

Надежность и эффективность в технике

Справочник в десяти томах

Надежность и эффективность в технике

Справочник в десяти томах

Редакционный совет:

*В.С. АВДУЕВСКИЙ, акад. АН СССР
(председатель);*

В.И. КУЗНЕЦОВ, акад. АН СССР;

Н.Д. КУЗНЕЦОВ, акад. АН СССР;

В.А. МЕЛЬНИКОВ, акад. АН СССР;

В.П. МИШИН, акад. АН СССР;

В.Ф. УТКИН, акад. АН СССР;

К.В. ФРОЛОВ, акад. АН СССР;

Б.В. ГНЕДЕНКО, акад. АН УССР;

И.Н. КОВАЛЕНКО, акад. АН УССР;

Б.Ф. ЛОМОВ, чл.-корр. АН СССР;

Н.А. СЕВЕРЦЕВ, д-р техн. наук

Том
5

*Проектный
анализ
надежности*

*Под редакцией д-ра техн. наук
В.И. ПАТРУШЕВА
и д-ра техн. наук
А.И. РЕМБЕЗЫ*



Москва
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1988

ББК 30.14

Н17

УДК 621-192 (035)

Авторы тома: Б. И. Бельчич, В. Ф. Грибанов,
Э. В. Дворецкий, В. А. Комягин, Г. Н. Кравченко,
Б. П. Креденцер, Ф. И. Кузьмин, В. И. Манойло,
В. П. Мишин, Г. К. Москатов, В. И. Патрушев,
А. С. Проников, А. И. Рембеза, И. А. Рябинин,
Н. А. Северцев, Ю. С. Слотин, Ю. А. Соколов,
Г. Н. Черкесов, Г. А. Ярыгин

Рецензент д-р техн. наук П. С. Батурин

Надежность и эффективность в технике: Справочник.
Н17 В 10 т./Ред. совет: В. С. Авдуевский (пред.) и др. — М.:
Машиностроение, 1988. — (В пер.)

Т. 5.: Проектный анализ надежности/Под ред. В. И. Па-
трушева и А. И. Рембезы. — 316 с.: ил. — 1 р. 70 к.

Рассмотрены вопросы проектного анализа и синтеза надежности изде-
лий машиностроения и приборостроения, приведены методы расчета и опти-
мизации систем с различными видами резервирования. Изложены общие
рекомендации по обеспечению надежности при проектировании механиче-
ских систем, конструкций и радиоэлектронной аппаратуры.

Предназначен для инженерно-технических работников, занятых проек-
тированием, изготовлением, испытаниями и эксплуатацией техники.
Будет полезен студентам и преподавателям высших технических учебных
заведений.

И 2702000000—609
038 (01)—88 Подписное

ББК 30.14

СПРАВОЧНИК СПЕЦИАЛИСТА

Борис Иванович Бельчич, Виталий Федорович Грибанов,
Эргард Васильевич Дворецкий и др.

НАДЕЖНОСТЬ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ В ТЕХНИКЕ

ТОМ 5

ПРОЕКТНЫЙ АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ

Редактор Т. С. Грачева. Художественный редактор С. С. Водчик
Переплет художника А. Я. Михайлова. Технический редактор Н. Н. Скотникова
Корректоры Л. Л. Георгиевская, О. Е. Мишина

ИБ № 4876

Сдано в набор 16.12.87. Подписано в печать 11.05.88. Т-06999. Формат
60×90^{1/16}. Бумага офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 20,0. Усл. кр.-отт. 20,0. Уч.-изд. л. 25,20. Тираж 12 712 экз.
Заказ 337. Цена 1 р. 70 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Машиностроение»
107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленин-
градского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполи-
графпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, поли-
графии и книжной торговли. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

© Издательство «Машиностроение», 1988

Оглавление

Введение	7	2. Восстанавливаемый элемент	47
Глава 1. ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ	10	3. Последовательные системы	50
1. Выбор проектных решений с учетом надежности (Ю. А. Соколов, В. И. Патрушев, А. И. Рембеза)	10	Глава 3. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ СО СТРУКТУРНОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ	58
2. Задачи, модели и методы проектного исследования надежности (Ю. А. Соколов, В. И. Патрушев, А. И. Рембеза)	13	1. Способы составления условий работоспособности системы (И. А. Рябинин)	58
3. Проектные нормы надежности (Ю. А. Соколов, А. И. Рембеза)	19	2. Логико-вероятностные методы расчета структурной надежности сложных систем без учета восстановления (И. А. Рябинин)	64
4. Анализ возможных отказов (Г. Н. Кравченко)	22	3. Методы оценки важности отдельных элементов при синтезе систем с заданной надежностью (И. А. Рябинин)	78
5. Показатели надежности систем и изделий (Б. И. Бельчик, В. А. Комягин)	25	4. Логико-вероятностный метод расчета структурной надежности сложных систем с учетом восстановления (И. А. Рябинин)	92
6. Виды отказов и математические законы надежности (А. И. Рембеза, В. И. Патрушев)	32	5. Расчет надежности двухполусных систем с помощью модифицированного логико-вероятностного метода (Г. Н. Черкесов)	101
7. Задание и распределение требований по надежности (А. И. Рембеза, В. И. Патрушев)	38	6. Расчет надежности систем с ветвящейся структурой и меридианными связями (Г. Н. Черкесов)	113
Глава 2. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ (А. И. Рембеза, В. И. Патрушев)	43	7. Расчет надежности иерархических адаптивных систем управления (Г. К. Москатов)	124
1. Невосстанавливаемый элемент	44	Глава 4. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ С ВРЕМЕННОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ	135
		1. Системы с временной избыточностью (Г. Н. Черкесов)	135

2. Одноканальные системы с пополняемым резервом времени при непрерывной нагрузке и идеальном контроле работоспособности (Б. П. Креденцер)	141	1. Анализ причин отказов механических систем	252
3. Одноканальные системы с пополняемым резервом времени при различных способах контроля и случайной нагрузке (Б. П. Креденцер)	156	2. Модели отказов машин	255
4. Одноканальные системы с непополняемым резервом времени (Б. П. Креденцер, Г. Н. Черкесов)	170	3. Расчет надежности механических систем на стадии проектирования	263
5. Многоканальные системы (Г. Н. Черкесов)	196	4. Закономерности процессов старения	266
6. Многофазные системы (Г. Н. Черкесов)	217	5. Расчет надежности механических систем с учетом их износа	268
Глава 5. ОБЕСПЕЧЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ ПО СТАДИЯМ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА	240	Глава 7. ОБЕСПЕЧЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ (В. И. Манойло, А. И. Рембеза, Н. А. Северцев, Г. А. Ярыгин)	275
1. Модель изменения надежности по стадиям жизненного цикла (А. И. Рембеза, В. Ф. Грибанов, Э. В. Дворецкий)	240	1. Общие принципы обеспечения надежности радиоэлектронных систем (РЭС) при проектировании	275
2. Сетевое планирование и управление (Э. В. Дворецкий)	242	2. Особенности обеспечения надежности цифровой аппаратуры	276
3. Метод ориентированных графов с поглощением ресурсов в вершинах (А. И. Рембеза)	244	3. Надежность программного обеспечения	279
4. Модель экспериментальных работ и испытаний (А. И. Рембеза, В. Ф. Грибанов)	245	4. Выбор методов обеспечения надежности радиоэлектронных систем	281
5. Оценка экономической эффективности технических мероприятий по обеспечению надежности изделий (Э. В. Дворецкий, Ю. С. Слотин)	248	Приложения	291
Глава 6. ОБЕСПЕЧЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ МАШИН И МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ (А. С. Проников)	252	1. Оптимизация затрат по обеспечению надежности нерезервированных технических систем (Ю. С. Слотин, А. И. Рембеза)	291
		2. Учет эксплуатационных требований при проектировании (Ф. И. Кузьмин)	300
		3. Задача определения оптимальной избыточности сложного изделия (А. И. Рембеза, В. Ф. Грибанов)	307
		4. Ранжирование факторов (Ю. С. Слотин)	310
		Предметный указатель	316

Введение

Большое разнообразие методов и средств исследования и обеспечения надежности при проектировании позволяет успешно решать проблему надежности, используя наилучшим образом имеющиеся материально-технические ресурсы.

Исследование и выработка мер по обеспечению надежности системы проводятся на всех стадиях ее жизненного цикла. Наиболее важные технические решения закладываются в процессе проектно-конструкторской разработки.

Основу исследования надежности при проектировании составляют задачи, перечисленные ниже.

1. Задачи обоснования требований по надежности к системе и ее составным частям и выбора основных путей (концепций) их достижения. Эти задачи приходится решать с учетом взаимодействия разрабатываемой системы с другими техническими системами и (или) окружающей средой, а также с учетом ограничений, связанных с достигнутым научно-техническим уровнем и ресурсами, выделяемыми на создание системы.

2. Задачи синтеза требуемой надежности системы в рамках принятых концепций построения системы с учетом упомянутых выше ограничений.

3. Задачи анализа надежности, решаемые с целью получения оценки надежности системы и ее элементов при выбранных в процессе проектирования технических решениях. Получаемые оценки надежности используют для сравнения различных вариантов изделий и выбора варианта, в наибольшей степени удовлетворяющего заданным требованиям по надежности, а также для обоснования последующих решений.

На ранних стадиях проектирования задачи синтеза и анализа надежности решают в рамках единого итеративного процесса выбора наилучших технических решений по обеспечению надежности.

4. Задачи распределения располагаемых ресурсов на обеспечение надежности, реализуемых на последующих стадиях создания, эксплуатации и применения изделий и систем. К их числу относят задачи обоснования программ обеспечения надежности, программ испытаний, выбора эффективных средств контроля качества продукции, поддержания надежности системы в процессе эксплуатации и др.

Некоторые из перечисленных задач выходят за рамки проектно-конструкторской разработки конкретной системы, однако результаты их решения учитываются при создании новых систем.

Все перечисленные задачи успешно решаются благодаря использованию разнообразных количественных методов исследования надежности, которыми располагает теория надежности. Однако не следует забывать, что теория надежности — наука экспериментальная. Ее рабочие гипотезы и выводы базируются на конкретных экспериментальных данных (результатах испытаний или эксплуатации ранее созданной техники). Экспериментальные данные и выводы всегда отражают некоторую предысторию, а решения, которые принимаются на их основе при проектировании, касаются вновь создаваемых образцов техники и в определенной степени учитывают отрицательный опыт прошлого.

Теория надежности в качестве рабочих гипотез использует несколько раз-

личных механизмов возникновения отказов и соответствующих им моделей надежности, учитывающих влияние на надежность факторов окружающей среды, конструкторских и технологических решений, конструкторской и технологической обработки, автоматизации операций изготовления и контроля, способов обслуживания и восстановления. Потенциальных причин изменения надежности всегда больше, чем можно установить на основе имеющихся экспериментальных данных, и поэтому одним и тем же данным могут соответствовать несколько различных моделей надежности.

Следствием этого является недостаточная полнота конкретных частных моделей и наличие неформализуемых факторов. Поэтому количественный анализ надежности не обеспечивает полную гарантию от возможных ошибок. Однако нельзя пренебрегать и количественной оценкой надежности при обосновании проектных решений.

При проведении количественного анализа надежности необходимо оценивать полноту и достоверность исходных данных; адекватность и точность используемых моделей, обоснованность принимаемых допущений и зависимость от них получаемых рекомендаций и выводов. При выборе окончательных решений необходимо проводить оценку гарантий, обеспечиваемых количественным вероятностным анализом, а также рассматривать возможное повышение этих гарантий благодаря применению апробированных технических критериев, норм и правил, позволяющих в совокупности обеспечить требуемую высокую надежность техники.

Материал пятого тома справочника наряду с изложением необходимых сведений по методам расчета надежности изделий при проектировании содержит полезные сведения и рекомендации по практическим методам обеспечения надежности. В справочнике рассмотрены особенности проектирования и задачи исследования надежности на различных этапах разработки изделий и на разных уровнях структуры технических систем. Определенный интерес представляет логическая схема исследований и предварительная клас-

сификация задач и соответствующих им методов исследования надежности при проектировании. При задании требований и последующих исследованиях надежности необходимо использовать такие показатели надежности, которые наилучшим образом характеризуют потребительские свойства систем и особенности их функционирования, учитывать различные виды отказов и соответствующим им математические законы надежности, уметь распределять требования по надежности между элементами системы.

В технике часто используются резервированные системы с последовательным в смысле надежности соединением элементов. К этой категории систем относят механические системы и конструкции, машины и механизмы. В процессе работы эти системы подвержены как внезапным, так и постепенным отказам, связанным с износом и старением. Исследование и обеспечение надежности таких систем имеет ряд особенностей, которые потребовали специального рассмотрения.

Использование структурного представления сложной резервированной технической системы позволяет выявить общие закономерности функционирования ее в различных режимах, не рассматривая особенности физической природы отдельных элементов системы. Подобный подход дает возможность изучать общие закономерности поведения технических систем разного назначения. Это могут быть электрические, радиотехнические, информационные и другие системы. Выбор рациональной структуры и оценка параметров позволяют повысить их надежность. Одним из перспективных направлений исследования надежности при проектировании сложных технических систем являются логико-вероятностные методы аналитической записи условий работоспособности систем и способов перехода к вероятностным функциям, определяющим показатели надежности системы.

Логико-вероятностные методы исследования надежности позволяют проводить анализ и синтез надежности систем, обладающих большой структурной сложностью, выявлять критические элементы и разрабатывать

эффективные меры по повышению надежности систем.

Особый класс задач возникает при исследовании надежности адаптивных систем.

Повышение надежности технической системы может быть достигнуто выбором рациональных временных характеристик функционирования системы. Этот прием используется в системах с временной избыточностью. В этом случае создаются условия для получения в системе или отдельных частях ее избыточного времени, которое используется для восстановления работоспособности, обнаружения и локализации отказов, реконфигурации структуры системы или подключения структурного резерва и пр.

Методы создания временной избыточности построены на различных источниках резервного времени. К ним относят: запас производительности системы, создающий разницу между оперативным временем выполнения задания и фактическим временем; комплексирование устройств одинакового назначения; создание внутренних запасов продукции в накопителях; функциональную инерционность, вызываемую физико-техническими процессами в системе; способ загрузки системы. Технические резервы могут иметь неполноценный резерв времени или пополняемый по определенному закону.

Временная избыточность должна рас-

сматриваться с учетом структуры технической системы.

Анализ общих закономерностей изменения надежности по стадиям жизненного цикла позволяет применительно к разрабатываемой системе рационально распределить располагаемые ресурсы на обеспечение надежности при проектировании, испытаниях, серийном изготовлении и эксплуатации системы, выбрать этапность работ, установить контрольные точки для оценки достигнутого уровня надежности и выработки управляющих решений. Эти задачи решаются с использованием методов сетевого планирования и управления, методов теории графов, методов динамического программирования.

Широкое использование вычислительной техники выдвинуло в число важнейших проблему обеспечения надежности ЭВМ и программного обеспечения, сравнения и выбора наиболее эффективных методов обеспечения надежности электронных систем.

По нашему мнению, сочетание в одной книге материалов по методам расчета и методам обеспечения надежности современной техники, используемых при проектировании, придает справочнику большую практическую направленность.

В. П. Мишин,
акад. АН СССР

Глава 1. Проектирование систем и задачи исследования надежности

1. ВЫБОР ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ С УЧЕТОМ НАДЕЖНОСТИ

Для ряда изделий и сооружений проблема обеспечения надежности решается без непосредственного использования методов теории надежности. Промышленные и жилые здания, мосты, плотины и другие сооружения проектируют с учетом эксплуатационных нагрузок и изменений во времени свойств конструкционных материалов. Установленные для различных видов техники нормы прочности и другие строительные и проектные нормы, реализуемые совместно с правилами приемки готовых сооружений, правилами эксплуатации, включающими необходимый надзор, обслуживание и восстановление, обеспечивают практическое отсутствие отказов в течение всего срока службы. Методы математической статистики и теории вероятностей используются при определении реальных диапазонов эксплуатационных нагрузок, характеристик прочности материалов, обосновании коэффициентов запаса прочности и коэффициентов безопасности. В процессе же разработки конкретного проекта используются преимущественно детерминированные (нормативные) показатели и коэффициенты, согласованные методики выбора материала и профиля, периодичности осмотра или замены, ремонтов или контрольных нагружений. При таком *нормативном детерминистском подходе* к выбору проектных решений все возможные разбросы воздействующих факторов, характеристик материалов, технологии изготовления перекрываются вводимыми запасами. При этом отсутствие отказов гарантируется для всех образцов, выполнен-

ных по данному проекту и эксплуатируемых в оговоренных условиях.

Усложнение техники, ужесточение эксплуатационных нагрузок, использование новых материалов, комплектующих изделий, конструктивных решений, технологических процессов, ограничения по массе, габаритам, энергопотреблению и другие аналогичные факторы затрудняют распространение детерминистского подхода на многие виды изделий. Тем не менее, если это уникальные изделия единичного изготовления, то проектное исследование их надежности направлено на обеспечение максимальной гарантии успешной работы каждого образца в условиях имеющихся ограничений. Экономичность (себестоимость) при этом не является главным критерием оптимизации надежности, так как последствия отказов превосходят затраты на создание самих изделий. Для таких видов техники к обоснованию проектных решений, связанных с надежностью, применяют *программно-целевой подход*, основой которого является комплексный анализ всех мер и средств обеспечения и контроля надежности, включая все виды резервирования и запасов, контроля, обслуживания, специальных мер предупреждения, выявления и защиты от последствий отказов. Выбирают решения, обеспечивающие (в совокупности) заданный или максимальный уровень гарантий, с учетом ограничений по срокам создания, массе, габаритам и т. п. При этом затраты времени и средств на проектно-конструкторскую разработку и испытания опытных изделий могут составлять большую часть суммарных затрат на реализацию всей программы.

Затраты времени и средств на проектно-конструкторскую разработку и испытания изделий массового производства составляют малую долю затрат на изготовление и эксплуатацию изделий. Возникают условия для существования оптимального уровня надежности проектируемого изделия, так как высоконадежные изделия дороже обходятся в изготовлении, но экономичнее в эксплуатации.

Другими словами, становится оправданным *нормативный вероятностный подход*, при котором нормируется требуемый (экономически обоснованный) уровень вероятностного показателя надежности, а затем он контролируется перед запуском изделия в производство с помощью специальных испытаний на надежность. Объем испытаний на надежность и соответствующие этому объему риск изготовителя и риск потребителя нормируются заранее.

Большому диапазону значений объема производства [от единиц (единичное) и до тысяч (массовое)] соответствует область *программно-целевого вероятностного подхода*, когда вероятностные показатели используются при проектном исследовании, но не могут быть использованы в качестве основы обеспечения гарантий успешной реализации программы. При задании требований следует учитывать и целесообразность затрат на подтверждение требований, так как эти затраты могут составлять существенную долю общей стоимости программы.

При любом из подходов возникает ряд задач исследования эффективности расходования ресурсов на основных стадиях жизненного цикла изделия. Эти задачи обычно формулируют как задачи оптимального планирования программ обеспечения надежности, программ экспериментальных работ и испытаний, программ эксплуатации и ремонта.

Анализ типовых задач исследования надежности и особенностей постановки задач обоснования решений на основных стадиях жизненного цикла создания техники позволяет уточнить логическую схему постановки задачи исследования надежности, из которой в виде частных случаев вытекают бы

постановки задач для различных классов объектов исследования [3].

Логическая схема постановки задачи представлена на рис. 1.

Ниже приведены модели исследования надежности.

Модель изготовления и контроля качества опытных образцов устанавливает соответствие между уровнем безотказности образцов и техники, предназначенных для экспериментальных работ и испытаний, и уровнем затрат на контроль качества. Неопределенными факторами модели являются уровень отработанности опытной технологии, определяющей начальный уровень бездефектности опытных образцов $R_{и оп}$, и уровень эффективности применения средств производственного контроля $\alpha_{и оп} \sim \frac{dR_{и оп}}{dC_{и оп}}$, где $C_{и оп}$ — затраты на изготовление опытных образцов. Таким образом, формализованная запись модели может быть представлена в виде

$$q_{и оп}: \{R_{и оп}, \alpha_{и оп}, C_{и оп}\} \rightarrow \{R_{и оп}\}, \quad (1)$$

причем параметры модели зависят от сложности изделия (сборочных единиц), объема производства, других факторов классификации изделий.

Модель экспериментальной отработки устанавливает соответствие между уровнем отработанности конструкторской документации и уровнем затрат на экспериментальную отработку. Неопределенными факторами модели являются уровень отработанности процесса проектирования, определяющий начальный уровень отработанности (качества) конструкторской документации $R_{эо}$, и уровень эффективности методов и средств экспериментальной отработки $\alpha_э \sim \frac{dR_э}{dC_э}$.

На результативность процесса отработки также влияет уровень бездефектности опытных образцов $R_{и оп}$. Таким образом, формализованная запись модели экспериментальной отработки может быть представлена в виде

$$g_э: \{R_{эо}, R_{и оп}, \alpha_э, C_э\} \rightarrow \{R_э\},$$

причем параметры модели зависят от степени новизны обрабатываемых решений, оснащенности экспериментальной базы и других характеристик изделий.

Модель изготовления и контроля качества серийных образцов аналогична соотношению (1) и может быть представлена в виде

$$g_{ис}: \{R_{ис0}, \alpha_{ис}, C_{ис}\} \rightarrow \{R_{ис}\}.$$

Модель эксплуатации и обслуживания устанавливает соответствие между уровнем надежности серийных изделий, находящихся в эксплуатации, и уровнем затрат на эксплуатацию, обслуживание, ремонт. Неопределенными факторами модели являются зависимость надежности изделия от эксплуатационных воздействующих факторов $R(t_0)$ и уровень эффективности способов и средств кон-

троля, обслуживания и ремонтно-восстановительных работ $\alpha_B \sim \frac{dR(t_0)}{dC_B}$. Начальный уровень надежности изделий на стадии эксплуатации определяется обработанностью и бездефектностью $R_{ис}$ серийных образцов. Таким образом, формализованная запись модели эксплуатации имеет вид

$$g_{экспл}: \{R_0, R_{ис}, R_0(t_0), \alpha_B, C_B\} \rightarrow \{R(t_0)\},$$

где R_0 — текущее, а R_0 — начальное значения параметра.

Модель функционирования изделия устанавливает соответствие между уровнем надежности изделия в процессе применения и уровнем затрат ресурсов на проектные меры и средства повышения надежности. Неопределенными факторами модели являются зависимость надежности изделий от условий применения

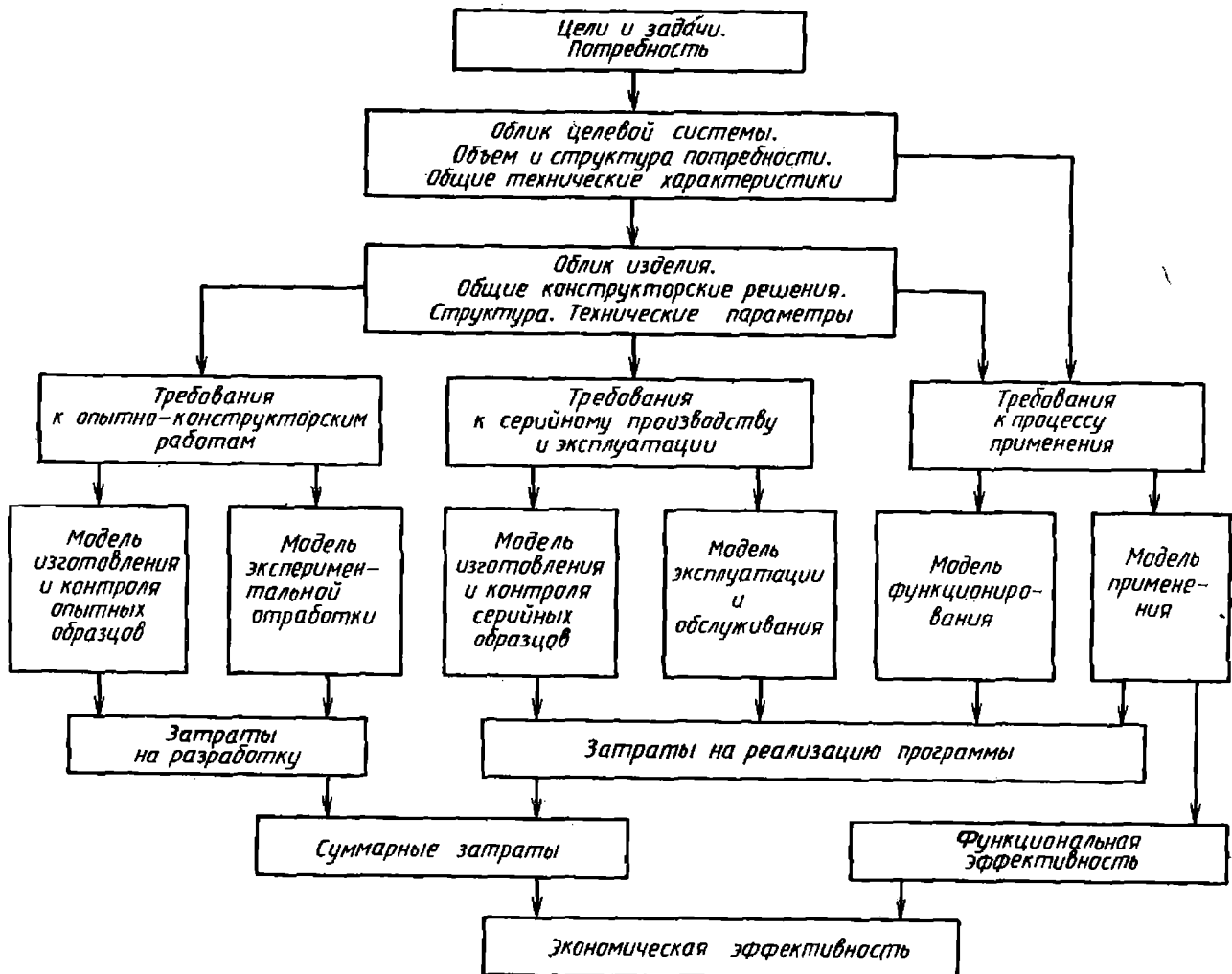


Рис. 1. Логическая схема постановки задачи исследования надежности

$R_0(t_{пр})$ и уровень эффективности проектных мер обеспечения надежности (запасов, резервирования, средств оперативного контроля и управления функционированием) $\alpha_{\phi} \sim \frac{dR(t_{пр})}{dC_{п}}$. На результаты функционирования также влияет текущий уровень надежности изделий, применение которых начинается по истечении определенного срока эксплуатации $R(t_{э})$. Таким образом, формализованная запись модели функционирования может быть представлена в виде

$$g_{\phi}: \{R(t_{э}), R_0(t_{пр}), \alpha_{\phi}, C_{п}\} \rightarrow \{R(t_{пр})\}. \quad (2)$$

Для сложных, многофункциональных изделий, множество состояний которых не может быть достаточно точно охарактеризовано двумя классами состояний (работоспособностью и неработоспособностью) и, следовательно, неудовлетворительным является однозначное определение понятия «отказ», модель функционирования устанавливает соответствие «выходной эффект — затраты». Этому соответствует формализованная запись:

$$g_{\phi}: \{R(t_{э}), R_0(t_{пр}), \alpha_{п}, C_{п}\} \rightarrow \{W(t_{пр})\},$$

где $W(t_{пр})$ — дифференциальный или интегральный выходной эффект, получаемый от одного изделия.

Модель применения системы устанавливает соответствие между уровнем эффективности функционирования системы и затратами в процессе применения. Неопределенным фактором модели является уровень потребности $V_{тр}(t_{пр})$, если исследование проводится на стадии проектирования. Характеристики изделий оказывают влияние на эффективность применения системы через показатели надежности изделий в процессе применения $R(t_{пр})$ [в случае модели (2)] или через выходной эффект $W(t_{пр})$. Формализованная запись модели применения может быть представлена в виде

$$g_{пр}: \{R(t_{пр}), V_{тр}(t_{пр}), N_{пр}\} \rightarrow V(t_{пр})$$

или

$$g_{пр}: \{W(t_{пр}), V_{тр}(t_{пр}), N_{пр}\} \rightarrow V(t_{пр}).$$

В том случае, когда условие достижения требуемого уровня потребности $V(t_{пр}) \geq V_{тр}(t_{пр})$ используется в качестве критерия для принятия решения, выходом модели является прогнозируемый уровень гарантий выполнения требований:

$$g_{пр}: \{R(t_{пр}), V_{тр}(t_{пр}), N_{пр}\} \rightarrow \gamma;$$

$$g_{пр}: \{W(t_{пр}), V_{тр}(t_{пр}), N_{пр}\} \rightarrow \gamma.$$

Формализованная запись обобщенной модели создания и применения как композиции частных моделей ($g = \langle g_{и оп}, g_{э}, g_{ис}, g_{экспл}, g_{\phi}, g_{пр} \rangle$) приобретает вид

$$g: \{R_{и оп}, \alpha_{и оп}, R_{э}, \alpha_{э}, R_{ис}, \alpha_{ис}, R_0(t_{э}), \alpha_{в}, R_0(t_{пр}), \alpha_{\phi}, V_{тр}, C_{\Sigma}\} \rightarrow \gamma,$$

где $C_{\Sigma} = C_{и оп} + C_{э} + (C_{ис} + C_{в} + C_{п}) N_{пр}$ — суммарные затраты на программу создания и применения изделий.

В зависимости от потребности в изделиях, подхода к выбору проектных параметров и особенностей конструктивного и технологического решений изделий определяется состав и степень детализации моделей, рассмотренных в общей постановке.

2. ЗАДАЧИ, МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ПРОЕКТНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ

Стандартная последовательность задач проектного исследования надежности включает:

задание требований;

принятие решений, обеспечивающих надежность;

контроль выполнения требований.

Содержание каждого из этапов исследования может уточняться для различных классов изделий в зависимости от их сложности, массовости изготовления, сложившейся организации ра-

бот и т. д. Тем не менее для любого из них подходит методика исследования, изложенная в первом томе. Всегда условия задачи исследования описывают множество решений (условия выбора) и правило обоснования (выбора) решений.

Для задачи «задание требований» множество возможных решений (в виде интервала значений показателя надежности) допускает в качестве правила выбора поиск минимального значения показателя надежности, при котором выполняются требования по эффективности (и тогда в качестве модели используется отображение надежность \rightarrow эффективность), либо поиск максимально достижимого значения показателя надежности при выполнении ограничений на затраты (тогда нужна модель затраты \rightarrow надежность).

Если же в условиях задачи не определен показатель, то, естественно, условия выбора расширяются, что влечет дополнительные требования к правилам выбора и используемым моделям.

Для задачи «принятие решений, обеспечивающих надежность» множество возможных (допустимых) решений может описываться в терминах проектных параметров, структуры (избыточности) изделия, конструкции, технологии изготовления и контроля, эксплуатации, обслуживания и т. д.

Возможные формулировки правила выбора:

найти хотя бы один набор проектных параметров (решений), при котором выполняются требования по надежности;

найти набор проектных решений, обеспечивающих выполнение требований по надежности при минимуме затрат.

Соответствующие модели должны устанавливать зависимость уровня затрат и уровня надежности от исследуемых параметров. В частном случае в качестве возможных решений могут выступать значения показателей надежности подсистем, и тогда модель должна устанавливать зависимость надежности изделия от надежности подсистем. Такую задачу обычно называют

задачей нормирования надежности.

Для задачи «контроль выполнения требований» множество возможных решений состоит из нескольких альтернатив, например, «требования выполнены», «требования не выполнены».

Обоснование решения проводят по следующим критериям: минимум риска «заказчика» при ограничении средств на контроль; минимум затрат на контроль при условии ограничения риска «заказчика»; минимум суммарных потерь на реализацию программы с учетом потерь, вызванных ошибками I и II рода.

Рассмотрим особенности этих задач применительно к отрасли, реализующей нормативный вероятностный подход.

На стадии научно-исследовательских работ, при определении потребности в новом виде техники надежность будущего класса техники исследуется на уровне проблем. Определяя целесообразность разработки нового изделия, исследуя его потребительские свойства и его потребительскую ценность, уже на этой стадии можно представить способ, систему применения будущего изделия; возможные последствия его ненадежности; сочетание свойств (безотказности, долговечности, ремонтпригодности и сохраняемости), существенных для возможных вариантов назначения изделия и условий его применения. Уже на этой стадии могут быть определены наиболее существенные технические проблемы обеспечения надежности будущего изделия. Хотя, не имея облика изделия, не зная диапазона его возможных конструктивных, технологических, эксплуатационных характеристик, трудно говорить даже о выборе показателей надежности, тем более об обосновании требуемого уровня надежности, тем не менее анализ «от потребности», как правило, позволяет установить содержание и показатели эффективности применения будущего изделия.

При разработке технического предложения анализ «от потребности» дополняется анализом «от возможностей» с учетом прогноза затрат ресурсов на создание и применение различных вариантов изделия; проводится сравнение вариантов облика создаваемого

изделия, выбор рационального сочетания проектных параметров. На этой стадии становится возможным от показателя эффективности перейти к выбору «эффективной меры надежности», т. е. к показателю, наиболее полно и адекватно отражающему влияние характеристик надежности изделия на эффективность его применения. Учет способа применения и особенностей системы эксплуатации позволяет обосновать показатель надежности изделия. После этого появляется возможность качественные соображения о целесообразности разработки нового изделия, рациональности того или иного сочетания проектных параметров подкреплять количественными характеристиками. Количественные оценки показателя надежности изделия на стадии разработки технического предложения обычно называют предварительными, расчетными, прогнозными. В строгом смысле это даже не оценки, так как будущее изделие представлено пока комбинациями параметров, общими конструкторскими, технологическими решениями. Однако опыт создания и применения близких по облику и проектным параметрам изделий позволяет прогнозировать зависимости уровня надежности изделия от определяющих потребительских свойств и предполагаемых затрат времени, средств и других ресурсов на обеспечение и контроль надежности. Таким образом, предварительным расчетом устанавливается некоторое соответствие между вариантами изделия, затратами на обеспечение и контроль надежности и ожидаемыми уровнями показателя надежности.

Построение подобных моделей является необходимым условием для реализации задачи «задание требований», которая обычно решается на стадии «разработки технического задания». Согласование и утверждение технического задания, включающего указания требуемого уровня надежности, завершает и документирует выбор, обоснованный на предыдущих стадиях; при этом неопределенность задачи может приводить к ошибкам I и II рода, т. е. к занижению либо завышению требований по сравнению с объективно целесообразным уровнем. Вероятности

ошибок, или уровни рисков, могут быть оценены лишь в том случае, когда используемые модели, кроме зависимостей для средних ожидаемых или наиболее вероятных значений параметров, содержат диапазоны возможных разбросов параметров. Именно диапазоны разбросов параметров модели являются количественным описанием уровня неопределенности условий задачи исследования надежности и позволяют применить методики и принципы обоснования решений в условиях неопределенности.

На следующих стадиях эскизного и технического проектирования принимается основная доля конструкторских и технологических решений. По мере «углубления» процесса проектирования к нижним уровням иерархической структуры изделия уточняются, конкретизируются предварительные модели. При этом каждая «веточка» процесса заканчивается на уровне элементов, агрегатов, механизмов, уже выпускаемых промышленностью, либо новых деталей и сборочных единиц, для которых достаточно точно может быть назван ранее созданный аналог и конкретные изменения относительно аналога по материалу, конструкции, технологии изготовления и контролю.

После завершения процесса обоснования проектных решений появляется возможность построения модели «надежность — затраты» для типа изделий.

В случае необходимости разработки новых деталей и сборочных единиц их надежность прогнозируется на основе данных по испытаниям и эксплуатации аналогов, а также экспериментальным или теоретическим данным о свойствах предлагаемого материала, технологического процесса.

Начиная со стадий разработки рабочей документации, проводится экспериментальная проверка соответствия заложенных в конструкторскую документацию свойств создаваемого изделия требованиям ТЗ. Одновременно выявляются и устраняются причины несоответствия.

Задачи оценивания надежности. Рассмотрим возможную классификацию задач оценивания надежности изделий

по экспериментальным данным по следующим признакам:

- 1) оцениваемый показатель надежности;
- 2) форма представления результатов (вид) оценивания;
- 3) форма исходной информации;
- 4) сложность модели оценивания.

Номенклатура оцениваемых показателей надежности изделий и их элементов содержит шесть показателей:

$R_1 = P(t_3)$ — вероятность безотказной работы за время t_3 , $R_2 = T_0$ — среднюю наработку до отказа, $R_3 = T_\gamma$ — γ -процентную наработку до отказа, $R_4 = T_B$ — среднее время восстановления, $R_5 = T_{B\gamma}$ — γ -процентное время восстановления, $R_6 = K_T(t)$ — коэффициент готовности и не может быть существенно дополнена показателями, которые бы не выражались однозначно через приведенные в перечне. Можно указать четыре различные формы представления результатов (видов) оценивания:

$O_1 = \hat{R}$ — точечное оценивание; $O_2 = \hat{R}_\beta$ — β -доверительное оценивание; $O_3 = R_{\gamma, \beta}$ — $\gamma\beta$ -толерантное оценивание; $O_4 = \text{Вер} \{R' \in R\}$ — проверка статистической гипотезы.

Формы регистрации экспериментальной информации рассмотрены ниже.

Если время испытания (работы) всех образцов изделия задано и одинаково ($t = t_{\text{зад}}$), то вся информация о результатах испытаний $I_1 = \{\omega\}$ содержится в векторе значений «индикатора» отказов $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, где n — число образцов, $\omega_i = \{0, 1\}$.

В более общем случае мы имеем выборку $I_2 = \{t, \omega\}$ в форме вектора наработок $t = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_n\}$ (где i — номер образца, n — общее число образцов) и соответствующего ему вектора значений «индикатора» отказов $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n\}$, где $\omega_i = \{0, 1\}$. Выборка $I_2 = \{t, \omega\}$ является естественным обобщением частично группированных выборок или частично регистрируемой выборки. Классическая выборка испытаний до отказа всех экземпляров является частным случаем I_2 при условии $\forall i (\omega_i = 1)$.

Кроме информации по наработкам, в процессе испытаний может фиксироваться информация по определяющим параметрам, используемым при оценке состояния изделия. При этом информация может регистрироваться как в альтернативной форме (допусковый контроль), так и в количественной (величина запаса работоспособности или величина выброса параметра состояния за допуск).

Запасом работоспособности по j -му фактору Z_j называют невозрастающую положительно определенную величину (возможно функцию времени или наработки), которая определяет момент отказа условием $Z_j = 0$. Исходная информация для оценивания надежности в форме реализаций запаса работоспособности по j -му фактору регистрируется как вектор значений наработки $t_j = \{t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{ji}, \dots, t_{jl}\}$, где t_{ji} — точка i -го замера, l — общее число замеров запаса работоспособности в j -й реализации) и соответствующий ему вектор значений запаса работоспособности $Z_j = \{Z_{j1}, Z_{j2}, \dots, Z_{ji}, Z_{jl}\}$. В случае, когда в данной реализации по j -му фактору в момент t_{ji} наблюдается отказ изделия или системы, значения Z_{jm} ($m \geq i$) тождественно равны нулю. Выборка в форме запасов работоспособности $I_3 = \{t, Z\}$ — набор $2n$ векторов по каждому фактору, где n — общее число наблюдаемых образцов.

Параметром состояния y называют действительную величину (возможно функцию времени или наработки), первый выход которой за допуск определяет момент отказа изделия (системы). Возможны многочисленные варианты моделей изменения параметров состояния и допусков. Большинство из них сводится к модели, описывающей изменение расстояния до допустимой границы Y_j по j -му параметру. В таком случае момент отказа определяется условием $|Y_j(t_{\text{отк}})| = 0$. Существенно, что на функцию $y(t)$ не накладывается условие монотонности. Исходная информация в форме параметров состояния регистрируется как вектор значений времени (наработки) $t_j = \{t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{ji}, \dots, t_{jl}\}$ где (t_{ji} — точка i -го замера j -го параметра, l — общее число замеров) и соответству-

ющий ему вектор значений $Y_j = \{Y_{j1}, Y_{j2}, \dots, Y_{ji}, \dots, Y_{jl}\}$ расстояния до границы допуска по j -му параметру.

Выборка в форме параметров состояния $I_4 = \{t, Y\}$ — набор $2n$ векторов по каждому параметру, где n — общее число наблюдаемых образцов.

Формы представления информации I_3 и I_4 допускают обобщение, аналогичное обобщению I_2 . В этом случае в состав данных включается матрица значений «индикатора» измерения $\omega = \{\omega_{ij}\}$, где $\omega_{ij} = \{0, 1\}$. Значение $\omega_{ij} = 1$ соответствует точному измерению значения Z_{ij} или Y_{ij} . При $\omega_{ij} = 0$ удостоверяется факт, что истинное значение запаса работоспособности или параметра превышает уровень Z_{ij} или Y_{ij} соответственно. Такое обобщение включает как частные случаи различные варианты допускового контроля параметров и запасов работоспособности.

Итак, имеем:

$I_1 = \{\omega\}$ — альтернативная информация;

$I_2 = \{\omega, t\}$ — наработки;

$I_3 = \{\omega, t, Z\}$ — запасы работоспособности;

$I_4 = \{\omega, t, Y\}$ — параметры состояния.

Сложность моделей оценивания надежности, кроме оцениваемого показателя и формы исходной информации, определяется уровнем регистрации результатов экспериментов. При регистрации наработок $I_1 = \{\omega, t\}$ на уровне изделия в целом по выборке $\{\omega, t\}$ оцениваются параметры распределения $F_\theta(t)$ времени до отказа (наработки):

$$\tau: \{\omega, t\} \rightarrow \{\theta\}, \quad (3)$$

а затем вычисляется оценка показателя надежности

$$r: \{\theta\} \rightarrow R, \quad (4)$$

где τ — используемая статистика (статистическая оценка параметров); $\{\theta\}$ — вектор параметров распределения $F_\theta(t)$; r — зависимость (модель «наработка—надежность»), выражающая показатель надежности изделия через параметры распределения времени до отказа (распределения наработки).

Задачу построения подходящей статистики (3) называют стандартной задачей статистического оценивания. Задачу нахождения оценки показателя надежности по выборке $\{\omega, t\}$, т. е. преобразования τr в соответствии с (3) и (4), — задачей статистического оценивания надежности. В простейшем случае оцениваемый показатель (средняя наработка до отказа) может совпадать с параметром распределения $F_\theta(t)$ [например, математическим ожиданием у нормального закона распределения $N(m, \sigma^2)$]. В этом случае r — тождественное преобразование, и задача статистического оценивания надежности сводится к стандартной задаче статистического оценивания с одноуровневой однопараметрической моделью. Случай, когда показатель надежности R зависит от двух и более неизвестных координат вектора $\{\theta\}$, соответствует одноуровневой многопараметрической модели.

В случае регистрации наработок на уровне составных частей изделия в рассмотренной последовательности (3) и (4) может быть проведена оценка показателей надежности R_i для каждой из составных частей i , где $i = 1, \dots, m$; m — число составных частей, входящих в изделие. Затем с помощью модели надежности μ_R проводят оценку показателя надежности изделия:

$$\mu_R: \{R_i\} \rightarrow R, \quad (5)$$

где $\{R_i\}$ — вектор показателей надежности составных частей. Переход с уровня составных частей на уровень изделия может осуществляться с помощью модели наработок и сверткой распределений наработок

$$\mu_\theta: \{\theta_i\} \rightarrow \{\theta\}, \quad (6)$$

где $i = 1, \dots, m$; m — число составных частей; $\{\theta_i\}$ — вектор параметров распределения наработки i -й составной части; $\{\theta\}$ — вектор параметров распределения времени работы изделия.

Модели оценивания надежности, использующие свертки типа (5) [в схеме (3)—(4)—(5)] или типа (6) [в схеме (3)—(6)—(4)], называют многоуровневыми (со сверткой показателей надежности и сверткой наработок).

Для каждой из форм исходной информации I_3 и I_4 в результате решения стандартной задачи статистического оценивания (3) определяют параметры соответствующего распределения $F_\theta(t, Z)$ или $F_\theta(t, Y)$, а по ним параметры распределения времени до отказа каждой из систем.

Однако не исключается возможность реализации многоуровневых моделей со сверткой запасов работоспособности

$$\mu_Z: \{Z_i\} \rightarrow \{Z\} \quad (7)$$

или сверткой параметров состояния

$$\mu_Y: \{Y_i\} \rightarrow \{Y\}, \quad (8)$$

где $i = 1, \dots, m$; m — число систем; $\{Z_i\}$ — вектор запасов работоспособности i -й системы; $\{Y_i\}$ — вектор параметров состояния i -й системы; Z — запас работоспособности изделия; Y — параметры состояния изделия.

Таким образом, по степени сложности различают следующие модели оценивания:

G_1 — одноуровневую однопараметрическую; G_2 — одноуровневую многопараметрическую; G_3 — многоуровневую со сверткой показателей надежности; G_4 — многоуровневую со сверткой распределения наработок; G_5 — многоуровневую со сверткой распределения запасов работоспособности; G_6 — многоуровневую со сверткой распределений параметров.

Рассмотренные значения признаков классификации задач оценивания не исчерпывают реальных жизненных ситуаций. Так, в рассмотренных формах исходных данных не учтены различные варианты фиксации результатов восстановления работоспособности (ремонтов). При измерении на уровне составных частей разнородных параметров могут возникнуть всевозможные комбинации форм I_1, I_2, I_3, I_4 и соответственно моделей G_3, G_4, G_5, G_6 . Но даже рассмотренные значения позволяют выделить около 600 вариантов задач оценивания надежности изделий.

Общая постановка задачи оценивания надежности изделия включает и выбор наилучшей (в некотором смысле) статистики типа (3), и построение преобразований типа (4)—(5) или (6)—(4), и разработку алгоритма, реали-

зующего всю схему оценивания. При простейшей модели задача сводится к стандартной статистической, а при использовании в качестве исходных данных готовых оценок показателей надежности составных частей изделия задача оценивания сводится к чисто вероятностной постановке.

Методом оценивания надежности называют совокупность правил построения (выбора) статистик, алгоритмов и моделей оценивания и способов проверки их качества. Критерии качества оценивания (точности статистики, адекватности модели, правильности алгоритма) формулируют на основе анализа общих требований к специальному математическому обеспечению управления процессом создания и применения изделий, таких, как обоснованность, рациональность, интересубъективность, реализуемость и оперативность. Критерии научной обоснованности, используемые в математической статистике, в первую очередь относятся к задаче выбора той или иной статистики (оценки). Так, для задач точечного оценивания эти критерии связаны как с качественными свойствами несмещенности, состоятельности, инвариантности, линейности, нормальной распределенности оценок, так и с количественными характеристиками эффективности (асимптотической эффективности) оценок. Критерии качества решения задач интервального оценивания и различения гипотез базируются на характеристиках равномерно наибольшей точности, ошибок 1-го и 2-го рода, потерь, связанных с неправильными решениями.

Качество статистики (3) применительно к конкретной задаче оценивания надежности может быть исследовано априори только при условии, что остальные используемые отображения (4)—(8) или их сочетания адекватно отражают особенности реального объекта оценивания. Только в этом случае при увеличении объема выборки обеспечивается сходимость оценки к истинному значению показателя надежности. В противном случае может иметь место погрешность, которую нельзя уменьшить никакими дополнительными измерениями на нижних уровнях структуры изделия без

использования апробированных ранее моделей.

Эти особенности тем более существенны в связи с тем, что при проектном исследовании надежности всегда приходится применять интерполяцию или экстраполяцию ранее полученных данных, ранее проверенных моделей на новую область: новое изделие или его часть, новые условия работы и т. п.

Актуальными становятся задачи проверки гипотез, принципов и механизмов, использованных при построении моделей. Так, для многоуровневых многопараметрических моделей типа (5), (6), (7) существенным становится допущение независимости характеристик надежности отдельных элементов, запасов работоспособности, параметров состояния изделия, внешних воздействующих факторов.

По мере уточнения и конкретизации задачи проектирования изделия на более поздних стадиях создания и на более низких уровнях структуры изделия появляется возможность использования более содержательных и точных моделей, а также возможность более обстоятельной проверки их адекватности в связи с наличием все более полной экспериментальной информации.

3. ПРОЕКТНЫЕ НОРМЫ НАДЕЖНОСТИ

Содержание проектной нормы надежности (ПНН) является основной частью и конкретизацией такого понятия, как «объект нормирования». Конкретные формы задания требований и номенклатура показателей надежности устанавливаются стандартами по видам техники. Объектом нормирования могут быть сами нормативные значения показателя надежности; контрольные уровни показателя надежности, нормативные значения доверительной вероятности, с которой должен быть подтвержден контрольный уровень показателя надежности к моменту приемки изделия в серийное производство или к моменту поставки; требования к точности оценивания нормативного значения к моменту приемки.

Для контроля надежности в процессе экспериментальных работ и испыта-

ний головной разработчик может устанавливать промежуточные значения контрольных уровней или доверительных вероятностей, с которыми контрольные уровни показателей надежности составных частей изделий должны быть подтверждены к моменту начала комплексных или государственных испытаний.

Организационные и технические требования по обеспечению надежности изделия системы устанавливают в форме требований к проведению предупредительных, контрольных и защитных мероприятий в целях: предупреждения конструкционных, производственных и эксплуатационных отказов; выявления потенциальных источников отказов и борьбы с ними; защиты изделий в процессе эксплуатации (применения) от последствий всех видов отказов в составных частях, агрегатах.

Таким образом, объектом нормирования в ПНН изделий могут быть и нормативные значения (диапазоны, ряды значений) показателей надежности, и контрольные уровни, и нормативные значения доверительных вероятностей, и виды, объемы испытаний, и, наконец, конкретные организационные и технические требования по обеспечению и контролю надежности.

Так как при проектировании в конструкторскую документацию закладываются все основные решения для обеспечения требований по надежности, то, кроме требований по надежности, к объекту нормирования относят перечень, последовательность и методы обоснования проектных решений, связанных с надежностью. Именно поэтому ПНН для класса изделий — совокупность требований к процессу обоснования и (или) к самим проектным решениям, связанным с надежностью. В первом случае объектами нормирования являются перечень, последовательность, правила, критерии, методы и алгоритмы принятия (обоснования) проектных решений, связанных с надежностью изделий, во втором случае — параметры назначения, включая все формы задания требований по надежности, конструктивные, технологические и эксплуатационные параметры, а также условия эксплуатации (применения), связанные

с обеспечением и контролем выполнения требований по надежности изделий.

По степени категоричности и обязательности нормы делят на три категории: собственно нормы, рекомендации и вспомогательные сведения.

Обязательная норма может устанавливать некоторое требование, разрешать, обязывать или запрещать некоторые действия, решения, мероприятия.

Стимулирующая норма создает условия для повышения заинтересованности конкретных исполнителей в конечных результатах работ по надежности, в обоснованности соответствующих проектных решений.

Нормы трактуемого характера предназначены для конкретизации требований (других норм) применительно к отдельным видам и классам изделий, уточняют общий порядок использования проектных норм надежности. Так, общее требование устойчивости аппаратуры изделия к любому одному отказу составных частей может уточняться для различных классов изделий с указанием допустимых последствий отказов нерезервированных блоков.

Кроме классификации по объектам применения норм, возможна классификация проектных норм надежности по характеристикам результативности.

Разные требования и мероприятия по обеспечению и контролю надежности отличаются по реализуемости, наблюдаемости результата выполнения нормы на одном образце или всей совокупности экземпляров объекта применения нормы. В первую очередь следует различать групповые и индивидуальные показатели и требования.

Далее различают вероятностные и детерминированные показатели и требования. Первые измеримы лишь в статистическом смысле, т. е. на некоторой статистической совокупности, вторые измеримы на каждом образце.

Одновременное использование этих признаков классификации позволяет выделить следующие классы норм:

групповые вероятностные показатели и требования, контролируемые на основных стадиях создания совокупностью операций, включающих оценку показателей надежности, статистиче-

ский контроль на всей генеральной совокупности по результатам отработочных и производственных испытаний и эксплуатации;

индивидуальные вероятностные показатели и требования, контролируемые (оцениваемые) на условной статистической совокупности с учетом измерений параметров состояния и запасов работоспособности на конкретном образце;

групповые детерминированные показатели и требования, контролируемые на каждом образце совокупности поставляемых изделий, обеспечивающие заданный уровень гарантий для всей совокупности изделий;

индивидуальные детерминированные показатели и требования, контролируемые (оцениваемые) на каждом образце, обеспечивающие заданный уровень гарантий на этом конкретном образце.

Типовая структура проектных норм надежности. Для обеспечения единообразного подхода к формированию ПН используют типовую структуру нормативно-технических документов (НТД), излагающих проектные нормы надежности. Обычно НТД по конкретному классу изделий состоят из четырех разделов:

- проектные решения;
- количественные требования;
- качественные требования;
- источники отказов.

Основным назначением раздела «Проектные решения» является увязка процесса обоснования проектных решений с процессом задания требований и проектного анализа надежности. В этом разделе уточняют состав, последовательность и взаимосвязь основных проектных решений, связанных с надежностью. Для каждого из решений нормируются методы и (или) алгоритмы обоснования, либо единые требования по выходным параметрам проектных решений.

Выходные параметры проектных решений — параметры, вносимые в конструкторскую документацию, включая технические условия и инструкции по эксплуатации изделия, а также технические задания на разработку составных частей проектируемого изделия. Их минимальный состав: проект-

ные параметры изделия, параметры назначения и условия эксплуатации составных частей проектируемого изделия. Для каждого из решений разрабатывают алгоритм обоснования решений во всем диапазоне входных параметров.

Назначением раздела «Количественные требования» является комплексное изложение количественных требований по надежности изделия, увязка их с требованиями по надежности составных частей.

Выходными параметрами раздела являются количественные требования по надежности составных частей изделия.

Последовательность решений по нормированию и контролю надежности проверяют на совместимость с последовательностью проектных решений (установленной первым разделом); значения параметров, являющихся входами решений по нормированию надежности, должны быть определены к моменту их использования в результате принятия предыдущих проектных решений.

Назначением раздела «Качественные требования» является комплексное изложение организационно-технических требований по обеспечению и контролю надежности изделия, увязка состава и содержания программных документов по обеспечению надежности с заданными требованиями.

Выходными параметрами раздела являются типовая структура и содержание программных документов по обеспечению надежности. Основу содержания третьего раздела составляет методика обоснования программы обеспечения надежности рассматриваемого класса изделий на основе анализа типовых отказов и прогнозирования эффективности мер и средств обеспечения надежности. Методика должна удовлетворять следующим требованиям:

давать количественную оценку (прогноз) полноты и достаточности предусмотренных мер и средств обеспечения и контроля надежности для выполнения требований второго раздела ПНН; предусматривать обоснование рациональности (оптимальности) ПНН по критерию минимума расходования ресурсов;

обеспечивать учет критичных элементов, особо ответственных операций изготовления, контроля.

Назначением раздела «Источники отказов» является комплексное изложение требований по устойчивости изделия к отказам составных частей (элементов), а также обеспечение исходной информацией методик обоснования решений, принимаемых в соответствии с требованиями первых трех разделов ПНН.

Информационная часть раздела содержит типовые перечни потенциальных источников отказов изделия (составных частей), составленные на основе данных эксплуатации изделий-аналогов и экспертного анализа новых конструкторских, технологических и эксплуатационных решений, по которым отсутствует достаточная информация.

Выходные параметры раздела — допустимые уровни вероятностей (интенсивностей) или другие характеристики возможности возникновения и последствий отказов каждого из заданных типов.

Задача практического формирования ПНН. Научный аспект задачи создания ПНН заключается в необходимости проведения фундаментальных и прикладных теоретических исследований в фазе «постановки задачи», собственно «формирования ПНН», сопровождения и совершенствования ПНН.

В фазе «постановки задачи» необходимо провести исследование отраслевой системы обеспечения надежности (или комплексной системы управления качеством продукции) для изыскания путей повышения ее эффективности. Актуальность задачи создания ПНН, как задачи повышения обоснованности проектных решений, может быть показана на основе прогноза возможного экономического эффекта от ее решения. Для этого априори необходимо промоделировать весь процесс формирования ПНН и оценить его последствия. Отправной точкой такого исследования является определение перечня проектных решений, связанных с надежностью, т. е. решений, на которые будут распространяться вновь создаваемые нормы.

Обычно к таким проектным решениям относят:

1) введение всех видов избыточности, включая резервирование, запасы работоспособности, ресурса;

2) определение системы эксплуатации изделия, включая порядок хранения, контроля, обслуживания, ремонта и т. п.;

3) определение системы производственного контроля, включая выходной, пооперационный, приемосдаточные испытания;

4) выбор планов экспериментальных работ и испытаний опытных образцов.

Каждое из этих решений может существенно повлиять на конструкцию изделия, массу, объем, энерговыделение, энергопотребление и т. д. Выбор схемно-конструкторских решений часто определяет напряженность конструкций, защищенность от внешних воздействующих факторов, от ошибок при изготовлении, эксплуатации, критичность к отказам комплектующих изделий.

Задача состоит в прогнозировании возможного положительного эффекта от упорядочения и рационализации процесса обоснования проектных решений.

В фазе «формирование ПНН» исследования заключаются в разработке конкретных методик, алгоритмов и моделей обобщения опыта разработки и эксплуатации изделий, оценивания и прогнозирования надежности, обоснования конкретных проектных решений. Существенным при этом является использование в качестве общей методологии исследования общей схемы и принципов обоснования решений в условиях неопределенности.

В фазе сопровождения и совершенствования ПНН необходимые исследования связаны с накоплением опыта применения норм, уточнением исходных данных, используемых при проектировании техники, пополнением арсенала методов и алгоритмов обоснования проектных решений.

Технический аспект задачи создания ПНН заключается в необходимости переработки больших массивов информации, автоматизации процесса проектирования и моделирования про-

цессов создания и применения проектируемых изделий

Организационный аспект задачи создания ПНН заключается в необходимости привлечения к задаче формирования норм коллективов ученых, проектантов, конструкторов, технологов, испытателей.

4. АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ ОТКАЗОВ

Анализом возможных отказов изделия или его элементов называют оценку влияния возможных отказов элементов следующего уровня структуры на выходные характеристики исследуемого изделия и определение перечня его возможных отказов. Возможным отказом изделия называют состояние, в которое может перейти изделие за время эксплуатации при возникновении отказов входящих в него элементов следующего уровня структуры. Совокупность возможных отказов называют перечнем возможных отказов.

Анализ возможных отказов проводят с целью определения последствий отдельных видов отказов, времени их возникновения, выбора методов обнаружения, оценки вероятности возникновения, выявления возможных причин их возникновения и разработки предупредительных, контрольных и защитных мероприятий по обеспечению надежности [2].

В зависимости от стадии создания изделия и глубины его конструкторской проработки анализ возможных отказов проводят с использованием различных источников информации. На ранних этапах проектирования для проектного анализа возможных отказов используют данные ТЗ на разработку изделия, проектные проработки структуры, конструкции и схемы эксплуатации изделия, опыт создания и эксплуатации изделий-аналогов. На завершающих этапах создания изделия при проведении поверочного анализа возможных отказов используют дополнительно принципиальные схемы, циклограммы функционирования, конструкторскую документацию, результаты статистической обработки из-

мерений выходных параметров при испытаниях.

Анализ возможных отказов предусматривает следующие этапы:

анализ процесса эксплуатации изделия и составление перечня периодов эксплуатации;

составление перечня возможных отказов для каждого периода эксплуатации;

определение возможных причин и последствий отказов, возможности их обнаружения и устранения (или уменьшения степени опасности), а также оценка вероятностных и временных характеристик каждого вида отказов из перечня возможных отказов;

анализ критичности отказов и ранжирование отказов по важности.

Анализ возможных отказов должен удовлетворять следующим требованиям, выполнение которых в значительной мере повышает качество проводимых исследований:

проводиться с достаточной степенью полноты и детализации;

учитывать физическую природу процессов, протекающих в изделии;

учитывать взаимовлияние отказов, различные режимы работы элементов изделия, возможные отказы межсистемных связей (соединений);

обеспечивать согласованность параметров элементов изделий.

Анализ процесса эксплуатации изделия позволяет получить необходимые сведения для выявления возможных отказов. Его проводят в следующем порядке:

определяют назначение изделия, особенности его эксплуатации и перечень выполняемых задач;

выделяют основные, обеспечивающие и вспомогательные функции изделия. К основным относят функции, определяющие целевое назначение изделия, указанное в ТЗ. Обеспечивающими являются функции, выполнение которых необходимо для выполнения основных функций. К вспомогательным относят функции, которые не оказывают непосредственного влияния на выполнение целевых задач, но отсутствие которых может осложнить их решение;

для каждой выделенной функции определяют взаимно однозначные груп-

пы статистически независимых выходных параметров, номинальные и предельно допустимые значения каждого параметра;

определяют виды элементов изделия, их функциональные особенности и характер взаимодействия при эксплуатации, наличие резервных элементов, выявляют элементы, не имеющие аналогов;

определяют особенности эксплуатации изделия (основные и резервные режимы эксплуатации, возможности работы с измененными выходными параметрами и т. д.);

определяют продолжительность каждого периода эксплуатации.

Составление перечня возможных отказов. Перечень возможных отказов должен обладать достаточной полнотой, определяемой наличием наиболее вероятных и критичных (приводящих к наиболее тяжелым последствиям) отказов, но не может быть избыточным из-за включения в него зависимых отказов. Отказы, возникающие по одной и той же причине, могут быть объединены.

Общее число возможных отказов в перечне складывается из общего числа всех выделенных условных независимых параметров по каждой функции изделия с учетом возможного числа нарушений предельно допустимых значений по каждому параметру. При составлении перечня анализируют также ограничения на условия применения изделия, нарушения которых рассматривают как возможные отказы. Далее уточняют перечень при проведении анализа причин, оценке вероятностей возникновения, возможностей обнаружения отказов и их последствий. Перечни возможных отказов и их причин оформляют в виде таблиц.

Определение причин возникновения отказов. Причины каждого из возможных отказов определяют двумя дополняющими друг друга методами анализа: методом структурных схем надежности (метод «снизу вверх») и методом «дерева отказов» (метод «сверху вниз»).

Метод структурных схем надежности заключается в последовательном преобразовании па-

раллельных и последовательных участков структурной схемы надежности эквивалентными блоками до сведения ее к одному блоку. Основной принцип метода заключается в последовательной постановке вопроса: к какому событию в процессе работы изделия (его элементов) приводит отказ элемента следующего уровня структуры, т. е. в осуществлении анализа «снизу вверх».

Анализ проводят следующим образом. Составляют перечни возможных состояний элементов (начиная с электрорадиоэлементов, механических элементов, приборов, агрегатов и т. д., число возможных состояний которых невелико). Далее для элементов более высокого уровня структуры или для изделия в целом определяют вектор основных технических параметров и значения этого вектора для каждого из возможных (рассматриваемых) состояний элементов более низкого уровня структуры.

Метод «дерева отказов» заключается в построении и анализе модели надежности, представляющей собой логико-вероятностную модель причинно-следственных связей отказов изделия с отказами его элементов и другими событиями (воздействиями). Основной принцип построения «дерева отказов» заключается в последовательной постановке вопроса: по каким причинам может произойти отказ изделия, т. е. в осуществлении анализа «сверху вниз».

Структурными элементами «дерева отказов» являются события, связанные между собой логическими операторами («и», «или», «не» и др.).

При использовании «дерева отказов» применяют следующие основные понятия:

результатирующее событие — нежелательное событие (конкретный вид отказа изделия из перечня возможных отказов), анализ которого проводится;

промежуточное событие — сложное событие с логическим оператором, являющееся одной из возможных причин результирующего события. Его выявляют в ходе анализа причин результирующего события и подвергают дальнейшему анализу;

базовое событие — простое событие, означающее первичный отказ, которое

далее не анализируется в связи с наличием достаточного числа данных;

неполное событие — недостаточно детально разработанное событие, которое далее не анализируется из-за невозможности или отсутствия необходимости проведения его анализа;

логический оператор «и» (схема совпадения), означающий наличие события на выходе только при наличии событий на всех входах;

логический оператор «или» (схема объединения), означающий наличие события на выходе при наличии хотя бы одного события на его входе.

Соответственно каждому виду события и оператора присваиваются символы, которые используются для графического построения «дерева отказов».

Исходными данными при построении «дерева отказов» являются перечни возможных видов отказов и их причин, нерасчетные значения внешних воздействующих факторов и др.

Методом «дерева отказов» проводится качественный и количественный анализ отказов. В результате *качественного анализа* определяют виды и причины отказов, степень защищенности изделия от конкретных видов отказов, причины возникновения двух и более видов отказов, проводят ранжирование причин отказов по важности (по влиянию на возникновение отказа изделия).

Количественный анализ отказов изделий и их причин методом «дерева отказов» заключается в определении вероятностных характеристик отказов изделия (результатирующего события) по вероятностным характеристикам базовых и неполных событий.

По результатам количественного анализа могут быть проведены корректирование перечня возможных отказов и ранжирование причин отказов изделий. В перечень вводятся критические виды отказов, которые имеют наибольшую вероятность появления, а также отказы, анализ которых затруднен.

Анализ возможностей обнаружения отказов проводят в следующем порядке:

определяют характерные признаки отказа или его симптомы;

оценивают минимальное время изменения выходного параметра от номинального значения до предельно допустимого;

определяют контролируемые параметры для системы контроля и прогнозирования технического состояния;

подразделяют отказы на внезапные и постепенные в зависимости от возможности их прогнозирования.

В заключение проводят общий анализ уровня критичности отказов. Он представляет собой окончательное ранжирование отказов по уровню критичности. Отказ считают по сравнению с другими более критичным, если его предпочтительнее рассматривать в первую очередь при разработке мер по обеспечению надежности. При сравнительной оценке критичности отказов учитывают последствия отказа, вероятность возникновения, время развития, возможность обнаружения и локализации и др.

Результаты анализа возможных отказов целесообразно оформлять в виде таблиц.

Анализ возможных отказов является весьма эффективным инструментом для разработки мероприятий по обеспечению надежности сложных систем, особенно в тех случаях, когда в их составе имеется много новых элементов.

5. ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ И ИЗДЕЛИЙ

Невосстанавливаемые системы. Для невосстанавливаемых систем и элементов (изделий), работающих до первого отказа, на этапе проектирования обычно используются (прогнозируются) показатели безотказности и прежде всего «вероятность безотказной работы». Конкретное численное значение этого показателя в большинстве случаев имеет определенный смысл лишь тогда, когда оно поставлено в соответствие заданной наработке, в течение которой возможно возникновение отказа. При этом вероятность безотказной работы определяется в предположении, что в начальный момент времени исчисления заданной наработки изделие было работоспособным.

Далее для краткости системы и их элементы будем называть изделиями.

Ниже приведены две формы показателей надежности — вероятностная и статистическая [5]. Вероятностную форму удобнее использовать при задании требований и исследованиях надежности системы и изделий на ранних стадиях проектирования. Статистическая форма удобнее для оценки результатов испытаний изделий, проводимых в процессе проектно-конструкторской разработки на стадиях эскизного проекта, технических предложений, автономных и комплексных испытаний. При увеличении числа испытаний статистические показатели надежности сходятся по вероятности к соответствующим вероятностным показателям. В некоторых случаях разработки сложных и весьма ответственных систем и изделий заказчик имеет право задавать в ТЗ не только конечные уровни вероятностных показателей надежности, но и промежуточные уровни надежности в виде статистических показателей, которые следует подтвердить на определенных промежуточных стадиях разработки изделий, например, перед началом комплексных испытаний или государственных испытаний.

Вероятность безотказной работы изделия в интервале времени от 0 до t_0 : при вероятностной оценке

$$P(t_0) = P(0; t_0) = P\{\xi_1 \geq t_0\} = 1 - F_1(t_0),$$

где $P(t_0)$ — вероятность того, что изделие, начав работать в момент времени $t = 0$, не откажет в течение заданного времени работы t_0 , или вероятность того, что наработка изделия до отказа будет больше заданного времени работы t_0 ; $F_1(t_0)$ — распределение времени до первого отказа; ξ_1 — случайная наработка изделия до первого отказа;

при статистической оценке

$$\hat{P}(t_0) = N(t_0)/N(0) = 1 - n(t_0)/N(0),$$

где $\hat{P}(t_0)$ — отношение числа изделий, безотказно проработавших к моменту t_0 , к числу изделий, работоспособных в начальный момент времени $t = 0$, или частота события, заключающегося в том, что время работы изделия до отказа окажется больше заданного

времени работы t_0 ; $N(t_0)$ — число изделий, работоспособных к моменту времени t_0 ; $n(t_0)$ — число изделий, отказавших к моменту времени t_0 .

В случаях, когда изделие выполняет задачу, имеющую случайную длительность, характеризующуюся своей функцией распределения $W(t) = P\{\xi \leq t\}$, выражение полной вероятности безотказной работы изделия за время выполнения задачи имеет вид

$$P_0 = \int_0^{\infty} P(t) dW(t).$$

Вероятность отказа изделия в интервале времени от 0 до t_0 : $Q(t_0) = 1 - P(t_0)$ и $\widehat{Q}(t_0) = 1 - \widehat{P}(t_0)$.

Вероятность безотказной работы изделия в интервале времени от t до $t + t_0$:

при вероятностной оценке

$$\begin{aligned} P(t, t + t_0) &= P\{\xi_1 > t + t_0 \mid \xi_1 > t\} = \\ &= P(0, t, t + t_0) / P(0, t) = \\ &= P(t + t_0) / P(t), \end{aligned}$$

где $P(t, t + t_0)$ — вероятность того, что изделие будет безотказно работать в течение заданного времени работы t_0 , начинающегося с момента времени t , или условная вероятность того, что случайная наработка изделия до отказа будет больше величины $t + t_0$ при условии, что изделие уже проработало безотказно до момента времени t_0 ;

при статистической оценке

$$\widehat{P}(t, t + t_0) = N(t + t_0) / N(t),$$

где $\widehat{P}(t, t + t_0)$ — отношение числа изделий, проработавших безотказно до момента времени $t + t_0$, к числу изделий, проработавших к моменту времени t , или частота события, состоящего в том, что реализация наработки изделия до отказа будет больше $t + t_0$ при условии, что эта реализация больше величины t .

Вероятность отказа изделия в интервале времени от t до $t + t_0$ определяется через вероятность безотказной работы

$$\begin{aligned} Q(t, t + t_0) &= 1 - P(t, t + t_0) = \\ &= [P(t) - P(t + t_0)] / P(t). \end{aligned}$$

Плотность распределения отказов: при вероятностной оценке

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} Q(t) = \\ &= -\frac{d}{dt} P(t), \end{aligned}$$

где $f(t)$ — плотность вероятности того, что время работы изделия до отказа окажется меньше t , или плотность вероятности отказа к моменту времени t ;

при статистической оценке

$$\begin{aligned} \widehat{f}(t) &= \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{N(0) \Delta t} = \\ &= \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(0) \Delta t} = \\ &= \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N(0) \Delta t}, \end{aligned}$$

где $\widehat{f}(t)$ — отношение числа отказов в интервале времени $[t, t + \Delta t]$ к произведению числа работоспособных изделий в начальный момент времени $t = 0$ на длительность интервала времени Δt ; $\Delta n(t, t + \Delta t)$ — число изделий, отказавших в интервале времени $[t, t + \Delta t]$.

Интенсивность отказов изделия в момент времени t :

при вероятностной оценке

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{1}{1 - F(t)} \frac{d}{dt} F(t) = \\ &= f(t) / P(t), \end{aligned}$$

где $\lambda(t)$ — условная плотность вероятности отказа изделия к моменту времени t при условии, что до этого момента отказ изделия не произошел; при статистической оценке

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}(t) &= \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{N(t) \Delta t} = \\ &= \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t) \Delta t} = \\ &= \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N(t) \Delta t}, \end{aligned}$$

где $\widehat{\lambda}(t)$ — отношение числа отказов в интервале времени $[t, t + \Delta t]$ к про-

изведению числа исправных изделий в момент времени t на длительность интервала времени Δt .

Средняя наработка изделия до отказа:

при вероятностной оценке

$$T_1 = M \{ \xi_1 \} = \int_0^{\infty} x f(x) dx =$$

$$= \int_0^{\infty} x dQ(x) = \int_0^{\infty} P(x) dx,$$

где T_1 — математическое ожидание (среднее значение) времени работы изделия до отказа;

при статистической оценке

$$\hat{T}_1 = \frac{1}{N(0)} (\xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)} + \dots$$

$$+ \dots + \xi_1^{[N(0)]}) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} \xi_1^{(i)}$$

или

$$\hat{T}_1 = \xi_1^{(1)} + \frac{N(0) - 1}{N(0)} [\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}] +$$

$$+ \dots + \frac{1}{N(0)} [\xi_1^{[N(0)]} - \xi_1^{[N(0)-1]}],$$

где ξ_1^i — реализация случайной наработки ξ_1 для i -го изделия.

Дисперсия времени безотказной работы изделия

$$D \{ \xi_1 \} = M \{ \xi_1 - T_1 \} = \sigma^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} (x - T)^2 dF(x) =$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 dF(x) - T^2.$$

Величина $\sigma = \sqrt{D \{ \xi_1 \}}$ — среднее квадратическое отклонение времени работы изделия до отказа от своего среднего T_1 .

Знание одной любой функции $P(t_0)$, $Q(t_0)$, $f(t)$ или $\lambda(t)$ дает возможность определить три остальные. Необходимые для этого функциональные связи представлены в табл. 1.

1. Функциональные связи между показателями надежности

Показатели надежности	Вероятность отказа $Q(t)$	Вероятность безотказной работы $P(t)$	Плотность распределения $f(t)$	Интенсивность отказов $\lambda(t)$
$Q(t)$	$Q(t)$	$1 - Q(t)$	$\int_0^t f(x) dx$	$1 - \exp \left[- \int_0^t \lambda(x) dx \right]$
$P(t)$	$1 - Q(t)$	$P(t)$	$\int_t^{\infty} f(x) dx$	$\exp \left[- \int_0^t \lambda(x) dx \right]$
$f(t)$	$\frac{d}{dt} Q(t)$	$-\frac{d}{dt} P(t)$	$f(t)$	$\lambda(t) \exp \left[- \int_0^t \lambda(x) dx \right]$
$\lambda(t)$	$\frac{\frac{d}{dt} Q(t)}{1 - Q(t)}$	$-\frac{d}{dt} [\ln P(t)]$	$\frac{f(t)}{\int_t^{\infty} f(x) dx}$	$\lambda(t)$

Восстанавливаемые системы. Все показатели надежности, приведенные для невозстанавливаемых изделий, могут использоваться и для восстанавливаемых изделий при исследовании надежности изделия до первого отказа. Однако восстанавливаемые изделия характеризуются еще рядом дополнительных показателей надежности [5].

Введем обозначения, необходимые для восстанавливаемых систем: $g(t)$ — плотность распределения $G(t)$; $G(t) = P\{\eta \leq t\}$ — распределение времени восстановления; $n(t, t')$ — число изделий, неработоспособных в момент t или отказавших хотя бы один раз в интервале $[t, t']$; $n_B(t)$ — число изделий, восстановление которых длилось меньше t ; $N(t, t')$ — число изделий, работоспособных в момент t и отказавших до t' ; $N_B(t)$ — число изделий, восстановление которых длилось больше t ; t_∞ — произвольный, достаточно удаленный момент времени, соответствующий стационарному режиму случайного процесса; $\Delta n_B(t, t')$ — число изделий, восстановление которых длилось больше t , но меньше t' ; ξ_k — случайное время работы (случайная наработка) изделия перед k -м отказом после $(k-1)$ -го восстановления; $\xi_k^{(i)}$ — реализация ξ_k для i -го изделия; η_k — случайное время восстановления (простоя) изделия после k -го отказа; $\eta_k^{(i)}$ — i -я реализация времени восстановления.

Средняя наработка между отказами: при вероятностной оценке

$$T = T_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} M(T_k) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k T_j,$$

где T — математическое ожидание предельного значения наработки между отказами для стационарного процесса; T_k — средняя наработка изделия от момента окончания $(k-1)$ -го восстановления до k -го отказа,

$$T_k = M\{\xi_k\} = \int_0^\infty t f_k(t) dt =$$

$$= \int_0^\infty t dQ(t) = \int_0^\infty P_k(t) dt,$$

т. е. T_k — математическое ожидание (среднее значение) наработки изделия от момента окончания $(k-1)$ -го отказа;

при статистической оценке

$$\widehat{T}_k = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} \{|\theta_k^{(i)}| \mid k \gg 1\},$$

где \widehat{T}_k — среднее арифметическое реализаций времени работы до k -го отказа при достаточно большом k .

Для \widehat{T}_k при произвольном фиксированном k справедливо следующее статистическое определение:

$$\widehat{T}_k = \frac{1}{N(0)} (\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)} + \dots + \xi_k^{[N(0)]}) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} \xi_k^{(i)}$$

или

$$\begin{aligned} \widehat{T}_k &= \xi_k^{(1)} + \frac{N(0) - 1}{N(0)} [\xi_k^{(2)} - \xi_k^{(1)}] + \\ &+ \dots + \frac{1}{N(0)} [\xi_k^{[N(0)]} - \\ &- \xi_k^{[N(0)-1]}] = \\ &= \sum_{i=1}^{N(0)} \frac{N(0) - i + 1}{N(0)} [\xi_k^{(i)} - \xi_k^{(i-1)}], \end{aligned}$$

где принято, что $\xi_k^{(1)} \leq \xi_k^{(2)} \leq \dots \leq \xi_k^{[N(0)]}$, причем $\xi_k^{(0)} = 0$.

В этом выражении $N(0)$ — общее число изделий, начавших работать после $(k-1)$ -го восстановления; $\xi_k^{(i)}$ — реализация времени работы после $(k-1)$ -го восстановления до k -го отказа для i -го изделия (в порядке поступления отказов); \widehat{T}_k — среднее арифметическое реализаций наработки изделий от момента окончания $(k-1)$ -го восстановления до k -го отказа.

Параметр потока отказов:

при вероятностной оценке (для стационарного ординарного потока отказов) $\lambda = 1/T$, где λ — математическое ожидание числа отказов восстанавливаемого изделия в единицу времени для установившегося процесса эксплуатации;

при статистической оценке $\hat{\lambda} = 1/\hat{T}$, где $\hat{\lambda}$ — среднее число отказов восстанавливаемого изделия в единицу времени.

Средняя наработка на отказ:

при вероятностной оценке

$$T(t_0) = \frac{t_0}{M\{n(t_0)\}},$$

где $T(t_0)$ — отношение суммарной наработки t_0 за заданный период времени к математическому ожиданию числа отказов за это время;

статистическое определение

$$\begin{aligned} \hat{T}(t_0) &= \frac{t_0}{n(t_0)} = \\ &= \frac{1}{n(t_0)} \left[\sum_{k=1}^{n(t_0)} \hat{T}_k + \zeta \right], \end{aligned}$$

где $\hat{T}(t_0)$ — отношение суммарной наработки t_0 за время наблюдения за изделием к наблюдаемому числу отказов за это же время, где ζ — наработка изделия от момента устранения последнего отказа до окончания наблюдения за изделием.

Среднее время восстановления изделия:

при вероятностной оценке

$$\begin{aligned} \tau &= M\{\eta\} = \int_0^{\infty} tg(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} t dG(t) = \int_0^{\infty} [t - G(t)] dt, \end{aligned}$$

где τ — математическое ожидание (среднее значение) времени восстановления изделия;

при статистической оценке

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \frac{1}{N(0)} (\eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \\ &\dots + \eta^{[N(0)]}) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} \eta^{(i)} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \eta^{(1)} + \frac{N(0) - 1}{N(0)} [\eta^{(2)} - \eta^{(1)}] + \\ &+ \dots + \frac{1}{N(0)} [\eta^{[N(0)]} - \\ &- \eta^{[N(0)-1]}] = \\ &= \sum_{i=1}^{N(0)} \frac{N(0) - i + 1}{N(0)} \times \\ &\times [\eta^{(i)} - \eta^{(i-1)}], \end{aligned}$$

где принято, что $\eta^{(1)} \leq \eta^{(2)} \leq \dots \leq \eta^{[N(0)]}$, причем $\eta^{(0)} = 0$; $\hat{\tau}$ — среднееарифметическое реализаций времени восстановления.

Интенсивность восстановления изделия в момент времени t , отсчитываемого с момента начала восстановления:

при вероятностной оценке

$$\mu(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)},$$

где $\mu(t)$ — условная плотность вероятности восстановления изделия в момент времени t , отсчитываемого с момента начала восстановления, при условии, что до момента времени t восстановления изделия не произошло;

при статистической оценке

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(t) &= \frac{n_B(t + \Delta t) - n_B(t)}{N_B(t) \Delta t} = \\ &= \frac{N_B(t + \Delta t) - N_B(t)}{N_B(t) \Delta t} = \\ &= \frac{\Delta n_B(t, t + \Delta t)}{N_B(t) \Delta t}, \end{aligned}$$

где $\hat{\mu}(t)$ — отношение числа восстановлений в интервале времени $[t, t + \Delta t]$ к произведению числа изделий, еще не восстановленных к моменту t , на длительность интервала времени Δt .

Нестационарный коэффициент оперативной готовности:

при вероятностной оценке

$$\begin{aligned} R(t, t + t_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} P \left\{ \sum_{i=0}^k (\xi_i + \eta_i) < \right. \\ &< t < t + t_0 \leq \xi_{k+1} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=0}^k (\xi_i + \eta_i) \Big\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P \{ [t, t + t_0] \in \theta_k \},$$

где $R(t, t + t_0)$ — вероятность того, что изделие окажется работоспособным в момент t и проработает безотказно в течение заданного времени t_0 , начиная с этого момента, или вероятность того, что интервал времени $[t, t + t_0]$ целиком попадает внутрь одного из интервалов θ_k , $k = 1, 2, \dots$;

при статистической оценке

$$\widehat{R}(t, t + t_0) = \frac{N(0) - n(t, t + t_0)}{N(0)} =$$

$$= \frac{N(t, t + t_0)}{N(0)},$$

где $\widehat{R}(t, t + t_0)$ — отношение числа изделий, работоспособных в момент времени t и проработавших безотказно до момента времени $t + t_0$, к общему числу изделий, работоспособных в момент t .

Стационарный коэффициент оперативной готовности (или коэффициент оперативной готовности):

при вероятностной оценке

$$R(t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t, t + t_0),$$

где $R(t_0)$ — вероятность того, что изделие проработает безотказно в течение заданного времени t_0 , начиная с произвольного достаточно удаленного времени t .

Для любых распределений наработки между отказами T и времени восстановления τ

$$R(t_0) = \frac{1}{T + \tau} \int_{t_0}^{\infty} P_{\infty}(t) dt,$$

где $P_{\infty}(t) = 1 - F_{\infty}(t)$, $F_{\infty}(t)$ — функция распределения наработки между отказами;

при статистической оценке

$$\widehat{R}(t_0) = \frac{N(t_{\infty}, t_{\infty} + t)}{N(0)},$$

где $\widehat{R}(t_0)$ — отношение числа изделий, исправных в произвольный достаточно удаленный момент времени и про-

работавших затем в течение заданного времени t_0 , к общему числу изделий.

