мере на значительном расстоянии). Это — гипотеза; она не всегда является верной — примером служит закон тяготения; поэтому ее надлежит подвергнуть проверке; если она подтверждается хотя бы приближенно, то она ценна, потому что она позволит нам обосновать математическую физику по крайней мере путем последовательных приближений.

Если такая гипотеза не выдерживает проверки, следует искать что-либо аналогичное, ибо есть и другие средства дойти до элементарных явлений. Если несколько тел действуют вместе, то возможно, что их действия независимы и просто складываются друг с другом либо как векторы, либо как скалярные величины. В таком случае элементарным явлением будет действие отдельного тела. В иных случаях задачу сводят к малым движениям, или — более общо — к малым вариациям, которые подчинены известному закону суперпозиции. Наблюденное движение разложится тогда на простые движения, например звук — на гармонические тоны, белый свет — на монохроматические составляющие.

Какими же средствами можно уловить элементарное явление после того как выяснилось, с какой стороны следует его искать?

Прежде всего, часто случается, что, для того чтобы его угадать или — лучше — чтобы угадать то, что есть в нем полезного для нас, вовсе нет необходимости проникать в самый механизм его; достаточно будет применить закон больших чисел. Обратимся опять к примеру распространения теплоты: каждая частица излучает по направлению к каждой соседней частице, но по какому закону — этого нам нет необходимости знать; всякое предположение относительно этого было бы гипотезой безразличной, а следовательно, бесполезной и не поддающейся проверке. В самом деле, благодаря свойствам средних величин и вследствие симметричности среды все различия сглаживаются и результат оказывается всегда одним и тем же, какая бы гипотеза ни была предложена.

Подобное имеет место в теории упругости и в теории капиллярных явлений: близкие друг к другу молекулы притягиваются и отталкиваются, но нам нет нужды знать по какому закону. Достаточно того, что это притяжение действует только на малых расстояниях, что число частиц весьма велико, что среда симметрична, а далее остается лишь пустить в ход закон больших чисел.

В приведенных примерах простота элементарного явления таилась под сложностью непосредственно наблюдаемого результата; но эта простота в свою очередь является призрачной и скрывает за собою весьма сложный механизм.

Лучшим средством дойти до элементарного явления был бы, очевидно, опыт. С помощью искусных экспериментальных приемов нужно было бы разъединить ту сложную связанность, какую природа предоставляет нашему исследованию, а затем тщательно изучать найденные и доведенные до возможной степени чистоты составные элементы. Примером может служить разложение естественного белого луча призмой на монохроматические лучи и поляризатором — на поляризованные лучи.

К несчастью, это не всегда возможно и достаточно. Иногда необходимо, чтобы умозрение предшествовало опыту. Я ограничусь одним примером, который всегда поражал меня: разлагая белый свет, я могу выделить узкую полосу спектра, но, как бы мала она ни была, она будет иметь известную ширину. Точно так же естественные *монохроматические источники* света дают нам линию тонкую, но не до бесконечности. Кто-нибудь мог бы предположить, что, подвергая экспериментальному изучению эти естественные источники, употребляя все более и более тонкие спектральные линии и в конце концов переходя, так сказать, к пределу, удалось бы достигнуть знания свойств строго монохроматического света. Но это было бы неточно. Пусть мы имеем два луча, испускаемые одним и тем же источником; пусть мы сначала поляризуем их во взаимно перпендикулярных плоскостях, затем приведем к одной плоскости поляризации и, наконец, заставим интерферировать. Интерференция произошла бы, если бы свет был *строго* монохроматичен; но при наших лишь приближенно монохроматических источниках интерференция не произойдет, как бы узка ни была взятая спектральная линия; чтобы явление имело место, она должна была бы быть во много миллионов раз уже, чем самые тонкие известные нам линии.

Таким образом, в этом случае переход к пределу обманул бы нас; здесь теоретическая мысль должна была идти впереди опыта, и если она успела в этом, то лишь потому, что инстинктивно руководилась соображением простоты.

Знание элементарного факта позволяет нам сформулировать задачу в виде уравнения; отсюда путем некоторых комбинаций остается только вывести заключение о сложном факте, подлежащем наблюдению и проверке. Это — не что иное, как *интегрирование*, которое уже составляет дело математика.

Можно задать вопрос: почему в физических науках обобщение так охотно принимает математическую форму? Причина этого теперь понятна: она состоит не только в том, что приходится выражать числовые законы, но и в том, что наблюдаемое явление есть результат суперпозиции большого числа элементарных явлений, *подобных друг другу:* значит, здесь вполне естественно появиться дифференциальным уравнениям.

Однако недостаточно, чтобы каждое элементарное явление подчинялось простым законам; все подлежащие сочетанию явления должны подчиняться одному и тому же закону. Только в этом случае математика может принести пользу, потому что она научит нас сочетать подобное с подобным. Цель ее — предсказывать результат сочетания, не проделывая его шаг за шагом на самом деле. Когда приходится повторять несколько раз одну и ту же операцию, математика позволяет нам избежать этого повторения и путем особого рода индукции заранее узнать нужный результат. Я изложил этот прием выше, в главе о математическом умозаключении. Однако для этого необходимо, чтобы все эти операции были подобны друг другу; в противном случае, очевидно, пришлось бы на деле выполнить их одну за другой и помощь математики оказалась бы ненужной.

Таким образом, возможность рождения математической физики обусловлена приблизительной однородностью изучаемого предмета. Это условие не выполняется в биологических науках: здесь мы не находим ни однородности, ни относительной независимости разнородных частей, ни простоты элементарного явления. Вот почему биологи вынуждены прибегать к иным приемам обобщения.

Глава X

ТЕОРИИ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ

Значение физических теорий. Люди, стоящие в стороне от научной работы, поражаются кажущейся эфемерностью научных теорий. Они видят их постепенный упадок после нескольких лет процветания, видят нагромождение все новых руин, предвидят, что и модные теперь теории в свою очередь скоро подвергнутся той же судьбе, и выводят отсюда заключение об их полной бесполезности. Они называют это *банкротством науки.* Но такой скептицизм поверхностен. Эти люди не отдают себе никакого отчета в том, что составляет цель и назначение научных теорий, иначе они поняли бы, что и руины еще могут быть для чего-нибудь полезны.

Казалось, не было теории более прочной, чем теория Френеля, которая рассматривала свет как движение в эфире. Однако теперь ей предпочитают теорию Максвелла. Значит ли это, что труды Френеля были бесполезны? Нет, ибо Френель не ставил своей целью узнать, существует ли реально эфир, имеет ли он атомистическое строение, так ли или иначе движутся его атомы; его цель была иная — предвидеть оптические явления. А этому требованию теория Френеля удовлетворяет теперь точно так же, как и до Максвелла. Ее дифференциальные уравнения всегда верны; способы интегрирования их всегда одни и те же, и получающиеся отсюда интегралы всегда сохраняют свое значение.

Пусть не говорят, что мы таким образом низводим физические теории до степени простых практических рецептов. Уравнениями выражаются отношения, и если уравнения остаются справедливыми, то это означает, что и эти отношения сохраняют свою реальность. Теперь, как и раньше, уравнения Френеля показывают нам наличие такого-то отношения между одной вещью и некоторой другой вещью; но только то, что мы прежде называли *движением*, теперь называем *электрическим током*. Но названия эти были просто образными выражениями [1]), мы подставляем их вместо реальных предметов, которые природа навсегда утаила от нас. Истинные отношения между этими реальными предметами представляют собой единственную реальность, которую мы можем постигнуть; единственное условие состоит в том, чтобы те же самые отношения имели место как между этими предметами, так и между образными выражениями, которыми нам пришлось их заместить. Раз отношения нам известны, то уже не существенно, какое образное выражение мы считаем удобным применить.

Действительно ли некоторое периодическое явление (например, электрическое колебание) представ-

[1]) Стоящий во французском тексте термин image переводчики издания 1904 г. (А. И. Бачинский и Н. М. и Р. М. Соловьевы) и издания 1906 г. (А. В. Чернявский) перевели по смыслу: *символ*. — *Примеч. ред.*

ляет собой результат колебательного движения какого-то атома; действительно ли этот атом, как маятник, перемещается в том или ином направлении — это и не известно с достоверностью, и не интересно. Но что между электрическим колебанием, движением маятника и всеми периодическими явлениями существует внутреннее, глубоко реальное родство, что это родство, это подобие или — еще лучше — этот параллелизм простирается до мельчайших подробностей, что он является следствием более общих принципов — принципа сохранения энергии и принципа наименьшего действия,— это мы можем утверждать; это — истина, которая навсегда останется одной и той же, в какую бы одежду нам ни заблагорассудилось ее облечь.

Было предложено много теорий дисперсии; более ранние были несовершенны и содержали лишь малую долю истины. Затем явилась теория Гельмгольца; потом ее изменяли на разные лады, и сам Гельмгольц построил другую теорию, основанную на принципах Максвелла. Но при этом весьма замечательно, что все ученые после Гельмгольца приходили к одним и тем же уравнениям, хотя исходные позиции их были, по-видимому, весьма различны. Я решаюсь сказать, что все эти теории одновременно справедливы, не только потому, что они позволяют нам предвидеть одни и те же явления, но и потому, что они обнаруживают очевидность действительно существующего отношения между абсорбцией и аномальной дисперсией. То, что есть верного в предпосылках этих теорий, является общим для всех авторов: именно — это утверждение того или иного отношения между некоторыми вещами, носящими у одних одно название, у других другое.

Кинетическая теория газов дала повод для многих возражений, на которые трудно было бы ответить, если бы мы имели претензию видеть в ней абсолютную истину. Но все эти возражения не уничтожат того, что она оказалась полезной, и это, в частности, проявилось в том, что она открыла нам истинное отношение между газовым и осмотическим давлением, — отношение, которое без того было бы глубоко сокрытым. В этом смысле ее можно назвать истинной.

Если физик констатирует противоречие между двумя теориями, одинаково дорогими ему, он иногда говорит: не станем об этом беспокоиться; пусть промежуточные звенья цепи скрыты от нас — мы будем крепко держать ее концы. Этот аргумент, напоминающий запутавшегося богослова, был бы смешон, если бы физическим теориям приписывался тот смысл, какой им придают профаны. Тогда в случае противоречия по меньшей мере одна из них должна была бы быть признана ложной. Это не необходимо, если искать в них только то, что следует искать. Может случиться, что и та и другая теории выражают действительные отношения, а противоречие лежит лишь в символах, в которые мы обрядили реальность.

Если кто-нибудь найдет, что этим слишком суживается область, доступная ученому, я отвечу: те вопросы, которых мы вам запрещаем касаться и о которых вы сожалеете, не только неразрешимы — они призрачны, они лишены смысла.

Пусть какой-то философ претендует на то, чтобы объяснять все физические процессы взаимными столкновениями атомов. Если бы он просто хотел этим указать, что в области физических явлений имеют место такие же отношения, как в случае взаимных столкновений большого числа шаров, и ничего более, то его утверждение было бы доступно проверке и могло бы оказаться справедливым. Но он хочет сказать еще нечто сверх того; и нам кажется, что мы его понимаем, потому что нам представляется, будто мы знаем, что такое удар; а это почему? просто потому, что мы часто видели, как играют на бильярде. Станем ли мы думать, что бог, созерцающий свое творение, испытывает те же ощущения, что и мы при виде бильярдной партии? Если мы, с одной стороны, не хотим вкладывать в рассматриваемое утверждение столь странный смысл, а с другой — отказываемся от только что данного ограничительного толкования, которое является правильным, то это утверждение теряет всякий смысл.

Гипотезам подобного рода свойствен лишь метафорический смысл. Ученому нет надобности воздерживаться от них, подобно тому как и поэт не избегает метафор; но он должен ясно сознавать их истинное значение. Они могут быть полезны как средство достигнуть известного умственного удовлетворения; они безвредны, пока остаются безразличными гипотезами.

Предыдущие соображения разъясняют нам, почему некоторые теории, считавшиеся оставленными и бесповоротно осужденными опытом, вдруг возрождаются к новой жизни. Причина здесь та, что они выражали реальные отношения и не утратили этого свойства даже после того, как мы по тем или иным основаниям сочли нужным выражать те же отношения другим языком. Таким образом, они сохраняли некоторую скрытую жизнеспособность.

В течение последних пятнадцати лет, что было более смешного, наивного и устарелого, чем жидкости Кулона? И вот они теперь возрождаются под именем *электронов*. Чем отличаются эти постоянно наэлектризованные частицы от электрических частиц Кулона? Правда, у электронов электричество имеет носителя в виде некоторого крайне незначительного количества материи; иными словами, электроны обладают массой (впрочем, в настоящее время оспаривается и это их свойство). Но и Кулон не отрицал у своих жидкостей свойства обладать массой или по крайней мере делал это неохотно. Опрометчиво было бы утверждать, что вера в электроны более не померкнет; тем не менее было любопытно констатировать это неожиданное возрождение.

Но наиболее поразительным примером является принцип Карно. Карно установил его, исходя из ложных гипотез. Когда обнаружили, что теплота не обладает свойством неуничтожаемости, но что она может быть преобразована в работу, идеи Карно были совершенно оставлены; но затем Клаузиус возвратился к ним и доставил им окончательное торжество. Теория Карно в ее первоначальном виде выражала рядом с верными отношениями также и другие, которые были неточны, являлись обломками старых идей; но присутствие последних не нарушало реальности первых. Клаузиус просто откинул эти последние, как срезают у дерева засохшие ветви, и в результате появился второй основной закон термодинамики. Это были все те же отношения, хотя по крайней мере внешне они были отношениями уже между другими предметами. Даже рассуждения Карно не потеряли от этого своей пригодности — они ошибочно применялись к ложному содержанию, но форма, т. е. самое существенное, была правильна.

Из предыдущего выясняется также значение общих принципов, каковыми являются принцип наименьшего действия и принцип сохранения энергии.

Эти принципы имеют весьма высокую ценность; они были получены путем отыскания того, что является общим элементом в множестве физических законов; поэтому они образуют как бы квинтэссенцию бесчисленной массы наблюдений. Однако из их общности вытекает следствие, на которое я обращал внимание читателя в главе VIII и которое состоит в том, что они не могут не подтвердиться. Так как мы не можем дать общее определение энергии, то принцип сохранения энергии просто означает, что существует *нечто*, что остается постоянным. Если так, то сколько бы новых сведений о мире ни дал нам будущий опыт, мы заранее уверены, что будет нечто, остающееся постоянным, что мы сможем назвать *энергией*.

Значит ли это, что рассматриваемый принцип лишен смысла, что он обращается в тавтологию? Нисколько: он означает, что различные вещи, которым мы даем наименование *энергии*, связаны истинным сродством; он утверждает между ними реальное отношение. Но если принцип имеет смысл, то он может оказаться ложным; возможно, что мы не имеем права распространять до бесконечности область его применения, и тем не менее оправдание его, пока он рассматривается в узком смысле слова, является заранее обеспеченным. По какому же признаку мы узнаем, что достигнут крайний предел его законного распространения? Просто потому, что он перестанет быть нам полезным, т. е. перестанет давать нам возможность верно предвидеть новые явления. Тогда мы будем уверены, что утверждаемое отношение не является уже реальным, ибо иначе оно было бы и плодотворным; опыт, не противореча непосредственному новому расширению принципа, тем не менее осудит его.

Физика и механицизм. Большинство теоретиков обнаруживает постоянное предрасположение к объяснениям, заимствованным из области механики или динамики. Одни были бы довольны, если бы могли свести все явления к движению частиц, взаимно притягивающихся по известным законам. Другие более требовательны: они хотели бы устранить действия на расстоянии, у них частицы двигались бы по прямолинейным путям и сходили бы с этих путей только вследствие столкновений. Иные же, подобно Герцу, устраняют также и силы, но при этом подчиняют частицы геометрическим связям, похожим, например, на те, которые имеют место в наших суставах; они некоторым образом хотели бы свести динамику к своего рода кинематике. Словом, все хотели бы втиснуть природу в определенную форму, вне которой их ум не может найти удовлетворения. Но является ли природа достаточно гибкой для этого?

Мы исследуем этот вопрос в главе XII по поводу теории Максвелла. Мы увидим, что всякий раз, когда выполняются принцип сохранения энергии и принцип наименьшего действия, существует не только одно механическое истолкование, но и бесконечное множество их. На основании известной теоремы Кёнига о механизмах можно было бы показать, что существует бесконечное множество объяснений явлений как связями по способу Герца, так и с помощью центральных сил. Несомненно, столь же легко было бы доказать, что все явления всегда можно объяснить простыми соударениями.

Разумеется, для этого надо принять, что нельзя удовольствоваться общераспространенным представлением о материи [1]) в том виде, как о ней дают нам знать наши чувства и движения которой мы наблюдаем непосредственно. Пришлось бы или предположить, что эта материя состоит из атомов, внутренние движения которых ускользают от нас, а доступным нашим чувствам оказывается лишь перемещение целого, или пришлось бы постулировать одну из тонких субстанций, которые под названием *эфира* или под каким-либо другим названием во все времена играли столь значительную роль в физических теориях.

Часто идут еще далее: рассматривают эфир как единственную первичную материю или даже как единственную истинную материю. Наиболее умерен-

---

[1]) Под термином «материя» Пуанкаре имеет в виду вещество. — *Примеч. ред.*

ные считают обычную материю конденсированным эфиром — утверждение, не имеющее в себе ничего шокирующего ум; но другие ограничивают ее значение еще более и видят в ней только геометрическое место некоторых особенностей состояний эфира. Например, по лорду Кельвину, то, что мы называем *материей*, есть лишь место точек, где эфир испытывает вихревое движение; по Риману, это — место точек, в которых эфир постоянно уничтожается; у других, более современных авторов, Вихерта или Лармора, это — место точек, где эфир подвергается кручению совершенно особого рода. Я спросил бы желающих присоединиться к одной из этих точек зрения, по какому праву на выдаваемый за истинную материю эфир можно распространять механические свойства, наблюдаемые у обычной материи, которая [по этому воззрению] является ненастоящей.

Прежние невесомые жидкости — теплород, электричество и пр.— были оставлены, когда замечено было, что теплоте не свойственна неуничтожаемость. Но тут было и другое основание. Возведением их в ранг субстанций утверждалась их индивидуальность; они становились как бы разделенными друг от друга глубокой пропастью. Эту пропасть потребовалось засыпать, когда стало живее чувствоваться единство природы, когда были замечены тесные внутренние связи между всеми ее частями. Прежние физики размножением своих жидкостей не только создавали ненужные субстанции, но и разрывали реальные связи. Недостаточно, чтобы теория не утверждала неверных соотношений; надо, чтобы она не скрывала истинных соотношений.

А наш эфир — существует ли он в действительности? Известно, откуда явилась уверенность в его существовании. Свету требуется несколько лет, чтобы дойти до нас от удаленной звезды. В это время он *уже* не находится на звезде и *еще* не находится на Земле. Надо допустить, что он где-то находится, что он имеет, так сказать, некоторый материальный носитель

Можно выразить ту же идею в более математической и более абстрактной форме. Мы констатируем лишь изменения, которым подвергаются частицы материи; например, мы видим, как наша фотографическая пластинка испытывает влияние процессов, совершавшихся в раскаленной массе звезды много лет назад. Но в обычной механике состояние изучаемой системы определяется состоянием ее в непосредственно предшествующий момент; благодаря этому система удовлетворяет известным дифференциальным уравнениям.

Напротив, если бы мы отрицали эфир, то состояние материального мира зависело бы не только от непосредственно предшествующего состояния, но и от состояний гораздо более давнего времени; такая система удовлетворяла бы уравнениям в конечных разностях. Чтобы избегнуть этого отклонения от общих законов механики, мы и придумали эфир.

Изложенное выше заставляет нас наполнить эфиром только междупланетное пространство, но не пропитать им внутренность самих материальных сред. Физо идет дальше. В своем опыте, заставляя интерферировать лучи, прошедшие через движущийся воздух или воду, он, по-видимому, показывает нам две различные среды, проникающие друг друга и смещающиеся одна относительно другой. Можно сказать, что здесь вы касаетесь эфира пальцем.

Однако можно вообразить опыты, которые ввели бы нас в еще более тесное соприкосновение с ним. Предположим, что закон Ньютона, утверждающий равенство действия и противодействия, будучи приложен *только* к материи, оказался неверным, и нам удалось это установить. Геометрическая сумма всех сил, приложенных ко всем материальным частицам, не равнялась бы нулю. Тогда пришлось бы либо изменить всю механику, либо ввести эфир так, чтобы действие, испытываемое материей, компенсировалось противодействием, оказываемым материей на что-то другое. Или далее, пусть будет доказано, что световые и электрические явления видоизменяются вследствие движения Земли. Тогда пришлось бы заключить, что ход этих явлений может указать не только относительные перемещения материальных тел, но и так называемые их абсолютные движения.

В таком случае стало бы необходимым допустить существование эфира, чтобы эти «абсолютные» перемещения были отнесены не к пустому пространству, а к некоторой конкретной вещи.

Придем ли мы к нему когда-нибудь? Я не надеюсь и сейчас скажу, почему; однако надежда на это не так нелепа, раз она свойственна другим.

Так, если бы теория Лоренца, о которой я буду говорить подробнее в главе XIII, была справедлива, то закон Ньютона прилагался бы не к *одной только* материи и отклонения от него не были бы очень далеки от значений, доступных наблюдению.

С другой стороны, влияние движений Земли на электрические и оптические явления служило предметом многих исследований. Результаты всегда были отрицательными. Но уже одно то, что эти опыты были предприняты, показывает, что не было твердой уверенности в результатах, а по господствующим теориям компенсация является лишь приближенной, и можно надеяться, что более точные методы принесут положительные результаты.

Я считаю такие надежды призрачными; тем не менее любопытно показать, что успех этого рода опытов некоторым образом открыл бы нам новый мир.

Теперь я позволю себе сделать отступление, чтобы объяснить, почему я, вопреки Лоренцу, не думаю, что когда-нибудь более точные наблюдения могут обнаружить что-либо иное, кроме относительных перемещений материальных тел. Произведенные ранее опыты имели целью обнаружить члены первого порядка. Результат был отрицательный; могло ли это быть делом случая? Этого никто не мог допустить; стали искать общее объяснение, и Лоренц нашел его: он показал, что члены первого порядка взаимно уничтожаются. Это не имело места для членов второго порядка. Тогда были произведены более точные опыты, которые снова дали отрицательный результат. Это опять не могло произойти случайно — требовалось объяснение, которое и было дано. За объяснением дело никогда не станет: гипотезы представляют собой неисчерпаемый фонд.

Это не все: кто не почувствует, что здесь случайности предоставляется очень большая роль? Разве не случайным является то странное совпадение, благодаря которому известное обстоятельство явилось как раз вовремя, чтобы уничтожить члены первого порядка, а другое, совершенно отличное, но столь же благоприятное обстоятельство взяло на себя труд уничтожить члены второго порядка? Нет, следует найти одно и то же объяснение для обоих случаев, и тогда естественно явится мысль, что то же будет иметь место равным образом и для членов высших порядков и что взаимное уничтожение всех членов будет точным и абсолютным.

Современное состояние науки. В истории развития физики можно различать две противоположные тенденции. С одной стороны, ежеминутно открываются новые связи между предметами, которые, казалось, должны были навсегда остаться разделенными; отдельные факты перестают быть чуждыми друг другу; они стремятся систематизироваться в величественном синтезе. Наука движется по направлению к единству и простоте.

С другой стороны, наблюдение ежедневно открывает нам новые явления; они долго ждут своего места в системе, и иногда для этого бывает нужно сломать один из ее углов. Даже в хорошо известных явлениях, которые нашими грубыми чувствами воспринимаются как однородные, мы с каждым днем замечаем все более разнообразные подробности; то, что мы считали простым, делается сложным, и наука, повидимому, идет по пути возрастания сложности и многообразия.

Какая из этих двух тенденций, которые, как кажется, поочередно торжествуют победу, в конце концов одержит верх? Если первая, то наука возможна; но à priori этого доказать нельзя, и можно опасаться, что после тщетных попыток насильно подчинить природу нашему идеалу единства мы, затопляемые постоянно повышающейся волной новых приобретений, будем принуждены отказаться от классификации их, оставить наш идеал и свести науку к простой регистрации бесчисленного множества рецептов.

На этот вопрос мы не можем ответить. Мы можем только сравнивать науку, какою она является сегодня, с ее вчерашним состоянием. Из такого рассмотрения, несомненно, можно извлечь некоторые предположения.

Вот уже полвека, как зародились самые широкие ожидания. Благодаря открытию закона сохранения энергии и ее превращений тогда только что было обнаружено единство сил природы. Оно показало также, что тепловые явления могут быть объяснены движениями молекул. Какова природа этих движений — этого точно еще не знали, но не сомневались, что скоро это станет известным. Относительно света задача казалась окончательно решенной.

Успехи в области электричества были не столь значительны. Связь электричества с магнетизмом была только что установлена. Это был значительный и окончательный шаг к единству. Но как электричество в свою очередь могло бы приобщиться ко всеобщему единству, в какой форме вошло бы оно во вселенский механизм? Относительно этого еще не было никакой идеи. Однако никто не сомневался, что такое сведение к единству возможно,— все в это верили. Наконец, что касается молекулярных свойств материальных тел, то приведение их к общему единству казалось еще более легким; однако все детали оставались в тумане. Словом, это были большие живые, но не вполне ясные надежды.

Что же мы видим теперь?

Прежде всего — первый прогресс, и прогресс огромный. Теперь известны отношения между электричеством и светом: три области — свет, электричество и магнетизм,— прежде разделенные, объединились в одну и, по всей видимости, объединились окончательно.

Однако этот триумф стоил нам некоторых жертв. Световые явления входят в область электрических как частный случай; пока они оставались изолированными, легко было объяснять их движениями, которые считались известными во всех деталях; но теперь объяснение может быть принято лишь тогда, когда оно может без труда охватить всю область электричества. А вот это не обходится без трудностей.

Наиболее удовлетворительной из всего, что мы имеем, является теория Лоренца; эта теория, как мы это увидим в последней главе, объясняет электрический ток движением малых наэлектризованных частиц; она, бесспорно, лучше всех истолковывает известные нам факты, освещает больше реальных отношений, чем любая другая, и свойственные ей черты войдут в наибольшем числе в будущее окончательное построение. Тем не менее ей свойствен отмеченный уже выше крупный недостаток: она противоречит ньютонову закону действия и противодействия; или, точнее, по мнению Лоренца, этот закон приложим не только к самой материи; чтобы он оправдывался, надо принимать в расчет действие эфира на материю и противодействие, оказываемое материей на эфир. Но до новых открытий представляется вероятным, что положение вещей не таково.

Как бы то ни было, благодаря Лоренцу результаты, полученные Физо при исследовании оптических свойств движущихся тел, законы нормальной и аномальной дисперсии и законы поглощения света оказываются связанными как между собой, так и с другими свойствами эфира, и эта связь без сомнения более не порвется. Посмотрите, с какой легкостью новое явление Зеемана нашло в этой теории готовое место и даже помогло ввести в систему фарадеево магнитное вращение, не повиновавшееся усилиям Максвелла; эта легкость доказывает, что теория Лоренца не есть искусственное построение, обреченное на разрушение. Ее, возможно, придется изменить, но не разрушить.

Однако Лоренц не имел иных притязаний, как только обобщить в едином целом всю оптику и электродинамику движущихся тел; он не имел в виду дать им механическое истолкование. Лармор идет дальше: сохраняя существенные черты теории Лоренца, он, так сказать, прививает к ней идеи Мак-Кёллафа (MacCullagh) о направлении движений эфира. С его точки зрения, скорость эфира имеет те же направление и величину, что и магнитная сила. Тем самым становится известной скорость эфира, поскольку свойства магнитной силы доступны опыту. Как бы остроумна ни была эта попытка, недостатки теории Лоренца здесь сохраняются и даже увеличиваются. По Лоренцу, мы не знаем характера движений эфира и благодаря этому незнанию можем предполагать их такими, чтобы, компенсируясь движениями материи, они восстанавливали равенство действия и противодействия. По Лармору, мы знаем движения эфира и можем констатировать, что компенсация не имеет места.

Если попытка Лармора, как я считаю, не имела успеха, то означает ли это невозможность механического истолкования? Нисколько: я уже говорил раньше, что раз данное явление подчиняется принципу сохранения энергии и принципу наименьшего действия, оно допускает бесчисленное множество механических истолкований: то же самое имеет место и для световых и электрических явлений. Но этого недостаточно: чтобы механическое истолкование было пригодным, надо, чтобы оно было простым; для отбора между всеми возможными истолкованиями надо иметь еще и другие основания, кроме простой необходимости отбора. И вот, теории, которая удовлетворяла бы этому условию и, следовательно, могла бы быть на что-нибудь пригодной, мы еще не имеем. Следует ли сожалеть об этом? Это означало бы забыть, какую цель мы преследуем; истинная, единственная цель науки — раскрытие не механизма, а единства.

Поэтому нам следует ограничить наши притязания: не будем гнаться за механическим истолкованием, удовлетворимся указанием на то, что мы всегда могли бы его достигнуть, если бы пожелали. В этом мы имели бы успех: принцип сохранения энергии постоянно подтверждается; к нему присоединился и второй принцип, принцип наименьшего действия, облеченный в подходящую для физики форму. Он также постоянно подтверждался, по крайней мере для обратимых явлений, подчиненных уравнениям Лагранжа, т. е. наиболее общим законам механики.

Необратимые явления гораздо более непокорны. Однако и они упорядочиваются и стремятся войти в общее единство; озаривший их свет исходил из принципа Карно. Термодинамика долгое время ограничивалась изучением расширения тел и изменения их состояния. С некоторого времени она стала смелее и значительно расширила свою область. Мы обязаны ей теорией гальванического элемента и теорией термоэлектрических явлений; во всей физике нет ни одного уголка, не исследованного ею; она захватила даже химию. Повсюду царят одни и те же законы; повсюду под кажущимся разнообразием мы открываем принцип Карно и удивительное по своей абстрактности понятие энтропии, которое имеет столь же универсальный характер, как и понятие энергии, и которому, как и понятию энергии, по-видимому, соответствует какая-то реальность. Казалось, лучистая теплота должна была избежать такого подчинения;

но в последнее время мы видели, что и она покорилась тем же законам.

На этом пути нам открылись новые аналогии, которые часто простираются до деталей: омическое сопротивление уподобляется вязкости жидкостей; гистеризис — трению твердых тел. Во всех случаях трение является образцом, которому подражают разнообразнейшие необратимые явления, и это сродство отличается реальностью и глубиной.

И для этих явлений искали механическое истолкование в собственном смысле, но почти без успеха. Чтобы найти его, нужно было предположить, что необратимость есть лишь видимость, что элементарные явления обратимы и подчиняются известным законам динамики. Но число элементов чрезвычайно велико; они постоянно перемешиваются между собой, так что нашему грубому зрению кажется, что все стремится к однообразию, т. е. что все движется в одном направлении без надежды на возврат. Таким образом, кажущаяся необратимость есть лишь следствие закона больших чисел. Лишь существо, одаренное бесконечно острыми чувствами, как воображаемый Максвеллом демон, могло бы распутать этот запутанный клубок и повернуть мировой процесс в обратном направлении.

Это представление, связанное с кинетической теорией газов, стоило больших усилий и все же в общем было не очень плодотворно; быть может, оно еще станет таковым. Здесь не место рассматривать, не ведет ли оно к противоречиям и соответствует ли оно истинной природе вещей.