Нестационарный коэффициент готовности изделия:

при вероятностной оценке

$$K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} P \left\{ \sum_{k=0}^i (\xi_k + \eta_k) < t < \right.$$

$$\left. < \sum_{k=0}^i (\xi_k + \eta_k) + \xi_{i+1} \right\}$$

или $K(t) = R(t, t_0 = 0)$,

где $K(t)$ — вероятность того, что в момент времени t изделие находится в работоспособном состоянии (при известных начальных условиях в момент $t = 0$);

при статистической оценке

$$\widehat{K}(t) = N(t)/N(0) = 1 - \frac{n(t)}{N(0)},$$

где $\widehat{K}(t)$ — отношение числа изделий, находящихся в работоспособном состоянии в момент t , к общему числу объектов.

Нестационарный коэффициент готовности изделия:

при вероятностной оценке

$$K^*(t) = \frac{1}{t} \int_0^t K(x) dx,$$

где $K^*(t)$ — математическое ожидание отношения времени, в течение которого изделие находится в работоспособном состоянии в интервале $[0, t]$, ко всей длительности этого интервала;

при статистической оценке

$$\widehat{K}^*(t) = \frac{1}{tN(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} \sum_k (\xi_k^{(i)}/\xi_k^{(i)}) \in$$

$$\in [0, t] = \frac{1}{tN(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} s_i(t),$$

где $s_i(t)$ — суммарная наработка i -го изделия за время t , т. е. $K^*(t)$ — среднее арифметическое суммарных наработок изделий за время t .

Стационарный коэффициент готовности (или коэффициент готовности):

при вероятностной оценке

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K^*(t) \text{ или } K = R(t_0 = 0),$$

где K — вероятность нахождения изделия в работоспособном состоянии для стационарного случайного процесса или математическое ожидание отношения времени (для стационарного случайного процесса), в течение которого изделие находится в работоспособном состоянии в некотором интервале, ко всей длительности этого интервала.

Для любых распределений наработки между отказами и времени восстановления, имеющих конечные средние значения соответственно T_{∞} и τ , справедливо выражение

$$K = T_{\infty} / (T_{\infty} + \tau);$$

при статистической оценке

$$\hat{K} = N(t_{\infty}) / N(0) = 1 - n(t_{\infty}) / N(0),$$

где \hat{K} — отношение числа изделий, находящихся в работоспособном состоянии в произвольный достаточно удаленный момент времени, к общему числу изделий.

Нестационарный коэффициент простоя изделия

$$k(t) = 1 - K(t) \text{ и } \hat{k}(t) = 1 - \hat{K}(t).$$

Коэффициент простоя изделия k является дополнительным для коэффициента готовности

$$k = 1 - K \text{ и } \hat{k} = n(t_{\infty}) / N(0).$$

Наряду с перечисленными показателями надежности для восстанавливаемых сложных систем используют специальные показатели надежности, отражающие особенности их функционирования или особенности выполнения задачи [5].

Общие рекомендации по выбору показателей надежности при задании требований. Номенклатуру показателей надежности изделий выбирают в зависимости от класса изделий, режимов его эксплуатации, характера отказов и их последствий, а также принципа ограничения длительности использования.

Все изделия подразделяются на следующие:

1 — неремонтируемые и невосстанавливаемые изделия общего назначения, составные части изделий, невосстанавливаемые на месте эксплуатации и не подлежащие ремонту (подшипники качения, крепежные детали, конденсаторы, электродвигатели малой мощности и др.), а также невосстанавливаемые изделия самостоятельного функционального назначения, например, электрические лампы, контрольные приборы и др.;

2 — восстанавливаемые изделия, не подвергающиеся капитальному ремонту (изделия, которые подвергаются плановым операциям технического обслуживания, текущего или среднего ремонта). К этому классу относят также изделия, подлежащие обезличенному капитальному ремонту, и изделия, ресурс которых полностью восстанавливается после капитального ремонта;

3 — восстанавливаемые изделия, ресурс которых частично восстанавливается при капитальном ремонте;

4 — изделия, предназначенные для выполнения кратковременных (разовых или периодических) заданий. К этой группе относят изделия, выполнение задания которыми обеспечивается готовностью изделия в момент начала использования.

При выборе того или иного показателя надежности для изделия должен быть выбран характерный временной режим эксплуатации, определяющийся чередованием периодов ожидания, при которых по условиям эксплуатации изделие не функционирует, но оно готово к немедленному приведению в действие, и периодов действия (периодов функционирования). Режимы эксплуатации:

1 — непрерывный, при котором период действия длится непрерывно;

2 — циклический, при котором периоды действия и простоя чередуются с постоянной циклическостью;

3 — оперативный, когда неопределенный период простоя сменяется периодом действия заданной продолжительности;

4 — общий, при котором периоды действия и простоя чередуются слу-

чайным образом, причем закономерность чередования не может быть установлена по условиям эксплуатации, либо условия эксплуатации различаются для разных экземпляров изделия одного вида.

В зависимости от последствий отказа изделие должно быть отнесено к одной из трех групп надежности. К первой группе надежности относят изделия, отказ которых влечет за собой угрозу безопасности людей или значительный материальный или моральный ущерб. Ко второй группе относят изделия, для которых материальный ущерб от невыполнения задания или от простоя — одного порядка со стоимостью самого изделия. Изделия, для которых в случае отказа материальный ущерб определяется утратой самого изделия или затратами на его восстановление, относят к третьей группе надежности.

Группу надежности изделия устанавливают на стадии технического задания. Для конкретного изделия следует выбирать минимально необходимое число показателей, достаточно полно определяющих его надежность. При этом показатели надежности должны обеспечивать возможность их количественной оценки на этапе разработки; возможность подтверждения их методами испытаний или подконтрольной эксплуатации.

При выборе номенклатуры показателей надежности и их определении необходимо руководствоваться государственными стандартами и отраслевыми нормативно-техническими документами.

6. ВИДЫ ОТКАЗОВ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ НАДЕЖНОСТИ

По причине возникновения отказы делят на конструкционные, производственные и эксплуатационные. Конструкционные отказы связаны либо с ошибками при конструировании, либо с использованием несовершенных методов конструирования. Производственные отказы вызываются ошибками при изготовлении или обусловлены несовершенством технологии. Отказы при эксплуатации происходят

либо вследствие нарушений правил эксплуатации, или из-за внешних воздействий, не свойственных нормальной эксплуатации изделий.

По природе происхождения отказы делят на естественные и искусственные.

По месту проявления различают отказы при испытаниях (при экспериментальной обработке), при работе (в производстве), при нормальной эксплуатации, а также отказы последнего периода эксплуатации.

По характеру проявления отказы делят на случайные и детерминированные (т. е. отказы, вероятность проявления которых сколь угодно близка к единице).

К числу детерминированных отказов относят отказы, связанные с незнанием разработчиком реальных условий эксплуатации или грубыми ошибками, допущенными в конструкторской, технологической или эксплуатационной документации. Эти отказы проявляются на всех изделиях, изготовленных в соответствии с дефектной документацией.

Нормальная эксплуатация системы возможна лишь после устранения причин детерминированных отказов изделий и доработка документации.

По характеру изменения параметра, определяющего надежность изделия до момента отказа, различают внезапные и постепенные отказы.

По связи с другими отказами различают независимые и зависимые отказы.

По возможности последующего использования изделия после возникновения отказов последние подразделяют на полные и частичные.

По характеру устранения отказы делят на устойчивые, самоустраняющиеся, сбои, перемежающиеся. Сбои не нарушают работоспособности изделий, они приводят лишь к кратковременной потере или искажению полезной информации в системе. Перемежающиеся отказы — многократно возникающие самоустраняющиеся отказы одного и того же характера.

По наличию внешних проявлений отказы делят на очевидные и скрытые.

По числу причин отказов элементов изделий различают одну или несколько независимых или зависимых причин.

Для оценки вероятности безотказной работы статистическими методами необходимо большое число испытаний. Однако если известен вид функции надежности с точностью до одного или нескольких неизвестных параметров $P(t) = P(t, \alpha, \beta, \dots)$, то для оценки этих параметров требуется значительно меньший объем испытаний.

Тип функции (или плотности) распределения отказов можно найти двумя путями — статистически, проверив гипотезу о принадлежности распределения данному параметрическому классу, или физически, построив и проверив экспериментально физическую модель отказа.

Наиболее изученными являются следующие схемы отказов.

1. Схема мгновенных повреждений (внезапные отказы). Например, во время движения любого транспортного средства каждый его элемент испытывает нагрузки. Нагрузка имеет характер знакопеременного случайного процесса. Неровности дороги при движении транспортного средства вызывают отдельные пиковые нагрузки.

Предположим, что отказ элемента наступает в том случае, когда нагрузка превышает некоторый допустимый уровень. Вследствие случайного характера изменения нагрузки момент отказа также является случайным и не зависит от состояния элемента, от того, сколько времени до отказа он находился в эксплуатации. Различают схемы внезапных отказов с постоянной, возрастающей и убывающей интенсивностью.

2. Схема накапливающихся изменений (постепенные отказы). Эта схема реализуется, когда в процессе функционирования изделия в его элементах накапливаются изменения (повреждения). Постепенное старение и (или) износ элементов приводят к тому, что их рабочие параметры выходят за установленные допустимые пределы. Постепенно ухудшается качество функционирования всего изделия. Выход за нижний допустимый предел качества функционирования (например, точности, быстродействия, мощности и т. п.) влечет за собой отказ изделия в целом.

3. Схема релаксации. Эта схема наблюдается в тех случаях, когда износ и (или) старение могут явиться косвенной причиной отказа. Если, например, допустимые пределы на параметры элементов не установлены, то постепенное изменение параметров может привести к скачкообразному изменению состояния изделия.

Примеров релаксации достаточно в практике машиностроения, когда вследствие постепенного увеличения зазора в трущихся парах, на который не установлен допустимый предел, наблюдается заклинивание. Отказ резервных элементов электронных систем также приводит иногда к перегрузке основных элементов и к отказу изделия.

4. Схема действия нескольких независимых причин. Перечисленные выше три схемы отказа на практике часто реализуются в сочетании друг с другом. Например, шина автомобиля может отказать как вследствие прокола или дефекта, допущенного при изготовлении, так и вследствие постепенного износа. Многие электро-радиоизделия отказывают и из-за повышенной нагрузки и по причине постепенного старения.

В практике конструирования обычно учитываются доминирующие причины. В тех случаях, когда одновременно действует несколько причин одинакового влияния, их условно заменяют одной эквивалентной или решают задачу защиты от последствий отказов последовательно, с учетом снижения опасности их возникновения.

5. Схема действия нескольких взаимосвязанных (взаимосвязанных) причин. Сколько-нибудь полное описание связей между разнообразными зависимыми причинами отказов в литературе отсутствует. Часто случаи действия взаимосвязанных причин удается привести к случаю действия одной эквивалентной и таким образом упростить задачу исследования.

В общем случае поведение материалов и изделий в процессе работы характеризуется кривой интенсивности отказов или U-образной функцией, имеющей три резко различающихся между собой участка (рис. 2). На отрезке времени от t_0 до t_1 про-

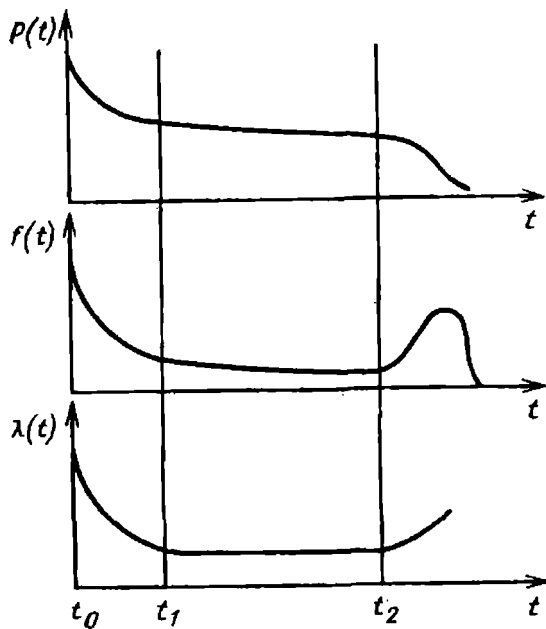


Рис. 2. Типичные формы кривых для основных характеристик надежности элементов и систем:

$P(t)$ — вероятность безотказной работы;
 $f(t)$ — плотность распределения отказов;
 $\lambda(t)$ — интенсивность отказов

являются ранние отказы из-за конструкторских или производственных дефектов. Элементы, содержащие дефекты, отказывают в течение этого периода, называемого периодом приработки.

Тщательный контроль качества исходных материалов и элементов, экспериментальная обработка изделий, специальные контрольные испытания первых образцов и приработочные испытания последующих позволяют значительно уменьшить интенсивность отказов системы в этот период.

Обычно в расчетах надежности изделий этот участок кривой не учитывается, так как он должен быть «пройден» до начала периода нормальной работы, который характеризуется небольшими значениями интенсивности отказов. В период нормальной работы интенсивность отказов близка к постоянной, в некоторых случаях она может убывать (проявляется эффект упрочнения конструкций) или несколько возрастать. На отрезке времени от t_1 до t_2 проявляются отказы, вызванные случайным увеличением внутренних нагрузок в системе или предельно тяжелыми условиями работы

системы. Этих отказов можно избежать, проектируя элементы и изделия в расчете на предельно тяжелые условия работы, однако для большинства случаев такой подход неоправдан и практически нереализуем. Последний участок ($t > t_2$) — это период старения или износа. К этому времени в элементах происходят необратимые физико-химические изменения, они стареют, изнашиваются, их надежность снижается, т. е. интенсивность отказа монотонно возрастает.

В процессе разработки, испытаний и эксплуатации изделий широко применяют их математические модели (законы) надежности, описывающие поведение изделия на различных участках U-образной функции [1, 4]. Для описания надежности непрерывно работающих изделий используются непрерывные законы надежности (табл. 2). Для изделий, работающих в циклическом режиме, используются дискретные законы надежности (см. табл. 3).

Период старения многих элементов (например, электрорадиоизделий) наступает через большой промежуток времени, и весь реальный срок службы элемента укладывается на нормальном периоде, где интенсивность отказа постоянна. В этом случае можно пользоваться экспоненциальным распределением. Часто отказ элемента можно интерпретировать как выход эргодического случайного процесса за допустимый высокий уровень. В теории случайных процессов доказывается, что при некоторых общих условиях момент первого пересечения высокого уровня будет иметь асимптотически экспоненциальное распределение. Экспоненциальное распределение (см. табл. 2) используют для расчета надежности радиоэлектронной аппаратуры, подверженной вибрациям. В случаях длительно функционирующей сложной системы, состоящей из большого числа нестареющих элементов, мгновенно заменяемых при отказе, время от данного произвольно взятого момента функционирования до отказа системы с хорошим приближением описывается экспоненциальным законом распределения. Поэтому экспоненциальный закон широко исполь-

2. Основные непрерывные распределения

Распределение	Область значений	Плотность распределения	Математическое ожидание	Дисперсия	Мода
Равномерное	(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	—
Экспоненциальное	$(0, \infty)$	$\lambda \exp(-\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	—
Нормальное (Гаусса)	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$	a	σ^2	a
Логарифмически нормальное	$(0, \infty)$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\exp\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right)$	$\exp(2a + \sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1]$	$\exp(a) - \sigma^2$
Вейбулла—Гнеденко	$(0, \infty)$	$acx^{a-1} - \exp(-cx^a)$	$\frac{1}{c^{1/a}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{c^{2/a}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{a}\right) \right]$	$\frac{a}{\sqrt{a-1/ca}}$ (при $a > 1$)

Распределение	Область значений	Плотность распределения	Математическое ожидание	Дисперсия	Мода
Гамма-распределение	$(0, \infty)$	$\frac{\beta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-\beta x)$	$\frac{a}{\beta}$	$\frac{a}{\beta^2}$	$\frac{a-1}{\beta}$ (при $a > 1$)
χ^2 -распределение	$(0, \infty)$	$\frac{z^{\frac{k}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{k/2}} \exp\left(-\frac{r}{2}\right)$	k	$2k$	$k-2$
Бета-распределение	$(0, 1)$	$x^{a-1} (1-x)^{b-1}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2 (a+b+1)}$	$\frac{a-1}{a+b-2}$
Стьюдента	$(-\infty, \infty)$	$\left[2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\pi n} \right]^{-1} \times$ $\times \left(1 + \frac{x^2}{2} \right)^{-\frac{n+1}{2}}$	0	$\frac{1}{\frac{n}{2}-2}$	0

зуется в проектных расчетах надежности сложных систем.

Для однородных материалов временное сопротивление, предел текучести и предел выносливости имеют нормальное распределение. Некоторые виды нагрузок также имеют почти нормальное распределение (например, давление газа на головки цилиндров поршневого двигателя, тяга реактивного двигателя и др.). Поэтому нормальное распределение используется для вероятностных расчетов прочности конструкций.

Распределение экстремальных значений используется при изучении отказов вследствие коррозии или усталостных разрушений.

Закон Вейбулла—Гнеденко используется для описания прочности сплавов на основе железа и некоторых свойств цветных металлов.

Сопротивление усталости сплавов цветных металлов в зависимости от способов термической обработки, шероховатости обработанной поверхности и температуры описывается несколькими распределениями (Вейбулла — Гнеденко, экстремальных значений, нормальным, логарифмически нормальным, гамма-распределением).

Гамма-распределение используется на практике, когда отказ изделия вызывается появлением точно k «ударов», каждый из которых возникает согласно экспоненциальному закону с параметром λ . Тогда вероятность безотказной работы изделия равна сумме вероятностей возникновения точно 0, 1, 2, ... или $k - 1$ «ударов».

Гамма-распределением пользуются для описания одновершинных несимметричных распределений, для которых нормальное распределение является плохим приближением.

Частными случаями закона Вейбулла—Гнеденко, когда параметр a равен 1 или 2, являются соответственно экспоненциальное распределение и распределение Рэлея.

Распределения Вейбулла — Гнеденко, гамма-распределение и распределение Рэлея пригодны для описания поведения изнашивающихся или стареющих изделий.

Для расчета надежности восстанавливаемых систем, у которых параметры потока отказов и потока восстановлений суть параметры экспоненциального распределения, используется распределение Эрланга, являющееся частным случаем гамма-распределения, когда параметр a — целое положительное число.

Для логарифмически нормального распределения логарифмы случайных величин — время безотказной работы — имеют нормальное распределение. Интенсивность отказов для логарифмически нормального распределения возрастает во времени после участка убывания, а при малых и больших t стремится к нулю.

Логарифмически нормальное распределение используют для описания процесса возникновения отказов из-за усталостных изломов. Прочностные свойства сплавов часто имеют логарифмически нормальное распределение.

Дискретные распределения (табл. 3) используют в расчетах надежности резервированных изделий или для описания дискретных случайных величин (ударных или циклических нагрузок, кратности испытаний невосстанавливаемых изделий и т. п.).

При исследовании надежности реальных изделий могут встречаться различные комбинации распределений нагрузки и свойств изделий, обуславливающих их надежность. Поэтому при выборе распределения следует учитывать ожидаемую погрешность расчетов.

Смесь распределений. Пусть $N = N_1 + N_2 + \dots + N_k + \dots + N_n$ — множество однотипных элементов, состоящее из k групп элементов ($k = \overline{1, n}$), и $a_k = N_k/N$ — доля k -й группы элементов в N . Элементы каждой группы имеют время безотказной работы, описываемое экспоненциальным распределением с параметром λ_k . Все элементы, изготовленные на разных заводах, поступают на общий склад, где хаотически перемешиваются. Какую функцию надежности имеет взятый наугад элемент?

3. Основные дискретные распределения

Распределение	Возможное значение	Вероятность	Математическое ожидание	Дисперсия
Биномиальное	$0, 1, 2, \dots, n$	$P_m(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$	np	npq
Отрицательное биномиальное	$r, r+1, \dots$	$P_m = C_{m-1}^{r-1} p^r q^{m-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{qr}{p^2}$
Геометрическое	$0, 1, 2, \dots$	$P_m = pq^{m-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Гипергеометрическое	$0, 1, \dots, \min(M, n)$	$P_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	$n \frac{M}{N}$	$\frac{M(N-M)n(N-n)}{N^2(N-1)}$
Пуассона	$0, 1, 2, \dots$	$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda)$	λ	λ

По формуле полных вероятностей

$$P(t) = \sum_{k=1}^n a_k \exp(-\lambda_k t).$$

Такое распределение называют смесью экспоненциальных распределений.

7. ЗАДАНИЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ ПО НАДЕЖНОСТИ

Задание требований по надежности на систему. В случаях создания совершенно новых типов систем, эффект от функционирования которых еще недостаточно известен, задание требований может осуществляться на основе экспертного анализа. При этом обоснованность принимаемых решений зависит от квалификации, научной и инженерной интуиции экспертов.

Нередко требования по надежности на системы, особенно модернизируемые, задаются «от достигнутого» на аналогах и прототипах с учетом ожидаемого роста надежности материалов,

комплектующих изделий, повышения качества изготовления и надежности изделий общего применения. В этом случае в дополнение к экспертным оценкам используются статистические данные о достигнутых и ожидаемых на период разработки системы характеристиках надежности элементов систем, созданных и использованных в других системах ранее.

Если применение системы может дать экономический эффект, то его можно сравнить с затратами на создание и эксплуатацию системы. В этом случае имеется возможность решить задачу задания оптимального уровня надежности. Эта задача может быть решена, если известны структура, облик и характеристики системы, характеристики надежности элементов, процесс функционирования и способы повышения надежности изделий, входящих в систему.

В общем случае требуется получить максимум целевой функции

$$G_i(R) = W_i(R) - C_i(R),$$

где R — показатель надежности системы, зависящий от выбранного i -го варианта системы ($i = \overline{1, n}$); $W_i(R)$ — выходной экономический эффект от применения i -го варианта системы при уровне надежности R ; $C_i(R)$ — затраты на обеспечение уровня надежности, равного R для i -го варианта системы.

Для каждого i -го варианта системы оптимальное решение находят из условия

$$\partial W_i(R)/\partial R = \partial C_i(R)/\partial R.$$

Далее, сравнивая между собой оптимальные решения $W_i(R)$, выбирают вариант, для которого достигается наибольшее абсолютное значение из оптимальных решений $W_i(R)$.

Изложенная схема получения оптимальных требований по надежности на систему применима на ранних стадиях разработки системы. При более детальной проектной проработке и особенно при применении САПР возможна более тонкая оптимизация.

Однако для этого нужно знать следующее: может ли ухудшение (улучшение) некоторых выходных характеристик изделий системы (например, производительности, быстродействия, точности и т. п.) привести к повышению (снижению) их надежности; насколько ухудшение (улучшение) выходных характеристик ухудшает (улучшает) выходной эффект от применения системы.

Зная ответы на перечисленные вопросы и используя модели функционирования и применения системы, можно получить оптимальное решение.

Распределение требований по надежности между элементами системы. Задача распределения заданной надежности R^* по элементам системы имеет вид

$$f(R_1, R_2, \dots, R_n) \geq R^*, \quad (9)$$

где R_i — вероятность безотказной работы i -го элемента.

Если вероятность безотказной работы задана как функция времени, то неравенство (9) можно обобщить, рассматривая R^* и R_i , $i = 1, 2, \dots, n$, как функции времени t .

Большинство основных моделей распределения требований по надежности основано на допущениях, что элементы системы выходят из строя независимо друг от друга, что отказ любого элемента приводит к отказу системы (т. е. система состоит из последовательно соединенных элементов) и что интенсивность отказов постоянна [5]. При этих допущениях получаем следующее неравенство как частный случай неравенства (9):

$$R_1(t), R_2(t) \dots R_n(t) \geq R^*(t). \quad (10)$$

Пусть λ_i — интенсивность отказов i -го элемента, а Λ — интенсивность отказов системы. Тогда неравенство (10) принимает вид

$$e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} + \dots + e^{-\lambda_n t} > e^{-\Lambda t}$$

и

$$\lambda_1 + \lambda_2 \dots + \lambda_n \leq \Lambda.$$

Метод равномерного распределения. Предполагается, что система состоит из n последовательно соединенных элементов, имеющих одинаковую надежность.

Пусть R^* — требуемая вероятность безотказной работы системы, а R_i — вероятность безотказной работы i -го элемента системы. Тогда

$$R^* = \prod_{i=1}^n R_i$$

или

$$R_i = (R^*)^{1/n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом могут быть распределены такие показатели надежности, как вероятность безотказной работы, средняя наработка на отказ, коэффициент оперативной готовности, коэффициент готовности.

Задаваемая средняя наработка для i -го элемента системы будет равна $T_i = nT$, $i = \overline{1, n}$, где T — заданная средняя наработка системы.

Недостатком этого метода является то, что уровень надежности элементов системы устанавливается без учета их важности, последствий их отказов и степени трудности достижения надежности.

Метод пропорционального распределения. Если k_i — число элементов в i -й подсистеме ($i = \overline{1, n}$), то $R_i =$

$$R_i = \sqrt[n]{R^*}, a_i = k_i \left(\sum_{1 \leq i \leq n} k_i \right)^{-1}.$$

Здесь k_i — число «приведенных» элементов. Если известны интенсивности отказов элементов (или прототипов элементов) j -го типа λ_j , то метод пропорционального распределения можно модифицировать, положив

$$a_i = \sum_{1 \leq j \leq m} \lambda_j k_{ij} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \times \sum_{1 \leq j \leq m} \lambda_j k_{ij} \right)^{-1}.$$

Метод распределения требований по надежности с учетом относительной уязвимости элементов [2]. Предполагается, что элементы системы соединены последовательно и имеют постоянную интенсивность отказов, что отказ любого элемента системы вызывает отказ всей системы и что заданная наработка элементов равна заданной наработке системы.

Требуется выбрать такие λ_i^* , чтобы

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^* \leq \Lambda, \quad (11)$$

где λ_i^* — заданная интенсивность отказов i -го элемента, а Λ — требуемая интенсивность отказов системы.

Задачу решают в два этапа: 1) определяют интенсивность отказов λ_i основных элементов системы на основе опыта; 2) задают весовые множители ω_i для каждого элемента системы в соответствии с интенсивностями отказов, определенными на первом этапе,

$$\omega_i = \lambda_i / \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Таким образом, ω_i показывает относительную уязвимость i -го элемента. Тогда

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

Далее вычисляют требуемые интенсивности отказов элемента с помощью соотношения

$$\lambda_i^* = \omega_i \Lambda, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда формула (11) рассматривается как равенство

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Lambda = \Lambda.$$

Пример 1. Система состоит из трех последовательно соединенных элементов, для которых получены оценки $\lambda_1 = 0,005$, $\lambda_2 = 0,003$ и $\lambda_3 = 0,001$. Требуемая вероятность безотказной работы системы за 20 ч составляет 0,95. Определить требуемые значения вероятности безотказной работы элементов.

Решение. С помощью (12) определяем:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{0,005}{0,005 + 0,003 + 0,001} = \\ &= 0,555; \quad \omega_2 = \frac{0,003}{0,009} = 0,333; \quad \omega_3 = \\ &= \frac{0,001}{0,009} = 0,111. \end{aligned}$$

Известно, что $R^*(t = 20) = \exp[-\Lambda(20)] = 0,95$ или $\Lambda = 0,00256$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= \omega_1 \Lambda = 0,555 \cdot 0,00256 = 0,00142; \\ \lambda_2^* &= \omega_2 \Lambda = 0,333 \cdot 0,00256 = 0,000852; \\ \lambda_3^* &= \omega_3 \Lambda = 0,111 \cdot 0,00256 = 0,000284. \end{aligned}$$

Соответствующие заданные значения вероятности безотказной работы элементов:

$$\begin{aligned} R_1^*(20) &= \exp(-0,00142 \cdot 20) = 0,97; \\ R_2^*(20) &= \exp(-0,000852 \cdot 20) = 0,98; \\ R_3^*(20) &= \exp(-0,000284 \cdot 20) = 0,99. \end{aligned}$$

Метод распределения требований по надежности с учетом важности элемента [5]. Предполагают последовательное соединение взаимно независимых элементов (подсистем), имеющих экспоненциальное распределение времени работы. Показатель важности элемента (подсистемы) опре-

деляется через вероятность отказа системы, если этот элемент выйдет из строя. Показатель важности, равный единице, означает, что для безотказной работы системы этот элемент (подсистема) должен безотказно работать, а показатель важности, равный нулю, означает, что отказ этого элемента (подсистемы) не влияет на работу системы.

Сложные элементы определяют как модули, имеющие соответствующие схемные соединения.

При распределении требований к надежности предполагают, что каждый модуль вносит одинаковый вклад в безотказную работу системы. Эквивалентность требований состоит в том, что интенсивность отказов одинакова для каждого модуля. Поскольку для очень малых x $\exp(-x) \approx 1 - x$, заданная интенсивность отказов для каждого i -го элемента имеет вид

$$\lambda_i = N_i [-\ln R^*(t)] / (N \omega_i t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

где N_i — число модулей в i -м элементе (подсистеме); $R^*(t)$ — требуемая вероятность безотказной работы системы при заданной наработке t ; N — общее число модулей в системе; ω_i — показатель важности для i -го элемента (подсистемы) [вероятность отказа системы при выходе из строя i -го элемента (подсистемы)]; t_i — требуемая продолжительность работы i -го элемента (подсистемы) за время работы системы ($0 \leq t_i \leq t$).

Требуемая вероятность безотказной работы i -го элемента (подсистемы) при требуемой наработке имеет вид

$$R_i^*(t_i) = 1 - \frac{1 - [R^*(t)]^{N_i/N}}{\omega_i}. \quad (14)$$

формула дает хорошее приближение, если для каждого элемента (подсистемы) значение коэффициента важности ω_i близко к единице.

Пример 2. Для системы, состоящей из четырех подсистем, требуется обеспечить вероятность безотказной работы, равную 0,95 при непрерывной работе в течение 10 ч. Для подсистем 1 и 3 показатель важности равен еди-

4. Исходные данные к примеру 2

№ подсистемы	Число модулей N_i	Коэффициент важности	Продолжительность работы, ч
1	15	1,0	10
2	25	0,95	9
3	100	1,00	10
4	70	0,90	8

нице. Подсистема 2 должна работать только 9 ч за время работы системы, а подсистема 4 имеет показатель важности 0,9, и для безотказной работы системы она должна работать 8 ч. Остальные данные приведены в табл. 4.

Решение. Общее число модулей в системе $N = \sum_{i=1}^4 N_i = 210$.

Максимально допустимые интенсивности отказов для подсистем согласно (13):

$$\lambda_1 = \frac{15 (-\ln 0,95)}{210 \cdot 1,0 \cdot 10} = 0,000366;$$

$$\lambda_2 = \frac{25 (-\ln 0,95)}{210 \cdot 0,95 \cdot 9} = 0,000714;$$

$$\lambda_3 = \frac{100 (-\ln 0,95)}{210 \cdot 1,0 \cdot 10} = 0,002442;$$

$$\lambda_4 = \frac{70 (-\ln 0,95)}{210 \cdot 0,90 \cdot 8} = 0,002377.$$

По формуле (14) находим требуемые значения вероятности безотказной работы подсистем:

$$R_1^*(t = 10) = 1 - \frac{1 - (0,95)^{15/210}}{1} = 0,996;$$

$$R_2^*(t = 9) = 1 - \frac{1 - (0,95)^{25/210}}{0,95} = 0,993;$$

$$R_3^*(t = 10) = 1 - \frac{1 - (0,95)^{100/210}}{1} = 0,976;$$

$$R_4^*(t = 8) = \frac{1 - (0,95)^{70/210}}{0,90} = 0,981.$$

$$\text{Проверка: } R^* = \prod_{i=1}^4 R_i^* \approx$$

$\approx 0,95$, что близко к заданному.

Метод оптимального распределения. Если при задании требований по надежности на систему в целом (R^*) известны структура системы (S) и методы повышения надежности подсистем, т. е. функции $R_i(C)$, где C — ресурс, затрачиваемый на обеспечение надежности подсистемы, то можно найти оптимальное решение для двух случаев:

максимум показателя надежности системы при ограничениях на суммарный ресурс C^*

$$\max_C \left\{ R(S, R_i(C_i)) \mid \sum_{1 < i \leq n} C_i \leq C^* \right\},$$

$$C = (C_1, C_2, \dots, C_n);$$

минимум затрат на систему при достижении заданного показателя надежности R^*

$$\min_C \{ C(S, R_i(C_i)) \mid R^* \}.$$

Обе задачи решают способами математического программирования, как задачи на условную оптимизацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вопросы математической теории надежности/Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983. 376 с.

2. К. Капур, Л. Ламберсон. Надежность и проектирование систем. М.: Мир, 1980. 450 с.

3. Надежность и эффективность в технике: Справочник. Т. 1. Методология, организация, терминология/Под ред. А. Н. Рембезы. М.: Машиностроение, 1986. 224 с.

4. Надежность и эффективность в технике: Справочник. Т. 2. Математические методы в теории надежности и эффективности/Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Машиностроение, 1987. 280 с.

5. Надежность технических систем: Справочник/Под ред. И. А. Ушакова. М.: Радио и связь, 1983. 606 с.

Глава 2. Расчет надежности элементов и последовательных систем

Показатели надежности элемента можно рассчитать, если известен закон распределения наработки элемента до отказа $F(t)$ или его основные параметры [3].

Для любого (произвольного) закона распределения дискретная функция распределения времени наработки до отказа

$$F(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_1, \\ v_1, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ v_1 + v_2, & t_2 \leq t \leq t_3, \\ \vdots \\ k(t) \\ \sum_{i=1}^{k(t)} v_i, & t_k(t) \leq t \leq t_{k(t)+1}, \end{cases}$$

где t_i — момент i -го скачка функции $F(t)$; $k(t)$ — число скачков функции $F(t)$ к моменту t ; v_i — скачок функции $F(t)$ в точке t_i .

На ранних стадиях проектирования новых элементов и систем используют экспериментальные данные в виде $F(t)$, полученные по изделиям-аналогам и в процессе разработки элементов. В табл. 1 приведены основные показатели надежности элементов для произвольного закона распределения наработки до отказа [3], которые можно вычислить, если известна $F(t)$.

1. Показатели надежности для произвольного распределения

Показатель	Непрерывная функция	Дискретная функция
$P(t_0)$	$1 - F(t_0)$	$1 - \sum_{i=1}^{k(t_0)} v_i$
$Q(t_0)$	$F(t_0)$	$\sum_{i=1}^{k(t_0)} v_i$
$P(t, t+t_0)$	$[1 - F(t+t_0)] / [1 - F(t)]$	$\left(\sum_{i=1}^{k(t+t_0)} v_i \right) / \left(1 - \sum_{i=1}^{k(t)} v_i \right)$
$Q(t, t+t_0)$	$[F(t+t_0) - F(t)] / [1 - F(t)]$	$\left(1 - \sum_{i=k(t)}^{k(t+t_0)} v_i \right) / \left(1 - \sum_{i=1}^{k(t)} v_i \right)$
T	$\int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt$	$\sum_{i=1}^N v_i t_i$

1. НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Внезапные отказы. Экспоненциальное распределение. При экспоненциальном законе распределения наработки до отказа интенсивность отказов является величиной постоянной $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$. Зависимости между основными показателями надежности элемента (вероятностью безотказной работы $P(t)$, вероятностью отказа $Q(t)$ и средней наработкой отказа T) выражаются через параметр экспоненциального распределения — его λ -характеристику:

$$P(t_0) = P(t_1 t + t_0) = \exp(-\lambda t_0) \approx 1 - \lambda t_0;$$

$$Q(t_0) = Q(t, t + t_0) = 1 - \exp(-\lambda t_0) \approx \lambda t_0;$$

$$T = 1/\lambda.$$

Приближенными значениями для $P(t)$ и $Q(t)$ можно пользоваться, если $\lambda t_0 < 0,1$.

Дисперсия времени наработки до отказа

$$D(t_0) = \lambda T^2 \int_0^{\infty} [\exp(-\lambda t)] dt = T^2.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(t)_0 = \sqrt{D(t_0)} = T.$$

Таким образом, при экспоненциальном распределении надежности среднее квадратическое отклонение наработки до отказа равно средней наработке до отказа. Это свойство на практике используют для проверки истинности гипотезы о существовании экспоненциального закона надежности.

Постепенные отказы. «Стареющие» распределения. Многие элементы в период хранения и работы подвержены старению и износу. Интенсивность отказов этих элементов $\lambda(t)$ со временем монотонно возрастает. В некоторых случаях в результате упрочнения материалов в процессе работы элементов наблюдается уменьшение интенсивности их отказов, т. е. $\lambda(t)$ со временем монотонно убывает.

2. Верхняя и нижняя границы вероятности безотказной работы $P(t)$ и квантили ξ_p для ВФИ-распределения

Показатель	Граница		Интервал, для которого справедлива оценка	Примечание
	нижняя	верхняя		
$P(t)$	$\exp(-t/T)$ 0	1 $\exp(-\omega_t t)$	$0 \leq t \leq T$ $t \geq T$	ω_t определяется из уравнения $1 - \omega_t T = \exp(-\omega_t t)$; ξ_p определяется из уравнения $F(\xi_p) = p$;
	$\exp(-\alpha t)$ —	— $\exp(-\alpha t)$	$t \leq \xi_p$ $t \geq \xi_p$	
ξ_p	$-\ln(1-p) T$ T	$-\frac{\ln(1-p)}{p} T$ $-\frac{\ln(1-p)}{p} T$	$p \leq 1 - \exp(-1)$ $p \geq 1 - \exp(-1)$	$\alpha = -\frac{\ln(1-p)}{\xi_p}$

Изменение характеристик надежности таких элементов во времени принято описывать с помощью «стареющих» и «молодеющих» распределений времени наработки до отказа. Если известен один из моментов распределения наработки до отказа (например, среднее значение наработки до отказа) или квантиль этого распределения ε_p , а также известно, что элемент подвержен упрочнению, износу или старению. то его поведение можно охарактеризовать с помощью распределений, имеющих соответственно убывающую или возрастающую функцию интенсивности отказа. Явление старения (молодения) формулируется в виде интенсивности отказа

$$\lambda(t) = f(t) / [1 - p(t)]$$

или в виде ведущей функции

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) dx = -\log [1 - F(t)].$$

Обозначим $p(t)$ через $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ и дадим определения различных классов «стареющих» и «молодеющих» распределений [1, 3].

ВФИ (УФИ). Распределение F называют ВФИ (УФИ), если оно характеризуется монотонно возрастающей (убывающей) по t интенсивностью отказа $\lambda(t)$.

ВСФИ (УСФИ). Распределение F имеет возрастающую в среднем функцию интенсивности (ВСФИ-распределение) или убывающую в среднем функцию интенсивности (УСФИ-распределение), если соответственно функция $\frac{1}{t} \log \bar{F}(t)$ возрастает по t

или $-\frac{1}{t} \log \bar{F}(t)$ убывает по t .

Если на конструкцию (например, на шасси самолета при посадке) воздействует по пуассоновскому закону во времени некоторая ударная нагрузка, причиняя с каждым ударом независимый случайный ущерб, и изделие отказывает, когда накопленный ущерб достигает некоторого критического уровня, то ее надежность можно описать ВСФИ-распределением.

3. Верхние границы вероятности безотказной работы для ВФИ-распределения с фиксированным T

t/T	ω_t				
	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
1,0	1,000	0,961	0,924	0,889	0,856
1,1	0,824	0,794	0,765	0,738	0,711
1,2	0,686	0,662	0,640	0,618	0,597
1,3	0,577	0,558	0,540	0,522	0,505
1,4	0,489	0,474	0,459	0,444	0,430
1,5	0,417	0,417	0,369	0,380	0,369
1,6	0,358	0,348	0,337	0,328	0,318
1,7	0,309	0,300	0,292	0,283	0,275
1,8	0,268	0,260	0,253	0,246	0,239
1,9	0,233	0,226	0,220	0,214	0,209
2,0	0,203	0,198	0,193	0,188	0,183

В табл. 2—5 приведены граничные оценки надежности элемента для ВФИ- и ВСФИ-распределений [3].

Верхняя граница вероятности безотказной работы, которая может быть найдена решением уравнения $1 - \omega_t T = \exp(-\omega_t t)$, для $t > T$ дана в табл. 3.

Нижняя граница вероятности безотказной работы для ВФИ-распределения на интервале времени $0 \leq t \leq T$ равна $\exp(-t/T)$; при $t > T$ $P(t) = 0$.

Если время выполнения элементом задачи есть случайная величина, имеющая функцию распределения $W(t)$ или плотность распределения $\omega(t)$, то вероятность безотказной работы можно вычислить по формуле

$$P = \int_0^{\infty} P(t) dW(t) = \int_0^{\infty} P(t) \omega(t) dt.$$

В табл. 6 даны выражения для P при различных законах распределения времени выполнения задачи. Погрешности приведенных формул имеют по-

4. Границы вероятности безотказной работы для ВФИ-распределения с фиксированными T и σ^2

t/T	σ^2/T^2					t/T	σ^2/T^2				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50		0,60	0,70	0,80	0,90	1,00

Верхние границы вероятности безотказной работы

0,30	1,000	1,000	1,000	1,000	0,993	0,05	1,000	1,000	1,000	1,000	0,951
0,36	1,000	1,000	1,000	1,000	0,936	0,15	1,000	1,000	0,957	0,906	0,861
0,42	1,000	1,000	1,000	0,951	0,883	0,25	0,976	0,917	0,866	0,820	0,779
0,48	1,000	1,000	0,974	0,897	0,833	0,35	0,884	0,831	0,784	0,742	0,705
0,54	1,000	1,000	0,921	0,847	0,785	0,45	0,801	0,752	0,709	0,671	0,638
0,60	1,000	0,959	0,871	0,800	0,741	0,55	0,726	0,681	0,642	0,608	0,577
0,66	1,000	0,909	0,824	0,755	0,699	0,65	0,658	0,616	0,581	0,550	0,522
0,72	0,972	0,862	0,779	0,713	0,659	0,75	0,596	0,558	0,526	0,497	0,472
0,78	0,927	0,819	0,737	0,674	0,622	0,85	0,540	0,506	0,476	0,450	0,427
0,84	0,887	0,778	0,698	0,636	0,587	0,95	0,490	0,458	0,431	0,407	0,387
0,90	0,850	0,740	0,661	0,601	0,554	1,00	0,467	0,436	0,410	0,388	0,368
1,00	0,796	0,682	0,608	0,548	0,503	1,05	0,444	0,415	0,390	0,369	0,350
1,05	0,774	0,656	0,579	0,523	0,479	1,10	0,423	0,395	0,371	0,351	0,333
1,10	0,756	0,632	0,554	0,499	0,457	1,15	0,402	0,376	0,353	0,334	0,317
1,15	0,742	0,609	0,531	0,476	0,435	1,20	0,383	0,358	0,336	0,317	0,301
1,20	0,633	0,588	0,509	0,455	0,415	1,25	0,365	0,340	0,320	0,302	0,286
1,25	0,514	0,570	0,488	0,435	0,396	1,30	0,348	0,324	0,304	0,287	0,272
1,30	0,411	0,554	0,469	0,416	0,374	1,35	0,331	0,308	0,289	0,273	0,269
1,35	0,326	0,519	0,451	0,397	0,360	1,40	0,316	0,293	0,275	0,260	0,247
1,40	0,258	0,444	0,434	0,380	0,343	1,45	0,300	0,279	0,262	0,247	0,235
1,50	0,163	0,321	0,405	0,348	0,313	1,50	0,286	0,266	0,249	0,235	0,223

Нижние границы вероятности безотказной работы

0,05	0,987	0,978	0,970	0,965	0,961	0,05	0,957	0,955	0,953	0,952	0,951
0,15	0,962	0,934	0,913	0,893	0,886	0,15	0,878	0,871	0,866	0,863	0,861
0,25	0,937	0,892	0,860	0,836	0,818	0,25	0,804	0,794	0,787	0,782	0,779
0,35	0,913	0,853	0,810	0,778	0,755	0,35	0,737	0,724	0,715	0,708	0,705
0,45	0,886	0,813	0,762	0,724	0,695	0,50	0,647	0,631	0,619	0,611	0,606
0,55	0,847	0,763	0,709	0,671	0,642	0,60	0,592	0,575	0,563	0,554	0,549
0,65	0,787	0,695	0,643	0,608	0,583	0,70	0,534	0,521	0,511	0,505	0,497
0,75	0,699	0,609	0,567	0,538	0,518	0,80	0,475	0,466	0,460	0,454	0,449
0,85	0,569	0,510	0,482	0,466	0,454	0,90	0,419	0,415	0,411	0,409	0,407
0,95	0,452	0,412	0,403	0,399	0,395	0,95	0,392	0,390	0,389	0,388	0,387
1,00	0,368	0,368	0,368	0,368	0,368	1,00	0,368	0,368	0,368	0,368	0,368
1,05	0,315	0,329	0,336	0,340	0,342	1,05	0,345	0,347	0,348	0,349	0,350
1,10	0,270	0,292	0,305	0,312	0,318	1,10	0,324	0,326	0,329	0,331	0,333
1,15	0,230	0,264	0,280	0,290	0,298	1,15	0,303	0,308	0,311	0,314	0,317
1,20	0	0,236	0,256	0,268	0,277	1,20	0,284	0,290	0,294	0,298	0,301
1,25	0	0,211	0,233	0,248	0,258	1,25	0,266	0,273	0,278	0,283	0,286
1,30	0	0,188	0,213	0,229	0,241	1,30	0,250	0,257	0,263	0,268	0,272
1,35	0	0	0,194	0,212	0,224	1,35	0,234	0,242	0,249	0,254	0,259
1,40	0	0	0,174	0,196	0,209	1,40	0,220	0,228	0,235	0,241	0,247
1,45	0	0	0,162	0,181	0,195	1,45	0,206	0,215	0,222	0,229	0,235
1,50	0	0	0,146	0,167	0,182	1,50	0,193	0,202	0,210	0,217	0,223

5. Нижняя оценка вероятности безотказной работы для ВСФИ-распределения при фиксированном T

t/T	Нижняя граница	t/T	Нижняя граница	t/T	Нижняя граница	t/T	Нижняя граница
0,00	1,000	0,14	0,868	0,28	0,8155	0,45	0,615
0,02	0,980	0,16	0,8504	0,30	0,731	0,50	0,567
0,04	0,961	0,18	0,833	0,32	0,714	0,55	0,526
0,06	0,942	0,20	0,8155	0,34	0,698	0,60	0,484
0,08	0,923	0,22	0,798	0,36	0,681	0,70	0,396
0,10	0,904	0,24	0,781	0,38	0,665	0,80	0,296
0,12	0,896	0,26	0,764	0,40	0,649	0,90	0,186
						0,99	0,034

Оценка дана в интервале $0 \leq t/T < 1$.

6. Вероятность безотказной работы P невозстанавливаемого элемента при случайной длительности выполнения задачи

Распределение	Точное выражение	Приближенное выражение
Экспоненциальное $\omega(t) = \frac{1}{t_0} \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right)$	$\frac{1}{1 - \lambda t_0}$	$1 - \lambda t_0 + (\lambda t_0)^2$
Нормальное $\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times$ $\times \exp\left[-\frac{(t_0 - t)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\exp\left(-\lambda t_0 + \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}\right)$	$1 - \lambda t_0 + \frac{\lambda^2 (t_0^2 + \sigma^2)}{2}$
Произвольное $W(t)$	$1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k m_k}{k!}$	$1 - \lambda t_0 + \frac{\lambda^2 (t_0^2 + \sigma^2)}{2}$

ток $(\lambda t_0)^2$. Через m_k обозначен k -й момент распределения $\omega(t)$.

ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЙ ЭЛЕМЕНТ

в процессе функционирования восстанавливаемого элемента наблюдает-

ся последовательность чередующихся интервалов его работы ξ и простоя η : $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$ [1, 3].

Введем обозначения:

ξ_k — случайная наработка элемента до k -го отказа после $(k - 1)$ -го восстановления; η_k — случайное время восстановления (простоя) элемента после k -го отказа; $G(t) = P\{\eta \leq t\}$ —

7. Основные показатели надежности для восстанавливаемого элемента

Показатель	Точное выражение	Приближенное выражение ($\lambda t_0 \ll 1, \lambda/\mu \ll 1$)
$P(t_0)$	$\exp(-\lambda t_0)$	$1 - \lambda t_0$
$Q(t_0)$	$1 - \exp(-\lambda t_0)$	λt_0
T	$1/\lambda$	—
τ	$1/\mu$	—
K	$\frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{T}{T + \tau} = \frac{1}{1 + \lambda/\mu}$	$1 - \lambda/\mu$
k	$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\tau}{T + \tau} = \frac{\lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu}$	λ/μ
$K(t)$	$K + k \exp[-(\lambda + \mu)t]$	$1 - \lambda/\mu [1 - \exp(-\mu t)]$
$K^0(t)$	$K(1 - \exp[-(\lambda + \mu)t])$	$(1 - \lambda/\mu) [1 - \exp(-\mu t)]$
$k(t)$	$k(1 - \exp[-(\lambda + \mu)t])$	$\frac{\lambda}{\mu} [1 - \exp(-\mu t)]$
$k^0(t)$	$k + K \exp[-(\lambda + \mu)t]$	$\exp(-\mu t) + \frac{\lambda}{\mu} [1 - \exp(-\mu t)]$
$R(t_0)$	$K \exp(-\lambda t_0)$	$1 - \frac{\lambda}{\mu} - \lambda t_0$
$R(t, t_0)$	$(K + k \exp[-(\lambda + \mu)t]) \exp(-\lambda t_0)$	$\left[1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \exp(-\mu t)\right] (1 - \lambda t_0)$

распределение времени восстановления; $F(t) = P\{\xi \leq t\}$ — распределение наработки до отказа; $f(t)$ и $g(t)$ — плотности распределений $F(t)$ и $G(t)$; t_∞ — произвольный «достаточно удаленный» момент времени, соответствующий стационарному режиму случайного процесса. Определения и формулы основных показателей надежности восстанавливаемых элементов даны в гл. 1.

В табл. 7 приведены показатели надежности для восстанавливаемого элемента, когда $F(t)$ и $G(t)$ — экспоненциальные распределения.

Характеристики надежности мгновенно восстанавливаемого элемента.

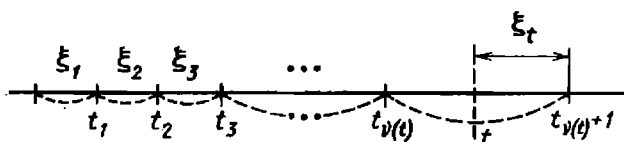


Рис. 1. Схема работы мгновенно восстанавливаемого элемента

Допустим, что время восстановления элементов мало по сравнению с временем безотказной работы, тогда им можно пренебречь и считать, что восстановление мгновенное. Такое допущение во многих реальных случаях оправданно и позволяет получить важные теоретические и практические результаты.

Предположим, что времена безотказной работы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и имеют одинаковое распределение (рис. 1). Тогда

$$P\{\xi_k < t\} = F(t); M\xi_k = T; D\xi_k = \sigma^2; f(t) = F'(t), F_k(t) = P\{t_k < t\},$$

где функции $F_k(t)$ определяются рекуррентно:

$$F_k(t) = \int_0^t F_{k-1}(t-x) dF(x), k > 1,$$

$$F_1(t) = F(t).$$

Пусть $v(t)$ — число отказов до момента t ; тогда

$$P\{v(t) \geq k\} = P\{t_k < t\} = F_k(t),$$

откуда

$$P\{v(t) = k\} = F_k(t) - F_{k+1}(t).$$

Зная распределение $v(t)$, можно рассчитать, например, число запасных элементов, если восстановление состоит в замене, или число ремонтов, если восстановление осуществляется путем ремонта.

Обозначив $H(t) = Mv(t)$ — среднее число отказов до момента t , можно получить выражение для функции восстановления

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n [F_n(t) - F_{n+1}(t)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \end{aligned}$$

Тогда среднее число отказов на интервале $(t, t+x)$ равно $H(t+x) - H(t)$.

$$\begin{aligned} \text{Плотность восстановления } h(t) &= \\ &= H'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t); f_n(t) = F'_n(t). \end{aligned}$$

Из выражения для $H(t)$ следует, что среднее число восстановлений на бесконечно малом интервале $(t, t+\Delta t)$ равно $h(t)\Delta t + o(\Delta t)$. Такой же вид имеет и вероятность появления отказа на бесконечно малом интервале.

Плотность восстановления $h(t)$ есть безусловная вероятность отказа за единицу времени, $\lambda(t)$ — условная вероятность отказа элемента за единицу времени, следующую за моментом времени t ; при условии, что до момента t элемент ни разу не отказал.

Остаточное время жизни ζ_t элемента — время от момента t до первого справа отказа.

Распределение остаточного времени жизни получаем из выражения

$$\begin{aligned} P\{\zeta_t > x\} &= \bar{F}(t+x) + \int_0^t \bar{F}(t+x-u) h(u) du. \end{aligned}$$

Пусть время жизни имеет экспоненциальное распределение

$$F(t) = \exp(-\lambda t).$$

Тогда процесс восстановления называют пуассоновским потоком, имеющим плотность $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$. Характеристиками пуассоновского потока восстановления являются следующие:

вероятность наступления k отказов (восстановлений) до момента времени t

$$P\{v(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t);$$

плотность восстановления

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\lambda t) = \lambda;$$

функция восстановления

$$H(t) = \int_0^t h(x) dx = \lambda t;$$

распределение остаточного времени жизни

$$\begin{aligned} P\{\zeta_t > x\} &= \exp[-\lambda(t+x)] + \\ &+ \int_0^t \lambda \exp[-\lambda(t+x-u)] du = \\ &= \exp(-\lambda x). \end{aligned}$$

Таким образом, для пуассоновского потока остаточное время жизни имеет такое же распределение, что и полное время жизни.

Асимптотические характеристики процесса восстановления. При больших t справедливо приближенное равенство $H(t) \approx t/T$. При этом случайное число отказов до момента t имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием $Mv(t) \approx t/T$ и дисперсией $Dv(t) \approx \sigma^2 t/T^3$. Этот результат можно использовать для расчета запасных элементов на заданный период времени, если восстановление осуществляется путем замены. Число таких замен за время t равно $v(t)$. Поэтому число запасных элементов n_0 должно выби-

раться таким, чтобы $P \{v(t) \leq n_0\} = 1 - \xi$, где ξ — малое число, степень риска. Пусть время t велико, т. е. $t \gg T$. Тогда $v(t)$ имеет приближенно нормальное распределение. Выбирая число x_ξ таким, чтобы соблюдалось равенство $\Phi(x_\xi) = 1 - \xi$, можно вычислить число запасных элементов $n_0 = t/T + x_\xi \sqrt{\sigma^2 t/T^3}$ с вероятностью $1 - \xi$. Этого числа элементов достаточно на время работы, равное t .

3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Последовательным, в смысле надежности, называют такое соединение элементов в системе, при котором отказ хотя бы одного элемента приводит к отказу всей системы.

Большинство типов механических систем и конструкций, многие радиотехнические, электромеханические, оптико-механические, электронные средства представляют собой системы, не имеющие структурной или временной избыточности. Высокий уровень надежности таких систем достигается за счет использования надежных элементов, правильного учета и создания необходимых условий эксплуатации, контроля технического состояния и, при необходимости, их восстановления путем ремонта или замены отказавших элементов.

Последовательное соединение элементов в смысле надежности не обязательно означает, что реальное соединение этих элементов будет последовательным. Например, если элементы электрической схемы соединены параллельно, но отказ их имеет характер короткого замыкания, то в смысле надежности эти элементы соединены последовательно. Аналогичные ситуации встречаются в пневматических и гидравлических схемах, когда отказ какого-нибудь трубопровода или клапана приводит к отказу системы.

Элементы последовательной системы могут иметь внутри себя различное резервирование (нагрузочное, структурное), однако, когда они рассматриваются в составе системы, исследователя интересуют только их внешние, потребительские свойства (масса,

габариты, производительность и т. п.), а также надежность. Одной из важных задач проектирования является создание такой системы, в которой отказы любого элемента или группы элементов не влияли бы на надежность (не приводили к отказу) других элементов системы. Поэтому наиболее часто используемый расчетный случай является такой, когда отказы элементов считаются независимыми.

Последовательные системы могут быть невосстанавливаемыми и восстанавливаемыми, контролируемые постоянно или периодически.

НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Случайная наработка до отказа системы, состоящей из m последовательно соединенных невосстанавливаемых элементов, равна минимальному значению случайных наработок ее элементов. Если известны распределения до отказа i независимых элементов ($i = \overline{1, m}$), то надежность системы для любого заданного времени t_0 будет

$$P(t_0) = \prod_{i=1}^m P_i(t_0).$$

Численными методами можно определить точное значение наработки до отказа системы по формуле

$$T = \int_0^{\infty} P(t) dt.$$

Экспоненциальное распределение. Из предположения о стационарности потока отказов элементов следует, что $P_i(t) = \exp(-\lambda_i t)$; тогда

$$\begin{aligned} P(t_0) &= \prod_{i=1}^m \exp(-\lambda_i t_0) = \\ &= \exp\left(-t_0 \sum_{i=1}^m \lambda_i\right) = \exp(-\Lambda t_0), \end{aligned}$$

где λ_i и Λ — интенсивность отказов соответственно элементов и системы.

В табл. 8 приведены точные и приближенные выражения для основных показателей надежности последова-

тельной системы при экспоненциальном распределении наработок до отказа ее элементов [3]. Приближенные выражения получены при условии, что $\Lambda t_0 \ll 1$.

Все характеристики надежности системы можно получить, если известны λ_i всех элементов. В реальных условиях эксплуатации λ_i зависят от условий и режимов функционирования. На стадиях проектирования бывает затруднительно получить зависимости интенсивности отказов от условий работы всех элементов: во-первых, в новых системах часто используют новые элементы, о которых еще нет достоверных данных об их надежности по результатам эксплуатации; во-вторых, на ранних стадиях проектирования недостаточно известны условия работы каждого элемента.

Поэтому оценки надежности, получаемые описываемым методом, наиболее пригодны для сравнительного анализа надежности различных вариантов системы, а не для точной оценки надежности конкретного варианта системы. На завершающих стадиях разработки, когда известны условия работы и характеристики надежности всех элементов, этот метод может быть применен для окончательного расчета надежности системы.

В приближенных расчетах принимают, что все однотипные элементы равнонадежны, т. е. независимо от режимов работы имеют одинаковую интенсивность отказов, равную среднестатистическому ее значению. Тогда

$$P(t_0) = \exp\left(-t_0 \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i\right); \quad (1)$$

$$T = 1/\Lambda = 1 / \left(\sum_{i=1}^r n_i \lambda_i\right),$$

где n_i и λ_i — число и среднестатистическая интенсивность отказов элементов i -го типа; r — число типов элементов.

Как правило, не все элементы работают непрерывно от момента начала работы системы и до окончания. Считая отказы составных частей системы

8. Показатели надежности последовательной системы

Показатель	Точное выражение	Приближенное выражение
$P(t_0)$	$\exp(-\Lambda t_0)$	$1 - \Lambda t_0$
$Q(t_0)$	$1 - \exp(-\Lambda t_0)$	Λt_0
$P(t + t_0)$	$\exp(-\Lambda t_0)$	$1 - \Lambda t_0$
$Q(t + t_0)$	$1 - \exp(-\Lambda t_0)$	Λt_0
T	$1/\Lambda$	—

независимыми, надежность системы можно вычислить по формуле

$$P(t_0) = P_1(\Delta t_1) P_2(\Delta t_2) \dots P_m(\Delta t_m) = \prod_{i=1}^m P_i(\Delta t_i), \quad (2)$$

где $P_i(\Delta t_i)$ — надежность i -го элемента в течение промежутка времени

$$\Delta t_i (\Delta t_i = t_i^k - t_i^h),$$

где t_i^h и t_i^k — время начала и конца работы i -го элемента. Используя экспоненциальный закон надежности, можно записать

$$P_i(\Delta t_i) = \exp[-\lambda_i (t_i^k - t_i^h)].$$

Тогда

$$P(t) = \exp\left[-\sum_{i=1}^m \lambda_i (t_i^k - t_i^h)\right]. \quad (3)$$

На рис. 2 приведена зависимость вероятности безотказной работы $P(t)$ системы, состоящей из четырех элементов. Зависимости $P_i(t)$ для отдельных элементов показаны штриховыми линиями.

Кривая $P(t)$ имеет изломы в моменты времени, соответствующие моментам начала и окончания работы отдельных элементов. Поэтому формулами (1) нужно пользоваться для расчета не всей системы, а только отдельных частей, у которых элементы работают одновременно. Надежность

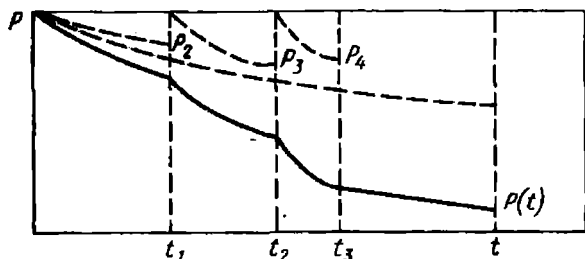


Рис. 2. Зависимость $P(t)$ в случае неодновременной работы элементов

системы в целом в течение времени t_0 на основании (2) и (3)

$$P(t_0) = P_1(t_0) P_2(t_1) P_3(t_3 - t_1) \times \\ \times P_4(t_3 - t_2) = \exp \{-\lambda_1 t_0 + \lambda_2 t_1 + \\ + \lambda_3 (t_2 - t_1) + \lambda_4 (t_3 - t_2)\}.$$

При неодновременной работе элементов в общем случае справедлива оценка

$$T = \int_0^{\infty} P(t) dt.$$

Так как сведения о надежности элементов не всегда точны, то целесообразно вести расчет проектируемой системы для двух крайних значений интенсивности отказов, устанавливая тем самым границы, внутри которых будут находиться количественные характеристики надежности. Таким

образом, можно установить критические элементы, от которых в первую очередь зависит надежность системы.

При значениях надежности системы, близких к единице, используют приближенные формулы:

$$\prod_{i=1}^N P_i(t) = 1 - \sum_{i=1}^N Q_i(t);$$

$$P^N(t) = 1 - NQ(t);$$

$$\sqrt[N]{P(t)} = 1 - Q(t)/N.$$

На практике часто наблюдается зависимость элементов в последовательной системе, когда ухудшение характеристик одного элемента приводит к отказу другого элемента или системы в целом. Корреляционная зависимость между элементами положительна. В этом случае

$$P(t_0) \leq \prod_{i=1}^N P_i(t);$$

$$T_1 \leq \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^N P_i(t) dt.$$

ВФИ-распределение. В табл. 9 даны нижняя и верхняя оценки для $P(t)$ и T последовательной системы, все элементы имеют ВФИ-распределение наработки до отказа T_i .

9. Показатели надежности последовательной системы из «стареющих» элементов

Показатель	Нижняя граница	Верхняя граница	Интервал, для которого справедлива граница
$P(t)$	$\exp(-t) \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{T_i} \right)$	1	$t < T_{(1)}$
	0	$\exp \left(- \sum_{i=1}^k \omega_i^{(i)} t \right)$	$T_{(k)} < t \leq T_{(k+1)}$
T	$\left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{T_i} \right)^{-1}$	$\min T_i$	Для любых T_i

Через $T_{(k)}$ обозначена k -я из величин T_i , упорядоченных по возрастанию, т. е.

$$T_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq m} T_i,$$

$$T_{(2)} = \min (T_i | T_i > T_{(1)}),$$

Численные значения границ для T могут быть получены численным интегрированием соответствующих границ вероятности безотказной работы.

ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Приведенные ниже аналитические выражения для различных показателей

надежности восстанавливаемых систем получены в предположении, что все распределения наработки до отказа и времени восстановления отдельных элементов являются экспоненциальными, т. е. процесс функционирования системы описывается однородным марковским процессом. Это условие справедливо, если средняя наработка до отказа элементов системы значительно больше времени их восстановления. На практике это условие обычно выполняется.

В табл. 10, 11 приведены показатели надежности последовательных систем из различных и одинаковых элементов.

10. Показатели надежности для последовательной системы из N различных восстанавливаемых элементов

Показатель	Точное значение	Приближенное значение	Условия приближения
При отказе система выключается			
T	$1/\Lambda$	—	—
τ	$(1/\Lambda) \sum_{i=1}^N \gamma_i$	—	—
$P(t_0)$	$\exp(-\Lambda t_0)$	$1 - \Lambda t_0$	$\Lambda t_0 \ll 1$
K	$\left(1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i\right)^{-1}$	$1 - \sum_{i=1}^N \gamma_i$	$\max \gamma_i \ll \frac{1}{N}$
$K(t)$	$K + (1 - K) \times \exp\left[-t\left(\Lambda + \frac{1}{\tau}\right)\right]$	$1 - \Lambda t \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$	$\Lambda \tau \ll 1$
$R(t_0)$	$K \exp(-\Lambda t_0)$	$1 - \Lambda(\tau + t_0)$	$\Lambda t_0 \ll 1, \Lambda \tau \ll 1$
При отказе система не выключается. Восстановление неограниченное			
T	$1/\Lambda$	—	—
τ	$\frac{1}{\Lambda} \left[\prod_{i=1}^N (1 + \gamma_i) - 1 \right]$	$\frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^N \gamma_i$	$\max \gamma_i \ll \frac{1}{N}$

Продолжение табл. 10

Показатель	Точное значение	Приближенное значение	Условия приближения
$P(t_0)$	$\exp(-\Lambda t_0)$	$1 - \Lambda t_0$	$\Lambda t_0 \ll 1$
K	$\prod_{i=1}^N (1 + \gamma_i)^{-1}$	$1 - \sum_{i=1}^N \gamma_i$	$\max_i \gamma_i \ll 1/N$
$K(t)$	Не приводится	$1 - \Lambda \tau \times$ $\times \left[1 - \exp\left(-\frac{t_0}{T}\right) \right]$	$\Lambda \tau \ll 1$
$R(t_0)$	$K \exp(-\Lambda t_0)$	$1 - \Lambda(\tau + t_0)$	$\Lambda t_0 \ll 1,$ $\Lambda \tau \ll 1$

Принятые обозначения: $\gamma_i = \lambda_i/\mu_i$, где λ_i — интенсивность отказа i -го элемента; μ_i — интенсивность восстановления i -го элемента; $\Lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i$; T — средняя наработка системы между отказами; τ — среднее время восстановления системы; $P(t_0)$ — вероятность безотказной работы системы; K — стационарный коэффициент готовности системы; $K(t)$ — нестационарный коэффициент готовности системы; $R(t_0)$ — стационарный коэффициент оперативной готовности системы.

11. Показатели надежности для последовательной системы из N одинаковых восстанавливаемых элементов

Показатель	Точное значение	Приближенное значение	Условия приближения
При отказе система выключается			
T	$1/(N\lambda)$	—	—
τ	$1/\mu$	—	—
$P(t_0)$	$\exp(-N\lambda t_0)$	$1 - N\lambda t_0$	$N\lambda t_0 \ll 1$
K	$(1 + N\gamma)^{-1}$	$1 - N\gamma$	$\gamma \ll \frac{1}{N}$
$K(t)$	$K + (1 - K) \times$ $\times \exp\left[-t\left(N\lambda + \frac{1}{\tau}\right)\right]$	$1 - n\lambda\tau \times$ $\times \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$	$N\lambda\tau \ll 1$

Продолжение табл. 11

Показатель	Точное значение	Приближенное значение	Условия приближения
$R(t_0)$	$K \exp(-N\lambda t_0)$	$1 - N\lambda(\tau + t_0)$	$N\lambda t_0 \ll 1$ $N\lambda\tau \ll 1$
При отказе система не выключается. Восстановление неограниченное			
T	$1/(N\tau)$	—	—
τ^*	$\frac{1}{n\lambda} [(1 + \gamma)^N - 1]$	$1/\mu$	$\gamma \ll \frac{1}{N}$
$P(t_0)$	$\exp(-N\lambda t_0)$	$1 - N\lambda t_0$	$N\lambda t_0 \ll 1$
K	$(1 + \gamma)^{-N}$	$1 - N\gamma$	$\gamma \ll \frac{1}{N}$
$K(t)$	Не приводится	$1 - N\lambda\tau \times$ $\times \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$	$N\lambda\tau \ll 1$
$R(t_0)$	$K \exp(-N\lambda t_0)$	$1 - N\lambda(\tau^* + t_0)$	$N\lambda t_0 \ll 1$ $N\lambda\tau \ll 1$
При отказе система не выключается. Восстановление ограниченное			
T	$1/N\lambda$	—	—
τ	$\frac{(N-1)!}{\lambda} \sum_{i=1}^N \frac{\gamma^i}{(N-1)!}$	$1/\mu$	$\frac{(N-1)\gamma}{\mu} \ll 1$
$P(t_0)$	$\exp(-N\lambda t_0)$	$1 - N\lambda t_0$	$N\lambda t_0 \ll 1$
K	$\left[N! \sum_{i=0}^N \frac{\gamma^i}{(N-1)!} \right]^{-1}$	$1 - N\gamma$	$N\gamma \ll 1$
$R(t_0)$	$K \exp(-N\lambda t_0)$	$1 - N(\lambda t_0 + \gamma)$	$N(\lambda t_0 + \gamma) \ll 1$

Принятые обозначения см. примечание к табл. 10.

КОЭФФИЦИЕНТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ

Коэффициентный метод расчета применяется, когда в системе имеется много новых элементов, по которым отсутствуют справочные данные об их надежности [2].

Основу метода составляют следующие допущения:

1) время возникновения отказов является простейшим потоком случайных событий, удовлетворяющих условиям стационарности, отсутствия последствия, ординарности;

2) интенсивность отказов всех элементов системы изменяется в зависимости от условий эксплуатации в одинаковой степени.

Первое допущение означает, что отказы являются событиями случайными и независимыми, отказ любого элемента приводит к отказу всей системы и интенсивность отказов является величиной постоянной. Допущение утверждает справедливость экспоненциального закона надежности для сложных систем. Второе допущение означает, что при различных условиях эксплуатации справедливо соотношение

$$\lambda_i/\lambda_0 = K_i = \text{const}, \quad (4)$$

где λ_0 — интенсивность отказов элемента системы, количественные характеристики которого известны достоверно. Элемент, имеющий интенсивность отказов λ_0 , в дальнейшем будем называть основным элементом системы, а коэффициент K_i — коэффициентом надежности i -го элемента.

Полагая, что все однотипные элементы равнонадежны, и учитывая соотношение (4), запишем выражения для вероятности безотказной работы, интенсивности отказов и наработки до отказа системы:

$$P(t) = \exp\left(-t\lambda_0 \sum_{i=1}^r N_i K_i\right) =$$

$$= \exp(-\Lambda t);$$

$$\Lambda = \lambda_0 \sum_{i=1}^r N_i K_i;$$

$$T = 1 / \left(\lambda_0 \sum_{i=1}^r N_i K_i \right) =$$

$$= T_0 / \left(\sum_{i=1}^r N_i K_i \right), \quad (5)$$

где T_0 — среднее время безотказной работы основных элементов.

Из (5) следует, что для вычисления количественных характеристик достаточно знать коэффициенты надежности K_i , число элементов N_i и интенсивность отказов основного элемента λ_0 . Из анализа справочных данных по интенсивности отказов элементов можно установить максимальные и минимальные значения K_i основных элементов, используемых в изделии, т. е. определить диапазон изменения K_i ($K_{i \max}$, $K_{i \min}$). Уточнения коэффициентов производят с учетом ожидаемого повышения надежности элементов вследствие их усовершенствования и повышения качества изготовления или мер по облегчению условий и режимов их работы.

При расчете надежности системы коэффициентным методом целесообразно вести расчет по блокам и строить кривые $P(\lambda_0 t)$ для всех блоков системы на одном графике. Это позволяет наглядно сравнить блоки, выявить «слабые места», наметить пути повышения надежности проектируемой системы.

Для двух систем или блоков одной и той же системы согласно (5) можно записать:

$$P_1(t) = \exp\left(-t\lambda_0 \sum_{i=1}^{r_1} K_i N_{i,1}\right);$$

$$P_2(t) = \exp\left(-t\lambda_0 \sum_{i=1}^{r_2} K_i N_{i,2}\right);$$

$$\Lambda_1 = \lambda_0 \sum_{i=1}^{r_1} K_i N_{i,1};$$

$$\Lambda_2 = \lambda_0 \sum_{i=1}^{r_2} K_i N_{i,2};$$

$$T_1 = T_0 / \left(\sum_{i=1}^{r_1} K_i N_{i,1} \right);$$

$$T_2 = T_0 / \left(\sum_{i=1}^{r_2} K_i N_{i,2} \right)$$

или $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} =$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{r_2} K_i N_{i,1}}{\sum_{i=1}^{r_2} K_i N_{i,2}} =$$

$$= \frac{\ln P_2(t)}{\ln P_1(t)}$$

Таким образом, для сравнения вариантов достаточно знать их элементный состав и коэффициенты надежности.

Коэффициентный метод обладает приемлемой для практики точностью и позволяет значительно упростить расчеты, если требования по надежности отдельных элементов (частей) системы заданы не в виде их количественных характеристик, а в виде

$\sum_{i=1}^r N_i K_i$. Тогда

$$P(t) = \exp \left\{ -t\lambda_0 \left[\sum_{i=1}^{r_1} K_i N_{i,1} + \sum_{i=1}^{r_2} K_i N_{i,2} + \dots + \sum_{i=1}^{r_j} K_i N_{i,j} \right] \right\}, \quad (6)$$

где r_1, r_2, \dots, r_j — число типов элементов в блоках 1, 2, ..., j, $N_{i1}, N_{i2}, \dots, N_{ij}$ — число элементов i -го типа в блоках 1, 2, ..., j.

Зная требования по надежности на систему $P(t)$ в течение времени t и интенсивность отказов основного элемента λ_0 , из (6) получим

$$\sum_{i=1}^{r_1} K_i N_{i1} + \sum_{i=1}^{r_2} K_i N_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^{r_j} K_i N_{ij} = -\ln P(t) / (t\lambda_0).$$

Если не предпринимаются специальные меры по обеспечению надежности, то для проектируемой системы обычно

$$\sum_{i=1}^{r_1} K_i N_{i1} + \sum_{i=1}^{r_2} K_i N_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^{r_j} K_i N_{ij} > -\ln P(t) / t\lambda_0$$

или

$$a_1 \sum_{i=1}^{r_1} K_i N_{i1} + a_2 \sum_{i=1}^{r_2} K_i N_{i2} + \dots + a_j \sum_{k=1}^{r_j} K_i N_{ij} = \ln P(t) / t\lambda_0.$$

Весовые коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_j распределяются по элементам системы пропорционально их сложности так, чтобы равносложные элементы были равнонадежными. Тогда можно представить задаваемые требования к на-

дежности системы в виде $\sum_{i=1}^{r_k} K_i N_{ik}$.

Имея таблицу значений K_i , конструктор может выбрать тип элементов и их число в данной системе. Если на практике невозможно удовлетворить заданному значению суммы вида

$\sum_{i=1}^{r_k} K_i N_{ik}$, то необходимо предпринять специальные меры по повышению надежности элемента.

Коэффициентный метод расчета позволяет:

с приемлемой точностью сравнить надежность вариантов систем или их частей при ограниченных данных по надежности элементов и выбрать наилучший вариант;

достаточно точно пересчитать количественные характеристики надежности при изменении режимов работы системы;

упростить расчеты на раннем этапе проектирования.

Границы применения коэффициентного метода такие же, как и в методах, основанных на экспоненциальном законе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вопросы математической теории надежности/Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983. 367 с.
2. Половко А. М. Основы теории надежности. М.: Наука, 1964. 446 с.
3. Надежность технических систем: Справочник/Под ред. И. А. Ушакова. М.: Радио и связь, 1983. 606 с.

Глава 3. Расчет надежности систем со структурной избыточностью

1. СПОСОБЫ СОСТАВЛЕНИЯ УСЛОВИЙ РАБОТОСПОСОБНОСТИ СИСТЕМЫ

Способы описания условий работоспособности системы. Чтобы рассчитать надежность системы, нужно прежде всего описать условия ее работоспособности, т. е. условия, при которых она может выполнить стоящую перед ней задачу. Это можно сделать разными способами:

- а) словесным описанием;
- б) графически (с помощью структурной схемы системы);
- в) аналитически (например, с помощью функций алгебры логики — ФАЛ).

Словесное описание условий работоспособности системы является наиболее распространенным и простым, но, как правило, очень громоздким и недостаточно четким.

Графическое описание с помощью структурной схемы системы является очень наглядным, но, как правило, неполным и неоднозначным.

При построении моделей надежности простых структур и формализации процессов их функционирования создаются структурные схемы в виде ориентированного, полуориентированного и неориентированного графов. Во многих случаях структурная схема содержит полную информацию о логике возникновения отказов в системе. Тогда ее можно рассматривать как форму представления логических связей между событием «отказ системы» и событиями «отказы элементов», причем как форму, адекватную логической функции работоспособности. Такое соотношение между структурной схемой и ФАЛ харак-

терно для многосвязных информационных систем с одним источником информации, одним получателем при полном оповещении о состоянии сети, для электроэнергетических систем с одной группой потребителей без ограничения мощности генераторов и пропускной способности коммутационной аппаратуры и ряда других систем. Во всех этих случаях система считается работоспособной при наличии хотя бы одного работоспособного пути в структуре между ее полюсами. В дальнейшем такие системы будут называться системами первого типа.

В системах второго типа структурная схема не может отразить полностью логику возникновения отказа в системе. Для этого есть несколько причин.

Первая состоит в том, что работоспособность любого пути между полюсами может зависеть от работоспособности элементов, входящих в другой путь. Отразить эту зависимость в структурной схеме с бесповторным вхождением элементов не удастся. Поэтому структурная схема оказывается неадекватной логической функции работоспособности и является лишь вспомогательным средством при описании математической модели надежности системы.

Второй причиной, усложняющей логику работы системы, являются правила управления структурой. Учет этих правил может приводить к тому, что не все работоспособные пути можно использовать для связи входного и выходного полюсов (из-за различного рода ограничений, правил доступа к передаваемой информации, категоричности сообщений, неполноты информации о наличии работоспособного пути и др.).

Таким образом, условия работоспособности сложных технических систем не всегда сводятся к двухполюсной схеме функционирования. Структуры многих систем лишь частично выражают способ организации целого из состава частей, и в общем случае требуется дополнительное аналитическое описание условий работоспособности.

Формализованное (аналитическое) описание условий работоспособности системы (УРС) является наиболее четким, полным, однозначным, но пока еще малораспространенным и непростым.

При исследовании надежности сложных систем целесообразно использовать все способы описания условий работоспособности, компенсируя их взаимные недостатки и дополняя одно описание другим.

Недостатком многих существующих методов исследования надежности технических систем является именно невысокая степень формализации объекта исследования. Условия работоспособности системы часто выглядят весьма расплывчато, неконкретно.

В связи с многофункциональным характером сложных технических систем следует дробить задачи, а не стремиться к описанию единой сверхзадачи.

Основные понятия, используемые при формализации условий работоспособности структурно-сложных систем на языке алгебры логики. Основным и общим во всех работах, связанных со структурными исследованиями, является стремление очистить объект исследования от всего вторичного, рассмотреть лишь его наиболее характерные признаки. При исследовании систем на ранних этапах их проектирования объект исследования оказывается «очищенным» естественным способом из-за недостатка информации о его свойствах.

Таким образом, в качестве модели системы выбирают структурную схему, изображающую некоторую совокупность отношений.

Структурная схема системы — графическое изображение совокупности ее структурных элементов и

функционально-логических связей между ними, предназначенное для формализации УРС. На структурной схеме все элементы системы равноценны, и это подчеркивается их одинаковым графическим изображением (в виде кружка или квадрата) и одинаковым обозначением одной и той же буквой с различными номерами. Способ соединения элементов в функциональной схеме раскрывает структуру системы.

Структурный элемент системы — условный эквивалентный элемент, обладающий количественными характеристиками надежности некоторой совокупности последовательно соединенных (в функциональном смысле) реальных элементов системы.

В литературе по надежности достаточно подробно описана модель функционирования системы, используемая для исследования надежности систем с разветвленной структурой, которая может находиться только в двух характерных состояниях: в состоянии полной работоспособности ($y = 1$) и в состоянии полного отказа ($y = 0$). При этом предполагается, что действие системы детерминированно зависит от действия ее элементов, т. е. y является функцией $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, которые в свою очередь могут находиться также только в двух несовместных состояниях: либо в состоянии полной работоспособности ($x_i = 1$), либо в состоянии полного отказа ($x_i = 0$). В целом это предположение является до некоторой степени условным. Однако оно обладает тем бесспорным достоинством, что приводит к модели, которая имеет строгое аналитическое решение и является достаточно реальной.

Функцию алгебры логики, связывающую состояние элементов с состоянием системы

$$y(x_1, \dots, x_n) = y(\bar{x}), \quad (1)$$

будем называть *функцией работоспособности* системы (ФРС) или *условиями работоспособности* системы (УРС).

Функцию $y(x_1, \dots, x_n)$ называют *монотонной*, если для любых наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, таких, что $\alpha_i \leq \beta_i$, имеет место соотношение

$$y(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq y(\beta_1, \dots, \beta_n). \quad (2)$$

Системы, удовлетворяющие этим условиям, называют системами с *монотонной* структурой, или *связанной* структурой, или *когерентной* структурой.

Всякая ФАЛ, записанная через конъюнкцию и дизъюнкцию (без отрицания), задает некоторую монотонную функцию. Для монотонных структур функцию работоспособности системы можно записать с помощью так называемых кратчайших путей успешного функционирования и минимальных сечений отказов системы.

Кратчайший путь успешного функционирования системы (КПУФ) представляет собой такую конъюнкцию ее элементов, когда ни одну из компонент ее нельзя изъять, не нарушив функционирования системы. Такую конъюнкцию можно записать в виде следующей ФАЛ:

$$\mathcal{P}_l = \bigwedge_{i \in K_{\mathcal{P}_l}} x_i, \quad (3)$$

где $K_{\mathcal{P}_l}$ означает множество номеров, соответствующих данному пути.

Иначе говоря, кратчайший путь успешного функционирования системы описывает один из возможных самостоятельных вариантов выполнения задачи, стоящей перед системой, с помощью минимального набора работоспособных элементов, абсолютно необходимых для осуществления данного варианта работы системы.

Минимальное сечение отказов системы (МСО) представляет собой такую конъюнкцию из отрицаний ее элементов, когда ни одну из компонент нельзя изъять, не нарушив условий неработоспособности системы. Такую конъюнкцию можно записать в виде следующей ФАЛ:

$$S_j = \bigwedge_{i \in K_{S_j}} x'_i, \quad (4)$$

где K_{S_j} означает множество номеров, соответствующих данному сечению.

Другими словами, минимальное сечение отказов системы описывает один из возможных способов нарушения работоспособности системы с помощью минимального набора отказавших элементов.

Каждая избыточная система имеет конечное число кратчайших путей ($l = 1, 2, \dots, d$) и минимальных сечений ($j = 1, 2, \dots, m$). Используя эти понятия, можно по-разному записать условия работоспособности системы:

а) либо в виде дизъюнкции всех имеющихся кратчайших путей успешного функционирования

$$y(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{l=1}^d \mathcal{P}_l = \bigvee_{l=1}^d \left[\bigwedge_{i \in K_{\mathcal{P}_l}} x_i \right]; \quad (5)$$

б) либо через конъюнкцию отрицаний всех минимальных сечений отказов

$$y(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j=1}^m S_j = \bigwedge_{j=1}^m \left[\bigwedge_{i \in K_{S_j}} x'_i \right]. \quad (6)$$

Таким образом, условия работоспособности реальной системы можно представить в виде условий работоспособности некоторой эквивалентной (в смысле надежности) системы, структура которой представляет параллельное соединение кратчайших путей успешного функционирования, или другой эквивалентной системы, структура которой представляет последовательное соединение отрицаний минимальных сечений.

Пример 1. Составим условия работоспособности автономной электроэнергетической системы, принципиальная схема которой изображена на рис. 1, а. Пусть для этой системы необходимо оценить надежность обеспечения питанием ответственных потребителей, подключенных к распределительному щиту РЩ1.

Решение. Поставленную задачу можно выполнить с помощью различных комбинаций элементов системы. В самом деле, указанные потребители получают питание, если будут исправлены генератор Г1, главный распределительный щит ГРЩ1; кабель К1 и распределительный щит РЩ1, или если будут исправны гене-

ратор Г1, ГРЩ1, переключатель П, ГРЩ2, кабель К2 и РЩ1, или если будут исправны генератор Г2, ГРЩ2, кабель К2 и РЩ1, или если будут исправны генератор Г2, ГРЩ2, переключатель П, ГРЩ1, кабель К1 и РЩ1.

Если это громоздкое словесное описание перевести на язык алгебры логики, то ФРС данной системы с помощью КПУФ в матричной форме запишется следующим образом:

$$y(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ \mathcal{P}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 x_3 x_5 x_7 \\ x_1 x_3 x_6 x_4 x_6 x_7 \\ x_2 x_4 x_6 x_7 \\ x_2 x_4 x_8 x_3 x_5 x_7 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

где конъюнкции обозначены расположением логических символов в строке, а дизъюнкции — их расположением в столбце.

К логическим матрицам применимы все известные преобразования алгебры логики. Так, переместительный закон конъюнкции допускает перестановку логических символов в строке, а переместительный закон дизъюнкции — перестановку строк логической матрицы.

Работоспособность этой же системы через минимальные сечения отказов можно записать в следующем виде:

$$y(x_1, \dots, x_8) = | S'_1 \ S'_2 \quad S'_{10} | = \begin{vmatrix} x_7 & x_1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & x_2 \\ & x_2 & x_4 & x_3 & x_4 & x_6 & x_5 & x_6 & x_6 & x_5 \\ & & & & & & & & x_8 & x_8 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Условия работоспособности (7) и (8) графически можно представить в виде двух схем (рис. 2), эквивалентных в смысле логики реальной системе, структурная мостиковая схема которой приведена на рис. 1, б.

Действительно, из рис. 2 следует, что поставленная перед системой задача (питание потребителей от щита x7)

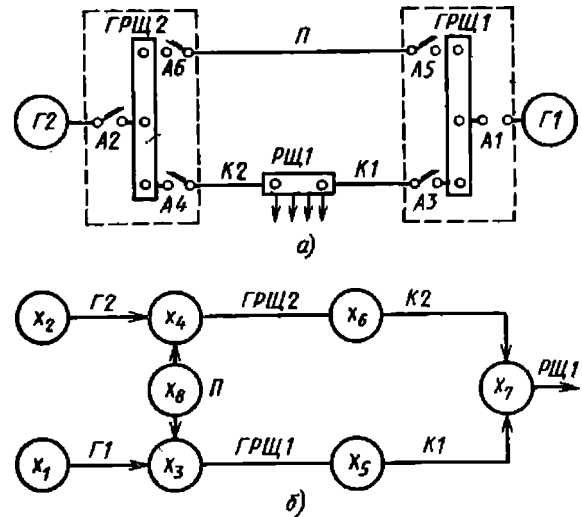


Рис. 1. Схемы автономной электроэнергетической системы

будет выполнена, если сохранится хотя бы один из четырех путей успешного функционирования или при условии исправности всех десяти сечений данной системы.

Формализованный способ составления функции работоспособности системы с помощью ЭВМ. В соответствии с этим способом сначала необходимо пронумеровать на структурной схеме системы все вершины. Затем следует вычертить так называемый *граф переходов* (или логических связей), который представляет собой структуру, состоящую из вершин и ориентированных дуг, изображаемых в виде линий между парами вершин и снабженных стрелками, указывающими направление от одной вершины к другой. Обозначение дуг (b) записывается в виде конъюнкций тех элементов, работа которых обеспечивает связь соответствующих вершин. Граф переходов дает возможность исследователю отчетливо представить различные свойства системы, в том числе составить ФРС формальными методами (в отличие от эвристических).

В тех случаях, когда указанная формализация не может быть выполнена визуально или когда граф переходов настолько сложен, что использование визуальной методики бесполезно, необходимо составить матрицу переходов. *Матрица переходов* (соединений, смежности или непосредственных связей) является математической копией графа переходов.

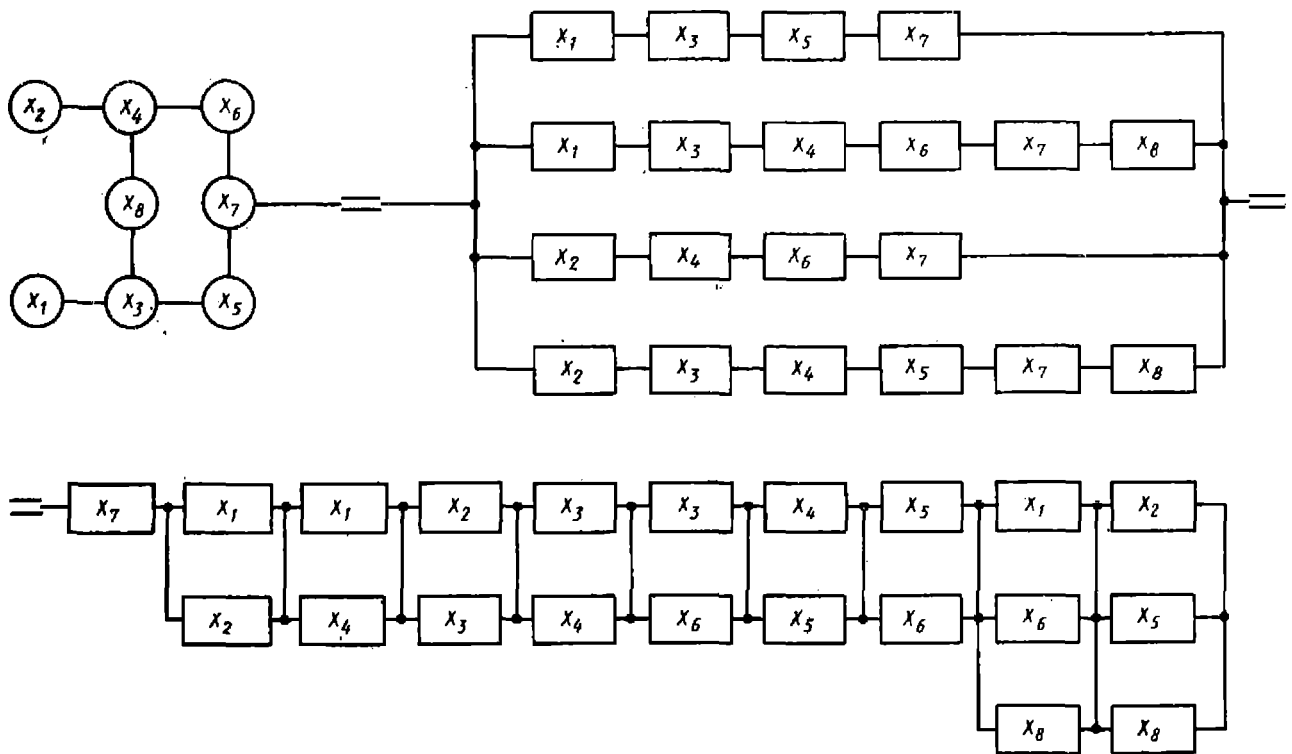


Рис. 2. Логические схемы работоспособности системы

Пусть матрица переходов состоит из k строк и k столбцов (где k — число всех вершин). Обозначим булеву матрицу переходов через $\|C\|$. Элемент (i, j) , т. е. содержимое клетки, расположенной на пересечении i -й строки и j -го столбца матрицы $\|C\|$, обозначают через C_{ij} и определяют следующим образом:

$$C_{ij} = \begin{cases} b_{i,j}, & \text{если вершина } i \text{ логически} \\ & \text{связана с вершиной } j, \\ 0, & \text{если эта связь} \\ & \text{отсутствует,} \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad (9)$$

Затем с помощью ЭВМ формируется логическая функция работоспособно-

сти системы $y(x_1, \dots, x_n)$ путем умножения булевой матрицы переходов саму на себя r раз ($r \leq k$) и соответствующих преобразований логических переменных, входящих в элементы матрицы $\|C\|$. Указанные преобразования должны выполняться по правилам и законам алгебры логики. Каждый элемент матрицы $\|C\|$ в соответствии с условием (9) означает только непосредственные связи вершин. Опосредованные связи, состоящие из нескольких последовательных дуг, будем связывать путями, а число дуг, входящих в путь, — длиной пути. Возводя матрицу непосредственных связей, например, в квадрат, можно установить все связи длиной в одну и две дуги; возводя в куб, —

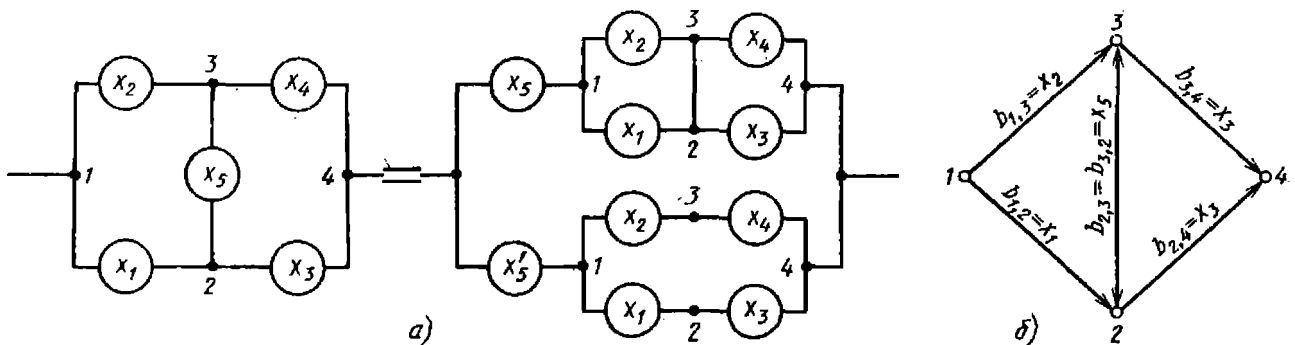


Рис. 3. Мостиковая система (а) и граф переходов (б)

получить все связи длиной в одну, две и три дуги, и так далее до $r \leq k$.

Пример 2. Составим функцию работоспособности простой мостиковой системы, изображенной на рис. 3, а, формализованным методом.

Р е ш е н и е.

Пронумеруем все вершины цифрами 1, 2, 3, 4.

Вычертим граф переходов, как показано на рис. 3, б.

Составим матрицу переходов в виде табл. 1.

Перемножим эту матрицу 3 раза саму на себя:

1. Матрица переходов

Вершина	Вершина			
	1	2	3	4
1	1	x_1	x_2	0
2	0	1	x_5	x_3
3	0	x_5	1	x_4
4	0	0	0	1

$$\begin{aligned}
 \|C\|^2 &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & x_3 \\ 0 & x_5 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & x_3 \\ 0 & x_5 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 1 \cdot 1 \vee x_1 \cdot 0 \vee x_2 \cdot 0 \vee 0 \cdot 0 & 1 \cdot x_1 \vee x_1 \cdot 1 \vee x_2 \cdot x_5 \vee 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 \vee 1 \cdot 0 \vee x_5 \cdot 0 \vee x_3 \cdot 0 & 0 \cdot x_1 \vee 1 \cdot 1 \vee x_5 \cdot x_5 \vee x_3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 \vee x_5 \cdot 0 \vee 1 \cdot 0 \vee x_4 \cdot 0 & 0 \cdot x_1 \vee x_5 \cdot 1 \vee 1 \cdot x_5 \vee x_4 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 \vee 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 0 & 0 \cdot x_1 \vee 0 \cdot 1 \vee 0 \cdot x_5 \vee 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_5 \vee x_2 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 \vee x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_4 \vee 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot x_2 \vee 1 \cdot x_5 \vee x_5 \cdot 1 \vee x_3 \cdot 0 & 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot x_3 \vee x_5 \cdot x_4 \vee x_3 \cdot 1 \\ 0 \cdot x_2 \vee x_5 \cdot x_5 \vee 1 \cdot 1 \vee x_4 \cdot 0 & 0 \cdot 0 \vee x_5 \cdot x_3 \vee 1 \cdot x_4 \vee x_4 \cdot 1 \\ 0 \cdot x_2 \vee 0 \cdot x_5 \vee 0 \cdot 1 \vee 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 \vee 0 \cdot x_3 \vee 0 \cdot x_4 \vee 1 \cdot 1 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 \vee x_2 x_5 & x_2 \vee x_1 x_5 & x_1 x_3 \vee x_2 x_4 \\ 0 & 1 & x_5 & x_3 \vee x_4 x_5 \\ 0 & x_5 & 1 & x_4 \vee x_3 x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \tag{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|C\|^3 &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 \vee x_2 x_5 & x_2 \vee x_1 x_5 & x_1 x_3 \vee x_2 x_4 \\ 0 & 1 & x_5 & x_3 \vee x_4 x_5 \\ 0 & x_5 & 1 & x_4 \vee x_3 x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & x_3 \\ 0 & x_5 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 1 \cdot 1 \vee (x_1 \vee x_2 x_5) \cdot 0 \vee (x_2 \vee x_1 x_5) \cdot 0 \vee (x_1 x_3 \vee x_2 x_4) \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 \vee 1 & -0 \vee x_5 & -0 \vee (x_3 \vee x_4 x_5) \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 \vee x_5 & -0 \vee 1 & -0 \vee (x_4 \vee x_3 x_5) \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 \vee 0 & -0 \vee 0 & -0 \vee 1 & -0 \\ 1 \cdot x_1 \vee (x_1 \vee x_2 x_5) \cdot 1 \vee (x_2 \vee x_1 x_5) \cdot x_5 \vee (x_1 x_3 \vee x_2 x_4) \cdot 0 \\ 0 \cdot x_1 \vee 1 & -1 \vee x_5 & -x_5 \vee (x_3 \vee x_4 x_5) \cdot 0 \\ 0 \cdot x_1 \vee x_5 & -1 \vee 1 & -x_5 \vee (x_4 \vee x_3 x_5) \cdot 0 \\ 0 \cdot x_1 \vee 0 & -1 \vee 0 & -x_5 \vee 1 & -0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 1 \cdot x_2 \vee (x_1 \vee x_2 x_5) \cdot x_5 \vee (x_2 \vee x_1 x_5) \cdot 1 \vee (x_1 x_3 \vee x_2 x_4) \cdot 0 \\
 0 \cdot x_2 \vee 1 \cdot x_5 \vee x_5 \cdot 1 \vee (x_3 \vee x_4 x_5) \cdot 0 \\
 0 \cdot x_2 \vee x_5 \cdot x_5 \vee 1 \cdot 1 \vee (x_4 \vee x_3 x_5) \cdot 0 \\
 0 \cdot x_2 \vee 0 \cdot x_5 \vee 0 \cdot 1 \vee 1 \cdot 0 \\
 1 \cdot 0 \vee (x_1 \vee x_2 x_5) \cdot x_3 \vee (x_2 \vee x_1 x_5) \cdot x_4 \vee (x_1 x_3 \vee x_2 x_4) \cdot 1 \\
 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot x_3 \vee x_5 \cdot x_4 \vee (x_3 \vee x_4 x_5) \cdot 1 \\
 0 \cdot 0 \vee x_5 \cdot x_3 \vee 1 \cdot x_4 \vee (x_4 \vee x_3 x_5) \cdot 1 \\
 0 \cdot 0 \vee 0 \cdot x_3 \vee 0 \cdot x_4 \vee 1 \cdot 1
 \end{array} \Bigg| =$$

$$= \left| \begin{array}{cccccc}
 1 & x_1 \vee x_2 x_5 & x_2 \vee x_1 x_5 & x_1 x_3 \vee x_2 x_3 x_5 & x_2 x_4 \vee x_1 x_4 x_5 & \\
 0 & 1 & x_5 & x_3 \vee x_4 x_5 & & \\
 0 & x_5 & 1 & x_4 \vee x_3 x_5 & & \\
 0 & 0 & 0 & 1 & &
 \end{array} \right|. \quad (11)$$

На основании условий поставленной задачи (связь вершины 1 с вершиной 4) запишем следующую ФРС:

$$y(x_1, \dots, x_5) = x_1 x_3 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_2 x_4 \vee x_1 x_4 x_5 = \left| \begin{array}{c|c}
 x_1 & x_3 \\
 & x_4 x_5 \\
 x_2 & x_4 \\
 & x_3 x_5
 \end{array} \right|. \quad (12)$$

В примере 2 формализованный метод составления ФРС оказался более громоздким по сравнению с визуальным способом составления этой простой ФАЛ. Но в случае сложной структуры, когда визуальный способ становится малоприменимым, с помощью ЭВМ можно получить ФРС и сложной системы.

Пример получения ФРС указанным способом для случая, когда ФРС содержала 92 КПУФ, а также способ составления ФРС (с помощью системы логических уравнений), позволяющий избежать многих ошибок на этапе записи ФРС, приведены в работе [7].

2. ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ БЕЗ УЧЕТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

АЛГОРИТМ РАЗРЕЗАНИЯ

Покажем, как можно практически осуществить переход от некоторой ФРС к ее вероятностной функции (ВФ).

Вероятностной функцией будем называть вероятность истинности ФАЛ

$$P\{y(x_1, \dots, x_n) = 1\}. \quad (13)$$

Алгоритм разрезания основан на теореме разложения ФАЛ, согласно которой ФАЛ путем вынесения какой-либо переменной и ее отрицания можно представить в виде

$$y(x_1, \dots, x_n) = x_i y_1^{(i)}(x_1, \dots, 1, \dots, x_n) \vee x_i' y_0^{(i)}(x_1, \dots, 0, \dots, x_n). \quad (14)$$

Таким образом, если аргумент x_i функции y является совместной двоичной переменной, то путем преобразования (14) переходим к дизъюнкции двух несовместных высказываний, причем в первое высказывание аргумент x_i входит своим утверждением, а во второе — отрицанием x_i' . Функции y_1 и y_0 отличаются от функции y тем, что в них везде вместо аргумента x_i поставлены соответственно единица и нуль (в соответствии с этим выбраны и индексы у функции y_1 и y_0).

Теорема разложения позволяет свети мостиковую схему к последовательно-параллельным структурам.

Действительно, если условие работоспособности системы описывается уравнением (12), то, вынося аргумент x_5 по формуле (14), получим

$$y = x_5 \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline & 1 \ x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline & 1 \ x_3 \end{array} \right| \vee x'_5 \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline & 0 \ x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline & 0 \ x_3 \end{array} \right|. \quad (15)$$

Упростим теперь функции $y_1^{(5)}$ и $y_0^{(5)}$ с помощью правил алгебры логики [8]:

$$\left. \begin{aligned} y_1^{(5)} &= \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline & 1 \ x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline & 1 \ x_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline & x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline & x_3 \end{array} \right|; \\ y_0^{(5)} &= \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline & 0 \ x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline & 0 \ x_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline & 0 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline & 0 \end{array} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Вынося за скобки $(x_3 \vee x_4)$ в выражении для $y_1^{(5)}$ и упрощая $y_0^{(5)}$, окончательно получим

$$y = \left| \begin{array}{c|c} x_5 & x_1 \ x_3 \\ \hline & x_2 \ x_4 \\ \hline x'_5 & x_1 \ x_3 \\ \hline & x_2 \ x_4 \end{array} \right|. \quad (17)$$

Из выражения (17) следует, что мостиковая схема эквивалентна дизъюнкции двух последовательно-параллельных схем, в которых в первом случае точки 2 и 3 (см. рис. 3, а) замкнуты накоротко, а во втором — разомкнуты.

Чтобы не ошибиться при таких преобразованиях и выполнять их формально (не задумываясь над физической стороной вопроса), применяем алгоритм разрезания, который заключается в следующем.

1. Подсчитываем число вхождений каждой буквы x_i в уравнение функции $y(x_1, \dots, x_n)$:

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) = \{m_i\}. \quad (18)$$

2. Среди чисел m_i находим максимальное и соответствующую букву (не ограничивая общности, можно считать, что это будет x_1) полагаем равной сначала нулю, затем единице, и для каждого случая отдельно выписываем результат подстановки соответствующей константы в $y(x_1, x_n)$:

$$x_1 = 0; \quad y_0 = y(0, x_2, \dots, x_n) = y_0(x_2, \dots, x_n); \quad (19)$$

$$x_1 = 1; \quad y_1 = y(1, x_2, \dots, x_n) = y_1(x_2, \dots, x_n). \quad (20)$$

Эту операцию назовем разрезанием до переменной x_1 .

3. Преобразовываем y_0 и y_1 .

4. После применения указанных преобразований и упрощения функций y_0 и y_1 может оказаться, что любая из них либо превращается в константу, либо принимает такой вид, что каждая из оставшихся букв будет входить в выражение функции не более одного раза, либо принимает вид, когда хотя бы одна из букв входит в выражение функции более одного раза.

Проверяем, какой из трех случаев имеет место для y_0 и для y_1 .

5. Если имеет место третий случай, то для соответствующей функции опять вычисляем величины (m_i) для всех оставшихся в явном виде букв и опять производим разрезание функции по переменной, соответствующей максимуму m_i . Не ограничивая общности, полагаем, что такой переменной окажется x_2 . Вновь полученные функции обозначим

$$y_{00} = y_0(0, x_3, \dots, x_n) = y_{00}(x_3, \dots, x_n); \quad (21)$$

$$y_{01} = y_0(1, x_3, \dots, x_n) = y_{01}(x_3, \dots, x_n), \quad (22)$$

если разрезанию подвергалась функция y_0 , или

$$y_{10} = y_1(0, x_3, \dots, x_n) = y_{10}(x_3, \dots, x_n); \quad (23)$$

$$y_{11} = y_1(1, x_3, \dots, x_n) = y_{11}(x_3, \dots, x_n), \quad (24)$$

если разрезанию подвергалась функция y_1 (может случиться, конечно, что разрезаются обе функции: y_0 и y_1).

К полученной таким образом системе функции применяем упрощающие преобразования, а затем выполняем действия, указанные в пп. 4 и 5. Эти действия выполняем до тех пор, пока на очередном шаге не ока-

жется, что ни для одной из функций не имеет места третий случай, указанный в п. 4.

Рассмотренный процесс не бесконечен, ибо если произвести разрезание сразу по всем переменным, то получим только константы.

Пример 3. Применим алгоритм разрезания к ФРС (7), предварительно вынеся общий аргумент x_7 за скобки:

$$y(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = x_7 \left| \begin{array}{c|ccc} x_1 & x_3 & & x_5 \\ & & & x_8 & x_4 & x_6 \\ & x_2 & x_4 & & & x_6 \\ & & & & & x_8 & x_3 & x_5 \end{array} \right| = x_7 y^* \quad (25)$$

Решение. В уравнение для y^* буквы x_1 и x_2 входят по одному разу, а остальные — по два раза.

Среди чисел m_i максимальным является число два, но букв, входя-

щих в (25) по два раза, пять. Поэтому для первого разрезания можно взять любую из них. Возьмем для примера букву x_8 и разобьем сложное событие y^* на два несовместных события:

$$y^* = \left| \begin{array}{c|ccc} x_1 & x_3 & & x_5 \\ & & & x_8 & x_4 & x_6 \\ & x_2 & x_4 & & & x_6 \\ & & & & & x_8 & x_3 & x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|ccc} x'_8 & x_1 & x_3 & x_5 \\ & x_2 & x_4 & x_6 \\ & & & 0 & x_3 & x_5 \\ x_8 & x_1 & x_3 & x_5 \\ & x_2 & x_4 & x_6 \\ & & & 1 & x_4 & x_6 \\ & & & 1 & x_3 & x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|ccc} x'_8 & y_0 & \\ & x_8 & y_1 \end{array} \right| \quad (26)$$

Преобразуем y_0 и y_1 :

$$y_0 = \left| \begin{array}{c|ccc} x_1 & x_3 & & x_5 \\ & & & 0 & x_4 & x_6 \\ & x_2 & x_4 & & & x_6 \\ & & & & & 0 & x_3 & x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|ccc} x_1 & x_3 & & x_5 \\ & & & 0 \\ & x_2 & x_4 & & & x_6 \\ & & & & & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|ccc} x_1 & x_3 & x_5 \\ & & & x_2 & x_4 & x_6 \end{array} \right|; \quad (27)$$

$$y_1 = \left| \begin{array}{c|ccc} x_1 & x_3 & & x_5 \\ & & & 1 & x_4 & x_6 \\ & x_2 & x_4 & & & x_6 \\ & & & & & 1 & x_3 & x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|ccc} x_1 & x_3 & & x_5 \\ & & & x_4 & x_6 \\ & x_2 & x_4 & & & x_6 \\ & & & & & x_3 & x_5 \end{array} \right| \quad (28)$$

В уравнение (27) все буквы входят только по одному разу, поэтому функция y_0 будет бесповторной. *Бесповторной* формой ФАЛ называют та-

кую форму, в которой все буквы имеют разные номера. В уравнение (28) буквы x_3 , x_4 , x_5 и x_6 все еще входят по два раза, поэтому нужно продол-

жить преобразование y_1 , произведя разрезание, например, по x_3 . | Разрезаем функцию y_1 по аргументу x_3 :

$$y_1 = x'_3 \left| \begin{array}{c|c} x_1 & 0 \\ \hline x_2 & x_4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} x_5 & \\ \hline x_4 & x_6 \\ \hline 0 & x_5 \end{array} \right| \vee x_3 \left| \begin{array}{c|c} x_1 & 1 \\ \hline x_2 & x_4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} x_5 & \\ \hline x_4 & x_6 \\ \hline 1 & x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x'_3 & y_{10} \\ \hline x_3 & y_{11} \end{array} \right|. \quad (29)$$

Преобразуем y_{10} и y_{11} :

$$y_{10} = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & 0 \\ \hline x_2 & x_4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} x_5 & \\ \hline x_4 & x_6 \\ \hline 0 & x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 0 & x_5 \\ \hline x_2 & x_4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} x_4 & x_6 \\ \hline x_6 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_2 & x_4 & x_6 \end{array} \right|; \quad (30)$$

$$y_{11} = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & 1 \\ \hline x_2 & x_4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} x_5 & \\ \hline x_4 & x_6 \\ \hline 1 & x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline x_2 & x_4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} x_4 & x_6 \\ \hline x_6 & x_5 \end{array} \right|. \quad (31)$$

Функция y_{10} будет бесповторной функцией, а функцию y_{11} требуется подвергнуть дополнительному разре-

занию по какой-нибудь из следующих букв: x_4, x_5, x_6 .
Произведем разрезание по x_4 :

$$y_{11} = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline x_2 & x_4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} x_5 & \\ \hline x_4 & x_6 \\ \hline x_6 & x_5 \end{array} \right| = x'_4 \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline x_2 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} x_5 & \\ \hline 0 & x_6 \\ \hline x_6 & x_5 \end{array} \right| \vee x_4 \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline x_2 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} x_5 & \\ \hline 1 & x_6 \\ \hline x_6 & x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x'_4 & y_{110} \\ \hline x_4 & y_{111} \end{array} \right|. \quad (32)$$

Преобразуем y_{110} и y_{111} :

$$y_{110} = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline x_2 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} x_5 & \\ \hline 0 & x_6 \\ \hline x_6 & x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline 0 & x_6 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} x_5 & \\ \hline x_6 & x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \end{array} \right|; \quad (33)$$

$$y_{111} = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline x_2 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} x_5 & \\ \hline 1 & x_6 \\ \hline x_6 & x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline x_2 & x_6 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} x_5 & \\ \hline x_6 & x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline x_2 & x_6 \end{array} \right|. \quad (34)$$

Теперь все функции стали бесповторными, не подлежащими дальнейшему преобразованию.

Подставим все найденные функции в уравнение (25), последовательно раскрывая значения аргументов:

$$y^* = \left| \begin{array}{c|c} x'_8 & y_0 \\ \hline x_8 & y_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c|c} x'_8 & y_0 & \\ \hline x_8 & x'_3 & y_{10} \\ & x_3 & y_{11} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c|c|c} x'_8 & y_0 & & \\ \hline x_8 & x'_3 & y_{10} & \\ & x_3 & x'_4 & y_{110} \\ & & x_4 & y_{111} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} x'_8 & x_1 & x_3 & x_5 & \\ \hline & x_2 & x_4 & x_6 & \\ & x_8 & x'_3 & x_2 & x_4 & x_6 \\ & & x_3 & x'_4 & x_1 & x_5 \\ & & & x_4 & x_1 & x_5 \\ & & & & x_2 & x_6 \end{array} \right|. \quad (35)$$

Уравнение (35) полезно представить в виде

$$y^* = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} x'_8 & x_1 & x_3 & x_5 & \\ \hline & x_2 & x_4 & x_6 & \\ & x_8 & x'_3 & x_2 & x_4 & x_6 \\ & x_8 & x_3 & x'_4 & x_1 & x_5 \\ & x_8 & x_3 & x_4 & x_1 & x_5 \\ & & & x_2 & x_6 & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c|c|c} H_1 & x_1 & x_3 & x_5 \\ \hline & x_2 & x_4 & x_6 \\ H_2 & x_2 & x_4 & x_6 \\ H_3 & x_1 & x_5 \\ H_4 & x_1 & x_5 \\ & x_2 & x_6 \end{array} \right|, \quad (36)$$

где буквами H обозначены несовместные (ортогональные) гипотезы, т. е.

$$\begin{aligned} H_1 &= x'_8, & H_2 &= x_8 x'_3, & H_3 &= x_8 x_3 x'_4, \\ H_4 &= x_8 x_3 x_4. \end{aligned} \quad (37)$$

Расчеты надежности системы с помощью алгоритма разрезания целесообразно сопровождать одновременным построением графа состояний системы (рис. 4). Это особенно полезно делать при большом числе разрезаний, что обеспечивает наглядность и упорядоченность последующих ве-

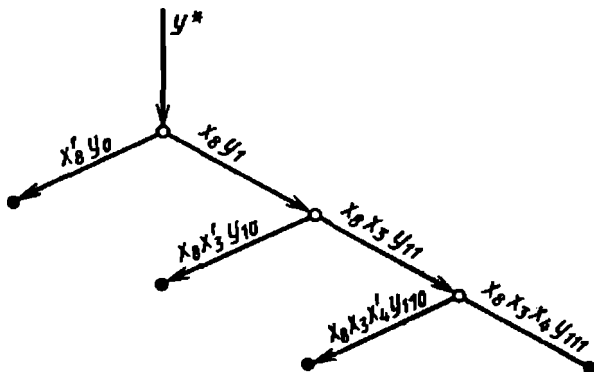


Рис. 4. Граф состояний системы

роятностных вычислений по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P \{y(x_1, \dots, x_n) = 1\} &= R_c = \\ &= \sum_{i=1}^m P(H_i) P(y | H_i), \end{aligned} \quad (38)$$

где события H_i образуют полную группу несовместных гипотез, а $P(y | H_i)$ — условные вероятности исправного состояния системы при каждой гипотезе H_i .

Для данных примера 3 формулу (38) можно записать в виде

$$\begin{aligned} P \{y = 1\} &= P \{x_7 = 1\} P \{y^* = 1\} = \\ &= P \{x_7 = 1\} [P(H_1) P(y^* | H_1) + \\ &+ P(H_2) P(y^* | H_2) + P(H_3) \times \\ &\times P(y^* | H_3) + P(H_4) P(y^* | H_4)] = \\ &= P \{x_7 = 1\} [P \{x'_8 = 1\} P \{y_0 = 1\} + \\ &+ P \{x_8 x'_3 = 1\} P \{y_{10} = 1\} + \\ &+ P \{x_8 x_3 x'_4 = 1\} P \{y_{110} = 1\} + \\ &+ P \{x_8 x_3 x_4 = 1\} P \{y_{111} = 1\}]. \end{aligned} \quad (39)$$

Если отказы элементов можно считать независимыми событиями, то отдельные вероятности в (39) равны

$$\left. \begin{aligned}
 P\{x_7 = 1\} &= R_7; & P\{x'_8 = 1\} &= Q_8; & P\{y_0 = 1\} &= \\
 &= 1 - (1 - R_1 R_3 R_5)(1 - R_2 R_4 R_6); & P\{x_8 x'_3 = 1\} &= R_8 Q_3; \\
 P\{y_{10} = 1\} &= R_2 R_4 R_6; & P\{x_8 x_3 x'_4 = 1\} &= R_8 R_3 Q_4; \\
 P\{y_{110} = 1\} &= R_1 R_5; & P\{x_8 x_3 x_4 = 1\} &= R_8 R_3 R_4; & P\{y_{111} = 1\} &= \\
 &= (1 - Q_1 Q_2)(1 - Q_5 Q_6).
 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Приняв допущение о равной надежности всех элементов ($R_1 = R_2 = \dots = R_8 = R$), определим вероятность безотказной работы системы в виде полинома

$$\begin{aligned}
 P\{y = 1\} &= R_c = R \{(1 - R) \times \\
 &\times [1 - (1 - R^3)(1 - R^3)] + \\
 &+ R(1 - R)R^3 + R^2(1 - R)R^2 + \\
 &+ R^3[1 - (1 - R)^2]^2\} = \\
 &= 2R^4 + 2R^6 - 5R^7 + 2R^8. \quad (41)
 \end{aligned}$$

МЕТОД РАСЧЕТА С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

В некоторых случаях переход от повторной ФАЛ к ВФ удобнее реализовать (например, с помощью ЭВМ) не по формуле полной вероятности, а с помощью теоремы сложения вероятностей несовместных событий. С этой целью разработан специальный алгоритм, основанный на преобразовании произвольной ФАЛ в ортогональную дизъюнктивную нормальную форму (ОДНФ).

ДНФ называют *ортогональной* ДНФ, если все ее члены попарно ортогональны. Две элементарные конъюнкции называют ортогональными, если

$$(x_1 x_2 \dots x_r)^s = \begin{vmatrix} x_1^s \\ x_2^s \\ x_3^s \\ \vdots \\ x_r^s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_1 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_2 x_3 \\ \vdots \\ x_1 x_2 x_3 x_4 \end{vmatrix} \quad x_{r-1} x_r^s \quad (45)$$

Утверждение 2. Булева функция $y(x_1, \dots, x_n)$, представленная в ДНФ в виде

$$y(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^m K_i \quad (i \leq 2^n), \quad (46)$$

их произведение равно нулю. Например, произведение элементарных конъюнкций $x_1 x'_2$ и $x_1 x_2 x_3$ равно нулю, так как одна из них содержит x'_2 , а другая x_2 и, следовательно, они ортогональны.

Для описания алгоритма ортогонализации сформулируем два утверждения.

Утверждение 1. Отрицание элементарной конъюнкции ранга r

$$K_i = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_r^{\alpha_r} \quad (42)$$

эквивалентно дизъюнкции

$$\begin{aligned}
 K'_i &= x_1^{\alpha_1} \vee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \vee \dots \vee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \\
 &x_{r-1}^{\alpha_{r-1}} x_r^{\alpha_r}, \quad (43)
 \end{aligned}$$

члены которой попарно ортогональны. Здесь «степень» аргумента x_i означает

$$x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, & \text{если } \alpha_i = 1; \\ x'_i, & \text{если } \alpha_i = 0, \end{cases} \quad (44)$$

α_i — двоичная переменная величина.

Преобразование (43) в частном случае (когда в элементарной конъюнкции отсутствуют отрицания) имеет вид

эквивалентна функции

$$\begin{aligned}
 y(x_1, \dots, x_n) &= K_1 \vee K'_1 K_2 \vee \\
 &\vee K'_1 K'_2 K_3 \vee \dots \vee K'_1 K'_2 K'_3 \dots \\
 &\dots K'_{m-1} K_m. \quad (47)
 \end{aligned}$$

В матричной форме записи уравнения (46) и (47) будут иметь вид

$$y(x_1, \dots, x_n) = \left| \begin{array}{c|c} K_1 & K_1 \\ K_2 & K'_1 K_2 \\ K_3 & K'_1 K'_2 K_3 \\ \vdots & \vdots \\ K_m & K'_1 K'_2 K'_3 K'_4 \dots K'_{m-1} K_m \end{array} \right|. \quad (48)$$

Теперь дадим краткое описание алгоритма преобразования функции $y(x_1, \dots, x_n)$ к ОДНФ.

1. Преобразовываем сначала функцию $y(x_1, \dots, x_n)$ к ДНФ.

2. Производим нумерацию членов ДНФ от 1 до m ($m \leq 2^n$), причем членам низшего ранга присваиваем низшие номера.

3. Определяем ОДНФ функции $y(x_1, \dots, x_n)$ с помощью преобразования (48).

Для уменьшения числа операций целесообразно в конъюнкции $K'_1 K'_2 \dots K'_{i-1} K_i$ выполнить следующие упрощения: а) приравнять нулю те члены ДНФ K_j ($j \leq i-1$), которые ортогональны члену K_i ; б) приравнять нулю те элементарные конъюнкции отрицаний K'_j ($j \leq i-1$), которые ортогональны K_i .

Преобразовав условия работоспособности системы к ОДНФ, можно приступить к вычислению вероятности безотказной работы системы по теореме

$$P\{y(x_1, \dots, x_n) = 1\} = R_0 = \sum_{i=1}^s P\{O_i = 1\}, \quad (49)$$

где O_i — ортогональные члены функции $y(x_1, \dots, x_n)$, записанной в ОДНФ:

$$y(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^m K_i = \bigvee_{i=1}^s O_i. \quad (50)$$

Пример 4. Применим алгоритм ортогонализации к той же функции (7), которая рассматривалась в предыдущем примере.

Решение. Преобразуем функцию y^* к ДНФ:

$$y^* = \left| \begin{array}{c|c} x_1 x_3 & x_5 \\ & x_8 x_4 x_6 \\ x_2 x_4 & x_6 \\ & x_8 x_3 x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x_1 x_3 x_5 \\ x_1 x_3 x_4 x_6 x_8 \\ x_2 x_4 x_6 \\ x_2 x_3 x_4 x_5 x_8 \end{array} \right|. \quad (51)$$

Пронумеруем члены ДНФ (51) следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = x_1 x_3 x_5, \\ K_2 = x_2 x_4 x_6, \\ K_3 = x_1 x_3 x_4 x_6 x_8, \\ K_4 = x_2 x_3 x_4 x_5 x_8. \end{array} \right\} \quad (52)$$

Преобразуем уравнение (51) с учетом (52) к ОДНФ:

$$y^* = \bigvee_{i=1}^4 K_i = \left| \begin{array}{c} K_1 \\ K'_1 K_2 \\ K'_1 K'_2 K_3 \\ K'_1 K'_2 K'_3 K_4 \end{array} \right|. \quad (53)$$

Отрицания элементарных конъюнкций K'_i выразим с помощью преобразования (45):

$$K'_1 = \begin{vmatrix} x'_1 \\ x'_3 \\ x'_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_1 x'_3 \\ x_1 x_3 x'_5 \end{vmatrix}; \quad (54)$$

$$K'_2 = \begin{vmatrix} x'_2 \\ x'_4 \\ x'_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 \\ x_2 x'_4 \\ x_2 x_4 x'_6 \end{vmatrix}; \quad (55)$$

$$K'_3 = \begin{vmatrix} x'_1 \\ x'_3 \\ x'_4 \\ x'_6 \\ x'_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_1 x'_3 \\ x_1 x_3 x'_4 \\ x_1 x_3 x_4 x'_6 \\ x_1 x_3 x_4 x_6 x'_8 \end{vmatrix} \quad (56)$$

Определим теперь следующие конъюнкции:

$$K'_1 K_2 = \begin{vmatrix} x'_1 \\ x_1 x'_3 \\ x_1 x_3 x'_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 x_4 x_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_1 x_2 x_4 x_6 \\ x_1 x_2 x'_3 x_4 x_6 \\ x_1 x_2 x_3 x_4 x'_5 x_6 \end{vmatrix}. \quad (57)$$

$$K'_1 K'_2 K_3 = \begin{vmatrix} x'_1 \\ x_1 x'_3 \\ x_1 x_3 x'_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_2 \\ x_2 x'_4 \\ x_2 x_4 x'_6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 x_3 x_4 x_6 x_8 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} x_1 x'_2 x_3 x_4 x'_5 x_6 x_8 \end{vmatrix}; \quad (58)$$

$$K'_1 K'_2 K'_3 K_4 = \begin{vmatrix} x'_1 \\ x_1 x'_3 \\ x_1 x_3 x'_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_2 \\ x_2 x'_4 \\ x_2 x_4 x'_6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_1 \\ x_1 x'_3 \\ x_1 x_3 x'_4 \\ x_1 x_3 x_4 x'_6 \\ x_1 x_3 x_4 x_6 x'_8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 x_3 x_4 x_5 x_8 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} x'_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x'_6 x_8 \end{vmatrix}. \quad (59)$$

Подставляя (57)–(59) в (53), окончательно получаем

$$y^* = \begin{vmatrix} x_1 x_3 x_6 \\ x'_1 x_2 x_4 x_6 \\ x_1 x_2 x'_3 x_4 x_6 \\ x_1 x_2 x_3 x_4 x'_5 x_6 \\ x_1 x'_2 x_3 x_4 x'_5 x_6 x_8 \\ x'_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x'_6 x_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \\ O_4 \\ O_5 \\ O_6 \end{vmatrix}. \quad (60)$$

Как следует из уравнения (60), все члены этой дизъюнкции действительно попарно ортогональны. Уравнение (60) по внешнему виду очень отличается от уравнения (35); тем не менее оно приводит к тем же ко-

личественным результатам. Действительно, согласно формуле (49) имеем

$$P \{y = 1\} = P \{x_7 = 1\} P \{y^* = 1\} = \\ = R_7 (R_1 R_3 R_5 + Q_1 R_2 R_4 R_6 + \\ + R_1 R_2 Q_3 R_4 R_6 + R_1 R_2 R_3 R_4 Q_5 R_6 + \\ + R_1 Q_2 R_3 R_4 Q_5 R_6 R_8 + \\ + Q_1 R_2 R_3 R_4 R_5 Q_6 R_8). \quad (61)$$

При одинаковой надежности всех элементов вероятность безотказной работы системы

$$P \{y = 1\} = R_c = R [R^3 + (1 - R) R^3 + \\ + R^2 (1 - R) R^2 + R^4 (1 - R) R + \\ + R (1 - R) R^2 (1 - R) R^2 + \\ + (1 - R) R^4 (1 - R) R = \\ = 2R^4 + 2R^6 - 5R^7 + 2R^8, \quad (62)$$

что полностью совпадает с решением (41).

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА

Практика расчетов надежности системы, насчитывающих не более 20 элементов, описанными выше методами показала, что в ряде случаев эти логические преобразования бывают весьма громоздкими, а число слагаемых в формулах (38) и (49) нередко превышает 100. При небольшом числе ($d < 10$) членов ДНФ функции y указанные затруднения удается преодолеть с помощью табличного метода расчета надежности систем.

Он основан на использовании теоремы сложения вероятностей совместных событий, в качестве которых здесь непосредственно выступают элементарные конъюнкции условий работоспособности (или неработоспособности) системы, записанных в ДНФ с помощью кратчайших путей успешного функционирования (3)

$$y(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{l=1}^d \mathcal{P}_l \quad (63)$$

или минимальных сечений отказов (4)

$$y'(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^m S_j. \quad (64)$$

Согласно этой теореме и выражениям (63) и (64) вероятность безотказной работы системы (или вероятность ее отказа) можно вычислить по формулам:

$$\begin{aligned} P\{y(x_1, \dots, x_n) = 1\} &= R_c = \\ &= P\left\{\bigvee_{l=1}^d \mathcal{P}_l\right\} = \sum_i P(\mathcal{P}_i) - \\ &- \sum_j \sum_i P(\mathcal{P}_i \wedge \mathcal{P}_j) + \\ &+ \sum_k \sum_j \sum_i P(\mathcal{P}_i \wedge \mathcal{P}_j \wedge \mathcal{P}_k) - \\ &\dots + (-1)^{d-1} P(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{P}_d); \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} P\{y(x_1, \dots, x_n) = 0\} &= Q_c = \\ &= P\left\{\bigvee_{j=1}^m S_j\right\} = \sum_i P(S_i) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \sum_j \sum_i P(S_i \wedge S_j) \\ &+ \sum_k \sum_j \sum_i P(S_i \wedge S_j \wedge S_k) - \dots + \\ &+ (-1)^{m-1} P(S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_m), \end{aligned} \quad (66)$$

где знаки суммы распространяются на различные значения индексов i, j, k .

Несмотря на кажущуюся громоздкость формул (65) и (66), расчеты надежности с их помощью оказываются достаточно простыми и легко контролируемые. Для этого предлагается проводить расчеты в табличной форме, чем и объясняется название данного метода расчета.

Согласно этому методу необходимо составить специальную таблицу, в которой нужно разместить n строк (по числу элементов в системе) и $c_1 = 2^d - 1$ или $c_2 = 2^m - 1$ столбцов, причем

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= C_d^1 + C_d^2 + \dots + C_d^i + \\ &+ \dots + C_d^d, \\ C_2 &= C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^i + \\ &+ \dots + C_m^m, \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

где C_d^i — число сочетаний из d по i .

В названиях строк указываются вероятности безотказной работы элементов R_i (или вероятности их отказов Q_i), а в названиях столбцов записываются все возможные сочетания конъюнкций \mathcal{P}_l (или S_j), взятых по одной, по две, по три и т. д. Кроме того, указываются знаки вероятностей этих конъюнкций («+» или «-»), чередующиеся в соответствии с формулами (65) или (66). Указанную таблицу следует заполнить крестиками и черточками, причем крестиками отмечаются вероятности тех событий, которые входят в данную конъюнкцию, а черточками — вероятности событий, отсутствующих в ней.

Табличный способ вычисления имеет два преимущества:

1) автоматически осуществляется умножение логических переменных са

2. Таблица расчета структурной надежности системы

R_i	\mathcal{P}_1	\mathcal{P}_2	\mathcal{P}_3	\mathcal{P}_4	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_2\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$
	←+→				↔						←+→				↔
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
R_1	×	×	—	—	×	×	×	×	×	—	×	×	×	×	×
R_2	—	—	×	×	—	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
R_3	×	×	—	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
R_4	—	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
R_5	×	—	—	×	×	×	×	—	×	×	×	×	×	×	×
R_6	—	×	×	—	×	×	—	×	×	×	×	×	×	×	×
R_7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
R_8	—	×	—	×	×	—	×	×	×	×	×	×	×	×	×
R_c	R^4	R^6	R^4	R^6	R^7	R^7	R^7	R^7		R^7		R^8	R^8		

мих на себя согласно тождеству $x_i \wedge x_i \wedge \dots \wedge x_i \equiv x_i$. (68)

2) взаимно уничтожаются многие одинаковые конъюнкции, вероятности которых имеют различные знаки.

Пример 5. Решим ту же задачу, которая уже рассматривалась в предыдущих примерах 3 и 4, причем за исходное условие работоспособности примем функцию (7), записанную в повторной дизъюнктивной нормальной форме. Будем считать для простоты надежность всех элементов одинаковой и равной R .

Решение. Составляем табл. 2, как описано выше, и заполняем ее в такой последовательности. Сначала проставляем крестики в столбцах, соответствующих путям успешного функционирования системы по уравнению (7). Затем последовательно заполняем следующие столбцы, например, пятый согласно функции

$$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = (x_1x_2x_5) \wedge (x_1x_3x_4x_6x_8) = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_8.$$

Заполнив всю таблицу крестиками и черточками, вычеркиваем те одина-

ковые конъюнкции, которые вошли в нее с разными знаками (в табл. 2 это, например, столбцы 9, 11, 14 и 15).

Приступаем к вычислению вероятности безотказной работы системы, перемножая в каждом столбце те вероятности R_i , которые оказались отмеченными крестиками.

При одинаковой надежности элементов (что имеет место в рассматриваемом случае) расчет существенно упрощается, так как сводится к непосредственному подсчету степеней R в полиноме

$$R_c = 2R^4 + 2R^6 - 5R^7 + 2R^8, \quad (69)$$

который тождествен (41) и (62).

СХЕМНО-ЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА

Этот метод расчета надежности системы основан на обобщенной теореме разложения произвольной ФАЛ по любым i аргументам и использовании специальной релейно-контактной схемы (РКС), являющейся наглядной графической моделью условий работоспособности исследуемой системы.

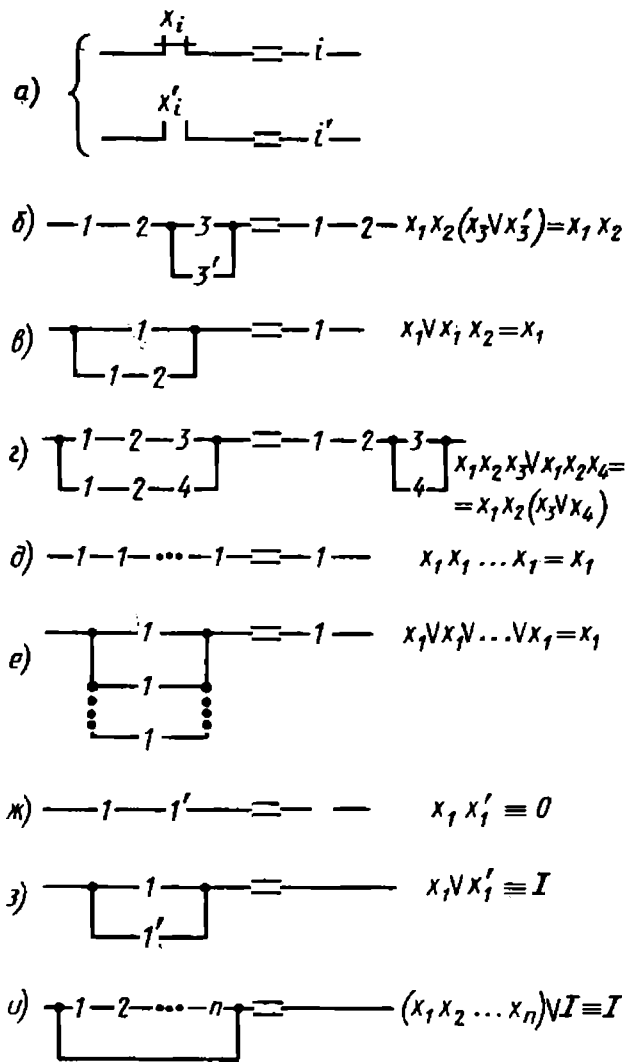


Рис. 5. Графическая иллюстрация некоторых соотношений алгебры логики

Любую ФАЛ, зависящую от n аргументов ($n \geq 1$), согласно теореме разложения можно представить в виде

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \bigvee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_i^{\alpha_i} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (70)$$

Использование схемно-логического метода преобразования ФАЛ для расчета надежности сложных систем позволяет найти вероятность безотказной работы системы значительно быстрее, чем применение предыдущих методов. Это объясняется тем, что в данном методе используется разложение повторной ФАЛ не по одной букве, а сразу по целой комбинации повторяющихся аргументов и, кроме того, все преобразования проводятся

по РКС, что дает возможность избежать многих промежуточных преобразований, неизбежных при других методах ортогонализации.

На РКС каждый элемент изображается электрическим контактом, а провода, связывающие элементы, заменяют логические операции И (\wedge) и ИЛИ (\vee). При таком изображении РКС она всегда получается в виде последовательно-параллельных контактных цепей (а не мостиковых структур!) с многими повторяющимися контактами.

РКС дает наглядное представление о комбинации «выгодных» переменных, по которым следует делать разложение ФАЛ, и о наиболее целесообразной последовательности преобразований, которая приводит схему к простейшему виду.

Для упрощения графической части работы условимся контакты на схемах не изображать и обозначать не буквами x_i (закрывающий) и x'_i (размыкающий), а просто их номерами: i (закрывающий) и i' (размыкающий), как показано на рис. 5, а.

На рис. 5, б дана графическая иллюстрация некоторых соотношений алгебры логики с помощью релейно-контактных схем. Например, показано преобразование РКС, соответствующее операции склеивания, которая записана справа от схемы.

Преобразования РКС, показанные на рис. 5, в и г, соответствуют операциям поглощения и вынесения за скобки. Преобразования РКС, показанные на рис. 5, д и е, позволяют заменить группу последовательно или параллельно соединенных контактов, имеющих один и тот же номер, одним контактом. Постоянно разомкнутая цепь обозначена на рис. 5, ж нулем, а постоянно замкнутые цепи на рис. 5, з, и — римской цифрой I, чтобы отличать такую цепь от контакта с номером I.

После этих замечаний сформулируем алгоритм схемно-логического метода преобразования ФАЛ для расчета надежности системы.

1. По условиям работоспособности системы, записанным в ДНФ, изображаем релейно-контактную схему. При

этом контакты, входящие одновременно в несколько параллельных цепей, выносим в общую для них последовательную цепь.

2. Выбираем для вынесения в последовательную цепь такую комбинацию контактов, которая обеспечивает размыкание всех или большей части параллельных цепей РКС. Опыт расчета надежности технических систем показывает, что при числе параллельных цепей не более 20 для их одновременного размыкания обычно достаточно комбинации, состоящей из двух—пяти контактов. После вынесения группы из r контактов РКС распадается на 2^r параллельных схем.

3. В каждой из 2^r полученных параллельных схем производим преобразования, вытекающие из теоремы разложения, а именно: контакты, одинаковые с вынесенными, замыкаем, а отрицания вынесенных контактов размыкаем.

4. В схемах, полученных в результате преобразований, удаляем все разомкнутые цепи и заменяем все группы контактов, оказавшиеся короткозамкнутыми, проводом (линией). Кроме того, контакты, имеющиеся во всех параллельных цепях, выносим в общую последовательную цепь, а цепи, поглощаемые другими, параллельными им цепями, удаляем.

5. Изучаем каждую из 2^r преобразованных, как указано в п. 4, схем (последовательная цепь, состоящая из r контактов и контактов, вынесенных в эту цепь дополнительно, не рассматривается).

Если схема оказалась постоянно разомкнутой, то она из дальнейшего рассмотрения исключается.

Если схема оказалась постоянно замкнутой, то она дальнейшим преобразованиям не подвергается.

Если схема оказалась неповторной, то на этом процессе ее преобразования также заканчиваются. Бесповторную функцию, соответствующую данной схеме, записываем в конъюнктивной форме.

Если схема не является неповторной, то переходим к п. 2 и производим дальнейшие преобразования в соответствии с пп. 2, 3, 4 и 5.

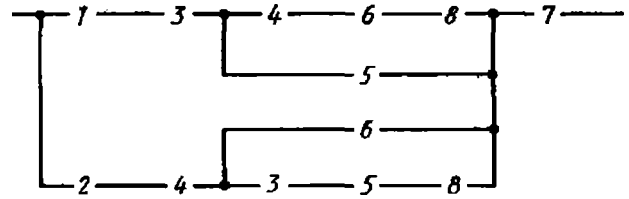


Рис. 6. Релейно-контактная схема

6. По полученным в результате преобразований схемам записываем ФАЛ.

7. От ФАЛ переходим к вероятностной функции и по ней вычисляем вероятность безотказной работы системы, как вероятность равенства ФАЛ единице.

Пример 6. Решим задачу, рассмотренную в примерах 3—5, схемно-логическим методом.

Решение. По ФАЛ (7) на рис. 6 построена РКС, в которой контакты 7, 1—4 вынесены в последовательную цепь.

В соответствии с алгоритмом преобразования применим разложение схемы по контактам (переменным) 5 и 6, которые входят во все параллельные цепи. Так как число r выносимых контактов равно двум, то можно составить четыре ортогональные конъюнкции

$$x'_5x'_6; x'_5x_6; x_5x'_6; x_5x_6.$$

Результат разложения схемы (рис. 6) приведен на рис. 7. При вынесении контактов 5 и 6 и размыкании в схеме на рис. 7 контактов 5'

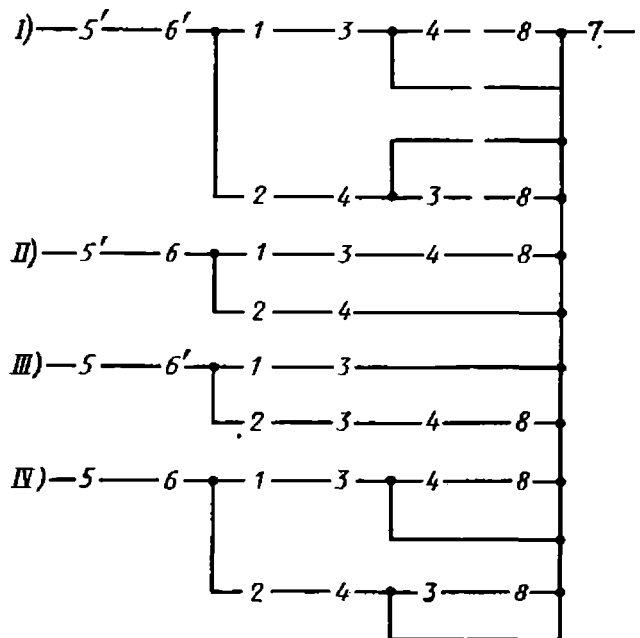


Рис. 7. Преобразование РКС

и 6' схема превращается в постоянно разомкнутую цепь (схема I). Схемы II и III после вынесения контактов 4 и 3 в общую последовательную цепь с контактами 5', 6 и 5, 6' соответственно становятся бесповторными. В схеме IV контакты 4, 8 и 3, 8 оказались короткозамкнутыми, и остав-

шаяся часть схемы после удаления этих контактов будет также бесповторной.

По схемам II, III и IV (рис. 7) запишем ФАЛ (7) в виде суммы трех ортогональных слагаемых, заменив цифры соответствующими переменными:

$$y(x_1, \dots, x_8) = x_7 \left[\begin{array}{c|ccc} x_5' & x_6 & x_4 & x_1' & x_3 & x_8 \\ & & & x_2 & & \\ \hline & x_5 & x_6' & x_3 & & \\ & & & x_1 & & \\ & & & x_2 & x_4 & x_8 \\ \hline & x_5 & x_6 & x_1 & x_3 & \\ & & & x_2 & x_4 & \end{array} \right]. \quad (71)$$

Теперь бесповторные ДНФ в каждом слагаемом запишем с помощью

правила де Моргана [8] в конъюнктивной форме

$$y(x_1, \dots, x_8) = x_7 \left[\begin{array}{c|ccc} x_5' x_6 x_4 [(x_1 x_3 x_8)' x_2']' & & \\ x_5 x_6' x_3 [x_1' (x_2 x_4 x_8)']' & & \\ x_5 x_6 [(x_1 x_3)' (x_2 x_4)']' & & \end{array} \right]. \quad (72)$$

Отрицание функции заменяем разностью между единицей и вероятностью истинности этой функции

$$P\{y=1\} = R_c = R_7 \{ (1 - R_5) R_6 R_4 \times \\ \times [1 - (1 - R_1 R_3 R_8) (1 - R_2)] + \\ + R_5 (1 - R_6) R_3 [1 - (1 - R_1) \times \\ \times (1 - R_2 R_4 R_8)] + R_5 R_6 [1 - \\ - (1 - R_1 R_3) (1 - R_2 R_4)] \}. \quad (73)$$

При $R_1 = R_2 = \dots = R_8 = R$ получим

$$R_c = 2R^4 + 2R^6 - 5R^7 + 2R^8, \quad (74)$$

что полностью совпадает с (41), (62) и (69).

МЕТОД РАСЧЕТА С ПОМОЩЬЮ НЕСОВМЕСТИМЫХ ГИПОТЕЗ

По мере увеличения числа элементов системы и усложнения ее структуры формализация условий работоспособности системы с помощью ФАЛ становится все более трудной. Поэтому на практике при расчете структурной надежности системы наиболее сложным оказывается иногда не столь-

ко преобразование ФАЛ в ВФ, сколько составление исходной ФРС.

В этих случаях, когда не удается получить «сквозной» записи условий работоспособности системы, т. е. записи ФРС в явной форме от всех аргументов (от «входа» до «выхода»), но можно сравнительно просто сформулировать все несовместные гипотезы успешного функционирования системы непосредственно по смыслу задачи, оказывается возможным рассчитать ее надежность многократным поэтапным использованием формулы полной вероятности. Назовем условно этот метод расчета надежности методом несовместных гипотез.

Расчетный алгоритм метода несовместных гипотез, как и во всех предыдущих логико-вероятностных методах расчета надежности, состоит из двух частей, а именно из логической части и вероятностной.

На рис. 8 дана графическая иллюстрация логической части метода несовместных гипотез. На этом рисунке приняты следующие обозначения:

$y(x_1, \dots, x_n)$ — условия работоспособности системы, которые не со-

ставляются в форме ФАЛ, а лишь имеют словесное и графическое описания; $H^{(1)}, H^{(2)}, H^{(3)}, \dots$ — несовместные гипотезы, которые формируются на языке алгебры логики по смыслу задач на первом, втором, третьем и т. д. этапах «разрезания» незаписанной ФРС; $y | H^{(1)}, H^{(1)} | H^{(2)}, H^{(2)} | H^{(3)}, \dots$ — условия работоспособности исследуемой системы при высказанных гипотезах.

Для вычисления вероятности безотказной работы системы необходимо многократно пользоваться следующими формулами:

$$P \{y(\bar{x}) = 1\} = R_c = \sum_{i=1}^d P(H_i^{(1)}) P\{y | H_i^{(1)}\}; \quad (75)$$

$$P\{H_i^{(1)} = 1\} = \sum_{j=1}^l P(H_{ij}^{(2)}) P\{H_i^{(1)} | H_{ij}^{(2)}\}; \quad (76)$$

$$P\{H_{ij}^{(2)} = 1\} = \sum_{r=1}^s P(H_{ijr}^{(3)}) P\{H_{ij}^{(2)} | H_{ijr}^{(3)}\}; \quad (77)$$

где суммы берутся по всем несовместным гипотезам (d, l, s, \dots), образующим полную группу событий.

Из этого алгоритма следует, что метод несовместных гипотез является своеобразной модификацией метода разрезания, в котором несовместные гипотезы формируются сразу по некоторому набору аргументов, а не по одной букве, в результате чего существенно уменьшается как число гипотез, так и число разрезов, необходимых для решения задач. Кроме того, данный метод может рассматриваться и как модификация схемно-логического метода, в котором формируются несовместные гипотезы по некоторому набору аргументов функции $y(\bar{x})$ и в несколько этапов производится ее разложение (в сложных задачах).

Различие между указанными методами состоит в том, что при использовании метода разрезания и схемно-логического метода несовместные ги-

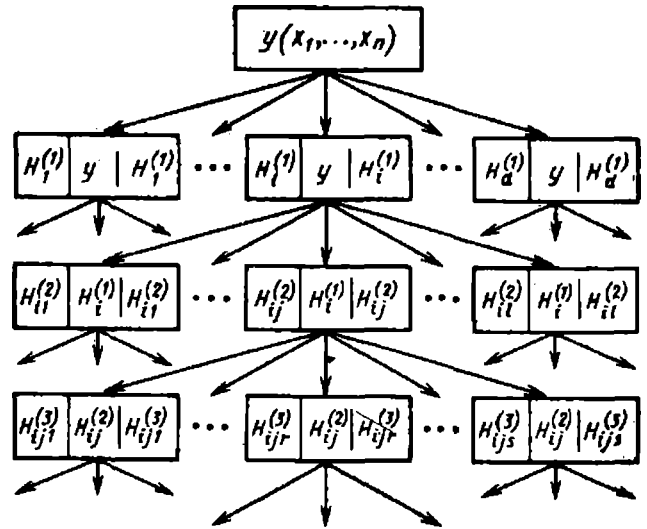


Рис. 8. Графическая иллюстрация метода несовместных гипотез

потезы формируются в определенном смысле механически («автоматически»), а при использовании рассматриваемого метода их нужно каждый раз формировать по содержанию задачи, т. е. осмысленно.

В первом случае формализация задачи может быть легко отделена от ее решения и может выполняться разными людьми, причем для тех, кто занимается ее решением, необязательно даже знать саму систему. Во втором случае всю работу от начала до конца должны выполнять специалисты, хорошо знающие исследуемую систему, ее структуру и особенности функционирования.

Пример 7. Решим задачу, рассмотренную в примерах 1, 3—6, методом несовместных гипотез.

Решение. Изучая систему, представленную на рис. 1, и зная задачу, поставленную перед ней (обеспечение питанием ответственных потребителей, подключенных к распределительному щиту РЩ1), нетрудно заметить, что для этого необходимо получить питание от любой комбинации работающих генераторов (x_1, x_2):

$$\begin{aligned} H_1^{(1)} &= x_1 x_2, & H_2^{(1)} &= x_1 x_2^*, \\ H_3^{(1)} &= x_1^* x_2. \end{aligned} \quad (78)$$

Гипотезы (78) несовместны и образуют полную группу.

Составим условия работоспособности системы при высказанных гипотезах, что всегда проще сделать, чем получить «сквозную» ФРС:

$$y | H_1^{(1)} = \begin{vmatrix} x_3 & x_5 \\ x_4 & x_6 \end{vmatrix}, \quad (79)$$

$$y | H_2^{(1)} = \begin{vmatrix} x_3 & x_5 \\ x_8 & x_4 & x_6 \end{vmatrix}, \quad (80)$$

$$y | H_3^{(1)} = \begin{vmatrix} x_4 & x_6 \\ x_8 & x_3 & x_5 \end{vmatrix}. \quad (81)$$

Функции (79)—(81) являются бесповторными и в конъюнктивной форме имеют вид

$$y | H_1^{(1)} = [(x_3 x_5)' (x_4 x_6)']', \quad (82)$$

$$y | H_2^{(1)} = x_3 [x_5' (x_8 x_4 x_6)']', \quad (83)$$

$$y | H_3^{(1)} = x_4 [x_6' (x_8 x_3 x_5)']'. \quad (84)$$

Определим условные вероятности событий (82)—(84):

$$P \{y | H_1^{(1)} = 1\} = 1 - (1 - R_3 R_5) (1 - R_4 R_6), \quad (85)$$

$$P \{y | H_2^{(1)} = 1\} = R_3 [1 - (1 - R_5) \times (1 - R_8 R_4 R_6)], \quad (86)$$

$$P \{y | H_3^{(1)} = 1\} = R_4 [1 - (1 - R_6) \times (1 - R_8 R_3 R_5)]. \quad (87)$$

По формуле полной вероятности (75) определим теперь вероятность безотказной работы всей системы:

$$R_c = P \{y(\bar{x}) = 1\} = \{P(H_1^{(1)}) P\{y | H_1^{(1)}\} + P(H_2^{(1)}) P\{y | H_2^{(1)}\} + P(H_3^{(1)}) P\{y | H_3^{(1)}\}\} P(x_7 = 1) = \{P\{x_1 x_2 = 1\} P[(x_3 x_5)' (x_4 x_6)']' + P\{x_1 x_2' = 1\} P\{x_3 [x_5' (x_8 x_4 x_6)']'\} + P\{x_1' x_2 = 1\} P\{x_4 [x_6' (x_8 x_3 x_5)']'\}\} \times P\{x_7 = 1\} = \{R_1 R_2 [1 - (1 - R_3 R_5) (1 - R_4 R_6)] + R_1 Q_2 \{R_3 [1 - (1 - R_5) (1 - R_8 R_4 R_6)]\} + Q_1 R_2 \{R_4 [1 - (1 - R_6) (1 - R_8 R_3 R_5)]\}\} R_7. \quad (88)$$

Проверим правильность расчетов через полином, т. е. примем условие равной надежности всех элементов системы. Заменяя R_i на R в (88), получим

$$R_c = 2R^4 + 2R^6 - 5R^7 + 2R^8, \quad (89)$$

т. е. то же самое, что и в (41), (62), (69) и (74).

Более сложные примеры использования метода несовместных гипотез приведены в работах [8, 9].

3. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ВАЖНОСТИ ОТДЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ СИНТЕЗЕ СИСТЕМ С ЗАДАННОЙ НАДЕЖНОСТЬЮ

ВЕС, ЗНАЧИМОСТЬ И ВКЛАД ЭЛЕМЕНТА В НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМЫ

Одним из важнейших этапов проектирования технической системы является рациональное построение ее

структуры. Для этого необходимо иметь аппарат, позволяющий получать количественные характеристики структуры системы. Это дает возможность определять ее «слабые места», выбирать оптимальное резервирование и рационально воздействовать на надежность сложной системы.

Логико-вероятностные методы (ЛВМ) позволяют не только количественно оценивать надежность структурно-сложных систем, но и выяснить роль конкретных элементов (и их различных комбинаций) в обеспечении надежности всей системы. С этой целью были предложены специальные характеристики, названные весом, значимостью и вкладом элемента в надежность системы.

При отсутствии количественной информации о надежности элементов структурно-сложной системы их влияние на надежность всей системы можно определить с помощью понятия «вес» элемента в структуре.

Определение 1. Вес функции n переменных есть число наборов (вершин n -мерного куба, клеток карты Карно), на которых данная ФАЛ принимает значение, равное единице.

Если функция представлена в ОДНФ, то вес исходной функции можно представить в следующем виде [8]:

$$G\{y(x_1, \dots, x_n)\} = \sum_j 2^{n-r_j} + \sum_f 2^{n-r_f} + \sum_q 2^{n-r_q}, \quad (90)$$

где $j = 1, \dots, l$; $f = 1, \dots, k$; $q = 1, \dots, p$; $l + k + p = m$; r_j, r_f, r_q — ранги элементарных конъюнкций; l, k, p — число конъюнкций, содержащих x_i, x'_i и не содержащих i -й аргумент; m — общее число конъюнкций в исходной ФАЛ, представленной в ОДНФ; n — число независимых переменных исходной функции.

Пример 8. Имеем ФРС в ДНФ для системы мостиковой структуры из пяти элементов, изображенной на рис. 3, в виде ФАЛ

$$y(x_1, \dots, x_5) = \left| \begin{array}{c|cc} x_1 & x_3 & \\ \hline & x_5 & x_4 \\ x_2 & x_4 & \\ \hline & x_5 & x_3 \end{array} \right|. \quad (91)$$

Решение.

С помощью алгоритма ортогонализации определим ОДНФ ФАЛ (91):

$$y(x_1, \dots, x_5) = \left| \begin{array}{c} x_1 \ x_3 \\ x_2 \ x'_3 \ x_4 \\ x'_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \\ x'_1 \ x_2 \ x_3 \ x'_4 \ x_5 \\ \hline x_1 \ x'_2 \ x'_3 \ x_4 \ x_5 \end{array} \right|. \quad (92)$$

«Взвешивание» функции (92) пяти переменных можно выполнять по любому i -му аргументу. Не теряя общности, рассмотрим эту операцию по первому аргументу, т. е. x_1 . Число конъюнкций, содержащих x_1 , равно двум ($l = 2$); содержащих x'_1 равно двум ($k = 2$) и не содержащих x_1 равно единице ($p = 1$). Общее число конъюнкций равно пяти ($m = 2 + 2 + 1 = 5$). Ранги соответствующих элементарных конъюнкций

$$r_{j_1} = 2, \quad r_{j_2} = 5; \quad r_{f_1} = 4, \quad r_{f_2} = 5; \quad r_{q_1} = 3.$$

По формуле (90) имеем

$$G\{y(x_1, \dots, x_5)\} = (2^{5-2} + 2^{5-5}) + (2^{5-4} + 2^{5-5}) + 2^{5-3} = 16.$$

Таким образом, на 16 наборах из $2^n = 32$ ФАЛ (91) принимает значение, равное единице.

Определение 2. Булевой разностью (или логической разностью) функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по аргументу x_i называют результат логического сложения по модулю 2 исходной функции и функции, полученной из исходной путем замены аргумента x_i на его отрицание:

$$\Delta_{x_i} f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \oplus f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n). \quad (93)$$

Определение 3. «Вес» элемента x_i в системе, состоящей из n элементов, есть отношение «веса» булевой разности по аргументу x_i к числу всех наборов n -мерного логического пространства, т. е.

$$g_{x_i} = \frac{G\{\Delta_{x_i} y(x_1, \dots, x_n)\}}{2^n} = \sum_{j=1}^l 2^{-(r_j-1)} - \sum_{f=1}^k 2^{-(r_f-1)}, \quad (94)$$

где l, k — число элементарных конъюнкций исходной ФРС, представленной в ОДНФ, содержащих соответственно x_i и x'_i ; r_j, r_f — ранги этих конъюнкций.

Булева разность по аргументу x_i

$$\Delta_{x_i} y(x_1, \dots, x_n) = y_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \oplus y_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n), \quad (95)$$

где $y_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = y(x_1, \dots, 1, \dots, x_n)$ — единичная функция по аргументу x_i ; $y_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = y(x_1, \dots, 0, \dots, x_n)$ — нулевая функция по аргументу x_i .

Вес элемента характеризует относительное число таких критических работоспособных состояний системы, в которых отказ данного элемента при-

водит к отказу системы (и, наоборот, его восстановление приводит к восстановлению системы), среди всех состояний системы с $x_i = 1$.

Пример 9. Определим вес элементов x_1 и x_5 для ФРС (91).

Решение. Определим числа l , k , r_j и $r_{j'}$ для x_1 . Из (92) и примера 8 имеем: $l = 2$, $r_{j_1} = 2$, $r_{j_2} = 5$; $k = 2$, $r_{j_1} = 4$; $r_{j_2} = 5$.

По формуле (94)

$$g_{x_1} = [2^{-(2-1)} + 2^{-(5-1)}] - [2^{-(4-1)} + 2^{-(5-1)}] = 2^{-1} + 2^{-4} - 2^{-3} - 2^{-4} = 0,375.$$

Для x_5 имеем $l = 2$, $r_{j_1} = 5$, $r_{j_2} = 5$; $k = 0$.

$$g_{x_5} = 2^{-(5-1)} + 2^{-(5-1)} = 2^{-4} + 2^{-4} = 0,125.$$

Из примера видно, что вес элемента x_1 в 3 раза превышает вес элемента x_5 , а значит, и его важность для надежности системы (91).

Определение 4. «Значимость» элемента x_i в системе $y(x_1, \dots, x_n)$ есть частная производная от вероятности безотказной работы системы R_c по вероятности безотказной работы элемента R_i , т. е.

$$\xi_{x_i} = \frac{\partial P \{y(x_1, \dots, x_n) = 1\}}{\partial P \{x_i = 1\}} = \frac{\partial R_c}{\partial R_i}. \quad (96)$$

Для всех монотонных ФАЛ множество наборов, на которых нулевая функция по аргументу x_i принимает значение, равное единице, есть подмножество множества наборов, на которых единичная функция по тому же аргументу x_i равна единице, т. е.

$$\{(x_1, \dots, x_n): y_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 1\} \subset \{(x_1, \dots, x_n): y_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 1\}. \quad (97)$$

Из (97) вытекают пять следствий:

$$\begin{aligned} 1) \{(x_1, \dots, x_n): y_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 1\} &\subset \\ &\subset \{(x_1, \dots, x_n): y(x_1, \dots, x_n) = 1\} \subset \\ &\subset \{(x_1, \dots, x_n): y_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 1\}, \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} 2) y_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \vee y_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) &\equiv \\ &\equiv y_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} 3) y_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \wedge y_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) &\equiv \\ &\equiv y_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} 4) y_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \wedge y_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) &\equiv \\ &\equiv \Delta_{x_i} y(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} 5) y_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \wedge \\ \wedge y_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (102)$$

Частная производная от вероятности истинности монотонной ФАЛ $y(x_1, \dots, x_n)$ по вероятности истинности аргумента x_i численно равна вероятности истинности булевой разности этой функции по аргументу x_i , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P \{y(x_1, \dots, x_n) = 1\}}{\partial P \{x_i = 1\}} &= \\ = P \{\Delta_{x_i} y(x_1, \dots, x_n) = 1\}. \end{aligned} \quad (103)$$

На основании этого «значимость» элемента x_i численно равна вероятности равенства единице булевой разности ФРС по аргументу x_i :

$$\xi_{x_i} = P \{\Delta_{x_i} y(x_1, \dots, x_n) = 1\}. \quad (104)$$

Для монотонных структур

$$\xi_{x_i} = \frac{\partial R_c}{\partial R_i} = R_{c1}^{(i)} - R_{c0}^{(i)}, \quad (105)$$

$$R_{c1}^{(i)} = P \{y_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 1\}, \quad (106)$$

$$R_{c0}^{(i)} = P \{y_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 1\}, \quad (107)$$

где $R_{c1}^{(i)}$ и $R_{c0}^{(i)}$ — вероятность безотказной работы системы при абсолютной надежности и абсолютном отказе элемента x_i соответственно [см. обозначение функций в выражении (95)].

На основании (103)–(107) сформируем пять следствий:

$$1) \frac{\partial R_c}{\partial Q_i} = R_{c0}^{(i)} - R_{c1}^{(i)}, \quad (108)$$

$$2) \frac{\partial R_c}{\partial R_i} = -\frac{\partial R_c}{\partial Q_i}, \quad (109)$$

$$3) R_c = R_{c0}^{(i)} + R_i \frac{\partial R_c}{\partial R_i} = R_{c1}^{(i)} + Q_i \frac{\partial R_c}{\partial Q_i}, \quad (110)$$

$$4) \frac{\partial R_c}{\partial R_i} = \frac{R_c - R_{c0}^{(i)}}{R_i} = \frac{R_{c1}^{(i)} - R_c}{Q_i}, \quad (111)$$

$$5) \frac{\partial R_c}{\partial Q_i} = \frac{R_c - R_{c1}^{(i)}}{Q_i} = \frac{R_{c0}^{(i)} - R_c}{R_i}. \quad (112)$$

Вес элемента (94) есть частный случай его значимости (105) при одинаковой надежности всех элементов и вероятности безотказной работы, равной 0,5.

Выражение (105) является основной для ручных и машинных способов вычисления значимости элементов сложных структур.

Пример 10. Определим значимость элементов x_1 и x_5 системы из примера 9.

Решение. Из выражения (92) определим единичную и нулевую функции по аргументу x_1 :

$$y_1^{(1)}(\bar{x}) = \begin{vmatrix} x_3 \\ x_2 \ x'_3 \ x_4 \\ x'_2 \ x'_3 \ x_4 \ x_5 \end{vmatrix}, \quad (113)$$

$$y_0^{(1)}(\bar{x}) = \begin{vmatrix} x_2 \ x'_3 \ x_4 \\ x_2 \ x_3 \ x_4 \\ x_2 \ x_3 \ x'_4 \ x_5 \end{vmatrix}. \quad (114)$$

По формуле (49) определим $R_{c1}^{(1)}$ и $R_{c0}^{(1)}$:

$$R_{c1}^{(1)} = P \{y_1^{(1)}(\bar{x}) = 1\} = R_3 + R_2 Q_3 R_4 + Q_2 Q_3 R_4 R_5, \quad (115)$$

$$R_{c0}^{(1)} = P \{y_0^{(1)}(\bar{x}) = 1\} = R_2 Q_3 R_4 + R_2 R_3 R_2 R_4 + R_2 R_3 Q_4 R_5. \quad (116)$$

По формуле (105) найдем ξ_{x_1} :

$$\xi_{x_1} = R_3 + R_4 R_5 - R_2 R_3 R_4 - R_2 R_4 R_5 - R_3 R_4 R_5 - R_2 R_3 R_5 + 2R_2 R_3 R_4 R_5. \quad (117)$$

При $R_i = R = \text{const}$ имеем

$$\xi_{x_1} = R + R^2 - 4R^3 + 2R^4. \quad (118)$$

Для $R = 0,5$ определим $\xi_{x_1} = 0,375 = g_{x_1}$.

Аналогичные действия для элемента x_5 :

$$y_1^{(5)}(\bar{x}) = \begin{vmatrix} x_1 \ x_3 \\ x_2 \ x'_3 \ x_4 \\ x'_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \\ x'_1 \ x_2 \ x_3 \ x'_4 \\ x_1 \ x'_2 \ x'_3 \ x_4 \end{vmatrix}, \quad (119)$$

$$y_0^{(5)}(\bar{x}) = \begin{vmatrix} x_1 \ x_3 \\ x_2 \ x'_3 \ x_4 \\ x'_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \end{vmatrix}, \quad (120)$$

$$\xi_{x_5} = Q_1 R_2 R_3 Q_4 + R_1 Q_2 Q_3 R_4, \quad (121)$$

$$\xi_{x_5} = 2R^2 - 4R^3 + 2R^4 \quad (122)$$

при $R_i = R = \text{const}$,

$$\xi_{x_5} = 0,125 = g_{x_5} \text{ при } R = 0,5.$$

Определение 5. «Вклад» элемента x_i в надежность системы $y(x_1, \dots, x_n)$ есть произведение вероятности безотказной работы элемента R_i на его «значимость», т. е.

$$B_{x_i} = R_i \frac{\partial R_c}{\partial R_i}. \quad (123)$$

Подставляя выражение (111) в формулу (123), получаем

$$B_{x_i} = R_i \frac{R_c - R_{c0}^{(i)}}{R_i} = R_c - R_{c0}^{(i)}. \quad (124)$$

Критерий «вклад» B_{x_i} характеризует приращение надежности системы после восстановления элемента x_i из

неработоспособного состояния в работоспособное с фактической вероятностью его безотказной работы, равной R_i .

Как следует из (123),

$$B_{x_i} \leq \xi_{x_i}. \quad (125)$$

Определение 6. «Удельный вклад» элемента x_i в надежность системы $y(x_1, \dots, x_n)$ есть нормированный «вклад» этого элемента, т. е.

$$b_{x_i} = \frac{B_{x_i}}{\sum_{i=1}^n B_{x_i}}. \quad (126)$$

Все приведенные в этом параграфе критерии оценки важности элемента для надежности системы имеют различную «чувствительность» и информационную сущность. Так, например, критерий «вес» элемента g_{x_i} характеризует только местоположение данного элемента x_i в структуре системы $y(x_1, \dots, x_n)$.

Критерий «значимость» элемента ξ_{x_i} характеризует не только местоположение данного элемента x_i в структуре системы $y(x_1, \dots, x_n)$, но и зависимость от вероятностей безотказной работы всех других элементов системы (кроме самого i -го элемента).

Критерий «вклад» элемента B_{x_i} характеризует местоположение элемента x_i в структуре системы $y(x_1, \dots, x_n)$, условия ее функционирования и связь с вероятностью безотказной работы всех n элементов этой системы, включая i -й элемент.

КАЧЕСТВЕННОЕ И КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ПРИРАЩЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ

ЛВМ расчета надежности системы позволяют вырабатывать новые подходы к синтезу структур сложных систем с заданной надежностью.

Вследствие линейности функции надежности R_c от аргумента R_i для монотонных структур «значимость» элемента x_i оказывается численно равной приращению надежности системы (105) при изменении R_i от нуля

до единицы. В общем случае приращение надежности системы

$$\Delta R_c = \frac{\partial R_c}{\partial R_i} \Delta R_i. \quad (127)$$

Самая простая структура есть последовательная цепочка минимально необходимых элементов, т. е. один КПУФ. В идеале (при абсолютной надежности всех элементов) можно было бы обойтись без всякой избыточности. Однако при реальных характеристиках надежности элементов надежность всей системы может быть существенно меньше заданной R_c , зд.