Во всяком случае, отметим оригинальные идеи Гуи (Gouy) о броуновском движении. Согласно Гуи, это своеобразное движение избежало бы подчинения принципу Карно. Колеблемые им частицы меньше по размерам, чем петли нашего запутанного клубка; поэтому эти частицы были бы в состоянии распутать их и таким образом дать задний ход мировой машине. Тем самым как бы была видна работа максвеллова демона.

Резюмируя предыдущее, скажем, что известные раньше явления систематизируются все лучше и лучше. Но и новые явления требуют себе места; большинство их, подобно явлению Зеемана, нашло его тотчас же. Но мы имеем также катодные лучи, рентгеновские лучи, лучи урана и радия. Тут целый мир, о существовании которого никто и не догадывался. Всех этих неожиданных гостей надо определить к месту!

Никто не может еще предвидеть, какое именно место они займут. Но я думаю, что они не разрушат общего единства, а скорее дополнят его собою. В самом деле, с одной стороны, новые излучения представляются связанными с явлениями люминесценции; они не только возбуждают флюоресценцию, но иногда возникают при тех же условиях, что и эта последняя. Далее, они состоят в родстве с теми причинами, которые заставляют проскакивать искру под действием ультрафиолетового света. Наконец (и это особенно важно), во всех этих явлениях предполагают участие настоящих ионов, правда, обладающих несравненно более значительными скоростями, чем скорости ионов в электролитах. Все это довольно неясно; но точность придет со временем.

Фосфоресценция, действие света на искру были до сих пор областями, сравнительно изолированными и поэтому менее привлекавшими исследователей. Теперь можно надеяться, что мы близки к построению нового пути, который облегчит их связь с универсальной наукой.

Мы не только обнаруживаем новые явления, но и в тех, которые считались известными, нам открываются неожиданные аспекты. В свободном эфире законы сохраняют свою величественную простоту; но материя в собственном смысле представляется все более и более сложной; все, что о ней говорится, всегда имеет только приближенное значение, и наши формулы ежеминутно требуют все новых членов.

Тем не менее это не разрушает общего плана. Отношения, установленные между вещами в предположении простоты последних, сохраняются и после того, как мы узнаем об их сложности,— а только это и важно. Правда, наши уравнения становятся все более и более сложными, для того чтобы по возможности ближе подойти к сложности природы; но в отношениях, которые позволяют выводить одни уравнения из других, не произошло никаких перемен. Одним словом, форма уравнений устояла.

Возьмем в качестве примера законы отражения света. Френель вывел их из простой и увлекательной теории, которая, по-видимому, подтверждалась опытом. Впоследствии более точные исследования доказали, что это подтверждение было лишь приближенным, и обнаружили повсюду следы эллиптической поляризации. Но тотчас же благодаря той точке опоры, которую мы имели в первом приближении, найдена была причина этих аномалий, состоящих в наличии поглощающего слоя: в существенных чертах теория Френеля сохранила свое значение.

Здесь только нельзя удержаться от следующего соображения. Все эти отношения остались бы незамеченными, если бы с самого начала существовала догадка о сложности взаимодействующих объектов. Давно уже было сказано, что если бы инструменты Тихо были в десять раз точнее, то мы никогда не имели бы ни Кеплера, ни Ньютона, ни астрономии. Для научной дисциплины составляет несчастье возникнуть слишком поздно, когда средства наблюдения стали слишком совершенными. В таком положении ныне находится физическая химия: третий и четвертый десятичные знаки причиняют большие затруднения ее основателем; по счастью, это — люди крепкой веры.

По мере того как продвигается изучение свойств материи, мы видим, как вступает в свои права идея непрерывности. Со времени работ Эндрюса и ван-дер-Ваальса мы уяснили способ, каким происходит переход от жидкого состояния к газообразному: этот переход не является внезапным. Точно так же нет и пропасти между жидким и твердым состояниями; в Трудах последнего съезда физиков наряду с работой о затвердевании жидкостей мы встречаем доклад о текучести твердых тел.

При такой тенденции простота, без сомнения, утрачивается: прежде некоторое явление изображалось несколькими прямыми, теперь приходится состыковывать эти прямые при помощи более или менее сложных кривых. Зато очень выигрывает единство. Эти разрозненные категории успокаивали ум, но не удовлетворяли его.

Наконец, физические методы завоевали новую область — химию; возникла физическая химия. Она еще очень молода, но уже видно, что она позволит нам связать друг с другом такие явления, как электролиз, осмос, движение ионов.

Что можно заключить из этого беглого очерка? То, что в итоге произошло приближение к единству; правда, движение было не таким быстрым, как этого ожидали пятьдесят лет назад, самые пути не всегда совпадали с ожидаемыми; но в конце концов приобретения оказались весьма значительными.

Глава XI

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Без сомнения, читатель будет удивлен, встретив здесь размышления об исчислении вероятностей.

Какое отношение может оно иметь к методу физических наук? А между тем вопросы, которые я хочу поднять, не разрешая их, естественно встают перед философом, желающим размышлять о физике, и уже в двух предыдущих главах я принужден был несколько раз использовать выражения: «вероятность» и «случайность».

Предвидение фактов, говорил я выше, может быть только вероятностным. «Как бы прочно обоснованным ни казалось нам наше предвидение, все же мы никогда не имеет *абсолютной* уверенности в том, что оно не будет опровергнуто опытом, предпринятым в целях его проверки. Однако вероятность часто бывает достаточно велика, чтобы практически мы могли ею удовлетвориться».

Затем несколько дальше я добавил:

«Рассмотрим, какую роль играет в наших обобщениях уверенность в простоте. Пусть мы установили, что некоторый простой закон подтверждается для достаточно большого числа отдельных случаев; тогда мы отказываемся допустить, что такое удачное совпадение было простой случайностью...»

Таким образом, во множестве случаев физик находится в таком же положении, как игрок, рассчитывающий свои шансы. Всякий раз, когда он применяет метод индукции, он более или менее сознательно пользуется исчислением вероятностей.

Ввиду этого я принужден сделать отступление и прервать наше изучение метода физических наук, чтобы подробнее рассмотреть, какое значение имеет это исчисление и какого доверия оно заслуживает.

Уже одно название «исчисление вероятностей» представляет собой пародокс; вероятность, в противоположность достоверности, есть то, чего не знают; как же можно вычислять то, о чем нет никаких знаний? Между тем многие выдающиеся ученые занимались этим вычислением, и никто не станет отрицать, что наука уже извлекла из него некоторую пользу. Как же объяснить это явное противоречие?

Была ли определена вероятность? И может ли она быть определена? И если нет, то как мы решаемся рассуждать о ней? Определение,— скажут,— очень просто: вероятность какого-нибудь события есть отношение числа случаев, благоприятствующих этому событию, к полному числу возможных случаев.

Простой пример даст нам понять, как неполно это определение. Я бросаю две игральные кости; какова вероятность того, что по крайней мере на одной из них выпадет 6? Каждая кость может выпасть шестью различными способами: число возможных случаев есть $6 \times 6 = 36$; число благоприятствующих случаев есть 11, вероятность равна $^{11}/_{36}$.

Таково правильное решение. Но не могу ли я с таким же успехом сказать: числа очков, выпавшие на обеих костях, могут образовать $\frac{6 \times 7}{2} = 21$ различных комбинаций; среди этих комбинаций 6 благоприятствующих; вероятность равна $^{6}/_{21}$.

Почему первый способ рассчитывать возможные случаи более законен, чем второй? Во всяком случае наше определение нам этого не указывает.

Таким образом, приходится дополнить это определение, говоря: «...к полному числу возможных случаев при условии, чтобы эти случаи были равновероятны». И вот мы пришли к определению вероятного при помощи вероятного же.

Как мы узнаем, что два возможных случая равновероятны? Не является ли это результатом некоторого условного соглашения? Если мы в начале каждой проблемы явно укажем условное соглашение, то все пойдет хорошо; нам придется только применять правила арифметики и алгебры, и мы доведем вычисление до конца так, что результат не оставит места никакому сомнению. Но если мы желаем сделать малейшее применение этого результата, то необходимо будет доказать, что наши условные соглашения были законны, и мы как раз натолкнемся на то затруднение, которое думали обойти.

Нам могут сказать: простого здравого смысла достаточно чтобы указать, какое соглашение следует допустить. Но вот Бертран, курьеза ради, разобрал простую задачу: «Какова вероятность того, чтобы в окружности хорда была больше стороны вписанного равностороннего треугольника?» Знаменитый геометр допустил последовательно два соглашения, одинаково, по-видимому, внушаемые здравым смыслом, и нашел в одном случае $^1/_2$, в другом $^1/_3$.

Заключение, которое по всей видимости вытекает из всего этого, состоит в том, что исчисление вероятностей есть наука бесполезная, что нужно с недоверием относиться к тому неясному инстинкту, который мы называем здравым смыслом и к которому обращаемся при установлении наших соглашений.

Тем не менее мы не можем подписаться под этим заключением; мы не можем обойти этот неясный инстинкт; без него наука была бы невозможна, без него мы не могли бы ни открыть закон, ни применять его. Имеем ли мы, например, право говорить о законе Ньютона? Без сомнения, многочисленные наблюдения согласуются с ним; но не есть ли это результат простой случайности? И далее, откуда мы знаем, что этот закон, верный на протяжении стольких веков, будет верным и на будущий год? На это возражение вы можете лишь ответить: «это очень мало вероятно».

Но примем некий закон; я верю, что, опираясь на него, я могу вычислить положение Юпитера на целый год. Однако имею ли я на это право? Кто мне сказал, что за это время какая-нибудь гигантская масса, наделенная огромной скоростью, не пройдет вблизи Солнечной системы и не произведет непредвиденных возмущений? И здесь ничего не остается ответить, как только: «это очень мало вероятно».

С этой точки зрения все науки суть только бессознательные приложения исчисления вероятностей;

осудить это исчисление — значит осудить всю науку в целом.

Я не стану долго останавливаться на научных проблемах, где участие исчисления вероятностей является более очевидным.

Такова прежде всего задача интерполяции, где по известному числу значений функции стараются определить промежуточные значения. Упомяну также о знаменитой теории погрешностей наблюдений (к которой еще вернусь позднее), о кинетической теории газов — этой общеизвестной гипотезе, по которой предполагается, что каждая газовая молекула описывает крайне сложную траекторию, но где по свойству закона больших чисел явления, взятые в среднем — в форме, единственно доступной для наблюдения,— подчиняются простым законам, каковы законы Мариотта и Гей-Люссака.

Все эти теории покоятся на законах больших чисел, так что падение исчисления вероятностей, очевидно, увлекло бы их за собой. Правда, они представляют только частный интерес и, за исключением интерполяции, это были жертвы, с которыми можно было бы примириться. Но, как я указал выше, речь шла бы не об этих только частных жертвах — речь шла бы о всей науке, законность которой была бы подвергнута сомнению.

Я знаю, что мне могли бы сказать: «Мы ничего не знаем и все-таки мы должны действовать. Но мы не имеем времени заняться исследованием, достаточным для того, чтобы рассеять наше незнание; кроме того, подобное исследование потребовало бы бесконечного времени. Следовательно, мы должны решаться, не обладая знанием; надо действовать наудачу и следовать правилам, не слишком им доверяя. Я знаю не то, что такая-то вещь истинна, но то, что для меня все же лучше действовать так, как если бы она была истинна». Исчисление вероятностей и, следовательно, наука имели бы не более как только практическое значение.

К сожалению, таким путем трудность не была бы устранена. Игрок желает попытать счастья, он спрашивает у меня совета. Если я ему дам совет, я буду руководствоваться исчислением вероятностей, но я не гарантирую ему успеха. Это то, что я назову *субъ-*

ективной вероятностью. В этом случае можно было бы довольствоваться объяснением, которое я привел выше. Но предположим, что при игре присутствует наблюдатель, который отмечает все ходы, и что игра продолжается долгое время; когда он подведет итог в своей записной книжке, он констатирует, что события распределены согласно законам исчисления вероятностей. Это — то, что я назову *объективной вероятностью,* и именно это явление нужно объяснить.

Существует множество страховых обществ, которые применяют правила исчисления вероятностей; они выдают своим акционерам дивиденды, объективную реальность которых невозможно оспорить. Чтобы объяснить это, недостаточно ссылаться на наше незнание и на необходимость действовать.

Таким образом, абсолютный скептицизм не может быть принят; мы должны быть осторожны, но не должны все огульно осуждать; необходимо подробное исследование.

I. Классификация проблем вероятности. Чтобы классифицировать проблемы, которые касаются такой темы, как вероятность, можно стать на несколько различных точек зрения и прежде всего на *точку зрения общности.*

Выше я сказал, что вероятность есть отношение числа благоприятствующих случаев к числу возможных случаев. То, что за недостатком лучшего термина я называют общностью, будет возрастать с числом возможных случаев. Это число может быть конечным, как, например, в случае, когда рассматривается бросание костей, где число возможных случаев есть 36. Это — первая степень общности.

Но если мы спросим, например, какова вероятность того, что точка, расположенная внутри круга, окажется лежащей также внутри вписанного квадрата, то число возможных случаев будет таково же, как число точек в круге, т. е. бесконечно. Это — вторая степень общности. Общность может быть распространена еще далее: можно задаться вопросом о вероятности того, что функция удовлетворяет данному условию; в этом случае существует столько возможных случаев, сколько можно вообразить различных функций. Это — третья степень общности, до которой восходят, например, когда стараются определить наиболее вероятный закон по конечному числу наблюдений.

Можно стать на совершенно иную точку зрения. Абсолютное знание, будучи тождественным достоверности, не оставило бы места для вероятности. Но и абсолютное незнание не привело бы к вероятности: ведь надо все же иметь хоть какую-нибудь осведомленность, чтобы прийти даже к этой недостоверной науке. Проблемы вероятности могут быть, таким образом, классифицированы по большей или меньшей глубине незнания.

Уже в области математики могут возникать проблемы вероятности. Какова вероятность того, что пятый десятичный знак логарифма, взятого наудачу из таблиц, будет 9? Никто не затруднится ответить, что эта вероятность есть $^1/_{10}$. Здесь мы обладаем всеми данными проблемы; мы могли бы вычислить наш логарифм, не прибегая к таблицам, но мы не хотим заниматься этим. Это — первая степень незнания.

В физических науках наше незнание уже больше. Состояние системы в данный момент зависит от двух обстоятельств: от ее начального состояния и от закона, по которому это состояние изменяется. Если бы мы сразу знали и этот закон и это начальное состояние, то нам нужно было бы разрешить только математическую проблему и мы снова пришли бы к первой степени незнания.

Но часто бывает, что нам известен закон, начальное же состояние неизвестно. Спрашивается, например, каково действительное распределение малых планет; мы знаем, что во всякое время они подчинены законам Кеплера, но мы знаем, каково было их начальное распределение.

В кинетической теории газов предполагается, что все газовые молекулы движутся по прямолинейным траекториям и подчиняются законам удара упругих тел; но, так как их начальные скорости неизвестны, то ничего неизвестно и об их действительных скоростях. Только исчисление вероятностей позволяет предвидеть средние явления, которые будут результатом комбинации этих скоростей. Это — вторая степень незнания.

Возможно, наконец, что не только начальные условия, но и самые законы будут неизвестны; тогда мы будем иметь третью степень незнания и вообще ничего не сможем утверждать относительно вероятности явления.

Часто бывает, что стараются предсказать не событие по более или менее несовершенному знанию закона, а, наоборот, зная события, стараются предсказать закон; таким образом, выводят не действия из причин, а причины на основании действий.

Это — так называемые проблемы *вероятности причин*, наиболее интересные с точки зрения их научных приложений.

Я играю в экарте[1]) с человеком, которого знаю как вполне порядочного; он сдает карты. Какова вероятность того, что он откроет короля? Эта вероятность равна $^1/_8$; это — проблема вероятности событий. Я играю с человеком, которого не знаю; он 10 раз сдавал карты и 6 раз открывал короля; какова вероятность того, что это шулер? Это — проблема вероятности причин.

Можно сказать, что это — главная проблема экспериментального метода. Я наблюдал n значений для x и соответственные значения для y; я констатировал, что отношение вторых к первым является заметно постоянным. Вот событие; какова его причина?

Вероятно ли, чтобы существовал общий закон, по которому y пропорционально x, и чтобы небольшие отклонения были обусловлены погрешностями наблюдений? Вот вопрос, который постоянно ставит перед собой исследователь и который он бессознательно решает всякий раз, когда занимается наукой.

Теперь я займусь обсуждением различных категорий проблем и рассмотрю сначала то, что я выше назвал субъективной вероятностью, а затем то, что назвал вероятностью объективной.

II. Вероятность в математических науках. Невозможность квадратуры круга доказана в 1883 году; но уже много раньше этой близкой к нам даты все геометры рассматривали эту невозможность как столь «вероятную», что Академия наук оставляла без рассмотрения мемуары (к сожалению, слишком многочисленные), посылаемые ей каждый год какими-то неудачниками.

---

[1]) Карточная игра. — *Примеч. ред.*

Была ли Академия права? Конечно, да; она хорошо знала, что, поступая так, она нисколько не рискует затормозить важное открытие. Она не могла бы доказать, что она права; но она знала, что ее инстинкт не обманывает ее. Если бы вы спросили академиков, они бы вам ответили:

«Мы сравнили вероятность того, что неизвестный ученый нашел истину, которую тщетно искали уже столь долгое время, с вероятностью того, что число умалишенных людей увеличилось на единицу; вторая вероятность показалась нам больше». Эти соображения очень хороши, но они не имеют в себе ничего математического; они — чисто психологического характера.

А если бы вы спрашивали их более настойчиво, они прибавили бы: «Почему вы желаете, чтобы частное значение трансцендентной функции было алгебраическим числом? И если бы π было корнем алгебраического уравнения, то почему вы желаете, чтобы только этот корень был периодом функции $\sin 2x$ и чтобы ими не были другие корни того же уравнения?». Словом, они сослались бы на принцип достаточного основания в его наиболее неопределенной форме.

Но что они бы могли извлечь из этого? В лучшем случае — практическое правило для употребления времени, которое с большей пользой могло бы быть потрачено на их обычные работы, чем на изучение вымученного сочинения, внушающего законное недоверие. Но то, что я назвал выше объективной вероятностью, не имеет никакого отношения к этой первой проблеме.

Иначе обстоит дело со второй проблемой. Возьмем 10 000 первых логарифмов, которые я нахожу в таблицах. Среди этих 10 000 логарифмов я беру наудачу один; какова вероятность, что его третий десятичный знак есть четное число? Вы не затруднитесь ответить: $^1/_2$ — и в самом деле, если вы просмотрите в таблице третьи десятичные знаки этих 10 000 чисел, вы найдете приблизительно столько же четных цифр, сколько и нечетных.

Или, если желаете, напишем 10 000 чисел, по количеству наших логарифмов; каждое из этих чисел пусть равно $+1$, если третий десятичный знак четный, и —1 в обратном случае. Возьмем затем среднюю величину из этих 10 000 чисел. Я не затруднюсь сказать, что эта средняя величина, вероятно, равна нулю; если бы я произвел вычисление в действительности, я убедился бы, что она очень мала.

Но эта проверка даже бесполезна. Я мог бы строго доказать, что это среднее меньше 0,003. Чтобы установить этот результат, мне пришлось бы привести довольно длинное вычисление, для которого здесь мало места, и поэтому я ограничусь ссылкой на статью, опубликованную мною в «Revue générale des Sciences» 15 апреля 1899 г. Единственный пункт, на который я должен обратить внимание, следующий: в этом вычислении я опирался только на два факта, а именно, что первая и вторая производные логарифма в рассматриваемом промежутке остаются заключенными в известных пределах.

Отсюда первое следствие: что это свойство справедливо не только для логарифма, но для какой угодно непрерывной функции, так как производные всякой непрерывной функции заключены в определенных пределах.

Если я уже заранее был уверен в результате, то это прежде всего потому, что я часто замечал аналогичные факты для других непрерывных функций; затем потому, что я — более или менее бессознательно и несовершенно — провел в уме рассуждение, которое привело меня к предыдущим неравенствам, подобно тому как опытный вычислитель, не доведя до конца умножения, соображает, что «получится приблизительно столько-то».

И кроме того, так как то, что я назвал бы моей интуицией, есть лишь несовершенный образ истинного рассуждения, то, как выяснилось, наблюдение подтвердило мои догадки, и объективная вероятность оказалась в согласии с вероятностью субъективной.

В качестве третьего примера я выберу следующую проблему: пусть число u взято наудачу, n — данное очень большое целое число; каково вероятное значение $\sin nu$? Эта проблема сама по себе не имеет никакого смысла. Чтоб придать ей смысл, необходимо условное допущение: мы *условимся*, что вероятность того, что число u заключено между a и $a + da$, равна $\varphi(a)da$; что она, следовательно, пропорциональна величине бесконечно малой разности da и равна этой величине, умноженной на функцию $\varphi(a)$, зависящую только от a. Что касается этой функции, то я выбираю ее произвольно, но надо предположить ее непрерывной. Так как значение $\sin nu$ остается тем же, когда u возрастает на 2π, то я могу, не ограничивая общности, допустить, что u заключено между 0 и 2π, и таким образом приду к допущению, что $\varphi(a)$ есть периодическая функция с периодом 2π.

Искомое вероятное значение легко выражается простым интегралом, и легко показать, что этот интеграл меньше чем

$$2\pi\frac{M_k}{n^k},$$

где M_k — наибольшее значение k-й производной функции $\varphi(u)$. Итак, мы видим, что если k-я производная конечна, то наша вероятная величина стремится к нулю, когда n возрастает беспредельно, и притом быстрее чем

$$1/n^{k-1}.$$

Итак, вероятное значение $\sin nu$ для очень большого n есть нуль; чтобы определить это значение, мне необходимо было сделать условное допущение, но результат остается тем же, *каково бы ни было это условное допущение*. Я наложил лишь небольшие ограничения, допуская, что функция $\varphi(a)$ есть непрерывная и периодическая, и эти гипотезы столь естественны, что неясно, как можно было бы их избежать.

Обсуждение трех предыдущих примеров, столь различных во всех отношениях, до некоторой степени обнаруживает, с одной стороны, значение того, что философы называют принципом достаточного основания, а с другой — важность того факта, что некоторые свойства являются общими для всех непрерывных функций. Изучение вероятности в физических науках приведет нас к тому же результату.

III. Вероятность в физических науках. Перейдем теперь к проблемам, относящимся к тому, что я назвал выше второй степенью незнания; это — те проблемы, в которых известен закон, но неизвестно начальное состояние системы. Я мог бы умножать число примеров, но я возьму только один: каково в настоящее время вероятное распределение малых планет на зодиаке?

Мы знаем, что они подчиняются законам Кеплера: мы можем даже, не изменяя ничего в природе проблемы, допустить, что все их орбиты круговые и расположены в одной и той же известной нам плоскости. Зато мы совершенно не знаем, каково было их начальное распределение. И все же мы, не колеблясь, можем утверждать, что теперь это распределение приблизительно равномерно. Почему?

Пусть b будет долготой малой планеты в начальный момент, т. е. в момент, равный нулю, пусть a — средняя скорость ее движения; ее долгота в настоящий момент t будет $at + b$. Сказать, что распределение планет в настоящий момент равномерно, это все равно, что сказать, что средняя величина из синусов и косинусов кратного аргумента $at + b$ есть нуль. Почему же мы утверждаем это?

Изобразим каждую малую планету точкой на плоскости, именно точкой, координаты которой в точности суть a и b. Все эти изображающие точки будут заключены в некоторой области плоскости, но так как их очень много, то эта область окажется усеянной точками. Впрочем, мы ничего не знаем о распределении этих точек.

Как приложить исчисление вероятностей в данном случае? Какова вероятность того, что одна или несколько изображающих точек находятся в такой-то части плоскости? Вследствие нашего незнания нам приходится ввести произвольную гипотезу. Чтобы выяснить природу этой гипотезы, я использую вместо математической формулы грубый, но конкретный образ.

Представим себе, что поверхность нашей плоскости покрыта воображаемой материей, плотность которой переменна, но изменяется она непрерывно. Условимся принять, что вероятное число изображающих точек, приходящихся на данную часть плоскости, пропорционально количеству находящейся здесь воображаемой материи. Поэтому, если мы имеем на плоскости две области одинаковых размеров, то вероятности того, что точка, изображающая одну из наших малых планет, находится в той или другой из этих областей, будут относиться, как средние плотности воображаемой материи в той или другой области.

Вот, следовательно, два распределения: одно — действительное, где изображающие точки крайне многочисленны, крайне скучены, но разделены, как молекулы материи по атомистической гипотезе; другое — расходящееся с действительностью, где наши изображающие точки заменены воображаемой непрерывной материей. Относительно последней мы знаем, что она не может быть реальной, но наше незнание вынуждает нас принять ее.

Если бы затем мы имели какое-нибудь представление о действительном распределении изображающих точек, то мы могли бы условиться так, чтобы во всякой области плотность этой воображаемой непрерывной материи была приблизительно пропорциональна числу изображающих точек или, если угодно, числу атомов, заключающихся в этой области. Но и этот прием невозможен, наше незнание столь велико, что мы принуждены выбирать произвольно функцию, определяющую плотность нашей воображаемой материи. Мы вынуждены принять только одну гипотезу, которой мы почти не в состоянии избежать,— мы предположим эту функцию непрерывной. Этого, как мы увидим, достаточно для того, чтобы мы могли сделать некоторое заключение.

Каково вероятное распределение малых планет в момент t? Или, иначе, каково вероятное значение синуса долготы в момент t, т. е. $\sin(at+b)$? Мы начали с произвольного соглашения; если мы примем его, то это вероятное значение вполне определено. Разобьем плоскость на элементы площади. Рассмотрим значение $\sin(at+b)$ в центре каждого из этих элементов; умножим эту величину на площадь элемента и на соответствующую плотность воображаемой материи; составим затем сумму для всех элементов плоскости. Эта сумма по определению будет искомой вероятной средней величиной, которая окажется, таким образом, выраженной при помощи двойного интеграла.

Можно сначала подумать, что эта средняя величина будет зависеть от выбора функции φ, определяющей плотность воображаемой материи, и что так как эта функция φ произвольна, то в зависимости от произвольного выбора, который мы сделаем, мы можем получить какую угодно среднюю величину. Но это совсем не так.

Простое вычисление показывает, что наш двойной интеграл очень быстро убывает с возрастанием t.

Таким образом, я совершенно не знал, какую гипотезу мне допустить относительно вероятности того или иного начального распределения; но каково бы ни было сделанное допущение, результат будет тот же: это и выводит меня из затруднения.

Какова бы ни была функция φ, средняя величина стремится к нулю с возрастанием t, и так как малые планеты, конечно, совершили очень большое число обращений, то я могу утверждать, что эта средняя величина очень мала.

Я могу выбрать φ по своему желанию, однако с одним ограничением: эта функция должна быть непрерывной; и в самом деле, с точки зрения субъективной вероятности выбор прерывной функции был бы неразумным; какое основание имел бы я, например предполагать, что начальная долгота может быть равна именно 0°, но что она не может быть заключена между 0° и 1°?

Но трудность возникает вновь, если стать на точку зрения объективной вероятности — если мы перейдем от нашего воображаемого распределения, где воображаемая материя предполагалась непрерывной, к действительному распределению, где наши изображающие точки образуют собой как бы дискретные атомы.

Среднее значение $\sin(at+b)$ представится просто через

$$\frac{1}{n}\sum \sin(at+b),$$

где n — число малых планет. Вместо двойного интеграла, относящегося к непрерывной функции, мы имеем сумму дискретных членов, и между тем никто серьезно не усомнится в том, что это среднее значение будет на самом деле очень мало.

Именно вследствие того, что наши изображающие точки крайне скучены, наша дискретная сумма вообще будет очень мало отличаться от интеграла.

Интеграл есть предел, к которому стремится сумма членов, когда число этих членов беспредельно возрастает. Если членов очень много, то сумма будет очень мало отличаться от своего предела, т. е. от интеграла, и то, что я сказал о последнем, будет справедливо и для суммы.

Тем не менее существуют исключительные случаи. Если бы, например, для всех малых планет имело место равенство $b = \frac{\pi}{2} - at$, то в момент t долгота всех планет равнялась бы $\pi/2$ и среднее значение было бы, очевидно, равно 1. Для этого было бы необходимо, чтобы в момент $t = 0$ все малые планеты были размещены на некоторой спирали особенной формы с крайне тесно сближенными витками. Всякий признает, что подобное начальное распределение крайне невероятно (и даже если допустить его в действительности, то распределение было бы неравномерным для некоторого момента, например, 1 января 1900 г., но оно перешло бы в равномерное через несколько лет).

Однако почему мы признаем такое начальное распределение невероятным? Необходимо это выяснить, так как если бы мы не имели основания отбросить эту нелепую гипотезу как не заслуживающую доверия, то все бы рушилось и мы уже ничего не могли бы утверждать относительно вероятности того или иного действительного распределения.

Мы опираемся здесь опять-таки на принцип достаточного основания, принцип, к которому постоянно приходится возвращаться. Мы могли бы допустить, что вначале планеты были распределены приблизительно на прямой линии или что они были расположены неравномерно; но, как нам кажется, нет достаточного основания предполагать, что неизвестная причина, породившая их, действовала, следуя столь правильной и в то же время столь сложной кривой, которая представлялась бы выбранной умышленно как раз для того, чтобы нынешнее распределение не было равномерным.

IV. Красное и черное. Вопросы теории азартных игр, например игры в рулетку, в сущности вполне аналогичны тем, которые мы только что рассматривали.

Представим себе циферблат, разделенный на большое число равных делений, попеременно красных и черных; в центре его укреплена вращающаяся стрелка; после сильного разгона эта стрелка, сделав значительное число оборотов, остановится против одного из делений. Вероятность того, что это деление красное, очевидно, равна $1/2$.

Стрелка повернулась на угол Θ, заключающий в себе несколько окружностей: я не знаю, какова вероятность того, что стрелка отброшена с такой силой, чтобы этот угол был заключен между Θ и $\Theta + d\Theta$; но я могу ввести условное положение — могу допустить, что эта вероятность равна $\varphi(\Theta)\,d\Theta$; что касается функции $\varphi(\Theta)$, то я могу выбрать ее вполне произвольно, нет ничего, что могло бы руководить мной в этом выборе; однако я, естественно, буду предполагать эту функцию непрерывной.

Пусть ε — длина (она считается по окружности радиуса, равного единице) каждого красного или черного деления. Надо вычислить интеграл от $\varphi(\Theta)\,d\Theta$, распространяя его, с одной стороны, на все красные деления, с другой — на все черные, и затем сравнить полученные результаты.

Рассмотрим промежуток 2ε, заключающий одно красное деление и следующее за ним черное. Пусть M и m — наибольшее и наименьшее значения функции $\varphi(\Theta)$ в этом промежутке. Интеграл, распространенный на красные деления, будет меньше $\Sigma M\varepsilon$; интеграл, распространенный на черные деления, будет больше $\Sigma m\varepsilon$; следовательно, разность их будет меньше $\Sigma(M - m)\varepsilon$. Но если функция φ предположена непрерывной, если, с другой стороны, промежуток ε очень мал сравнительно с полным углом, описанным стрелкой, то разность $M - m$ будет крайне мала. Поэтому и разность двух интегралов будет очень мала и вероятность будет очень близка к $1/2$.

Всякому понятно, что, не зная ничего о функции φ, я должен действовать так, как если бы вероятность была равна $1/2$. Ясно, с другой стороны, что если, становясь на объективную точку зрения, я буду наблюдать известное число выпадений, наблюдение даст мне приблизительно столько же выпадений черного, сколько и красного. Все игроки знают этот объективный закон, но он вовлекает их в одну странную ошибку, которая им часто указывалась, но в которую они всегда впадают снова. Когда красное выпало, например, шесть раз подряд, они ставят на черное, рассчитывая на верный выигрыш; ведь очень редко бывает, говорят они, чтобы красное выпадало семь раз подряд.