Существуют два пути повышения требуемой вероятности безотказной работы системы (без учета восстановления):

качественное повышение надежности элементов (лучшие материалы, современная технология, новые конструкции и т. д.), в результате чего получим некоторое приращение надежности системы, которое условно назовем *качественным* и обозначим $\Delta R_{c. \text{ кач}}$;

введение структурной избыточности (например, путем резервирования элементов), в результате чего также получим приращение надежности системы, которое условно назовем *количественным* и обозначим $\Delta R_{c. \text{ кол}}$.

За нулевой уровень и начало отсчета $\Delta R_{c. \text{ кач}}$ примем структуру одного КПУФ при равнонадежных элементах с $R_i = Q_i = 0,5$. Для реальных элементов, как правило, $R_i > 0,5$, а

$$\begin{aligned} \Delta R_{c. \text{ кач}} = & \sum_{i \in M_1} 2^{-n+1} \Delta R_i + \\ & + \sum_{i, j \in M_2} 2^{-n+2} \Delta R_i \Delta R_j + \\ & + \sum_{i, j, \dots, k \in M_l} 2^{-n+l} \Delta R_i \Delta R_j \dots \\ & \dots \Delta R_k + \dots + \Delta R_1 \Delta R_2 \dots \Delta R_n, \end{aligned} \quad (128)$$

где для сокращения записи опущен аргумент времени t , а запись $i \in M_1$; $i, j \in M_2, \dots$; $i, j, \dots, k \in M_l$ следует понимать так, что суммирование проводится по всем наборам указанных индексов из множества

числа сочетаний из n по одному, по два и по l .

При одинаковой надежности всех элементов выражение (128) примет вид

$$\Delta R_{с \text{ кач}} = \sum_{i=1}^n C_n^i 2^{-n+1} (\Delta R_i)^i. \quad (129)$$

Если за нулевой уровень качественного приращения надежности системы взять производный уровень, то выражения (128), (129) примут вид

$$\begin{aligned} \Delta R_{с. \text{ кач}} &= \sum_{i \in M_1} \frac{\partial R_c}{\partial R_i} \Delta R_i + \\ &+ \sum_{i, j \in M_2} \frac{\partial^2 R_c}{\partial R_i \partial R_j} \Delta R_i \Delta R_j + \dots \\ &\dots + \sum_{i, j, \dots, k \in M_l} \frac{\partial^l R_c}{\partial R_i \partial R_j \dots \partial R_k} \times \\ &\times \Delta R_i \Delta R_j \dots \Delta R_k + \dots + \\ &+ \Delta R_1 \Delta R_2 \dots \Delta R_n, \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} \Delta R_{с. \text{ кач}} &= \\ &= \sum_{j=1}^n C_n^j \frac{\partial^j R_c}{\partial R_1 \dots \partial R_n} (\Delta R_j)^j. \end{aligned} \quad (131)$$

При дублировании i -го элемента однотипным элементом x_i надежность такого звена возрастает на

$$\Delta R_{зв} = (2R_i - R_i^2) - R_i = R_i Q_i, \quad (132)$$

а надежность всей системы возрастает на

$$\Delta R_{с. \text{ кол}} = \frac{\partial R_c}{\partial R_i} \Delta R_{зв} = \frac{\partial R_c}{\partial R_i} R_i Q_i. \quad (133)$$

Из (133) следует, что количественное приращение надежности системы зависит не только от «значимости», но и от надежности дублирующего элемента. Причем наибольший эффект резервирования при одинаковых «значимостях» будет именно при $R_i = Q_i = 0,5$. Принятие $R_i = 0,5$ за нулевой уровень удобно обеспечивает

однозначность кривой (132), так как используется только правая ветвь параболы на участке R_i от 0,5 до 1.

В общем случае при дублировании нескольких элементов вплоть до максимально возможного их числа n получим

$$\begin{aligned} \Delta R_{с. \text{ кол}} &= \sum_{i \in M_1} R_i Q_i \frac{\partial R_c}{\partial R_i} + \\ &+ \sum_{i, j \in M_2} R_i R_j Q_i Q_j \frac{\partial^2 R_c}{\partial R_i \partial R_j} + \dots + \\ &+ \sum_{i, j, \dots, k \in M_l} R_i R_j \dots R_k Q_i Q_j \dots \\ &\dots Q_k \frac{\partial^l R_c}{\partial R_i \partial R_j \dots \partial R_k} + \dots \\ &\dots + R_1 R_2 \dots R_n Q_1 Q_2 \dots Q_n. \end{aligned} \quad (134)$$

Пример 11. Определим качественное и количественное приращения надежности для простейшей последовательной структуры, ФРС которой имеет вид

$$y_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3. \quad (135)$$

Пусть $R_1 = 0,7$, $R_2 = 0,8$ и $R_3 = 0,9$.

Решение. Определим сначала нулевой уровень надежности этой системы, т. е. $R_{с \text{ нач}}$ при $R_1 = R_2 = R_3 = 0,5$:

$$R_{с \text{ нач}} = 0,5^3 = 2^{-3} = 0,125.$$

Найдем теперь качественное приращение надежности системы по формуле (128), учитывая, что $\Delta R_1 = 0,2$, $\Delta R_2 = 0,3$, $\Delta R_3 = 0,4$:

$$\begin{aligned} \Delta R_{с \text{ нач}} &= 2^{-3+1} \sum_{i=1}^3 \Delta R_i - \\ &- 2^{-3+2} \sum_{i, j \in C_3^2} \Delta R_i \Delta R_j + \\ &+ \Delta R_1 \Delta R_2 \Delta R_3 = \\ &= 2^{-2} (0,2 + 0,3 + 0,4) + \\ &+ 2^{-1} (0,2 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,4) + \\ &+ 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,379. \end{aligned}$$

Определим общую надежность системы для этого простейшего случая в виде суммы

$$R_{c1} = R_{c1 \text{ нач}} + \Delta R_{c1 \text{ нач}} = \\ = 0,125 + 0,379 = 0,504,$$

что совершенно точно соответствует произведению

$$R_{c1} = R_1 R_2 R_3 = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,504.$$

«Весы» и «значимости» элементов данной структуры будут равны соответственно

$$g_{x_1} = g_{x_2} = g_{x_3} = 2^{-n+1} = \\ = 2^{-3+1} = 0,25;$$

$$\xi_{x_1} = R_2 R_3 = 0,72, \quad \xi_{x_2} = R_1 R_3 = 0,63,$$

$$\xi_{x_3} = R_1 R_2 = 0,56.$$

Определим количественные приращения надежности системы при дублировании элементов по одному:

$$\Delta R_{c. \text{ кол}} = \xi_{x_1} R_1 Q_1 = \\ = 0,72 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,1512,$$

$$\Delta R_{c. \text{ кол}} = \xi_{x_2} R_2 Q_2 = \\ = 0,63 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,1008,$$

$$\Delta R_{c. \text{ кол}} = \xi_{x_3} R_3 Q_3 = \\ = 0,56 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,0504.$$

Отсюда следует, что если есть возможность резервировать только один элемент, то им должен быть именно первый, обеспечивающий максимальное приращение надежности.

В итоге система с дублированным элементом x_1 (пусть номер дублирующего элемента будет 4) имеет ФРС

$$y_2(x_1, \dots, x_4) = \left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & & \end{array} \right|, \quad (136)$$

$$R_{c2} = R_{c1 \text{ нач}} + \Delta R_{c1 \text{ нач}} + \\ + \Delta R_{c. \text{ кол}} = 0,125 + 0,379 + \\ + 0,1512 = 0,6552.$$

Легко убедиться, что

$$R_{c2} = (1 - Q_1^2) R_2 R_3 = \\ = (1 - 0,3^2) 0,8 \cdot 0,9 = 0,6552.$$

При возможности дублирования сразу двух элементов такими элементами должны быть 1-й и 2-й, что обеспечивает максимальное приращение надежности системы

$$\Delta R_{c. \text{ кол}} = \frac{\partial R_{c1}}{\partial R_1} R_1 Q_1 + \frac{\partial R_{c1}}{\partial R_2} R_2 Q_2 + \\ + \frac{\partial^2 R_{c1}}{\partial R_1 \partial R_2} R_1 R_2 Q_1 Q_2 = \\ = 0,1512 + 0,1008 + 0,03024 = 0,28224.$$

Система с дублированными элементами x_1 и x_2 будет описываться ФРС, содержащей уже пять элементов,

$$y_3(x_1, \dots, x_5) = \left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & \end{array} \right|, \quad (137)$$

$$R_{c3} = R_{c1 \text{ нач}} + \Delta R_{c1 \text{ нач}} + \\ + \Delta R_{c. \text{ кол}} = 0,125 + 0,379 + \\ + 0,28224 = 0,78624.$$

Действительно,

$$R_{c3} = (1 - Q_1^2) (1 - Q_2^2) R_3 = \\ = (1 - 0,3^2) (1 - 0,2^2) 0,9 = 0,78624.$$

Таким образом, надежность системы можно представить в виде суммы начальной надежности и составляющих ее качественного и количественного приращений, что весьма наглядно показывает роль каждой компоненты.

Таким образом, можно отметить:

1) критерий «значимость» элемента в монотонных структурах позволяет определить элементы, обеспечивающие максимальное приращение надежности всей системы;

2) качественное и количественное приращения надежности системы при одновременном изменении надежности любого числа элементов необходимо определять по формулам (130) и (134);

3) при введении дублирования элементов следует руководствоваться значением количественного приращения надежности системы;

4) критерий «вклад» элемента позволяет рационально определять очередность восстановления элементов в системе.

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ОЦЕНОК ВАЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ АНАЛИЗА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ

Для всестороннего исследования надежности системы необходимо сформулировать какое-то множество вариантов задач, поставленных перед ней, а также выдвинуть другие возможные альтернативы ее использования, чтобы затем можно было количественно оценить их эффективность. Решив поставленные задачи, можно вполне объективно судить о важности той или иной связи в системе, о рациональной пропускной способности переключателей, о роли резервных средств и т. д.

Введенные дифференциальные характеристики элементов g_{x_i} , ξ_{x_i} и b_{x_i} позволяют наглядно увидеть распределение роли всех элементов на заданной структуре при решении конкретных задач.

Приведенные далее примеры убедительно свидетельствуют о том, как полезно знать количественные характеристики структурной надежности, которые можно использовать как при проектировании, так и при эксплуатации технических систем.

Пример 12. Оценим количественные эффекты изменения надежности системы простой мостиковой структуры, изображенной на рис. 3.

Решение. Кроме ФРС (12), сформулируем еще одно условие работоспособности этой системы, а именно:

$$y_2(x_1, \dots, x_5) = \left| \begin{array}{cc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & & x_5 & \\ x_2 & & & \end{array} \right|, \tag{138}$$

которое означает требование одновременного обеспечения, например, электроэнергией щитов x_3 и x_4 при наличии двух генераторов x_1 и x_2 и переключки x_5 .

ОДНФ первой ФРС приведена в примере 8 (92), а ОДНФ ФАЛ (138)

имеет вид

$$x_2(x_1, \dots, x_5) = \left| \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ x_1' & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & x_2' & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \right|. \tag{139}$$

Определим R_{c1} и R_{c2} :

$$R_{c1} = R_1 R_3 + R_2 (1 - R_3) R_4 + (1 - R_1) R_2 R_3 R_4 + (1 - R_1) R_2 R_3 (1 - R_4) R_5 + R_1 (1 - R_2) (1 - R_3) R_4 R_5, \tag{140}$$

$$R_{c2} = R_3 R_4 [R_1 R_2 + (1 - R_1) R_2 R_5 + R_1 (1 - R_2) R_5]. \tag{141}$$

Определим все введенные выше характеристики для двух вариантов исходных данных (табл. 3).

Элемент x_5 для ФРС $y_2(\bar{x})$ становится равным по «весу» элементам x_1 и x_2 . По «значимости» и «вкладу» элемент x_5 в этих условиях равноценен элементу x_1 и даже лучше элемента x_2 при первом варианте исходных данных. Для второго варианта исходных данных эффект сравнения по «значимости» и «вкладу» элемента x_5 с элементами x_1 и x_2 для ФРС $y_2(\bar{x})$ еще больший, но дублировать элемент x_5 тем не менее нерационально, так как он высоконадежен и вносит очень малое количественное приращение надежности всей системы (0,0017).

Изменение надежностных характеристик элементов во втором варианте исходных данных повысило надежность системы для первой ФРС и уменьшило — для второй.

Указанный эффект приближенно можно оценить по формуле (130), опуская в первом приближении для простоты расчетов члены со смешанными частными производными. Действительно, качественное приращение надежности первой системы $y_1(\bar{x})$ с изменением исходных данных от первого

3. Оценки важности элементов системы

Вариант исходных данных l	Номер элемента i	R_i	Условия работоспособности системы				
			$y_1(x_1, \dots, x_5)$				
			ξ_{x_i}	$\bar{\xi}_{x_i}$	B_{x_i}	ΔR_{c1} кол	R_{c1}
1	1	0,9	0,375	0,1988	0,1789	0,0179	0,9565
	2	0,8	0,375	0,1134	0,0907	0,0181	
	3	0,8	0,375	0,1134	0,0907	0,0181	
	4	0,9	0,375	0,1988	0,1789	0,0179	
	5	0,9	0,125	0,0388	0,0349	0,0035	
2	1	0,9	0,375	0,1967	0,1770	0,0177	0,9648
	2	0,8	0,375	0,1010	0,0808	0,0162	
	3	0,7	0,375	0,0507	0,0355	0,0106	
	4	0,95	0,375	0,2940	0,2793	0,0140	
	5	0,99	0,125	0,0541	0,0536	0,0005	
Вариант исходных данных l	Номер элемента i	R_i	Условия работоспособности системы				
			$y_2(x_1, \dots, x_5)$				
			ξ_{x_i}	$\bar{\xi}_{x_i}$	B_{x_i}	ΔR_{c2} кол	R_{c2}
1	1	0,9	0,125	0,1872	0,1685	0,0168	0,6869
	2	0,8	0,125	0,1296	0,1037	0,0207	
	3	0,8	0,250	0,8586	0,6869	0,1374	
	4	0,9	0,250	0,7632	0,6869	0,0687	
	5	0,9	0,125	0,1872	0,1685	0,0168	
2	1	0,9	0,125	0,1370	0,1233	0,0123	0,6500
	2	0,8	0,125	0,0718	0,0575	0,0115	
	3	0,7	0,250	0,9285	0,6500	0,1950	
	4	0,95	0,250	0,6842	0,6500	0,0374	
	5	0,99	0,125	0,1729	0,1712	0,0017	

ко второму варианту будет в целом положительным:

$$\begin{aligned} \Delta R_{c1 \text{ кач}} \approx & \frac{\partial R_{c1}^{(1)}}{\partial R_1} \Delta R_1 + \frac{\partial R_{c1}^{(1)}}{\partial R_2} \Delta R_2 + \\ & + \frac{\partial R_{c1}^{(1)}}{\partial R_3} \Delta R_3 + \frac{\partial R_{c1}^{(1)}}{\partial R_4} \Delta R_4 + \\ & + \frac{\partial R_{c1}^{(1)}}{\partial R_5} \Delta R_5 = 0,1988 \cdot 0 + 0,1134 \cdot 0 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 0,1134 (-0,1) + 0,1988 \cdot 0,05 + \\ & + 0,0388 \cdot 0,09 \approx 0,0021, \end{aligned}$$

а качественное приращение надежности по условиям второй задачи при тех же изменениях исходных данных будет уже отрицательным:

$$\begin{aligned} \Delta R_{c2 \text{ кач}} = & 0,1872 \cdot 0 + 0,1296 \times \\ & \times 0 + 0,8586 (-0,1) + 0,7632 \times \\ & \times 0,05 + 0,1872 \cdot 0,09 = -0,0309. \end{aligned}$$

Степень приближенности такой оценки можно определить, сравнив величины

$$R_{c1}^{(2)} \approx R_{c1}^{(1)} + \Delta R_{c1 \text{ кач}} = 0,9565 + 0,0021 = 0,9586,$$

$$R_{c2}^{(2)} \approx R_{c2}^{(1)} + \Delta R_{c2 \text{ кач}} = 0,6869 - 0,0309 = 0,6560$$

с точными значениями $R_{c1}^{(2)}$ и $R_{c2}^{(2)}$, указанными в табл. 3 (индексы в скобках обозначают номер j варианта исходных данных). Ценность такой приближенной оценки будет возрастать с ростом сложности системы и уменьшением числа элементов, надежность которых мы собираемся варьировать.

Пример 13. Рассмотрим систему, структурная схема которой представлена на рис. 1, б. Определим различные характеристики важности элементов (g_{x_i} , ξ_{x_i} , b_{x_i}) этой же системы.

Решение.

Для последующего определения «вкладов» элементов B_{x_i} в соответствии с формулой (124) сначала нужно вычислить R_c для выбранных значений R_i . По формуле (61) для исходных данных

$$R_1 = R_2 = 0,7; R_3 = R_4 = R_7 = 0,9; R_5 = R_6 = R_8 = 0,99$$

имеем

$$R_c = 0,775559.$$

Значения $R_{c0}^{(i)}$ легко вычислить, пользуясь ортогональной формой ФРС. Подставляя ноль вместо x_i элемента (и единицу при x'_i), определим с помощью выражения (60) нулевую функцию $y_0^{(1)}$ по аргументу x_1

$$y_0^{(1)}(x_1, \dots, x_8) = x_7 \begin{vmatrix} x_2 & x_4 & x_6 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x'_6 & x_8 \end{vmatrix};$$

$$R_{c0}^{(1)} = R_7 (R_2 R_4 R_6 + R_2 R_3 R_4 R_5 Q_6 R_6) = R_2 R_4 R_7 (R_6 + R_3 R_5 Q_6 R_8) = 0,566331.$$

По формуле (124) имеем

$$B_{x_1} = R_c - R_{c0}^{(1)} = 0,209228.$$

По формуле (123) имеем

$$\xi_{x_1} = \frac{\partial R_c}{\partial R_1} = \frac{B_{x_1}}{R_1} = \frac{0,209228}{0,7} = 0,298897.$$

При условии равной надежности

$$R_{c0}^{(1)} = R^4 + R^6 - R^7.$$

Используя результат (62), имеем

$$R_c - R_{c0}^{(1)} = R^4 + R^6 - 4R^7 + 2R^8.$$

Полиномиальное выражение для производной $\frac{\partial R_c}{\partial R_1}$ при одинаковой надежности элементов будет

$$\frac{\partial R_c}{\partial R_1} = R^3 + R^5 - 4R^6 + 2R^7.$$

Определим теперь «вес» g_{x_1} при $R = 0,5$:

$$g_{x_1} = 0,5^3 + 0,5^5 - 4 \cdot 0,5^6 + 2 \cdot 0,5^7 = 0,109375.$$

В табл. 4 приведены результаты расчетов указанных характеристик для всех элементов системы.

Значение каждого элемента в обеспечении надежности поставленной задачи при выбранных исходных данных показано на рис. 9. Выходной элемент x_7 обладает приоритетом по всем показателям (аналогично и элемент x_8 устойчиво занимает последнее место).

Элементы x_1 , x_2 и x_5 , x_6 по своему месту в структуре обладают одинаковым весом, однако элементы x_1 , x_2 оказываются более значительными, чем элементы x_5 , x_6 и даже x_3 , x_4 , которым они уступают по «весу». Следовательно, максимальное приращение надежности системы может быть обеспечено благодаря качественному повышению надежности элементов именно в такой последовательности: 1) x_7 , 2) x_1 , x_2 , 3) x_3 , x_4 , 4) x_5 , x_6 , что не всегда «очевидно» даже для сравнительно простых систем.

4. Характеристики важности отдельных элементов системы, представленной на рис. 9

i	R_i	g_{x_i}	ξ_{x_i}	B_{x_i}	b_{x_i}
1	0,70	0,109375	0,298897	0,209228	0,119297
2	0,70	0,109375	0,298897	0,209228	0,119297
3	0,90	0,125000	0,238032	0,214229	0,122148
4	0,90	0,125000	0,238032	0,214229	0,122148
5	0,99	0,109375	0,064834	0,064186	0,036597
6	0,99	0,109375	0,064834	0,064186	0,036597
7	0,90	0,250000	0,861737	0,775559	0,442205
8	0,99	0,015625	0,003031	0,003001	0,001711

Пример 14. Исследуем структурную надежность судовой электроэнергетической системы, изображенной на рис. 10. На схеме приняты следующие обозначения: x_1, x_2 — основные генераторы системы, каждый из которых способен обеспечить питанием всю судовую нагрузку; x_3, x_4, x_7, x_8 глав-

ные распределительные щиты; $x_5, x_6, x_9-x_{14}, x_{16}, x_{17}$ — элементы продольных и поперечных перемычек системы; x_{15} — резервный генератор ограниченной мощности. Стрелками показаны возможные направления передачи электрической энергии.

Выполним это исследование на фоне одной задачи, но при разных ограничениях. Пусть задача заключается в обеспечении электрической энергией потребителей от щитов (x_3 и x_4) или (x_7 и x_8). Рассмотрим два варианта резервного генератора x_{15} : 1) мощность достаточна для питания потребителей двух щитов (x_7 и x_8), 2) мощность достаточна только для питания потребителей одного из щитов (x_7 либо x_8), и три варианта структуры: 1) с двумя перемычками x_{16} и x_{17} , 2) без перемычки x_{17} , 3) без перемычки x_{16} .

Решение. Запишем ФРС для шести указанных выше вариантов (табл. 5). Определим любым из мето-

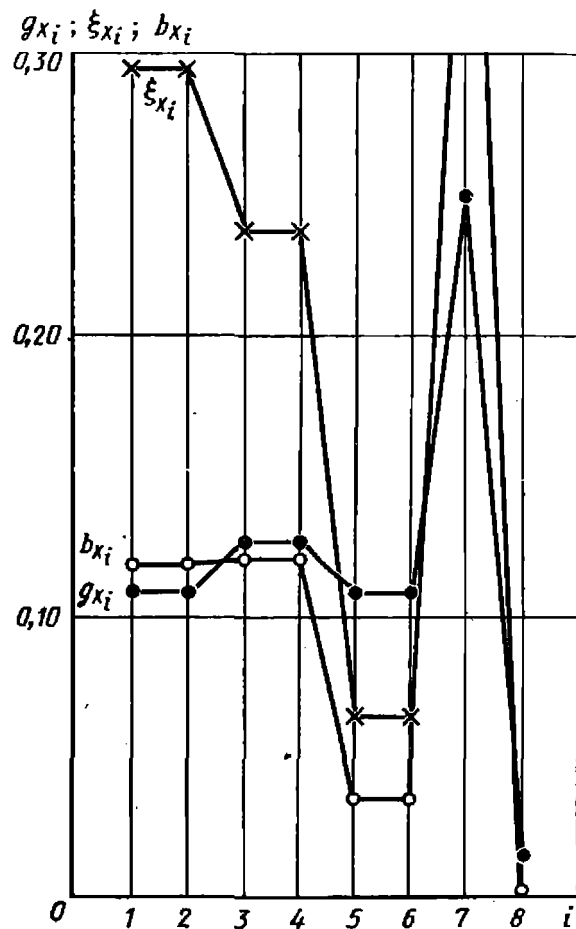


Рис. 9. Распределение важности элементов системы

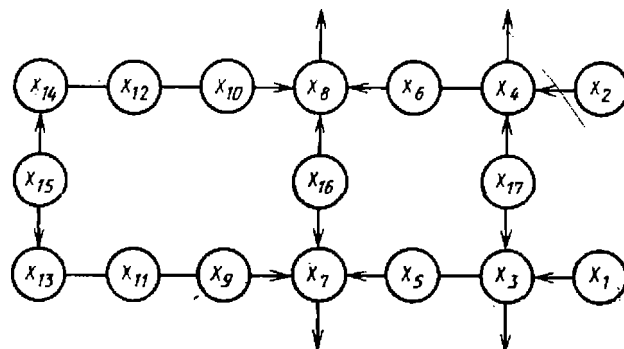


Рис. 10. Структурная схема судовой электроэнергетической системы

5. Функции работоспособности системы, предназначенной для обеспечения питанием потребителей от щитов x_3x_4 или x_7x_8

Вариант структуры	Вариант ограничений	
	1 — достаточная мощность x_{16}	2 — ограниченная мощность x_{16}
С x_{16} и x_{17}	1	$y_{11}(\bar{x}) = \left \begin{array}{c c} x_3x_4 & x_1x_2 \\ x_1 & x_{17} \\ x_2 & \\ \hline x_7x_8 & x_1x_3x_5 & x_{16} \\ x_2x_4x_6 & \\ x_9x_{11}x_{13}x_{15} & \\ x_{10}x_{12}x_{14}x_{15} & \\ x_1x_3x_5x_{10}x_{12}x_{14} & x_{15} \\ x_2x_4x_6x_9x_{11}x_{13} & \\ x_9x_{10}x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} & \end{array} \right $
Без x_{17}	2	$y_{21}(\bar{x}) = \left \begin{array}{c c} x_3x_4x_1x_2 & \\ x_7x_8 & x_1x_3x_5 & x_{16} \\ x_2x_4x_6 & \\ x_9x_{11}x_{13}x_{15} & \\ x_{10}x_{12}x_{14}x_{15} & \\ x_1x_3x_5x_{10}x_{12}x_{14} & x_{15} \\ x_2x_4x_6x_9x_{11}x_{13} & \\ x_9x_{10}x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} & \end{array} \right $
Без x_{16}	3	$y_{31}(\bar{x}) = \left \begin{array}{c c} x_3x_4 & x_1x_2 \\ x_1 & x_{17} \\ x_2 & \\ \hline x_7x_8 & x_1x_3x_5x_{10}x_{12}x_{14} & x_{15} \\ x_2x_4x_6x_9x_{11}x_{13} & \\ x_9x_{10}x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} & \end{array} \right $
		$y_{12}(\bar{x}) = \left \begin{array}{c c} x_3x_4 & x_1x_2 \\ x_1 & x_{17} \\ x_2 & \\ \hline x_7x_8 & x_1x_3x_5 & x_{16} \\ x_2x_4x_6 & \\ x_1x_3x_5x_{10}x_{12}x_{14} & x_{15} \\ x_2x_4x_6x_9x_{11}x_{13} & \end{array} \right $
		$y_{22}(\bar{x}) = \left \begin{array}{c c} x_3x_4x_1x_2 & \\ x_7x_8 & x_1x_3x_5 & x_{16} \\ x_2x_4x_6 & \\ x_1x_3x_5x_{10}x_{12}x_{14} & x_{15} \\ x_2x_4x_6x_9x_{11}x_{13} & \end{array} \right $
		$y_{32}(\bar{x}) = \left \begin{array}{c c} x_3x_4 & x_1x_2 \\ x_1 & x_{17} \\ x_2 & \\ \hline x_7x_8 & x_1x_3x_5x_{10}x_{12}x_{14} & x_{15} \\ x_2x_4x_6x_9x_{11}x_{13} & \end{array} \right $

6. Веса g_{x_i} элементов системы при питании потребителей от щитов x_3x_4 или x_7x_8

i	При достаточной мощности x_{15}			При ограниченной мощности x_{15}		
	с x_{16} и x_{17}	без x_{17}	без x_{16}	с x_{16} и x_{17}	без x_{17}	без x_{16}
1	0,137695	0,137695	0,126465	0,141602	0,141602	0,126953
2	0,137695	0,137695	0,126465	0,141602	0,141602	0,126953
3	0,253418	0,137695	0,250366	0,258301	0,141602	0,250979
4	0,253418	0,137695	0,250366	0,258301	0,141602	0,250979
5	0,018311	0,021973	0,002136	0,020752	0,024902	0,002441
6	0,018311	0,021973	0,002136	0,020752	0,024902	0,002441
7	0,063965	0,073242	0,007690	0,041504	0,049805	0,004883
8	0,063965	0,073242	0,007690	0,041504	0,049805	0,004883
9	0,012451	0,013184	0,005249	0,001221	0,001465	0,002441
10	0,012451	0,013184	0,005249	0,001221	0,001465	0,002441
15	0,024902	0,026367	0,007690	0,002441	0,002930	0,004883
16	0,056274	0,064453	0,000000	0,036621	0,043945	0,000000
17	0,115723	0,000000	0,123901	0,116699	0,000000	0,124093

дов вероятности безотказной работы системы в виде полиномов

$$R_{C11} = 3R^4 - 2R^5 + 2R^6 + 2R^7 - 4R^8 + 5R^9 - 8R^{10} - 10R^{11} + 16R^{12} - 5R^{13} + 12R^{14} - 14R^{15} + 4R^{16}, \quad (142)$$

$$R_{C12} = 3R^4 - 2R^5 + 2R^6 - 4R^8 + 4R^9 - 2R^{10} - 4R^{11} + 6R^{12} - 2R^{13}, \quad (143)$$

$$R_{C21} = R^4 + 2R^6 + 2R^7 - 2R^8 + 3R^9 - 8R^{10} - 4R^{11} + 4R^{12} + 3R^{13} + 4R^{14} - 4R^{15}, \quad (144)$$

$$R_{C22} = R^4 + 2R^6 - 2R^8 + 2R^9 - 2R^{10} - 2R^{11} + 2R^{12}, \quad (145)$$

$$R_{C31} = 3R^4 - 2R^5 + 3R^9 - 4R^{11} - 3R^{13} + 6R^{14} - 2R^{15}, \quad (146)$$

$$R_{C32} = 3R^4 - 2R^5 + 2R^9 - 4R^{11} + 2R^{12}. \quad (147)$$

Вычислим их значения при $R = 0,9$:

$$R_{C11} = 0,946383,$$

$$R_{C12} = 0,911620,$$

$$R_{C21} = 0,916018,$$

$$R_{C22} = 0,872771,$$

$$R_{C31} = 0,892605,$$

$$R_{C32} = 0,871778.$$

Результаты вычисления весов приведены в табл. 6, где под номерами 9 и 10 значатся конъюнктивно связанные элементы x_9 , x_{11} , x_{13} и x_{10} , x_{12} , x_{14} , имеющие всегда одинаковые веса.

Результаты вычисления «удельных вкладов» при выбранных значениях исходных данных приведены в табл. 7.

На основании табл. 6 и 7 построим распределения важности отдельных элементов и оценим влияние различных факторов на надежность выполнения одной и той же задачи.

На рис. 11 представлены распределения «весов» и «удельных вкладов» для первого варианта x_{15} и структуры (с перемычками x_{16} и x_{17}).

Из рис. 11 следует, что

$$g_{x_{17}} > g_{x_{16}} > g_{x_{15}};$$

$$b_{x_{17}} < b_{x_{16}} < b_{x_{15}}.$$

«Пересечение» этих характеристик свидетельствует о различной информационной их ценности и не является недостатком. Действительно, при отсутствии информации о фактической

7. Удельные вклады b_{x_i} элементов системы при питании потребителей от щитов x_3x_4 или x_7x_8

i	R_i	При достаточной мощности x_{15}			При ограниченной мощности x_{15}		
		с x_{16} и x_{17}	без x_{17}	без x_{16}	с x_{16} и x_{17}	без x_{17}	без x_{16}
1	0,79	0,074236	0,117596	0,075185	0,204733	0,102734	0,104683
2	0,79	0,074236	0,117596	0,075185	0,204733	0,102734	0,104683
3	0,98	0,144047	0,117596	0,287566	0,254674	0,102734	0,308700
4	0,98	0,144047	0,117596	0,287566	0,254674	0,102734	0,308700
5	0,99	0,005325	0,042680	0,002634	0,020660	0,085036	0,006253
6	0,99	0,005325	0,042680	0,002634	0,020660	0,085036	0,006253
7	0,98	0,127984	0,070762	0,024323	0,041320	0,170073	0,012506
8	0,98	0,127984	0,070762	0,024323	0,041320	0,170073	0,012506
9	0,99	0,021591	0,026822	0,017701	0,000241	0,000992	0,006253
10	0,99	0,021591	0,026822	0,017701	0,000241	0,000992	0,006253
11	0,79	0,021591	0,026822	0,017701	0,000241	0,000992	0,006253
12	0,79	0,021591	0,026822	0,017701	0,000241	0,000992	0,006253
13	0,77	0,021591	0,026822	0,017701	0,000241	0,000992	0,006253
14	0,77	0,021591	0,026822	0,017701	0,000241	0,000992	0,006253
15	0,96	0,073796	0,086962	0,024322	0,000482	0,001983	0,012506
16	0,98	0,064139	0,054844	0,000000	0,017228	0,070912	0,000000
17	0,98	0,029319	0,000000	0,090056	0,020975	0,000000	0,085687

надежности элементов системы (что эквивалентно случаю принятия $R_i = \text{const} = 0,5$) веса в целом дают правильное и объективное представление о роли элементов в исследуемой структуре. Смена приоритетов по элементам x_{15} , x_{16} и x_{17} (при учете вероятностных характеристик надежности всех элементов системы) свидетельствует о более точном учете надежностных факторов системы (не только ее структуры, но и количественных характеристик). Поэтому резервный генератор x_{15} и оказался важнее переключек x_{16} и x_{17} и практически вносит тот же удельный вклад, что и основные генераторы x_1 и x_2 . Еще больший вклад элементов x_3 , x_4 , x_7 и x_8 объясняется самой формулировкой задачи.

На рис. 12, а представлены распределения «удельных вкладов» для двух вариантов x_{15} при первой структуре (с переключками x_{16} и x_{17}).

Из рис. 12, а следует: в одном случае ($x_{15}^{(1)}$) — резервный генератор — равноценный «партнер» основных генераторов x_1 и x_2 ; в другом ($x_{15}^{(2)}$) его

роль сводится к нулю ($b_{x_{15}} = 0,000482$), говоря точнее, $b_{x_1}/b_{x_{15}} = 426$. Существенно снижается при

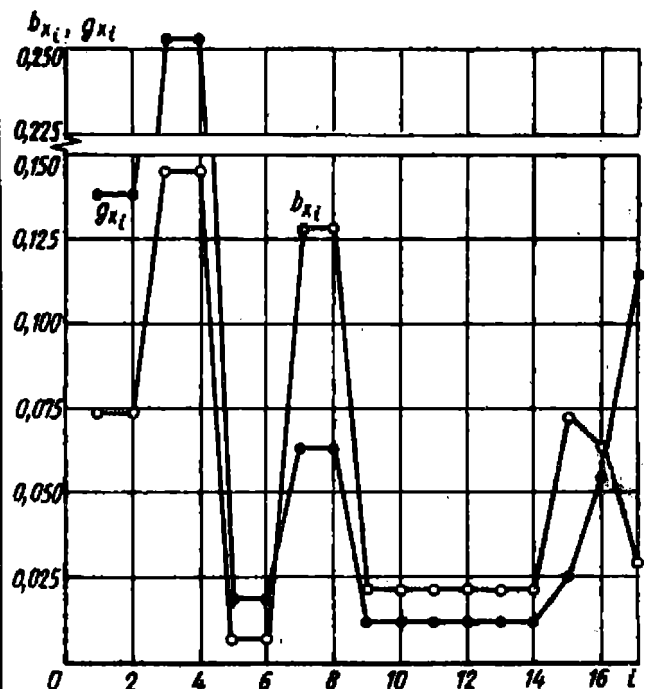


Рис. 11. Распределения «весов» и «удельных вкладов» для ФРС $y_{11}(\bar{x})$

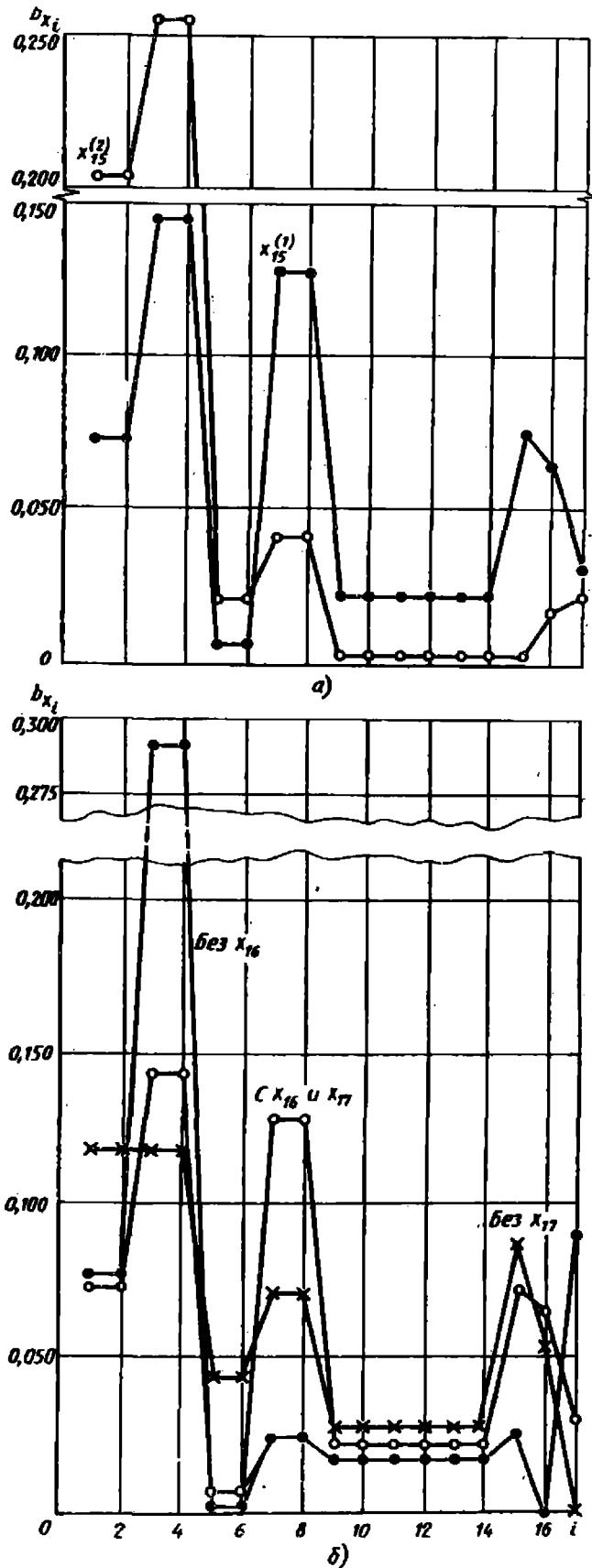


Рис. 12. Распределения «удельных вкладов»:

а — для ФРС $y_{11}(\bar{x})$ и $y_{12}(\bar{x})$; б — для ФРС $y_{11}(\bar{x})$, $y_{21}(\bar{x})$ и $y_{21}(\bar{x})$

этом и вклад b_{x_7} и b_{x_8} . Всю задачу обеспечивает в основном носовая электростанция, т. е. $x_1—x_4$.

На рис. 12, б представлены распределения «удельных вкладов» для первого варианта x_{15} и трех сравниваемых структур. Здесь также весьма наглядно прослеживается роль структуры: отсутствие переключки x_{16} существенно снижает вклад резервного генератора x_{15} (более чем в 3 раза) в решение общей задачи, переключая ответственность «на плечи» носовой электростанции.

Отсутствие переключки x_{17} повышает «удельный вклад» резервного генератора x_{15} и всех продольных связей ($x_5, x_6, x_9—x_{14}$).

Логико-вероятностные методы исследования структурно-сложных систем позволяют:

- 1) объективно и количественно судить о роли отдельных элементов в обеспечении надежности всей системы;
- 2) рационально воздействовать на повышение надежности системы;
- 3) оптимально вводить избыточность в систему;
- 4) определять приоритеты в системе с целью ее восстановления или управления ею.

Однако для практического использования этих методов необходимы ЭВМ.

Если предложенные выше характеристики будут получаться на ЭВМ в диалоговом режиме с машиной, то графики, подобные тем, которые представлены на рис. 11, 12, а также таблицы будут оперативно высвечиваться на экранах дисплеев. Тогда специалисты, даже плохо подготовленные в области теории надежности, будут иметь возможность объективно судить о результатах своего вмешательства при конструировании системы.

4. ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Основы логико-вероятностного метода расчета надежности восстанавливаемых систем. Восстановление, как и резервирование, является одним из средств повышения надежности систем длительного использования.

Количественный учет восстановления отказавших элементов при расчетах надежности систем существенно усложняет как саму задачу исследования, так и модель функционирования.

Рассмотрим возможность учета восстановления в структурно-сложных системах, базирующуюся на использовании аппарата алгебры логики и теории случайных импульсных потоков. Логическая часть указанного метода позволяет не только рассчитать надежность восстанавливаемых систем, но и оценить надежность невозстанавливаемых монотонных структур, а также их живучесть и безопасность.

Прежде всего необходимо составить условия работоспособности системы, выраженные через конъюнкцию отрицаний всех минимальных сечений отказов:

$$y(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^m S'_j = \bigwedge_{j=1}^m \left[\bigvee_{i \in K_{S_j}} x_i \right]. \quad (148)$$

Затем следует упростить ФАЛ (148) с помощью операции вынесения за скобки одинаковых членов в некоторых конъюнкциях. При вынесении за скобки общих аргументов необходимо сохранить конъюнктивную форму записи функции y , т. е. следует от конъюнкции элементарных дизъюнкций (S'_j) перейти к конъюнкции некоторых ДНФ (Z_i), которые будем называть *звеньями* схемы ненадежности системы:

$$y(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j=1}^m S'_j = \bigwedge_{i=1}^r Z_i, \quad (149)$$

где r — число таких звеньев ($r \leq m$).

Последовательно-параллельную структурную схему, соответствующую функции $\bigwedge_{i=1}^r Z_i$, назовем *схемой ненадежности* системы.

Отличительной особенностью схемы ненадежности системы является последовательное соединение звеньев, составленных из всевозможных мини-

мальных наборов элементов, одновременный отказ которых приводит к отказу всей системы в целом. При этом структура самого звена представляет параллельное соединение цепей, состоящих из строго последовательно соединенных элементов.

Функция $y(x_1, \dots, x_n)$ в форме (149) является, как правило, повторной ФАЛ.

Пренебрегая зависимостью отказов звеньев схемы ненадежности (из-за повторности ФАЛ), можно определить вероятность ее безотказной работы $R_{с.н}$ по формуле

$$R_{с.н} = P \{ y(x_1, \dots, x_n) = 1 \} = P \left\{ \bigwedge_{i=1}^r Z_i = 1 \right\} = \prod_{i=1}^r P \{ Z_i = 1 \} = \prod_{i=1}^r R_{з_i}, \quad (150)$$

где $R_{з_i}$ — вероятность безотказной работы звена Z_i .

Расчет надежности системы по формуле (150) несколько занижает вероятность исправной работы систем по сравнению с точным значением этой вероятности, и ошибка расчета, таким образом, «идет» в запас надежности.

Переход от ФАЛ (148) к ФРС (149) приводит, как правило, к существенному уменьшению числа конъюнктивных членов, совершенно не искажая логического смысла условий работоспособности системы. Этим по существу и объясняется большая точность оценки надежности системы по формуле (150) по сравнению с известной нижней оценкой через минимальные сечения отказов

$$R_{с_{\min}} = \prod_{j=1}^m \left[1 - \prod_{i \in K_{S_j}} Q_i \right]. \quad (151)$$

Пример 15. Составим условия работоспособности системы, представленной на рис. 1, в форме, необходимой для построения схемы ненадежности.

Решение. Преобразуем ФРС (8) к виду

$$y(x_1, \dots, x_8) = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} x_7 & x_1 & x_3 & x_5 & x_1 & x_2 \\ & x_2 & x_4 & x_2 & x_4 & x_6 \\ & & & & x_4 & x_6 \\ & & & & & x_6 \\ & & & & & x_8 \\ & & & & & x_8 \end{array} \right| = |Z_1 Z_2 \dots Z_6|. \quad (152)$$

Из (152) следует, что число звеньев $r = 6$, а число всех МСО $m = 10$.

При $R_1 = R_2 = \dots = R_8 = 0,9$ по формулам (150) и (152) находим

$$R_{c.н} = \prod_{i=1}^6 R_{z_i} = 0,9 [1 - (1 - 0,9)(1 - 0,9^2)]^2 \times [1 - (1 - 0,9)(1 - 0,9^3)] \times [1 - (1 - 0,9)^3]^2 \approx 0,841,$$

а оценка по формуле (151)

$$R_{c.min} = \prod_{j=1}^{10} [1 - \prod_{i \in K_{s_j}} Q_i] = (1 - Q_7)(1 - Q_1 Q_2)(1 - Q_1 Q_4) \times (1 - Q_2 Q_3)(1 - Q_3 Q_4) \times (1 - Q_3 Q_6)(1 - Q_4 Q_5)(1 - Q_5 Q_6) \times (1 - Q_1 Q_6 Q_8)(1 - Q_2 Q_5 Q_8) = (1 - 0,1)(1 - 0,01)^7 \times (1 - 0,001)^2 \approx 0,837.$$

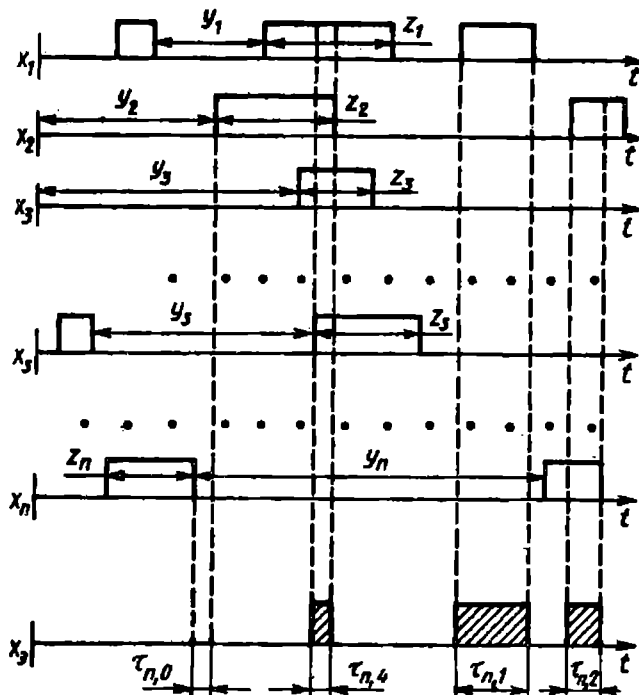


Рис. 13. Графическая иллюстрация процесса функционирования восстанавливаемой системы

Подставляя $R = 0,9$ в точное решение (41), получим

$$R_c = 2 \cdot 0,9^4 + 2 \cdot 0,9^6 - 5 \cdot 0,9^7 + 2 \cdot 0,9^8 = 0,84453.$$

Метод расчета надежности восстанавливаемых систем с помощью теории совпадения импульсов независимых потоков. Функции Z_i , записанные в ДНФ, представляют собой простые параллельные структуры, соответствующие нагруженному резервированию, а в последовательных цепях (членах дизъюнкции Z_i) находятся, как правило, разнотипные элементы.

Необходимо решить следующие задачи:

- 1) по известным характеристикам безотказности и восстанавливаемости элементов, находящихся в последовательной цепи звена, оценить соответствующие характеристики этой цепи;
- 2) по найденным характеристикам последовательных цепей оценить надежность всего звена.

Эти задачи при некоторых общепринятых допущениях можно решить с помощью теории совпадения импульсов независимых потоков [10].

На рис. 13 процесс функционирования каждого элемента x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) представлен в виде потока прямоугольных импульсов, причем продолжительность исправной работы элемента поставлена в соответствие с длительностью паузы y_i , а время восстановления — с длительностью импульса z_i .

Поток взаимно неперекрывающихся во времени импульсов, когда

$$T_i^{(k)} = t_i^{(k)} - t_i^{(k-1)} > z_i^{(k-1)}, \quad (153)$$

где $t_i^{(k)}$ и $z_i^{(k)}$ — момент появления и длительность k -го импульса для i -го элемента (см. рис. 13), называют стационарным в широком смысле [10], если математическое ожидание и конечная дисперсия случайной вели-

чины T_i не зависят от t , а коэффициент корреляции случайных величин $T_i(t + t_1)$ и $T_i(t + t_2)$ является функцией $t_2 - t_1$.

Примем следующие допущения.

1. Процесс восстановления элементов является стационарным в широком смысле.

2. Отказ и восстановление элементов независимы.

3. Все исправные элементы находятся в режиме нагруженного резервирования, а все неисправные неограниченно восстанавливаются.

Совпадение двух и более импульсов будем считать состоявшимся, если их длительности перекрываются хотя бы частично. Импульс, образованный в результате перекрытия во времени заданного числа s импульсов, будем называть *импульсом совпадения*.

Длительность такого импульса будем обозначать $\tau_{n,s}$. На рис. 13 заштрихованы импульсы совпадения, образованные в результате перекрытия четырех ($\tau_{n,4}$) и двух ($\tau_{n,2}$) импульсов из n , а также импульс длительностью $\tau_{n,1}$, который условно тоже будем считать импульсом совпадения. Через $\tau_{n,0}$ обозначена длительность совпадающих пауз.

Процесс совпадения импульсов характеризуется только временными параметрами. Это позволяет форму импульсов каждого потока считать прямоугольной, а их амплитуду — равной единице. Длительность $T_{n,s}$ импульса совпадений, образованного в результате перекрытия во времени заданного числа s импульсов независимых потоков, является величиной случайной.

Если в процессе совпадения участвуют импульсы n стационарных и независимых потоков, то распределение длительности импульсов потока совпадений, образованных в результате перекрытия во времени s из n импульсов, определяется плотностью вероятностей

$$f_{ns}(\tau) = \frac{1}{\bar{\mu}_{ns}} \frac{d^2}{d\tau^2} P_{ns}(\tau), \quad (154)$$

где $\bar{\mu}_{ns}$ — средняя частота следования импульсов совпадения; $P_{ns}(\tau)$ —

вероятность нахождения случайной величины T_{ns} в пределах импульса потока совпадений, образованного в результате перекрытия во времени s из n импульсов.

Математическое ожидание длительности импульса потока совпадений, образованного в результате перекрытия во времени s из n импульсов, согласно определению

$$\bar{T}_{ns} = \int_0^{\infty} \tau f_{ns}(\tau) d\tau \quad (155)$$

Подставив в данное уравнение значение (154) и выполнив интегрирование по частям, получим

$$\bar{T}_{ns} = \frac{P_{ns}(\tau)}{\bar{\mu}_{ns}}. \quad (156)$$

Таким образом, имеется принципиальная возможность вычисления математических ожиданий \bar{T}_{ns} для любых n и $0 \leq s \leq n$.

Располагая формулами для вычисления \bar{T}_{ns} , уточним указанные ранее задачи:

1) зная средние времена \bar{Y}_i и \bar{Z}_i элементов, входящих в цепь звена схемы ненадежности системы, требуется определить эти параметры для одного элемента x_a , являющегося эквивалентным (в смысле равенства математических ожиданий) последовательной цепочке из n различных элементов (рис. 14, а);

2) зная средние времена \bar{Y}_a и \bar{Z}_a для m параллельных ветвей звена схемы ненадежности системы, требуется определить эти параметры для всего звена \bar{Y}_3 и \bar{Z}_3 , являющегося эквивалентным (в смысле равенства математических ожиданий) параллельному соединению из m различных элементов (рис. 14, б), и оценить вероятность его безотказной работы.

На основании анализа модели совпадения импульсов можно утверждать, что решениями этих задач по эквивалентированию последовательных це

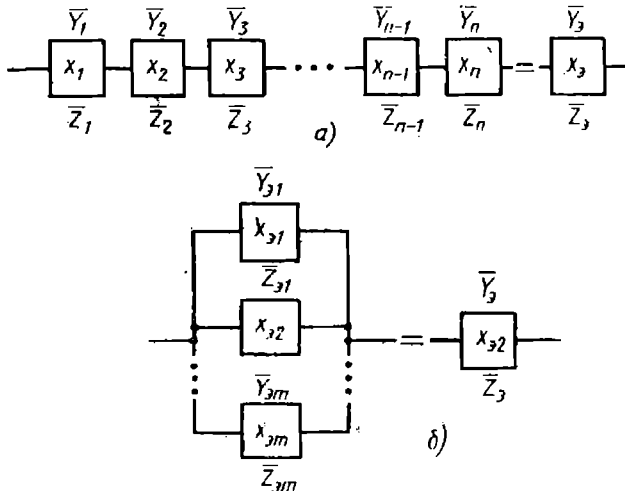


Рис. 14. Эквивалентирование последовательной цепочки (а) и параллельного соединения (б)

почек и параллельных ветвей схемы ненадежности будут

$$\bar{Y}_3 = \bar{T}_{n, 0}; \tag{157}$$

$$\bar{Z}_3 = \sum_{i=1}^n \bar{T}_{n, i}; \tag{158}$$

$$\bar{Z}_3 = \bar{T}_{m, m}; \tag{159}$$

$$\bar{Y}_3 = \bar{T}_{m, 0} - \bar{Z}_3. \tag{160}$$

где $\bar{T}_{m, 0}$ — среднее время между отказами звена.

Действительно, математическое ожидание времени исправной работы n элементов последовательной цепочки звена \bar{Y}_3 равно средней продолжительности совпадения пауз $\bar{T}_{n, 0}$, а математическое ожидание времени восстановления этой же цепочки \bar{Z}_3 в зависимости от принятой модели обслуживания определяется суммой различного числа продолжительностей импульсов совпадений $\bar{T}_{n, i}$. Если в период ремонта одного из элементов возможны отказы других, т. е. возможны совпадения ремонтов двух, трех элементов и т. д., то среднее время восстановления цепочки (обозначим в этом случае $\bar{Z}_3^{(1)}$) будет определяться суммой всех $\bar{T}_{n, i}$.

Функция $f_{n, s}(\tau)$ при $n \rightarrow \infty$ и соблюдении некоторых нежестких ус-

ловий приближается к экспоненциальному распределению [10]:

$$f_{n, s}(\tau) = \frac{1}{\bar{T}_{n, s}} \exp\left(-\frac{\tau}{\bar{T}_{n, s}}\right). \tag{161}$$

Даже при конечных n , если стационарные потоки восстановлений элементов независимы и выполняется условие

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 / \left(\sum_{i=1}^n v_i\right)^2 \leq 0.1, \tag{162}$$

суммарный поток восстановлений является практически экспоненциальным независимо от вида функций $q_i(y)$,

$v_i(z)$. В условии (162) $v_i = \frac{1}{\bar{Z}_i}$ —

интенсивность восстановления i -го элемента, $q_i(y)$, $v_i(z)$ — плотности вероятностей соответственно отказа и восстановления i -го элемента.

Если же плотности распределения случайных величин λ_i и Z_i подчиняются экспоненциальному закону, то суммарный поток восстановлений будет простейшим даже при нарушении условия (162), т. е. при любом числе n .

С учетом сказанного получим расчетную формулу для определения \bar{Y}_3 :

$$\bar{Y}_3 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{Y}_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}. \tag{163}$$

Соответствующая интенсивность отказов элемента λ_3

$$\lambda_3 = \frac{1}{\bar{Y}_3} = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \tag{164}$$

Расчетное выражение для определения \bar{Z}_3 при произвольном n является весьма громоздким, поэтому запишем формулы только для $n = 2$ и 3:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{32} &= \bar{T}_{2, 1} + \bar{T}_{2, 2} = \\ &= \frac{\bar{Z}_1 \bar{Y}_2 + \bar{Z}_2 \bar{Y}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2} + \\ &+ \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}; \end{aligned} \tag{165}$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{03} &= \bar{T}_{3,1} + \bar{T}_{3,2} + \bar{T}_{3,3} = \\ &= \frac{\bar{Z}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Y}_1 \bar{Y}_3 + \bar{Z}_3 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2}{\bar{Z}_1 (\bar{Y}_2 + \bar{Y}_3) + \bar{Z}_2 (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_3) + \bar{Z}_3 (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) + \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 + \bar{Y}_1 \bar{Y}_3 + \bar{Y}_1 \bar{Y}_2} + \\ &+ \frac{\bar{Y}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 + \bar{Y}_2 \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Y}_3 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Y}_1 (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) + \bar{Y}_2 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3) + \bar{Y}_3 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_2}. \quad (166)$$

Если при ремонте одного из элементов цепочки отказы других элементов невозможны (случай, весьма распространенный на практике), то все расчеты существенно упрощаются, так как среднее время восстановления такой цепочки будет равно математическому ожиданию продолжительности только одного импульса совпадений $\bar{T}_{n,1}$:

$$\bar{Z}_s^{(2)} = \bar{T}_{n,1} =$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{Z}_k \frac{\prod_{i=1}^n \bar{Y}_i}{\bar{Y}_k}$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{Z}_k \left[\sum_{\substack{i, j, l \in \{n\} \\ i, j, l \neq k}}^{n-1} \bar{Y}_i \bar{Y}_j \dots \bar{Y}_l \right] + \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i=1}^n \bar{Y}_i}{\bar{Y}_k}. \quad (167)$$

Соответствующая интенсивность восстановления элемента

$$v_3 = \frac{1}{\bar{Z}_s^{(2)}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k + \sum_{k=1}^n \rho_k \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - \lambda_k \right)}{\sum_{k=1}^n \rho_k}, \quad (168)$$

где $\rho_k = \frac{\bar{Z}_k}{\bar{Y}_k}$.

Исходя из понятия коэффициента готовности (или простоя) последовательной цепочки из n элементов и допуская совпадения ремонтов, можно получить следующее простое выражение для определения \bar{Z}_s (математиче-

ского ожидания длительности восстановления цепочки):

$$\bar{Z}_s^{(3)} = \frac{\prod_{k=1}^n (1 + \rho_k) - 1}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}. \quad (169)$$

Можно доказать, что

$$\bar{Z}_s^{(1)} > \bar{Z}_s^{(3)} > \bar{Z}_s^{(2)}. \quad (170)$$

Математическое ожидание времени восстановления звена \bar{Z}_s , состоящего из m элементов, равно средней продолжительности импульсов совпадения $\bar{T}_{m,m}$, т. е. средней длительности совпадения ремонтов во всех m ветвях одновременно (ибо в противном случае нашлись бы ветви «без ремонтов», а это означало бы, что звено исправно).

Расчетная формула для определения

$$\bar{Z}_3 = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\bar{Z}_{3j}}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m v_{3j}}, \quad (171)$$

а соответствующая интенсивность восстановления элемента λ_3

$$\lambda_3 = \sum_{j=1}^m v_{3j}. \quad (172)$$

Математическое ожидание времени исправной работы звена в формуле (171) вычисляются с помощью среднего времени между отказами звена $\bar{T}_{м.о.}$, обратно пропорционального средней частоте следования импульсов совпадения $\bar{\mu}_{м.м.}$:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{м.о.} &= \frac{1}{\bar{\mu}_{м.м.}} = \frac{\prod_{j=1}^m (\bar{Y}_{3j} + \bar{Z}_{3j})}{\sum_{j=1}^m \frac{\prod_{i=1}^m \bar{Z}_{3i}}{\bar{Z}_{3j}}} = \\ &= \frac{\prod_{j=1}^m \frac{1 + \rho_{3j}}{\rho_{3j}}}{\sum_{j=1}^m v_{3j}}, \quad (173) \end{aligned}$$

$$\text{где } \rho_{3j} = \frac{\bar{Z}_{3j}}{\bar{Y}_{3j}}.$$

Интенсивность отказа звена

$$\lambda_3 = \frac{1}{\bar{Y}_3} = \frac{\sum_{j=1}^m v_{3j}}{\prod_{j=1}^m \frac{1 + \rho_{3j}}{\rho_{3j}} - 1}, \quad (174)$$

а коэффициент неисправности звена определяется выражением

$$\rho_3 = \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Y}_3} = \frac{\lambda_3}{v_3} = \frac{1}{\prod_{j=1}^m \frac{1 + \rho_{3j}}{\rho_{3j}} - 1}. \quad (175)$$

Если плотности распределения случайных величин Y_k и Z_k подчиняются экспоненциальному закону (обычно принимаемое допущение в теории массового обслуживания), то вероятность безотказной работы i -го звена схемы ненадежности

$$R_{3i}(t) = \exp(-\lambda_{3i} t). \quad (176)$$

Для всей схемы ненадежности в соответствии с формулой (150) получим

$$R_{с.н}(t) = \prod_{i=1}^r e^{-\lambda_{3i} t} \quad (177)$$

Последнюю вероятность удобнее вычислять из соотношения

$$\ln R_{с.н}(t) = -t \sum_{i=1}^r \lambda_{3i}. \quad (178)$$

Коэффициент готовности можно определить по формуле

$$\begin{aligned} K_r &= \prod_{i=1}^r \frac{\bar{Y}_{3i}}{\bar{T}_{м.о. i}} = \prod_{i=1}^r \frac{\bar{Y}_{3i}}{\bar{Y}_{3i} + \bar{Z}_{3i}} = \\ &= \prod_{i=1}^r \frac{v_{3i}}{\lambda_{3i} + v_{3i}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^r (1 + \rho_{3i})} \approx \\ &\approx \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^r \rho_{3i}}, \quad (179) \end{aligned}$$

которую при малой величине $\sum_{i=1}^r \rho_{3i}$ можно упростить:

$$K_r \approx 1 - \sum_{i=1}^r \rho_{3i}. \quad (180)$$

Пример 16. Оценим надежность рассмотренной выше системы (пример 15) с учетом восстановления, приняв следующие параметры для элементов:

$$\bar{Y}_i = 10\,000 \text{ ч}; \quad \bar{Z}_i = 100 \text{ ч};$$

$$\rho_i = 0,01; \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

Для того чтобы в дальнейшем можно было сравнить надежность восстанавливаемой системы с надежностью си-

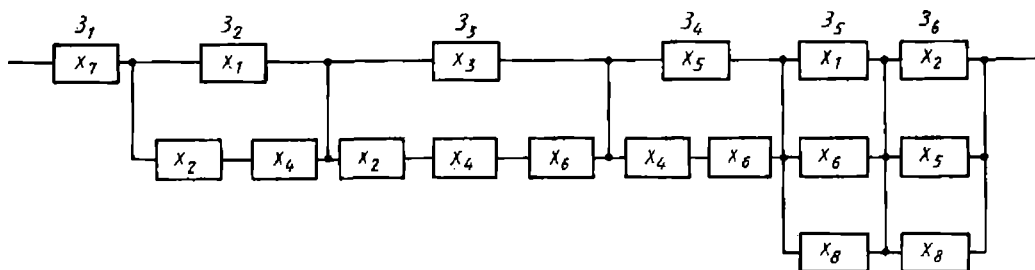


Рис. 15. Схема ненадежности системы

стемы без учета восстановления (для элементов которой ранее принималась вероятность $R = 0,9$), расчет проведем для времени $t = 1050$ ч, так как

$$R_i(1050) = \exp \frac{(-1050)}{10000} = 0,9003.$$

Решение. В соответствии с рис. 15 и формулой (164) находим

$$\lambda_{x_2, x_4} = \lambda_{x_4, x_6} = 2\lambda_i = 0,0002 \frac{1}{\text{ч}};$$

$$\bar{Y}_{x_2, x_4} = \bar{Y}_{x_4, x_6} = 5000 \text{ ч};$$

$$\lambda_{x_2, x_4, x_6} = 3\lambda_i = 0,0003 \frac{1}{\text{ч}};$$

$$\bar{Y}_{x_2, x_4, x_6} = 3333,3 \text{ ч};$$

По формуле (165) определяем

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{x_2, x_4}^{(1)} = \bar{Z}_{x_4, x_6}^{(1)} &= \frac{2\bar{Z}_i \bar{Y}_i}{2\bar{Z}_i + 2\bar{Y}_i} + \frac{\bar{Z}_i^2}{2\bar{Z}_i} = \\ &= \frac{\bar{Z}_i \bar{Y}_i}{\bar{Z}_i + \bar{Y}_i} + 0,5\bar{Z}_i = \frac{100 \cdot 10\,000}{100 + 10\,000} + \\ &+ 0,5 \cdot 100 = \frac{1\,000\,000}{10\,100} + 50 = \\ &= 99 + 50 = 149 \text{ ч}. \end{aligned}$$

Для цепочки из трех элементов по формуле (166) имеем

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{x_2, x_4, x_6}^{(1)} &= \frac{3 \cdot 100 \cdot 10\,000 \cdot 10\,000}{3 \cdot 100 (10\,000 + 10\,000) +} + \\ &+ \frac{3 \cdot 10\,000 \cdot 100 \cdot 100}{3 \cdot 10\,000 (100 + 100) +} + \\ &+ \frac{100 \cdot 100 \cdot 100}{3 \cdot 100 \cdot 100} = \\ &= 98,1 + 49,7 + 33,3 = 181,1 \text{ ч}. \end{aligned}$$

Зная параметры всех эквивалентных цепей, можно рассчитать звенья. По формуле (171) находим

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{z_2} = \bar{Z}_{z_4} &= \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_{x_1}} + \frac{1}{\bar{Z}_{x_2, x_4}}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{149}} = 59,9 \text{ ч}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{z_5} &= \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_{x_3}} + \frac{1}{\bar{Z}_{x_5, x_6}}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{181,1}} = 64,5 \text{ ч}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{z_6} = \bar{Z}_{z_3} &= \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_{x_1}} + \frac{1}{\bar{Z}_{x_2}} + \frac{1}{\bar{Z}_{x_3}}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100}} = 33,3 \text{ ч}. \end{aligned}$$

По формуле (173) определяем

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\text{м. о. } z_2} = \bar{T}_{\text{м. о. } z_4} &= \\ &= \frac{(\bar{Y}_{x_1} + \bar{Z}_{x_1})(\bar{Y}_{x_2, x_4} + \bar{Z}_{x_2, x_4})}{\bar{Z}_{x_1} + \bar{Z}_{x_2, x_4}} = \\ &= \frac{(10\,000 + 100)(5000 + 149)}{100 + 149} = \\ &= \frac{10\,000 \cdot 5149}{249} = 208\,855 \text{ ч}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\text{м. о. } z_3} &= \frac{(\bar{Y}_{x_2} + \bar{Z}_{x_3})(\bar{Y}_{x_2x_4x_6} + \bar{Z}_{x_2x_4x_6})}{\bar{Z}_{x_3} + \bar{Z}_{x_2x_4x_6}} = \\ &= \frac{(10\,000 + 100)(3333,3 + 181,1)}{100 + 181,1} = \\ &= \frac{10\,100 \cdot 3514,4}{281,1} = 126\,300 \text{ ч;} \\ \bar{T}_{\text{м. о. } z_1} &= \bar{T}_{\text{м. о. } z_3} = \\ &= \frac{(\bar{Y}_{x_1} + \bar{Z}_{x_1})(\bar{Y}_{x_6} + \bar{Z}_{x_6}) \times (\bar{Y}_{x_8} + \bar{Z}_{x_8})}{\bar{Z}_{x_6}\bar{Z}_{x_8} + \bar{Z}_{x_1}\bar{Z}_{x_8} + \bar{Z}_{x_1}\bar{Z}_{x_6}} = \\ &= \frac{10\,100^3}{3 \cdot 100^2} = 34\,300\,000 \text{ ч.} \end{aligned}$$

Интенсивности отказов звеньев исследуемой схемы ненадежности:

$$\begin{aligned} \lambda_{z_2} = \lambda_{z_4} &= \frac{1}{208\,855 - 59,9} = \\ &= 0,0470 \cdot 10^{-4} \text{ 1/ч;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{z_3} &= \frac{1}{126\,300 - 64,5} = \\ &= 0,0798 \cdot 10^{-4} \text{ 1/ч;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{z_5} = \lambda_{z_6} &= \frac{1}{34\,300\,000 - 33,3} = \\ &= 0,00029 \cdot 10^{-4} \text{ 1/ч;} \end{aligned}$$

По формуле (178)

$$\begin{aligned} \ln R_{\text{с. н}}(1050) &= -1050(1 + \\ &+ 2 \cdot 0,0470 + 0,0798 + 2 \cdot 0,00029) \times \\ &\times 10^{-4} = -0,1336, \end{aligned}$$

откуда

$$R_{\text{с. н}}(1050) = 0,875.$$

На рис. 16 изображена схема ненадежности системы (152) с указанием значений вычисленных математических ожиданий для последовательных цепей и звеньев (Y_{z_i}, Z_{z_i}). Эти характеристики дают представление о тех звеньях схемы ненадежности, которые в первую очередь и определяют вероятность ее отказа. Такими звеньями являются, во-первых, Z_1 , во-вторых, Z_3 и, в-третьих, Z_2 и Z_4 . Звенья Z_5 и Z_6 практически не снижают надежности системы, и их можно было бы не учитывать. Надежность данной системы в основном определяет элемент x_7 (звено Z_1), который не имеет резервирования.

Схема ненадежности дает наглядное представление о «слабых местах» системы, которые в основном и определяют ее надежность.

В самом деле, вероятности отказов в различных звеньях схемы ненадежности будут существенно отличаться друг от друга, причем, очевидно, отказы в звеньях, состоящих из большого числа параллельных цепей, будут весьма маловероятны (особенно с учетом восстановления отказавших элементов). На этом, по существу, и строится приближенная методика расчета надежности восстанавливаемых систем, а схема ненадежности помогает обнаружить именно те комбинации элементов, которые определяют ненадежность системы.

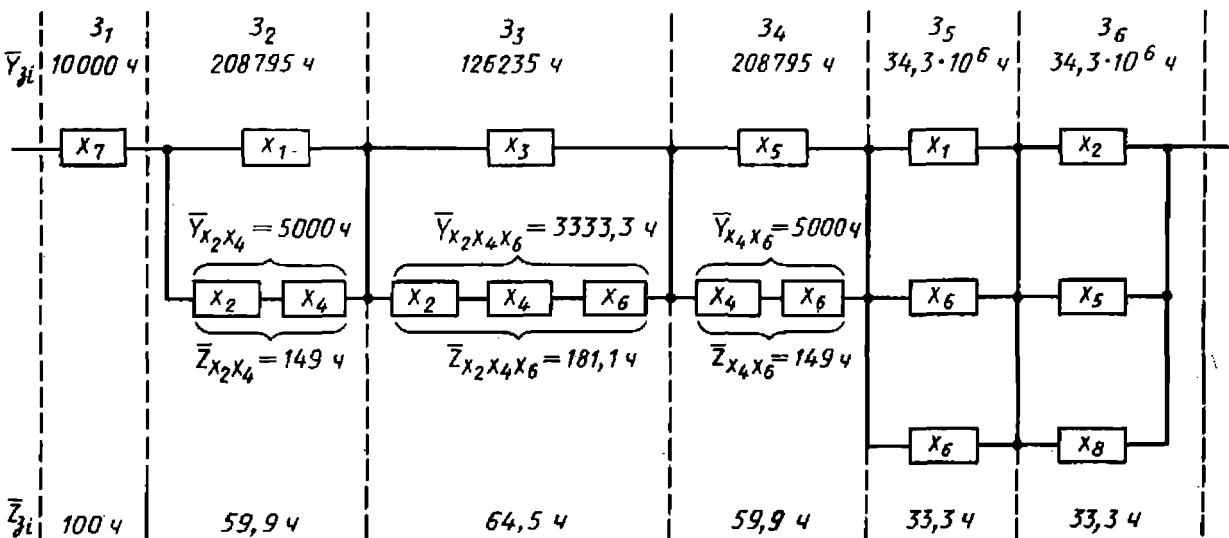


Рис. 16. Схема ненадежности системы с эквивалентными элементами

Вероятность безотказной работы резервированной части системы достаточно высока

$$R_c(1050) = \frac{R_{c.н}(1050)}{R_{x_7}(1050)} = 0,972.$$

Без учета восстановления она равна 0,939.

Ввиду того, что на практике $\bar{Z}_3 \ll \bar{Y}_3$, формулу (174) можно еще несколько упростить, приняв $\bar{Y}_3 \approx \bar{T}_{м.о.}$, и, следовательно,

$$\lambda_3 \approx \frac{\nu_3 \prod_{j=1}^m \rho_{a_j}}{\prod_{j=1}^m (1 + \rho_{a_j})}. \quad (181)$$

Для вычисления коэффициента готовности системы определим сначала по формуле (175) коэффициенты неисправности всех звеньев:

$$\rho_{z_1} = \frac{100}{10\,000} = 0,01;$$

$$\rho_{z_2} = \rho_{z_4} = \frac{59,9}{208\,795} = 0,000287,$$

$$\rho_{z_3} = \frac{64,5}{126\,235} = 0,000516;$$

$$\rho_{z_5} = \rho_{z_6} = \frac{33,3}{34,3 \cdot 10^6} = 0,96 \cdot 10^{-6}.$$

По формуле (179)

$$K_r = \frac{1}{1 + (10\,000 + 2 \cdot 287 + 516 + 2 \cdot 0,96) \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{1 + 0,011092} = 0,989.$$

5. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ДВУХПОЛЮСНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНОГО МЕТОДА (МЛВМ)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА

Сущность модификации и основная особенность метода заключаются в том, что в нем используются смешанные

формы функции вероятностей (СФФВ). Смешанной называют такую форму функции, которая получается в результате частичного замещения в ФАЛ логических переменных вероятностями и содержит одновременно два типа переменных — логические переменные и вероятности и две системы операций — арифметические и логические. Особенность СФФВ состоит в том, что в ней все зависимости от аргументов определены в явной форме через используемые логические и арифметические элементарные операции. Она не может содержать операторы типа $P(f=1)$, где f — некоторая ФАЛ, если неизвестно явное выражение таких функций в виде суперпозиции элементарных операций. Смешанная форма имеет простой вероятностный смысл. Если в функции f после замещения части логических переменных остались незамещенные переменные, образующие вектор X , то можно представить СФФВ как функцию $P(f=1) = P(X)$, которая является условной вероятностью того, что $f=1$, причем условия записаны с помощью незамещенных переменных. Эти условия переменны или случайны. После задания значений истинности вектора $X = X^0$ вероятность $P(X)$ превращается в условную вероятность, записанную в обычной для теории вероятностей форме. Применение смешанной формы при проектном анализе надежности дает в ряде случаев определенное преимущество. Во-первых, СФФВ позволяет не доводить до конца преобразование исходной формы ФАЛ к форме перехода к полному замещению, а начать замещение раньше, упростив работу на стадии преобразования ФАЛ и уменьшая время анализа. Во-вторых, СФФВ можно вычислять на любой стадии замещения и оценивать порядок всех входящих в нее слагаемых. В процессе проектирования требования к точности анализа могут меняться, и метод позволяет приспособиться к этому изменению, облегчая анализ при снижении требований к точности путем отбрасывания малых членов еще до того, как в них закончено замещение.

Запись в смешанной форме очень удобна при программировании задач

надежности на известных алгоритмических языках для расчетов на ЭВМ. Высокий уровень формализации метода позволяет создать машинные средства автоматизации проектирования (САПР), постепенно повышая уровень автоматизации вплоть до реализации диалоговых и интерактивных режимов взаимодействия проектировщика с ЭВМ. Наконец, МЛВМ является единственной разновидностью ЛВМ, приспособленной к формализованному решению задач надежности ветвящихся структур.

Техническим объектом, исследуемым с помощью МЛВМ, является система с сетевой структурой. Это могут быть сети связи, сети ЭВМ, сети массового обслуживания, коммутационные сети в электроэнергетике, транспортные сети и др. Любая сеть состоит из узлов и соединяющих их линий связи — однонаправленных или двунаправленных. Входные и выходные узлы называют полюсами, прочие узлы — промежуточными или просто узлами. Последовательность узлов и линий связи, соединяющих входной и выходной полюсы, образует путь. Если в системе есть только один входной и один выходной полюс, то систему называют двухполюсной. Если двухполюсная система выполняет только одну функцию (передачи информации, электроэнергии, энергоносителя от входного полюса к выходному), то ее называют однофункциональной. Если же она должна выполнять несколько функций (обслуживание нескольких потоков различной приоритетности в сетях массового обслуживания, обеспечение электроэнергией нескольких групп потребителей и пр.), то систему называют многофункциональной. Кроме того, в каждом из классов различают системы первого и второго типов (см. с. 58). В системах второго типа необходимо учитывать при анализе надежности правила управления на сети, реализованные в некотором алгоритме \mathcal{E} . К характеристикам \mathcal{E} , учитываемым при решении задач надежности систем с сетевой структурой, относят содержание и объем информации оповещения узлов о состоянии сети, способ выбора направления передачи информации —

маршрута, допустимое число обходных путей, условия переадресации потоков при отказах элементов сети и др.

Математическая модель сети представляется в виде ориентированного или неориентированного графа. В первом случае используются термины: вершина, дуга, путь; во втором — вершина, ребро, цепь вместо технических терминов: узел, линия связи, путь, маршрут. При этом ребро и дуга соответствуют двунаправленной и однонаправленной линиям связи. Анализ надежности двухполюсных структур с помощью МЛВМ предусматривает несколько этапов.

Составление условий работоспособности (УРС). На этом этапе все двухполюсные структуры должны быть классифицированы и установлена их принадлежность к одному из четырех классов: однофункциональные первого и второго типов (соответственно классы 1 и 2), многофункциональные первого и второго типов (соответственно классы 3 и 4). Для систем класса 1 условия работоспособности выражаются с помощью логической функции работоспособности ФРС вида

$$f = f(X) = x_{\Pi} \left(\bigvee_{j \in M_{\Pi}} x_{\Pi j} f_j \right);$$

$$f_j = x_j \left(\bigvee_{i \in M_j} x_{ji} f_i \right), \quad (182)$$

где x_{Π} — переменная, соответствующая узлу, расположенному во входном полюсе; $x_{\Pi j}$ — переменные, соответствующие линиям связи между входным полюсом и другими узлами системы; f_j — функция работоспособности подсистемы, в которой узел e_j является входным полюсом; M_j — множество узлов, имеющих непосредственные связи с e_j .

Функция f имеет следующий смысл: для существования хотя бы одного пути между полюсами необходимо, чтобы были работоспособны входной полюс, линия связи входного полюса, по крайней мере с одним из узлов e_j структурной схемы и чтобы был хотя бы один работоспособный путь между узлом e_j и выходным полюсом системы. Если какой-либо элемент системы идеально надежен (например,

входной полюс), то соответствующая логическая переменная принимает значения единицы (здесь $x_{ii} = 1$). Если какой-либо элемент отсутствует, то соответствующая логическая переменная $x = 0$. Выражение (182) представляет собой систему логических уравнений, способы решения которой представлены далее.

Метод определителей. Запишем систему (182) в матричной форме

$$f = A_1 \vee Af.$$

Здесь A_1 — вектор-столбец свободных членов; $A = \|a_{ij}\|$ — матрица коэф-

$$f_i = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & a_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2,i-1} & a_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & a_n & a_{n,i+1} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Метод подстановки. Метод состоит в последовательном исключении из системы одного из уравнений, а в оставшихся уравнениях — одного из неизвестных. В результате последовательного исключения неизвестных и уравнений приходят к равенству, являющемуся решением системы уравнений относительно одного неизвестного. Многократно повторяя операции исключения уравнения и неизвестных, можно получить выражения для всех неизвестных, которые и будут служить решением системы уравнений.

Кроме указанных двух способов, можно решить систему логических уравнений матричным способом, путем приведения к одному уравнению с n неизвестными и другими способами.

Для однофункциональных систем второго типа общая форма записи УРС имеет вид

$$f = f(X, \mathcal{E}). \quad (183)$$

В общем случае функция (183) может быть монотонной или немонотонной ФАЛ. Модифицированный ЛВМ позволяет проводить анализ надежности и в том и в другом случае.

В многофункциональных системах сначала составляют условия работоспособности системы при выполнении i -й функции, а затем устанавливают

коэффициентов уравнений; $a_{ii} = 1$. Составим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Неизвестные функции получают подстановкой в определитель вектора A_1 свободных членов на место i -го столбца и последующим раскрытием определителя по правилам, аналогичным существующим в алгебре действительных чисел:

логическую связь между условиями работоспособности при выполнении отдельных функций $f^{(i)}$ и условиями работоспособности системы в целом с помощью следующей ФАЛ:

$$f = f(f^{(i)}(X, \mathcal{E}), i \in M), \quad (184)$$

где каждая $f^{(i)}(X, \mathcal{E})$ имеет вид (182) или (183). В частности, если надо обеспечить выполнение всех или хотя бы одной функции, то (184) принимает вид

$$f = f^{(1)} \& f^{(2)} \& \dots \& f^{(m)}; \quad (185)$$

$$f = f^{(1)} \vee f^{(2)} \vee \dots \vee f^{(m)}. \quad (186)$$

Пример 17. Составить условия работоспособности электроэнергетической системы (рис. 17), состоящей из трех электрогенераторов одинаковой мощности (1, 2, 3), трех главных распределительных щитов (4, 6, 8), перемычек между ними (5, 7, 9), шести вторичных распределительных щитов (10—15). Система должна обеспечить бесперебойное питание трех групп потребителей (I, II, III).

Решение. Система является многофункциональной класса 3 с логиче-

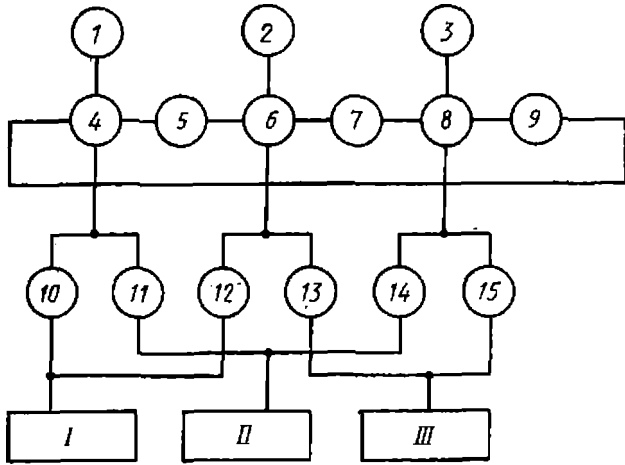


Рис. 17. Структура электроэнергетической системы

ской зависимостью между УРС системы и УРС функций типа (185):

$$f = f_I \& f_{II} \& f_{III}, \quad (187)$$

где

$$f_I = x_{10}f_4 \vee x_{12}f_6; \quad f_{II} = x_{11}f_4 \vee x_{14}f_8;$$

$$f_{III} = x_{13}f_6 \vee x_{15}f_8.$$

Остается найти функции f_4 , f_6 и f_8 . Они определяются из системы логических уравнений:

$$\begin{aligned} f_4 &= x_4 (x_1 \vee x_5 f_6 \vee x_9 f_8); \\ f_6 &= x_6 (x_2 \vee x_5 f_4 \vee x_7 f_8); \end{aligned} \quad (188)$$

$$f_8 = x_8 (x_3 \vee x_9 f_4 \vee x_7 f_6).$$

Функция (187) зависит от 15 переменных, из которых шесть бесповторных.

Преобразование ФАЛ к форме перехода к частичному замещению (ФПЧЗ) и запись СФФВ. Составленную на первом этапе ФАЛ необходимо преобразовать к виду, допускающему переход от логической функции к СФФВ на основе замены некоторых x_i на вероятности $p_i = P(x_i = 1)$, а x_i' на $q_i = 1 - p_i$ и использования стандартной формы представления СФФВ, в которой незамещенные логические переменные переводятся в показатели степени вероятностей. Такую форму ФАЛ называют формой перехода к частичному замещению (ФПЧЗ). Известно всего четыре стандартных ФПЧЗ и соответствующих им СФФВ. Они указаны в следующих четырех теоремах.

Теорема 1. Пусть задана ФАЛ вида

$$y = f(X) = \left(\bigvee_{i=1}^n \left(\big\&_{j \in M_i} x_j \right)^{\alpha_i} f_i(X_i) \right) \times \left(\big\&_{j \in M_0} x_j \right)^{\alpha_0} f_0(X_0), \quad (189)$$

где X , X_i — векторные аргументы функции f и f_i ; α_i — постоянные коэффициенты, равные 0 или 1 ($x^\alpha = x$ при $\alpha = 1$; $x^\alpha = x'$ при $\alpha = 0$).

Если x_j — бесповторные логические переменные для всех $j \in M = \bigcup_{i=0}^n M_i$, f_i — ФАЛ произвольного вида, а события $x_j = \alpha_j$ независимы в совокупности, то форма функции (189) является ФПЧЗ (форма 1), и ей соответствует СФФВ:

$$\begin{aligned} P_f &= P(f_0, f_1, \dots, f_n) = \\ &= (1 - a_0^{f_0}) \left(1 - \prod_{i=1}^n a_i^{f_i} \right), \end{aligned} \quad (190)$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= (1 - \alpha_i) \prod_{j \in M_i} p_j + \alpha_i \times \\ &\times \left(1 - \prod_{j \in M_i} p_j \right). \end{aligned} \quad (191)$$

В (190) операция возведения в степень определена как обычно: $a^f = a$ при $f = 1$ и $a^f = 1$ при $f = 0$.

Пример 18. Составить СФФВ для ФАЛ из примера 1:

$$\begin{aligned} f &= x_7 (x_1 x_3 (x_5 \vee x_4 x_6 x_8) \vee \\ &\vee x_2 x_4 (x_6 \vee x_3 x_5 x_8)). \end{aligned} \quad (192)$$

Решение. Форма функции (192) является ФПЧЗ. Поэтому согласно (190)

$$\begin{aligned} P(f = 1) &= p_7 (1 - q_1^{x_1} (x_3 \vee x_4 x_6 x_8) \times \\ &\times q_2^{x_2} (x_6 \vee x_3 x_5 x_8)). \end{aligned} \quad (193)$$

Теорема 2. Дизъюнкция и конъюнкция ФАЛ:

$$f(X) = \bigvee_{(s)} f_s(X); \quad (194)$$

$$f(X) = \big\&_{(s)} f_s(X), \quad (195)$$

где $f_s(X)$ — функция вида (189); $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, x_j — бесповторные пе-

ременные для всех $j \in M = \bigcup_{(s, i)} M_{si}$, являются ФПЧЗ (форма 2), и им соответствуют СФФВ:

$$Q_f = P \left(\bigvee_{(s)} f_s = 0 \right) = \prod_{(s)} (1 - P(f_s = 1)); \quad (196)$$

$$P_f = P \left(\bigwedge_{(s)} f_s = 1 \right) = \prod_{(s)} P(f_s = 1), \quad (197)$$

где вероятности $P(f_s = 1)$ определяются по формуле (190). Если в (194) функции ортогональны, то достаточна неповторность переменных только в каждой функции f_s . Тогда замещение переменных в различных слагаемых проводится независимо друг от друга.

Пример 19. Составить СФФВ для функции (187) из примера 17.

Решение. Сравнивая (187) с (194) и (189), устанавливаем, что (187) является ФПЧЗ (форма 2). Используя (195) и (190), запишем СФФВ:

$$P_f = (1 - q_{10}^{f_4} q_{12}^{f_5}) (1 - q_{11}^{f_4} q_{14}^{f_5}) \times (1 - q_{13}^{f_5} q_{15}^{f_5}).$$

Теорема 3. Пусть заданы две логические функции:

$$G_1(x_1, x_2, \dots, x_n, X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigvee_{i=1}^n x_i f_i(X_i); \quad (198)$$

$$G_2(x_1, x_2, \dots, x_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \bigvee_{i=1}^n x_i g_i(Y_i),$$

где x_i — неповторные логические переменные; X_i и Y_i — векторные аргументы функций f_i и g_i произвольного вида. Составим третью функцию

$$f(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) = G_1 G_2. \quad (199)$$

Если f_i и g_i ортогональны, т. е. $f_i g_i = 0$ для $i = \overline{1, n}$, то (199) яв-

ляется ФПЧЗ (форма 3), и ей соответствует СФФВ:

$$P_f = \prod_{i=1}^n q_i^{f_i} \left(1 - \prod_{i=1}^n q_i^{g_i} \right), \quad (200)$$

Если f_i и g_i неортогональны, то ФПЧЗ (форма 3) имеет вид

$$f = \left(\bigvee_{i=1}^n x_i f_i \right)' \left(\bigvee_{i=1}^n x_i f_i g_i \right) \quad (201)$$

и ей соответствует СФФВ:

$$P_f = \prod_{i=1}^n q_i^{f_i} \left(1 - \prod_{i=1}^n q_i^{f_i g_i} \right). \quad (202)$$

Если f_i и g_i ортогональны, то $f_i g_i = g_i$ и (202) совпадает с (200).

Пример 20. Составить СФФВ для функции

$$f(X) = (x_1 x_4 \vee x_2 x_3 x_4)' (x_1 x_3 \vee x_2 x_4), \quad (203)$$

Решение. Сводим (203) к виду (199), полагая $f_1 = x_4$, $f_2 = x_3 x_4'$, $g_1 = x_3$, $g_2 = x_4$. Видим, что f_2 и g_2 ортогональны, а f_1 и g_1 неортогональны. Поэтому составляем ФПЧЗ по формуле (201):

$$f = (x_1 x_4 \vee x_2 x_3 x_4)' (x_1 x_3 x_4' \vee x_2 x_4). \quad (204)$$

Смешанная форма согласно (202) имеет вид

$$P_f = q_1^{x_4} q_2^{x_3 x_4'} \left(1 - q_1^{x_3 x_4'} q_2^{x_4} \right). \quad (205)$$

Теорема 4. Логическая функция

$$f(X) = \bigwedge_{j=1}^{k-1} f_j'(X) f_k(X), \quad (206)$$

где $f_j(X) = \bigvee_{i=1}^n x_i f_{ij}$, f_{ij} — ФАЛ произвольного вида, является ФПЧЗ (форма 4), и ей соответствует СФФВ:

$$P_f = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} q_i^{f_{ij} g_{i, j-1}} \times \left(1 - \prod_{i=1}^n q_i^{f_{ik} g_{i, k-1}} \right), \quad (207)$$

$$g_{is} = \bigvee_{j=1}^s f_{ij}.$$

При $k = 2$ формула (207) совпадает с (202).

Пример 21. Составить СФФВ для функции

$$f = (x_1 f_{11})' (x_2 f_{21})' ((x_1 f_{12} \vee x_2 f_{22}) \vee (x_1 f_{13})' (x_2 f_{23})' (x_1 f_{14} \vee x_2 f_{24})).$$

Решение. Если раскрыть внешние скобки и выполнить ортогонализацию двух слагаемых, то каждое из них приобретает вид (206):

$$f = (x_1 f_{11} \vee x_2 f_{21})' (x_1 f_{12} \vee x_2 f_{22})' \vee (x_1 f_{11} \vee x_2 f_{21})' (x_1 f_{12} \vee x_2 f_{22})' \times (x_1 f_{13} \vee x_2 f_{23})' (x_1 f_{14} \vee x_2 f_{24}).$$

Теперь используем (207) и составим СФФВ:

$$P_f = q_1^{f_{11}} q_2^{f_{21}} \left(1 - q_1^{f_{11} f_{12}} q_2^{f_{21} f_{22}} \times \left(1 - q_1^{f_{11} f_{12} f_{13}} q_2^{f_{21} f_{22} f_{23}} \times \left(1 - q_1^{f_{11} f_{12} f_{13} f_{14}} q_2^{f_{21} f_{22} f_{23} f_{24}} \right) \right) \right). \quad (208)$$

Получение вероятностной функции (ВФ). Искомая вероятность получается из СФФВ на основе соотношения $P = M \{P(X)\}$,

где M — знак математического ожидания; X — векторная случайная величина с двоичными компонентами. Математическое ожидание $P(X)$ вычисляется путем многошагового замещения логических переменных с помощью теоремы разложения. В самом неблагоприятном случае число шагов замещения совпадает с числом незамещенных переменных. В каждом конкретном случае число шагов обычно существенно меньше, так как за один шаг удается заместить несколько переменных и упростить СФФВ, отбрасывая малые члены.

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ И ВЫБОР СТРУКТУРНЫХ ПАРАМЕТРОВ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ С ОРИЕНТИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ ПРИ ПОЛНОМ ОПОВЕЩЕНИИ О СОСТОЯНИИ СЕТИ

Двухполюсная система имеет структуру в виде ориентированного графа, в котором все элементы (узлы и линии связи) могут отказывать с ненулевыми и, вообще говоря, различными вероятностями. Ориентированный граф ациклический, т. е. в нем отсутствуют контуры, а все пути простые. Отсутствуют также нестрого параллельные дуги, но могут быть строго параллельные дуги. Все вершины графа упорядочены так, что выходной полюс имеет минимальный номер, а входной полюс — максимальный и ни одна вершина с большим номером не достигается ни из одной вершины с меньшим номером. Рангом связности сети называют максимум разности номеров вершин, имеющих прямую связь. Любой частный граф, имеющий ранг связности r , можно достроить до s -связного графа, дополняя его дугами с вероятностями работоспособного состояния $p_i = 0$. При $s = n - 1$ граф с n вершинами называют полностью связным. В s -связных системах выделим два класса.

В классе 1 система работоспособна, если есть хотя бы один работоспособный путь из узла n в узел 1 (рис. 18). Путь считается работоспособным, если работоспособны все его элементы: узлы и линии связи. В классе 2 структурная схема системы не содержит полной информации о взаимодействии элементов и их логических связях. Поэтому появляется зависимость работоспособности одного пути от состояния элементов других путей. Информация о состоянии элементов сети полная в каждый момент времени.

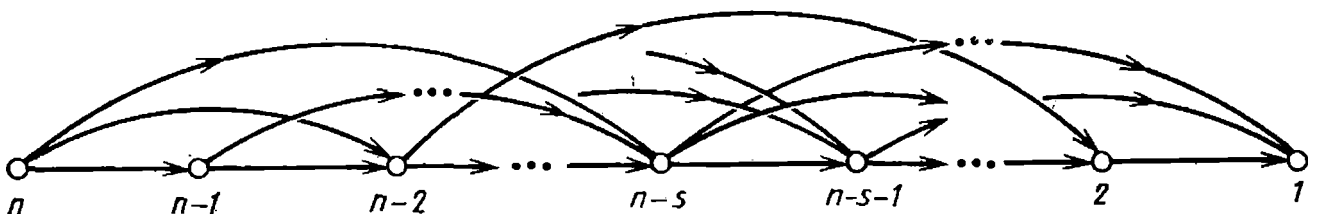


Рис. 18. Структурная схема многосвязной системы

Это позволяет воспользоваться для поддержания работоспособности системы любым работоспособным путем из числа разрешенных, который в данный момент есть в системе.

Многосвязная система первого типа.
Составление УРС. Система содержит n вершин и имеет связность структуры ранга s . Обозначим через f_n логическую функцию работоспособности системы, а через f_i — функцию работоспособности подсистемы, получаемой путем переноса входного полюса в узел i . Тогда формула (182) приобретает вид

$$f_n = x_n (x_{n, n-1} f_{n-1} \vee x_{n, n-2} f_{n-2} \vee \dots \vee x_{n, n-s} f_{n-s}), \quad (210)$$

$$f_i = x_i (x_{i, i-1} f_{i-1} \vee \dots \vee x_{i, i-s} f_{i-s}),$$

$$i = \overline{s+1, n-1},$$

$$f_i = x_i (x_{i, i-1} f_{i-1} \vee \dots \vee x_{i1} f_1), i \leq s.$$

Общее число переменных в f_n равно $N = n + s(n - s - 1) + s(s + 1)/2$.

Преобразование к ФПЧЗ. Сравнение (210) с (189) показывает, что (210) является ФПЧЗ (форма 1). В ней неповторные переменные: x_n и x_{ni} для функции f_n ; x_i и x_{ij} для функции f_i .

Запись СФФВ. Используя (190), запишем СФФВ:

$$P_n = P(f_n = 1) = p_n \times$$

$$\times \left(1 - \prod_{i=n-s}^{n-1} q_{ni}^{f_i} \right),$$

$$P_i = P(f_i = 1) = p_i \left(1 - \prod_{j=m}^{i-1} q_{ij}^{f_j} \right), \quad (211)$$

$$m = \max(1, i - s).$$

За один шаг замещается $N_1 = n(n-1)/2$ переменных, если $n \leq s$, и $N_1 = s(n - (s+1)/2)$, если $n > s$. При $n = 8, s = 4$ $N_1 = 22$ (73%), а при $n = 10, s = 5$ $N_1 = 35$ (78%).

Получение ВФ. В многошаговой процедуре замещению подлежат функции f_i в такой последовательности: сначала f_{n-1} , затем f_{n-2}, f_{n-3} и т. д.

Первые два шага выполняют по формулам:

$$P(f_n = 1) = P_n^{(n-2)}(f_{n-2}, \dots, f_{n-s}) =$$

$$= p_n (P(f_{n-1} = 1) \times$$

$$\times \left(1 - q_{n, n-1} \prod_{i=n-s}^{n-2} q_{ni}^{f_i} \right) +$$

$$+ P(f_{n-1} = 0) \left(1 - \prod_{i=n-s}^{n-2} q_{ni}^{f_i} \right)); \quad (212)$$

$$P_n^{(n-3)}(f_{n-3}, \dots, f_{n-s}) =$$

$$= P(f_{n-2} = 1) \times$$

$$\times P_n^{(n-2)}(1, f_{n-3}, \dots, f_{n-s}) +$$

$$+ P(f_{n-2} = 0) \times$$

$$\times P_n^{(n-2)}(0, f_{n-3}, \dots, f_{n-s}). \quad (213)$$

Функции $P(f_{n-1} = 1)$ и $P(f_{n-2} = 1)$ находят из (211). Следующие шаги выполняют аналогично.

Пример 22. Определить достаточную степень структурной избыточности в двухполюсной сети с ориентированными связями, имеющей пять узлов, если известно, что узлы сети идеально надежны, а линии связи имеют доверительные интервалы для вероятности отказа $q_i \in (0,05; 0,1)$. Система должна обеспечить вероятность безотказной работы не менее 0,99.

Решение. Функция работоспособности системы

$$y = f_5 = x_1 x_5 (x_{51} \vee x_{52} f_2 \vee x_{53} f_3 \vee$$

$$\vee x_{54} f_4);$$

$$f_4 = x_4 (x_{41} \vee x_{42} f_2 \vee x_{43} f_3),$$

$$f_3 = (x_{31} \vee x_{32} f_2) x_3, f_2 = x_2 x_{21}.$$

После первого замещения в соответствии с (211)

$$P_5^{(4)}(f_2, f_3, f_4) = p_1 p_5 \times$$

$$\times \left(1 - q_{51} q_{52}^{f_2} q_{53}^{f_3} q_{54}^{f_4} \right); P_4^{(3)}(f_2, f_3) =$$

$$= p_4 \left(1 - q_{41} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3} \right); P_3^{(2)}(f_2) =$$

$$= p_3 \left(1 - q_{31} q_{32}^{f_2} \right); P_2^{(1)} = p_2 p_{21}.$$

После второго шага замещения получаем

$$P_5^{(3)}(f_2, f_3) = p_1 p_5 \times \\ \times (p_4 (1 - q_{41} q_{42}^2 q_{43}^2) \times \\ \times (1 - q_{51} q_{52}^2 q_{53}^2 q_{54}) + \\ + (q_4 + p_4 q_{41} q_{42}^2 q_{43}^2) (1 - q_{51} q_{52}^2 q_{53}^2)).$$

После третьего шага имеем

$$P_5^{(2)}(f_2) = p_1 p_5 \{ 1 - q_{51} q_{52}^2 + \\ + q_{51} q_{52}^2 p_{54} p_4 (1 - q_{41} q_{42}^2) + \\ + p_3 q_{51} q_{52}^2 (1 - q_{31} q_{32}^2) (p_{53} + p_{54} p_4 \times \\ \times (q_{41} q_{42}^2 (1 - q_{53} q_{43}) - p_{53})) \}.$$

Теперь замещаем f_2 и получаем искомое выражение

$$R_C = P_5^{(1)} = p_2 p_{21} P_5^{(2)}(1) + \\ + (1 - p_2 p_{21}) P_5^{(2)}(0).$$

В частности, при $p_i \cong P_i$, $p_{ij} = P_2$ найдем

$$R_C = P_1^2 P_2 \{ P_1 (1 - Q_2^2) (1 + P_1 P_2 Q_2^2 \times \\ \times (2 + P_1 Q_2^2 (1 - Q_2^2) - P_1 P_2)) + \\ + (1 - P_1 P_2) (1 + Q_2 P_1 P_2 (2 - P_1 P_2 \times \\ \times (P_2 + Q_2^2))) \}, Q_2 = 1 - P_2.$$

Вычисления проводим при $P_1 = 1$ и $P_2 = 0,9 \div 0,95$ (табл. 8). Из таблицы 8 следует, что при расчете с «запасом надежности» для $P_2 = 0,9$ следует выбрать $s = 3$. Однако при уточнении исходных данных о надежности элементов это значение может быть скорректировано и избыточность уменьшена, так как уже при $P_2 = 0,93$ система достигает требуемого уровня $R_C = 0,99$ при $s = 2$.

Многосвязная система второго типа. Особенности этих систем отражаются

8. Вероятность R_C безотказной работы

s	$P_2 = 0,9$	$P_2 = 0,92$	$P_2 = 0,95$
1	0,710	0,780	0,810
2	0,970	0,985	0,994
3	0,993	0,995	0,997

в УРС с помощью дополнительных сомножителей в дизъюнктивных членах ФАЛ. Поэтому вместо (210) получаем функцию вида

$$f_n = x_n \left(\bigvee_{(j)} x_{nj} f_j \Phi_j \right), f_i = \\ = x_i \left(\bigvee_{(j)} x_{ij} f_j \Phi_j \right). \quad (214)$$

Здесь Φ_j — логические функции, выражающие условия использования направления ij и зависящие от переменных, вообще говоря, не входящих в список переменных функции f_j . В системе, содержащей несколько последовательно соединенных участков, удастся свести функцию работоспособности (214) к виду

$$y = f_n(X) \Phi_n(X), \quad (215)$$

где f_n и Φ_n — УРС основной и управляющей подсистем. Составление f_n и Φ_n , а также все действия по их преобразованию проводятся аналогично тому, как это делают для систем первого типа.

Многосвязная система со структурой в виде неориентированного графа. Особенность этих систем состоит в том, что в них обычно УРС более сложные, чем УРС в системах со структурой в виде ориентированного графа. Поэтому для таких систем применяют общие правила записи ФПЧЗ в форме 1 или 2. После записи ФПЧЗ проводится запись СФФВ с помощью теорем 1 или 2 и последовательное замещение переменных с помощью теоремы разрезания.

Пример 23. Найти вероятность работоспособного состояния электроэнергетической системы из примера (18) и установить требуемый уровень показателей надежности распределительных щитов, при котором обеспечивается заданное значение вероятности R_C .

Решение. Смешанная форма представлена в формуле (193). Проведем замещение в три шага. На первом шаге замещаем x_3 и x_4 :

$$R_C(x_5, x_6, x_8) = p_7 \times \\ \times \{ p_3 p_4 (1 - q_1^{x_5 \vee x_6 x_8} q_2^{x_5 \vee x_6 x_8}) + \\ + q_3 p_4 (1 - q_2^{x_5}) + p_3 q_4 (1 - q_1^{x_5}) \}.$$

Поскольку слагаемые во внешних скобках ортогональны, на втором шаге проводим в них замещение независимо друг от друга:

$$R_c(x_8) = p_7 \{ p_3 p_4 \{ p_5 p_6 (1 - q_1 q_2) + q_5 p_6 (1 - q_1^x q_2) + p_5 q_6 (1 - q_1 q_2^x) \} + q_3 p_4 p_6 p_2 + p_3 q_4 p_5 p_1 \}.$$

Замещая теперь x_8 , находим окончательно

$$R_c = p_7 \{ p_3 p_4 \{ p_5 p_6 (1 - q_1 q_2) + q_5 p_6 (p_8 (1 - q_1 q_2) + q_8 p_2) + p_5 q_6 (p_8 (1 - q_1 q_2) + q_8 p_1) \} + q_3 p_4 p_6 p_2 + p_3 q_4 p_5 p_1 \}. \quad (216)$$

Зафиксировав значения p_1, p_2, p_5, p_6, p_8 и полагая $p_3 = p_4$, варьируем значения p_3 и p_7 так, чтобы добиться выполнения неравенства $R_c \geq R_c^0$.

В результате получим область значений вероятностей работоспособного состояния главного и вторичного распределительных щитов, при которых обеспечивается требуемая надежность системы.

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ С ОРИЕНТИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ ПРИ НЕПОЛНОМ ОПОВЕЩЕНИИ О СОСТОЯНИИ СЕТИ

Условия функционирования системы такие же, что и в системе, рассмотренной выше. Однако есть одно дополнительное условие: оповещение о состоянии сети неполное. Поэтому при активном резервировании не всегда удастся эффективно использовать имеющуюся структурную избыточность, так как не удастся собрать работоспособный путь между полюсами при реконфигурации системы, хотя при полном оповещении такой путь и удалось бы найти. В условиях неполного оповещения не удастся гарантировать с вероятностью единица, что выбранный маршрут (путь) будет работоспособным. Неопределенность возникает в процессе эксплуатации и является причиной возможных оши-

бок. Однако алгоритм реконфигурации и выбора маршрута закладывается при проектировании. Поэтому необходимо уметь решать две задачи: задачу анализа надежности с учетом алгоритма выбора маршрута и неполноты информации оповещения и задачу выбора (синтеза) маршрута по критерию надежности. Алгоритм выбора маршрута составляется так, чтобы в условиях неопределенности вероятность работоспособного состояния системы была наибольшей среди значений, достигаемых в заданном классе алгоритмов.

Системы с оповещением о состоянии выходящих линий связи. Структура сети представлена на рис. 18. Алгоритм выбора маршрута представляет собой набор рядов приоритетности выходящих линий связи на каждом из узлов системы. На узле с номером k этот ряд имеет вид: $ki_{k1}, ki_{k2}, \dots, ki_{ks}$ при $k > s$ и $ki_{k1}, ki_{k2}, \dots, ki_{k, k-1}$ при $k \leq s$. В маршрут на каждом узле включается работоспособная дуга с наивысшим приоритетом. Обозначим через \mathcal{E}_k алгоритм выбора маршрута в подсистеме с входным полюсом в узле k и рассмотрим основные этапы анализа.

Составление УРС. Логическая функция работоспособности имеет вид

$$f_k(\mathcal{E}_k) = x_k \left(x_{k, i_{k1}} f_{i_{k1}} \vee \dots \vee \bigvee_{j=1}^{m-1} \left(\&_{i=j+1}^{m} x'_{ki_{kj}} \right) x_{ki_{km}} f_{i_{km}} \right), \quad m = \min(s, k - 1). \quad (217)$$

Аналогичные ФАЛ составляют для всех промежуточных узлов. В частности, если наиболее приоритетной считается линия связи, которая обеспечивает соединение с узлом, имеющим наименьший номер, то

$$f_k = x_k \left(\bigvee_{j=1}^m \left(\&_{i=j+1}^m x'_{k, k-1} \right) \times \times x_{k, k-j} f_{k-j} \right), \quad m = \min(s, k - 1), \quad 2 \leq k \leq n. \quad (218)$$

Запись СФФВ. Поскольку все слагаемые в (218) ортогональны, а каж-

дое слагаемое является ФПЧЗ (форма 1), используем формулу (190):

$$R_c = P(f_n = 1) = p_n \left(1 - q_{n, n-s}^f + \sum_{i=n-s+1}^{n-1} \prod_{j=1}^{i+s-n} q_{n, i-j} \left(1 - q_{ni}^f \right) \right),$$

$$n > s,$$

$$P(f_k = 1) = p_k \left(1 - q_{k, k-s}^f + \sum_{i=k-s+1}^{k-1} \prod_{j=1}^{i+s-k} q_{k, i-j} \left(1 - q_{ki}^f \right) \right),$$

$$s + 1 \leq k \leq n - 1;$$

$$P(f_k = 1) = p_k \left(1 - q_{k1}^f + \sum_{i=2}^{k-1} \prod_{j=1}^{i-1} q_{k, i-j} \left(1 - q_{ki}^f \right) \right),$$

$$2 \leq k \leq s. \quad (219)$$

Получение ВФ. Многошаговую процедуру замещения проводят в каждом слагаемом отдельно, так как все слагаемые в (219) ортогональны. При этом используют общие правила, следующие из теоремы разрезания.

Пример 24. В полностью связанной системе, рассмотренной в примере 22, установлены следующие ряды приоритетности выходящих линий связи: 51, 52, 53, 54 на узле 5; 41, 42, 43 на узле 4; 31, 32 на узле 3. Необходимо найти вероятность работоспособного состояния системы и оценить влияние структурного параметра S на надежность системы.

Решение. Поскольку здесь $s = 4$, используем третью формулу (219) при $k \leq 5$. Последовательным замещением получаем

$$R_c = p_1 p_5 (p_{51} + q_{51} (p_{52} p_2 p_{21} + q_{52} (p_{53} p_3 (p_{31} + q_{31} p_{32} p_2 p_{21}) + q_{53} p_{54} p_4 / p_1))),$$

$$P_4 = p_1 p_4 (p_{41} + q_{41} (p_{42} p_2 p_{21} + q_{42} p_{43} p_3 (p_{31} + q_{31} p_{32} p_2 p_{21}))). \quad (220)$$

Чтобы получить выражение для $s = 3$, надо в (220) положить $p_{51} = 0$. Варьируя алгоритмы и проводя расчеты при $p_i = 1$, найдем, что при одинаковых вероятностях p_{ij} предложенный алгоритм оказывается лучшим, если $s = 2$ или 4. При $s = 3$ лучшим является алгоритм с рядами приоритетности: 51, 54, 53, 52; 41, 43, 42; 31, 32.

Системы с оповещением о состоянии прямой линии связи. В узлах алгоритм выбора маршрута состоит из двух частей: ряда приоритетности путей, состояния которых известны, и ряда приоритетности линий связи, используемых тогда, когда все пути в первом ряду неработоспособны. При $k > 2s + 1$ на узлах нет ни одного пути, состояние которого было бы известно. Для этих значений k и s рассматриваемый случай ничем не отличается от предыдущего. Поэтому далее рассматриваются лишь значения $n \leq 2s + 1$. В этой области выделяют две подобласти: $n \leq s + 1$ и $s + 2 \leq n \leq 2s + 1$.

Составление УРС. При $n \leq s + 1$ логическая функция работоспособности

$$y = x_1 f_n, \quad f_k = x_k \left(B_k \vee B'_k \times \right.$$

$$\left. \times \left(\bigvee_{i=1}^{k-3} x_{ki} f_{ki} \left(\bigwedge_{l=1}^{i-1} (x_{kl} f_{li}) \right) \right) \right),$$

$$2 \leq k \leq n,$$

$$B_k = x_{k1} \vee x_{k2} x_{k1} \vee x_{k3} x_{k2} x_{k1} \vee \quad \vee$$

$$\vee x_{ki} x_{i, k-1} x_{i, k-2} \dots x_{i, k-1}^i. \quad (221)$$

При $2 + s \leq n \leq 2s + 1$ и $k \leq s + 1$ УРС определяется также формулой (221), а при $n \geq k \geq s + 2$ возникает особенность, состоящая в том, что первый ряд приоритетности содержит ровно $2s + 2 - k$, а второй ровно s направлений связи. Поэтому для указанных значений k имеем

$$B_k = x_{k1} \vee x_{k2} x_{k1} \vee x_{k3} x_{k2} x_{k1} \vee \quad \vee$$

$$\vee x_{ki} x_{i, s+1} x_{i, s+2} \dots x_{i, s+1}^i. \quad (222)$$

Запись СФФВ. Смешанная форма имеет вид

$$P_k^{(k-1)} = p_k \times \left(1 - q_{k1} \prod_{i=2}^{k-1} (1 - p_{ki} p_i p_{i1}) + q_{k1} \sum_{v=1}^{k-3} \left(1 - q_{kv}^{g_{kv}} \right) \prod_{i=1}^{v-1} q_{ki}^{x_{ji}} \times \prod_{i=v}^{k-1} q_{ki}^{x_{ji}} \right),$$

$$g_{kv} = (x_{j_{kv}} x_{j_{kv}})' f_{j_{kv}}, \quad k \leq n. \quad (223)$$

Получение ВФ. Дальнейшее замещение происходит, как при полном оповещении, путем последовательного разрезания по незамещенным переменным.

Пример 25. В полностью связанной системе из пяти узлов каждый узел оповещается смежными узлами о наличии у них работоспособной линии связи с узлом 1. Сигнал оповещения одновременно служит признаком работоспособности самого узла, а отсутствие сигнала означает, что узел неработоспособен. Необходимо найти вероятность работоспособного состояния системы при двух вариантах исходящих линий связи на узле 5: 1) 53, 54; 2) 54, 53. Вероятности работоспособного состояния узлов p_1 , линий связи p_2 .

Решение. Для первого варианта приоритетности линий связи УРС

$$f_5 = x_1 x_5 (B_5 \vee \bar{B}_5 (x_{53} f_3 \vee (x_{53} x_3)' x_{54} f_4)),$$

$$B_5 = x_{51} \vee x_{52} x_2 x_{21} \vee x_{53} x_3 x_{31} \vee x_{54} x_4 x_{41};$$

$$f_4 = x_4 (x_{41} \vee x_{42} x_2 x_{21} \vee x_{43} f_3);$$

$$f_3 = x_3 (x_{31} \vee x_{32} x_2 x_{21}).$$

После упрощения получим

$$f_5 = x_1 x_5 (B_5 \vee x'_{51} (x'_{31} x'_{52} \times (x_{54} x_4 x_{41})' x_{53} x_3 x_{32} x_2 x_{21} \vee x'_{41} \times (x_{53} x_3)' (x_{52} x_2 x_{21})' x_{54} x_4 \times (x_{42} x_2 x_{21} \vee x_{43} f_3))).$$

Здесь три слагаемых ортогональные. Поэтому замещение в них проводим независимо, используя теорему 1:

$$R_c = p_1 p_5 (1 - C_1 + C_2 q_{53}^{x_3} q_{52}^{x_2} q_{51}^{x_1} \times (1 - q_{42}^{x_2} q_{43}^{x_3} q_{41}^{x_1}));$$

$$C_1 = q_{51} \left(\prod_{i=2}^4 (1 - p_{5i} p_i p_{i1}) - q_{52} q_{31} p_{53} p_3 p_{32} p_2 p_{21} \times (1 - p_{54} p_4 p_{41}) \right);$$

$$C_2 = q_{51} p_4 p_{54} q_{41}.$$

Замещая остальные переменные, получим искомую формулу:

$$R_c = p_1 p_5 (1 - C_1 + C_2 (p_2 p_{21} q_{52} \times (p_3 q_{53} ((1 - q_{31} q_{32}) (1 - q_{42} q_{43}) + q_{31} q_{32} p_{42}) + q_3 p_{42}) + (1 - p_2 p_{21}) p_3 p_{31} p_{43} q_{53})).$$

Для второго варианта алгоритма $f_5 = x_1 x_5 (B_5 \vee B'_5 (x_{54} f_4 \vee (x_{54} x_4)' x_{53} f_3)).$

После преобразования и замещения неповторных переменных имеем

$$R_c = p_1 p_2 (1 - C_3 + C_2 q_{52}^{x_2} q_{51}^{x_1} q_{53}^{x_3} \times (1 - q_{42}^{x_2} q_{43}^{x_3} q_{41}^{x_1}));$$

$$C_3 = q_{51} \left(\prod_{i=2}^4 p_{5i} p_i p_{i1} - q_{31} q_{52} \times (1 - p_{54} p_4) p_3 p_{53} p_{32} p_2 p_{21} \right).$$

После замещения остальных переменных окончательно имеем

$$R_c = p_1 p_5 (1 - C_3 + C_2 \times (q_{52} p_2 p_{21} (p_3 p_{31} q_{53} (1 - q_{42} q_{43}) + p_3 q_{31} (p_{32} (1 - q_{42} q_{43}) + q_{32} p_{42}) + q_3 p_{42}) + (1 - p_2 p_{21}) p_3 p_{31} q_{53} p_{43})).$$

Расчет показывает, что при $q_1 = 0$ алгоритм 2 дает более высокую вероятность R_c , чем алгоритм 1, во всем диапазоне значений q_2 ($q_2 \leq 0,5$).

ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ ЭЛЕМЕНТОВ НЕНАДЕЖНОЙ СЕТИ

При передаче сообщений в много-связных информационных сетях для каждой пары узлов назначается основной маршрут передачи, по которому происходит передача, если он работоспособен и не перегружен. Если нагрузка в сети в среднем невелика, то перераспределение информационных потоков является следствием ненадежности элементов сети. Нахождение распределения информационных потоков и управление ими при отказах элементов являются одной из важнейших задач проектирования сетей.

Если в системе есть всего m путей между полюсами, то можно ввести m состояний e_i и случайных значений времени ξ_i пребывания в этих состояниях. Обозначим через P_i среднюю долю времени пребывания в e_i на стационарном участке эксплуатации. При пуассоновских потоках сообщений вероятности P_i характеризуют среднюю долю числа сообщений, использующих i -й путь. Кроме того, P_i есть вероятность того, что «меченое» сообщение застанет систему в состоянии e_i и использует i -й путь. В дальнейшем распределение вероятностей $\{P_i\}$ будем называть информационной

нагрузкой путей $\left(\sum_{i=0}^n P_i = 1 \right)$, где P_0 —

вероятность отсутствия работоспособных путей между полюсами. Аналогично вводятся показатели информационной нагрузки узлов, линий связи и любых подсистем. Информационная нагрузка элементов сети зависит как от надежности сети, так и от алгоритмов выбора маршрутов и условий оповещения о состоянии сети. Разнообразие сведений, которое надо учитывать при прогнозировании нагрузки в процессе проектирования, усложняет задачу расчета надежности. Однако именно в таких задачах в наибольшей степени проявляются преимущества ЛВМ перед другими методами, использующими неформализованные процедуры.

Нагрузка путей при полном оповещении о состоянии сети. Рассмотрим двухполюсную ориентированную сеть

произвольной структуры. В условиях полного оповещения о состоянии сети алгоритм выбора маршрута базируется на ряде приоритетности путей в узлах сети. Ряды приоритетности фиксированы и должны быть выбраны при проектировании. При адаптивных алгоритмах ряды приоритетности могут перестраиваться, адаптируясь к состоянию сети.

Исходными данными для решения задачи являются варианты структуры сети между выбранными полюсами, класс алгоритмов, в котором происходит выбор алгоритма, критерии генерации вариантов структуры и алгоритмов, показатели надежности элементов сети.

Для построения расчетных формул все пути нумеруют в порядке их расположения в ряду приоритетности. Для i -го пути составляют элементарную конъюнкцию

$$K_i = x_1 \& (x_j x_{jk}); \quad k \in M_i, \quad j \in M_i, \quad (j)$$

где M_i — множество узлов, входящих в путь. Логическая функция информационной нагрузки пути

$$f_i = \left(\bigvee_{j=1}^{i-1} K_j \right)' K_i. \quad (224)$$

Эта форма является ФПЧЗ (форма 3), поэтому СФФВ составляется с помощью формулы (202). Для группы путей A , расположенных рядом в ряду приоритетности, логическая функция нагрузки

$$f_A = \&_{v=1}^{i-1} K_v' \left(\bigvee_{v=i}^l K_v \right) = \&_{r=1}^{n-1} (x_{nr} f_r)' \left(\bigvee_{r=1}^{n-1} x_{nr} g_r \right). \quad (225)$$

Согласно (202) СФФВ

$$P_A = \prod_{j=1}^{n-1} q_{nj}^{f_j} \left(1 - \prod_{j=1}^{n-1} q_{nj}^{f_j' g_j} \right). \quad (226)$$

Если пути образуют две группы в ряду приоритетности A_2 и A_4 , разделенные группой A_3 , то

$$f_A = B_1' (B_2 \vee B_2' B_3' B_4), \quad B_i = \bigvee_{l \in A_i} K_j; \quad i = \overline{1, 4}, \quad (227)$$

а соответствующую ей СФФВ находят с помощью (207):

$$P_A = \prod_{i=1}^{n-1} q_{ni}^{f_i^{(1)}} \left(1 - \prod_{i=1}^{n-1} q_{ni}^{(f_i^{(1)})'} g_i^{(1)} \right) + \prod_{i=1}^{n-1} q_{ni}^{f_i^{(2)}} \left(1 - \prod_{i=1}^{n-1} q_{ni}^{(f_i^{(2)})'} g_i^{(2)} \right), \quad (228)$$

где $f_i^{(1)}$, $g_i^{(1)}$, $f_i^{(2)}$, $g_i^{(2)}$ — логическая функция связности по направлениям ni через группы путей A_1 ; A_2 ; $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; A_4 . Далее осуществляют разрезание по общим правилам.

Нагрузка узлов и линий связи при полном оповещении о состоянии сети. Задача поиска средней нагрузки узла, линии или групп узлов и линий сводится к поиску средней нагрузки группы путей, содержащих интересные проектировщика элементы сети. Если эти пути образуют в ряду приоритетности одну или две компактные группы, то расчет проводят с помощью (226) и (228). В общем случае, когда группу A разбивают на m подгрупп,

$$f_A = B'_1 (B_2 \vee B'_3 \times \times (B_4 \vee \dots \vee B'_{2m-1} B_{2m}) \dots),$$

Для приведения к ФПЧЗ (форма 4) преобразуют эту функцию к виду

$$f_A = B'_1 (B_2 \vee B'_2 B'_3 (B_4 \vee B'_4 B'_5) \times \times (B_6 \vee \dots \vee B'_{2m-2} B'_{2m-1} B_{2m}) \dots),$$

где

$$B_j = \bigvee_{i=1}^{n-1} x_n x_{ni} f_{ij}. \quad (229)$$

Смешанная форма, полученная с помощью (207),

$$P_A = \sum_{k=1}^m \prod_{i=1}^{n-1} p_n q_{ni}^{g_{ikh}} \times \times \left(1 - \prod_{i=1}^{n-1} q_{ni}^{g'_{ikh} f_{i, 2k}} \right), \quad (230)$$

$$g_{ikh} = \bigvee_{j=1}^{2k-1} f_{ij}.$$

Далее проводят многошаговое замещение остальных переменных.

Пример 26. В системе, рассмотренной в примере 7, ряд приоритетности путей при $s = 3$ имеет вид: 521, 531, 541, 5321, 5421, 5431, 54321. Найти вероятности использования транзитного узла 3 при передаче информации из узла 5 в узел 1 (см. рис. 18).

Решение. В формуле (229) функции B_i имеют вид

$$B_1 = x_{52} x_2 x_{21}; \quad B_2 = x_{53} x_3 x_{31};$$

$$B_3 = x_{54} x_4 x_{41}; \quad B_4 = x_{53} x_3 x_{32} x_2 x_{21};$$

$$B_5 = x_{54} x_4 x_{42} x_2 x_{21};$$

$$B_6 = x_{54} x_4 x_{43} x_3 (x_{31} \vee x_{32} x_2 x_{21}).$$

Подставляя их в (229) и проводя некоторые упрощения, запишем СФФВ:

$$P_{53} = C_1 (C_2 + q_{41} p_{54} p_4 p_{43} (1 - (1 - q_{53} \times \times (q_{42} q_{52})^{x_2 x_{21}}) x_{31} \vee x_{32} x_2 x_{21}));$$

$$C_1 = p_1 p_3 p_5; \quad C_2 = p_{53} (p_{31} (1 - - p_{52} p_2 p_{21}) + q_{31} q_{52} p_{32} p_2 p_{21} \times \times (1 - p_{54} p_4 p_{41}));$$

здесь замещаем сначала x_{31} , затем x_{32} и $x_2 x_{21}$. Окончательно имеем

$$P_{53} = C_1 (C_2 + q_{41} p_{54} p_4 p_{43} (p_{31} q_{53} \times \times (1 - q_{52} q_{53})) + + q_{52} q_{31} q_{42} q_{53} p_{32} p_2 p_{21}).$$

Далее можно проводить анализ влияния каждой линии и других узлов на нагрузку узла 3. При $q_i = q_{ij} = q$

$$P_{53} = p^5 ((1 - p^3) (1 + q^2 p^2) + + q^2 p^2 (1 - q^2) + p q^4).$$

Варьируя ряд приоритетности путей, можно регулировать нагрузку рассматриваемого узла.

6. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ С ВЕТВЯЩЕЙСЯ СТРУКТУРОЙ И МЕРИДИАННЫМИ СВЯЗЯМИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА

Системами с ветвящейся структурой (ветвящимися системами) называют системы, состоящие из одного или не-

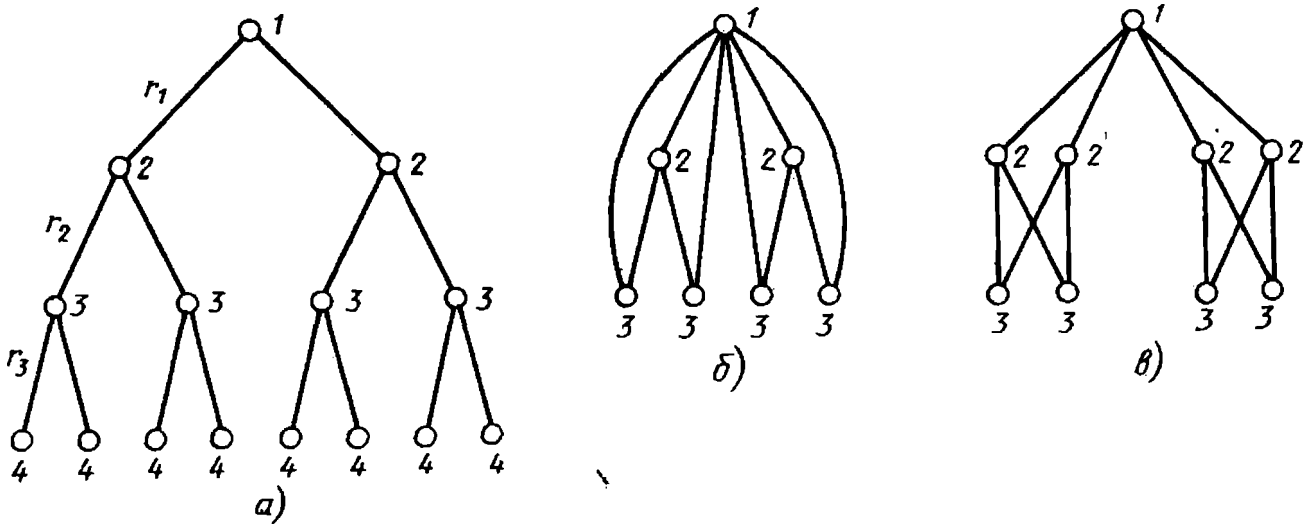


Рис. 19. Системы с ветвящейся структурой

скольких центральных и группы периферийных устройств (звеньев, узлов), предназначенных для выполнения общего задания и объединенных общей целью функционирования. Особенность функционирования состоит в том, что звенья ветвящейся системы имеют определенное функциональное подчинение. Поэтому выделяются группы звеньев первого, второго, m -го уровней (рангов), назначаемых в порядке подчиненности. Периферийные звенья являются звеньями младшего ранга. При наличии нескольких рангов отказ звена промежуточного ранга может сделать невозможной нормальную работу подчиненных звеньев. Число звеньев одного ранга увеличивается по мере перехода от центральной части системы к периферии. Именно за это свойство системы получили название ветвящихся. Они могут иметь структуру типа «дерево» (рис. 19, а), где каждый узел имеет связь с узлами соседних рангов. В общем случае возможны связи между узлами различных рангов (меридианные связи) и с узлами одного ранга (широтные, или рокадные связи). В системе с меридианными связями вводится понятие ветви. Ветвь — это фрагмент структуры, содержащий центральный узел, один периферийный узел и все линии связи и промежуточные узлы, которые могут принять участие во взаимодействии центрального и периферийного узлов. Ветвь называют простой, если в нее входит не более одного узла каждого ранга. Простые ветви могут быть односвязными, многосвязными, полно-

связными. Если все ветви простые, то это система с однозначным подчинением (рис. 19, б). Если все ветви одинаковы, то структура является изотропной. В системах с неоднозначным подчинением есть ветви, содержащие по несколько узлов одного ранга (рис. 19, в). Число $K(t)$ работоспособных ветвей в момент времени t в ветвящейся структуре является случайной величиной, изменяющейся в пределах от 0 до N и имеющей распределение

$$P_k(t) = P(K(t) = k);$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (231)$$

Если качество функционирования системы при наличии k работоспособных ветвей задается числом E_k , то можно рассчитать показатель технической эффективности

$$\bar{E}(t) = \sum_{k=0}^N E_k P_k(t). \quad (232)$$

В некоторых случаях зависимость E_k от числа работоспособных ветвей можно представить в виде полинома

$$E_k = \sum_{i=0}^m a_i k^i.$$

Тогда

$$\bar{E} = \sum_{i=0}^m a_i \alpha_i; \quad \alpha_i = MK^i, \quad (233)$$

где MK^i — i -й начальный момент случайной величины K . При $a_1 = 1$,

$a_i = 0$ для $i \neq 1$ из (233) получается

$$\bar{E} = \sum_{k=1}^N k P_k = \bar{K}, \quad (234)$$

т. е. техническая эффективность определяется средним числом работоспособных ветвей. Из (234) можно найти коэффициент сохранения эффективности

$$K_э = \bar{E}/E_N = \bar{K}/N.$$

В изотропной системе

$$\begin{aligned} \bar{K} &= M \left(\sum_{i=1}^N \xi_i(t) \right) = \sum_{i=1}^N M \xi_i(t) = \\ &= N M \xi(t) = N P(f=1), \end{aligned} \quad (235)$$

где ξ_i — индикатор работоспособности i -й ветви; M — знак математического ожидания; $P(f=1)$ — вероятность работоспособного состояния одной ветви.

Основная задача состоит в том, чтобы найти распределение числа работоспособных ветвей $\{P_k(t)\}$, с помощью которого можно найти и другие характеристики. Распределение $\{P_k(t)\}$ получается как множество коэффициентов в производящем полиноме $\Phi(z) = \sum_{k=0}^N P_k(t) z^k$, определяемом в такой последовательности.

1. Запись логической функции работоспособности ветви (или ветвей).

2. Составление СФФВ для одной ветви по правилам, изложенным в предыдущем параграфе.

3. Составление производящего полинома для одной ветви типа

$$\Phi(z, X) = 1 + P(X)(z-1). \quad (236)$$

4. Многошаговая процедура возведения полинома $\Phi(z, X)$ в степень, равную коэффициенту разветвления на ярусе, или перемножения полиномов с последующим замещением части логических переменных, относящихся к одному рангу (ярусу).

При выполнении п. 4 используют три теоремы разложения.

Теорема 1 (первая теорема разложения). Пусть задана функция

$$\begin{aligned} \Phi(z, x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{i=0}^r P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) z^i \end{aligned} \quad (237)$$

с коэффициентами, записанными в смешанной форме и зависящими от логических переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(z, x_{s+1}, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)} P(x_i = \alpha_i, i = \overline{1, s}) \Phi(z, \\ &\alpha_1, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (238)$$

Теорема 2 (вторая теорема разложения). Пусть

$$\begin{aligned} \Psi(z, x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{i=0}^m p_i(x_1, \dots, x_n) z^i; \\ \Psi(z, \alpha_1, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{i=0}^m P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n) z^i; \\ \Phi(z, x_1, \dots, x_n) &= \Psi^f(z, x_1, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{i=0}^{m_f} P_i(x_1, \dots, x_n) z^i. \end{aligned} \quad (239)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(z, \alpha_1, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n) &= \\ &= (\Psi(z, \alpha_1, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n))^f. \end{aligned} \quad (240)$$

Теорема 3 (третья теорема разложения). Пусть

$$\begin{aligned} \Phi(z, x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{(j)} \Phi_j(z, x_1, \dots, x_n), \\ \Phi_j(z, x_{s+1}, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)} P(x_i = \alpha_i, i = \overline{1, s}) \Phi_j \times \\ &\times (z, \alpha_1, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n); \\ \Phi(z, x_{s+1}, \dots, x_n) &= \end{aligned}$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)} P(x_i = \alpha_i, i = \overline{1, s}) \Phi \times \\ \times (z, \alpha_1, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n).$$

Тогда

$$\Phi(z, x_{s+1}, \dots, x_n) = \\ = \sum_{(j)} \Phi_j(z, x_{s+1}, \dots, x_n). \quad (241)$$

Эта теорема устанавливает способ перехода от производящего полинома, записанного в смешанной форме, к полиному, не содержащему логических переменных, если исходный полином является суммой нескольких слагаемых полиномов. Согласно теореме допускается раздельное замещение переменных в каждом из слагаемых полиномов.

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ И ВЫБОР СТРУКТУРНЫХ ПАРАМЕТРОВ С ОДНОЗНАЧНЫМ ПОДЧИНЕНИЕМ ПРИ ПОЛНОМ ОПОВЕЩЕНИИ О СОСТОЯНИИ СЕТИ

Система состоит из одного центрального узла, r_1 узлов второго ранга (первого яруса), каждому из которых подчинено r_2 узлов третьего ранга (второго яруса). Всего в системе $n - 1$ ярус и узлы до n -го ранга включительно, причем каждому узлу i -го ранга подчинено r_i узлов $i + 1$ -го ранга. Связи в системе только меридианные, а каждая ветвь представляет собой многосвязную двухполюсную ориентированную систему, которая рассмотрена в предыдущем параграфе. Это значит, что при передаче снизу вверх путь может содержать последовательность узлов только с убывающими номерами, а при передаче сверху вниз — только с возрастающими номерами. Все элементы сети функционируют независимо, т. е. отказы — независимые события, а восстановления — автономные. Это позволяет в невосстанавливаемой системе определять вероятность безотказной работы ветви или группы ветвей по схеме независимых событий, а в восстанавливаемой системе определять коэффициент готовности. В качестве исходных данных, кроме структуры, заданы вероятности работоспособного со-

стояния узлов p_i и линий связи p_{ij} . В условиях полного оповещения алгоритм выбора маршрута не влияет на вероятностные характеристики $P_k(t)$, поэтому он не используется в качестве исходных данных.

При записи производящего полинома работоспособности ветви используем формулу (211):

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_1, \dots, f_{n-1}) = \\ = 1 + P_n(f_1, \dots, f_{n-1})(z - 1). \quad (242)$$

Следующий этап — возведение полинома в степень r_{n-1} и замещение x_{n-1} и $x_{n-1, i}$:

$$\Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, \dots, f_{n-2}) = \\ = p_{n-1} \left(1 - \prod_{i=1}^{n-2} q_{n-1, i}^{f_i} \right) \times \\ \times (\Phi_n^{(n)}(z, f_1, \dots, f_{n-2}, 1))^{r_{n-1}} + \\ + \left(q_{n-1} + p_{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} q_{n-1, i}^{f_i} \right) \times \\ \times (\Phi_n^{(n)}(z, f_1, \dots, f_{n-2}, 0))^{r_{n-1}}. \quad (243)$$

Здесь оказались замещенными логические переменные n -го и $(n - 1)$ -го рангов, соответствующие независимым участкам путей, а логические переменные общих участков записаны в показателях степени. Поэтому полином (243) можно возводить в степень r_{n-2} , чтобы получить полином распределения суммы независимых случайных величин. Затем надо заменить логические переменные x_{n-2} и $x_{n-2, i}$. Такая процедура повторяется до тех пор, пока не будут замещены все переменные. Для перехода от i -го ранга к $(i - 1)$ -му рангу надо использовать формулу

$$\Phi_n^{(i)}(z, f_1, \dots, f_{i-1}) = \\ = p_i \left(1 - \prod_{j=1}^{i-1} q_{i, j}^{f_j} \right) \times \\ \times (\Phi_n^{(i+1)}(z, f_1, \dots, f_{i-1}, 1))^{r_i} +$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left(q_i + p_i \prod_{j=1}^{i-1} q_{ij}^{f_j} \right) \times \\
 &\times \left(\Phi_n^{(i+1)}(z, f_1, \dots, f_{i-1}, 0) \right)^{r_i}, \\
 &i = \overline{1, n-1}. \tag{244}
 \end{aligned}$$

Для структуры типа «дерево» многократное использование формулы (244) приводит к результату

$$\begin{aligned}
 f_i &= x_i x_{i, i-1} f_{i-1}; \quad i = \overline{2, n}; \quad f_1 = x_1; \\
 \Phi_n^{(n)}(z, f_{n-1}) &= 1 + \\
 &+ (z-1) p_n (1 - q_{n, n-1}^{f_{n-1}}), \\
 \Phi_n(z) &= q_1 + p_1 \left(\dots \left((1 + \right. \right. \\
 &+ (z-1) p_n p_{n, n-1})^{r_{n-1}} p_{n-1} p_{n-1, n-2} + \\
 &+ 1 - p_{n-1} p_{n-1, n-2})^{r_{n-2}} p_{n-2} p_{n-2, n-3} + \\
 &+ 1 - p_{n-2} p_{n-2, n-3})^{r_{n-3}} + \\
 &+ \dots + 1 - p_2 p_{21})^{r_1}. \tag{245}
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулы для моментов распределения:

$$\bar{N} = \Phi_n'(1) = \prod_{i=1}^{n-1} r_i p_{i+1} p_i; \tag{246}$$

$$\begin{aligned}
 M\zeta^2 &= \Phi_n''(1) + \Phi_n'(1) = \Phi_n'(1) \times \\
 &\times \left(\sum_{j=1}^{n-1} (1-a_j) \prod_{i=j+1}^{n-1} r_i a_i + \prod_{i=1}^{n-1} r_i a_i \right);
 \end{aligned}$$

$$a_i = p_{i+1} p_{i+1}, \quad i.$$

Для полносвязной трехъярусной структуры согласно (242)

$$\begin{aligned}
 \Phi_4^{(4)}(z, f_1, f_2, f_3) &= 1 + \\
 &+ (z-1) p_4 (1 - q_{41}^{f_1} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3}), \\
 f_1 &= x_1; \quad f_2 = x_2 x_{21} f_1; \\
 f_3 &= x_3 (x_{31} f_1 \vee x_{32} f_2). \tag{247}
 \end{aligned}$$

Трижды применяя формулу (244), получим

$$\begin{aligned}
 \Phi_4(z) &= q_1 + p_1 (p_2 p_{21} (p_3 (1 - q_{31} q_{32}) \times \\
 &\times (1 + (z-1) p_4 (1 - q_{41} q_{42} q_{43}))^{r_3} + \\
 &+ (q_3 + p_3 q_{31} q_{32}) (1 + (z-1) p_4 \times \\
 &\times (1 - q_{41} q_{42})^{r_2})^{r_2} + (1 - p_2 p_{21}) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\times (p_3 p_{31} (1 + (z-1) p_4 (1 - \\
 &- q_{41} q_{42}))^{r_2} + (1 - p_3 p_{31}) (1 + \\
 &+ (z-1) p_4 p_{41})^{r_2})^{r_1}. \tag{248}
 \end{aligned}$$

Формулы (245) и (248) позволяют проводить выбор структурных параметров системы, так как можно варьировать не только коэффициенты разветвления r_i , сохраняя неизменным общее число ветвей, но и число ярусов системы. Для этого следует положить некоторые $r_i = 1$ и соответствующие узлы и линии связи считать идеально надежными ($p_i = p_{ij} = 1$). Например, чтобы перейти от трехъярусной к двухъярусной структуре, надо взять $r_3 = p_4 = p_{41} = p_{42} = p_{43} = 1$. Можно варьировать и число линий связи, изменяя уровень структурной избыточности. Чтобы учесть в формулах удаление тех или иных связей, надо положить соответствующие $p_{ij} = 0$. Применяя раздельное резервирование, можно изменять значение показателей p_i и p_{ij} .

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ И ВЫБОР СТРУКТУРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ИЗОТРОПНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЗНАЧНЫМ ПОДЧИНЕНИЕМ ПРИ НЕПОЛНОМ ОПОВЕЩЕНИИ О СОСТОЯНИИ СЕТИ

Условия функционирования данной системы такие же, как у системы, рассмотренной выше (см. рис. 3, б). Однако они отличаются объемом и содержанием информации оповещения. В каждой ветви оповещение организовано так, как в системе, рассмотренной выше. Логическая функция работоспособности одной ветви определяется формулами (217) и (218) при отсутствии оповещения и формулами (221) и (222) при оповещении о состоянии прямой линии связи с выходным полюсом.

В системе без оповещения о состоянии сети полином для одной ветви имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Phi_n^{(n)}(z, f_1, \dots, f_{n-1}) &= \\
 &= \left(1 + (z-1) p_n \left(1 - q_{n1}^{f_1} + q_{n1} \times
 \end{aligned}$$

$$\times (1 - q_{ni_1}^{f_{i_1}}) + \dots + q_{n1} \prod_{k=1}^{n-3} q_{ni_k} \left(1 - q_{ni_{n-2}}^{f_{i_{n-2}}}\right) \Big), \quad (249)$$

где $1; i_1, i_2, \dots, i_{n-2}$ — ряд приоритетности направлений связи на узле n .

Далее выполняются многошаговая процедура возведения в степень и замещения логических переменных в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(i-1)}(z, f_1, \dots, f_{i-2}) &= \\ &= P_{i-1}(f_1, \dots, f_{i-2}) \times \\ &\times (\Phi_n^{(i)}(z, f_1, \dots, f_{i-2}, 1))^{r_{i-1}} + \\ &+ Q_{i-1}(f_1, \dots, f_{i-2}) \times \\ &\times (\Phi_n^{(i)}(z, f_1, \dots, f_{i-2}, 0))^{r_{i-1}}; \\ i = \overline{3, n-1}; \Phi_n(z) &= q_1 + p_1 \times \\ &\times (P_2(1) \Phi_n^{(2)}(z, 1, 1) + \\ &+ Q_2(1) \Phi_n^{(2)}(z, 1, 0))^{r_1}, \end{aligned} \quad (250)$$

где $P_i(f_1, \dots, f_{i-1}) = 1 - Q_i(f_1, \dots, f_{i-1}) = P(f_i = 1)$ определяется по формулам (219).

Для полностью связанной системы с оповещением о прямой линии связи производящий полином для одной ветви имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(n)}(z, f_1, \dots, f_{n-1}, g_3, \dots, g_{n-1}) &= \\ &= 1 + (z-1) p_n \left(1 - \prod_{i=1}^{n-1} q_{ni}^{g_i}\right) + \\ &+ \prod_{i=1}^{n-1} q_{ni}^{g_i} \left(1 - q_{ni_1}^{f_{i_1}}\right) + \\ &+ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^{n-1} q_{ni}^{g_i} q_{ni_1}^{x_{i_1}} \left(1 - q_{ni_2}^{f_{i_2}}\right) + \dots \\ &\dots + \prod_{k=1}^{n-3} q_{ni_k}^{x_{i_k}} q_{ni_{n-2}}^{g_{i_{n-2}}} \times \\ &\times \left(1 - q_{ni_{n-2}}^{f_{i_{n-2}}}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_i &= x_i x_{i1} x_1; f_1 = g_1 = x_1; \\ f_2 &= g_2 = x_2 x_{21} x_1; i \geq 3. \end{aligned} \quad (251)$$

Далее разрезание проводится с помощью формулы

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(k-1)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, g_3, \dots, g_{k-1}) &= \\ &= (P(g_k' f_k = 1) + P(g_k = 1)) \Phi_n^{(k)} \times \\ &\times (z, f_1, \dots, f_{k-1}, 0, g_3, \dots, g_{k-1}, 1) + \\ &+ P(g_k' f_k = 1) \Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, \\ &1, g_3, \dots, g_{k-1}, 0))^{r_{k-1}}; k = \overline{3, n-1}. \end{aligned} \quad (252)$$

Во втором слагаемом принимаем $f_k = 0$, так как при $g_k = 1$ слагаемые, содержащие f_k , обращаются в нуль, независимо от значения f_k . Функции $P(g_k' f_k = 1)$, $P(g_k = 1)$ и $P(g_k' f_k = 1)$ определяют по формулам, полученным для двухполюсных структур.

Полностью связанная четырехъярусная система без оповещения о состоянии сети. В системе есть узлы пяти рангов: один узел первого ранга, r_1 узлов второго, $r_1 r_2$ третьего, $r_1 r_2 r_3$ четвертого и $r_1 r_2 r_3 r_4$ пятого рангов. Ряд приоритетности направлений связи на узле k имеет вид: $1; 2; \dots, k-1$. Тогда согласно (250)

$$\begin{aligned} \Phi_5(z) &= q_1 + p_1 \{P_2(1) \{P_3(1, 1) \times \\ &\times \{P_4(1, 1, 1) \Phi_5^{(4)}(z, 1, 1, 1, 1) + \\ &+ Q_4(1, 1, 1) \Phi_5^{(4)}(z, 1, 1, 1, 0)\}^{r_4} + \\ &+ Q_3(1, 1) \{P_4(1, 1, 0) \Phi_5^{(4)}(z, \\ &1, 1, 0, 1) + Q_4(1, 1, 0) \Phi_5^{(4)}(z, \\ &1, 1, 0, 0)\}^{r_3}\}^{r_2} + Q_2(1) \times \\ &\times \{P_3(1, 0) \{P_4(1, 0, 1) \Phi_5^{(4)}(z, \\ &1, 0, 1, 1) + Q_4(1, 0, 1) \Phi_5(z, \\ &1, 0, 1, 0)\}^{r_3} + Q_3(1, 0) \times \\ &\times \{P_4(1, 0, 0) \Phi_5^{(4)}(z, 1, 0, 0, 1) + \\ &+ Q_4(1, 0, 0) \Phi_5^{(4)}(z, 1, 0, 0, 0)\}^{r_3}\}^{r_1}, \end{aligned} \quad (253)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_5^{(4)}(z, 1, f_2, f_3, f_4) &= \\ &= (1 + (z-1) (1 - q_{51} q_{52}^{f_2} + q_{51} q_{52} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (1 - q_{53}^{f_3} + q_{53}q_{52}q_{51}(1 - q_{54}^{f_4}))^{r_4}; \\ P_4(1, f_2, f_3) &= p_4(1 - q_{41}q_{42}^{f_2} + \\ & + q_{41}q_{42}(1 - q_{43}^{f_3})); P_3(1, f_2) = \\ &= p_3(p_{31} + q_{31}(1 - q_{32}^{f_2})); \\ P_2(1) &= 1 - Q_2(1) = p_2p_{21}. \end{aligned}$$

Из (253) можно получить полиномы и для других $n < 5$. Так, $\Phi_4(z)$ получается при $p_{51} = p_{52} = p_{53} = 0$; $\Phi_3(z)$ при $p_{41} = p_{42} = 0$; $p_4 = p_{43} = r_3 = 1$. Отсюда же можно получить формулы для двухсвязной и трехсвязной сети.

Полносвязная четырехъярусная система с оповещением о состоянии прямой линии связи с центром. На узлах $k = 2, 3, 4$ информации оповещения достаточно, чтобы принять уверенное решение о передаче по работоспособному пути. Поэтому на этих узлах алгоритмы выбора маршрута не отличаются от алгоритма в системе с полным оповещением. На узле 5 возникает неопределенность при отказе путей 51, 521 и линий 31 и 41, так как неизвестно состояние путей 5321, 5421 и 54321. В этом случае при работоспособных узлах 3 и 4 и работоспособных связях 54 и 53 сообщения направляются на узел 4.

Логические функции работоспособности:

$$\begin{aligned} f_5 &= x_5(x_{51}f_1 \vee x_{52}f_2 \vee x_{54}(f_4 \vee g_4) \vee \\ & \vee (x_{54}x_4)'x_{53}f_3); \quad (254) \\ f_4 &= x_4(x_{41}f_1 \vee x_{42}f_2 \vee x_{43}f_3); f_3 = \\ &= x_3(x_{31}f_1 \vee x_{32}f_2); \\ f_2 &= x_2x_{21}f_1; f_1 = x_1; g_i = x_ix_{i1}x_1. \end{aligned}$$

Составим производящий полином для одной ветви:

$$\begin{aligned} \Phi_5^{(5)}(z, f_i, g_i) &= 1 + (z - 1)p_5 \times \\ & \times (1 - q_{51}^{f_1}q_{52}^{f_2}q_{53}^{g_3}q_{54}^{f_4} + q_{51}^{f_1}q_{52}^{f_2}q_{53}^{g_3}q_{54}^{f_4} \times \\ & \times (1 - q_{53}^{g_3'f_3})). \end{aligned}$$

Проводим замещение переменных, соответствующих элементам четвертого ранга, рассматривая три ситуации: $x_4f_4 = 1$; $x_4f_4' = 1$; $x_4 = 0$.

После возведения в степень и замещения имеем

$$\begin{aligned} \Phi_5^{(4)}(z, f_i, g_i) &= p_4(1 - q_{41}^{f_1}q_{42}^{f_2}q_{43}^{f_3}) \times \\ & \times (1 + (z - 1)p_5 \times \\ & \times (1 - q_{51}^{f_1}q_{52}^{f_2}q_{53}^{g_3}q_{54}^{f_4}))^{r_4} + \\ & + p_4(q_{41}^{f_1}q_{42}^{f_2}q_{43}^{f_3})(1 + (z - 1)p_5 \times \\ & \times (1 - q_{51}^{f_1}q_{52}^{f_2}q_{53}^{g_3} + q_{51}^{f_1}q_{52}^{f_2}q_{53}^{g_3}q_{54}^{f_4} \times \\ & \times (1 - q_{53}^{g_3'f_3})))^{r_4} + q_4(1 + (z - 1)p_5 \times \\ & \times (1 - q_{51}^{f_1}q_{52}^{f_2}q_{53}^{f_3}))^{r_4}. \end{aligned}$$

Здесь использовано равенство $g_3 \vee \vee g_3'f_3 = f_3$. На следующем шаге возводим в степень r_3 и рассматриваем несовместные события: $g_3 = 1$; $f_3g_3' = 1$; $f_3'g_3 = 1$. Вероятности этих событий равны

$$\begin{aligned} & (\text{при } x_1 = 1) \\ P(g_3 = 1) &= p_3p_{31}; P(g_3'f_3 = 1) = \\ &= p_3q_{31}(1 - q_{32}^{f_2}); P(f_3'g_3 = 1) = \\ &= q_3 + p_3q_{31}q_{32}^{f_2}. \end{aligned}$$

Далее возводим в степень r_2 , замещаем $x_{21}x_1$, возводим в степень r_1 и замещаем f_1 . Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Phi_5(z) &= q_1 + p_1\{p_2p_{21}\{p_3p_{31}\{p_4(1 - \\ & - q_{41}q_{42}q_{43})\Phi_1(z, 1, 1) + \\ & + (p_4q_{41}q_{42}q_{43} + q_4)\Phi_2(z, 1, 1)\}^{r_3} + \\ & + q_{31}p_3p_{32}\{p_4(1 - q_{41}q_{42}q_{43})\Phi_1(z, 1, 1) + \\ & + q_4\Phi_2(z, 1, 1) + \\ & + p_4q_{41}q_{42}q_{43}\Phi_3(z, 1, 1)\}^{r_3} + \\ & + (q_3 + p_3q_{31}q_{32})\{p_4(1 - q_{41}q_{42})\Phi_4(z, \\ & 1, 1) + (q_4 + p_4q_{41}q_{42})\Phi_4(z, \\ & 1, 1)\}^{r_3}\}^{r_2} + (1 - p_2p_{21}) \times \\ & \times \{p_3p_{31}\{(1 - q_{41}q_{43})\Phi_1(z, 1, 0) + \\ & + (q_4 + p_4q_{41}q_{43})\Phi_2(z, 1, 0)\}^{r_3} + \\ & + (1 - p_3p_{31})\{(1 - p_4p_{41})\Phi_5(z, 1, 0) + \\ & + p_4p_{41}\Phi_6(z, 1, 0)\}^{r_3}\}^{r_2}\}^{r_1}, \quad (255) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_1(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1) p_5 \times \\ \times (1 - q_{51}^f q_{52}^f q_{53} q_{54}))^{r_4};$$

$$\Phi_2(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1) p_5 \times \\ \times (1 - q_{51}^f q_{52}^f q_{53}))^{r_4};$$

$$\Phi_3(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1) p_5 \times \\ \times (1 - q_{51}^f q_{52}^f (1 - q_{54} p_{53})))^{r_4};$$

$$\Phi_4(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1) p_5 \times \\ \times (1 - q_{51}^f q_{52}^f q_{54}))^{r_4};$$

$$\Phi_5(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1) p_5 \times \\ \times (1 - q_{51}^f q_{52}^f))^{r_4}.$$

Как и в предыдущей системе, здесь также можно вести поиск желаемой структуры, варьируя структурными параметрами и отбирая структуры по критерию надежности.

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУР С НЕОДНОЗНАЧНЫМ ПОДЧИНЕНИЕМ И НЕИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУР

Системы с неоднозначным подчинением имеют ветви, в которых могут быть по два и более узла одного ранга на одном или нескольких ярусах. При наличии широких связей все узлы, соединенные друг с другом, входят также в одну ветвь. Неизотропность создается различиями в структуре ветвей, показателях надежности одноименных элементов в различных связях, а также в коэффициентах разветвления разных кустов ветвящейся структуры.

Неизотропная структура типа «дерево». Система имеет n -ранговую структуру и содержит N ветвей, отличающихся друг от друга хотя бы одним структурным признаком или значениями показателей надежности элементов. Каждая ветвь входит в определенный куст $(n-1)$ -го, $(n-2)$ -го, ..., 1-го рангов. Пусть порядковый номер линии связи, принадлежащий

данной ветви, в кусте $(k+1)$ -го ранга равен i_k . Тогда для обозначения номера ветви и узла n -го ранга используют вектор $I_{n-1} = \{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}\}$. Для любого узла k -го ранга вводят вектор $I_{k-1} = \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\}$. Коэффициент разветвления в узле I_{k-1} равен $r_k^{(I_{k-1})}$, а вероятности работоспособного состояния узла I_{k-1} и линии связи, соединяющей его с узлом $(k-1)$ -го ранга, равны соответственно $p_k^{(I_{k-1})}$ и $p_{k, k-1}^{(I_{k-1})}$. Если обозначить векторы меньшей размерности, вложенные в I_{n-1} , через $I_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, то можно установить области изменения $i_k: 1 \leq i_k \leq r_k^{(I_{k-1})}$, $k = \overline{2, n-1}$; $1 \leq i_1 \leq r_1$.

Логическая функция работоспособности ветви I_{n-1}

$$f_n^{(I_{n-1})} = x_n^{(I_{n-1})} x_{n, n-1}^{(I_{n-1})} f_{n-1}^{(I_{n-2})};$$

$$f_k^{(I_{k-1})} =$$

$$= x_k^{(I_{k-1})} x_{k, k-1}^{(I_{k-1})} f_{k-1}^{(I_{k-2})}; \quad k = \overline{2, n-1};$$

$$f_1 = x_1. \quad (256)$$

Производящий полином для одной ветви:

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_{n-1}^{(I_{n-2})}) = 1 + (z-1) \times \\ \times p_n^{(I_{n-1})} \left(1 - (q_{n, n-1}^{(I_{n-1})}) f_{n-1}^{(I_{n-2})} \right).$$

Далее осуществляют многошаговую процедуру перемножения полиномов для всех ветвей одного куста и замещения функции $f_{k-1}^{(I_{k-2})}$, $k = \overline{2, n}$. Окончательно получаем

$$\Phi_n(z) = q_1 + p_1 \prod_{i_1=1}^{r_1} \{ 1 - p_2^{(i_1)} p_{21}^{(i_1)} + \\ + p_2^{(i_1)} p_{21}^{(i_1)} \} \prod_{i_2=1}^{r_2^{(i_1)}} \left(1 - p_3^{(i_1 i_2)} p_{32}^{(i_1 i_2)} + \right. \\ \left. + \dots + p_{n-1}^{(I_{n-2})} p_{n-1, n-2}^{(I_{n-2})} \times \right.$$

$$\begin{aligned} & r_{n-1}^{(I_{n-2})} \\ & \times \prod_{i_{n-1}=1} (1 + (z-1) \times \\ & \times p_n^{(I_{n-2}, i_{n-1})} p_{n, n-1}^{(I_{n-2}, i_{n-1})}) \dots \end{aligned} \quad (257)$$

Если в каком-либо кусте все ветви одинаковы, то умножение заменяется на возведение в степень.

Пример 27. В двухъярусной системе со структурой типа «дерево» все линии связи и узлы третьего ранга, принадлежащие одному кусту, равнонадежны и имеют вероятности работоспособного состояния соответственно $p_{32}^{(i)}$ и $p_3^{(i)}$, $i = \overline{1, r_1}$. Коэффициент разветвления в i -м кусте второго ранга равен $r_2^{(i)}$, $i = \overline{1, r_1}$, а вероятности работоспособного состояния узлов и линий первого и второго рангов равны $p_1, p_2^{(i)}, p_{21}^{(i)}$. Найти распределение и среднее значение числа работоспособных ветвей.

Решение. Логические функции работоспособности

$$\begin{aligned} f_3^{(i)} &= x_3^{(i)} x_{32}^{(i)} f_2^{(i)}; f_2^{(i)} = x_2^{(i)} x_{21}^{(i)} x_1, \\ i &= \overline{1, r_1}. \end{aligned}$$

Производящий полином для ветви

$$\begin{aligned} \Phi_3^{(3)}(z, f_2^{(i)}) &= 1 + (z-1) p_3^{(i)} \times \\ & \times \left((1 - q_{32}^{(i)}) f_2^{(i)} \right). \end{aligned}$$

После возведения в степень $r_2^{(i)}$ и разрезания по $f_2^{(i)}$ получим

$$\begin{aligned} \Phi_3^{(2)}(z, r_2^{(i)}, x_1) &= 1 + p_2^{(i)} \times \\ & \times (1 - (q_{21}^{(i)}) x_1) \left(1 + (z-1) \times \right. \\ & \left. \times p_3^{(i)} p_{32}^{(i)} r_2^{(i)} - 1 \right). \end{aligned}$$

На последнем шаге перемножаем полиномы и замещаем x_1 :

$$\begin{aligned} \Phi_3(z) &= q_1 + p_1 \prod_{i=1}^{r_1} \left(1 - p_2^{(i)} p_{21}^{(i)} + \right. \\ & \left. + p_2^{(i)} p_{21}^{(i)} (1 + (z-1) p_3^{(i)} p_{32}^{(i)}) r_2^{(i)} \right). \end{aligned}$$

Среднее число работоспособных ветвей

$$\bar{N} = \Phi_3'(1) = p_1 \sum_{i=1}^{r_1} p_2^{(i)} p_{21}^{(i)} p_3^{(i)} p_{32}^{(i)} r_2^{(i)}.$$

Приведенные формулы позволяют решить задачу о рациональном числе узлов второго ранга и размерах кустов, а также о влиянии неизотропности на показатели надежности системы при прочих равных условиях.

Система со структурным дублированием узлов. Структура системы показана на рис. 19, в. Система относится к классу систем с неоднозначным подчинением, так как есть узлы, связанные с двумя узлами более высокого ранга. В полностью связанной системе узлы i -го ранга дублируются, и каждый узел имеет полный комплект связей с узлами других рангов.

Логическая функция работоспособности

$$\begin{aligned} f_n &= x_n \left(\bigvee_{i=1}^{n-1} x_{ni} f_i \right); f_i = \\ &= x_i \left(\bigvee_{j=1}^{i-1} x_{ij} f_j \right); i = \overline{k+1, n-1}; \\ & i = \overline{2, k-1}; \\ f_k &= x_k^{(1)} \left(\bigvee_{j=1}^{k-1} x_{kj}^{(1)} f_j \right) \vee \\ & \vee x_k^{(2)} \left(\bigvee_{j=1}^{k-1} x_{kj}^{(2)} f_j \right). \end{aligned} \quad (258)$$

Производящий полином для ветви

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(n)}(z, f_1, \dots, f_{n-1}) &= 1 + p_n \times \\ & \times (z-1) \left(1 - \prod_{i=1}^{k-1} q_{ni} f_i q_{nk1}^{(1)} q_{nk2}^{(2)} \times \right. \\ & \left. \times \prod_{i=k+1}^{n-1} q_{ni} f_i \right). \end{aligned}$$

При $i > k$ полином преобразуют, как в изотропной структуре, а при $i = k$ разрезание проводят последовательно по $f_k^{(1)}$ и $f_k^{(2)}$. В результате получим

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}) &= \\ &= P_k^{(1)} \{P_k^{(2)} \{\Phi_n^{(k+1)}(z, \\ & f_1, \dots, f_{k-1}, 1, 1)\}^{r_k} + \\ & + Q_k^{(2)} \{\Phi_n^{(k+1)}(z, \\ & f_1, \dots, f_{k-1}, 1, 0)\}^{r_k} + \\ & + Q_k^{(1)} \{P_k^{(2)} \Phi_n^{(k+1)}(z, \\ & f_1, \dots, f_{k-1}, 0, 1)\}^{r_k} + \\ & + Q_k^{(2)} \{\Phi_n^{(k+1)}(z, \\ & f_1, \dots, f_{k-1}, 0, 0)\}^{r_k} \}, \end{aligned} \quad (259)$$

Далее разрезание проводят, как в изотропной структуре.

Пример 28. В трехъярусной системе с полносвязными ветвями и полным оповещением дублируются узлы второго и третьего рангов (рис. 19, в). Известны коэффициенты разветвления на ярусах r_i и вероятности p_i и p_{ij} работоспособного состояния узлов и линий связи. Найти распределение числа работоспособных ветвей.

Решение. Логическая функция работоспособности

$$f_4 = x_4 (x_{41} x_1 \vee x_{42}^{(1)} f_2^{(1)} \vee x_{42}^{(2)} f_2^{(2)} \vee x_{43}^{(1)} f_3^{(1)} \vee x_{43}^{(2)} f_3^{(2)});$$

$$f_3^{(i)} = x_3^{(i)} (x_{31}^{(i)} x_1 \vee x_{32}^{(i1)} f_2^{(1)} \vee x_{32}^{(i2)} f_2^{(2)}); \quad f_2^{(i)} = (x_2^{(i)} x_{21}^{(i)} x_1); \quad i = 1, 2.$$

Производящий полином для ветви

$$\begin{aligned} \Phi_4^{(4)}(z, x_1, f_2^{(i)}, f_3^{(i)}) &= 1 + p_4 \times \\ & \times (z - 1) \left(1 - q_{41}^{x_1} q_{42,1}^{f_2^{(1)}} q_{42,2}^{f_2^{(2)}} q_{43,1}^{f_3^{(1)}} q_{43,2}^{f_3^{(2)}} \right). \end{aligned}$$

Этот полином возводим в степень r_3 , затем проводим разрезание по $f_3^{(i)}$, возведение в степень r_2 , разрезание по $f_2^{(i)}$ и возведение в степень r_1 . Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Phi_4(z) &= q_1 + p_1 \{p_2^{(1)} p_{21}^{(1)} \{p_2^{(2)} p_{21}^{(2)} \times \\ & \times \Phi_4^{(2)}(z, 1, 1) + (1 - p_2^{(2)} p_{21}^{(2)}) \times \\ & \times \Phi_4^{(2)}(z, 1, 0)\} + (1 - p_2^{(1)} p_{21}^{(1)}) \times \\ & \times \{p_2^{(2)} p_{21}^{(2)} \Phi_4^{(2)}(z, 0, 1) + \\ & + (1 - p_2^{(2)} p_{21}^{(2)}) \Phi_4^{(2)}(z, 0, 0)\}^{r_2}, \\ & \text{где } \Phi_4^{(2)}(z, f_2^{(1)}, f_2^{(2)}) = \{p_3^{(1)} \{p_3^{(2)} \times \\ & \times (\Phi_4^{(4)}(z, 1, f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, 1, 1))^{r_3} + \\ & + Q_3^{(2)}(\Phi_4^{(4)}(z, 1, f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, 1, 0))^{r_3} + \\ & + Q_3^{(1)} \{P_3^{(2)}(\Phi_4^{(4)}(z, \\ & 1, f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, 1, 0))^{r_3}\} \}^{r_3}; \end{aligned}$$

$$P_3^{(1)} = 1 - Q_3^{(i)} = p_3^{(i)} \times$$

$$\times \left(1 - q_{31, i} q_{32, i1}^{f_2^{(1)}} q_{32, i2}^{f_2^{(2)}} \right), \quad i = 1; 2.$$

В частности, при $p_1 = p_4 = 1, p_{41} = 0, q_{ij} = \beta; p_i = \alpha = 1 - \bar{\alpha}, p_{ij} = \beta$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_4(z) &= \{\alpha^2 \beta^2 \{\alpha^2 (1 - \bar{\beta}^3)^2 (1 + \\ & + (z - 1) (1 - \bar{\beta}^4))^{r_3} + 2\alpha (1 - \bar{\beta}^3) \times \\ & \times (\bar{\alpha} + \alpha \bar{\beta}^3) (1 + (z - 1) (1 - \bar{\beta}^3))^{r_3} + \\ & + (\bar{\alpha} + \alpha \bar{\beta}^3)^2 (1 + (z - 1) \times \\ & \times (1 - \bar{\beta}^2))^{r_3}\}^{r_3} + 2\alpha \beta (1 - \alpha \beta) \times \\ & \times \{\alpha^2 (1 - \bar{\beta}^2)^2 (1 + (z - 1) \times \\ & \times (1 - \bar{\beta}^3))^{r_3} + 2\alpha (1 - \bar{\beta}^2) \times \\ & \times (\bar{\alpha} + \alpha \bar{\beta}^2) (1 + (z - 1) (1 - \bar{\beta}^2))^{r_3} + \\ & + (\bar{\alpha} + \alpha \bar{\beta}^2)^2 (1 + (z - 1) \beta)^{r_3}\}^{r_3} \}^{r_1}. \end{aligned}$$

Сравнивая эти формулы с формулами (247) и (248), можно оценить эффективность структурного резервирования узлов и линий связи в системе.

**ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ИНФОРМАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ
ЭЛЕМЕНТОВ НЕНАДЕЖНОЙ СЕТИ
ПРИ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОМ СБОРЕ
ИНФОРМАЦИИ**

Ветвящаяся система работает в режиме, когда по инициативе центрального звена или по регламенту происходит централизованный сбор информации от периферийных звеньев. Если в основной маршрут передачи включен промежуточный узел, то через него проходит информация от нескольких периферийных звеньев. Количество этой информации зависит от состояния сети. Элементы сети, не включенные в основные маршруты передачи, имеют информационную нагрузку при отказе основных маршрутов, если алгоритм перераспределения потоков информации предусматривает использование этих элементов. Находя распределение числа периферийных звеньев, использующих данный элемент сети в передаче информации, и зная объем передаваемой информации каждым звеном (или функцию распределения), определяют суммарный объем информации, длину очереди, время передачи (завершения сбора информации).

Нагрузка путей при полном оповещении о состоянии сети. Логическая функция нагрузки пути и группы путей определяется по формулам (224) и (225), а СФФВ — по формуле (226). Производящий полином для ветви

$$\begin{aligned} \Phi_{nj}^{(n)}(z, f_1, \dots, f_{n-1}, g_1, \dots, g_{n-1}) = \\ = 1 + (z-1) p_n \prod_{j=1}^{n-1} q_{nj}^{f_j} \times \\ \times \left(1 - \prod_{j=1}^{n-1} q_{nj}^{g_j} f_j \right). \end{aligned} \quad (260)$$

После возведения (260) в степень r_{n-1} проводят замещение x_{n-1} и $x_{n-1, j}$, входящих в f_{n-1} и g_{n-1} , путем разложения полинома на три слагаемых: $f_{n-1} = f'_{n-1} + f''_{n-1} + f'''_{n-1}$; $f'_{n-1} g_{n-1} = 1$; $f''_{n-1} g'_{n-1} = 1$. Эти операции продолжают до полного замещения всех логических переменных. Если для некоторого i функции g_i и f_i в записи (260) отсутствуют, то после возведения в степень r_i этап

замещения пропускают и выполняют возведение в степень r_{i-1} .