В действительности вероятность выигрыша и в этом случае остается равной $^1/_2$. Правда, наблюдение показывает, что серии из семи последовательных красных крайне редки; но серия из шести красных, за которой следует один черный, является столь же редкой. Им бросилась в глаза редкость серий из семи красных; но они не обращали внимания на редкость серий из шести красных и одного черного единственно потому, что подобные сочетания меньше поражают внимание.

V. Вероятность причин. Я перехожу к проблемам вероятности причин — проблемам, наиболее важным с точки зрения их применений в науке. Пусть, например, две звезды расположены на небесной сфере очень близко друг к другу. Не является ли эта видимая близость результатом простой случайности, и не находятся ли эти звезды — хотя они расположены почти на одном и том же луче зрения — на очень различных расстояниях от Земли, а следовательно, на значительном отдáлении одна от другой? Или мы имеем здесь действительную близость? Вот это и есть проблема вероятности причин. Прежде всего я напомню, что всякий раз, обсуждая проблемы вероятности событий, которыми мы занимались до сих пор, мы всегда должны были выдвигать некоторое условное положение, более или менее оправдываемое. И если чаще всего результат был в известной мере независим от этого условного положения, то это лишь в силу известных гипотез, которые позволили нам à priori отбросить, например, разрывные функции или некоторые нелепые соглашения.

Нечто аналогичное встретим мы, занимаясь вероятностью причин. Некоторое действие может быть произведено причиной *A* или причиной *B*. Действие наблюдалось; ищется вероятность того, что оно обусловлено причиной *A*; это — вероятность причины à posteriori. Но я не мог бы вычислить ее, если бы некоторое более или менее оправдывающееся условное положение не позволило мне *наперед* знать, какова *априорная* вероятность того, что причина A вступит в действие; я подразумеваю здесь вероятность этого события для того, кто еще не наблюдал самого действия.

Для большей ясности я возвращусь к примеру игры в экарте, к которому я прибегал выше; мой партнер сдает карты в первый раз и открывает короля — какова вероятность, что это шулер? Обычное применение формул дает $^8/_9$ — результат, очевидно, крайне удивительный. Если исследовать дело ближе, то вычисление оказывается выполненным так, как если бы я, *еще не садясь за игорный стол*, уже признал, что у меня один шанс против двух за то, что мой партнер — нечестный игрок. Такая гипотеза нелепа, ибо в этом случае я, конечно, не стал бы с ним играть; этим выясняется и нелепость заключения.

Условное положение об априорной вероятности было неоправданным; поэтому и вычисление апостериорной вероятности привело меня к недопустимому результату. Отсюда видна важность предварительного условного положения. Я прибавлю еще, что если совсем не вводить условного положения, то проблема вероятности à posteriori не имела бы никакого смысла; всегда приходится это делать либо явно, либо молчаливо.

Перейдем к примеру более научного характера. Я хочу определить некоторый экспериментальный закон; когда я будут знать его, его можно будет представить с помощью некоторой кривой; я делаю несколько отдельных наблюдений; пусть каждое из них изобразится некоторой точкой. Получив ряд различных точек, я провожу между ними кривую, стараясь возможно меньше уклоняться от них и в то же время сохранить для моей кривой правильную форму, без угловых точек, без слишком резких изгибов, без внезапного изменения радиуса кривизны. Эта кривая представит мне вероятностный закон, и я допускаю, что она не только дает мне значения функции, промежуточные между наблюдаемыми, но что и самые наблюдаемые значения она дает точнее, чем прямое наблюдение (потому-то я и проводил ее вблизи моих точек, но не через самые точки).

Такова проблема вероятности причин. Действиями здесь являются зарегистрированные мною результаты измерений; они зависят от сочетания двух причин — истинного закона явления и погрешностей наблюдения. Задача состоит в том, чтобы, зная действия, отыскать вероятность того, что явление подчиняется такому-то закону, и вероятность того, что наблюдения искажены такой-то погрешностью. Тогда наиболее вероятный закон соответствует проведенной кривой, и наиболее вероятная ошибка наблюдения представится расстоянием соответствующей точки от этой кривой.

Но проблема не имела бы никакого смысла, если бы я до всякого наблюдения не составил себе идею о вероятности à priori того или иного закона и о шансах ошибки, которую я могу совершить.

Если мои инструменты хороши (и это я знал бы до наблюдения), то я не позволю моей кривой значительно уклоняться от точек, представляющих непосредственные измерения. Если же они плохи, то я мог бы отступить от этих точек несколько больше, лишь бы получить кривую, менее извилистую, в целях упорядоченности я мог бы принести и бóльшую жертву.

Однако почему же я стараюсь провести кривую без извилин? Потому, что закон, представляемый непрерывной функцией (или функцией, у которой производные высшего порядка малы), я уже à priori рассматриваю как более вероятный сравнительно с законом, не удовлетворяющим этому условию. Без этой уверенности рассматриваемая проблема не имела бы никакого смысла; интерполяция была бы невозможна; нельзя было бы вывести закон из конечного числа наблюдений; наука не существовала бы.

Пятьдесят лет тому назад физики рассматривали более простой закон как более вероятный, чем закон сложный, при прочих равных условиях. Они ссылались на этот принцип в защиту закона Мариотта против опытов Реньо. Теперь они отказались от этой веры; и между тем как часто они бывают вынуждены поступать так, как если бы они сохранили эту веру! Как бы то ни было, именно от этого направления осталась вера в непрерывность, и мы только что видели, что если бы эта вера в свою очередь исчезла, то экспериментальная наука стала бы невозможной.

VI. Теория погрешностей. Мы пришли, таким образом, к обсуждению теории погрешностей, которая находится в непосредственной связи с проблемой вероятности причин. И здесь мы снова констатируем *следствия*, — а именно, известное число расходящихся между собою наблюдений — и стараемся разгадать *причины*, которыми вызываются, с одной стороны, истинное значение измеряемых величин, с другой — ошибки, допущенные в каждом отдельном наблюдении. Надо было бы вычислить, какова à posteriori вероятная величина каждой ошибки и затем каково вероятное значение измеряемой величины.

Но, как я уже выяснил, нельзя было бы предпринять это вычисление, если не допустить à priori, т. е. до всякого наблюдения, некоторого закона вероятности погрешностей. Существует ли какой-либо закон погрешностей?

Закон погрешностей, принятый всеми вычислителями, есть закон Гаусса, который представляется некоторой трансцендентной кривой, известной под названием «колокола».

Но прежде всего следует напомнить классическое различие между ошибками систематическими и случайными. Если мы измеряем некоторую длину слишком длинной мерой, мы всегда получим число слишком малое, и бесполезно будет повторять измерение несколько раз; это — ошибка систематическая. Если мы измеряем точным метром, мы можем тем не менее ошибиться, но мы будем ошибаться то в ту, то в другую сторону, и когда мы возьмем среднее из большого числа измерений, ошибка будет стремиться к уменьшению. Это — ошибки случайные.

С самого начала ясно, что систематические ошибки не могут удовлетворять закону Гаусса; но удовлетворяют ли ему случайные ошибки? Были многочисленные попытки доказать это; но почти все они являются грубо ошибочными умозаключениями. Тем не менее закон Гаусса можно доказать, опираясь на следующие гипотезы: общая ошибка есть результирующая очень большого числа частных и независимых ошибок; каждая из частных ошибок очень мала и, кроме того, подчиняется закону вероятности — какому угодно, при одном непременном условии: что вероятность положительной ошибки та же, что и вероятность ошибки, равной и противоположной по знаку. Очевидно, что эти условия будут выполняться часто, хотя и не всегда, и мы можем сохранить название случайных за теми ошибками, которые им удовлетворяют.

Отсюда видно, что метод наименьших квадратов является законным не во всех случаях; вообще физики доверяют ему меньше, чем астрономы. Несомненно это зависит от того, что астрономы, кроме систематических ошибок, с которыми они встречаются наравне с физиками, принуждены еще бороться с одной крайне важной и вполне случайной причиной ошибок: я имею в виду атмосферные колебания.

Очень любопытно послушать физика, беседующего с астрономом о методе наблюдения: физик, убежденный, что одно хорошее измерение стоит многих плохих, прежде всего со всей предосторожностью заботится о том, чтобы исключить все систематические ошибки до последней; астроном возражает ему: «но таким образом вы сможете наблюдать лишь небольшое число звезд; случайные ошибки не исчезнут».

Какой вывод следует из этого? Можно ли и впредь применять метод наименьших квадратов? Мы должны рассуждать так: мы исключили все систематические ошибки, какие только могли подозревать; мы хорошо знаем, что существуют еще и другие, но мы не можем их открыть; между тем надо сделать выбор и принять какую-то окончательную величину, которая должна быть рассматриваема как вероятная; очевидно, лучшее, что мы можем сделать для этого, — это применить метод Гаусса. Таким образом, мы применим только практическое правило, относящееся к субъективной вероятности. Больше сказать нечего.

Но некоторые хотят идти дальше и утверждают не только то, что вероятная величина равна тому-то, но еще то, что вероятная ошибка, вошедшая в результат, равна тому-то. *Это совершенно незаконно.* Это было бы верно лишь в том случае, если бы мы были уверены, что исключены все систематические ошибки; но мы об этом совершенно ничего не знаем. Пусть мы имеем два ряда наблюдений; прилагая правило наименьших квадратов, мы находим, что вероятная ошибка, относящаяся к первому ряду, вдвое меньше, чем во втором. Однако второй ряд может быть предпочтительнее, чем первый, так как первый может быть искажен большой систематической ошибкой. Все, что мы можем сказать, — это то, что первый ряд, *вероятно*, предпочтительнее второго, так как его случайная ошибка меньше и так как мы не имеем никакого основания утверждать, что систематическая ошибка для одного ряда больше, чем для другого: ведь мы об этом решительно ничего не знаем.

VII. Заключения. В настоящей главе я изложил немало проблем, не разрешив ни одной из них. Тем не менее я не сожалею о том, что написал о них, так как это, может быть, побудит читателя поразмыслить над этими тонкими вопросами.

Как бы то ни было, существует несколько пунктов, по-видимому, твердо установленных. Чтобы предпринять какое-либо вычисление вероятности — даже просто для того, чтобы это вычисление имело смысл, — надо взять в качестве исходной точки некоторую гипотезу или условное положение, которые всегда содержат известную долю произвола. При выборе этого условного положения мы не можем руководствоваться ничем, кроме принципа достаточного основания. К несчастью, этот принцип очень неопределенен и растяжим и, как мы видели в нашем беглом обзоре, принимает различные формы. Форма, под которой мы встречаем его чаще всего, — это вера в непрерывность: вера, которую трудно было бы оправдать убедительным рассуждением, но без которой никакая наука не была бы возможна. Наконец, исчисление вероятностей может быть с пользой применено в тех проблемах, в которых результат не зависит от принятой вначале гипотезы, лишь бы только эта гипотеза удовлетворяла условию непрерывности.

Глава XII

ОПТИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСТВО[1]

Теория Френеля. Самый лучший пример, какой только можно избрать для иллюстрации всего ска-

[1]) Эта глава представляет собою частичное воспроизведение предисловий к двум моим сочинениям: «Математическая теория света» (Париж, 1889) и «Электричество и оптика» (Париж, 1901).

занного выше о методе физических наук и о значении гипотезы, представляет собой теория света и ее связь с теорией электричества. Благодаря Френелю оптика стала наиболее разработанной частью физики; так называемая волновая теория представляет собой нечто целое, действительно удовлетворяющее ум; не следует лишь требовать от нее того, чего она дать не может.

Математические теории не имеют целью открыть нам истинную природу вещей; такая претензия была бы безрассудной. Единственная цель их — систематизировать физические законы, которые мы узнаем из опыта, но которых мы не могли бы даже и выразить без помощи математики.

Для нас не так важно, существует ли эфир в действительности — пусть это решают метафизики; для нас важнее то обстоятельство, что все происходит так, как если бы он существовал, и что эта гипотеза удобна для истолкования явлений. А в конце концов, есть ли у нас другие основания для веры в существование самих материальных объектов? Вера в их существование — точно так же лишь удобная гипотеза. Только она никогда не перестанет существовать, тогда как гипотеза эфира, без сомнения, когда-нибудь будет отвергнута как бесполезная.

Но даже и тогда законы оптики и уравнения, выражающие их на языке анализа, останутся верными, по крайней мере в первом приближении. Поэтому всегда будет полезно изучать доктрину, которая связывает все эти уравнения в одно целое.

Волновая теория основывается на молекулярной гипотезе. Те, кто надеются за законами раскрыть причины, видят в этой гипотезе преимущество; для других же она служит основанием скептицизма. Но скептицизм вторых представляется мне столь же мало обоснованным, как и иллюзии первых.

Гипотезы этого рода играют лишь второстепенную роль. От них можно было бы отказаться; обычно этого не делают, потому что без них была бы потеряна ясность изложения, и это — единственное основание. В самом деле, при внимательном анализе можно убедиться, что теория Френеля заимствует у молекулярных гипотез лишь два положения: а) принцип сохранения энергии и б) линейную форму уравнений, которая является общим законом малых движений, как и всех малых изменений вообще. Вот почему бо́льшая часть выводов Френеля сохраняет свое значение и после принятия электромагнитной теории света.

Теория Максвелла. Как известно, Максвелл впервые установил тесную связь между оптикой и электричеством — двумя областями физики, до тех пор совершенно чуждыми друг другу. Но растворившись в более обширном целом, в гармонии высшего порядка, оптика Френеля не утратила своей жизненности. Различные части ее продолжают существовать, и взаимосвязи их остаются все тѐми же. Изменился лишь язык, которым мы пользуемся для их выражения, и, с другой стороны, Максвелл открыл нам новые и неожиданные отношения между различными частями оптики и областью электричества.

Когда французский читатель в первый раз открывает книгу Максвелла, к его восхищению вначале примешивается чувство беспокойства и часто даже недоверия. Его удается рассеять лишь ценою многих усилий, после продолжительного изучения; у некоторых выдающихся умов это чувство сохраняется навсегда.

Почему же идеи английского ученого воспринимаются у нас с таким трудом? Несомненно потому, что умственное воспитание, полученное большинством образованных французов, приучило их ценить точность и логическую строгость выше всех других качеств. Прежние теории математической физики давали нам в этом смысле полное удовлетворение. Все наши великие мастера, начиная с Лапласа и кончая Коши, действовали согласно одному и тому же методу. Исходя из ясно выраженных гипотез, они с математической строгостью выводили из них все следствия и затем сверяли эти следствия с опытом. Они как будто хотели каждой области физики придать точность, свойственную небесной механике.

Ум, привыкший восхищаться таким методом, нелегко удовлетворяется какой-нибудь теорией. Он не только не потерпит в ней ни малейшего признака внутреннего противоречия; он потребует, чтобы отдельные части ее были логически связаны друг с другом и чтобы число гипотез было сведено до минимума.

Это не все: он предъявит еще и другие требования — менее основательные, по моему мнению. Позади той материи, которая доступна нашим чувствам и которая нам знакома из опыта, он хочет видеть другую — единственно истинную, на его взгляд, — которая имела бы лишь чисто геометрические свойства и атомы которой были бы математическими точками, подчиненными исключительно динамическим законам. И тем не менее, бессознательно противореча самому себе, он будет стремиться представить себе эти невидимые и бесцветные атомы, тем самым возможно более сближая их с обычной материей. Только тогда он и будет вполне удовлетворен и сочтет, что проник в тайну Вселенной. Если это удовлетворение и обманчиво, от него нелегко отказаться.

Итак, раскрывая книгу Максвелла, французский читатель ожидает найти в ней теоретическое целое, столь же логическое и точное, как и физическая оптика, основанная на гипотезе эфира; тем самым он заранее готовит себе разочарование, от которого я желал бы избавить читателя, сразу предупредив его о том, что́ он должен искать у Максвелла и чего он не может у него найти.

Максвелл не дает какого-либо механического истолкования электричества и магнетизма; он ограничивается доказательством того, что такое истолкование возможно. Он указывает также, что оптические явления представляют собой лишь частный случай электромагнитных явлений. Поэтому из всякой теории электричества можно непосредственно вывести теорию света.

Обратное, к сожалению, неверно; имея полное объяснение световых явлений, мы не всегда можем извлечь полное объяснение электрических явлений. В частности, это нелегко сделать, исходя из теории Френеля; без сомнения, это не невозможно; но и тогда пришлось бы задуматься над вопросом, не окажемся ли мы вынужденными отказаться от удивительных результатов, которые, казалось, были окончательным приобретением. Это похоже на шаг назад; и многие выдающиеся умы не захотели бы с этим смириться.

Если же читатель согласится ограничить, таким образом, свои ожидания, он столкнется еще с другими трудностями. Английский ученый не пытается построить здание, которое имело бы цельный и окончательный вид, все части которого были бы подчинены общему плану; скорее он как бы возводит множество предварительных, независимых одна от другой построек, сообщение между которыми затруднительно, а иногда и невозможно.

Возьмем, например, главу, где электростатические притяжения объясняются давлениями и натяжениями в диэлектрической среде. Эту главу можно было бы изъять без ущерба для ясности и полноты всей остальной части книги; с другой стороны, она содержит теорию, которая существует сама по себе, и ее можно было бы понять, не прочитав ни одной строки из всего предшествующего и последующего. Но она не только лишена органической связи с остальной частью сочинения: ее даже трудно согласовать с основными идеями книги; и Максвелл не пытается достичь этого согласования, он просто говорит: «I have not been able to make the next step, namely, to account by mechanical considerations for these stresses in the dielectric» [1]).

Этот пример достаточно поясняет мою мысль. Я мог бы привести много других: например, кто мог бы предположить, читая страницы, посвященные магнитному вращению плоскости поляризации, что оптические и магнитные явления идентичны?

Итак, не следует обольщать себя надеждой избежать всякого противоречия, с этим надо примириться. В самом деле, две противоречащие друг другу теории могут обе явиться полезными орудиями исследования, лишь бы их не перепутывали и не искали в них сущности вещей. И, быть может, изучение Максвелла было бы менее поучительным, если бы оно не открывало нам такого множества новых расходящихся друг от друга путей.

Но основная идея книги вследствие этого несколько затемнена, так что в большинстве популярных изложений она представляет собой единственный пункт, который остается совершенно в стороне.

---

[1]) «Я не был в состоянии сделать следующий шаг, а именно, объяснить эти напряжения в диэлектрике с помощью механических соображений» (*англ.*). — *Примеч. ред.*

Чтобы показать ее важность, я считаю себя обязанным изложить, в чем состоит эта основная идея. В этих целях мне придется сделать небольшое отступление.

О механическом истолковании физических явлений. Во всяком физическом явлении мы можем проследить известное число параметров, обнаруживаемых непосредственным опытом и доступных измерению. Я буду называть их параметрами q.

Наблюдение позволяет нам узнать законы изменения этих параметров. Эти законы вообще могут быть выражены в форме дифференциальных уравнений, связывающих между собой параметры q и время.

В чем состоит механическое истолкование подобного явления?

Его стараются объяснить или некоторыми движениями обыкновенной материи, или движениями одного или нескольких гипотетических флюидов. Принимается, что эти флюиды состоят из очень большого числа отдельных частиц m.

Когда же мы можем сказать, что у нас имеется полное механическое истолкование явления? С одной стороны, когда нам станут известны дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют координаты гипотетических частиц m, причем предполагается, что эти уравнения согласуются с принципами динамики; с другой стороны, когда мы будем знать соотношения, определяющие координаты частиц m в функции параметров q, доступных опыту. Повторяю, что уравнения должны согласоваться с принципами динамики, в частности с принципом сохранения энергии и с принципом наименьшего действия.

Первое из них гласит, что полная энергия остается постоянной и что она состоит из двух частей:

1) кинетической энергии или живой силы; она зависит от масс гипотетических частиц m и от их скоростей, — я обозначу ее через T — и

2) потенциальной энергии; она зависит исключительно от координат этих частиц — я обозначу ее через U. Сумма двух энергий T и U остается постоянной.

Далее, чему же учит нас принцип наименьшего действия? Он учит нас тому, что для перехода из начального состояния, соответствующего моменту t_0, в конечное состояние, соответствующее моменту t_1, система должна двигаться таким путем, чтобы за промежуток времени между моментами t_0 и t_1 средняя величина «действия» (т. е. *разности* двух энергий T и U) была минимальной. Впрочем, первый из двух принципов является следствием второго.

Если обе функции T и U известны, этот принцип оказывается достаточным для определения уравнений движения. В самом деле, между всеми путями, позволяющими совершить переход от одного состояния к другому, есть, очевидно, один, для которого средняя величина действия меньше, чем для всех других. Далее, существует *только* один такой путь, и отсюда следует, что принцип наименьшего действия достаточен для определения *действительного* пути, а следовательно, для определения уравнений движения. Таким приемом мы приходим к так называемым уравнениям Лагранжа. В этих уравнениях роль независимых переменных играют координаты гипотетических частиц m; но я теперь предполагаю, что в качестве переменных приняты доступные прямому опыту параметры q.

Обе части энергии должны тогда выражаться в функции параметров q и их производных; ясно, что именно в таком виде они представляются экспериментатору: он, естественно, будет стремиться определить потенциальную и кинетическую энергию с помощью величин, которые он может непосредственно наблюдать [1]).

Таким образом, система всегда будет переходить из одного состояния в другое таким путем, что средняя величина действия окажется наименьшей. При этом несущественно, что T и U теперь выражены через параметры q и их производные, несущественно, что с помощью этих же параметров мы определяем начальное и конечное состояние; принцип наименьшего действия остается справедливым во всяком случае. И здесь из всех путей, могущих служить пере-

[1]) Добавим, что U будет зависеть только от q; T будет зависеть от q и от их производных по времени и представится однородным многочленом второй степени относительно этих производных.

ходом от начального состояния к конечному, найдется один и только один, для которого средняя величина действия будет наименьшая. Таким образом, принцип наименьшего действия достаточен для нахождения дифференциальных уравнений, определяющих изменения параметров q. Получаемые этим приемом уравнения представляют собой другую форму уравнений Лагранжа.

Для того чтобы составить эти уравнения, нам нет надобности знать ни соотношений, которые связывают параметры q с координатами гипотетических частиц, ни масс этих частиц, ни выражения U в функции координат этих частиц. Все, что нам нужно знать, это выражение U в функции q и выражение T в функции q и их производных, т. е. выражения кинетической и потенциальной энергий в функциях экспериментальных данных.

Затем будет иметь место одно из двух: либо для надлежащим образом выбранных функций T и U уравнения Лагранжа, составленные в соответствии с только что сказанным, окажутся тождественными с дифференциальными уравнениями, выведенными из опыта; либо же вовсе не будет таких функций T и U, для которых такое согласие имело бы место. Ясно, что во втором случае никакое механическое истолкование невозможно.

Итак, *необходимое* условие возможности механического истолкования состоит в том, чтобы можно было выбрать функции T и U, которые удовлетворяли бы принципу наименьшего действия и вытекающему из него принципу сохранения энергии.

Впрочем, это условие и *достаточно*; в самом деле, пусть удалось найти функцию U параметров q, представляющую одну из частей энергии; пусть другая часть энергии, обозначенная нами через T, является функцией q и их производных и имеет вид однородного многочлена второй степени относительно этих производных; и, наконец, пусть лагранжевы уравнения, образованные с помощью этих двух функций T и U, согласуются с данными опыта.

Что же нужно для получения отсюда механического истолкования? Для этого нужно лишь, чтобы U можно было рассматривать как потенциальную энергию системы, а T — как живую силу той же системы.

В отношении U здесь нет никаких трудностей; но можно ли T рассматривать как живую силу материальной системы? Легко показать, что это всегда возможно, и притом бесчисленным множеством способов. За подробностями я отсылаю читателя к предисловию моего сочинения «Электричество и оптика».

Итак, если нельзя удовлетворить принципу наименьшего действия, то невозможно и механическое истолкование; если же можно ему удовлетворить, то существует бесконечное множество таковых. Отсюда следует, что коль скоро имеется одно механическое истолкование, то возможно бесконечное множество других механических истолкований.

Еще одно замечание.

Одни из величин, доступных нашему непосредственному опыту, мы примем за функции координат наших гипотетических частиц (molécules): это — те же параметры q; другие из них мы будем считать зависящими не только от координат, но и от скоростей, или, что то же, от производных параметров q, или от некоторых сочетаний этих параметров и их производных.

Теперь возникает вопрос: как из всех величин, доступных опыту и измерению, выбрать те, которые будут играть роль параметров q и какие мы будем рассматривать в качестве производных этих параметров? Выбор этот остается в широкой степени произвольным: достаточно иметь возможность выполнить его так, чтобы не нарушалось согласие с принципом наименьшего действия — и механическое истолкование будет возможным.

И вот Максвелл задал себе вопрос, может ли он сделать этот выбор и выбор двух энергий T и U таким образом, чтобы электрические явления удовлетворяли упомянутому принципу? Опыт показывает нам, что энергия электромагнитного поля распадается на две части: энергию электростатическую и энергию электродинамическую. Максвелл показал, что если первую из них принять за потенциальную энергию U, вторую — за кинетическую энергию T, если, далее, электростатические заряды проводников рассматривать как параметры q, а силы токов — как производные параметров q, то при этих условиях, говорю я, Максвелл признавал, что электрические явления удовлетворяют принципу наименьшего действия. Поэтому стала несомненной возможность механического истолкования. Если бы Максвелл изложил эту мысль в начале своей книги, вместо того чтобы помещать ее в отдаленном углу второго тома, то она не ускользнула бы от внимания большинства читателей.

Таким образом, если некоторое явление допускает какое-либо одно полное механическое истолкование, то оно допускает и бесконечное число других, которые одинаково хорошо будут объяснять все особенности, обнаруживаемые опытом.

Это находит свое подтверждение в истории всех областей физики; например, в оптике Френель считал световые колебания перпендикулярными к плоскости поляризации, Нейман же рассматривал их как параллельные этой плоскости. Долгое время искали «experimentum crucis», который позволил бы решить спор двух теорий, но найти его так и не могли. Приведем другой пример, из области электричества: как теория двух жидкостей, так и теория одной жидкости с совершенно одинаковым успехом могут служить основой для объяснения электростатических явлений. Все факты подобного рода легко объясняются при помощи указанных выше свойств лагранжевых уравнений.

Теперь нетрудно понять, в чем состоит основная идея Максвелла. Для доказательства возможности механического истолкования электрических явлений нам нет необходимости заботиться об описании самого истолкования: достаточно знать выражение двух функций T и U — двух частей энергии, затем с помощью этих функций составить уравнения Лагранжа и, наконец, сравнить эти уравнения с экспериментальными законами.

Как же нам сделать выбор между всеми этими возможными механическими истолкованиями, если опыт отказывает нам в помощи? Может быть, настанет время, когда физики потеряют интерес к такого рода вопросам, недоступным для позитивных методов, и предоставят их метафизикам. Но это время еще не пришло: человеку не так-то легко покориться неизбежности вывода — никогда не узнать сущность вещей.

Итак, при нашем выборе мы можем руководствоваться лишь такими соображениями, в которых большую роль играет личная оценка; есть такие решения, которые будут всеми отвергнуты вследствие их причудливости, в то время как другие привлекут всех своей простотой.

Что касается области электричества и магнетизма, то Максвелл воздержался от решительного выбора. Это не означает, что он систематически уклонялся от всего недоступного для позитивных методов: время, посвященное им развитию кинетической теории газов, достаточно убеждает в противном. Добавлю, что хотя в своем большом труде он не развивает полного детального истолкования, но раньше он попытался дать нечто подобное — в статье, опубликованной в Philosophical Magazine. Необычность и сложность гипотез, которые он при этом должен был сделать, побудили его потом отказаться от этой попытки.

На всем протяжении его книги господствует один и тот же дух: все существенное, т. е. все, что должно остаться общим для всех теорий, выдвинуто на первый план; все, что относится лишь к специальным теориям, почти всегда обходится молчанием. Таким образом, читатель видит перед собой некоторую форму, почти лишенную содержания, форму, которая вначале производит впечатление чего-то мимолетного и неуловимого, как тень. Однако трудности, которые он вынужден преодолевать, побуждают сильнее работать его мысль, и в конце концов он начинает понимать, сколь часто искусственными были теоретические построения, которыми он прежде восхищался.

Глава XIII

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

С нашей точки зрения, история электродинамики особенно поучительна. Ампер дал своему бессмертному труду такое название: «Теория электродинамических явлений, основанная *исключительно* на опыте». Он полагал, следовательно, что он не создал *ни одной* гипотезы; но как мы вскоре увидим, он их создал; только он сделал это, сам того не замечая. Однако эти гипотезы были замечены его преемниками, так как внимание их было привлечено слабыми местами исследований Ампера. Они создали новые гипотезы, на этот раз вполне сознательно. Однако сколько перемен произошло здесь, пока не установилась система, которая ныне считается классической, но которая, быть может, тоже еще не является окончательной! Мы сейчас это увидим.

I. Теория Ампера. В своих экспериментальных исследованиях взаимодействий токов Ампер имел и мог иметь дело только с замкнутыми токами.

Это не значит, что он отрицал возможность незамкнутых токов. Если мы соединим проволокой два противоположно заряженных проводника, то появится ток, идущий от одного из них к другому и продолжающийся до тех пор, пока потенциалы обоих не сравняются. Согласно идеям, господствовавшим во времена Ампера, такой ток считался незамкнутым; наличие тока от первого проводника ко второму было очевидно; тока, который шел бы от второго к первому, не замечали.

Токи подобной природы (например, токи, возникающие при разряде конденсаторов) Ампер рассматривал как незамкнутые; но он не мог сделать их предметом своих опытов, так как длительность их слишком мала.

Можно представить себе еще и другой вид незамкнутого тока. Пусть имеются два заряженных проводника A и B, соединенных проволокой AMB. Пусть небольшие подвижные проводящие тела приходят сначала в соприкосновение с проводником B, отнимают у него часть заряда, затем контакт их с B прекращается, они движутся по пути BNA, перенося с собой свой заряд, приходят в соприкосновение с A и передают ему этот заряд, который затем снова возвращается в B, переходя по проволоке AMB. Мы имеем здесь в некотором смысле замкнутый ток, потому что электричество циркулирует по замкнутому пути $BNAMB$; но две части этого тока весьма различны между собой: в проволоке AMB электричество перемещается *по* твердому проводнику подобно гальваническому току, преодолевая омическое сопротивление и выделяя теплоту; принято говорить, что здесь имеет место *ток проводимости*; в части BNA электричество *переносится* подвижным проводником: это — так называемый *конвекционный ток.*

Если теперь рассматривать конвекционный ток как совершенно аналогичный току проводимости, то контур *BNAMB* является замкнутым: если, напротив, конвекционный ток не является «настоящим током», например, если он не оказывает действия на магниты, то остается лишь ток проводимости *AMB*, который будет *незамкнутым.*

Пример подобного процесса может быть осуществлен, если соединить проволокой два полюса машины Гольца: вращающийся заряженный круг переносит электричество путем конвекции от одного полюса к другому; затем оно по проволоке возвращается к первому полюсу, осуществляя ток проводимости. Но получение подобных токов сколько-нибудь значительной силы является делом весьма трудным; при тех средствах, какими располагал Ампер, это было прямо невозможно. Одним словом, Ампер мог составить себе идею о двух типах незамкнутых токов, но он не был в состоянии подвергнуть опытному исследованию как те, так и другие, так как или сила их была слишком ничтожна, или длительность их была слишком мала.