Пример 29. В четырехъярусной изотропной ветвящейся системе с полностью связными ветвями при полном оповещении о состоянии сети ряд приоритетности путей имеет вид: 51, 541, 531, 521, 5431, 5421, 5321, 54321. Коэффициенты разветвления на ярусах r_1, r_2, r_3, r_4 . Найти распределение числа периферийных звеньев, доставляющих информацию центральному звену по прямым линиям связи и по путям с одним транзитным звеном.

Решение. Логические функции нагрузки при j транзитных звеньях ($j = 0, 1$)

$$f_{50} = x_5 x_{51} x_1; f_{51} = x'_{51} x_5 x_1 (x_{54} x_4 x_{41} \vee x_{53} x_3 x_{31} \vee x_{52} x_2 x_{21}).$$

Производящий полином распределения числа звеньев, использующих прямые линии связи,

$$\Phi_{50}^{(5)}(z, x_1) = 1 + (z-1) p_5 (1 - q_{51}^{x_1}).$$

Возводим в степень $r_1 r_2 r_3 r_4$ и замещаем x_1 :

$$\Phi_{50}(z) = q_1 + p_1 (1 + (z-1) p_5 p_{51})^{r_1 r_2 r_3 r_4}.$$

Для путей с одним транзитным звеном

$$\begin{aligned} \Phi_{51}^{(5)}(z, g_2, g_3, g_4) = 1 + (z-1) \times \\ \times p_5 q_{51} (1 - q_{52}^{g_2} q_{53}^{g_3} q_{54}^{g_4}); \end{aligned}$$

$$g_i = x_{5i} x_i x_{i1}, \quad i = 2, 3, 4.$$

Далее следуют четыре шага возведения в степень и замещения. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{51}(z) = q_1 + p_1 \{ p_2 p_{21} \{ p_3 p_{31} \{ p_4 p_{41} \times \\ \times (1 + (z-1) p_5 q_{51} (1 - \\ - q_{52} q_{53} q_{54})^{r_4} + (1 - p_4 p_{41}) (1 + \\ + p_5 q_{51} (z-1) (1 - q_{52} q_{53}))^{r_4} \}^{r_3} + \\ + (1 - p_3 p_{31}) \{ p_4 p_{41} (1 + (z-1) \times \\ \times p_5 q_{51} (1 - q_{52} q_{54})^{r_4} + (1 - p_4 p_{41}) \times \\ \times (1 + (z-1) p_5 q_{51} p_{52})^{r_4} \}^{r_2} \}^{r_2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (1 - p_2 p_{21}) \{ p_3 p_{31} \{ p_4 p_{41} (1 + \\
 &+ (z - 1) p_5 q_{51} (1 - q_{53} q_{54}) \}^{r_4} + \\
 &(1 - p_4 p_{41}) (1 + (z - 1) \times \\
 &\times q_{51} p_5 p_{53})^{r_4} \}^{r_3} + (1 - p_3 p_{31}) \times \\
 &\times \{ p_4 p_{41} (1 + (z - 1) p_5 q_{51} p_{54})^{r_4} + \\
 &+ 1 - p_4 p_{41} \}^{r_2} \}^{r_1}.
 \end{aligned}$$

Определяя потоки информации, можно установить требования к пропускной способности направлений связи, объемам памяти и времени доставки.

Нагрузка линий связи и транзитных узлов при полном оповещении о состоянии сети. Логическая функция нагрузки линии связи $i_1 i_2$ определяется формулой (229). Используя стандартную форму (230), составляют производящий полином

$$\Phi_{ni_1 i_2}^{(n)}(z, f_i) = 1 + (z - 1) P_A(f_i). \tag{261}$$

Далее преобразование проводят по общим правилам. Возведение в степень заканчивается при достижении яруса, которому принадлежит исходящий для линии узел. Далее замещение проводят, как в двухполюсной системе. Для упрощения следует использовать формулу

$$\begin{aligned}
 1 - q^{f_1} + 1 - q^{f_2} &= 1 - q^{f_1 \vee f_2}; \quad 1 - \\
 - 0^f &= f. \tag{262}
 \end{aligned}$$

При расчете распределения нагрузки узла полином $\Phi_{ni}^{(n)}(z, f_i)$ имеет структуру (261). Различия касаются лишь конкретного вида функций f_i .

7. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Постановка задачи. Систему управления S нестационарным объектом, состояние которой зависит от параметров $\xi_i, i = \overline{1, m}$ (причем каждый из них принимает конечное множество значений) называют *адаптивной*, если для критерия I и класса сред Ξ значения $\{\xi\}$ изменяются таким образом, что поведение S оптимизируется по отношению к Ξ при экстремальном в некотором смысле выборе I .

Адаптивная система S обладает, кроме отмеченных, следующими структурными и функциональными свойствами.

1. Она имеет $n > 1$ различных подсистем $S_j \subset S$ и соответственно n режимов функционирования $R_j, j = \overline{1, n}$, в каждом из которых цель управления, возложенная на S , может быть достигнута частично или полностью.

Между подсистемами S_j устанавливается иерархическое соответствие. В основу S положен уровень низшего ранга S_1 (основной контур), реализующий алгоритм координатного управления, который учитывает «нормальный» режим координатных и параметрических возмущений и обеспечивает требуемую реакцию. Структура S_1 в общем случае содержит объект, измеритель, наблюдатель, регулятор (рис. 20).

Уровни старших рангов $S_i, j > 1$, называют контурами адаптации; последние воздействуют на параметрические входы непосредственно подчиненного уровня и осуществляют ко-

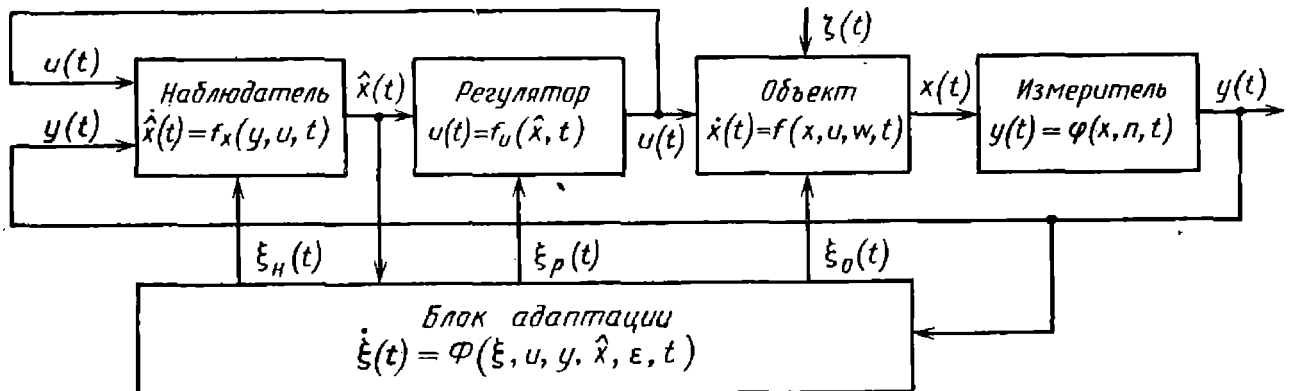


Рис. 20. Структурная схема двухуровневой адаптивной системы управления с обучаемым наблюдателем

ординатно-параметрическое управление. Алгоритмы подсистем S_j , $j > 1$, называют алгоритмами адаптации.

Подсистемы S_j характеризуются функционалами качества I_j ; между последними также устанавливается иерархическое соответствие. Критерий I_n верхнего уровня S_n служит общим (глобальным) функционалом качества S . Наличие режимов R_i , $i = \overline{1, n}$, делает естественным выбор в качестве функционала

$$I = M[E(t)] = \sum_{i=1}^n P_i(t) E_i(t) \rightarrow \text{extr},$$

впервые использованного А. Н. Колмогоровым. Здесь $P_i(t)$ — вероятность функционирования S в R_i в момент t ; $E_i(t)$ — условный выходной эффект системы S при условии функционирования в режиме R_i в момент t , $t \in [0, T]$.

2. В каждый из моментов времени $t \in [0, T]$ система S работает в одном и только в одном из режимов.

Двухуровневая система S с адаптивной настройкой параметров наблюдателя, регулятора и объекта задается пятью соотношениями

$$\dot{x}(t) = f(x, u, w, t); \quad (263)$$

$$x(t_0) = x_0; x(t) \in G_x;$$

$$y(t) = \varphi(x, n, t); \quad (264)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = f_{\hat{x}}(y, u, t); \quad (265)$$

$$u(t) = f_u(\hat{x}, t); u(t) \in G_u; \quad (266)$$

$$\dot{\xi}(t) = \Phi(\xi, u, y, \hat{x}, e, t); \xi(t_0) = \xi_0 \quad (267)$$

и функционалом качества $I = M[E(x, u, t)]$, где (263) — уравнение нестационарного объекта; (264) — уравнение измерителя; (265) — уравнение наблюдателя, (266) — закон управления; (267) — алгоритм адаптации; $w(t)$, $n(t)$ — шумы; $\xi(t) = \{\xi_n(t), \xi_p(t), \xi_0(t)\}$ — вектор настраиваемых параметров; ξ_n , ξ_p , ξ_0 — настраиваемые параметры наблюдателя, регулятора, объекта; $\hat{x}(t)$ — оценка $x(t)$; $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$; G_x , G_u — ограничения, наложенные на траектории $x(t)$ и управление $u(t)$.

Из обобщенной структуры, представленной на рис. 20, получаются важные частные случаи.

Если в объекте допускается выделение настраиваемых параметров, с помощью которых компенсируются параметрические возмущения, то наблюдатель играет роль эталонной модели объекта, и нет нужды настраивать регулятор S_1 и модель.

Если в объекте не допускаются выделения настраиваемых параметров для компенсации его параметрических возмущений, то обеспечение $I \rightarrow \text{extr}$ достигается настройкой параметров регулятора и подстройкой параметров наблюдателя к объекту (система с учаемой эталонной моделью).

Надежностью адаптивной системы S будем называть ее свойство, состоящее в способности достигать цель управления в случайных средах, не выходящих из класса Ξ .

Из анализа экспериментальных данных формулируются существенные свойства системы S и класса сред Ξ , которые используются в математической модели надежности адаптивной системы.

Относительно проектируемой адаптивной системы известны: внутренняя структура уровней; алгоритм их взаимодействия; элементная база, включая λ -характеристики компонентов в номинальном режиме эксплуатации; коэффициенты экстремальных электрических, тепловых и механических нагрузок и, следовательно, поправочные коэффициенты для λ -характеристик; время выполнения оперативного задания.

На заключительном этапе проектирования предполагается известным протокол неоднородных испытаний с доработками аппаратуры. Предполагается следующее:

1) область катастрофических значений случайного процесса развития состояний системы принадлежит классу нечетких множеств;

2) время адаптации — непрерывная случайная величина с произвольным законом распределения;

3) установившиеся режимы (и, следовательно, финальные вероятности), за редким исключением, отсутствуют;

4) математическое ожидание времени существования переходного режима соизмеримо с математическим ожиданием времени адаптации.

В математической модели надежности адаптивной системы представлены: статистические свойства внутренней и внешней среды; способность к частичной компенсации параметрических и структурных нарушений; числовые характеристики случайного времени адаптации; многоконтурность.

Исследование модели приводит к эффективному прогнозированию (вычислению) вероятности достижения цели управления, а также экстремальных функционалов, чувствительных к наступлению «редких или желательных редких событий» [2], в частности: вероятности отказа за время выполнения оперативного задания; математического ожидания времени до первого некомпенсированного параметрического отказа.

Приведенные характеристики являются средними по ансамблю реализаций случайного процесса, относящегося к некоторому множеству изделий. Их необходимо дополнить достаточно точными текущими оценками фазового вектора индивидуального образца изделия в процессе его движения. Это достигается использованием в составе системы адаптивного наблюдателя (см., например, [5]).

Анализ возможностей компенсаторно-приспособительных механизмов. Такой анализ необходим при сопоставлении конкурентоспособных вариантов проектируемой системы. Он проводится с использованием известных методов теории автоматического регулирования (например, методов корневого годографа, частотных характеристик и др.), дополненных экспериментом с искусственной имитацией отказов. Необходимое и достаточное условие полной компенсации (параметрической инвариантности) получено для линейных систем, описываемых передаточной функцией вида

$$\Phi_{\text{ок}}(s) = \frac{K}{aH(s) + \xi G(s) + Q(s)}, \quad (268)$$

где a — параметр, изменяющийся при движении объекта; ξ — автоматически

настраиваемый параметр основного контура с целью компенсации вариации параметра a ; K — коэффициент усиления.

Изменения одного параметра парируются путем адаптивной настройки другого, если направления векторов $a = \text{const}$ и $\xi = \text{const}$ совпадают на плоскости s . На плоскости (a, ξ) эти векторы являются ортогональными. Необходимое и достаточное условие полной компенсации согласно исследованиям Е. Д. Добрынина и Г. Д. Курзенкова имеет вид

$$\text{Im } G(s) \text{ Re } H(s) - \text{Im } H(s) \text{ Re } G(s) = 0. \quad (269)$$

Выражения для корневых годографов замкнутой системы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} 1. \ a \text{ var: } & \text{Im} [Q(s) + \xi G(s)] \text{ Re } H(s) - \\ & - \text{Im } H(s) \text{ Re} [Q(s) + \xi G(s)] = 0; \\ 2. \ \xi \text{ var: } & \text{Im} [Q(s) + aH(s)] \text{ Re } G(s) - \\ & - \text{Im } G(s) \text{ Re} [Q(s) + aH(s)] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (270)$$

Совместное решение уравнений (269) и (270) дает координаты точек, в которых выполняется условие полной компенсации.

Необходимое и достаточное условие полной компенсации для систем с передаточной функцией произвольного вида пока не получено.

Физические адаптивные системы всегда нелинейные и нестационарные. Поэтому теоретический анализ приспособляемости, проведенный на раннем этапе проектирования по отношению к линейной модели системы, дает весьма ограниченное представление о действительных возможностях компенсаторно-приспособительных механизмов.

Различают следующие изменения параметров в непрерывных адаптивных системах:

α -вариации, не приводящие к изменению начальных условий и порядка уравнения движения системы;

β -вариации, приводящие к изменению начальных условий;

λ -вариации, приводящие к изменению порядка дифференциального уравнения движения системы. Накопленный к настоящему времени обширный экспериментальный материал свидетельствует о способности блока адаптации в двухуровневых адаптивных системах к компенсации α -, β - и, в ограниченной степени, также λ -вариаций вектора внутренних параметров основного контура (подсистемы S_1). При этом следует иметь в виду: 1) компенсируются неисправности преимущественно тех элементов, которые участвуют в формировании настраиваемого параметра; 2) для адаптации используется информация об отказах, содержащихся в вызванных ими возмущениях.

Полумарковская модель надежности. Структура входящего потока. Процесс функционирования двухуровневой адаптивной системы S представляют как развитие ее состояний на интервале $[0, T]$, где T — время выполнения задания. Состояние системы в каждый момент $t \in [0, T]$ характеризуется вектором $\vec{x}(t)$, который является n -мерным случайным процессом. Наблюдению доступен вектор $\vec{y}(t)$, связанный с $\vec{x}(t)$ соотношением (264).

Среди совокупности компонент $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ имеется $l < n$ определяющих параметров, пределы изменения которых ограничены по условиям безопасности. Выход выборочных функций соответствующего наблюдаемого процесса $\vec{y}_l(t)$ за пределы области Ω допустимых по условиям безопасности значений может быть отождествлен с аварийной ситуацией.

Пересечения границ области Ω с траекториями процесса $\vec{y}_l(t)$ определяют моменты времени, когда корректирующее воздействие контура адаптации на параметрические входы основного контура становится необходимым. Если выборочные функции процесса — монотонные неубывающие функции времени, то корректирующие воздействия необходимы для сохранения устойчивости и безопасности системы.

Необходимость в самонастройке возникает в связи с изменениями как

внешней, так и внутренней среды. Поэтому поток компенсируемых параметрических отказов — заявок на адаптацию — образуется в результате наложения потоков из нескольких источников, внутренних и внешних.

Принимаются допущения о гауссовском свойстве процесса $\vec{y}_l(t)$ и неоднородном по времени пуассоновском потоке компенсируемых параметрических отказов [1, 3, 4].

Если процесс одномерный и уровень $I(t)$ — дифференцируемая функция времени, то применяют формулу М. Р. Лидбеттера:

$$\begin{aligned} M[N_{y_l}(t); I(t); 0, T] &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\rho(0)}} \int_0^T f\left(\frac{I(t)}{\sqrt{\rho(0)}}\right) \times \\ &\times \left\{ 2\sqrt{-\rho''(0)} f\left(\frac{I'(t)}{\sqrt{-\rho''(0)}}\right) + \right. \\ &\left. + I'(t) \left[2\Phi\left(\frac{I'(t)}{\sqrt{-\rho''(0)}}\right) - 1 \right] \right\} dt, \end{aligned} \quad (271)$$

где $\rho(\tau)$ — дважды дифференцируемая нормированная корреляционная функция процесса $\vec{y}_l(t)$; $f(z)$ — плотность нормального распределения; $\Phi(z) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \text{ — функция}$$

Лапласа. При постоянном уровне значения $M[N_{y_l}(t)]$ определяют по формуле Е. В. Булинской, представляющей частный случай (271) при $I(t) = \text{const}$:

$$\begin{aligned} M[N_{y_l}(t); I(t); 0, T] &= \\ &= \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho''(0)}{\rho(0)}} \exp(-I^2/2\rho(0)). \end{aligned} \quad (272)$$

Полумарковская модель надежности. В системе S имеются в виду следующие потоки случайных событий: а) неоднородный по времени пуассоновский поток параметрических отказов

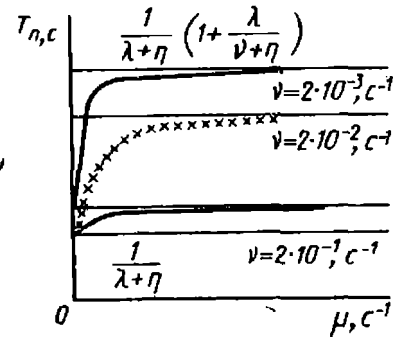
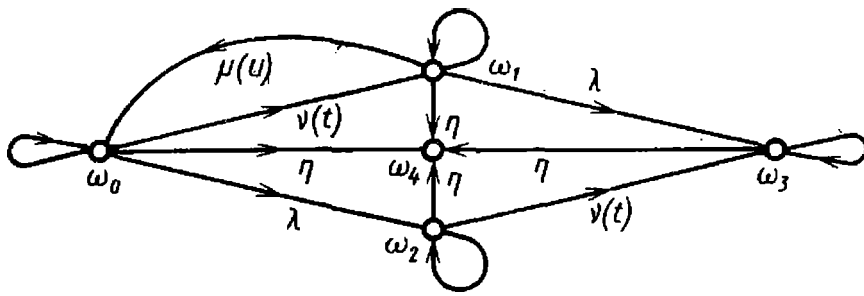


Рис. 21. Граф переходов двухуровневой адаптивной системы автоматического управления

Рис. 22. Зависимость математического ожидания времени до первого некомпенсированного постепенного (параметрического) отказа от скорости процесса адаптации

с мгновенной интенсивностью $\nu(t)$; б) однородный пуассоновский поток внезапных отказов в основном контуре с интенсивностью η ; в) однородный пуассоновский поток внезапных отказов в блоке адаптации с интенсивностью λ .

Случайность разрывных по величине или производным возмущающих воздействий и начальных условий порождает случайность переходных процессов в адаптивных системах.

Предполагается:

время адаптации — непрерывная случайная величина с произвольным законом распределения $F(u) = P\{t_{ад} < u\}$;

адаптация начинается в момент достижения траекторией случайного процесса $y_i(t)$ границы области Ω ;

процесс адаптации квазистационарный, т. е. очередь параметрических отказов (заявок на обслуживание) не образуется.

Случайный процесс развития состояний изучается с помощью фазового пространства, состоящего из множества изолированных точек и полупрямой ($0 \leq u < \infty$). При сделанных допущениях эволюция состояний системы S образует полумарковский случайный процесс.

Для снижения размерности задачи выделяют обобщенные состояния, образующие фактор-множество исходного множества состояний по эквивалентности функционала $I: \omega_i \sim \omega_j \Leftrightarrow I(\omega_i) = I(\omega_j)$. В результате рассматривают следующие обобщенные состояния:

$\omega_0(t)$; S исправна в момент t ;

$\omega_1(t, u)$: внезапных отказов нет, блок адаптации занят компенсацией параметрического отказа в течение времени u ;

$\omega_2(t)$: в момент t возник внезапный отказ блока адаптации, параметрических и внезапных отказов в ОК нет (в этом состоянии возможна ложная, не оправданная состоянием системы адаптация);

$\omega_3(t)$: параметрический отказ в ОК и внезапный отказ в блоке адаптации;

$\omega_4(t)$: попадание системы S в момент t в поглощающий экран.

Состояниям $\omega_j(t)$, $j = 0, 2, 4$ в фазовом пространстве соответствуют изолированные точки, состоянию $\omega_1(t, u)$ — полупрямая. Граф переходов системы S представлен на рис. 21. Развитие состояний системы S управляется следующей системой интегродифференциальных уравнений с переменным параметром $\nu(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_0(t) &= -(\nu(t) + \lambda + \eta) P_0(t) + \\ &+ \int_0^t p_1(t, u) \mu(u) du; \\ \frac{\partial p_1(t, u)}{\partial t} + \frac{\partial p_1(t, u)}{\partial u} &= \\ &= -(\mu(u) + \lambda + \eta) p_1(t, u); \\ \dot{P}_2(t) &= \lambda P_0(t) - (\nu(t) + \eta) P_2(t); \\ \dot{P}_3(t) &= \lambda \int_0^t p_1(t, u) du + \nu(t) \times \\ &\times P_2(t) - \eta P_3(t); \\ \dot{P}_4(t) &= \eta (1 - P_4(t)). \end{aligned} \right\} \quad (273)$$

Граничное условие $p_1(t, 0) = v(t) P_0(t)$.

Начальные условия: $P_0(0) = 1$, $P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0$.

Условие нормировки

$$\int_0^t p_1(t, u) du + \sum_{(i=0, i \neq 1)}^4 P_i(t) = 1.$$

Решение системы (273) в изображениях при $v(t) = \text{const}$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_0(s) &= \{s + \lambda + \eta + \\ &+ v[1 - \bar{g}(s + \lambda + \\ &+ \eta)]\}^{-1}; \\ \bar{P}_1(s) &= \bar{P}_0(s) \times \\ &\times \frac{v[1 - \bar{g}(s + \lambda + \eta)]}{s + \lambda + \eta}; \\ \bar{P}_2(s) &= \bar{P}_0(s) \times \\ &\times \frac{\lambda}{s + v + \eta}; \\ \bar{P}_3(s) &= \bar{P}_0(s) \frac{v\lambda}{s + \eta} \times \\ &\times \left\{ \frac{1 - \bar{g}(s + \lambda + \eta)}{s + \lambda + \eta} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{s + v + \eta} \right\}; \\ \bar{P}_4(s) &= \frac{\eta}{s(s + \eta)}, \end{aligned} \right\} (274)$$

где $\bar{g}(\cdot)$ — лапласово преобразование дифференциального закона распределения времени адаптации.

Для системы S , способной функционировать по крайней мере на отдельных участках траектории движения с неисправным, но отключенным (во избежание ложной самонастройки) блоком адаптации, множество благоприятных состояний — $\{\omega_i\}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Вероятность безотказной работы в изображениях $\bar{P}_S(s) = \sum_{i=0}^3 \bar{P}_i(s)$.

Математическое ожидание времени до первого внезапного отказа

$$\begin{aligned} T_0 &= \bar{P}_S(s) |_{s=0} = \{\lambda + \eta + \\ &= v(1 - \bar{g}(\lambda + \eta))\}^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \left\{ 1 - \frac{v}{\lambda + \eta} [1 - \bar{g}(\lambda + \eta)] + \right. \\ &+ \frac{\lambda}{v + \eta} + \frac{v\lambda}{\eta} \left[\frac{1 - \bar{g}(\lambda + \eta)}{\lambda + \eta} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{v + \eta} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Если функционирование блока адаптации необходимо на всей траектории движения объекта, то $\bar{P}_S(s) =$

$$= \sum_{i=0}^2 \bar{P}_i(s).$$

Математическое ожидание времени до первого некомпенсированного параметрического отказа

$$\begin{aligned} T_{\Pi} &= \sum_{i=0}^2 \bar{P}_i(s) |_{s=0} = \{\lambda + \eta + \\ &+ v[1 - \bar{g}(\lambda + \eta)]\}^{-1} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{v[1 - \bar{g}(\lambda + \eta)]}{\lambda + \eta} + \right. \\ &\left. + \frac{\lambda}{v + \eta} \right\}. \end{aligned}$$

При известном законе распределения случайного времени адаптации получаются показатели безотказности системы S в оригиналах. Важные для приложений частные случаи приведены ниже.

При экспоненциальном законе распределения случайного времени самонастройки

$$\begin{aligned} P_S(t) &= \exp(-(\lambda + \eta)t) + \\ &+ \frac{\lambda(\lambda + \mu - v)}{\lambda(\lambda + \mu - v) - v\mu} \exp(-(v + \\ &+ \eta)t) + \frac{\lambda\mu}{(v - \lambda)(v + \mu)} \exp \times \\ &\times (-\lambda t) - \frac{v\lambda}{(\mu + \lambda)(\mu + v)} \times \\ &\times \exp(-(v + \mu + \lambda + \eta)t). \end{aligned}$$

Этот показатель может быть отождествлен с вероятностью достижения цели управления, если v учитывает

также определяющие факторы внешней среды

$$T_{II} = \frac{1}{\lambda + \eta} + \frac{\lambda(\lambda + \mu - \nu)}{\{\lambda(\lambda + \mu - \nu) - \nu\mu\}(\nu + \eta)} + \frac{\lambda\mu}{(\nu - \lambda)(\nu + \mu)(\lambda + \eta)} - \frac{\nu\lambda}{(\mu + \lambda)(\mu + \nu)(\nu + \mu + \lambda + \eta)}.$$

График зависимости T_{II} от скорости процесса адаптации μ приведен на рис. 22.

Если деятельность блока адаптации необходима на всей траектории движения объекта, то среднее время до попадания адаптивной системы в поглощающий экран при равномерном законе распределения времени самонастройки

$$T_{II} = \left\{ \lambda + \eta + \nu \left[1 - \frac{\exp(-a(\lambda + \eta)) [1 - \exp(-(b-a)(\lambda + \eta))]}{(\lambda + \eta)(b-a)} \right] \right\}^{-1} \times \left\{ 1 + \frac{\nu}{\lambda + \eta} \left[1 - \frac{\exp(-a(\lambda + \eta)) [1 - \exp(-(b-a)(\lambda + \eta))]}{(\lambda + \eta)(b-a)} \right] + \frac{\lambda}{\nu + \eta} \right\}.$$

Учет частичной приспособляемости двухуровневой адаптивной системы S к внезапным отказам элементов основного контура (подсистемы S_1) приводит к изменению некоторых коэффициентов системы интегродифференциальных уравнений (273). Пусть $\tilde{\xi}$ — суммарная интенсивность таких от-

казов. Тогда система (273) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_0(t) &= -(\nu(t) + \lambda + \eta) P_0(t) + \\ &+ \int_0^t p_1^*(t, u) g(u) du; \\ \frac{\partial p_1^*(t, u)}{\partial t} + \frac{\partial p_1^*(t, u)}{\partial u} &= -(\lambda + (\eta - \tilde{\xi})) p_1^*(t, u); \\ \dot{P}_2(t) &= \lambda P_0(t) - (\nu(t) + \eta) P_2(t); \\ \dot{P}_3(t) &= \lambda \int_0^t p_1^*(t, u) [1 - F(u)] \times \\ &\times du + \nu(t) P_2(t) - \eta P_3(t); \\ \dot{P}_4(t) &= (\eta - \tilde{\xi}) \left\{ P_0(t) + \int_0^t p_1^* \times \right. \\ &\times (t, u) [1 - F(u)] du \left. \right\} + \\ &+ \eta (P_2(t) + P_3(t)), \end{aligned} \right\} \quad (275)$$

$$\text{где } p_1^*(t, u) = \frac{p_1(t, u)}{1 - F(u)}.$$

Изменится также граничное условие $p_1(t, 0) = (\nu(t) + \tilde{\xi}) P_0(t)$.

Алгебраическое суммирование интенсивностей отказов вытекает из того, что пуассоновский поток является самопроизводящим по отношению к операции суперпозиции.

Условием повышения вероятности достижения системой S цели управления при работе в режиме R_2 по сравнению с режимом R_1 является выполнение неравенства

$$\lambda < \nu(t) + \tilde{\xi}, \quad t \in [0, T]. \quad (276)$$

Выполнение неравенства (276) следует рассматривать как проектное требование, которое целесообразно включать в ТЗ на проектирование, если одним из конкурентоспособных вариантов может стать адаптивная система.

Пример 30. Проектируется двухуровневый адаптивный автомат угловой стабилизации летательного аппарата по каналу крена. Структурная схема автомата с эталонной моделью и кон-

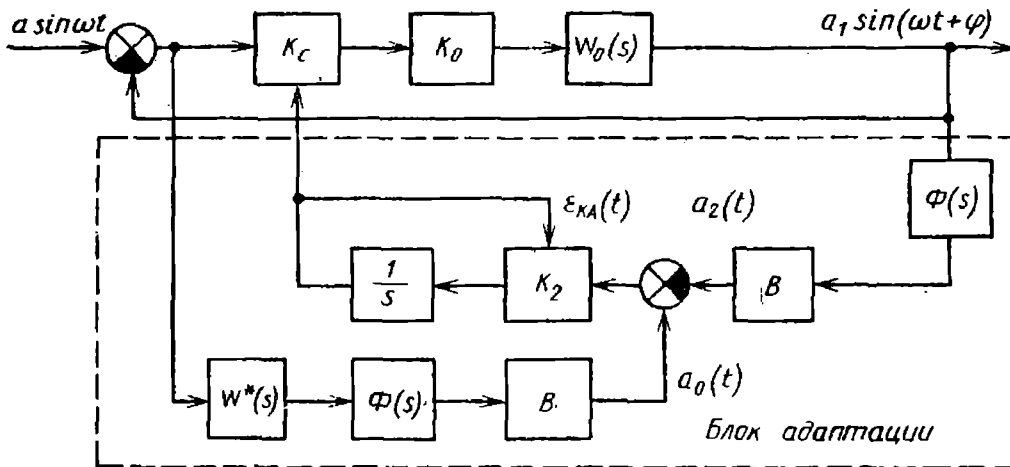


Рис. 23. Структурная схема бесперебойного двухконтурного адаптивного автомата стабилизации с эталонной моделью, контролем амплитудной частотной характеристики и параметрической обратной связью

тролем амплитудной частотной характеристики изображена на рис. 23. На вход основного контура от генератора пробных сигналов подаются гармонические колебания $a \sin \omega t$. На выходе основного контура (рассматривается его линейная модель) возбуждаются вынужденные колебания $a_1 \sin (\omega t + \varphi)$, которые подаются на вход блока адаптации (подсистемы S_2). Последний состоит из резонансного фильтра $\Phi (s)$, выпрямителя B , сравнивающего устройства, усилителя K_2 и интегрирующего звена с передаточной функцией $\frac{1}{s}$. Передаточная функция эталонной модели основного контура в разомкнутом состоянии $W^* (s)$. Частоты пробных сигналов выбирают таким образом, чтобы основные спектры управляющих сигналов и возмущений, а также тоны изгибных колебаний летательного аппарата лежали вне полосы пропускания резонансного фильтра $\Phi (s)$. С выхода $\Phi (s)$ вынужденные колебания подаются на вход выпрямителя B , выход которого $a_2 (t)$ сравнивается с желаемым выходным сигналом $a_0 (t)$, формируемым эталонной моделью. При достижении рассогласования $\varepsilon_{КА} (t) = a_0 (t) - a_2 (t)$ порога чувствительности блока адаптации интегрирующее устройство подсистемы S_2 осуществляет автоматическое изменение настраиваемого параметра K_c до тех пор, пока произведение $K_c K_0$ не станет равным постоянной величине (с точностью до

помех и допустимых приборных погрешностей).

Таким образом, стабилизация амплитуды вынужденных колебаний $a_2 (t)$ с помощью автоматического изменения K_c означает стабилизацию коэффициента усиления основного контура в разомкнутом состоянии. Тем самым обеспечивается поддержание на приемлемом уровне эффективности аэродинамических рулей $a_{\gamma, \delta} (t)$ при широком диапазоне вариаций внешней среды. (Автоматическая настройка K_c позволяет также компенсировать некоторые вариации постоянной времени объекта.)

Для уточнения пределов приспособляемости адаптивного автомата к параметрическим и структурным нарушениям и выявления опасных отказов используют:

- а) необходимое и достаточное условие параметрической компенсации (269);
- б) метод корневого годографа;
- в) специально поставленный эксперимент.

Опасные отказы выявляют путем моделирования неисправностей на физическом макете автомата, его аналоговой или цифровой модели, сопряженными с уравнениями объекта стабилизации. Внезапные отказы, воспроизводимые в ходе «электронных полетов», рассматриваются как детерминированные воздействия, имитируемые в конкретный момент выполнения задания. Для сокращения

9. Кусочно-линейная аппроксимация $v(t)$

№ участка	Время движения, с	Время корреляции, с	$v_i(t) = a_i \pm b_i t, \text{ с}^{-1}$
1	18	18	0,0087—0,0002
2	5,4	5,4	0,0055+0,0045
3	3,1	2,7	0,3907—0,1265
4	1,6	10	0,0621+0,0382
5	2,1	10	0,1232—0,0390
6	1,2	10	0,0412+0,2683
7	6,2	10	0,0261
8	3	10	0,0439
9	19,4	20	0,0194

объема испытаний до приемлемого минимума отказы воспроизводятся в наиболее характерные моменты времени.

Основные допущения:

Время выполнения задания разбивается на девять неперекрывающихся интервалов, в пределах каждого из которых законы допущения о стационарности и нормальности процесса $a_{\gamma, \delta}(t)$ и известно его нормированное корреляционное ядро $\rho(\tau) = \exp(-(\alpha\tau)^2)$.

Время адаптации — непрерывная случайная величина с экспоненциальным законом распределения.

Адаптация начинается в момент достижения выборочной функцией процесса $a_{\gamma, \delta}(t)$ границ трубки качества. (В действительности адаптация начинается несколько раньше, в латентный период, при достижении рассогласованием $\varepsilon_{КА}(t)$ порога чувствительности блока адаптации.) Обслуживание заявки на адаптацию завершается в момент входа траектории этого процесса в допустимые пределы.

Исходные данные:

время работы системы в полете $\tau_{пол} = 60$ с;
 вероятность достижения цели управления $P_{ТЗ} \geq 0,999$;
 суммарная интенсивность внезапных отказов подсистемы S_1 с учетом

электрических, тепловых и механических нагрузок в полете

$$\eta = 43 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1};$$

суммарная интенсивность внезапных отказов подсистемы S_2 с учетом отмеченных нагрузок

$$\lambda = 15 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}.$$

Кусочно-линейная аппроксимация мгновенной интенсивности компенсируемых параметрических отказов основного контура для каждого из девяти участков траектории полета сведена в табл. 9.

Плотность распределения случайного времени адаптации $\mu = 0,2 \text{ с}^{-1}$.

Выяснилось, что 20 % возможных отказов (преимущественно типа «обрыв») регулятора подсистемы S_1 компенсируется за счет деятельности блока адаптации S_2 .

Требуется:

а) выделить движения адаптивного автомата стабилизации, которые осуществляются с наибольшей вероятностью;

б) определить (вычислить) вероятность достижения адаптивным автоматом цели управления с учетом действия компенсаторно-приспособительных механизмов за время выполнения задания;

в) проверить выполнение неравенства (276);

г) оценить эффективность работы блока адаптации.

Решение.

В результате моделирования и обработки осциллограмм приспособления к компенсируемым внезапным и параметрическим отказам было установлено, что математическое ожидание времени адаптации весьма близко к среднему квадратическому отклонению. Была принята гипотеза об экспоненциальном законе распределения случайного времени самонастройки.

При сделанных предположениях относительно потоков случайных событий и закона распределения случай-

ного времени адаптации система интегродифференциальных уравнений | (273) превращается в матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(v_i(t) + \lambda + \eta) & \mu & 0 & 0 & 0 \\ v_i(t) & -(\mu + \lambda + \eta) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -(v_i(t) + \eta) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & v_i(t) & -\eta & 0 \\ \eta & \eta & \eta & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{bmatrix},$$

где i — номер участка траектории.

Из анализа решения этого уравнения на ЭВМ (рис. 24) можно заключить следующее.

1. При данном портрете внутренней и внешней среды (сочетании электрических, тепловых и механических воздействий на схему и конструкцию) изображающая точка с вероятностью, близкой к единице (0,999480), мигрирует из состояния $\omega_0(t)$ в состояние $\omega_1(t)$ и обратно, способствуя достижению цели управления.

Вероятности состояний при $\tau = 60$ с:

- $P_0(60) = 0,909238;$
- $P_1(60) = 0,090231;$
- $P_2(60) = 0,000034;$
- $P_3(60) = 0,000055;$
- $P_4(60) = 0,000470.$

Если деятельность блока адаптации необходима на всей траектории движения аппарата, то вероятность достижения цели управления равна

$$0,999614 > P_{та}.$$

Парирование отмеченной выше доли внезапных отказов подсистемы S_1 приводит к заметному снижению вероятности попадания автомата в поглощающий экран (см. кривую $\tilde{P}_4(t)$ на рис. 24). Вероятность гибели автомата S , несмотря на деятельность блока адаптации, монотонно возрастает, хотя и остается допустимо малой ($P(t = \tau_{пол}) \leq 3 \cdot 10^{-4}$) в пределах времени выполнения полетного задания.



Рис. 24. Графики переходных вероятностей адаптивного автомата стабилизации с эталонной моделью, контролем амплитудной частотной характеристики и параметрической обратной связью

2. Функционирование адаптивного автомата представляет собой причудливое чередование переходных процессов.

3. Выполнение неравенства (276) проверяем для конца третьего участка, где $v_i(t)|_{t=18c}$ минимальна:

$$15 \cdot 10^{-7} c^{-1} < 51 \cdot 10^{-4} + 0,2 \cdot 43 \cdot 10^{-7} c^{-1}.$$

Выполнение неравенства для других участков траектории гарантировано. Следовательно, гарантировано улучшение показателей безотказности S за счет S_2 .

Оценим эффективность деятельности блока адаптации (работу в режиме R_2). При отключенном блоке адаптации суммарная интенсивность потока внезапных и параметрических отказов

$$\zeta_1(t) = \eta + v(t)$$

и

$$P_{S_1}(\tau_{\text{пол}}) = \exp \left\{ - \left(\sum_{i=1}^9 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v_i(t) dt + \eta t \right) \right\} \approx 0,12.$$

Отсюда

$$P_S(\tau_{\text{пол}})/P_{S_1}(\tau_{\text{пол}}) = \\ = 0,999614/0,12 \approx 8.$$

Таким образом, можно сделать следующие выводы.

1. За счет компенсаторно-приспособительных механизмов обеспечивается почти 8-кратное увеличение вероятности достижения системой S цели управления по сравнению с соответствующим обыкновенным (неадаптивным) вариантом.

2. Достигнутый уровень надежности соответствует требованию технического задания

$$P_S(\tau_{\text{пол}}) > P_{S_{\text{тв}}}(\tau_{\text{пол}}) \geq 0,999.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бортовые терминальные системы управления. Проблемы построения и элементы теории/Б. Н. Петров, А. Я. Андриенко, В. П. Иванов, Ю. П. Портнов-Соколов. М.: Машиностроение, 1983. 200 с.
2. Коваленко И. Н. Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности сложных систем. М.: Сов. радио, 1980. 208 с.
3. Коваленко И. Н., Москатов Г. К., Барзилович Е. Ю. Полумарковские модели в задачах проектирования систем управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1973. 176 с.
4. Москатов Г. К. Надежность адаптивных систем. М.: Сов. радио, 1973. 101 с.
5. Москатов Г. К. Применение адаптивной нелинейной фильтрации в задачах навигации автономного глубоководного аппарата//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 3. С. 70—78.
6. Нечипоренко В. И. Структурный анализ систем. М.: Сов. радио, 1977. 214 с.
7. Рябинин И. А., Черкесов Г. Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. М.: Радио и связь, 1981. 264 с.
8. Рябинин И. А. Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем. 2-е изд. Л.: Судостроение, 1971. 456 с.
9. Рябинин И. А., Киреев Ю. Н. Надежность судовых электроэнергетических систем и судового электрооборудования. Л.: Судостроение, 1974. 264 с.
10. Седякин Н. М. Элементы теории случайных импульсных потоков. М.: Сов. радио, 1965. 261 с.

Глава 4. Расчет надежности систем с временной избыточностью

1. СИСТЕМЫ С ВРЕМЕННОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕРМИНОЛОГИЯ

Временное резервирование — совокупность правил применения изделия и способов повышения его надежности, основанных на увеличении номинальной производительности (пропускной способности), создании внутренних запасов производимой продукции, введении дополнительных устройств для увеличения суммарной производительности, совершенствовании алгоритмов функционирования и условий взаимодействия изделия со смежными объектами (изделиями), использовании функциональной инерционности систем, а также других способов, приводящих к возникновению у изделия или отдельных его устройств избыточного времени, которое может быть использовано для восстановления работоспособности, обнаружения и локализации отказов, реконфигурации технической структуры, повторения работ, информационного восстановления, подключения структурного резерва и пр. [2].

Надежность систем с временным резервированием (СВР) оценивается по результатам выполнения установленных временных ограничений ко всей траектории функционирования или по результатам выполнения некоторого задания. Задание содержит последовательность и объем работ, моменты начала и завершения этапов работ, ограничения на использование различных ресурсов, которыми располагает система, ограничения на взаимопомощь и взаимодействие различных

устройств. Поэтому задания могут быть одноэтапными, многоэтапными, бригадными, индивидуальными (автономными), групповыми, поступающими в начальный момент времени, по расписанию или по заявкам в случайные моменты времени. **Выполнение задания** — это событие, заключающееся в завершении заданного объема работ с установленными ограничениями на времена выполнения всех работ и отдельных этапов, и установленными требованиями к качеству и ритмичности работы СВР. Нарушение установленных требований и ограничений приводит к срыву выполнения задания и рассматривается как срыв функционирования.

Для СВР нарушение работоспособности не обязательно сопровождается отказом системы даже при последовательном соединении элементов, так как есть возможность восстановить работоспособность за резервное время. **Отказ СВР** — событие, заключающееся в нарушении работоспособности, имеющем недопустимые последствия или неустраненном за допустимое время. Иначе говоря, **отказ СВР** — событие, приводящее немедленно или с некоторой задержкой к срыву функционирования, срыву выполнения задания. Для установления признаков отказа СВР необходимо вести статистику потерь времени или проводить специальные измерения, например, запасов продукции в накопителе.

СВР может рассматриваться как совокупность исходного объекта и резервного времени (рис. 1). Схема использования резерва, показанная на рис. 1, аналогична схеме ненагруженного дублирования аппаратуры, так

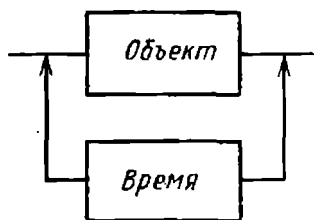


Рис. 1. Схема резервирования времени

как после отказа объекта начинает действовать резерв времени. Отказы объекта могут отличаться по последствиям. Если отказ вызывает лишь задержку выполнения задания, но не приводит к повторению работ, то его называют **необесценивающим** или **неразрушающим**. В противном случае его называют **обесценивающим** или **разрушающим**. **Обесценивание** может быть полное или частичное. В связи с наличием обесценивающих отказов всю наработку СВР можно разделить на полезную и обесцененную. **Полезной** является наработка, не обесцененная отказами объекта. **Обесцененная наработка** — наработка, не включенная в полезную.

Обобщение данных о практических методах создания временной избыточности позволяет выделить пять основных источников резервов времени.

Первым является запас производительности, который можно образовать увеличением быстродействия элементов, пропускной способности, мощности и т. д. Наличие запаса производительности позволяет при безотказной работе всех элементов выполнить установленный объем работ за время, меньшее выделенного оперативного времени системы. Разность между оперативным временем и минимальным временем выполнения задания, затрачиваемым при безотказной работе, есть резерв времени.

Вторым источником создания резерва времени является комплексирование устройств одинакового назначения, что также создает запас производительности и уменьшает минимальное время выполнения задания.

Резерв времени можно создать также за счет внутренних запасов производимой продукции, хранимых в специальных накопителях. Пока запас не исчерпан, продукция продолжает поступать

на выход системы в заданном объеме, несмотря на отказы отдельных элементов системы.

Четвертым источником является функциональная инерционность смежных систем. Физической основой функциональной инерционности является инерционность физико-химических процессов в системах, например, процессов нагрева, охлаждения, полимеризации, механических перемещений, химических преобразований и пр.

Наконец, резерв времени и возможности его использования зависят от способа загрузки системы заданиями. При непрерывной загрузке все заявки на выполнение работ и все необходимые условия для их выполнения имеются в системе к началу оперативного интервала времени. В таких случаях приостановка работы системы может происходить лишь из-за отказов элементов. В системах с переменной (по расписанию) или случайной загрузкой резерв времени образуется естественным образом благодаря паузам между периодами занятости, которые можно полезно использовать для повышения надежности.

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ВРЕМЕННОГО РЕЗЕРВИРОВАНИЯ И СИСТЕМ С РЕЗЕРВОМ ВРЕМЕНИ

На методы временного резервирования частично может быть распространена классификация методов структурного резервирования. Среди методов временного резервирования (ВР) можно выделить резервирование **общее**, **раздельное**, **групповое**, с **целой** и **дробной кратностью**. При общем ВР созданный резерв времени может быть использован любым элементом системы. При раздельном ВР каждое устройство или элемент обеспечивают собственным резервом времени, который не может быть использован другими элементами. При групповом ВР резерв времени предназначается для любого элемента, входящего в данную группу, и не может быть использован элементами вне группы. **Кратность ВР** — это отношение величины резерва времени к минимальному времени выполнения задания. Она может быть целым или дробным числом.

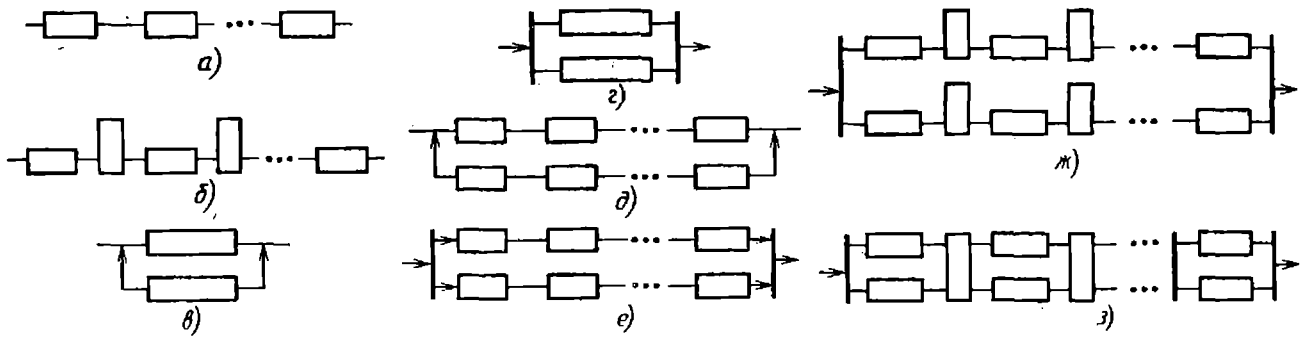


Рис. 2. Варианты структур СВР:

а — основное соединение; б — многофазное; в — резервное; г — многоканальное; д—з — последовательно-параллельное

По возможности увеличения резерва времени во время функционирования СВР различают **непополняемый** и **пополняемый резервы времени**. **Непополняемый резерв времени** устанавливается заранее, до начала работы, и не возрастает при выполнении задания. При работоспособном состоянии всех элементов системы текущее значение резерва не меняется, а при отказах может уменьшаться либо скачкообразно (при обесценивающих отказах), либо в линейной зависимости от времени при восстановлении работоспособности. **Пополняемый резерв времени** возрастает по некоторому закону при работоспособном состоянии системы, а также при восстановлении работоспособности некоторых отказавших элементов. Мгновенно пополняемый резерв восстанавливается до исходного уровня скачком сразу же после окончания ремонта. В одной и той же системе могут быть оба вида резерва времени. Тогда резерв времени называют **комбинированным** или **смешанным**. При раздельном или групповом ВР возможны дополнительные ограничения на способ пополнения и использования резерва времени. Тогда его называют **резервом времени со сложными ограничениями**.

По типу структуры различают системы с **последовательным, параллельным и последовательно-параллельным соединением**. Все соединения, не сводящиеся к одному из названных, приводят к системе с сетевой структурой. При последовательном соеди-

нении отказ системы поступает в момент времени

$$T_0 = \min_{i=1, n} \{T_i + \tau_i\}, \quad (1)$$

где T_i — время до отказа элемента с длительным восстановлением ($T_{vi} > \tau_i$); τ_i — групповой или индивидуальный резерв времени, которым располагает i -й элемент к моменту отказа; n — число элементов системы. Резерв времени создается благодаря запасам в промежуточных накопителях. Время τ_i определяется суммарными запасами во всех накопителях между входом системы и отказавшим элементом. В дальнейшем будем различать две разновидности последовательного соединения: **основное и многофазное**.

В основном соединении отсутствуют накопители и $\tau_i = 0$ (рис. 2, а). Поэтому $T_0 = \min T_i$. При многофазном

соединении в системе есть по крайней мере один накопитель (рис. 2, б). Число фаз на единицу превышает число накопителей.

При параллельном соединении отказ СВР наступает либо при уменьшении числа работоспособных элементов N ниже установленного порога n , либо при превышении установленного значения резерва времени t_p фактическим

суммарным расходом резерва времени:

$$T_0 = \inf \left\{ t: (N(t) < n) \vee \left(\sum_{i=1}^m \eta_i(t) > t_p \right) \right\}. \quad (2)$$

Параллельное соединение имеет две разновидности: резервное и многоканальное. При резервном соединении $t_p = 0$, $1 \leq n < m$, где m — общее число параллельно соединенных элементов, а n — минимально допустимое число работоспособных элементов. Избыточные элементы не включаются в работу, пока работоспособны основные элементы, и не создают запаса производительности (рис. 2, в). При многоканальном соединении все параллельно включенные элементы включены в полезную работу и создают запас производительности и резерв времени. При этом минимально допустимое число работоспособных элементов n может быть как равным нулю, так и больше нуля (рис. 2, г). Примеры системы с последовательно-параллельным соединением приведены на рис. 2, д—з. В системах с сетевой структурой о многофазном соединении можно говорить при рассмотрении любого пути между входом и выходом системы, а о многоканальном соединении — при рассмотрении любого сечения сети.

Для обозначения классов СВР используют мнемонику, аналогичную мнемонике Кендалла для систем массового обслуживания. Для обозначения предусмотрены четыре разряда $XXmn$, из них первые два — для указания типа распределения наработки и времени восстановления (M — экспоненциальное, E — эрланговское, W — Вейбулла — Гнеденко, ΣM — гиперэкспоненциальное, D — вырожденное, G — произвольное), а два других — для указания числа каналов в многоканальном соединении и числа фаз в многофазном соединении. С помощью принятых обозначений можно выделить четыре основных класса СВР: $GG11$ — одноканальные однофазные, $GGm1$ — многоканальные однофазные,

$GG1n$ — одноканальные многофазные, $GGmn$ — многоканальные многофазные системы.

ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ СВР

Основными случайными величинами, изучаемыми теорией надежности СВР, являются время до отказа $T_0(t_p)$ при неполняемом резерве времени t_p ; полезная наработка $T_{\Pi}(t_p)$ до окончания резерва времени t_p ; время выполнения задания $t_{вз}$ заданной t_3 или случайной длительности с распределением $T(t_3)$; суммарное непроизводительное время $T_{\text{нп}}(t_3)$ до выполнения задания; суммарная полезная наработка в заданном интервале времени $T_{\Sigma}(t)$. Время $T_{\text{нц}}$ состоит из суммарного времени восстановления работоспособности $T_{\text{в}}$ и обесцененной наработки. Для характеристики этих случайных величин используют следующие показатели.

Вероятность выполнения задания (вероятность безотказного функционирования)

$$P(t, \omega) = P(T_{\text{вз}}(\omega) < t) = P(T_0(\omega) > t), \quad (3)$$

где ω — векторный аргумент, характеризующий временную избыточность и выполняемое задание; t — оперативное время системы.

Если задание имеет постоянную длительность t_3 , то неполняемый резерв времени $t_p = t - t_3$, и тогда вместо (3) можно записать

$$P(t_3, t_p, \omega) = P(T_{\Pi}(t_p) \geq t_3) = P(T_{\text{нп}}(t_3) \leq t_p). \quad (4)$$

Поскольку аргументы t_3 , t_p и t связаны соотношением $t = t_3 + t_p$, то кроме функции (4) можно рассматривать еще две:

$$\begin{aligned} P^{(1)}(t_3, t, \omega) &= P(t_3, t - t_p, \omega); \\ P^{(2)}(t, t_p, \omega) &= P(t - t_p, t_p, \omega). \end{aligned} \quad (5)$$

От основного показателя образуется несколько производных.

Вероятность отказа СВР (вероятность невыполнения задания, вероятность срыва функционирования)

$$\begin{aligned} Q(t_3, t_p, \omega) &= \\ &= Q^{(1)}(t_3, t_3 + t_p, \omega) = \\ &= Q^{(2)}(t_3 + t_p, t_p, \omega) = \\ &= 1 - P(t_3, t_p, \omega). \end{aligned} \quad (6)$$

Интенсивность отказов

$$\Lambda(t_3, t_p, \omega) = -\frac{\partial}{\partial t_3} \ln P(t_3, t_p, \omega). \quad (7)$$

Средняя наработка до отказа СВР (до окончания резерва времени)

$$T_{ср}(t_p, \omega) = \int_0^{\infty} x dQ(x, t_p, \omega). \quad (8)$$

Среднее время выполнения задания

$$\begin{aligned} \bar{T}_{вз}(t_3, \omega) &= \\ &= \int_0^{\infty} (1 - P^{(1)}(t_3, t, \omega)) dt = \\ &= t_3 + \int_0^{\infty} Q(t_3, x) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Старшие начальные моменты наработки и времени выполнения задания:

$$\begin{aligned} MT^{(n)}(t_3, \omega) &= \\ &= \int_0^{\infty} x^n dQ(x, t_p, \omega), \\ MT_{вз}^{(n)}(t_3, \omega) &= \\ &= \int_0^{\infty} x^n dP^{(1)}(t_3, x, \omega). \end{aligned} \quad (10)$$

Для характеристики надежности СВР на стационарном участке эксплуатации используют комплексные показатели.

Коэффициент готовности за заданное время

$$\begin{aligned} K_{г}(t_p, \omega) &= K_{г} + \int_{e \in E_1} P(T_{в}(e) < \\ &< T_{в}^*(t_p, \omega, e)) dP(e), \end{aligned} \quad (11)$$

где $K_{г}$ — коэффициент готовности в отсутствие резерва времени; E_1 — множество неработоспособных состояний; $T_{в}(e)$ — время восстановления работоспособности при начальном состоянии системы e ; $T_{в}^*$ — допустимое время восстановления; $dP(e)$ — вероятность состояния e .

В частности, для одного элемента

$$\begin{aligned} K_{г}(t_p, \omega) &= K_{г} + (1 - K_{г}) \times \\ &\times P(T_{в} < T_{в}^*(t_p, \omega)). \end{aligned} \quad (12)$$

Коэффициент оперативной готовности за заданное время

$$\begin{aligned} K_{ог}(t_3, t_p, \omega) &= \\ &= \int_{e \in E} P_e(t_3, t_p, \omega) dP(e), \end{aligned} \quad (13)$$

где E — множество всех состояний; $P_e(t_3, t_p, \omega)$ — условная вероятность выполнения задания при начальном состоянии e . В отсутствие резерва времени $t_p = 0$, $\omega = \omega_0$, $t_3 = t$, $T_{в}^*(e) = 0$ для $e \in E_1$. И тогда $K_{г}(0, \omega_0) = K_{г}$, $K_{ог}(t, 0, \omega_0) = K_{г}P(t, \omega_0)$.

Вероятности (3)–(5) допускают и другую трактовку. Для этого вводим два новых случайных процесса:

$C_{м}(x) = \frac{dV(x)}{dx}$ — мгновенная фактическая производительность в момент x_t , равная объему работ, выполненных в единицу времени;

$C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t C_{м}(x) dx$ — интервальная

фактическая производительность (далее — фактическая производительность).

Если номинальная производительность постоянна и равна c_0 , то $C_{м}(t) = c_0$ в интервале безотказной работы и $C(t) = T_{н}(t) c_0 / t$ при наличии отказов, где $T_{н}(t)$ — суммарная наработка системы в интервале $(0, t)$, имеющая распределение (5):

$$\begin{aligned} Q^{(1)}(t_3, t, \omega) &= 1 - P^{(1)}(t_3, t, \omega) = \\ &= P(T_{н}(t) < t_3). \end{aligned} \quad (14)$$

Используя (4) и эквивалентность неравенств $\{T_H(t) \geq t_3\} \Leftrightarrow \{C(t) > c\}$, где $c = c_0 t_3 / t = c_0 K_t$, K_t — плановый коэффициент использования оперативного времени, составим вероятность поддержания фактической производительности в интервале $(0, t)$ на уровне не ниже заданного

$$P_c^{(1)}(c, t) = P^{(1)}\left(\frac{c}{c_0} t, t\right) = P(C(t) \geq c) \quad (15)$$

и вероятность поддержания фактической производительности при выполнении задания длительности t_3 на уровне не ниже заданного

$$P_c(t_3, c) = P(C(T_{вз}) \geq c) = P(t_3, t_3(c_0 - c)/c). \quad (16)$$

При постоянной номинальной производительности заданный объем работ $V = c_0 t_3$, а кратность временного резервирования $m_t = (c_0 - c)/c$. Поэтому можно ввести модификации показателей (4), (5) и (15):

$$\begin{aligned} P_V(V, t_p) &= P(V/c_0, t_p), \\ P_V^{(1)}(V, t) &= P^{(1)}(V/c_0, t); \\ P_{Vc}(V, c) &= P_c(V/c_0, c), \\ P_{m_t}(t_3, m_t) &= P(t_3, t_3 m_t). \end{aligned} \quad (17)$$

Если номинальная производительность не постоянна, а переменна или случайна, то показатели $(P_V(V, t_p), P_V^{(1)}(V, t)$ и $P_c(V, c)$ имеют самостоятельное значение.

На основе показателей (4)—(17) могут быть также вычислены:

средняя фактическая производительность в интервале $(0, t)$

$$\begin{aligned} C_{cp}(t) &= c_0 \bar{T}_H(t)/t = \\ &= \int_0^{c_0} c dQ^{(1)}(c, t), \end{aligned} \quad (18)$$

коэффициент использования системы в оперативном интервале времени

$$K_H(t) = \bar{T}_H(t)/t = C_{cp}(t)/c_0; \quad (19)$$

средняя фактическая производительность в интервале времени до выполнения задания объема V

$$C_{cp}(V) = V/\bar{T}_{вз}(V); \quad (20)$$

средняя наработка системы до первого снижения фактической производительности до уровня ниже c

$$\begin{aligned} T_{cp}(c) &= \int_0^{\infty} P_c(x, c) dx = \\ &= \int_0^{\infty} P_{m_t}(x, m_t) dx; \end{aligned} \quad (21)$$

коэффициент использования производительности (средняя относительная производительность).

$$K_{ип}(V) = \bar{C}_{cp}(V) = C_{cp}(V)/c_0. \quad (22)$$

Последний показатель является разновидностью коэффициента сохранения эффективности.

В системах, в которых непополняемый резерв времени создается с помощью запасов продукции объема v , при расчете показателей надо заменить t_p на v/c_0 . В частности, из (8) находят $\bar{T}_{cp}(v)$.

Для этих систем определяют также: коэффициент ритмичности

$$\begin{aligned} K_p(v) &= (T_{cp}(v) + v/c_0)/(T_{cp}(v) + \\ &+ v/c_0 + \bar{T}_B); \end{aligned} \quad (23)$$

коэффициент использования запасов

$$K_{из}(v) = \frac{v}{c_0} / \left(T_{cp}(v) + \frac{v}{c_0} \right); \quad (24)$$

коэффициент устойчивости фактической производительности

$$K_c(c) = T_{cp}(c)/(T_{cp}(c) + \bar{T}_B);$$

коэффициент полезного использования системы до окончания запасов

$$K_{пиз} = \frac{T_{cp}^n(t_p)}{T_{cp}(t_p) + t_p + \bar{T}_H + \bar{T}_B}, \quad (25)$$

где $T_{\text{ср}}^{\text{п}}(t_p)$ — средняя полезная наработка до окончания запасов; $T_{\text{ср}}(t_p)$ — средняя наработка до окончания запасов; $\bar{T}_{\text{п}}$ — средние суммарные потери рабочего времени в незагруженном состоянии; $\bar{T}_{\text{в}}$ — среднее время восстановления работоспособности.

2. ОДНОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОПОЛНЯЕМЫМ РЕЗЕРВОМ ВРЕМЕНИ ПРИ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАГРУЗКЕ И ИДЕАЛЬНОМ КОНТРОЛЕ РАБОТОСПОСОБНОСТИ

СИСТЕМА КАК ОДИН ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Представим систему в виде одного восстанавливаемого элемента, в котором предусмотрено использование пополняемого резерва времени. Пусть наработка системы между соседними отказами $t_{\text{н}}$ имеет такое же распределение $F(t)$, что и наработка t_0 до первого отказа. Время восстановления работоспособности $t_{\text{в}}$ является случайной величиной с функцией распределения $F_{\text{в}}(t)$, не зависящей от места возникновения отказа и предшествующей наработке. В процессе ремонта система полностью восстанавливает свои исходные свойства. Используемый в системе резерв времени представляет собой случайную величину $\tau_{\text{д}}$ с произвольной функцией распределения $D(t) = P\{\tau_{\text{д}} < t\}$. Будем предполагать, что функции распределения $F(t)$, $F_{\text{в}}(t)$ и $D(t)$ имеют непрерывные плотности распределений и конечные математические ожидания (МОЖ) соответственно $\bar{t}_{\text{н}}$, $\bar{t}_{\text{в}}$, $\bar{\tau}_{\text{д}}$. Система функционирует следующим образом: проработав случайное время $t_{\text{н}1}$, она отказывает и затем восстанавливается за случайное время $t_{\text{в}1}$; после окончания восстановления работоспособности она опять работает случайное время $t_{\text{н}2}$, затем снова восстанавливается в течение времени $t_{\text{в}2}$ и т. д. Согласно принятым предположениям величины $t_{\text{н}i}$ и $t_{\text{в}j}$ независимы, причем $P\{t_{\text{н}i} < t\} = F(t)$ и $P\{t_{\text{в}j} < t\} = F_{\text{в}}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots$. В момент каж-

дого отказа «включается» резерв времени. Если восстановление работоспособности заканчивается до момента израсходования резерва времени, то считается, что данный отказ не нарушает нормального функционирования системы. В противном случае (т. е. при $t_{\text{в}} > \tau_{\text{д}}$) в момент израсходования резерва времени возникает отказ (срыв функционирования) системы. Особенностью рассматриваемой системы является то, что короткие интервалы времени восстановления работоспособности $t_{\text{в}} < \tau_{\text{д}}$ относятся к полезному времени. Обозначим через $T_{\text{н}i}$ и $T_{\text{в}j}$ соответственно наработку между отказами и время восстановления работоспособности системы с пополняемым резервом времени и будем предполагать, что все отрезки времени $T_{\text{н}i}$ распределены одинаково по закону $Q(t, \tau_{\text{д}}) = P\{T_{\text{н}} < t\}$ со средним $\bar{T}_{\text{н}}(\tau_{\text{д}})$ и все периоды пребывания системы в неработоспособном состоянии тоже распределены одинаково по закону $F_{\text{в}}(t, \tau_{\text{д}}) = P\{T_{\text{в}} < t\}$ со средним $\bar{T}_{\text{в}}(\tau_{\text{д}})$.

Для проведения расчетов показателей надежности системы необходимо знать (или задать) вид законов распределения $F(t)$, $F_{\text{в}}(t)$ и $D(t)$.

Формулы для средней наработки на отказ $\bar{T}_{\text{н}}(\tau_{\text{д}})$, среднего времени восстановления $\bar{T}_{\text{в}}(\tau_{\text{д}})$ и коэффициента готовности $K_{\text{Г}}(\tau_{\text{д}})$ системы при произвольных законах распределения $F(t)$, $F_{\text{в}}(t)$ и $D(t)$ имеют вид:

$$\bar{T}_{\text{н}}(\tau_{\text{д}}) = \frac{1}{q} [\bar{t}_{\text{н}} + M \min(t_{\text{в}}, \tau_{\text{д}})], \quad (26)$$

$$\bar{T}_{\text{в}}(\tau_{\text{д}}) = \frac{1}{q} [\bar{t}_{\text{в}} - M \min(t_{\text{в}}, \tau_{\text{д}})], \quad (27)$$

$$K_{\text{Г}}(\tau_{\text{д}}) = k_{\text{Г}} + (1 - k_{\text{Г}})(1 - q), \quad (28)$$

где

$$q = P\{t_{\text{в}} > \tau_{\text{д}}\} = \int_0^{\infty} [1 - F_{\text{в}}(t)] dD(t),$$

$$M \min(t_{\text{в}}, \tau_{\text{д}}) = \int_0^{\infty} [1 - F_{\text{в}}(t)][1 - D(t)] dt,$$

$$k_{\text{Г}} = \bar{t}_{\text{н}} / (\bar{t}_{\text{н}} + \bar{t}_{\text{в}}), \quad M - \text{символ МОЖ.}$$

1. Расчетные формулы для q и $M \min(t_B, \tau_D)$

Закон распределения $F_B(t)$	q для случая		$M \min(t_B, \tau_D)$ для случая	
	1	2	1	2
Экспоненциальный (параметр μ)	$\frac{\gamma}{\gamma + \mu}$	$e^{-\mu t_D}$	$\frac{1}{\gamma + \mu}$	$\frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu t_D})$
Нормальный (параметры \bar{t}_B, σ_B)	$1 - \exp \times$ $\times (-\gamma \bar{t}_B + 0,5 \gamma^2 \sigma_B^2) \times$ $\times \left[0,5 + \right.$ $\left. + \Phi \left(\frac{\bar{t}_B - \gamma \sigma_B^2}{\sigma_B} \right) \right]$	$0,5 - \Phi \left(\frac{t_D - \bar{t}_B}{\sigma_B} \right)$ $\frac{0,5 + \Phi(\bar{t}_B / \sigma_B)}{t}$	$\frac{1}{\gamma} \left[1 - \exp \times \right.$ $\times (-\gamma \bar{t}_B + 0,5 \gamma^2 \sigma_B^2) \times$ $\times \left(0,5 + \right.$ $\left. + \Phi \left(\frac{\bar{t}_B - \gamma \sigma_B^2}{\sigma_B} \right) \right]$	$\bar{t}_B \left[0,5 + \Phi \left(\frac{t_D - \bar{t}_B}{\sigma_B} \right) \right] +$ $+ \frac{\sigma_B}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp \left(-\frac{\bar{t}_B^2}{2\sigma_B^2} \right) - \right.$ $\left. - \exp \left(-\frac{(t_D - \bar{t}_B)^2}{2\sigma_B^2} \right) \right] +$ $+ t_D \left[0,5 - \Phi \left(\frac{t_D - \bar{t}_B}{\sigma_B} \right) \right]$
Вырожденный ($\bar{t}_B = \text{const}$)	$1 - e^{-\gamma \bar{t}_B}$	$\begin{cases} 0 \text{ при } \bar{t}_B \leq t_D \\ 1 \text{ при } \bar{t}_B > t_D \end{cases}$	$\frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma \bar{t}_B})$	$\begin{cases} \bar{t}_B \text{ при } \bar{t}_B < t_D \\ t_D \text{ при } t_D < \bar{t}_B \end{cases}$

Закон распределения $F_B(t)$	q для случая		$M \min(t_B, \tau_D)$ для случая	
	1	2	1	2
Рэля (параметр σ_B)	$\sqrt{2\pi}\gamma\sigma_B e^{0,5(\gamma\sigma_B)^2} \times [0,5 - \Phi(\gamma\sigma_B)]$	$e^{-t_D^2/2\sigma_B^2}$	$\sqrt{2\pi}\sigma_B e^{0,5(\gamma\sigma_B)^2} \times [0,5 - \Phi(\gamma\sigma_B)]$	$\sqrt{2\pi}\sigma_B \Phi(t_D/\sigma_B)$
Эрланга 2-го порядка (параметр $\mu = 2/t_B$)	$\frac{\gamma(\gamma + 2\mu)}{(\gamma + \mu)^2}$	$(1 + \mu t_D) e^{-\mu t_D}$	$\frac{\gamma + 2\mu}{(\gamma + \mu)^2}$	$\frac{2}{\mu} (1 - e^{-\mu t_D}) - t_D e^{-\mu t_D}$
Эрланга k -го порядка (параметры $\mu = k/t_B, k$)	$\gamma \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\mu^i}{(\gamma + \mu)^{i+1}}$	$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu t_D)^i}{i!} e^{-\mu t_D}$	$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\mu^i}{(\gamma + \mu)^{i+1}}$	$\frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^{k-1} \left[1 - e^{-\mu t_D} \sum_{j=0}^i \frac{(\mu t_D)^j}{j!} \right]$

Точные выражения для вероятности безотказного функционирования $P(t, \tau_d)$ и коэффициента оперативной готовности $P_{ог}(t, \tau_d)$ для этих общих условий излишне громоздки и не приводятся. Расчетные формулы для величин q и $M_{мин}(t, \tau_d)$, входящих в общие выражения (26)–(28), приведены в табл. 1. Эти формулы получены для некоторых конкретных законов распределения времени восстановления $F_B(t)$ и двух частных случаев закона распределения пополняемого резерва времени $D(t)$: 1) экспоненциального с параметром γ и 2) вырожденного ($\tau_d = t_d = \text{const}$). В формулах через $\Phi(x)$ обозначена табулированная функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Вероятность безотказного функционирования $P(t, \tau_d)$ системы может быть рассчитана с помощью простой приближенной формулы:

$$P(t, \tau_d) \approx \exp\left(-\frac{qt}{\bar{t}_H}\right), \quad t \gg \bar{t}_d, \quad (29)$$

которая справедлива для распространенного на практике случая $\bar{t}_B \ll \bar{t}_H$ и произвольных распределений исходных случайных величин t_H , t_B и τ_d . Относительная погрешность этой формулы не превышает 10% при $t/\bar{t}_d \geq 10$; $\bar{t}_B/\bar{t}_H \leq 0,1$ и $q = P\{t_B > \tau_d\} \leq 0,1$ в широком диапазоне изменения интервала оперативного времени t .

При вырожденном распределении $D(t)$ ($\tau_d = t_d = \text{const}$) вместо (29) следует использовать выражение

$$P(t, t_d) \approx \begin{cases} 1, & t \leq t_d, \\ \exp\left[-\frac{q(t-t_d)}{\bar{t}_H}\right], & t \geq t_d, \end{cases} \quad (30)$$

где $q = 1 - F_B(t_d)$.

Приведем расчетные соотношения для вероятности безотказного функционирования системы при некоторых сочетаниях законов распределения $F(t)$, $F_B(t)$ и $D(t)$:

все законы экспоненциальные с параметрами соответственно λ , μ и γ

$$P(t, \tau_d) = \frac{1}{C} [B e^{-At} - A e^{-Bt}], \quad (31)$$

где $C = \sqrt{(\lambda + \mu + \gamma)^2 - 4\lambda\gamma}$;

$B = 0,5(\lambda + \mu + \gamma + C)$; $A = 0,5(\lambda + \mu + \gamma - C)$; $F(t)$, $F_B(t)$ — экспоненциальные (параметры λ и μ); $D(t)$ — вырожденный ($\tau_d = t_d = \text{const}$)

$$P(t, t_d) = 1 - \sum_{i=0}^{\lfloor t/t_d \rfloor - 1} \frac{k_r^i (1 - k_r)^{i+1}}{(i!)^2} \times \\ \times e^{-(i+1)\mu t_d} \left\{ -k_r \frac{(2i+1)!}{i+1} + \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (i+j)! [a - (i+1)b]^{i-j} \times \right. \\ \left. \times \left[(-1)^{i+j} \left(1 + k_r \frac{a - (i+1)b}{i+1-j} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(1 - k_r \frac{i+j+1}{i+1} \right) e^{-a+b(i+1)} \right] \right\}, \\ t \geq t_d \quad (32)$$

где $k_r = \mu/(\lambda + \mu)$; $a = (\lambda + \mu)t$; $b = (\lambda + \mu)t_d$.

Формулы (31), (32) являются точными.

Выражение для коэффициента оперативной готовности при произвольных распределениях $F(t)$ и $F_B(t)$ и вырожденном распределении $D(t)$ имеет вид

$$P_{ог}(t, t_d) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{q}{\bar{t}_H}(t-t_d)\right] \times \\ \times [k_r + (1-k_r)\tilde{F}_{B1}] + \\ + (1-k_r)\tilde{F}_{B2}, & t_d \leq t \leq 2t_d, \\ \exp\left[-\frac{q}{\bar{t}_H}(t-t_d)\right] \times \\ \times [k_r + (1-k_r)\tilde{F}_{B3}], & t \geq 2t_d, \end{cases} \quad (33)$$

где $q = 1 - F_B(t_D)$; $k_T = \bar{t}_H / (\bar{t}_H + \bar{t}_B)$;

$$\tilde{F}_{B1} = \frac{1}{\bar{t}_B} \int_0^{t-t_D} e^{q\theta/\bar{t}_H} [1 - F_B(\theta)] d\theta;$$

$$\tilde{F}_{B2} = \frac{1}{\bar{t}_B} \int_{t-t_D}^{t_D} [1 - F_B(\theta)] d\theta;$$

$$\tilde{F}_{B3} = \frac{1}{\bar{t}_B} \int_0^{t_D} e^{q\theta/\bar{t}_H} [1 - F_B(\theta)] d\theta.$$

В частном случае при экспоненциальных распределениях $F(t)$ и $F_B(t)$ (параметры λ и μ) из (33) получаем

$$P_{ог}(t, t_D) = \begin{cases} \frac{\mu(\lambda + \mu - \lambda q)}{(\lambda + \mu)(\mu - \lambda q)} \exp[-\lambda(t - t_D)q] - \frac{\lambda^2 \exp(-\mu t)}{(\lambda + \mu)(\mu - \lambda q)} - \frac{\lambda q}{\lambda + \mu}, & t_D < t \leq 2t_D, \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} \exp[-\lambda(t - t_D)q] \times \left[1 + \frac{\lambda}{\mu - \lambda q} \times (1 - \exp(-(\mu - \lambda q)t_D)) \right], & t \geq 2t_D, \end{cases} \quad (34)$$

где $q = \exp(-\mu t_D)$.

Формулы (33) и (34) являются приближенными. Их относительная погрешность не превышает 10% при $q \leq 0,1, \bar{t}_B/\bar{t}_H \leq 0,01$ и $t_D < t \leq 4\bar{t}_H/q$, что вполне приемлемо для практических расчетов.

Пример 1. Автоматизированная система управления, включающая в себя устройства первичной и вторичной обработки информации и аппаратуру передачи данных, осуществляет обработку информации, поступающей от ряда источников, и ее передачу потребителям в реальном масштабе

времени. Интенсивности отказов λ и ремонта μ аппаратуры АСУ равны соответственно 0,04 1/ч и 5 1/ч. По условиям функционирования перерыв в передаче информации на время более 0,1 ч рассматривается как срыв функционирования системы. При простоях АСУ в течение времени, не превышающего допустимое, поступающая от источников информация теряется, а после восстановления система начинает передавать новую информацию. Требуется определить показатели надежности системы.

Решение. В соответствии с исходными данными АСУ выполнит задание, если в течение 8 ч не будет ни одного перерыва в работе, превышающего 0,1 ч. Поскольку $\bar{t}_B/\bar{t}_H = \lambda/\mu = 0,04/5 = 0,008$, то для расчета вероятности безотказного функционирования можно воспользоваться приближенной формулой (30):

$$P(t, t_D) = \exp[-0,04 \cdot 7,9 \exp(-5 \cdot 0,1)] = 0,8255.$$

Для сравнения определим вероятность безотказной работы аппаратуры АСУ без учета пополняемого резерва времени: $P(t) = \exp(-0,04 \cdot 8) = 0,7261$. Выигрыш в надежности по вероятности срыва функционирования от введения резерва времени составляет $0,2739/0,1745 = 1,57$. Используя формулы (26), (28), (34), находим значения остальных показателей надежности:

$$\begin{aligned} \bar{T}_H(t_D) &= \exp(5 \cdot 0,1) [25 + 0,2(1 - \exp(-5 \cdot 0,1))] = 41,3 \text{ ч;} \\ K_T(t_D) &= 25/(25 + 0,2) + [0,2/(25 + 0,2)] \times (1 - \exp(-5 \cdot 0,1)) = 0,9951; \\ P_{ог}(t, t_D) &= 0,8179 \cdot 1,0032 = 0,8205. \end{aligned}$$

СИСТЕМА С НАГРУЖЕННЫМ, ОБЛЕГЧЕННЫМ ИЛИ НЕНАГРУЖЕННЫМ СТРУКТУРНЫМ РЕЗЕРВОМ

Рассмотрим систему, состоящую из n основных ($n \geq 1$) и m резервных ($m \geq 1$) идентичных восстанавлива-

емых элементов (резервирование скользящее). Функционирование системы происходит следующим образом. Через некоторое случайное время после включения системы возникает отказ одного из основных или резервных (при $\alpha > 0$) элементов. При отказе резервного элемента сразу же начинается его ремонт, после окончания которого он возвращается в резерв. Если первым отказал один из основных элементов, то в момент отказа начинается подключение одного из резервных элементов. Считаем, что во время подключения система не изменяет своего состояния. В момент окончания подключения ремонтная бригада приступает к восстановлению отказавшего элемента. Если во время ремонта возникает новый отказ, то в момент отказа начинается второе подключение (при отказе одного из основных элементов) или второе восстановление (если отказал резервный элемент и имеется свободная ремонтная бригада; при отсутствии бригад отказавший элемент не восстанавливается, а ожидает в очереди освобождения одной из бригад), и т. д. После окончания восстановления элемент возвращается в резерв.

Сформулируем исходные предпосылки и допущения:

наработка между отказами одного основного элемента распределена по экспоненциальному закону с параметром λ и не зависит от номера элемента;

фактическая интенсивность отказов отдельного резервного элемента λ_{Φ} зависит от степени нагрузки, т. е. $\lambda_{\Phi} = \alpha\lambda$, где α — коэффициент нагрузки ($0 \leq \alpha \leq 1$). При полной нагрузке $\alpha = 1$, при неполной нагрузке (облегченный режим) $0 < \alpha < 1$, при отсутствии нагрузки (ненагруженный режим) $\alpha = 0$;

время восстановления одного элемента $t_{\text{в}}$ распределено по экспоненциальному закону с параметром μ ;

ремонтный орган состоит из l ($l \geq 1$) бригад, работающих независимо, ремонт отдельного элемента производится одной бригадой, при этом исходные свойства элемента восстанавливаются полностью;

время подключения резервного элемента — случайная величина $t_{\text{п}}$ с произвольной функцией распределения $F_{\text{п}}(t)$ и конечным МОЖ $t_{\text{п}}$, причем переключатель считается абсолютно надежным;

резерв времени — неслучайная постоянная величина $t_{\text{д}}$;

при отказе $(m+1)$ -го элемента объект выключается и новые отказы не возникают, система возобновляет свою работу при окончании ремонта одного из $m+1$ неработоспособных элементов;

предполагается, что

$$t_{\text{п}} \ll M \min_{1 \leq i \leq l} t_{\text{в}i}; \quad t_{\text{п}} \ll \frac{1}{n\lambda};$$

$$t_{\text{д}} \ll M \min_{1 \leq i \leq l} t_{\text{в}i}; \quad t_{\text{д}} \ll \frac{1}{n\lambda};$$

$$1 \leq l \leq m+1;$$

система отказывает в двух случаях: в момент, когда время подключения превышает допустимое значение $t_{\text{д}}$, и в момент отказа $(m+1)$ -го элемента.

Для проведения расчетов показателей надежности системы необходимо задать количество основных ($n \geq 1$) и резервных ($m \geq 1$) элементов, степень нагруженности структурного резерва ($0 \leq \alpha \leq 1$); интенсивности отказа (λ) и восстановления (μ) одного элемента; число ремонтных бригад ($1 \leq l \leq m+1$); величину резерва времени ($t_{\text{д}}$) и вид закона распределения времени подключения $F_{\text{п}}(t)$.

В табл. 2 приведены общие расчетные соотношения для показателей надежности системы $\bar{T}_{\text{н}}(t_{\text{д}})$, $\bar{T}_{\text{в}}(t_{\text{д}})$ и $K_{\Gamma}(t_{\text{д}})$, учитывающие различные режимы нагрузки резервных элементов ($0 \leq \alpha \leq 1$) и произвольное число ремонтных бригад ($1 \leq l \leq m+1$). Расчетные формулы для частных случаев одного ($m=1$) и двух ($m=2$) резервных элементов представлены в табл. 3. В формулах табл. 2, 3 приняты следующие обозначения: $\rho = \lambda/\mu$; $\bar{T}_0(t_{\text{д}})$ — средняя наработка системы до отказа; q — вероятность того, что при подключении резервного элемента взамен отказавшего основного произойдет срыв функционирования системы, т. е. $q = P\{t_{\text{п}} > t_{\text{д}}\} =$

$= 1 - F_{\Pi}(t_{\Pi})$; L — математическое ожидание превышения времени подключения t_{Π} над резервом времени t_{Π} при условии $t_{\Pi} > t_{\Pi}$, т. е.

$$L = \frac{\bar{t}_{\Pi} - M \min(t_{\Pi}, t_{\Pi})}{1 - F_{\Pi}(t_{\Pi})} = \frac{\bar{t}_{\Pi} - \int_0^{t_{\Pi}} [1 - F_{\Pi}(t)] dt}{1 - F_{\Pi}(t_{\Pi})}; \quad (35)$$

δ_+ — абсолютная погрешность приближенной формулы, дающей заниженное по сравнению с истинным значение.

При проведении расчетов значения q и L целесообразно определять с помощью формул табл. 1 (случай 2), только в них следует заменить $F_{\text{в}}(t)$ на $F_{\Pi}(t)$, а $\bar{t}_{\text{в}}$ и $\sigma_{\text{в}}$ на \bar{t}_{Π} и σ_{Π} . Операции суммирования и произведения, предусмотренные в формулах табл. 2, необходимо выполнять с учетом соотношений

$$\prod_{i=k}^j x_i = 1, \quad \sum_{i=k}^j x_i = 0 \quad \text{при } j < k.$$

Для случая, когда подключение резервных элементов происходит практически мгновенно ($\bar{t}_{\Pi} \rightarrow 0$ и $t_{\Pi} \rightarrow 0$), все указанные расчетные соотношения приводятся к формулам, известным в теории структурного резервирования.

В общем случае точные выражения для вероятности безотказного функционирования $P(t, t_{\Pi})$ крайне громоздки. Вместо них целесообразно использовать приближенные (асимптотические) формулы, которые приведены в следующем параграфе. В частном случае одного резервного элемента ($m = 1$) точная формула для $P(t, t_{\Pi})$ имеет вид

$$P(t, t_{\Pi}) = \frac{1}{S_1 - S_2} \times [(S_1 + n\lambda q) e^{S_2 t} - (S_2 + n\lambda q) e^{S_1 t}],$$

где $S_{1,2} = \frac{0,5\lambda}{\rho} [-(1 + (2n + \alpha)\rho) \pm \sqrt{1 + 2\rho(2n(1 - q) + \alpha) + \alpha^2 \rho^2}]$,
 $\rho = \lambda/\mu$.

Пример 2. Рассмотрим систему передачи данных (СПД), с помощью которой осуществляется обмен информацией между территориально рассредоточенными объектами (ЦВМ). Одной из ее важных подсистем являются переключаемые каналы передачи данных. Пусть эта подсистема включает в себя два основных ($n = 2$) и два резервных ($m = 2$) идентичных канала (резерв нагруженный) с интенсивностями отказов и восстановления каждого из них $\lambda = 0,02$ 1/ч и $\mu = 2$ 1/ч, причем обслуживание производится одной ремонтной бригадой ($l = 1$). В подсистеме предусмотрено два способа подключения резервных каналов: автоматический (основной) и полуавтоматический (запасной). Время подключения — нормально распределенная случайная величина с параметрами $\bar{t}_{\Pi 1} = 1$ с; $\sigma_{\Pi 1} = 0,25$ с; $\bar{t}_{\Pi 2} = 5$ с; $\sigma_{\Pi 2} = 3$ с соответственно при первом и втором способах подключения. Будем считать, что переключатель обладает идеальной надежностью. По условиям функционирования перерыв в передаче информации при подключении резервного канала на время, превышающее допустимое $t_{\Pi} = 2$ с, приводит к срыву функционирования системы. Требуется оценить показатели надежности подсистемы при указанных выше способах подключения резерва.

Решение. По формуле табл. 1 (случай 2) для нормального закона распределения $F_{\Pi}(t)$ определяем при автоматическом подключении

$$q_1 = \{0,5 - \Phi[(2 - 1)/0,25]\} / [0,5 + \Phi(1/0,25)] = 3,2 \cdot 10^{-5},$$

а при полуавтоматическом

$$q_2 = \{0,5 - \Phi[(2 - 5)/3]\} / [0,5 + \Phi(5/3)] = 0,885.$$

Для заданных значений λ и μ определяем $\rho = \lambda/\mu = 0,01$. Используя далее формулы табл. 3 при $n = 2$ и $\alpha = 1$, находим: $\bar{T}_0^{(1)}(t_{\Pi}) = 21\,475$ ч; $\bar{T}_{\text{н}}^{(1)}(t_{\Pi}) = 21\,092$ ч; $\bar{T}_{\text{в}}^{(1)}(t_{\Pi}) = 0,486$ ч; $K_{\Pi}^{(1)}(t_{\Pi}) = 1 - K_{\Gamma}^{(1)}(t_{\Pi}) = 2,3 \cdot 10^{-5}$ при первом способе и $T_0^{(2)}(t_{\Pi}) = 28,1$ ч; $\bar{T}_{\text{н}}^{(2)}(t_{\Pi}) = 27,8$ ч;

2. Расчетные формулы (общие случаи) для показателей надежности системы

Показатель	Точная формула	Приближенная формула	Погрешность
$n \geq 1$ основных и $m \geq 1$ резервных элементов; $0 < \alpha \leq 1$; ограниченное восстановление ($l = 1$)			
$\bar{T}_H(t_D)$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{A + \rho^m B}{qA + \rho^m B}$	$\frac{1}{n\lambda (n + \alpha m) (qA + \rho^m B)}$	$\delta_+ \sim \frac{1}{n\lambda} \frac{\rho}{qA + \rho^m B}$
$\bar{T}_B(t_D)$	$\frac{LqA + \rho^m B/\mu}{qA + \rho^m B}$	—	—
$K_T(t_D)$	$\frac{A + \rho^m B}{A(1 + n\lambda Lq) + \rho^m B(1 + n\rho)}$	$1 - n(n + \alpha m) \times$ $\times (\lambda LqA + \rho^{m+1}B)$	$\delta_+ \sim n(n + \alpha m)^2 \times$ $\times \rho(\lambda LqA + \rho^{m+1}B)$
Примечание. $A = \frac{1}{n + \alpha m} \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j \prod_{i=0}^{j-1} [n + \alpha(m - i)]$; $B = \prod_{i=1}^{m-1} [n + \alpha(m - i)]$			
$n \geq 1$ основных и $m \geq 1$ резервных элементов, $0 < \alpha \leq 1$; произвольное восстановление ($1 \leq l \leq m + 1$)			
$\bar{T}_H(t_D)$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{A + \rho^m B}{qA + \rho^m B}$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{l! l^{m-l}}{(n + \alpha m) (qA + \rho^m B)}$	$\delta_+ \sim \frac{l! l^{m-l}}{n\lambda} \frac{\rho}{qA + \rho^m B}$
$\bar{T}_B(t_D)$	$\frac{LqA + \frac{\rho^m B}{l\mu}}{qA + \rho^m B}$	—	—
$K_T(t_D)$	$\frac{A + \rho^m B}{A(1 + n\lambda Lq) + \rho^m B(1 + n\rho/l)}$	$1 - \frac{n(n + \alpha m)}{l! l^{m-l}} \times$ $\times (\lambda LqA + \rho^{m+1}B/l)$	$\delta_+ \sim \frac{n(n + \alpha m)^2 \rho}{l! l^{m-l}} \times$ $\times (\lambda LqA + \rho^{m+1}B/l)$

Примечание. $A = \frac{l! l^{m-l}}{n + \alpha m} \sum_{j=0}^{\min(l, m-1)} \frac{\rho^j}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} [n + \alpha(m-i)] + \frac{l^{m-l}}{n + \alpha m} \sum_{j=\min(l, m-1)+1}^{m-1} \frac{\rho^j}{j^{l-l}} \prod_{i=0}^{j-1} [n + \alpha \times$
 $\times (m-i)]; B = \prod_{i=1}^{m-1} [n + \alpha(m-i)]$

$n \geq 1$ основных и $m \geq 1$ резервных элементов; $0 < \alpha \leq 1$; неограниченное восстановление ($l = m + 1$)

$\bar{T}_H(t_D)$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{A + \rho^m B}{qA + \rho^m B}$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{m!}{(n + \alpha m)(qA + \rho^m B)}$	$\delta_+ \sim \frac{m!}{n\lambda} \frac{\rho}{q + \rho^m B}$
$\bar{T}_B(t_D)$	$\frac{LqA + \rho^m B / (m + 1) \mu}{qA + \rho^m B}$	—	—
$K_T(t_D)$	$\frac{\frac{m!}{n + \alpha m} \sum_{j=0}^m \frac{\rho^j}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} [n + \alpha(m-i)]}{A(1 + n\lambda Lq) + \rho^m B [1 + n\rho / (m + 1)]}$	$1 - \frac{n(n + \alpha m)}{m!} \times$ $\times \left(\lambda LqA + \frac{\rho^m B}{m + 1} \right)$	$\delta_+ \sim \frac{n(n + \alpha m)^2 \rho}{m!} \times$ $\times \left(\lambda LqA + \frac{\rho^{m+1} B}{m + 1} \right)$

Примечание. $A = \frac{m!}{n + \alpha m} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\rho^j}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} [n + \alpha(m-i)]; B = \prod_{i=1}^{m-1} [n + \alpha(m-i)]$

Показатель	Точная формула	Приближенная формула	Погрешность
$n \geq 1$ основных и $m \geq 1$ резервных элементов; $\alpha = 0$; ограниченное восстановление ($l = 1$)			
$\bar{T}_H(t_D)$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{1 - (nr)^{m+1}}{q [1 - (nr)^m] + (nr)^m (1 - nr)}$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{1}{q [1 + nr + (nr)^2] + (nr)^m}$	$\delta_+ \sim \frac{1}{n\lambda} \times \frac{nr}{q [1 + nr + (nr)^2] + (nr)^m}$
$\bar{T}_B(t_D)$	$\frac{Lq [1 - (nr)^m] + (nr)^m (1 - nr)/\mu}{q [1 - (nr)^m] + (nr)^m (1 - nr)}$	—	—
$K_T(t_D)$	$\frac{1 - (nr)^{m+1}}{1 - (nr)^{m+2} + n\lambda Lq [1 - (nr)^m]}$	$1 - n\lambda Lq [1 - (nr)^m] - (nr)^{m+1}$	$\delta_+ \sim \frac{n^2 \rho \lambda Lq [1 - (nr)^m] - (nr)^{m+2}}{(nr)^{m+2}}$
$n \geq 1$ основных и $m \geq 1$ резервных элементов; $\alpha = 0$; произвольное восстановление ($1 \leq l \leq m + 1$)			
$\bar{T}_H(t_D)$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{A + (nr)^m}{qA + (nr)^m}$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{l l^{m-l}}{qA + (nr)^m}$	$\delta_+ \sim \frac{l l^{m-l}}{n\lambda} \frac{nr}{qA + (nr)^m}$
$\bar{T}_B(t_D)$	$\frac{LqA + (nr)^m/l\mu}{qA + (nr)^m}$	—	—

$K_{\Gamma}(t_{\text{Д}})$	$\frac{A + (n\rho)^m}{A(1 + n\lambda Lq) + (n\rho)^m(1 + n\rho/l)}$	$1 - \frac{n\lambda}{l! l^{m-l}} (LqA + (n\rho)^m/l\mu)$	$\delta_+ \sim \frac{n^2\lambda\rho}{l! l^{m-l}} \times (LqA + (n\rho)^m/l\mu)$
----------------------------	---	--	---

Примечание. $A = l! l^{m-l} \sum_{j=0}^{\min(l, m-1)} \frac{(n\rho)^j}{j!} + l^{m-l} \sum_{j=\min(l, m-1)+1}^{m-1} \frac{(n\rho)^j}{l^{j-l}}$

$n \geq 1$ основных и $m \geq 1$ резервных элементов; $\alpha = 0$; неограниченное восстановление ($l = m + 1$)

$\bar{T}_{\text{H}}(t_{\text{Д}})$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{m! \sum_{j=0}^m (n\rho)^j/j!}{qA + (n\rho)^m}$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{m!}{qA + (n\rho)^m}$	$\delta_+ \sim \frac{m!}{n\lambda} \frac{n\rho}{qA + (n\rho)^m}$
$\bar{T}_{\text{В}}(t_{\text{Д}})$	$\frac{LqA + \frac{(n\rho)^m}{(m+1)\mu}}{qA + (n\rho)^m}$	—	—
$K_{\Gamma}(t_{\text{Д}})$	$\frac{m! \sum_{j=0}^m (n\rho)^j/j!}{A(1 + n\lambda Lq) + (n\rho)^m \left(1 + \frac{n\rho}{m+1}\right)}$	$1 - \frac{n\lambda}{m!} \left[LqA + \frac{(n\rho)^m}{(m+1)\mu} \right]$	$\delta_+ \sim \frac{n^2\rho\lambda}{m!} \times \left[LqA + \frac{(n\rho)^m}{(m+1)\mu} \right]$

Примечание. $A = m! \sum_{j=0}^{m-1} (n\rho)^j/j!$

3. Расчетные формулы для частных случаев одного и двух резервных элементов

Показатель	Точная формула	Приближенная формула	Погрешность
$n \geq 1$ основных и один резервный элемент; $0 \leq \alpha \leq 1$; одна ($l = 1$) или две ($l = 2$) ремонтные бригады			
$\bar{T}_0(t_D)$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{1 + (2n + \alpha) \rho - n\rho q}{q + \rho(n + \alpha)}$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{1}{q + \rho(n + \alpha)}$	$\delta_+ = \frac{1}{n\lambda} \frac{\rho[\alpha + n(2 - q)]}{q + \rho(n + \alpha)}$
$\bar{T}_H(t_D)$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{1 + \rho(n + \alpha)}{q + \rho(n + \alpha)}$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{1}{q + \rho(n + \alpha)}$	$\delta_+ = \frac{1}{n\lambda} \frac{\rho(n + \alpha)}{q + \rho(n + \alpha)}$
$\bar{T}_B(t_D)$	$\frac{Lq + \frac{\rho}{l\mu}(n + \alpha)}{q + \rho(n + \alpha)}$	—	—
$K_T(t_D)$	$\frac{1 + \rho(n + \alpha)}{1 + n\lambda Lq + \rho(n + \alpha)(1 + n\rho/l)}$	$1 - n\lambda Lq - \frac{n(n + \alpha)\rho^2}{l}$	$\delta_+ \sim n(n + \alpha)^2 \times$ $\times \rho \left(\frac{\lambda Lq}{n + \alpha} + \frac{\rho^2}{l} \right)$
$n \geq 1$ основных и два резервных элемента $0 \leq \alpha \leq 1$; ограниченное восстановление ($l = 1$)			
$\bar{T}_0(t_D)$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{\alpha + [\alpha + n(1 - q)][2\alpha + n(1 - q)]\rho^2}{q[1 + 2\rho(n + \alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{1}{q[1 + 2\rho(n + \alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$	$\delta_+ \sim \frac{1}{n\lambda} \frac{2\rho(n + \alpha)}{q[1 + 2\rho(n + \alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$
$\bar{T}_H(t_D)$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{1 + \rho(n + 2\alpha) + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}{q[1 + \rho(n + 2\alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{1}{q[1 + \rho(n + 2\alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$	$\delta_+ \sim \frac{1}{n\lambda} \frac{\rho(n + 2\alpha)}{q[1 + \rho(n + 2\alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$

$\bar{T}_B(t_D)$	$\frac{Lq[1 + \rho(n + 2\alpha)] + \frac{1}{\mu}(n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}{q[1 + \rho(n + 2\alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$	—	—
$K_T(t_D)$	$\frac{1 + \rho(n + 2\alpha) + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}{[1 + \rho(n + 2\alpha)(1 + n\lambda Lq) + (1 + n\rho)(n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2]}$	$1 - n(n + 2\alpha) \left[\lambda Lq \left(\rho + \frac{1}{n + 2\alpha} \right) + \rho^3(n + \alpha) \right]$	$\delta_+ \sim (n + 2\alpha)^2 \rho \left[\lambda Lq \left(\rho + \frac{1}{n + 2\alpha} \right) + \rho^3(n + \alpha) \right]$

Примечание. $a = (1 - n\rho)[1 + \rho(n + 2\alpha)] + n\rho^2[\alpha + n(1 - q)]$

$n \geq 1$ основных и два резервных элемента; $0 \leq \alpha \leq 1$; две ($l = 2$) или три ($l = 3$) ремонтные бригады

$\bar{T}_O(t_D)$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{a + [\alpha + n(1 - q)][2\alpha + n(1 - q)]\rho^2}{q[2 + \rho(3n + 4\alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{2}{q[2 + \rho(3n + 4\alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$	$\delta_+ \sim \frac{1}{n\lambda} \frac{\rho(3n + 4\alpha)}{q[2 + \rho(3n + 4\alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$
$\bar{T}_H(t_D)$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{2[1 + \rho(n + 2\alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}{2q[1 + \rho(n + 2\alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{2}{2q[1 + \rho(n + 2\alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$	$\delta_+ \sim \frac{1}{n\lambda} \frac{2\rho(n + 2\alpha)}{2q[1 + \rho(n + 2\alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$
$\bar{T}_B(t_D)$	$\frac{2Lq[1 + \rho(n + 2\alpha)] + \frac{1}{l\mu}(n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}{2q[1 + \rho(n + 2\alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$	—	—
$K_T(t_D)$	$\frac{2[1 + \rho(n + 2\alpha)] + (n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}{2[1 + \rho(n + 2\alpha)](1 + n\lambda Lq) + \left(1 + \frac{n\rho}{l}\right)(n + \alpha)(n + 2\alpha)\rho^2}$	$1 - n(n + 2\alpha) \times \left[\lambda Lq \left(\rho + \frac{1}{n + 2\alpha} \right) + \frac{\rho^3}{l}(n + \alpha) \right]$	$\delta_+ \sim n(n + 2\alpha)^2 \rho \times \left[\lambda Lq \left(\rho + \frac{1}{n + 2\alpha} \right) + \frac{\rho^3}{l}(n + \alpha) \right]$

Примечание. $a = (2 + n\rho)[1 + \rho(n + 2\alpha)] + n\rho^2[\alpha + n(1 - q)]$.

$$\begin{aligned} \bar{T}_B^{(2)}(t_d) &= 10^{-3} \text{ ч}; & K_{\Pi}^{(2)}(t_d) &= 1 - \\ & - K_{\Gamma}^{(2)}(t_d) &= 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ при втором способе} \\ & \text{подключения резервных каналов.} \\ \bar{T}_O^{(1)}(t_d)/\bar{T}_O^{(2)}(t_d) &= 764; \\ \bar{T}_H^{(1)}(t_d)/\bar{T}_H^{(2)}(t_d) &= 758; \\ \bar{T}_B^{(1)}(t_d)/\bar{T}_B^{(2)}(t_d) &= 486; \\ K_{\Pi}^{(1)}(t_d)/K_{\Pi}^{(2)}(t_d) &= 0,638. \end{aligned}$$

СИСТЕМА СО СМЕШАННЫМ ПО НАГРУЗКЕ СТРУКТУРНЫМ РЕЗЕРВОМ

Пусть имеется система, состоящая из n основных ($n \geq 1$) и m резервных ($m \geq 1$) идентичных элементов, которые могут отказывать, причем суммарная интенсивность отказа зависит от числа неработоспособных элементов. Обозначим через λ_k суммарную интенсивность отказа элементов при условии, что в данный момент неработоспособны k элементов. Значение λ_k определяется числом основных и резервных элементов, а также интенсивностью отказа отдельного основного и резервного элементов.

В частности, для ненагруженного структурного резерва

$$\lambda_k = n\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m;$$

для нагруженного резерва

$$\lambda_k = (n + m - k)\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m;$$

для облегченного резерва

$$\lambda_k = [n + (m - k)\alpha]\lambda, \\ 0 < \alpha < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

В случае смешанного по нагрузке резерва будем считать, что первоначально в системе m_H элементов находятся в нагруженном резерве, m_O — в облегченном, а остальные ($m - m_H - m_O$) — в ненагруженном. При отказе одного из основных элементов он заменяется элементом из нагруженного резерва, отказавший элемент нагруженного резерва заменяется эле-

ментом из облегченного резерва, а элементы облегченного резерва пополняются из ненагруженного резерва, т. е.

$$\lambda_k = \begin{cases} (n + m_H + \alpha m_O)\lambda & \text{при } 0 \leq k \leq m - m_H - m_O; \\ [n + m_H + (m - m_H - k)\alpha]\lambda & \text{при} \\ m - m_H - m_O \leq k \leq m - m_H; \\ (n + m - k)\lambda & \text{при } m - m_H \leq k \leq m. \end{cases}$$

Ремонтный орган включает в себя l ремонтных бригад с одинаковым распределением длительности восстановления работоспособности $F_B(t)$. Каждая бригада может одновременно ремонтировать только один отказавший элемент, и каждый элемент восстанавливается лишь одной из l бригад. Если все бригады заняты и отказывает еще один элемент, то он становится в очередь на ремонт. Бригада, закончившая восстановление работоспособности одного из элементов, берет на ремонт первый из стоящих в очереди элементов. Как и прежде, будем считать, что ремонт полностью восстанавливает исходные свойства элемента. Время подключения нагруженного резервного элемента вместо отказавшего основного — случайная величина t_{Π} с произвольной функцией распределения $F_{\Pi}(t)$, а допустимое время подключения (используемый в системе резерв времени) — случайная величина τ_d с функцией распределения $D(t)$.

Примем следующие допущения: в системе реализуется «быстрое» восстановление, т. е. продолжительность ремонта гораздо меньше наработки элемента между отказами ($\bar{t}_B \ll 1/\lambda$); длительность подключения и величина резерва времени значительно меньше наработки системы между отказами ($\bar{t}_{\Pi} \ll 1/\lambda_k$, $\bar{\tau}_d \ll 1/\lambda_k$) и продолжительности ремонта \bar{t}_B ($\bar{t}_{\Pi} \ll \bar{t}_B$, $\bar{\tau}_d \ll \bar{t}_B$).

Отказ системы (срыв функционирования) может возникнуть в двух случаях: при длительном подключении структурного резерва в работу ($t_{\Pi} > \tau_d$) или при отказе $(m + 1)$ -го элемента.

Для проведения расчетов необходимы следующие исходные данные: число основных ($n \geq 1$), нагруженных ($m_H \geq 0$), облегченных ($m_0 \geq 0$) и ненагруженных ($m - m_H - m_0 \geq 0$) резервных элементов; интенсивность отказа (λ) одного основного элемента; вид законов распределения времени восстановления одного элемента $F_B(t)$, времени подключения структурного резерва $F_{II}(t)$ и величины пополняемого резерва времени $D(t)$; число ремонтных бригад ($1 \leq l \leq m$), а также степень нагруженности элементов, находящихся в облегченном резерве ($0 < \alpha < 1$).

Формулы для вероятности безотказного функционирования $P(t, \tau_D)$ и среднего времени до первого отказа системы $\bar{T}_0(\tau_D)$ имеют вид

$$P(t, \tau_D) \approx \exp(-t/\bar{T}_0(\tau_D)); \quad (36)$$

$$\bar{T}_0(\tau_D) \approx \frac{1}{n\lambda} \left[q + \frac{x\rho^m}{m!} \times \right. \\ \times (n + m_H + \alpha m_0)^{m - m_H - m_0 + 1} \times \\ \left. \times \prod_{i=0}^{m_0-1} (n + m_H + i\alpha) \prod_{i=1}^{m_H-1} (n + i) \right]^{-1}, \quad (37)$$

где $\rho = \lambda \bar{t}_B$, $x = 1$ при неограниченном восстановлении ($l = m$), $x = \beta_m / \beta_1^m$ при ограниченном восстановлении ($l = 1$), а

$$q = \begin{cases} \int_0^\infty [1 - F_{II}(t)] dD(t) \\ \text{в общем случае,} \\ 1 - F_{II}(t_D) \\ \text{при } \tau_D = t_D = \text{const.} \end{cases} \quad (38)$$

Через β_m , $m \geq 1$, обозначен m -й начальный момент времени восстановления t_B , т. е. $\beta_m = \int_0^\infty x^m dF_B(x)$.

При экспоненциальном законе распределения $F_B(x)$ времени восстановления с параметром μ

$$\beta_m = \frac{m!}{\mu^m} = \frac{1}{\mu^m} \prod_{i=1}^m i.$$

При усеченном нормальном законе распределения с параметрами \bar{t}_B и σ_B

$$\beta_m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \bar{t}_B^i \sigma_B^{m-i} V_{m-i},$$

где $V_0 = \sqrt{2\pi} [0,5 + \Phi(\bar{t}_B/\sigma_B)]$;

$$V_1 = e^{-\bar{t}_B/2\sigma_B^2};$$

$$V_k = (-\bar{t}_B/\sigma_B)^{k-1} V_1 + (k-1) V_{k-2};$$

$k \geq 2$;

$\Phi(\bar{t}_B/\sigma_B)$ — табулированная функция Лапласа.

При распределении Рэлея с параметром σ_B

$$\beta_1 = \bar{t}_B = \sqrt{\pi/2} \sigma_B, \quad \beta_2 = 2\sigma_B^2,$$

$$\beta_m = m\sigma_B^2 \beta_{m-2}, \quad m > 2;$$

при распределении Эрланга k -го порядка с параметрами μ и k

$$\beta_m = \frac{(k+m-1)!}{(k-1)! \mu^m} = \frac{1}{\mu^m} \prod_{i=0}^{m-1} (k+i).$$

Из выражения (37) можно получить более простые расчетные формулы для различных частных случаев нагруженности элементов структурного резерва. В частности, для случая только нагруженного ($\alpha = 1$), ненагруженного ($\alpha = 0$) или облегченного ($0 < \alpha < 1$) резерва

$$\bar{T}_0(\tau_D) \approx$$

$$\approx \frac{1}{n\lambda} \left[q + \frac{x\rho^m}{m!} \prod_{i=1}^m (n + i\alpha) \right]^{-1}, \quad (39)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$;

для случая нагруженного (m_H) и ненагруженного ($m - m_H$) резерва

$$\bar{T}_O(\tau_D) \approx \frac{1}{n\lambda} \left[q + \frac{x\rho^m}{m!} \times (n + m_H)^{m-m_H} \prod_{i=1}^{m_H} (n+i) \right]^{-1}; \tag{40}$$

для случая нагруженного (m_H) и облегченного (m_O) резерва

$$\bar{T}_O(\tau_D) \approx \frac{1}{n\lambda} \left[q + \frac{x\rho^m}{m!} \times \prod_{i=0}^{m_O} (n + m_H + i\alpha) \prod_{i=1}^{m_H-1} (n+i) \right]^{-1} \tag{41}$$

где $0 < \alpha < 1$;

для случая облегченного (m_O) и ненагруженного ($m - m_O$) резерва

$$\bar{T}_O(\tau_D) \approx \frac{1}{n\lambda} \left[q + \frac{x\rho^m}{m!} \times (n + \alpha m_O)^{m-m_O} \prod_{i=1}^{m_O} (n + i\alpha) \right]^{-1}, \tag{42}$$

где $0 < \alpha < 1$.

Формулы (36), (37), (39)–(42) являются приближенными. Их относительная погрешность не превышает 10 % при $\rho = \lambda \bar{t}_B \leq 0,01$ в широком диапазоне изменения оперативного времени t . С увеличением числа резервных элементов m погрешность уменьшается при прочих одинаковых условиях.

При расчетах показателей надежности системы $P(t, \tau_D)$ и $\bar{T}_O(\tau_D)$ значения вероятности q [выражение (38)] целесообразно вычислять с помощью

формул табл. 1, только в них следует заменить $F_B(t)$ на $F_D(t)$, а \bar{t}_B и σ_B на \bar{t}_D и σ_D .

3. ОДНОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОПОЛНЯЕМЫМ РЕЗЕРВОМ ВРЕМЕНИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ КОНТРОЛЯ И СЛУЧАЙНОЙ ЗАГРУЗКЕ

СИСТЕМА С ДИСКРЕТНЫМ ПОЛНЫМ ДОСТОВЕРНЫМ КОНТРОЛЕМ

Пусть имеется некоторая система, представленная одним структурным элементом, в которой рассмотрен пополняемый резерв времени — случайная величина τ_D с функцией распределения $D(t)$. Будем полагать, что в начальный момент времени система работоспособна. Ее функционирование происходит следующим образом (рис. 3) Проработав случайное время t_{H1} , она отказывает и ожидает случайное время ψ_1 обнаружения отказа. Контроль работоспособности системы осуществляется через случайные промежутки времени $\theta_K^{(1r)}$ ($r \geq 1$). Будем считать, что продолжительность контроля настолько мала по сравнению с временем ожидания обнаружения отказа, что ею можно практически пренебречь. Отказ системы будет обнаружен в момент очередного контроля, период которого перекрывает момент отказа (на рис. 3 это соответствует периоду контроля $\theta_K^{(13)}$). После обнаружения отказа осуществляется восстановление системы в течение случайного времени t_{B1} . Как и прежде, считаем, что ремонт полностью восстанавливает исходные свойства системы. После окончания восстановления система продолжает использоваться и работает безотказно в течение времени t_{H2} ,

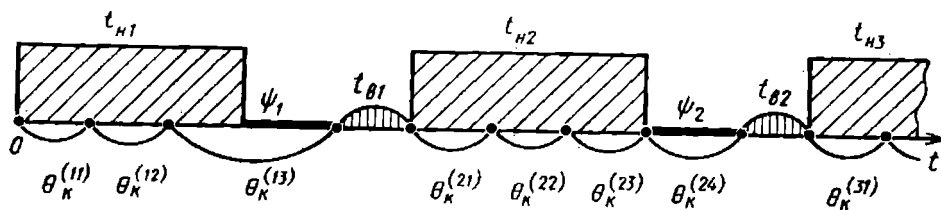


Рис. 3. Схема функционирования системы с дискретным контролем

затем время ψ_2 ожидает обнаружения отказа, после чего восстанавливается в течение времени t_{B2} и т. д.

Отказ аппаратуры приводит к срыву функционирования системы лишь в том случае, если суммарное время Φ_i ожидания и восстановления ($\Phi_i = \psi_i + t_{B_i}$, $i = 1, 2, \dots$) превышает допустимое значение $t_D = \text{const}$, которое определяет используемый в системе пополняемый резерв времени. Если $\Phi_1 < t_D$, то система продолжает нормально функционировать, не реагируя на отказ.

Относительно случайных величин t_{H_i} , $\theta_K^{(ir)}$, t_{B_i} ($i \geq 1$) примем следующие допущения:

величины t_{H_i} , $\theta_K^{(ir)}$, t_{B_i} взаимно независимы;

наработки системы между отказами t_{H_i} распределены одинаково по закону $F(t) = P\{t_{H_i} < t\}$ с МОЖ \bar{t}_H и плотностью распределения $f(t) = F'(t)$;

периоды контроля $\theta_K^{(ir)}$ распределены одинаково по закону $F_K(t) = P\{\theta_K^{(ir)} < t\}$ с МОЖ $\bar{\theta}_K$ и плотностью распределения $f_K(t) = F'_K(t)$;

длительности восстановления t_{B_i} распределены одинаково по закону $F_B(t) = P\{t_{B_i} < t\}$ с МОЖ \bar{t}_B и плотностью распределения $f_B(t) = F'_B(t)$.

В соответствии с принятыми предположениями в дальнейшем будем опускать индексы i у величин t_H , θ_K , t_B и ψ .

Для проведения расчетов необходимо задать вид законов распределения $F(t)$, $F_B(t)$, $F_K(t)$ и значения их параметров.

В общем случае формулы для средней наработки на отказ $\bar{T}_H(t_D)$, среднего времени восстановления $\bar{T}_B(t_D)$ и коэффициента готовности $K_G(t_D)$ системы имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{T}_H(t_D) &= \\ &= \frac{1}{q} [\bar{t}_H + M \min(t_D, \psi + t_B)], \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_B(t_D) &= \\ &= \frac{1}{q} [\bar{\psi} + \bar{t}_B - M \min(t_D, \psi + t_B)], \end{aligned} \quad (44)$$

$$K_G(t_D) = k_G + (1 - k_G)(1 - q), \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} q &= P\{\psi + t_B > t_D\} = 1 - G(t_D) = \\ &= 1 - \int_0^{t_D} L(t_D - x) dF_B(x), \end{aligned} \quad (46)$$

$$L(t) = P\{\psi < t\},$$

$$M \min(t_D, \psi + t_B) = \int_0^{t_D} [1 - G(t)] dt, \quad (47)$$

$$k_G = \frac{\bar{t}_H}{\bar{t}_H + \bar{\psi} + \bar{t}_B}. \quad (48)$$

Для расчета вероятности безотказного функционирования $P(t, t_D)$ может быть использована формула (30), в которой вероятность q определяется выражением (46).

Для облегчения расчетов в табл. 4 приведены формулы для q и $M \min \times (t_D, \psi + t_B)$, полученные с помощью общих выражений (46), (47) для различных сочетаний исходных законов распределения $F(t)$, $F_B(t)$ и $F_K(t)$.

Формула для МОЖ $\bar{\psi}$ случайной величины ψ при экспоненциальном законе распределения $F(t)$ с параметром λ и произвольных законах распределения $F_K(t)$ и $F_B(t)$ имеет вид

$$\bar{\psi} = \frac{\bar{\theta}_K}{1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dF_K(t)} - \frac{1}{\lambda}. \quad (49)$$

Подставляя (49) в (48), находим

$$k_G = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dF_K(t)}{\lambda \bar{\theta}_K + \lambda \bar{t}_B \left[1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dF_K(t) \right]}. \quad (50)$$

4. Расчетные формулы для q и $M \min (t_{\text{Д}}, \psi + t_{\text{В}})$

Законы распределения $F_{\text{Р}}(x), F(x), F_{\text{В}}(x)$	q	$M \min (t_{\text{Д}}, \psi + t_{\text{В}})$
$F_{\text{Р}}(x)$ — экспоненциальный (параметр ν) $F(x)$ — произвольный $F_{\text{В}}(x)$ — экспоненциальный (параметр μ)	$\frac{1}{\nu - \mu} (\nu e^{-\mu t_{\text{Д}}} - \mu e^{-\nu t_{\text{Д}}})$	$\frac{1}{\mu \nu (\mu - \nu)} [\mu^2 (1 - e^{-\nu t_{\text{Д}}}) - \nu^2 (1 - e^{-\mu t_{\text{Д}}})]$
$F_{\text{Р}}(x)$ — экспоненциальный (параметр ν) $F(x)$ — произвольный $F_{\text{В}}(x)$ — нормальный (параметры $\bar{t}_{\text{В}}, \sigma_{\text{В}}$)	$0,5 - \Phi\left(\frac{t_{\text{Д}} - \bar{t}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}\right) +$ $+ e^{\nu(\bar{t}_{\text{В}} + 0,5\nu\sigma_{\text{В}}^2 - t_{\text{Д}})} \times$ $\times \left[\Phi\left(\frac{t_{\text{Д}} - \bar{t}_{\text{В}} - \nu\sigma_{\text{В}}^2}{\sigma_{\text{В}}}\right) + \right.$ $\left. + \Phi\left(\frac{\bar{t}_{\text{В}} + \nu\sigma_{\text{В}}^2}{\sigma_{\text{В}}}\right) \right]$	$\left(\bar{t}_{\text{В}} + \frac{1}{\nu}\right) \left[0,5 + \Phi\left(\frac{t_{\text{Д}} - \bar{t}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}\right) \right] +$ $+ t_{\text{Д}} \left[0,5 - \Phi\left(\frac{t_{\text{Д}} - \bar{t}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}\right) \right] -$ $- \frac{\sigma_{\text{В}}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t_{\text{Д}} - \bar{t}_{\text{В}})^2}{2\sigma_{\text{В}}^2}\right] -$ $- \exp[-\nu(t_{\text{Д}} - \bar{t}_{\text{В}} - 0,5\nu\sigma_{\text{В}}^2)] \times$ $\times \left[\Phi\left(\frac{t_{\text{Д}} - (\bar{t}_{\text{В}} + \nu\sigma_{\text{В}}^2)}{\sigma_{\text{В}}}\right) + \Phi\left(\frac{\bar{t}_{\text{В}} + \nu\sigma_{\text{В}}^2}{\sigma_{\text{В}}}\right) \right].$
$F_{\text{Р}}(x)$ — экспоненциальный (параметр ν) $F(x)$ — произвольный $F_{\text{В}}(x)$ — Рэлея (параметр $\sigma_{\text{В}}$)	$e^{-\nu t_{\text{Д}}} + \sqrt{2\pi} \nu \sigma_{\text{В}} e^{0,5(\nu\sigma_{\text{В}})^2 - \nu t_{\text{Д}}} \times$ $\times [\Phi(\nu\sigma_{\text{В}}) + \Phi(t_{\text{Д}}/\sigma_{\text{В}} - \nu\sigma_{\text{В}})]$	$\sqrt{2\pi} \sigma_{\text{В}} \Phi(t_{\text{Д}}/\sigma_{\text{В}}) + \frac{1}{\nu} [1 - e^{-\nu t_{\text{Д}}} -$ $- \sqrt{2\pi} \nu \sigma_{\text{В}} e^{0,5(\nu\sigma_{\text{В}})^2 - \nu t_{\text{Д}}} \times$ $\times (\Phi(\nu\sigma_{\text{В}}) + \Phi(t_{\text{Д}}/\sigma_{\text{В}} - \nu\sigma_{\text{В}}))]$

$F_K(x)$ — Эрланга 2-го порядка (параметр $\nu = 2/\bar{\theta}_K$)

$F(x)$ — экспоненциальный (параметр λ)

$F_B(x)$ — экспоненциальный (параметр μ)

$$e^{-\mu t_D} + \frac{\mu^2(\lambda + 2\nu) - \mu\nu(2\lambda + 3\nu)}{(\lambda + 2\nu)(\mu - \nu)^2} \times \\ \times (e^{-\nu t_D} - e^{-\mu t_D}) + \\ + \frac{\mu\nu(\lambda + \nu)t_D e^{-\nu t_D}}{(\lambda + 2\nu)(\mu - \nu)}$$

где

$$\frac{1}{\mu}(1 - e^{-\mu t_D})(1 - A) + \\ + \frac{1}{\nu}(1 - e^{-\nu t_D})(A + B) - B t_D e^{-\nu t_D},$$

$$A = \frac{\mu^2(\lambda + 2\nu) - \mu\nu(2\lambda + 3\nu)}{(\lambda + 2\nu)(\mu - \nu)^2};$$

$$B = \frac{\mu(\lambda + \nu)}{(\lambda + 2\nu)(\mu - \nu)}.$$

$F_K(x)$ — вырожденный ($T_K = \text{const}$)

$F(x)$ — экспоненциальный (параметр λ)

$F_B(x)$ — экспоненциальный (параметр μ)

$$\left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{\lambda\mu/(\lambda + \mu)}{\exp(\lambda T_K) - 1} \left[\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t_D} - 1) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\mu}(1 - e^{-\mu t_D}) \right], \quad t_D \leq T_K \\ & \frac{\exp(-\mu t_D)}{\exp(\lambda T_K) - 1} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \times \\ & \times (e^{(\lambda + \mu) T_K} - 1), \quad t_D \geq T_K \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & t_D - \frac{\exp(-\lambda T_K)}{1 - \exp(-\lambda T_K)} \frac{1}{\lambda + \mu} \times \\ & \times \left[\frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t_D} - 1) - t_D(\lambda + \mu) + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t_D}) \right], \\ & \quad t_D \leq T_K, \\ & \frac{\exp(\mu T_K) - \exp(-\lambda T_K)}{1 - \exp(-\lambda T_K)} \times \\ & \times \frac{\lambda}{\mu(\lambda + \mu)} (1 - e^{-\mu t_D}), \\ & \quad t_D > T_K \end{aligned} \right.$$

Используя выражения (49) и (50), можно получить расчетные соотношения для $\bar{\psi}$ и \bar{k}_r , входящие в (44) и (45), при различных видах законов распределения $F_K(t)$. В частности, при экспоненциальном распределении $F_K(t)$ с параметром ν

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\nu} (\lambda + \nu) - 1 \right]; \quad (51)$$

$$r = \frac{\nu}{\lambda + \nu + \lambda \nu \bar{t}_B};$$

при распределении Эрланга 2-го порядка с параметром $\nu = 2/\bar{\theta}_K$

$$\bar{\psi} = \frac{2(\lambda + \nu)^2/\nu}{\lambda(\lambda + 2\nu)} - \frac{1}{\lambda}; \quad (52)$$

$$\bar{k}_r = \left[\lambda \bar{t}_B + \frac{2(\lambda + \nu)^2}{\nu(\lambda + 2\nu)} \right]^{-1};$$

при вырожденном распределении с параметром $T_K = \text{const}$

$$\bar{\psi} = \frac{T_K}{1 - e^{-\lambda T_K}} - \frac{1}{\lambda}; \quad (53)$$

$$\bar{k}_r = \frac{1 - e^{-\lambda T_K}}{\lambda T_K + \lambda \bar{t}_B (1 - e^{-\lambda T_K})}.$$

Пример 3. Сохраним исходные условия примера 1, но будем считать, что контроль работоспособности в АСУ проводится периодически с $T_K = 0,5$ ч, безошибочно, практически мгновенно, причем контролируется вся аппаратура. Оценим показатели надежности системы и сравним их с результатами примера, полученными для случая идеального контроля.

Решение. Подставляя в соответствующие формулы для q и $M \min \times \times (t_D, \psi + t_B)$ [см. табл. 4, случай вырожденного распределения $F_K(x)$] заданные значения λ , μ , t_D и T_K (в данном случае $t_D < T_K$), определяем $q = 0,9778$ и $M \min (t_D, \psi + t_B) = 0,099$ ч, а затем по формуле (30) при $\bar{t}_H = 1/\lambda$ находим $P(t, t_D) = \exp(-0,04 \times \times 0,9778 \cdot 7,9) = 0,74$. Сравнивая это значение с $P(t, t_D) = 0,8255$ для случая идеального контроля, видим, что реализованный в системе периодический контроль привел к уменьшению вероятности безотказного функциони-

рования примерно на 10%. Используя выражения (43)—(45) и (53), определяем $\bar{T}_H(t_D) = 33,92$ ч; $\bar{T}_B(t_D) = 0,4743$ ч; $K_r(t_D) = 0,98$. Сравнение этих результатов с результатами примера 1 (см. с. 145) показывает, что благодаря периодичности контроля средняя наработка системы на отказ (срыв функционирования) уменьшилась на 18%, а коэффициент готовности снизился примерно на 1,5%.

СИСТЕМА С НЕДОСТОВЕРНЫМ НЕПРЕРЫВНЫМ ПОЛНЫМ КОНТРОЛЕМ ОСНОВНЫХ И РЕЗЕРВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим систему, состоящую из n основных ($n \geq 1$) и одного резервного идентичных элементов, в которой предусмотрен пополняемый резерв времени $t_D = \text{const}$.

Нарботка между отказами одного основного элемента распределена по экспоненциальному закону с параметром λ_2 и не зависит от номера отказа. Фактическая интенсивность отказов резервного элемента определяется степенью нагрузки, т. е. $\lambda_{\Phi} = \alpha \lambda_2$, где $\alpha = 1$ при полной нагрузке, $0 < \alpha < 1$ при неполной нагрузке (облегченный режим), $\alpha = 0$ при отсутствии нагрузки (ненагруженный режим). Время восстановления работоспособности одного элемента также распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_2 .

Все элементы (основные и резервный) подвергаются непрерывному полному, но недостоверному контролю работоспособности. Недостоверность контроля проявляется в появлении сигнала типа «ложная тревога» с интенсивностью λ_1 от каждого основного элемента и интенсивностью $\alpha \lambda_1$ от резервного ($0 \leq \alpha \leq 1$), который переводит элементы в режим проверки. Продолжительность проверки — случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону с параметром μ_1 . Предположим, что во время проверки элемент не отказывает и при восстановлении работоспособности элемента ложные сигналы не поступают. Будем считать, что в нашей задаче справедливы все допущения, принятые ранее (см. с. 146) (кроме того, что

в данном случае $m = 1$, $\bar{t}_\Pi \ll 1/\mu_1$, $t_D \ll 1/\mu_1$.

Система функционирует в соответствии со схемой, описанной ранее (см. с. 146). Отличие нашей системы состоит лишь в появлении сигналов типа «ложная тревога», источниками которых могут быть основные и резервные элементы. Если этот сигнал поступает от резервного элемента, то последний переводится в режим проверки. Если же источником ложного сигнала является один из основных элементов, то вместо него подключается резервный элемент (при условии его работоспособности), и после окончания подключения начинается проверка основного. По окончании проверки этот элемент становится резервным. В том случае, когда ремонтный орган включает в себя только одну ремонтную бригаду ($l = 1$) и в него поступают два элемента — один для проверки, другой для восстановления работоспособности, — будем считать, что вначале проводится проверка одного, а затем ремонт другого элемента.

Срыв функционирования системы наступает в момент времени, когда длительность подключения t_Π превышает допустимое значение t_D (резерв времени) или когда отказ (или сигнал типа «ложная тревога») одного из основных элементов совпадает с восстановлением работоспособности или проверкой резервного элемента.

Для проведения расчетов необходимо задать число основных элементов (n), коэффициент нагруженности резервного элемента (α), значения интенсивностей $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, величину резерва времени (t_D), вид функции распределения времени подключения $F_\Pi(t)$ и значения ее параметров, а также число ремонтных бригад (l).

Расчетные формулы для показателей надежности системы имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \bar{T}_0(t_D) &= \\ &= \frac{1 + [\alpha + n(1 - q)] \times}{(n + \alpha)\lambda - [\alpha + n(1 - q)] \times} \times \left[\frac{\lambda_1}{(n\lambda + \mu_1)} + \frac{\lambda_2}{(n\lambda + \mu_2)} \right]; \quad (54) \\ &\times \left[\frac{\lambda_1\mu_1}{(n\lambda + \mu_1)} + \frac{\lambda_2\mu_2}{(n\lambda + \mu_2)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_B(t_D) &= \frac{1}{n\lambda} \times \\ &\times \frac{\lambda_1 [(n + \alpha)\lambda + \mu_1] A + \lambda_2 [(n + \alpha)\lambda + \mu_2] B}{\lambda_1 [(n + \alpha)\lambda + q\mu_1] A + \lambda_2 [(n + \alpha)\lambda + q\mu_2] B}; \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_B(t_D) &= \\ &= \frac{\lambda_1 [(n + \alpha)C + Lq\mu_1] A + \lambda_2 [(n + \alpha)D + Lq\mu_2] B}{\lambda_1 [(n + \alpha)\lambda + q\mu_1] A + \lambda_2 [(n + \alpha)\lambda + q\mu_2] B}; \quad (56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_r(t_D) &= \\ &= \frac{\lambda_1 [(n + \alpha)\lambda + \mu_1] A + \lambda_2 [(n + \alpha)\lambda + \mu_2] B}{A\lambda_1 [\lambda(n + \alpha)(1 + nC) + \mu_1] + B\lambda_2 [\lambda(n + \alpha)(1 + nD) + \mu_2]}; \quad (57) \end{aligned}$$

где L и q определяются выражениями (35) и (38),

$$A = \frac{n\mu_1}{\mu_1 + (l - 1)\mu_2} + \frac{\mu_2}{\lambda};$$

$$B = \frac{(l - 1)n\mu_2}{\mu_1 + (l - 1)\mu_2} + \frac{\mu_1}{\lambda};$$

$$C = \frac{\lambda_2}{\mu_1 + (l - 1)\mu_2} + \frac{\lambda_1}{l\mu_1};$$

$$D = \frac{\lambda_1}{\mu_1 + (l - 1)\mu_2} + \frac{\lambda_2}{l\mu_2};$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad 1 \leq l \leq 2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

При проведении расчетов значения q и L целесообразно вычислять с помощью соотношений табл. 1 (случай 2), только в них следует заменить $F_B(t)$ на $F_\Pi(t)$, а \bar{t}_B и σ_B на \bar{t}_Π и σ_Π .

При отсутствии сигналов типа «ложная тревога» ($\lambda_1 = 0$) формулы (54) — (57) совпадают с соответствующими формулами в случае идеального контроля (табл. 3).

СИСТЕМА С ИДЕАЛЬНЫМ КОНТРОЛЕМ ОСНОВНЫХ И ДИСКРЕТНЫМ ПОЛНЫМ ДОСТОВЕРНЫМ КОНТРОЛЕМ РЕЗЕРВНОГО ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим систему, состоящую из n основных ($n \geq 1$) и одного резервного идентичного элементов, в которой пре-

дусмотрен пополняемый резерв времени $t_d = \text{const}$.

Наработка между отказами одного основного элемента — случайная величина t_n , распределенная по экспоненциальному закону с параметром λ и не зависящая от номера отказа. Фактическая интенсивность отказов резервного элемента $\lambda_\phi = \alpha\lambda$, где $\alpha = 1$ при полной и $0 < \alpha < 1$ при неполной нагрузке. Время восстановления работоспособности одного элемента t_v распределено по экспоненциальному закону с параметром μ .

Основные элементы охвачены идеальным контролем работоспособности. Контроль резервного элемента дискретный полный достоверный. Время между периодами контроля в общем случае — случайная величина θ_k с функцией распределения $F_k(t) = P\{\theta_k < t\}$ и МОЖ $\theta_k < \infty$ или в частном случае — неслучайная величина $\bar{\theta}_k = T_k = \text{const}$. Пусть время контроля очень мало, так что им можно практически пренебречь. Будем считать, что система функционирует в соответствии со схемой, описанной ранее (см. с. 146), и для нее справедливы все принятые там допущения, за исключением того, что в данном случае $m = 1$.

Срыв функционирования системы возникает в трех случаях: в момент времени, когда длительность подключения превышает допустимую величину t_d ; в момент окончания подключения (при $t_n < t_d$), когда обнаруживается неработоспособность резервного элемента; в момент, когда отказ одного из основных элементов совпадает с неработоспособным состоянием резервного элемента.

Для проведения расчетов должны быть заданы значения n ; α ; λ ; μ ; t_d ; t ; вид законов распределения $F_\Pi(t)$, $F_k(t)$ и значения их параметров.

В табл. 5 приведены формулы для показателей надежности при экспоненциальном и вырожденном распределениях $F_k(t)$, где приняты следующие обозначения:

$$A_0 = n\lambda / (n\lambda + \nu); \quad B_0 = \alpha\lambda / (\alpha\lambda + \nu);$$

$$D_0 = [(n\lambda + \nu)\alpha\lambda + n\lambda\nu] \times$$

$$\times (n\lambda + \nu)^{-1} (\alpha\lambda + \nu)^{-1};$$

$$A_B = 1 - \exp(-n\lambda T_k);$$

$$B_B = 1 - \exp(-\alpha\lambda T_k);$$

$$D_B = 1 - \exp[-(n + \alpha)\lambda T_k];$$

$$0 \leq \alpha \leq 1; \quad 1 \leq l \leq 2.$$

При $T_k \rightarrow 0$ ($\nu \rightarrow \infty$) формулы табл. 5 приводятся к соответствующим выражениям табл. 3 (случай идеального контроля). При $T_k \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 0$) приходим к расчетным соотношениям для случая отсутствия контроля резервного элемента:

$$\bar{T}_0(t_d) =$$

$$= \frac{1 + n\rho [1 + n(1 - q)/(n + \alpha)]}{n\lambda [\rho + (\alpha + nq)/(n + \alpha)]}, \quad (58)$$

$$\bar{T}_n(t_d) = \frac{1}{n\lambda} \frac{1 + n\rho}{\rho + (nq + \alpha)/(n + \alpha)}, \quad (59)$$

$$\bar{T}_v(t_d) =$$

$$= \frac{Lq + (1/l\mu) (\alpha/(n + \alpha) + n\rho)}{n\rho + (nq + \alpha)/(n + \alpha)}, \quad (60)$$

$$K_\Gamma(t_d) =$$

$$= \frac{1 + n\rho}{1 + n\lambda Lq +$$

$$+ n\rho [1 + (1/l) (\alpha/(n + \alpha) + n\rho)]} \quad (61)$$

Как и прежде, при расчете по формулам табл. 5, а также (58)—(61) значения q и L целесообразно определять с помощью формул табл. 1 (случай 2), только в них следует заменить $F_B(t)$ на $F_\Pi(t)$, а t_v и σ_v на t_Π и σ_Π .

Пример 4. Рассмотрим входящую в СПД подсистему переключаемых каналов передачи данных, которая состоит из двух основных ($n = 2$) и одного резервного ($m = 1$) идентичных каналов. Резерв нагруженный ($\alpha = 1$). Пусть интенсивности отказов и восстановления каждого канала равны соответственно $\lambda = 0,02$ 1/ч и $\mu = 2$ 1/ч, причем ремонт производится одной бригадой ($l = 1$). Пусть в подсистеме предусмотрено автоматическое подключение резервного канала. Допустим, что переключатель обладает абсолютной безотказностью,

5. Идеальный контроль основных и дискретный, полный, достоверный контроль резервного элементов

Показатель	Распределение	
	Экспоненциальное $F_R(t)$ (параметр ν)	Вырожденное $F_R(t)$ ($T_R = \text{const}$)
$\bar{T}_O(t_D)$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{A_0(1+n\rho) + n\rho \left[D_0 - A_0 \left(q + \frac{\alpha B_0(1-q)}{n+\alpha} \right) \right]}{A_0 \left[q + \frac{\alpha B_0(1-q)}{n+\alpha} \right] + D_0 n\rho}$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{A_B(1+n\rho) + n\rho [nD_B(1-q)/(n+\alpha) + B_B(1-A_B)]}{D_B \left[1 + n \left(\rho - \frac{1-q}{n+\alpha} \right) \right] - B_B(1-A_B)}$
$\bar{T}_B(t_D)$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{A_0 + D_0 n\rho}{A_0 [q + \alpha B_0(1-q)/(n+\alpha)] + D_0 n\rho}$	$\frac{1}{n\lambda} \frac{A_B + D_B n\rho}{A_B + nD_B [\rho - (1-q)/(n+\alpha)]}$
$\bar{T}_B(t_D)$	$\frac{LqA_0 + (1/l\mu) [\alpha A_0 B_0/(n+\alpha) + D_0 n\rho]}{A_0 [q + \alpha B_0(1-q)/(n+\alpha)] + D_0 n\rho}$	$\frac{LqA_B + (1/l\mu) [A_B + nD_B (\rho - 1/(n+\alpha))]}{A_B + nD_B [\rho - (1-q)/(n+\alpha)]}$
$K_R(t_D)$	$\frac{A_0 + D_0 n\rho}{A_0 \left(1 + n\lambda Lq + \frac{n\rho\alpha B_0}{l(n+\alpha)} \right) + D_0 n\rho (1 + n\rho/l)}$	$\frac{A_B + D_B n\rho}{A_B (1 + n\lambda Lq + n\rho/l) + D_B n\rho [1 + (n/l) (\rho - 1/(n+\alpha))]}$

а время переключения — случайная величина $t_{\text{п}}$, распределенная по нормальному закону с параметрами $\bar{t}_{\text{п}} = 1$ с и $\sigma_{\text{п}} = 0,25$ с. По условиям функционирования перерыв в передаче информации (за счет подключения резерва) на время, превышающее допустимое значение $t_{\text{д}} = 2$ с, приводит к отказу рассматриваемой подсистемы. Требуется оценить показатели надежности подсистемы при трех значениях периодичности контроля работоспособности резервного элемента: $T_{\text{к}} = 0$ (контроль непрерывный), $T_{\text{к}} = 1/\lambda$ и $T_{\text{к}} \rightarrow \infty$ (контроль отсутствует).

Решение. Используя результаты расчетов в примере 1, запишем значение $q = P\{t_{\text{п}} > t_{\text{д}}\} = 3,2 \cdot 10^{-5}$. Для заданных интенсивностей λ и μ находим $\rho = \lambda/\mu = 0,01$. Используя далее формулы табл. 3, при $T_{\text{к}} = 0$ вычисляем значения показателей надежности: $\bar{T}_0(t_{\text{д}}) = 875$ ч; $\bar{T}_{\text{н}}(t_{\text{д}}) = 858$ ч; $\bar{T}_{\text{в}}(t_{\text{д}}) = 0,5$ ч; $K_{\text{пр}}(t_{\text{д}}) = 1 - K_{\text{г}}(t_{\text{д}}) = 5,8 \cdot 10^{-4}$. По формулам табл. 5 при $T_{\text{к}} = 1/\lambda$ определяем значения показателей: $\bar{T}_0(t_{\text{д}}) = 89$ ч; $\bar{T}_{\text{н}}(t_{\text{д}}) = 88,4$ ч; $\bar{T}_{\text{в}}(t_{\text{д}}) = 0,5$ ч; $K_{\text{пр}}(t_{\text{д}}) = 5,6 \cdot 10^{-3}$. С помощью выражений (58)—(61) (случай отсутствия контроля резервного элемента) находим: $\bar{T}_0(t_{\text{д}}) = 73,7$ ч; $\bar{T}_{\text{н}}(t_{\text{д}}) = 72,8$ ч; $\bar{T}_{\text{в}}(t_{\text{д}}) = 0,5$ ч; $K_{\text{пр}}(t_{\text{д}}) = 6,8 \cdot 10^{-3}$.

СИСТЕМА СО СЛУЧАЙНОЙ ЗАГРУЗКОЙ

Рассмотрим систему, представленную одним структурным элементом. В системе предусмотрено использование пополняемого резерва времени, который включает в себя две составляющие. Первая составляющая обусловлена случайной загрузкой системы и представляет собой случайную величину, определяемую от момента отказа до момента поступления задания. Вторая составляющая характеризует предусмотренное в системе допустимое запаздывание в выполнении поступившего задания на некоторое время $\tau_{\text{д}}$ — случайную величину с произвольной функцией распределения $D(t)$. Длительность выполнения задания будем считать настолько малой по сравне-

нию с наработкой на отказ, что его можно практически пренебречь (система кратковременного действия). Предположим, что в системе предусмотрен идеальный контроль и что в результате ремонта система полностью восстанавливает исходные свойства.

Функционирование системы осуществляется в соответствии со схемой, описанной ранее (см. с. 141). Отличие заключается в формулировке критерия отказа: срыв функционирования системы возникает в момент исчерпания допустимого запаздывания в выполнении задания, заставшего систему в неработоспособном состоянии.

Пусть наработка системы между отказами $t_{\text{н}}$ и время восстановления $t_{\text{в}}$ имеют произвольные функции распределения соответственно $F(t)$ и $F_{\text{в}}(t)$ с непрерывными плотностями $f(t) = F'(t)$, $f_{\text{в}}(t) = F'_{\text{в}}(t)$ и конечными МОЖ $\bar{t}_{\text{н}}$ и $\bar{t}_{\text{в}}$. Относительно распределения времени z между моментами наступления задания примем два предположения:

1) случайная величина z распределена по экспоненциальному закону с параметром $\gamma_{\text{з}}$, при этом в системе предусмотрено «быстрое» восстановление, т. е. $\bar{t}_{\text{в}} \ll \bar{t}_{\text{н}}$, $\bar{t}_{\text{в}} \ll 1/\gamma_{\text{з}}$ (модель 1);

2) случайная величина z имеет произвольное распределение $A(t)$ с непрерывной плотностью $a(t) = A'(t)$ и конечным МОЖ \bar{z} , при этом наработка на отказ значительно больше средней длительности промежутков времени между моментами поступления задания, т. е. $\bar{t}_{\text{н}}/\bar{z} > 15 \div 20$ (модель 2).

Для проведения расчетов необходимо задать вид законов распределения $D(t)$, $F(t)$, $F_{\text{в}}(t)$, $A(t)$ и значения их параметров.

Вероятность безотказного функционирования $P(t, z + \tau_{\text{д}})$ и среднее время до первого отказа системы $\bar{T}_0(z + \tau_{\text{д}})$ определяют по приближенным формулам:

$$P(t, z + \tau_{\text{д}}) \approx \exp(-qt/\bar{t}_{\text{н}}) \quad t \gg \bar{z} + \tau_{\text{д}}; \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_0(z + \tau_{\text{д}}) &\approx \\ &\approx \frac{1}{q} [\bar{t}_{\text{н}} + M \min(t_{\text{в}}, z + \tau_{\text{д}})]. \quad (63) \end{aligned}$$

Погрешность формул (62) и (63) не превышает 10 % при $t/\bar{z} + \bar{\tau}_d \geq 10$, $t_B/\bar{t}_H \leq 0,1$ и $q < 0,1$. Для вычисления значения q и $M\min(t_B, z + \tau_d)$ могут быть использованы выражения:

$$q = P\{t_B > z + \tau_d\} = \int_0^{\infty} [1 - F_B(t)] dS(t); \quad (64)$$

$$M\min(t_B, z + \tau_d) = \int_0^{\infty} [1 - S(t)] [1 - F_B(t)] dt. \quad (65)$$

В формулах (64) и (65) $S(t)$ — свертка двух функций распределений: $A(t)$ и $D(t)$, которая имеет вид:

для модели 1

$$S(t) = \int_0^t [1 - e^{-\gamma_3(t-x)}] dD(x) = \gamma_3 \int_0^t e^{-\gamma_3 x} D(t-x) dx, \quad (66)$$

для модели 2

$$S(t) = \int_0^t D(t-x) dA^*(x) = \int_0^t A^*(t-x) dD(x), \quad (67)$$

где $A^*(x) = P\{z_* < x\} = \frac{1}{\bar{z}} \int_0^x [1 - A(t)] dt.$

В том случае, когда $\tau_d = t_d = \text{const}$, выражение (67) принимает вид

$$S(t) = P\{z_* < t - t_d\} = A^*(t - t_d); \quad (68)$$

$$q = P\{t_B > z_* + t_d\} = \int_0^{\infty} [1 - F_B(t + t_d)] dA^*(t); \quad (69)$$

$$M\min(t_B, z_* + t_d) = \int_0^{t_d} [1 - F_B(t)] dt + \int_{t_d}^{\infty} [1 - F_B(t)] [1 - A^*(t - t_d)] dt. \quad (70)$$

Формулы для q и $M\min(t_B, z_* + \tau_d)$, полученные с помощью соотношений (64)–(66), приведены в табл. 6, а с помощью соотношений (68)–(70) — в табл. 7.

В частном случае, когда $\tau_d = 0$ и резерв времени содержит только первую составляющую, обусловленную случайной нагрузкой системы, формулы для q и $M\min(t_B, z_*)$ упрощаются и принимают вид:

для модели 1

$$q = P\{t_B > z\} = \gamma_3 \int_0^{\infty} e^{-\gamma_3 t} \times [1 - F_B(t)] dt; \quad (71)$$

$$M\min(t_B, z) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma_3 t} [1 - F_B(t)] dt = \frac{q}{\gamma_3}, \quad (72)$$

для модели 2

$$q = P\{t_B > z_*\} = \int_0^{\infty} [1 - F_B(t)] dA^*(t); \quad (73)$$

$$M\min(t_B, z_*) = \int_0^{\infty} [1 - A^*(t)] [1 - F_B(t)] dt. \quad (74)$$

Для вычислений q и $M\min(t_B, z)$ в случае модели 1 [выражения (71), (72)] можно воспользоваться формулами табл. 1 (случай 1), только в них вместо γ следует подставлять γ_3 .

В табл. 8 приведены формулы для q и $M\min(t_B, z_*)$, полученные с помощью (73) и (74) (модель 2) при некоторых конкретных распределениях $F_B(t)$ и $A(t)$. В этих формулах при гиперэкспо-

6. Резерв времени — случайная величина (модель 1)

Закон распределения $F_B(t), D(t)$	Формула для q	Формула для $M \min(t_B, z_* + \tau_D)$
$F_B(t)$ — экспоненциальный (параметр μ) $D(t)$ — экспоненциальный (параметр γ)	$\frac{\gamma_3 \gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + \gamma_3)}$	$\frac{1}{\gamma_3 - \gamma} \left(\frac{\gamma_3}{\mu + \gamma} - \frac{\gamma}{\mu + \gamma_3} \right)$
$F_B(t)$ — Эрланга 2-го поряд- ка (параметр $\mu =$ $= 2/\bar{t}_B$) $D(t)$ — экспоненциальный (параметр γ)	$\frac{\gamma_3 \gamma [3\mu^2 + \gamma_3 \gamma + 2\mu(\gamma_3 + \gamma)]}{(\mu + \gamma_3)^2 (\mu + \gamma)^2}$	$\frac{1}{\gamma_3 - \gamma} \left[\frac{\gamma_3 (2\mu + \gamma)}{(\mu + \gamma)^2} - \frac{\gamma (2\mu + \gamma_3)}{(\mu + \gamma_3)^2} \right]$
$F_B(t)$ — экспоненциальный $D(t)$ — Эрланга 2-го поряд- ка (параметр $\gamma =$ $= 2/\bar{\tau}_D$)	$\frac{\gamma_3 \gamma^2}{(\mu + \gamma)^2 (\mu + \gamma_3)}$	$\frac{(\mu + \gamma)^2 + \gamma_3 (\mu + 2\gamma)}{(\mu + \gamma)^2 (\mu + \gamma_3)}$
$F_B(t)$ — гиперэкспоненциаль- ный (параметры $\mu_i,$ $v_i, i = \overline{1, n}$) $D(t)$ — экспоненциальный	$\gamma_3 \gamma \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{(\mu_i + \gamma_3)(\mu_i + \gamma)}$	$\frac{1}{\gamma_3 - \gamma} \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{\gamma_3}{\mu_i + \gamma} - \frac{\gamma}{\mu_i + \gamma_3} \right)$

7. Резерв времени $t_D = \text{const}$ (модель 2)

Закон распределения $F_B(t), A(t)$	Формула для q	Формула для $M \min(t_B, z_* + t_D)$
$F_B(t)$ — экспоненциальный (параметр μ) $A(t)$ — экспоненциальный (параметр γ_3)	$\frac{\gamma_3 e^{-\mu t_D}}{\mu + \gamma_3}$	$\frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{\gamma_3 e^{-\mu t_D}}{\mu + \gamma_3} \right)$
$F_B(t)$ — экспоненциальный $A(t)$ — гиперэкспоненциальный (параметры $\gamma_{3i}, v_i, i = \overline{1, n}$)	$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{v_i e^{-\mu t_D}}{\mu + \gamma_{3i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\gamma_{3i}}}$	$\frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu t_D}) + \frac{\sum_{i=1}^n \frac{v_i e^{-\mu t_D}}{\gamma_{3i} (\mu + \gamma_{3i})}}{\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\gamma_{3i}}}$
$F_B(t)$ — экспоненциальный (параметр μ) $A(t)$ — Эрланга 2-го порядка (параметр $\gamma_3 = 2/z$)	$\frac{\gamma_3 (2\gamma_3 + \mu) e^{-\mu t_D}}{2 (\gamma_3 + \mu)^2}$	$\frac{(3\gamma_3 + 2\mu) e^{-\mu t_D}}{2 (\gamma_3 + \mu)^2} + \frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu t_D})$
$F_B(t)$ — Эрланга 2-го порядка (параметр $\mu = 2/t_B$) $A(t)$ — экспоненциальный (параметр γ_3)	$\frac{e^{-\mu t_D}}{(\gamma_3 + \mu)^2} [\gamma_3 (\gamma_3 + 2\mu) + \gamma_3 \mu t_D (\gamma_3 + \mu)]$	$e^{-\mu t_D} [\gamma_3 + 2\mu + \mu t_D (\gamma_3 + \mu)] / (\gamma_3 + \mu)^2 + \frac{2}{\mu} - e^{-\mu t_D} \left(\frac{2}{\mu} + t_D \right)$
$F_B(t)$ — гиперэкспоненциальный (параметры $\mu_i, v_i, i = \overline{1, n}$) $A(t)$ — экспоненциальный (параметр γ_3)	$\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_3 v_i e^{-\mu_i t_D}}{\gamma_3 + \mu_i}$	$\sum_{i=1}^n \left[\frac{v_i}{\mu_i} (1 - e^{-\mu_i t_D}) + \frac{v_i}{\gamma_3 + \mu_i} e^{-\mu_i t_D} \right]$

8. Случай $\tau_d = 0$ (модель 2)

Законы распределения $F_B(t), A(t)$	q	$M \min(t_B, z_*)$
$F_B(t)$ — экспоненциальный (параметр μ) $A(t)$ — экспоненциальный (параметр γ_3)	$\frac{\gamma_3}{\gamma_3 + \mu}$	$\frac{1}{\gamma_3 + \mu}$
$F_B(t)$ — нормальный (параметры \bar{t}_B, σ_B) $A(t)$ — экспоненциальный (параметр γ_3)	$1 - \exp\{-\gamma_3 \bar{t}_B + 0,5 \gamma_3^2 \sigma_B^2\} \times$ $\times \left[0,5 + \Phi\left(\frac{\bar{t}_B - \gamma_3 \sigma_B^2}{\sigma_B}\right) \right]$	$\frac{1}{\gamma_3} \{1 - \exp[-\gamma_3 \bar{t}_B + 0,5 \gamma_3^2 \sigma_B^2]\} \times$ $\times \left[0,5 + \Phi\left(\frac{\bar{t}_B - \gamma_3 \sigma_B^2}{\sigma_B}\right) \right]$
$F_B(t)$ — Рэлея (параметр σ_B) $A(t)$ — экспоненциальный (параметр γ_3)	$\sqrt{2\pi} \gamma_3 \sigma_B e^{0,5 (\gamma_3 \sigma_B)^2} [0,5 - \Phi(\gamma_3 \sigma_B)]$	$\sqrt{2\pi} \sigma_B e^{0,5 (\gamma_3 \sigma_B)^2} [0,5 - \Phi(\gamma_3 \sigma_B)]$
$F_B(t)$ — экспоненциальный (параметр μ) $A(t)$ — гиперэкспоненциальный (параметры $\gamma_{3i}, \alpha_i, i = \overline{1, n}$)	$1 - \frac{\mu}{\omega} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(\gamma_{3i} + \mu) \gamma_{3i}}$	$\frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\gamma_{3i} (\mu + \gamma_{3i})}$

<p>$F_B(t)$ — нормальный (параметры \bar{t}_B, σ_B) $A(t)$ — гиперэкспоненциальный (параметры $\gamma_{3i}, \alpha_i, i = \overline{1, n}$)</p>	$1 - \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\gamma_{3i}} \exp \{-\gamma_{3i} \bar{t}_B + 0,5 \gamma_{3i}^2 \sigma_B^2\} \times$ $\times \left[0,5 + \Phi \left(\frac{\bar{t}_B - \gamma_{3i} \sigma_B^2}{\sigma_B} \right) \right]$	$\frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\gamma_{3i}^2} \left\{ 1 - \exp [-\gamma_{3i} \bar{t}_B + 0,5 \gamma_{3i}^2 \sigma_B^2] \times \right.$ $\left. \times \left[0,5 + \Phi \left(\frac{\bar{t}_B - \gamma_{3i} \sigma_B^2}{\sigma_B} \right) \right] \right\}$
<p>$F_B(t)$ — Рэля (параметр σ_B) $A(t)$ — гиперэкспоненциальный (параметры $\gamma_{3i}, \alpha_i, i = \overline{1, n}$)</p>	$\frac{\sqrt{2\pi} \sigma_B}{\omega} \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{0,5 (\gamma_{3i} \sigma_B)^2} \times$ $\times [0,5 - \Phi (\gamma_{3i} \sigma_B)]$	$\frac{\sqrt{2\pi} \sigma_B}{\omega} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\gamma_{3i}} e^{0,5 (\gamma_{3i} \sigma_B)^2} \times$ $\times [0,5 - \Phi (\gamma_{3i} \sigma_B)]$
<p>$F_B(t)$ — экспоненциальный (параметр μ) $A(t)$ — Эрланга 2-го порядка (параметр $\gamma_3 = 2/\bar{z}$)</p>	$\frac{\gamma_3 (\mu + 2\gamma_3)}{2 (\mu + \gamma_3)^2}$	$\frac{2\mu + 3\gamma_3}{2 (\mu + \gamma_3)^2}$

ненциальном распределении $A(t)$ принято обозначение

$$\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i / \gamma_{zi}.$$

Пример 5. В процессе функционирования АСУ, рассмотренной в примере 1, внесем одно изменение: сообщения от источников информации поступают в случайные моменты времени и допускают задержку в их обработке на время $t_d = 0,1$ ч. Промежутки времени между моментами поступления сообщений z распределены по экспоненциальному закону с параметром $\gamma_z = 20$ 1/ч. Время обработки и передачи каждого сообщения настолько мало по сравнению с \bar{z} , что им можно практически пренебречь. Если в момент поступления сообщения аппаратура АСУ неработоспособна и ремонтируется, то срыв функционирования системы возникает в момент израсходования резерва времени t_d . Определим показатели безотказности системы при заданном оперативном времени $t = 8$ ч.

Решение. По формуле табл. 7 для принятых исходных данных вычисляем вероятность $q = (\exp(-5 \times 0,1) / (20 + 5)) \cdot 20 = 0,485$. Далее по формуле (62) находим $P(t, z + t_d) = \exp(-0,04 \cdot 0,485 \cdot 8) = 0,86$. Для сравнения напомним, что вероятность безотказной работы аппаратуры $P(t) = \exp(-0,04 \cdot 8) = 0,7261$. Выигрыш по вероятности срыва функционирования за счет использования в системе суммарного резерва времени $(z + t_d)$ составляет $0,2739 / 0,14 = 1,96$. Среднее время до первого отказа системы определяем по формуле (63), в которой значения q и $M \min(t_B, z + t_d)$ вычисляем с помощью соответствующих выражений табл. 7, полученных при экспоненциальных распределениях $F_B(t)$ и $A(t)$: $\bar{T}_0(z + t_d) = 51,7$ ч. Полученное значение в $51,7 / 25 = 2,06$ раза превышает среднюю наработку аппаратуры АСУ на отказ.

4. ОДНОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С НЕПОПОЛНЯЕМЫМ РЕЗЕРВОМ ВРЕМЕНИ

Система с необесцениваемыми отказами и непрерывным контролем работоспособности (общий случай). В си-

стеме есть два множества состояний: E_0 и E_1 . В множестве E_0 резерв времени не расходуется, а вся наработка является полезной. В E_1 полезная наработка не увеличивается, а резерв времени уменьшается на величину, равную времени пребывания системы в этом множестве состояний. Контроль работоспособности непрерывный, обеспечивающий мгновенное обнаружение отказов. Моменты изменения состояний являются марковскими моментами времени, когда предыстория процесса функционирования перестает влиять на характеристики процесса в будущем. Интервалы времени между соседними изменениями состояний могут иметь произвольные распределения.

Заданы функции вероятностей $P_{ij}(t)$ перехода из состояния e_i в состояние e_j за время t ; вероятности a_i того, что процесс в начальный момент времени находится в состоянии e_i ; время t_3 выполнения задания при безотказной работе (длительность задания); непополняемый резерв времени t_p .

Вероятность выполнения задания длительностью t_3 при непополняемом резерве времени t_p находят из системы интегральных уравнений:

$$P_i(t_3, t_p) = 1 - F_i(t_p) + \sum_{j \in E_0} \int_0^{t_3} P_j(t_3 - x, t_p) dP_{ij}(x), \quad i \in E_0; \quad (75)$$

$$P_i(t_3, t_p) = \sum_{j \in E_0} \int_0^{t_p} P_j(t_3, t_p - y) \times dP_{ij}(y), \quad i \in E_1, \quad E = E_0 \cup E_1;$$

$$F_i(t) = \sum_{(j)} P_{ij}(t).$$

Среднюю наработку до отказа определяют из системы интегроалгебраических уравнений:

$$T_{ср i}(t_p) = \bar{T}_i + \sum_{j \in E} P_{ij} T_{ср j}(t_p),$$

$$i \in E_0, \quad \bar{T}_i = \int_0^{\infty} x dF_i(x);$$

$$T_{cp i}(t_p) = \sum_{i \in E} \int_0^{t_p} T_{cp j}(t_p - x) \times dP_{ij}(x), \quad i \in E_1; \quad p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t). \quad (76)$$

Средний расход резерва времени до выполнения задания

$$\begin{aligned} \bar{T}_{1i}(t_a) &= \sum_{i \in E} \int_0^{t_a} \bar{T}_{1j}(t_a - x) dP_{ij}(x), \\ i &\in E_0; \\ \bar{T}_{1i}(t_a) &= \bar{T}_i + \\ &+ \sum_{j \in E} p_{ij} \bar{T}_{1j}(t_a), \quad i \in E_1. \end{aligned} \quad (77)$$

В уравнениях (75)–(76) индекс i указывает на начальное состояние.

Вероятность выполнения задания по заявке, поступающей в систему в произвольный момент времени на стационарном участке эксплуатации, определяют с помощью интегрального соотношения:

$$\begin{aligned} P(t_a, t_p) &= \sum_{i \in E_0} P_i \left(1 - \tilde{F}_i(t_a) + \right. \\ &+ \left. \sum_{j \in E} \int_0^{t_a} P_j(t_a - x, t_p) d\tilde{P}_{ij}(x) \right) + \\ &+ \sum_{i \in E_1} P_i \sum_{j \in E} \int_0^{t_p} P_j(t_a t_p - y) d\tilde{P}_{ij}(y), \\ \tilde{F}_{ij}(t) &= \bar{T}_{ij}^{-1} \int_0^t (1 - F_{ij}(x)) dx, \\ F_{ij}(t) &= P_{ij}(t)/p_{ij}, \quad \tilde{F}_i(t) = \\ &= \bar{T}_i^{-1} \int_0^t (1 - F_i(x)) dx, \quad (78) \\ \tilde{P}_{ij}(t) &= \tilde{p}_{ij} \tilde{F}_{ij}(t), \quad \tilde{p}_{ij} = p_{ij} \bar{T}_{ij} / \bar{T}_i, \\ \bar{T}_{ij} &= \int_0^{\infty} x dF_{ij}(x), \quad \tilde{T}_i = \int_0^{\infty} x d\tilde{F}_i(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_i &= \pi_i \bar{T}_i / \sum_{j \in E} \pi_j \bar{T}_j, \quad \pi_i = \\ &= \sum_{k \in E} \pi_k p_{ki}. \end{aligned}$$

Среднюю наработку до окончания резерва времени при стационарном распределении вероятностей начального состояния определяют по формуле

$$\begin{aligned} T_{cp}(t_p) &= \sum_{i \in E_0} P_i \left(\tilde{T}_i + \right. \\ &+ \left. \sum_{j \in E} \tilde{p}_{ij} T_{cp j}(t_p) \right) + \\ &+ \sum_{i \in E_1} P_i \sum_{j \in E} \int_0^{t_p} T_{cp j}(t_p - x) d\tilde{P}_{ij}(x). \end{aligned} \quad (79)$$

Изменение состояний в системе происходит при отказах, восстановлениях, изменениях режимов работы, изменениях условий применения. Поэтому в каждой конкретной модели надежности функции должны быть найдены по исходным данным о безотказности и ремонтпригодности элементов, о характеристиках контроля, вероятностных законах переключения режимов работы и изменения условий применения.

Последовательная система с необесцениваемыми отказами и идеальным контролем. Система из N последовательно соединенных элементов функционирует так, что после отказа i -го элемента через время T_{oi} с распределением $F_i(t)$ происходит восстановление работоспособности отказавшего элемента в течение времени T_{vi} с распределением $F_{vi}(t)$ благодаря непополняемому резерву времени t_p . Одновременно происходит техническое обслуживание всех работоспособных элементов, так что в следующем интервале наработки системы функции $F_i(t)$ сохраняют свой вид и параметры. Во время ремонта новых отказов не возникает. Обнаружение отказов мгновенное, полное, достоверное.

Заданы параметры распределений $F_i(t)$ и $F_{vi}(t)$, первый и второй на-

чальные моменты распределений \bar{T}_{oi} , α_{oi} , \bar{T}_{vi} , α_{vi} , длительность задания t_3 , непополняемый резерв времени t_p или объем запасов v и номинальная производительность c_0 . Для системы $MM11$ распределение задается одним параметром λ_i или μ_i , для системы $EE11$ двумя параметрами (k_i, λ_i) и (r, μ_i) , для системы $WW11$ параметрами (m, λ_i) и (r, μ_i) .

Для системы типа $MM11$, состоящей из одного элемента ($N = 1$), расчетные формулы приведены в табл. 9. В ней для вероятности выполнения задания, кроме точных формул, даны приближенные формулы, основанные на свойствах асимптотической нормальности распределения, а также формулы, обеспечивающие гарантированную точность (ошибка не превышает 10^{-4} *). Если фиксируется кратность резервирования $mt = \lambda \bar{m}_i / \mu$, то расчет проводят по формуле для $P_c(t_3, c)$ при $c = c_0 / (1 + mt)$. Для систем $EE11$ и $WW11$ при $N = 1$ расчетные формулы приведены в табл. 10. Таблицы коэффициентов a_{ij} и c_i можно найти в работе [2]. Для последовательной системы типа $MM11$, $WE11$, $WW11$ формулы приведены в табл. 11. Свертка функций $F_B(t_p)$ выполняется численно. Для системы $MM11$ возможна двусторонняя оценка точного значения вероятности выполнения задания с помощью следующих неравенств:

$$P_0(\rho, \gamma) \leq P(t_3, t_p) \leq e^{-\rho} (1-k) P_0(k\rho, \gamma_1), \quad (80)$$

$$\text{где } \rho = \lambda t_3; \quad \lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i; \quad \gamma = -\ln \times \times (1 - F_B(t_p)), \quad k = t_p F'_B(0) / \gamma_1;$$

$$F'_B(0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mu_i / \lambda; \quad a = t_p F'_B(0) / F_B \times \times (t_p), \quad \gamma_1 - \text{решение уравнения } x = = a(1 - \exp(-x)), \text{ функцию } P_0(\rho, \gamma) \text{ находят по формулам табл. 9.}$$

Для других систем, имеющих распределение типа УСФИ (убывающая в среднем функция интенсивности

[2]), можно использовать следующие оценки более общего вида [4]):

$$\left. \begin{aligned} P(t_3, t_p) &= 1 - k_1 e^{-q_1(1-k_1)} (1 - \\ &- P_0(\rho_1, \gamma_1)) - R_1; \\ \bar{P}(t_3, t_p) &= e^{-q_2(1-k_2)} \times \\ &\times P_0(\rho_2, \gamma_2) + R_2; \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

$$q_1 = -\ln \bar{F}(t_3), \quad q_2 = -\ln \bar{F}_B(t_p),$$

$$\rho_1 = a_1 t_3, \quad \rho_2 = k_2 q_2, \quad \gamma_1 = k_1 q_1,$$

$$\gamma_2 = a_2 t_p;$$

$$R_1 = e^{-q_1 \bar{F}_B(t_p)} (1 - e^{-q_1 \delta_2}),$$

$$R_2 = e^{-q_2 \bar{F}(t_3)} (\delta_1 e^{-q_2 \delta_1} + F(t_3) \times \times (1 - e^{-q_2 \delta_1})),$$

$$\delta_1 = F(t_3) - k_1 (1 - e^{-\rho_1}),$$

$$\delta_2 = F_B(t_p) - k_2 (1 - e^{-\gamma_2}),$$

$$a_1 = b_1 (t_3 - y_1), \quad a_2 = b_2 / (t_p - y_2),$$

$$k_1 = F'(y_1) e^{y_1 a_1} / a_1, \quad k_2 = = F'_B(y_2) e^{y_2 a_2} / a_2,$$

$$b_i = c_i (1 - e^{-b_i}), \quad \bar{F}(t) = 1 - F(t),$$

$$c_1 = F'(y_1) (t_3 - y_1) / (F(t_3) - F(y_1)),$$

$$c_2 = F'_B(y_2) (t_p - y_2) / (F_B(t_p) - F_B(y_2)).$$

Значения y_1 и y_2 подбирают в диапазонах $(0, t_3)$ и $(0, t_p)$. Если одно из распределений экспоненциальное, то для соответствующего i коэффициенты $k_i = 1$, $\delta_i = R_i = 0$, $a_i = \lambda$ или μ . В частности, если $F'_B(0) = F'(0) = = \infty$, то из (81) имеем

$$\left. \begin{aligned} 1 - F(t_3) (1 - F_B(t_p))^{1-F(t_3)} &\leq \\ &\leq P(t_3, t_p) \leq (1 - F(t_3))^{1-F_B(t_p)}. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Эти оценки можно уточнить, если взять $y_i > 0$. При этом, однако, увеличивается объем вычислений. В системах $EE11$ и $WW11$ оценки (81) и (82) можно применять при $m < 1$ и $r < 1$.