Итак, на опыте он мог обнаружить лишь действие замкнутого тока на другой замкнутый ток или, точнее, действие одного замкнутого тока на *часть* другого, так как можно пропустить ток по *замкнутому* контуру, состоящему из одной части подвижной и другой — неподвижной. В этом случае возникает возможность изучать перемещения подвижной части под действием другого замкнутого тока. Что касается действий незамкнутого тока как на замкнутый ток, так и на другой незамкнутый ток, то изучить их Ампер не имел никакого средства.

1. *Случай замкнутых токов.* В случае взаимодействия двух замкнутых токов Ампер нашел из опыта замечательно простые законы. Я бегло возобновлю в памяти читателя те из них, которые будут нам впоследствии полезны.

а) *Если сила токов поддерживается постоянной* и если два контура, подвергавшиеся каким угодно перемещениям и деформациям, возвращаются затем к своей начальной конфигурации, то полная работа электродинамических сил будет равна нулю. Другими словами, здесь существует *электродинамический потенциал* двух контуров, который пропорционален произведению сил токов и зависит от формы и относительного положения контуров; работа электродинамических сил равна изменению этого потенциала.

б) Действие замкнутого соленоида равно нулю.

в) Действие контура C на другой контур C' определяется исключительно «магнитным полем», присущим контуру C. В самом деле, в каждой точке пространства можно определить по величине и направлению некоторую силу, так называемую *магнитную силу*, обладающую следующими свойствами:

а) сила, с которой контур C действует на магнитный полюс, приложена к этому полюсу; она равна магнитной силе, умноженной на магнитную массу полюса;

б) магнитная стрелка весьма малых размеров стремится принять направление магнитной силы, и пара, которая стремится привести ее в это положение, пропорциональна произведению магнитной силы, магнитного момента стрелки и синуса угла отклонения;

в) если контур C' перемещается, то работа электродинамической силы, с которой C действует на C', равна приращению «магнитного силового потока», пронизывающего этот контур.

2. *Действие замкнутого тока на элемент тока.* Не будучи в состоянии осуществить незамкнутый ток в собственном смысле слова, Ампер имел лишь одно средство изучать действие замкнутого тока на элемент тока. Оно состояло в использовании контура C', составленного из двух частей — одной неподвижной, другой подвижной. Роль подвижной части играла, например, подвижная проволока $\alpha\beta$, концы которой α и β могли скользить вдоль другой проволоки, укрепленной неподвижно. В одном из положений подвижной проволоки конец α лежал на точке A неподвижной проволоки, а конец β — на точке B ее. Ток шел из α в β, или — это все равно — из A в B, вдоль подвижной проволоки, а из B в A возвращался по неподвижной. *Таким образом, это был замкнутый ток.*

В другом положении, в которое подвижная проволока приходит после некоторого скольжения, конец α

лежит в другой точке A' неподвижной проволоки, конец β — также в другой точке B' ее. Ток идет теперь из α в β, или — это все равно — из A' в B', вдоль подвижной проволоки, а затем вдоль неподвижной возвращается из B' в B, из B в A, наконец, из A в A'. Здесь ток снова остается замкнутым.

Если подобный контур подвергается действию замкнутого тока C, то подвижная часть будет перемещаться, как если бы она находилась под действием некоторой силы. Ампер *допускает*, что зависящая от C воображаемая сила, которая как бы действует в этом случае на подвижную часть $\alpha\beta$ замкнутого тока, будет совершенно такою же, как если бы по $\alpha\beta$ проходил незамкнутый ток, выходящий из α и останавливающийся в β, вместо того чтобы совершить замкнутый путь, возвратившись из β в α по неподвижной части контура.

Эта гипотеза может казаться довольно естественной, и Ампер ввел ее, сам того не замечая; тем не менее *она не обязательна*, и, как мы увидим позднее, Гельмгольц ее отбросил. Как бы то ни было, она позволила Амперу, несмотря на то, что он никогда не мог осуществить незамкнутый ток, формулировать законы действия замкнутого тока на другой, незамкнутый, или даже на элемент тока.

Законы эти по-прежнему просты:

а) сила, действующая на элемент тока, приложена к этому элементу; она перпендикулярна к элементу и к магнитной силе и пропорциональна нормальной к элементу слагающей этой магнитной силы;

б) действие замкнутого соленоида на элемент тока равно нулю.

Но в этом случае уже не существует электродинамического потенциала; т. е. если ток замкнутый и ток незамкнутый, при условии постоянства их сил, возвращаются к начальной конфигурации, то полная работа уже не будет равна нулю.

3. *Непрерывные вращения.* В числе электродинамических опытов наиболее курьезными являются те, в которых оказалось возможным осуществить непрерывное вращение (они иногда называются *униполярной индукцией*). Пусть у нас имеется магнит, могущий вращаться вокруг своей оси; ток проходит сначала по неподвижной проволоке, затем вступает

в магнит через один из полюсов, проходит через половину длины магнита, выходит через скользящий контакт и возвращается в неподвижную проволоку. В этом случае магнит получает непрерывное вращательное движение, никогда не достигая положения равновесия. Этот опыт был произведен Фарадеем.

Как же это возможно? Если бы мы имели два контура неизменной формы: один неподвижный C, другой C', способный вращаться около оси, то этот последний никогда не мог бы получить непрерывное вращательное движение. В самом деле, существует электродинамический потенциал; поэтому необходимо существует положение равновесия: именно то, при котором потенциал принимает наибольшее значение.

Итак, непрерывное вращение возможно лишь в том случае, если контур C' состоит из двух частей: одной неподвижной, другой, способной вращаться вокруг оси, как это имеет место в опыте Фарадея. Следует отметить еще одно различие. Переход электричества с неподвижной части на подвижную или обратно может происходить или путем простого контакта (определенная точка подвижной части находится в постоянном соприкосновении с определенной точкой неподвижной части), или при помощи скользящего контакта (одна и та же точка подвижной части последовательно приходит в соприкосновение с различными точками неподвижной части).

Только во втором случае может иметь место непрерывное вращение. Вот что здесь происходит: система стремится достичь положения равновесия; но по мере ее перемещения скользящий контакт связывает подвижную часть все с новыми точками неподвижной части; благодаря этому меняются связи, а следовательно, и условия равновесия; положение равновесия, так сказать, убегает от системы, которая стремится его настичь, и в результате вращение может продолжаться без конца.

Ампер допускает, что действие контура на подвижную часть C' будет совершенно таким же, как если бы неподвижной части C' не существовало, следовательно, как если бы ток, циркулирующий в подвижной части, был незамкнутым. Отсюда он заключает, что действие замкнутого тока на ток незамкнутый (или наоборот) может повести к непрерывному вращению. Но это заключение зависит от указанной мною выше гипотезы, не принятой Гельмгольцем.

4. *Взаимодействие двух незамкнутых токов.* Опытов, которые относились бы к взаимодействию двух незамкнутых токов или, в частности, двух элементов тока, совершенно не существует. Ампер прибег к гипотезе. Он предположил: 1) что взаимодействие двух элементов сводится к силе, направленной по прямой, их соединяющей; 2) что взаимодействие двух замкнутых токов представляется как результирующая взаимодействий их различных элементов, причем эти взаимодействия принимаются такими же, как если бы элементы имели независимое друг от друга существование.

Замечательно, что и здесь Ампер ввел эти две гипотезы, не заметив этого. Как бы то ни было, эти гипотезы, соединенные с опытами над замкнутыми токами, достаточны для полного определения закона взаимодействия двух элементов.

Но в этом случае большая часть простых законов, найденных нами для случая замкнутых токов, теряет свою силу. Прежде всего, здесь не будет существовать электродинамического потенциала; впрочем, так было уже и в случае действия замкнутого тока на незамкнутый ток.

Далее, здесь, собственно говоря, нет и магнитной силы. В самом деле, выше мы дали для этой силы три различных определения:

1) по действию на магнитный полюс,

2) по действию пары, направляющей магнитную стрелку,

3) по действию на элемент тока.

Но в интересующем нас теперь случае эти три определения не только более не согласуются друг с другом, но каждое из них лишено смысла. В самом деле:

1) магнитный полюс уже не просто подвержен действию одной приложенной к нему силы; действительно, мы видели, что сила, представляющая действие элемента тока на полюс, приложена не к полюсу, а к элементу; впрочем, она может быть заменена силой, приложенной к полюсу, и парой;

2) пара, действующая на магнитную стрелку, больше не является простой направляющей парой, так

как момент ее относительно оси стрелки не равен нулю; эта пара разлагается на направляющую пару в собственном смысле и добавочную пару, стремящуюся произвести непрерывное вращение, о котором говорилось выше;

3) наконец, сила, действующая на элемент тока, не будет нормальной к этому элементу.

Иными словами, *единство магнитной силы исчезло.*

Это единство состоит в следующем. Две системы, оказывающие одинаковое действие на магнитный полюс, будут оказывать одинаковое действие и на бесконечно малую магнитную стрелку, и на элемент тока, если предположить, что они помещены в той же точке пространства, где был магнитный полюс. Это справедливо, если наши две системы состоят исключительно из замкнутых токов; но по Амперу это уже не будет верным, если в эти системы входят незамкнутые токи.

Достаточно, например, заметить, что если магнитный полюс помещается в A, а элемент тока в B, причем ток направлен вдоль прямой AB, то этот элемент, не оказывая никакого действия на полюс A, напротив, будет действовать как на помещенную в точке A магнитную стрелку, так и на помещенный в точке A элемент тока.

5. *Индукция.* Известно, что открытие электродинамической индукции последовало вскоре за бессмертными трудами Ампера.

Пока речь идет только о замкнутых токах, всякая трудность отсутствует. Гельмгольц заметил даже, что принцип сохранения энергии позволяет вывести законы индукции из электродинамических законов Ампера. Однако, как показал Бертран, при этом приходится допустить также некоторое число гипотез. Тот же принцип позволяет еще сделать подобный вывод в случае незамкнутых токов, хотя полученный при этом результат, конечно, нельзя подвергнуть контролю опыта ввиду невозможности осуществить подобные токи.

Но если бы мы пожелали приложить этот метод анализа к амперовой теории незамкнутых токов, то получили бы совершенно неожиданные результаты.

Прежде всего, индукцию нельзя было бы вывести из изменения магнитного поля по формуле, хорошо известной ученым и техникам; в самом деле, как мы сказали выше, здесь, собственно, нельзя говорить о магнитном поле.

Мало того. Пусть в контуре C наводится электродвижущая сила изменениями, происходящими в гальванической системе S. Если система S перемещается и деформируется произвольным образом, и силы токов в этой системе меняются по произвольному закону, но в конце концов система возвращается в свое начальное состояние, то естественно ожидать, что *средняя* электродвижущая сила, наведенная в контуре C, равна нулю.

Это справедливо, если контур C замкнут и если система S состоит исключительно из замкнутых токов; но это уже было бы неверно с точки зрения теории Ампера, если бы некоторые из токов были незамкнутыми. Таким образом, индукция уже не только не выражалась бы изменением магнитного силового потока в каком-либо обычном смысле слова, но и вообще она не могла бы быть представлена изменением чего бы то ни было.

II. Теория Гельмгольца. Я особенно подробно остановился на следствиях теории Ампера и на его трактовке действия незамкнутых токов. Трудно не признать парадоксального и искусственного характера предположений, которыми он руководствовался; невольно думается, что «так не должно быть».

Легко понять, почему Гельмгольц решился искать другие пути. Он отверг основную гипотезу Ампера, в силу которой взаимодействие двух элементов тока сводится к силе, направленной по прямой, их соединяющей. Он принял гипотезу, что элемент тока находится под действием не одной силы, а силы и пары. Именно это допущение вызвало его знаменитую полемику с Бертраном.

Гипотезу Ампера Гельмгольц заменяет следующей: два элемента тока всегда допускают электродинамический потенциал, зависящий исключительно от их положения и направления; работа сил взаимодействия между ними равна изменению этого потенциала. Таким образом, и Гельмгольц, подобно Амперу, не может обойтись без гипотезы, но он по крайней мере ясно выражает ее.

Обе теории дают согласующиеся результаты в единственном доступном для опыта случае замкнутых токов; во всех прочих случаях они расходятся.

Прежде всего, вопреки предположению Ампера, сила, которая как бы действует на подвижную часть замкнутого тока, не тождественна с силой, которая действовала бы на ту же подвижную часть, если бы она была изолирована и представляла собой незамкнутый ток. Представим себе снова наш прежний контур C', образованный подвижной проволокой $\alpha\beta$, скользящей по неподвижной проволоке; в расположении, которое только и осуществимо на опыте, подвижная часть $\alpha\beta$ не является изолированной, а составляет часть замкнутого контура. Когда она из положения AB переходит в $A'B'$, полный электродинамический потенциал изменяется по двум причинам: во-первых, он подвергается первому приращению потому, что потенциал $A'B'$ относительно контура C не одинаков с потенциалом AB; во-вторых, он подвергается второму приращению потому, что увеличиваются потенциалы элементов AA' и $B'B$ относительно C. Это *двоякое* приращение и представляет собой работу силы, которая как бы действует на часть AB. Если бы, напротив, $\alpha\beta$ была изолирована, то потенциал получил бы лишь первое приращение, и этим первым приращением измерялась бы работа силы, действующей на AB.

Во-вторых, не может быть непрерывного вращения без скользящего контакта; действительно, как мы видели при рассмотрении случая замкнутых токов, вращение — непосредственное следствие существования электродинамического потенциала.

Если в опыте Фарадея магнит укреплен неподвижно, а часть тока, внешняя относительно магнита, проходит по подвижной проволоке, то эта подвижная часть сможет прийти в непрерывное вращение. Но отсюда не следует, что если мы устраним контакты проволоки с магнитом и пропустим по ней *незамкнутый* ток, то проволока опять получит непрерывное вращение: действительно, я только что сказал, что *изолированный* элемент не испытывает такого же воздействия, как подвижный элемент, образующий часть замкнутого контура.

Другое отличие: действие замкнутого соленоида на замкнутый ток равно нулю, как показывает опыт, а также обе теории; действие же его на незамкнутый ток равно нулю по Амперу и не равно нулю по Гельмгольцу.

Отсюда — важное следствие. Выше мы дали три определения магнитной силы. Третье из них не имеет здесь никакого смысла, так как элемент тока не находится уже под действием одной силы. Точно так же теряет смысл и первое. В самом деле, что такое магнитный полюс? Это — конец чрезвычайно длинного линейного магнита. Магнит этот может быть заменен бесконечно длинным соленоидом. Для того чтобы определение магнитной силы имело смысл, нужно, чтобы действие незамкнутого тока на бесконечно длинный соленоид зависело только от положения конца этого соленоида, т. е. чтобы действие на замкнутый соленоид равнялось нулю. Но это, как мы только что видели, не оправдывается.

Зато ничто не мешает нам принять второе определение, основанное на измерении пары, направляющей магнитную стрелку. Но если мы его примем, то ни явления индукции, ни электродинамические явления не будут зависеть только от распределения силовых линий такого магнитного поля.

III. Трудности, возникающие в этих теориях. Теория Гельмгольца представляет собой шаг вперед по сравнению с теорией Ампера; однако и в ней устранены не все трудности. Как в той, так и в другой термин «магнитное поле» не имеет смысла; если же придать ему условный, более или менее искусственный смысл, то обиходные, столь привычные для всех электриков законы уже не будут иметь места; так, например, наведенная в проволоке электродвижущая сила уже не будет измеряться числом силовых линий, пересекаемых этой проволокой.

И наша антипатия не зависит только от того, что трудно отказаться от привычных закоснелых форм языка и мышления, происходит еще нечто иное. Если мы не верим в действие на расстоянии, то электродинамические явления необходимо объяснить изменениями среды. Эти изменения среды и называются магнитным полем; таким образом, электродинамические эффекты должны зависеть только от этого поля.

Все эти трудности лежат в гипотезе незамкнутых токов.

IV. Теория Максвелла. Таковы были трудности, возникшие в господствующих теориях, когда появился Максвелл, который устроил их одним росчерком пера. По его теории нет иных токов, кроме замкнутых.

Максвелл принимает, что если электрическое поле в диэлектрической среде начинает изменяться, то этот диэлектрик делается ареной особого явления, которое оказывает на гальванометр действие, подобное действию тока, и которое он назвал *током смещения.*

Если два противоположно заряженных проводника соединяются проволокой, то во время разряда в этой проволоке возникнет незамкнутый ток проводимости; но в это самое время в окружающем диэлектрике возбуждаются токи смещения, которые замыкают этот ток проводимости.

Как известно, теория Максвелла привела к объяснению оптических явлений, основой которых принимаются чрезвычайно быстрые электрические колебания.

В то время подобное воззрение было лишь смелой гипотезой, которая не могла опереться ни на какой опыт. Но к концу второго десятка лет идеи Максвелла получили экспериментальное подтверждение. Герцу удалось осуществить систему электрических колебаний, воспроизводящих все свойства света и отличающихся от световых лишь длиной волны, т. е. тем же, чем фиолетовый свет отличается от красного. В некотором роде Герц произвел синтез света. Каждый знает о беспроволочном телеграфе.

Нам могли бы сказать, что Герц не дал прямого подтверждения основной идеи Максвелла: способности тока смещения действовать на гальванометр. В известном смысле это справедливо; все непосредственно обнаруженное им сводится к тому, что электромагнитная индукция распространяется не мгновенно, как думали прежде, а со скоростью, равной скорости света.

Но предположение, что токов смещения не бывает, а индукция распространяется со скоростью света, *равносильно предположению,* что явления индукции производятся токами смещения, распространение же индукции происходит мгновенно. Это сразу не очевидно, но это доказывается при помощи анализа, говорить о котором здесь я не имею возможности.

V. Опыты Роуленда. Как я сказал выше, бывает два вида незамкнутых токов проводимости: это, во-первых, разрядные токи в конденсаторе или в любом проводнике; во-вторых, сюда относятся случаи, когда электрические заряды описывают замкнутый путь, перемещаясь в одной части контура посредством электропроводности, а в другой части — путем конвекции.

Для незамкнутых токов первого рода вопрос мог считаться решенным: они «замыкаются» токами смещения. Для токов второго типа решение представлялось еще более простым: если ток был замкнут, то это, казалось, могло происходить исключительно благодаря конвекционному току. Для этого достаточно было допустить, что «конвекционный ток», т. е. движущийся заряженный проводник, может действовать на гальванометр.

Однако опытного доказательства недоставало. На деле представлялось трудным получить достаточную силу тока, даже сколь возможно увеличивая заряды и скорости проводников.

Роуленд, чрезвычайно искусный экспериментатор, первый разрешил эту трудность. Он сообщил диску сильный электростатический заряд и весьма значительную скорость вращения. А статическая магнитная система, помещенная сбоку диска, обнаруживала отклонение. Этот опыт был сделан Роулендом дважды: один раз в Берлине, другой в Балтиморе; затем он был повторен Химстедтом. Оба эти физика считали возможным даже заявить, что им удалось произвести количественные измерения.

В течение двадцати лет этот закон Роуленда все физики признавали как бесспорный. Действительно, всё, по-видимому, его подтверждало. Искра, несомненно, производит магнитное действие, но разве не правдоподобно, что искровой разряд происходит благодаря тому, что от одного из электродов отрываются частицы и вместе с их зарядом переносятся к другому электроду? Не доказывается ли это уже спектром искры, в котором наблюдаются линии, принадлежащие металлу электрода? А в таком случае искра была бы настоящим конвекционным током.

С другой стороны, принимают, что в электролитах электричество переносится движущимися ионами. Следовательно, ток в электролите также был бы конвекционным; действует же он на магнитную стрелку.

То же самое верно для катодных лучей: Крукс рассматривал их как поток весьма тонкой материи, заряженной отрицательным электричеством и несущейся с весьма большой скоростью, иными словами, видел в них конвекционные токи и этот взгляд в наше время общепринят. Но катодные лучи отклоняются магнитом. По закону действия и противодействия они в свою очередь должны отклонять магнитную стрелку.

Правда, Герц считал, будто ему удалось доказать, что катодные лучи не переносят отрицательного электричества и не действуют на магнитную стрелку. Но Герц ошибался; сначала Перрену удалось собрать электричество, переносимое этими лучами, существование которого Герц отрицал (по-видимому, немецкий ученый был введен в заблуждение действием тогда еще неизвестных X-лучей); наконец, в самое последнее время с очевидностью было доказано и действие катодных лучей на магнитную стрелку.

Итак, все перечисленные явления, рассматриваемые как конвекционные токи,— искры, токи в электролитах, катодные лучи — одинаково действуют на гальванометр в соответствии с законом Роуленда.

VI. Теория Лоренца. Вскоре пошли еще далее. По теории Лоренца сами токи проводимости представляют настоящие конвекционные токи: электричество находится в постоянной и неразрывной связи с некоторыми материальными частицами, так называемыми *электронами*; гальванический ток состоит в переносе электронов вдоль проводника; проводники отличаются от изоляторов тем, что первые пропускают сквозь себя электроны, тогда как последние задерживают их движение.

Теория Лоренца очень заманчива; она очень просто истолковывает ряд явлений, которые не могли удовлетворительно объяснить прежние теории, в том числе и теория Максвелла в ее первоначальной форме. К числу этих явлений относятся: аберрация света, частичное увлечение световых волн, магнитная поляризация, явление Зеемана.

Существовали еще некоторые возражения. Явления, происходящие в некоторой системе, казалось, должны были зависеть от абсолютной скорости перемещения центра тяжести этой системы, что противоречит развиваемой нами идее относительности пространства. Липпман, поддерживаемый Кремьё, придал этому возражению наглядную и остроумную форму. Представим себе два заряженных проводника, движущихся поступательно с одной и той же скоростью. Они находятся в относительном покое; однако так как каждый из них равносилен конвекционному току, то они должны притягиваться, а, измерив это притяжение, можно было бы определить их абсолютную скорость.

Нет, возражали последователи Лоренца, таким образом была бы измерена не абсолютная скорость их, а скорость их *относительно эфира*; принцип относительности таким образом не нарушается. Впрочем, впоследствии Лоренц дал ответ, более тонкий и гораздо более удовлетворительный.

Каковы бы ни были эти последние возражения, здание электродинамики казалось окончательно построенным, по крайней мере в своих главных чертах; все представлялось в самом удовлетворительном виде; теории Ампера и Гельмгольца, созданные для случая несуществующих незамкнутых токов, казалось, сохраняли только чисто исторический интерес.

История этих изменений (в теориях электродинамики) не менее поучительна для нас; она показывает нам, какие ловушки встречает ученый на своем пути и как он может надеяться их избежать.

Глава XIV *)

КОНЕЦ МАТЕРИИ [1])

Одно из самых удивительных открытий, о котором физики объявили в эти последние годы, состоит

*) Настоящая глава добавлена в позднейших изданиях. Публикуется по изданию: Poincaré H., La Science et l'Hypothèse — Paris· Flammarion, 1923. — *Примеч. ред*

[1]) См. Évolution de la Matière, par Gustave le Bon.

в том, что материи не существует. Поспешим сказать, что это открытие еще не окончательное. Существенным свойством материи является ее масса, ее инерция. Масса — это то, что всюду и всегда остается постоянной, это то, что продолжает существовать, когда химическое преобразование изменяет все чувственно воспринимаемые качества материи, так что кажется, что мы имеем дело с разными телами. Следовательно, если обнаруживается, что масса, инерция материи в действительности ей не свойственна, что это — приобретенная роскошь, которой она себя украшает, что эта масса, константа по определению, все же сама подвержена изменению, то можно сказать, что материи не существует. А именно об этом и было объявлено.

Скорости, которые мы могли наблюдать до сих пор, очень малы; даже у небесных тел, которые далеко оставляют позади все наши автомобили, они едва равны 60 или 100 километрам в секунду; правда, скорость света в 3000 раз больше, но свет — не материя, которая перемещается, это — возмущение, совершающее свой путь сквозь относительно неподвижную субстанцию, подобно тому как это делает волна на поверхности океана. Все наблюдения, произведенные с такими малыми скоростями, показывали постоянство массы, и никто не задавался вопросом, будет ли то же самое при гораздо бóльших скоростях. Рекорд Меркурия, планеты наиболее быстрой, побили бесконечно малые величины; я хочу сказать о движении корпускул, создаваемых катодными лучами и лучами радия. Утверждают, что эти излучения появляются в результате настоящей бомбардировки молекул. Снарядами, выбрасываемыми в этой бомбардировке, являются заряды отрицательного электричества, в этом можно убедиться, наблюдая, как это электричество накапливается в банке Фарадея. В силу того, что эти снаряды обладают зарядом, они отклоняются как магнитным полем, так и электрическим; сравнение этих отклонений позволяет нам узнать их скорость и отношение их заряда к их массе.

Так вот эти измерения свидетельствуют, с одной стороны, что их скорость огромна, что она составляет от одной десятой до одной третьей части скорости света, в тысячу раз больше скорости планеты, а с другой стороны, их заряд очень значителен сравнительно с их массой. Каждая корпускула, находящаяся в движении, представляет собой, следовательно, заметный электрический ток. Но мы знаем, что электрические токи обладают некоторым видом особой инерции, названной *самоиндукцией*. Однажды возникнув, ток стремится сохраниться; в силу этого, когда, желая прервать ток, разрезают проводник, в месте разрыва появляются брызжущие искры. Таким образом, ток стремится сохранить свою интенсивность, подобно тому как находящиеся в движении тела стремятся сохранить свою скорость. Следовательно, наша катодная корпускула будет сопротивляться причинам, стремящимся изменить ее скорость, по двум основаниям: прежде всего в силу своей инерции, а затем в силу самоиндукции, потому что любое изменение скорости будет в то же самое время и изменением интенсивности соответствующего тока. Следовательно, корпускула, или, как говорят, *электрон*, обладает двумя типами инерции: инерцией механической и инерцией электромагнитной.

Абрахам и Кауфман, один — теоретик, а другой — экспериментатор, объединили свои усилия для того, чтобы определить, какую долю составляет каждая из них. Для решения этой проблемы они должны были допустить одну гипотезу; они полагали, что все отрицательные электроны идентичны, что они несут один и тот же заряд, существенно постоянный, что различия, которые наблюдаются между ними, происходят единственно от различия скоростей, которыми они обладают. Когда скорость меняется, реальная масса, масса механическая, остается постоянной, это следует из самого ее определения; но электромагнитная инерция, которая способствует образованию кажущейся массы, увеличивается со скоростью соответственно определенному закону. Следовательно, должна существовать связь между скоростью и отношением массы к заряду; величины эти, как мы уже говорили, можно подсчитать, наблюдая за отклонением лучей под действием магнита или электрического поля; а изучение этого отношения позволит определить долю обоих видов инерций. Полученный результат оказался неожиданным: *реальная масса равна нулю*. Это верно, что все началось с гипотезы, но согласованность теоретической кривой и экспериментальной кривой достаточно велика, чтобы эту гипотезу признать весьма правдоподобной.

Таким образом, эти отрицательные электроны, собственно говоря, не имеют массы; если они кажутся наделенными массой, то это потому, что они не могут изменить скорости без возмущения эфира. Их кажущаяся инерция есть лишь заимствование, она связана не с ними, а с эфиром.

Но отрицательные электроны не исчерпывают материю; стало быть вне их имеется настоящая материя, наделенная собственной инерцией. Существуют некоторые излучения — таковы каналовые лучи Гольдштейна, альфа-лучи радия, — которые также представляют собой множество снарядов, но снарядов, заряженных положительно; что же эти положительные электроны также лишены массы? Сказать о них этого нельзя, поскольку по сравнению с отрицательными электронами они слишком тяжелы и обладают слишком небольшой скоростью.

И в то же время обе гипотезы остаются приемлемыми: или эти электроны более тяжелые и потому, кроме электромагнитной заимствованной инерции, они обладают чисто механической инерцией, и в таком случае они представляют собой истинную материю; или же они не обладают обычной массой, и если кажутся нам более тяжелыми, то это потому, что они очень малы. Я говорю очень малы, хотя это может показаться парадоксальным, потому что в этой концепции корпускула будет только пустотой в эфире, единственно реальном, единственно наделенном инерцией.

До сих пор материя не является лишним компромиссом; мы еще можем принять первую гипотезу или даже считать, что, кроме положительных и отрицательных электронов, существуют нейтральные атомы. Недавние исследования Лоренца вынуждают нас принять эту последнюю возможность. Мы увлекаемся очень быстрым движением Земли, не должны ли при этом переносе изменяться оптические и электрические явления? В течение долгого времени в это верили и предполагали, что наблюдения обнаружат различия, связанные с ориентацией аппаратуры по отношению к движению Земли. Но этого не было, самые тщательные измерения не обнаружили ничего подобного. Эти опыты могли бы оправдать общую неприязнь ко всем физикам; если бы был обнаружен какой-то эффект, то можно было бы узнать не только относительное движение Земли по отношению к Солнцу, но и ее абсолютное движение в эфире. И вот многие люди были огорчены, так как полагали, что любой опыт может дать больше, чем только относительное движение; они с бо́льшей охотой примирились бы с верой в то, что материя не имеет массы.

Однако не следует слишком удивляться получению отрицательных результатов; они противоречили теориям, которым обучали, но они потворствовали глубокому инстинкту, предшествовавшему всем этим теориям. Еще нужно было последовательно модифицировать эти теории, чтобы привести их в гармонию с фактами. Это и сделал Фицджеральд с помощью удивительной гипотезы: он предположил, что все тела испытывают сокращение приблизительно на одну стомиллионную часть в направлении движения Земли. Совершенная сфера превращается при этом в сплющенный эллипсоид, при обращении она деформируется так, что малая ось эллипсоида всегда остается параллельной скорости Земли. Поскольку измерительные инструменты подвергаются тем же самым деформациям, что и объекты, подлежащие измерению, то ничего нельзя заметить, если только в голову не придет идея определить время, которое требует свет для прохождения вдоль длины объекта.

Эта теория описывает наблюдаемые факты. Но этого недостаточно; наступит день, когда наблюдения станут еще более точными; не будут ли результаты на этот раз положительными, не позволят ли эти измерения определить абсолютное движение Земли? Лоренц так не думал; он верил, что такое решение никогда не будет возможным; обычный инстинкт у всех физиков выражается в том, что постоянно испытываемые ими неудачи являются для них достаточной гарантией. Но попробуем рассмотреть эту невозможность в качестве обобщенного закона природы; примем его как постулат. Какие из этого вытекают следствия? Именно это и отыскивал Лоренц, и он нашел, что все атомы, все положительные и отрицательные электроны должны иметь изменяющуюся со скоростью инерцию и как раз соответственно таким законам. Таким образом, материальные атомы будут образованы из положительных электронов, малых и тяжелых, и отрицательных электронов, больших и легких, и если ощущаемая нами материя не кажется наэлектризованной, то это потому, что оба сорта электронов почти равны по числу. И те, и другие лишены массы и имеют только заимствованную инерцию. В этой системе нет истинной материи, она — не более как только узел (особая точка) в эфире.

По Ланжевену материя уподоблялась сжижающемуся эфиру и теряла свои свойства; когда такая материя перемещается, это уже не будет одна и та же расплывающаяся масса, проходящая сквозь эфир; сжижение мало-помалу будет распространяться ко все новым частям эфира, в то время как позади сжиженные вначале частицы снова восстанавливают свое первоначальное состояние. Такая материя в своем движении не сохраняла бы своей идентичности.

Вот какой вопрос стоял некоторое время. Но вот Кауфман опубликовал результаты новых опытов. Отрицательный электрон, скорость которого огромна, должен был бы испытать сокращение Фицджеральда и отношение между скоростью и массой оказалось бы измененным. Новые же опыты не подтверждают это предположение. Но тогда все построение разваливается, и материя снова восстанавливает свое право на существование.

Но опыты — дело тонкое, и окончательное заключение сегодня было бы преждевременным.