* Оценки с гарантированной точностью получены Ю. М. Макаровым.

9. Расчетные формулы для системы ММ11

Показатель	Формула
$P_0(t_3, t_p)$	$e^{-\rho} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} \left(1 - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\gamma^j}{j!} e^{-\gamma} \right) \right) =$ $= 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma^i}{i!} e^{-\gamma} \left(1 - \sum_{j=0}^i \frac{\rho^j}{j!} e^{-\rho} \right),$ $\rho = \lambda t_3, \gamma = \mu t_p$
	$\Phi((\gamma - \rho)/\sqrt{2\rho}), \Phi((\gamma + 1 - \rho)/\sqrt{2\gamma}),$ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$
	$\left. \frac{\gamma^{2m}}{\rho^{2m} + \gamma^{2m}} + \frac{1}{4m} \right\} \begin{cases} \sum_{k=0}^1 (e^{-c_k} (c_k + \rho - \gamma)/c_k + e^{-h_k} (h_k + \rho - \gamma)/h_k), \\ \rho\gamma \leq 4, m = 2 \\ \sum_{k=0}^2 e^{-c_k} (c_k + \rho - \gamma)/c_k + e^{-h_2} (h_2 + \rho - \gamma)/h_2, \\ 4 \leq \rho\gamma \leq 16, m = 3 \\ \sum_{k=0}^3 e^{-c_k} (c_k + \rho - \gamma)/c_k, \\ 16 \leq \rho\gamma \leq 49, m = 4; \\ \rho\gamma \geq 49, m = m_{\rho\gamma} \end{cases}$ $m_{\rho\gamma} = 1 + [2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\rho\gamma}], \quad c_k = \rho + \gamma - b_k, \quad h_k = \rho + \gamma + b_k,$ $b_k = 2\sqrt{\rho\gamma} \cos \frac{2k+1}{4m} \pi$

Продолжение табл. 9

Показатель	Формула
$P_c(t_3, c)$	$e^{-\rho(1+\bar{m}_t)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\rho^n}{n!} \right) =$ $= 1 - e^{-\rho(1+\bar{m}_t)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\rho^n}{n!}, \quad \bar{m}_t = \frac{\gamma}{\rho}, \quad \beta = \frac{\lambda}{\mu}$ $a_n = (1 + \bar{m}_t)^n - b_n = \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{i} \bar{m}_t^i,$ $c = c_0 (1 + \beta \bar{m}_t)^{-1}$
$\Lambda(t_3, t_p)$	$\lambda e^{-\rho-\gamma} I_0(2\sqrt{\rho\gamma}) / P_0(t_3, t_p),$ $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} / (k!)^2$
$T_{cp}(t_p)$	$(1 + \gamma) / \lambda$
$\bar{T}_{B3}(t_3)$	$t_3 (1 + \lambda \bar{T}_B) = t_3 (1 + \lambda / \mu)$
$DT(t_p)$	$(1 + 2\gamma) / \lambda^2$
$DT_{B3}(t_3)$	$2\lambda t_3 / \mu^2 = \lambda \alpha_B t_3, \quad \alpha_B = \int_0^{\infty} x^2 dF_B(x)$
$T_{cp}(c)$	$\left((1 + \bar{m}_t)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (1 + \bar{m}_t)^{-1-n} \right) / \lambda, \quad \bar{m}_t < 1$
$K_r(t_p)$	$1 - \lambda \exp(-\gamma) / (\lambda + \mu)$
$K_{ог}(t_3, t_p)$	$P_0(t_3, t_p) - \lambda \exp(-\rho - \gamma) I_0(2\sqrt{\rho\gamma}) / (\lambda + \mu)$
$K_p(t_p)$	$(1 + \gamma(1 + \beta)) / (1 + \beta)(1 + \gamma)$
$C_{cp}(t) / c_0$	$K_r + (1 - K_r) (1 - \exp(-(\lambda + \mu)t)) / (\lambda + \mu)t,$ $K_r = \mu / (\lambda + \mu)$

10. Расчетные формулы для систем EE11 и WW11

Показатель	Формула
Система EE11	
$P_0(t_3, t_p)$	$1 - I(k_1, \rho) + \sum_{n=1}^{\infty} I(k_2 n, \gamma) (I(k_1 n, \rho) - I(k_1 n + k_1, \rho)) =$ $= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 - I(k_2 n, \gamma)) (I(k_1 n, \rho) - I(k_1 n + k_1, \rho)),$ $\rho = \lambda t_3, \gamma = \mu t_p; I(n, x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$
$P_0^a(t_3, t_p)$	$\Phi((\gamma - k_2 \rho / k_1) / \sqrt{(1 + k_2 / k_1) k_2 \rho / k_1})$ $\Phi((k_1 + k_1 \gamma / k_2 - \rho) / \sqrt{(1 + k_1 / k_2) k_1 \gamma / k_2})$
$T_{cp}(t_p)$	$\frac{k_1}{\lambda} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} I(k_2 n, \gamma) \right) \approx \frac{k_1}{\lambda} \left(1 + \frac{\gamma}{k_2} \right)$
$DT(t_p)$	$\frac{1}{\lambda^2} k_1 (k_1 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} I(k_2 n, \gamma) + \frac{2k_1}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} n I(k_2 n, \gamma) - T_{cp}^2(t_p)$
$\lambda(t_3, t_p)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \frac{\rho^{k_1(n+1)-1}}{\Gamma(k_1(n+1))} (I(k_2 n, \gamma) - I(k_2 n + k_2, \gamma)) / P_0(t_3, t_p)$
$\bar{T}_{B3}(t_3)$	$t_3 + \frac{k_2}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} I(k_2 n, \rho) \approx t_3 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \frac{k_2}{k_1} \right)$
$DT_{B3}(t_3)$	$\frac{\rho k_2}{\mu^2 k_1} \left(1 + \frac{k_2}{k_1} \right)$
$K_{\Gamma}(t_p)$	$\frac{\mu k_1}{\mu k_1 + \lambda k_2} + \frac{\lambda}{\mu k_1 + \lambda k_2} \sum_{n=0}^{k_2-1} I(n+1, \gamma), k_2 - \text{целое}$
$K_{Or}(t_3, t_p)$	$K_{\Gamma}(t_p) - K_{\Gamma}(0) \frac{1}{k_1} \sum_{n=0}^{k_1-1} I(n, \rho) (1 - F_B(t_p) (1 - F(t_3))) -$ $- \frac{1}{k_2} F(t_3) (1 - K_{\Gamma}(0)) \sum_{n=0}^{k_2-1} I(n, \gamma);$ $F(t_3) = I(k_1, \lambda t_3), F_B(t_p) = I(k_2, \mu t_p)$

Продолжение табл. 10

Показатель	Формула
$K_p(v)$	$(v + c_0 k_1 \sum_{n=0}^{\infty} I(k_2 n, \gamma) / \lambda) \left/ \left(v + c_0 \frac{k_1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} I(k_2 n, \gamma) + k_2 / \mu \right) \right.$ $\gamma = \mu v / c_0$
$K_{из}(v)$	$\lambda v \left/ \left(\lambda v + c_0 k_1 \sum_{n=0}^{\infty} I(k_2 n, \mu v / c_0) \right) \right.$

Система WW11

$P_0(t_a, t_p)$ $r > 1$ $m > 1$	$e^{-(\lambda t_a)^m} + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t_a) F_{Bn}(t_p) = e^{-(\lambda t_a)^m} + F(t_a) F_B(t_p) -$ $- \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1}(t_a) p_{Bn}(t_p)$ $p_n(t_a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} \frac{\rho^i}{i!} e^{-\rho}; \quad p_{Bn}(t_p) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} \frac{\gamma^i}{i!} e^{-\gamma};$ $\rho = (\lambda t_a)^m, \quad \gamma = (\mu t_p)^r$ $F_n(t_a) = F(t_a) - \sum_{i=1}^{n-1} p_i(t_a);$ $F_{Bn}(t_p) = F_B(t_p) - \sum_{i=1}^{n-1} p_{Bi}(t_p)$
$P_0(t_a, t_p)$ $r = 1$	$e^{-\rho} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} \sum_{j=1}^i a_{ji} I(j, \gamma) \right) =$ $= 1 - e^{-\rho} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} \sum_{j=1}^i b_{ji} \frac{\gamma^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\gamma},$ $b_{ji} = \sum_{s=1}^i a_{si}$

Продолжение табл. 10

Показатель	Формула
$P_0(t_3, t_p)$ $m = 1$	$e^{-\rho-\gamma} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma^j}{j!} \sum_{i=1}^j a_{ij} \sum_{s=0}^i \frac{\rho^s}{s!} \right) = 1 - e^{-\gamma} (1 - e^{-\rho}) -$ $- e^{-\rho-\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{s=j}^{\infty} a_{js} \frac{\gamma^s}{s!}$
$P_0^a(t_3, t_p)$	$\Phi \left(\left(t_p - \frac{\lambda}{\mu} t_3 \Gamma \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right) / \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) \right) / \sqrt{\lambda t_3 \mu^{-2} A \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{r} \right) / \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right)}$ $\Phi \left(\left(\frac{1}{\lambda} \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(1 + \mu t_p / \Gamma \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right) - t_3 \right) / \sqrt{\mu t_p \lambda^{-2} A \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) / \Gamma \left(1 + \frac{1}{r} \right)} \right)$ $A = \Gamma \left(1 + \frac{2}{m} \right) / \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) +$ $+ \Gamma \left(1 + \frac{2}{r} \right) / \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{r} \right) - 2$
$\Lambda(t_3, t_p)$	$m \lambda e^{-\rho} (\lambda t_3)^{m-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^{i-1}}{(i-1)!} \left(1 - \frac{\rho}{i} \right)^i \times$ $\times \sum_{l=1}^i a_{jl} l(j, \gamma) / P_0(t_3, t_p), \quad r = 1$ $\lambda e^{-\rho-\gamma} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma^j}{j!} \sum_{i=1}^j a_{ij} \frac{\rho^i}{i!} \right) / P_0(t_3, t_p); \quad m = 1$
$T_{cp}(t_p)$	$\frac{1}{\lambda} \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(1 + \mu t_p / \Gamma \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right)$
$\bar{T}_{B3}(t_3)$	$t_3 + \bar{T}_B \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{\rho^j}{j!} e^{-\rho} \approx t_3 + \rho \bar{T}_B,$ $\bar{T}_B = \frac{1}{\mu} \Gamma \left(1 + \frac{1}{r} \right), \quad c_j = \sum_{k=1}^j k a_{kj}$

Продолжение табл. 10

Показатель	Формула
$K_{\Gamma}(t_p)$	$\left(\mu \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) + \int_0^{t_p} \exp(-(\mu x)^r dx) \right) / \left(\mu \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) + \lambda \Gamma \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right)$
$K_p(v)$	$\left(\lambda v + c_0 \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) (1 + t_p / \bar{T}_B) \right) / \left(\lambda v + c_0 \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) (1 + t_p / \bar{T}_B + \lambda c_0 \bar{T}_B) \right)$

11. Расчетные формулы для последовательной системы

Показатель	Тип системы	Формула
$P_0(t_3, t_p)$	MM11	$e^{-\rho} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} (F_B(t_p))^* (i) \right),$ $\rho = \lambda t_3, \quad \lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i,$ $F_B(t_p) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} (1 - e^{-\mu_i t_p})$
	WG11	$e^{-\rho} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} \sum_{j=1}^i a_{ji} (F_B(t_p))^* (i) \right),$ $\rho = (\lambda t_3)^m, \quad \lambda^m = \sum_{i=1}^N \lambda_i^m$
	WE11	$F_B(t_p) = \sum_{i=1}^N (\lambda_i / \lambda)^m I(k_i, \mu_i t_p)$
	WW11	$F_B(t_p) = \sum_{i=1}^N (\lambda_i / \lambda)^m (1 - \exp(-(\mu_i t_p)^{r_i}))$

Продолжение табл. 11

Показатель	Тип системы	Формула
$T_{cp}(t_p)$	MM11	$\left(\beta t_p + \sum_{i=1}^N \beta_i / \mu_i \right) / \beta^2, \quad \beta_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}, \quad \beta = \sum_{i=1}^N \beta_i$
	GG11	$A t_p + B, \quad A = \bar{T}_0 / \bar{T}_B, \quad B = \bar{T}_0 \alpha_B / 2 \bar{T}_B^2,$
	WE11	$\bar{T}_0 = \Gamma(1 + 1/m) / \lambda, \quad \bar{T}_B = \sum_{i=1}^N (\lambda_i / \lambda)^m r / \mu_i,$ $\lambda^m = \sum_{i=1}^N \lambda_i^m$ $\alpha_B = \sum_{i=1}^N (\lambda_i / \lambda)^m \alpha_{Bi}, \quad \alpha_{Bi} = r(r + 1) / \mu_i^2$
$\bar{T}_{B3}(t_3)$	MM11	$(1 + \beta) t_3$
	GG11	$(1 + A_1) t_3 + B_1, \quad A_1 = \bar{T}_B / \bar{T}_0, \quad B_1 = \alpha_0 \bar{T}_B / 2 \bar{T}_0^2 - \delta_B / \bar{T}_0$
	WE11	$\alpha_{0i} = \alpha_0 = (\Gamma(1 + 2/m)) / \lambda^2,$ $\delta_B = \Gamma(1 + 1/m) \bar{T}_B / \lambda$
$DT(t_p)$	MM11	$\left(2t_p \sum_{i=1}^N \beta_i / \mu_i + (5/\beta) \left(\sum_{i=1}^N \beta_i / \mu_i \right)^2 - \right.$ $\left. - 4 \sum_{i=1}^N \beta_i / \mu_i^2 \right) / \beta^3$
	GG11	$(\alpha_0 \bar{T}_B^2 + \bar{T}_0^2 (\alpha_B - 2 \bar{T}_B^2)) t_p / \bar{T}_B^3 - \alpha_B \bar{T}_0^2 / \bar{T}_B^2 +$ $+ (\alpha_0 \alpha_B \bar{T}_B^2 + \bar{T}_0^2 (2,5 \alpha_B^2 - 4 \beta_B \bar{T}_B / 3)) / 2 \bar{T}_B^4;$
	WE11	$\beta_B = r(r + 1)(r + 2) \sum_{i=1}^N (\lambda_i / \lambda)^m / \mu_i^3$
$DT_{B3}(t_3)$	MM11	$2t_3 \sum_{i=1}^N \beta_i / \mu_i;$

Продолжение табл. 11

Показатель	Особые условия	Формула
$DT_{вз}(t_3)$	GG11	$t_3 (\alpha_B + \alpha_0 \bar{T}_B^2 / \bar{T}_0^2 - 2\delta_B \bar{T}_B / \bar{T}_0) / \bar{T}_0 + B_2$ $B_2 = \bar{T}_0^{-1} (-\tau_B + 2\gamma_B \bar{T}_B / \bar{T}_0 +$ $+ (\alpha_0 / 2\bar{T}_0) (\alpha_B - 4\beta_0 \bar{T}_B^2 / 3\alpha_0 \bar{T}_0 + 4\bar{T}_B B_1)) + B_1^2$ $\gamma_B = \sum_{i=1}^N \rho_{0i} \alpha_{0i} \bar{T}_{0i}, \sum_{i=1}^N \bar{T}_{0i} \alpha_{0i} = \tau_B$
	WG11	$\rho_{0i} = (\lambda_i / \lambda)^m, \bar{T}_{0i} \approx \rho_{0i} \bar{T}_0, \beta_0 = \Gamma(1 + 3/m) / \lambda^3$
$K_{\Gamma}(t_p)$	MM11	$1 - \sum_{i=1}^N \beta_i \exp(-\mu_i t_p) / (1 + \beta)$
	EE11	$\left(\bar{T}_0 + \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^r I(j, \mu t_p) \right) / (\bar{T}_0 + \bar{T}_B)$
	WE11	$\left(\bar{T}_0 + \sum_{i=1}^N (\lambda_i / \lambda)^m \mu_i^{-1} \sum_{j=1}^r I(\mu_i t_p) \right) / (\bar{T}_0 + \bar{T}_B)$

Пример 6. Для решения задачи на ЭВМ-1 производительностью $c_1 = 100$ тыс. операций в секунду необходимо 6 ч машинного времени. Полагая, что интенсивность отказов $\lambda_1 = 0,05$ ч⁻¹, среднее время восстановления $\bar{T}_{в1} = 1/\mu_1 = 1$ ч, сравнить два метода повышения надежности: структурное резервирование и создание запаса производительности.

Решение. При общем нагруженном дублировании без резерва времени вероятность выполнения задания совпадает с вероятностью безотказной работы $P(t) = \exp(-3\lambda_1 t / (3\lambda_1 + \mu_1)) = 0,975$. При использовании ЭВМ-2 производительностью $c_2 = 200$ тыс. операций время $t_3 = t_{c1}/c_2 = 3$ ч, резерв времени $t_p = 3$ ч. Если при этом $\lambda_2 = \lambda_1$, то вероятность выполнения задания без структурного резервирования согласно формуле из табл. 9 $P_0(t_3, t_p) = 0,991$. Для сравняемых вариантов коэффициентов готовности $K_{\Gamma} = 0,9955$ и $0,9976$, коэффициент оперативной готовности $K_{ог} =$

$= 0,97$ и $0,988$, т. е. и по этим показателям преимущество имеет резервирование времени, создаваемое благодаря запасу производительности. При $\lambda_2 = 2\lambda_1$ $P_0(t_3, t_p) = 0,981$, $K_{\Gamma}(t_p) = 0,9966$, $K_{ог}(t_3, t_p) = 0,974$. Преимущество сохраняется, но оно уже не столь существенно. Полагая затем $c_2 = bc_1$ и $\lambda_2 = a\lambda_1$, находим, что вероятности выполнения задания выравниваются при $a = 2,53$; $b = 2$ или $a = 2$; $b = 1,6$.

Пример 7. Технологическая система имеет распределение наработки Вейбулла-Гнеденко с параметрами $m = 0,7$ и $\lambda = 0,0104$ ч⁻¹ и экспоненциальное распределение времени восстановления с параметром $\mu = 1$ ч⁻¹. Для выполнения задания длительностью $t_3 = 4$ сут. создается резерв времени $t_p = 4$ ч (кратность резервирования 4,2%). Необходимо найти $P_0(t_3, t_p)$, $\bar{T}_{вз}(t_3)$ и $T_{ср}(t_p)$.

Решение. Согласно исходным данным $\rho = (\lambda t_3)^m = 1$, $\gamma = \mu t_p = 4$.

Рассчитывая по точным формулам из табл. 10 при $r = 1$ путем вычисления первых четырех слагаемых, найдем $\underline{P}_0 = 0,9334$; $\overline{P}_0 = 0,9358$. Двусторонние оценки получены из-за отбрасывания, в одной формуле положительных, а в другой — отрицательных слагаемых. Среднее арифметическое $P_0 = (\underline{P}_0 + \overline{P}_0)/2 = 0,9347$. По приближенным формулам (81) при $\lambda y_1 = 0,1$ и $y_2 = 0$ имеем: $\underline{P}_0 = 0,927$; $\overline{P}_0 = 0,952$; $(\underline{P}_0 + \overline{P}_0)/2 = 0,940$.

Здесь расчет проще, но погрешность возрастает.

Пример 8. Система из трех элементов с параметрами $\lambda_1 = 0,02 \text{ ч}^{-1}$, $\lambda_2 = 0,001 \text{ ч}^{-1}$, $\lambda_3 = 0,0001 \text{ ч}^{-1}$, $\mu_1 = 6 \text{ ч}^{-1}$, $\mu_2 = 0,6 \text{ ч}^{-1}$, $\mu_3 = 0,09 \text{ ч}^{-1}$ выполняет задание длительностью 16 ч. При этом допускается задержка в окончании выполнения задания на время $t_p = 20$ мин. Необходимо найти $\overline{P}(t_3, t_p)$, $\overline{T}_{вз}(t_3)$, $DT_{вз}(t_3)$, $T_{ср}(t_p)$, $DT(t_p)$.

Решение. Расчет $\overline{P}(t_3, t_p)$ проведем по приближенной формуле (80) при $n = 3$, $t_3 = 16 \text{ ч}$; $t_p = 0,333 \text{ ч}$. Согласно исходным данным $\rho = 0,3376$; $F_{в}(t_p) = 0,8283$; $F'_{в}(0) = 5,716$; $\gamma = 1,762$; $a = 2,3$; $\gamma_1 = 1,985$; $k = 0,96$. Используя теперь формулы из табл. 9, находим $\overline{P} = P_0(\rho, \gamma) = 0,9356$; $\overline{P}_0(k\rho, \gamma_1) = 0,9491$; $\overline{P} = 0,9363$. Другие характеристики:

$\overline{T}_{вз}(t_3) = 16,1 \text{ ч}$; $DT_{вз}(t_3) = 0,5017 \text{ ч}^2$; $T_{ср}(t_p) = 474,4 \text{ ч}$; $DT(t_p) = 593\,000 \text{ ч}^2$. Выигрыш в надежности по средней наработке $G_T = T_{ср} \times (t_p)/\overline{T}_0 = 10$, где $\overline{T}_0 = 1/\lambda = 47,4 \text{ ч}$.

Системы с обесценивающими отказами и непрерывным контролем (общий случай). Одноканальная система с непрерывным контролем имеет два множества состояний: E_0 — работоспособные и E_1 — неработоспособные. В состояниях $e_i \in E_0$ система за время x приобретает полезную наработку x и не расходует резерв времени. При переходе из состояния $e_i \in E_0$ в состояние $e_j \in E_1$ вся накопленная к этому времени наработка x обесценивается, а резерв времени мгновенно уменьшается на величину x . Если x больше резерва времени, то переход в E_1 приводит сразу же к срыву зада-

ния. При пребывании в состоянии $e \in E_1$ наработка не накапливается, а резерв времени за время y уменьшается на величину y . После возвращения в E_0 выполнение задания начинается заново. Основное допущение математической модели состоит в том, что моменты перехода являются марковскими моментами времени и распределение времени пребывания в новом состоянии зависит лишь от номера состояния и не зависит от траектории, по которой процесс пришел в это состояние.

На основе первичных исходных данных о безотказности и ремонтпригодности элементов системы, о характеристиках задания, системы контроля и системы технического обслуживания определяются следующие исходные данные для модели: $P_{ij}(t)$ — функции вероятностей переходов из e_i в e_j за время t при условии, что начальный момент времени также является моментом перехода. Кроме того, заданы длительность задания t_3 и непополняемый резерв времени t_p .

Вероятность выполнения задания при начальном состоянии определяется из системы интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
 P_i(t_3, t_p) &= 1 - F_i(t_3) + \\
 &+ \sum_{j \in E_0} \int_0^{t_3} P_j(t_3 - x, t_p) dP_{ij}(x) + \\
 &+ \sum_{j \in E_1} \int_0^a P_j(t_3, t_p - y) dP_{ij}(y), \\
 i &\in E_0, \\
 P_i(t_3, t_p) &= \sum_{j \in E} \int_0^{t_p} P_j(t_3, t_p - x) \times \\
 &\times dP_{ij}(x); \quad i \in E_1; \quad E = E_0 \cup E_1, \\
 a &= \min(t_3, t_p), \\
 F_i(t) &= \sum_{j \in E} P_{ij}(t).
 \end{aligned}$$

(83)

После операционного преобразования Лапласа—Стилтьеса при $P_{ij}(t) = 0$; $i \in E_0$, $j \in E_0$ система (83) сво-

дится к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 P_i^*(t_3, \omega) &= 1 - F_i(t_3) + \\
 &+ \sum_{j \in E_1} a_{ij}(t_3, \omega) P_j^*(t_3, \omega), \\
 i \in E_0, a_{ij} &= \int_0^{t_3} e^{-\omega x} dP_{ij}(x); \\
 P_i^*(t_3, \omega) &= \sum_{j \in E} P_{ij}^*(\omega) P_j^*(t_3, \omega), \\
 i \in E_1; \\
 P_i^*(t_3, \omega) &= \omega \int_0^{\infty} e^{-\omega x} P_i(t_3, x) dx.
 \end{aligned} \tag{84}$$

Обратное преобразование может быть выполнено численно [6].

Средний расход резерва времени до выполнения задания определяется из системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_{1i}(t_3) &= \bar{T}_i(t_3) + \sum_{j \in E_1} p_{ij}(t_3) \times \\
 &\times \bar{T}_{1j}(t_3); \quad i \in E_0; \quad \bar{T}_i(t_3) = \\
 &= \int_0^{t_3} x dF_i(x); \\
 \bar{T}_{1i}(t_3) &= \bar{T}_i + \\
 &+ \sum_{j \in E} p_{ij} \bar{T}_{1j}(t_3), \quad i \in E_1; \\
 \bar{T}_i &= \int_0^{\infty} x dF_i(x).
 \end{aligned} \tag{85}$$

Последовательная система с обесценивающими отказами. Дополнительно к условиям, изложенным для систем с необесценивающими отказами, появляется новое условие: после отказа любого из элементов вся накопленная наработка обесценивается. Отказы обнаруживаются с помощью средств встроенного аппаратного контроля с вероятностью $\alpha_i = (\alpha_{0i} \lambda_{0i}(t) +$

$+ \alpha_{ki}(t) \lambda_{ki}(t)) / \lambda_i(t)$, где α_{0i} и α_{ki} — вероятности обнаружения отказов в основной и контрольной аппаратуре; $\lambda_{0i}(t)$ и $\lambda_{ki}(t)$ — интенсивности отказов в основной и контрольной аппаратуре; $\lambda_i(t) = \lambda_{0i}(t) + \lambda_{ki}(t)$, $i = \overline{1, N}$.

Для каждого элемента задаются $F_i(t)$, $F_{vi}(t)$, $\lambda_{0i}(t)$, $\lambda_{ki}(t)$, α_{0i} , α_{ki} . Кроме того, заданы t_3 и t_p . При идеальном контроле $\alpha_{0i} = \alpha_{ki} = 1$. В случае сбоев $T_B = 0$.

Для системы типа ММ11 с одним элементом ($N = 1$) и идеальным контролем расчетные формулы приведены в табл. 12. Среднее значение и дисперсию времени выполнения задания можно рассчитать и в случае произвольных распределений для системы типа GG11. Там же приведены формулы для системы с неполным контролем ($\alpha_i < 1$) при $N = 1$ и $t_p \leq t_3$. Значение $H(t_p)$ является решением интегрального уравнения, записанного в табл. 12 в операционной форме. Решение получается методом итераций.

Пример 9. На ЭВМ с потоком сбоев интенсивностью $\lambda_c = 1 \text{ ч}^{-1}$ решается задача длительностью $t_3 = 2 \text{ ч}$. Система аппаратного контроля обнаруживает и исправляет $\alpha = 90\%$ всех сбоев. Прочие сбои обнаруживаются с задержкой средствами функционального контроля и приводят к обесцениванию наработки. Необходимо рассчитать, при каком значении резерва времени вероятность решения задачи будет не ниже 0,95, и найти среднее значение и дисперсию времени решения задачи.

Решение. Интенсивность разреженного потока сбоев $\lambda = (1 - \alpha) \lambda_c = 0,1 \text{ ч}^{-1}$. Полагая $t_p = t_3$, находим $P(t_3, t_3) = 0,98$, следовательно, требуемый резерв времени $t_p < t_3$. По формуле из табл. 12 находим, что $(1 + \lambda t_p) \exp(-\lambda t_3) = 0,95$ при $t_p = 1,6 \text{ ч}$. Другие показатели; $\bar{T}_{B3}(t_3) = 2,21 \text{ ч}$; $DT_{B3}(t_3) = 0,326 \text{ ч}^2$; $\sigma = 0,57 \text{ ч}$; $r = \sigma / \bar{T}_{B3} = 0,26$.

Системы с отказами двух типов, непрерывным контролем и неполным резервом времени (общий случай). Система содержит три множества состояний: E_0 — работоспособные, E_1 — неработоспособные после необе-

12. Последовательные системы с обесценивающими отказами

Показатель	Особые условия	Формула
Система с идеальным контролем		
$P_0(t_3, t_p)$	$T_B > 0$	$\sum_{i=0}^{[m_t]} (A_i(t_p - it_3) - A_{i+1}(t_p - it_3)) e^{-(i+1)\lambda t_3}$ $A_i(t) = \binom{2i-1}{i} (\rho q)^i +$ $+ \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(i+j-1)! p^i q^j}{i! j! (i-1-j)!} (\lambda t)^{i-1-j} \times$ $\times \left(\frac{i(-1)^{i-j}}{i-j} \lambda t - (i+j) q e^{-(\lambda+\mu)t} \right),$ $i \geq 1; A_0 = 1; \rho = 1 - q = \mu / (\lambda + \mu)$
	$T_B = 0$	$\sum_{i=0}^{[m_t]} (-1)^i \frac{(\gamma - i\rho)^i}{i!} \left(1 + \frac{\gamma - i\rho}{i+1} \right) e^{-(i+1)\rho};$ $A_i(t) = \frac{(-1)^i}{i!} (\lambda t)^i,$ $\rho = \lambda t_3, \gamma = \lambda t_p$
$\Lambda(t_3, t_p)$	$m_t < 1$	$\lambda (1 - A_1(t_p)) e^{-\rho} / P_0(t_3, t_p)$
	$1 \leq m_t \leq 2$	$\lambda + e^{-2\rho} (\lambda (A_1(t_p - t_3) - A_2(t_p - t_3)) +$ $+ A_1'(t_p - t_3) - A_2'(t_p - t_3)) / P_0(t_3, t_p);$ $A_1'(t) = -\lambda \rho (1 - e^{-x});$ $A_2'(t) = (x - 2 + (2 + x) e^{-x}) \lambda \rho^2 q; \quad x = (\lambda + \mu) t$
	$T_B = 0$	$\lambda ((1 + \gamma) e^{-\rho} + \sum_{i=1}^{[m_t]} (-1)^i \frac{(\gamma - i\rho)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-(i+1)\rho} \times$ $\times \left(\left(2 + \frac{1}{i} \right) (\gamma - i\rho) + i + \frac{1}{i} (\gamma - i\rho)^2 \right) / P_0(t_3, t_p).$ $\rho = \lambda t_3, \gamma = \lambda t_p$

Продолжение табл. 12

Показатель	Особые условия	Формула
$T_{\text{ср}}^{\text{II}}(t_p)$	$T_{\text{в}} = 0$	$\frac{1}{\lambda} \left\{ 1 + \gamma - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^i}{(i+1)^{i+2}} \left(e^{-\gamma(1+1/i)} + \frac{\gamma}{i!} \times \right. \right.$ $\left. \left. \times \left(-\gamma \left(1 + \frac{1}{i} \right) \right)^i - \sum_{j=0}^i \frac{1}{j!} \left(-\gamma \left(1 + \frac{1}{i} \right) \right)^j \right) \right\}$
$T_{\text{ср}}(t_p)$	$T_{\text{в}} > 0$	$\frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} ((\lambda+\mu)t_p - 1 + \right.$ $\left. + \exp(-(\lambda+\mu)t_p) \right)$
$DT_{\text{вз}}(t_3)$	GG11	$(\beta_2 F(t_3) + 2\bar{T}_{\text{в}}\bar{T}_0(t_3) + \alpha_2(t_3))/(1 - F(t_3)) +$ $+ (\bar{T}_{\text{в}}F(t_3) + \bar{T}_0(t_3))^2/(1 - F(t_3))^2;$ $\beta_2 = \int_0^{\infty} x^2 dF_{\text{в}}(x), \quad \alpha_2(t_3) = \int_0^{t_3} x^2 dF(x)$
	MM11	$\bar{T}_{\text{вз}}^2(t_3) + \frac{2}{\mu^2} (e^{\rho} - 1) \left(1 + \frac{\mu}{\lambda} \right) +$ $+ \frac{2}{\lambda^2} (e^{\rho} - 1 - \rho e^{\rho}) - 2t_3 e^{\rho}/\mu$
$\bar{T}_{\text{вз}}(t_3)$	GG11	$t_3 + (\bar{T}_{\text{в}}F(t_3) + \bar{T}_0(t_3))/(1 - F(t_3));$ $\bar{T}_0(t_3) = \int_0^{t_3} x dF(x)$
	MM11	$\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \right) (\exp(\lambda t_3) - 1), \quad \rho = \lambda t_3$
$K_{\text{Г}}(t_p)$	GG11	$T_{\text{ср}}^{\text{II}}(t_p)/(T_{\text{ср}}^{\text{II}}(t_p) + \bar{T}_{\text{в}})$

Продолжение табл. 12

Показатель	Особые условия	Формула
Система с неполным контролем		
$P_0(t_3, t_p)$	GD11 $T_B = 0$ $t_p \leq t_3$	$(1 - F_0(t_3))(1 + H(t_p)), H^*(s) = B^*(s)/(1 - B^*(s))$ $B(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_{0i}(t), P_{0i}(t) =$ $= \int_0^t (1 - F_0(x)) \lambda_i(x) dx;$ $F_0(t) = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - F_i(t)), \lambda_i(t) =$ $= F'_i(t)/(1 - F_i(t))$
	WD11 $T_B = 0$ $t_p \leq t_3$	$\exp\left(-\sum_{i=1}^N (\lambda_i t_3)^m\right) (1 + H(t_p)), \lambda^m = \sum_{i=1}^N \lambda_i^m;$ $B(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)^m (1 - e^{-(\lambda t)^m});$ $\alpha_i = \frac{\alpha_{0i} \lambda_{0i}^m + \lambda_{ki}^m}{\lambda_{0i}^m + \lambda_{ki}^m}$
	GD11 $T_B = 0$ $t_p = \infty$	$(1 - F_0(t_3))/(1 - F_0(t_3) +$ $+ \sum_{i=1}^N \beta_i P_{0i}(t_3)), \beta_i = 1 - \alpha_i$
$\bar{T}_{B3}^y(t_3)$	GG11 $T_B > 0$	$t_3 + \sum_{i=1}^N \alpha_i (P_{0i}(t_3) \bar{T}_{Bi} + \bar{T}_{0i}(t_3))/(1 - B(t_3)),$ $\bar{T}_{0i}(t_3) = \int_0^{t_3} x dP_{0i}(x)$
	GD11 $T_B = 0$	$t_3 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{T}_{0i}(t_3)/(1 - B(t_3))$

Продолжение табл. 12

Показатель	Особые условия	Формула
$\bar{T}_{вз}^y(t_3)$	WG11	$t_3 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\bar{T}_{вi} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right)^m (1 - e^{-(\lambda t_3)^m}) + \right. \\ \left. + \bar{T}_{oi}(t_3) \right) / \left(1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right)^m (1 - e^{-(\lambda t_3)^m}) \right);$ $\bar{T}_{oi}(t_3) = \frac{m}{\lambda} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right)^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t_3)^{mj+m+1} (-1)^j}{j! (mj+m+1)}$
$DT_{вз}^y(t_3)$	GG11	$\sum_{i=1}^N \alpha_i (\alpha_{2i}(t_3) + 2\bar{T}_{вi}\bar{T}_{oi}(t_3) + \\ + \beta_{2i} P_{oi}(t_3)) / (1 - B(t_3)) + (\bar{T}_{вз}^y(t_3) - t_3)^2;$ $\alpha_{2i}(t_3) = \int_0^{t_3} x^2 dP_{oi}(x), \beta_{2i} = \int_0^{\infty} x^2 dF_{вi}(x)$
	WG11	$\alpha_{2i}(t_3) = \frac{m}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right)^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{(\lambda t_3)^{mj+m+2}}{(mj+m+2)}$

сценивающих отказов, E_2 — неработоспособные после обесценивающих отказов. Моменты изменения состояний являются марковскими моментами времени. Времена пребывания в заданном состоянии имеют произвольные распределения. Поэтому процесс функционирования системы является полумарковским случайным процессом.

Заданы функции вероятностей переходов $P_{ij}(t)$, $i, j \in E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$; вектор вероятностей начальных состояний $\{a_i\}$, $i \in E$; длительность задания t_3 , непополняемый резерв времени t_p .

Вводятся вероятности $P_i(t_3, t, x)$ того, что задание t_3 будет выполнено не позднее времени t при условии, что к начальному моменту система находилась в состоянии i и уже поработала в счет задания время x . Кроме того,

рассматриваются вероятности $P_i \times \times(t_3, t) = P_i(t_3, t, 0)$. Изображение этих функций по Лапласу—Карсону

$$P_i^*(t_3, s, x) = s \int_0^{\infty} e^{-st} P_i(t_3, t, x) dt$$

удовлетворяет системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} i \in E_0: & \frac{dP_i^*(t_3, s, x)}{dx} - (s + \lambda_i(x)) \times \\ & \times P_i^*(t_3, s, x) + \sum_{j \in E_0 \cup E_1} \lambda_{ij}(x) \times \\ & \times P_j^*(t_3, s, x) + \sum_{j \in E_2} \lambda_{ij}(x) \times \\ & \times P_j^*(t_3, s) = 0; \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & i \in E_1: P_i^*(t_3, s, x) = \\
 & = \sum_{j \in E_0 \cup E_1} P_{ij}^*(s) P_j^*(t_3, s, x) + \\
 & + \sum_{j \in E_2} P_{ij}^*(s) P_j^*(t_3, s); \\
 & \lambda_i(x) = \frac{F_i'(x)}{1 - F_i(x)}; \\
 & i \in E_2: P_i^*(t_3, s) = \\
 & = \sum_{j \in E} P_{ij}^*(s) P_j^*(t_3, s); \\
 & \lambda_{ij}(x) = \frac{P_{ij}'(x)}{1 - F_i(x)}; P_{ij}^*(s) = \\
 & = \int_0^\infty e^{-sx} dP_{ij}(x).
 \end{aligned}
 \tag{86}$$

Систему уравнений решают следующим образом. Сначала с помощью системы алгебраических уравнений [второе и третье соотношения в (86)] из (86) исключают $P_i^*(t_3, s, x)$, $i \in E_1$; $P_i^*(t_3, s)$, $i \in E_2$. Затем решается система дифференциальных уравнений относительно $P_i^*(t_3, s, x)$, $i \in E_0$. Полагая затем $x = 0$, получают систему алгебраических уравнений относительно $P_i^*(t_3, s)$, $i \in E_0$, и после ее решения выполняем обратное преобразование по s аналитически или с помощью численной процедуры [6].

Последовательная система с отказами двух типов. Система из N элементов имеет отказы двух типов: необесценивающие интенсивностью $\lambda_{1i} = p_i \lambda_i$ и обесценивающие интенсивностью $\lambda_{2i} = (1 - p_i) \lambda_i$. После отказа в системе проводится восстановление работоспособности в течение времени, имеющего распределение $F_{B1i}(t)$ и $F_{B2i}(t)$ для отказов соответственно первого и второго типов. Контроль работоспособности идеальный. Отказ системы наступает, когда суммарные потери времени на восстановление и повторе-

ние обесцененных работ превысят непополняемый резерв времени t_p .

Заданы интенсивности отказов λ_{1i} , λ_{2i} , $i = \overline{1, N}$, функции распределения $F_{B1i}(t)$ и $F_{B2i}(t)$, длительность задания t_3 и непополняемый резерв времени t_p .

В табл. 13 приведены формулы для вероятности и среднего времени выполнения задания. Вероятность $P_0 \times \times (t_3, t_p)$ может быть рассчитана для системы ММ11 в случаях: а) $F_{B1ij}(t) = 1 - \exp(-\mu t)$; б) $F_{B1ij}(t) = 1 - \exp(-\mu_1 t)$, $T_{B2i} = 0$; в) $F_{B1i}(t) = 1 - \exp(-\mu_{1i} t)$; $T_{B2} = 0$, $t_p \leq t_3$; г) $F_{B1i}(t) = 1 - \exp(-\mu_{1i} t)$; $F_{B2i}(t) = 1 - \exp(-\mu_2 t)$, $t_p \leq t_3$. В последнем случае свертку функций $F_{B1}(t)$ выполняют численно. Для $\bar{T}_{B3} \times \times (t_3)$ в табл. 13 приведены формулы не только для экспоненциальных распределений, но и для распределения наработки Вейбулла между отказами обоих типов (система WГ11), и для произвольного распределения наработки между отказами второго типа [система (МГ) Г11].

Пример 10. На ЭВМ, имеющей в своем составе арифметико-логическое (АЛУ), управляющее (УУ) и запоминающее (ЗУ) устройства, решают задачу длительностью 8 ч. Интенсивности отказов устройств равны $\lambda_{УУ} = \lambda_{АЛУ} = 0,02 \text{ ч}^{-1}$; $\lambda_{ЗУ} = 0,01 \text{ ч}^{-1}$. При отказе ЗУ могут возникнуть неконтролируемые и неустраняемые искажения хранимой информации. Поэтому после восстановления работоспособности ЗУ задача решается заново. После отказа АЛУ или УУ счет возобновляется с той операции, на которой он был приостановлен. Необходимо найти вероятность решения задачи в течение 10 и 12 ч, полагая, что среднее время восстановления $\bar{T}_{B1} = 1 \text{ ч}$.

Решение. По условиям задачи находим $\lambda_1 = 0,04 \text{ ч}^{-1}$, $\lambda_2 = 0,01 \text{ ч}^{-1}$, $\lambda = 0,05 \text{ ч}^{-1}$, $\gamma = \mu t_p = 2$ при $t = 10 \text{ ч}$ и $\gamma = 4$ при $t = 12 \text{ ч}$. По формуле табл. 13 при $\mu_1 = \mu_2 = 1$ вычисляем $P_0(t_3, t_p) = 0,886$. При $\lambda_1 = 0$ вероятность $P_0(t_3, t_p) = 0,931$, а при $\lambda_2 = 0$ $P_0(t_3, t_p) = 0,949$. При расчете по схеме независимых событий $P_0(t_3, t_p) = 0,931 \cdot 0,949 = 0,883$. Это достаточно близкая к точному значению

13. Последовательная система с отказами двух типов

Показатель	Условия	Формула
$P_0(t_3, t_p)$	MM11 $\mu_{ij} = \mu$	$e^{-\rho_1} \left(\left(1 - \frac{\lambda_2 \mu}{(\lambda + \mu)^2} \right) A(\rho_1, \gamma) + \frac{\lambda_2}{\lambda + \mu} B(\rho_1, \gamma) + \frac{\lambda_2 \mu}{(\lambda + \mu)^2} e^{-\rho_1 - \gamma - \lambda t_p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\mu \rho_1 / \lambda)^i}{i!} I(i - \lambda t_p) \right),$ $\rho_1 = \lambda_1 t_3, \quad \gamma = \mu t_p, \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}, \quad A(\rho_1, \gamma) =$ $= e^{-\rho_1} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_1^i}{i!} I(i, \gamma) \right), \quad B(\rho_1, \gamma) =$ $= \gamma - \sum_{i=0}^{\infty} I(i+1, \rho_1) I(i+1, \gamma)$
	MM11 $\mu_{1j} = \mu_1$ $T_{B2} = 0$	$e^{-\rho_1} \left(\left(1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \mu_1)^2} \right) A(\rho_1, \gamma) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \mu_1} B(\rho_1, \gamma) + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \mu_1)^2} \times \right.$ $\left. \times \exp(-\gamma - \lambda_1(t_3 + t_p)) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\mu_1 t_3)^i}{i!} I(i, -\lambda_1 t_p) \right)$
	MM11 $F_{Bij}(t) = 1 - e^{-\mu_{ij} t}$	$e^{-\lambda t_3} \left(1 + \frac{\lambda_2 \mu_2}{(\lambda_2 + \mu_2)^2} (e^{-x} - 1 - x) \right) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_1^i}{i!} F_{B1}^{*(i)}(t_p) \right), \quad t_p \leq t_3$ $x = (\lambda_2 + \mu_2) t_p, \quad F_{B1}(t_p) = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_{1i}}{\lambda_1} (1 - e^{-\mu_{1i} t_p}),$ $\mu_{2i} = \mu_2$

Продолжение табл. 13

Показатель	Условия	Формула
$P_0(t_3, t_p)$	MM11 $F_{B1i}(t) = 1 - e^{-\mu_{1i}t}$	$e^{-\lambda t_3} (1 + \lambda_2 t_p) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_1^i}{i!} I(i, \gamma) \right),$ $t_p \leq t_3, \quad T_{B2} = 0$ $\gamma = -\ln \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_{1i}}{\lambda_1} e^{-\mu_{1i} t_p}$
$\bar{T}_{B3}(t_3)$	MG11	$(1 + \lambda_1 \bar{T}_{B1} + \lambda_2 \bar{T}_{B2}) (\exp \rho_2 - 1) / \lambda_2, \quad \bar{T}_{Bij} = \bar{T}_{Bi}$
	WG11	$t_3 + \rho_1 \bar{T}_{B1} + \bar{T}_{B2} (e^{\rho_2} - 1) + e^{\rho_2} (\alpha_1(t_3) + \lambda_1^m \bar{T}_{B1} \alpha_m(t_3))$ $\bar{T}_{Bi} = \sum_{j=1}^N (\lambda_{ij} / \lambda_i)^m \bar{T}_{Bij}, \quad i = 1, 2;$ $\rho_i = (\lambda_i t_3)^m, \quad \lambda_i^m = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}^m$ $\lambda^m = \lambda_1^m + \lambda_2^m, \quad \alpha_i(t_3) = \int_0^{t_3} m \lambda_2^m \tau^{m-1+i} \exp(-(\lambda_2 \tau)^m) d\tau$
	(MG) G11	$t_3 (1 + \lambda_1 \bar{T}_{B1}) + (\bar{T}_{B2} F_2(t_3) + (1 + \lambda_1 \bar{T}_{B1}) \bar{T}_{02}(t_3)) / (1 - F_2(t_3))$ $\bar{T}_{0i}(t_3) = \int_0^{t_3} x dF_i(x), \quad 1 - F_2(t) = \prod_{i=1}^N (1 - F_{2i}(t))$

оценка снизу. При $t = 12$ ч точное значение вероятности $P_0(t_3, t_p) = 0,938$, приближенное значение $P_0 \times X(t_3, t_p) = 0,951 \cdot 0,99 = 0,942$ дает оценку сверху. Среднее время выполнения задания $\bar{T}_{B3} = 100 \cdot 1,05 \times (\exp 0,08 - 1) = 8,75$ ч.

Системы с многоэтапным заданием. Разбиение задания на этапы с запоминанием промежуточных результатов является одним из способов уменьше-

ния потерь от обесценивания наработки. Однако на организацию промежуточных «контрольных точек» требуется дополнительное время. Это уменьшает общий резерв времени, который можно использовать для восстановления работоспособности и повторения работ. Поэтому существует оптимальная длительность одного этапа. При достаточно общих условиях наиболее выгодно по критерию максимума про-

изводительности разбивать задание на этапы одинаковой длительности. Далее всюду она считается равной $\tau = t_3/n$, где n — число этапов. После выполнения очередного этапа в отсутствие отказов создается контрольная точка, и на ее создание затрачивается время t_K , включаемое в расход резерва времени. Таким образом, даже при безотказной работе резерв времени уменьшается на величину nt_K и становится равным $t_{p1} = t_p - nt_K$. При появлении отказа на i -м этапе он сразу обнаруживается, и часть наработки в пределах текущего этапа обесценивается. Задание оказывается выполненным, если в течение $t = t_3 + t_p$ выполнены все его этапы. Поэтому время выполнения задания можно представить как сумму случайных величин $T_{вз\ i}(\tau)$, имеющих смысл времени выполнения i -го этапа. Другие условия функционирования варьируются, и в соответствии с этим формируются пять моделей надежности. В модели 1 все отказы частично обесценивающие, они приводят к повторению только одного этапа задания. В модели 2 в каждом из N элементов могут возникать отказы двух типов: необесценивающие и обесценивающие текущий этап соответственно с интенсивностями λ_{1i} и λ_{2i} . В модели 3 у элементов также отказы двух типов: с вероятностью p_i отказ обесценивает наработку одного этапа, а с вероятностью $1 - p_i$ — всю накопленную наработку. В модели 4 условия функционирования такие же, как в модели 1, но контроль работоспособности неполный: вероятность обнаружения отказов $\alpha_{0i} < 1$. Контрольная аппаратура самоконтролируется полностью ($\alpha_{ki} = 1$) и имеет интенсивность отказов λ_{ki} . В модели 5 длительность этапа является случайной величиной с распределением $F_3(t)$, время образования контрольной точки τ_K также является случайной величиной с распределением $F_K(t)$. Интенсивность отказов i -го элемента в интервале τ_K равна λ_i^* , а время восстановления после такого отказа имеет распределение $F_{вi}^*(t)$. Прочие условия функционирования такие же, как в модели 1.

Заданы интенсивности отказов λ_i , вероятности возникновения отказов

первого типа p_i , распределения времени восстановления $F_{вi}(t)$, длительность задания t_3 , время образования контрольной точки t_K , непополняемый резерв времени t_p . Число этапов задают заранее или вычисляют оптимальное значение по заданному критерию: минимуму среднего времени выполнения задания (n_{01}) или максимуму вероятности выполнения задания (n_{02}). В модели 2, кроме того, задается доля необесценивающих α_{1i} , обесценивающих α_{2i} и необнаруженных отказов $\beta_i = 1 - \alpha_{1i} - \alpha_{2i}$, где $\alpha_{ki} = (1 - \beta_i) \lambda_{ki} / \lambda_i$, $k = 1, 2$. В модели 4 задаются λ_{0i} , λ_{ki} и α_{0i} . В модели 5 задаются также λ_i^* , $F_{вi}^*(t)$, а вместо t_3 и t_K распределения $F_3(t)$ и $F_K(t)$.

Для моделей 1, 2, 4 и 5 расчетные формулы приведены в табл. 14. Модель 3 представлена формулой для расчета $T_{вз}$.

Пример 11. В системе передачи данных при отсутствии отказов для передачи сообщений требуется 15 мин непрерывной работы. Для уменьшения последствий отказов сообщение разбивают на три равные части, передаваемые как самостоятельные сообщения. При этом длина каждого сообщения увеличивается на 10%. Необходимо определить вероятность передачи сообщения за 30 мин, полагая, что в среднем каждые 5 ч работоспособность тракта нарушается в среднем на 6 мин. Распределения наработки и времени восстановления экспоненциальные.

Решение. По исходным данным определяем $\lambda(t_3 + nt_K) = 0,2 \cdot 1,1 \times 0,25 = 0,055$, $\lambda t_{p1} = 0,2(0,5 - 0,275) = 0,045$, $(\lambda + \mu)t_{p1} = 2,295$, $(\lambda + \mu)(t_{p1} - t_3/3 - t_K) = 1,346$, $n = 3$, $A_1(t_{p1}) = 0,0269$, $A_2(t_{p1}) = 0,0002$, $A_1(t_{p1} - t_3/3 - t_K) = 0,0117$. Вероятность передачи сообщения: $P(t_3, t_p) = \exp(-0,055)(1 - 3(-0,0269) + 3 \cdot 0,0002 + 3 \times (-0,0117) \exp(-0,055/3)) = 0,991$. При $n = 1$ и $t_K = 0$ $P(t_3, t_p) = 0,983$. При разбиении сообщения на три части вероятность передачи сообщения за отведенное время увеличилась, хотя объем пе-

14. Системы с многоэтапным заданием

Показатель	Формула
$P_0(t_3, t_p, n)$	<p style="text-align: center;">М о д е л ь 1</p> $e^{-\rho} \sum_{i=0}^{[nm_t]} \binom{n-1+i}{i} e^{-i\rho/n} \sum_{j=0}^n A_{i+j} (\lambda t_{p1} - i\rho/n) (-1)^j \binom{n}{j}, \quad \rho = \lambda(t_3 + nt_K)$ $m_t = (t_p - nt_K)/(t_3 + nt_K), \quad t_{p1} = t_p - nt_K,$ $A_i(x) - \text{см. табл. 12,}$ $T_B = 0 : I(n, -\lambda(t_{p1} - t_3)) I[t_{p1} - t_3] +$ $+ \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \frac{(-1)^{n+i}}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n-1}{j} (\lambda t_{p1} -$ $- \rho(1 - i/n)^{n-1-j} \frac{(i-1)!}{(i-1-j)!} \exp(-\rho +$ $+ i\rho/n + \lambda t_{p1}) I[t_{p1} - t_3(1 - i/n)]$
$\Lambda(t_3, t_p, n)$	$\lambda e^{-\rho} \sum_{i=0}^{[nm_t]} e^{-i\rho/n} \binom{n-1+i}{i} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \times$ $\times \frac{i}{n} (A_{i+j}(\lambda t_{p1} - i\rho/n) + (-1)^j A'_{i+j}(\lambda t_{p1} -$ $- i\rho/n)) / P_0(t_3, t_p, n) + \lambda,$ $A'_i(x) - \text{см. табл. 12}$
n_{01}	$\lambda t_3 / \sqrt{2(1 - \exp(-\gamma))}, \quad \gamma = \lambda t_K$
n_{02}	$t_3 (\sqrt{m_t + 1} - 1) / t_K, \quad m_t = t_p / t_3$
$\bar{T}_{B3}(t_3, n)$	$MG11 : n(1 + \lambda \bar{T}_B) (\exp(\lambda \theta) - 1) / \lambda,$ $\bar{T}_B = \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{T}_{Bi} / \lambda, \quad \theta = t_3/n + t_K$ $GG11 : t_3 + nt_K + n(\bar{T}_B F(\theta) + \bar{T}_0(\theta)) / (1 - F(\theta)),$ $\bar{T}_0(\theta) = \int_0^\theta x dF(x)$

Продолжение табл. 14

Показатель	Формула
$\bar{T}_{вз}(t_3, n_{01})$	$t_3 (1 + \lambda \bar{T}_в) (\exp(\sqrt{2(1 - \exp(-\gamma))} + \gamma) - 1) / \sqrt{2(1 - \exp(-\gamma))}$
$DT_{вз}(t_3, n)$	$\frac{1}{n} \bar{T}_{вз}^2(t_3, n) + n(e^{\lambda\theta} - 1) (\beta_2 + 2\bar{T}_в/\lambda - 2\theta/\lambda) +$ $+ 2(n(e^{\lambda\theta} - 1) - \lambda t_3 - n\lambda t_K) / \lambda^2 - 2\bar{T}_в(t_3 + nt_K) e^{\lambda\theta},$ $\beta_2 = \int_0^{\infty} x^2 dF_в(x)$
Модели 2 и 3	
$P(t_3, t_p, n)$	$e^{-\rho} (\omega + \lambda - a_1(\omega))^n \exp(n\theta a_1(\omega)) / (\omega + \lambda - a_1(\omega) - a_2(\omega) (1 - \exp(-\theta(\omega + \lambda - a_1(\omega))))^n,$ $a_i(\omega) = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} F_{в ij}^*(\omega),$ $\rho = \lambda(t_3 + nt_K), \quad \lambda_{1j} = p_j \lambda_j, \quad \lambda_{2j} = (1 - p_j) \lambda_j, \quad \beta = 0,$ $F_{в ij}^*(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\omega x} dF_{в ij}(x)$ $\bar{T}_{вт} = 0: e^{-\rho_2} \sum_{i=0}^{[nm_t]} (-1)^i \binom{n-1+i}{i} e^{-i\rho_2/n} \times$ $\times \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\Lambda_2(t_{p1} - i\rho_2/n))^{i+j} / (i+j)!$ $\rho_2 = \Lambda_2(t_3 + nt_K), \quad \Lambda_2 = \sum_{i=1}^N (1 - p_i) \lambda_i,$ $m_t = (t_p - nt_K) / (t_3 + nt_K)$
τ_{01}	$\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2(\alpha_2 + \beta \exp((\alpha_2 + \beta)\gamma)) (A(1 - \exp(-(\alpha_2 + \beta)\gamma)) + B\gamma)}{(\alpha_2 + \beta)(A\alpha_2 + 2B\alpha_2 - \beta A)}},$ $A = \alpha_2(1 + \rho_1) / (\alpha_3 + \beta) + \rho_2; \quad B = \beta(1 + \rho_1);$

Продолжение табл. 14

Показатель	Формула
τ_{01}	$\gamma = \lambda t_K; \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^N (1 - \beta_j) \lambda_{ij} / \lambda, \quad \lambda = \sum_{i=1}^N (\lambda_{1i} + \lambda_{2i}),$ $\beta = 1 - \alpha_1 - \alpha_2, \quad \Lambda_3 = \sum_{i=1}^N \beta_i (\lambda_{1i} + \lambda_{2i})$
$\bar{T}_{вз}^y(t_3, n)$	$\frac{n}{\Lambda_2 + \Lambda_3 e^{a\theta}} \left((e^{a\theta} - 1) \left(\frac{\Lambda_2}{a} (1 + \rho_1) + \rho_2 \right) + \Lambda_3 e^{a\theta} \times \right.$ $\left. \times (1 + \rho_1) \theta \right), \quad \rho_i = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \bar{T}_{вз} ij,$ $a = \Lambda_2 + \Lambda_3, \quad \theta = t_3/n + t_K$
$\bar{T}_{вз}^y(t_3, n_{01})$	$\frac{t_3}{\lambda \tau_{01}} (A (e^{(\alpha_2 + \beta)(\gamma + \lambda \tau_{01})} - 1) + B (\lambda \tau_{01} +$ $+ \gamma) e^{(\alpha_2 + \beta)(\gamma + \lambda \tau_{01})}) / (\alpha_2 + \beta \exp((\alpha_2 + \beta)(\gamma + \lambda \tau_{01})))$
$\bar{T}_{вз}(t_3, n)$ Модель 3	$t_3 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(1 - \rho) i \theta \exp(-i\lambda\theta) - 1/\lambda - \bar{T}_в}{\rho + (1 - \rho) \exp(-i\lambda\theta)} +$ $+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda} + \bar{T}_в - (1 - \rho) \theta \exp(-i\lambda\theta) - \right.$ $\left. - \rho \theta \exp(-\lambda\theta) \right) / (\rho \exp(-\lambda\theta) + (1 - \rho) \exp(-i\lambda\theta))$
<p>Модель 4</p>	
$P_0(t_3, t_{p1}, n)$	$e^{-\rho} \sum_{i=0}^{[nm_t]} e^{-i\rho/n} \binom{n-1+i}{i} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j A_{i+j} \times$ $\times (t_{p1} - i\theta), \quad m_t = t_{p1}/n\theta$ $MD11: A_n(t_{p1}) = \sum_{i=0}^{[t_{p1}/T_в]} \alpha^{n+i} \binom{n-1+i}{i} I(n +$ $+ i, \lambda (t_{p1} - (n + i) T_в))$

Продолжение табл. 14

Показатель	Формула
$P_0(t_3, t_p, n)$	$T_B = 0: A_n(t_{p1}) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n I(n, \beta \lambda t_{p1}), \quad \alpha = 1 - \beta =$ $= \sum_{i=1}^N (\alpha_{0i} \lambda_{0i} + \lambda_{ki}) / \lambda$
$P_0(t_3, \infty, n)$	$\exp(-n\lambda\theta) (\beta + \alpha \exp(-\lambda\theta))^{-n},$ $\theta = t_3/n + t_k$
τ_{01}	$\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{(2(\alpha + \beta e^\gamma)(1 - e^{-\gamma} + \beta\gamma/\alpha(1 + \lambda\bar{T}_B)))/(1 - 2\beta\lambda\bar{T}_B/(1 + \lambda\bar{T}_B))}{\bar{T}_B = \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{T}_{Bi} / \lambda}}$
$\bar{T}_{B3}^y(t_3, n)$	$n \left(\beta\theta + (1 - e^{-\lambda\theta}) \left(\alpha + \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i \bar{T}_{Bi} \right) \right) / (\beta + \alpha e^{-\lambda\theta})$
$\bar{T}_{B3}^y(t_3, n_0)$	$n_0\theta + \frac{n_0}{\lambda} \left(\left(\alpha + \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i \bar{T}_{Bi} \right) (e^{\lambda\theta} - 1) - \alpha\lambda\theta \right) / (\beta e^{\lambda\theta} + \alpha)$
$DT_{B3}^y(t_3, n)$	$\frac{2n}{\lambda^2} \left(\alpha I(3, \lambda\theta) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i \bar{T}_{Bi} I(2, \lambda\theta) + \right.$ $\left. + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i \beta_{2i} (1 - e^{-\lambda\theta}) \right) / (\beta + \alpha e^{-\lambda\theta}),$ $\beta_{2i} = \int_0^\infty x^2 dF_i(x)$
$\bar{C}_{cp}(t_3, n_0)$	$t_3 / \bar{T}_{B3}^y(t_3, n_0)$

Продолжение табл. 14

Показатель	Формула
Модель 5	
$P_0(t_3, t_p, n)$	$\sum_{i=0}^{[t_{p1}/\theta]} (-1)^i \binom{n-1+i}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (\lambda^*)^j (\lambda - \lambda^*)^{i-j} \times$ $\times \exp\left(\lambda t_3 \left(1 + \frac{i}{n}\right) - (n+j)\lambda^* t_K\right) \sum_{r=0}^{n+j} \binom{n+j}{r} \times$ $\times \lambda^r R_{ri}(t_p - it_3/n - (n+j)t_K)$ $R_{ri}(z) = \sum_{v=0}^r \frac{z^{r-v} (-1)^v (i-1-v)!}{(r-v)! v! (i-1)! (\lambda^*)^{i+v}} +$ $+ \sum_{v=0}^{i-1} \frac{z^{i-v-1} (r+v)! (-1)^{r+1} e^{\lambda^* z}}{(i-v-1)! v! r! (\lambda^*)^{r+v+1}}$ $z = t_p - it_3/n - (n+j)t_K$
$\bar{T}_{B3}(t_3, n)$	$\frac{n}{\lambda} e^{\lambda^* t_K} (e^{\lambda t_3/n} - 1) \left(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{T}_{Bi}\right) +$ $+ \frac{n}{\lambda^*} (e^{\lambda^* t_K} - 1) \left(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i^* \bar{T}_{Bi}^*\right), t_3 = \text{const}$ $\frac{n}{F_3^*(\lambda) F_K^*(\lambda^*)} \left(\frac{1}{\lambda} \bar{F}_3^*(\lambda) \left(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{T}_{Bi}\right) +$ $+ \frac{1}{\lambda^*} F_3^*(\lambda) \left(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{T}_{Bi}^* \bar{F}_K^*(\lambda^*)\right)$ $F_3^*(\lambda) = 1 - \bar{F}_3^*(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dF_3(x),$ $F_K^*(\lambda^*) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^* x} dF_K(x)$
n_0	$\lambda t_3 / \sqrt{b}, \quad b = \frac{\lambda}{\lambda^*} (e^{\lambda^* t_K} - 1) \left(1 +$ $+ \sum_{i=1}^N \lambda_i^* \bar{T}_{Bi}^*\right) \left/ \left(1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{T}_{Bi}\right)\right.$

редаваемой информации возрос на 10 %.

Пример 12. На ЭВМ с потоком сбоев интенсивностью $\lambda = 1 \text{ ч}^{-1}$ и полнотой аппаратного контроля $\alpha = 0,9$ решается задача длительностью 2 ч. Полагая, что сбои, обнаруженные аппаратным контролем, немедленно исправляются, а прочие сбои обнаруживаются с некоторой задержкой средствами функционального контроля, найти резервное время, обеспечивающее вероятность выполнения задания не менее 0,95 при разбиении задания на n этапов ($n = 100$) с временем образования контрольной точки $t_k = 1$ с. Найти оптимальные длительности этапов и значения показателей надежности при оптимальном разбиении, полагая, что резерв времени не меняется.

Решение. При 100 этапах $\tau = t_3/n = 120/100 = 1,2$ мин. Если $t_{p1} = \tau$, то $\lambda t_{p1} = 0,002$, и в формуле из табл. 14 для модели 1 надо взять $i = 0$, $A_j(t) = (-1)^j (\lambda t)^j / j!$. Тогда $P(t_3, t_p) = \exp(-0,2) (1 + 100 \times 0,002 + \binom{100}{2} 0,002^2/2 + \binom{100}{3} \times 0,002^3/6) = 0,991 > 0,95$. Поэтому $t_{p1} < \tau$. Вычисляя по той же формуле вероятность выполнения задания как функцию t_p , находим, что $P(t_3, t_p) = 0,95$ при $t_{p1} = 0,0155 \text{ ч} = 56 \text{ с} < \tau$, а $t_p = 56 + 101 = 157 \text{ с}$, т. е. к минимальному времени $t_3 = 2$ ч надо добавить $t_p = 2,62$ мин (кратность резервирования $m_t = 2,2$ %). При этом вероятность выполнения задания увеличится от 0,82 до 0,95. Оптимальная длительность этапа по критерию максимума вероятности $\tau_{02} = 92$ с. Оптимальное число этапов $n_{02} = 7200/92 = 78$ с. При этом $t_{p1} = t_p - n_{02} t_k = 157 - 78 = 79$ с и вероятность $P_0(t_3, t_p, n_{02}) = 0,963$. Среднее время выполнения задания при 100 этапах $\bar{T}_{вз} = 100 \cdot 10 \times (\exp(0,00203) - 1) = 2,03$ ч. Дисперсия $DT_{вз} = 2 \cdot 0,002^2/100 - 100 \times (\exp(0,002) - 1) 20 \cdot 0,02 + 200 \cdot 100 \times (\exp(0,002) - 1,002) = 4 \cdot 10^{-8} \text{ ч}^2$; $\sigma = 2 \cdot 10^{-4} \text{ ч}$; $r = \sigma/\bar{T}_{вз} = 10^{-4}$. Оп-

тимальное число этапов $n_{01} = 720/\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 3600} = 27$, а $\bar{T}_{вз}(t_3, n_{01}) = 2,015$ ч.

5. МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Многоканальное соединение элементов является одним из способов создания запаса производительности, который является источником непополняемого резерва времени. Отсюда следует, что в многоканальных системах (МС) резерв времени создается только в том случае, когда для системы может быть введено понятие производительности, а целью ее функционирования является производство некоторого объема продукции при определенных ограничениях на процесс производства. Так, например, многоканальное соединение может применяться в информационных, энергетических, транспортных, измерительных, технологических системах и других, в которых соответственно информация, энергия или энергоноситель, изделия машиностроения, нефтехимии и другие являются производимой продукцией. Наоборот, если понятие производительности для системы не имеет смысла (например, для радио- или телевизионных приемников, электронных систем аварийной защиты, выполняющих включение или отключение аппаратуры по особым событиям), то многоканальное соединение не создает резерва времени и равносильно нагруженному структурному резервированию.

В многоканальных системах процесс функционирования существенно зависит от правил технического обслуживания и действий после первого отказа. Если при отказе любого из параллельных каналов вся система приостанавливает работу до окончания восстановления, то МС называют системой с жесткой структурой. Ее можно свести к одноканальной системе с эквивалентной производительностью, равной суммарной производительности всех каналов. Надежность такой системы рассчитывают с помощью формул предыдущего параграфа. Если же во время ремонта одного из каналов работоспособные каналы продолжают полезную работу, то при

отказах производительность системы уменьшается лишь на величину одного канала. Именно такие системы называют системами с гибкой структурой.

СИСТЕМЫ С НЕПОПОЛНЯЕМЫМ РЕЗЕРВОМ ВРЕМЕНИ

Система состоит из нескольких параллельно работающих каналов. В каждом канале может быть несколько видов отказов, приводящих либо к снижению производительности, либо к полному прекращению работы. В множестве состояний системы E выделяются подмножества $E_k, k = \overline{0, m}$, в каждом из которых производительность системы постоянна и равна $c_k (c_0 > c_1 > \dots > c_m = 0)$. Процесс переходов из состояния в состояние задается функциональной матрицей $\{P_{ij}(t)\}$. Моменты переходов являются марковскими моментами времени. Для выполнения задания объемом $V = c_0 t_3$ системе предоставляется время $t = t_3 + t_p$. В состояниях $e_i \in E_0$ резерв времени t_p не расходуется. В остальных состояниях происходит накопление наработки со скоростью $\bar{c}_k = c_k/c_0$ и одновременно расход резерва времени со скоростью $b_k = 1 - \bar{c}_k$. Задание считают выполненным, если суммарная наработка во всех состояниях в течение времени t , приведенная к производительности системы в полностью работоспособном состоянии, будет не менее t_3 . Вся наработка является полезной, так как обесценивающих отказов нет. При $m = 1$ данная система превращается в одноканальную систему. Заданы функции вероятностей переходов $P_{ij}(t), i, j \in E$; производительности c_i в состояниях $E_i, i = \overline{0, m}$; длительность задания t_3 , непополняемый резерв времени t_p .

Вводятся условные вероятности выполнения задания $P_i(t_3, t_p)$ при условии, что начальным было состояние $e_i \in E_k$. Эти вероятности удовлетворяют системе интегральных уравнений:

$$P_i(t_3, t_p) = 1 - F_i(t_3) + \sum_{\substack{j \in E \\ i \in E_0}} \int_0^{t_3} P_j(t_3 - x, t_p) dP_{ij}(x), \quad (87)$$

$$P_i(t_3, t_p) = (1 - F_i(t_3/\bar{c}_k)) \times \\ \times 1 \left[t_p - t_3 \frac{b_k}{\bar{c}_k} \right] + \\ + \sum_{j \in E_0} \int_0^{t_3} P_j(t_3 - \bar{c}_k x, t_p - b_k x) \times \\ \times dP_{ij}(x); i \in E_k, k = \overline{1, m}; \\ f_k = \min \left(\frac{t_p}{b_k}, \frac{t_3}{\bar{c}_k} \right); \\ f_m = t_p; 1[x] = 1, \\ x \geq 0; 1[x] = 0, x < 0.$$

Двойное операционное преобразование Лапласа—Карсона сводит (87) к системе алгебраических уравнений:

$$P_i^{**}(s, \omega) = s\bar{c}_k (1 - \\ - F(s\bar{c}_k + \omega b_k)) / (s\bar{c}_k + \omega b_k) + \\ + \sum_{j \in E} P_{ij}^*(s\bar{c}_k + \omega b_k) P_j^{**}(s, \omega), \quad (88) \\ i \in E_k, k = \overline{0, m}; P_{ij}^*(s) = \\ = \int_0^\infty e^{-sx} dP_{ij}(x).$$

Вычисление вероятности можно провести с помощью процедуры численного обращения двумерного преобразования Лапласа.

Среднюю наработку до отказа находят из системы алгебраических уравнений с последующим обращением с помощью той же процедуры:

$$T_{cp i}^*(\omega) = \bar{T}_i + \sum_{j \in E} p_{ij} T_{cp j}^*(\omega), \\ i \in E_0; \bar{T}_i = \int_0^\infty x dF_i(x), \\ F_i(x) = \sum_{(l)} P_{il}(x), \quad (89)$$

$$T_{cp\ i}^*(\omega) = c_k (1 - F_i^*(\omega b_k)) / \omega b_k + \sum_{j \in E} P_{ij}^*(\omega b_k) T_{cp\ j}^*(\omega), \quad i \in E_k,$$

$$k = \overline{1, m}; \quad p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t).$$

Среднее время простоя до выполнения задания определяют из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{1i}^*(s) &= b_k (1 - F_i^*(s \bar{c}_k)) / s \bar{c}_k + \\ &+ \sum_{j \in E} P_{ij}^*(s \bar{c}_k) \bar{T}_{1j}^*(s), \quad i \in E_k, \\ k &= \overline{0, m-1}; \end{aligned} \quad (90)$$

$$\bar{T}_{1i}^*(s) = \bar{T}_i + \sum_{j \in E} p_{ij} \bar{T}_{1j}^*(s), \quad i \in E_m;$$

$$\bar{T}_{1i}(t_3) = \bar{T}_{вз}(t_3) - t_3.$$

Если заявка на выполнение задания поступает в произвольный момент времени на стационарном участке работы, то вероятность выполнения задания и среднюю наработку до отказа определяют из уравнений:

$$\begin{aligned} P^{**}(s, \omega) &= \sum_{k=0}^m \sum_{i \in E_k} P_i \times \\ &\times \left(\frac{s \bar{c}_k}{s \bar{c}_k + \omega b_k} (1 - \tilde{F}_i^*(s \bar{c}_k + \omega b_k)) + \right. \\ &\left. + \sum_{j \in E} \tilde{P}_{ij}^*(s \bar{c}_k + \omega b_k) P_j^{**}(s, \omega) \right), \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} T_{cp}^*(\omega) &= \sum_{i \in E_0} P_i \left(\tilde{T}_i + \right. \\ &+ \sum_{j \in E} \tilde{p}_{ij} T_{cp\ j}^*(\omega) \left. \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^m \sum_{i \in E_k} P_i \left\{ \frac{\bar{c}_k}{\omega b_k} (1 - \tilde{F}_i^*(\omega b_k)) + \right. \\ &\left. + \sum_{j \in E} \tilde{P}_{ij}^*(\omega b_k) T_{cp\ j}^*(\omega) \right\}. \end{aligned} \quad (92)$$

Значения P_i , $\tilde{P}_{ij}(t)$, \tilde{p}_{ij} , $\tilde{F}_i(t)$, \tilde{T}_i определяют из (78), а $P_i^{**}(s, \omega)$ и $T_{cp\ i}^*(\omega)$ из (88) и (89).

Если известно, что заявка поступила в работоспособную систему, то вместо (91) и (92) надо использовать уравнения:

$$\begin{aligned} P^{**}(s, \omega) &= \sum_{i \in E_0} k_r^{-1} \left(1 - \tilde{F}_i^*(s) + \right. \\ &+ \sum_{j \in E} \tilde{P}_{ij}^*(s) \times P_j^{**}(s, \omega) \left. \right), \\ k_r &= \sum_{i \in E_0} P_i, \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} T_{cp}^*(\omega) &= \sum_{i \in E_0} k_r^{-1} P_i \times \\ &\times \left(\tilde{T}_i + \sum_{j \in E} \tilde{p}_{ij} T_{cp\ j}^*(\omega) \right). \end{aligned} \quad (94)$$

Если задание имеет случайную длительность с распределением $\Phi(t)$, то вероятность выполнения задания

$$P_i(t_p) = \int_0^{\infty} P_i(t_3, t_p) d\Phi(t_3). \quad (95)$$

При $\Phi(t) = 1 - \exp(-vt)$ вероятность (95) имеет изображение

$$P_i^*(\omega) = P_i^{**}(v, \omega). \quad (96)$$

При автономных заданиях равной длительности для каналов вероятность выполнения задания

$$P(t_3, t_p, m) = P^m(t_3/m, t_p, 1), \quad (97)$$

где $P(\tau, t_p, 1)$ определяют как вероятность выполнения задания одноканальной системой задания длительностью τ при непополняемом резерве t_p .

СИСТЕМА С ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫМИ КАНАЛАМИ И НЕОБЕСЦЕНИВАЮЩИМИ ОТКАЗАМИ

Система $MGm1$ состоит из m идентичных каналов с постоянными интенсивностями отказов и выполняет бригадное задание. Число ремонтных бригад равно r . При k неработоспособных каналах суммарная интенсивность отказов каналов равна Λ_k , а производительность системы равна c_k . Время

восстановления одного канала при k неработоспособных имеет распределение $F_{Bk}(t)$. Отказ системы наступает тогда, когда суммарное время простоя всех каналов в ремонте превысит значение mt_p . Ограничений на минимальное число работоспособных каналов нет. Контроль работоспособности каналов и системы идеальный.

Заданы интенсивности отказов Λ_k , $k = 0, m-1$; функции распределения времени восстановления $F_{Bk}(t)$, число каналов m , производительность системы при $m-k$ работоспособных каналах c_k , требуемый объем работ V или длительность задания $t_0 = V/c_0$, непополняемый резерв времени t_p .

При заданных условиях функционирования уравнения (88)–(92) имеют вид

$$P_0^{**}(s, \omega) = 1 - F_0^*(s) + F_0^*(s) \times P_1^{**}(s, \omega); P_m^{**}(s, \omega) = F_{Bm}^*(\omega) P_{m-1}^{**}(s, \omega);$$

$$P_k^{**}(s, \omega) = \frac{s\bar{c}_k}{\varphi_k} (1 - F_k^*(\varphi_k)) + F_{Bk}^*(\varphi_k + \Lambda_k) P_{k-1}^{**}(s, \omega) + \frac{\varphi_k}{\varphi_k + \Lambda_k} (1 - F_{Bk}^*(\varphi_k + \Lambda_k)) \times P_{k+1}^{**}(s, \omega), k = \overline{1, m-1};$$

$$T_{cp0}^*(\omega) = \frac{1}{\Lambda_0} + T_{cp1}^*(\omega); T_{cpm}^*(\omega) = F_{Bm}^*(\omega) T_{cp, m-1}^*(\omega); T_{cp, k}^*(\omega) = \frac{\bar{c}_k}{\Omega} (1 - F_{Bk}^*(\Omega)) + F_{Bk}^*(\Omega_k) T_{cp, k-1}^*(\omega) + \frac{\Lambda_k}{\Omega_k} (1 - F_k^*(\Omega_k)) T_{cp, k+1}^*(\omega), k = \overline{1, m-1};$$

$$\bar{T}_{10}^*(s) = \frac{\Lambda_0}{s + \Lambda_0} \bar{T}_{11}^*(s); \bar{T}_{1m}^*(s) = \bar{T}_{Bm} + \bar{T}_{1, m-1}^*(s); \bar{T}_{1k}^*(s) = \frac{b_k}{s_k} (1 - F_{Bk}^*(s_k)) +$$

$$+ F_{Bk}^*(s_k) \bar{T}_{1, k-1}^*(s) + \frac{\Lambda_k}{s_k} \times (1 - F_{Bk}^*(s_k)) \bar{T}_{1, k+1}^*(s), k = \overline{1, m-1};$$

$$P^{**}(s, \omega) = \sum_{k=0}^m P_k \left(\frac{s\bar{c}_k}{\Lambda_k + \varphi_k} \times (1 - B_k(\varphi_k)) + B_k(\varphi_k) \times P_{k-1}^{**}(s, \omega) + \frac{\Lambda_k}{\Lambda_k + \varphi_k} \times (1 - B_k(\varphi)) P_{k+1}^{**}(s, \omega) \right);$$

$$T_{cp}^*(\omega) = \sum_{k=0}^m P_k \left(\frac{1}{\Omega_k} \times (\bar{c}_k + \Lambda_k T_{cp, k+1}^*(\omega)) \times (1 - B_k(\omega b_k)) + B_k(\omega b_k) T_{cp, k-1}^*(\omega) \right),$$

(98)

где $\varphi_k = s\bar{c}_k + \omega b_k$; $\Omega_k = \omega b_k + \Lambda_k$; $s_k = s\bar{c}_k + \Lambda_k$; $P_{-1}^{**}(s, \omega) = P_{m+1}^{**}(s, \omega) = 0$;

$$P_0 = 1/(A\Lambda_0); P_k = (A\Lambda_k)^{-1} \times \prod_{i=1}^k \frac{1 - F_{Bi}^*(\Lambda_i)}{F_{Bi}^*(\Lambda_i)}, k = \overline{1, m-1}; P_m = \frac{\bar{T}_{Bm}}{A} \times \prod_{i=1}^m \frac{1 - F_{Bi}^*(\Lambda_i)}{F_{Bi}^*(\Lambda_i)};$$

$$B_k(\omega) = (F_{Bk}^*(\Lambda_k) - F_{Bk}^*(\omega + \Lambda_k)) / (1 - F_{Bk}^*(\Lambda_k));$$

$$A = \frac{1}{\Lambda_0} + \frac{1 - F_{B1}^*(\Lambda_1)}{F_{B1}^*(\Lambda_1)} \left(\frac{1}{\Lambda_1} + \right. \\ \left. + \frac{1 - F_{B2}^*(\Lambda_2)}{F_{B2}^*(\Lambda_2)} \left(\frac{1}{\Lambda_2} + \dots + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1 - F_{B, m-1}^*(\Lambda_{m-1})}{F_{B, m-1}^*(\Lambda_{m-1})} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{1}{\Lambda_{m-1}} + \bar{T}_{Bm} \right) \dots \right) \right).$$

Двухканальная система с произвольным распределением времени восстановления. Заданы относительные значения производительностей $\bar{c}_0 = 1$, $\bar{c}_1 = 0,5$; интенсивности отказов $\Lambda_k = (2 - k)\lambda$, функции распределения времени восстановления $F_{B1}(t)$ и $F_{B2}(t)$, длительность задания t_3 , резерв времени t_p .

Расчетные формулы приведены в табл. 15. Вычисление вероятности $P_0 \times (t_3, t_p)$ следует проводить численно с помощью процедуры [6].

Многоканальная система *ММmI*. Заданы относительные значения производительности \bar{c}_k , $k = 0, m-1$; интенсивности отказов Λ_k , интенсивности восстановления канала при k неработоспособных каналах M_k , $k = 1, m$; длительности задания t_3 , резерв времени t_p .

Расчетные формулы приведены в табл. 16. При $M_k > 0$ обращение функции $P_0^*(s, \omega)$ выполняется численно с помощью процедуры [6]. Она может использоваться также и для обращения $P_0^*(t_3, \omega)$ при $M_k = 0$ в случаях, не отраженных в табл. 16. При $M_k = 0$ $\bar{T}_{B3}(t_3)$ следует рассматривать как условное среднее при условии, что задание выполнено.

Для определения вида функции $f(k)$ — зависимости производительности системы от числа работоспособных каналов — можно использовать следующие две модели затрат ресурсов на комплексирование.

Модель слабой связности. Каждый канал в процессе взаимодействия связан только с одним из соседних каналов. На обеспечение этих

связей затрачиваются ресурсы в объеме $100\alpha\%$ от основного объема работ. Тогда $\bar{c}_k = 1 - k/m$.

Модель сильной связности. Каждый канал связан со всеми остальными и затрачивает на обеспечение каждой связи $100\alpha\%$ основного объема работ. Тогда $\bar{c}_k = (m - k)(1 + \alpha(m - 1))/m(1 + \alpha(m - 1 - k))$.

Если в МС, кроме ограничения на суммарное время простоя всех каналов, есть также ограничение на допустимое число работоспособных каналов ($M \geq m^*$) либо на минимально допустимое значение мгновенной производительности ($c_M > c^*$), то в выражении для $P_0^*(s, \omega)$ из табл. 16 при $M_k = 0$ следует положить $P_k(s, \omega) = 0$ для всех $k > m - m^*$, а при $M_k > 0$ положить в уравнениях для $k > m - m^*$ значения $c_k = 0$. Выражения для вероятности выполнения задания при $m^* = 1$ и $m^* > 1$ приведены также в табл. 16.

Многоканальная система со слабой связанностью каналов и независимым восстановлением. В течение заданного времени t каналы функционируют независимо друг от друга, получая необходимые порции общего бригадного задания, обеспечивающие им непрерывную загрузку, пока они работоспособны. Общим результатом работы системы является суммарная полезная наработка всех каналов, равная сумме наработок отдельных каналов в общем интервале времени $(0, t)$ без учета затрат времени на организацию работ в комплексе.

Заданы функции распределения наработки $F(t)$ и времени восстановления $F_B(t)$ одного канала; производительность канала c , длительность задания t_3 , приведенная к масштабу времени m -канальной системы ($t_3 = V/(mc)$), интервал времени функционирования t .

Расчетные формулы для вероятности $Q^{(1)}(t_3, t, m)$ невыполнения задания t_3 в течение времени t приведены в табл. 17. Функции $Q^{(1)}(x, t) = 1 - P^{(1)}(x, t) = 1 - P(x, t - x)$ определяют с помощью формул табл. 17 после замены t_3 на x и t_p на $t - x$. Функцию готовности определяют для одного канала.

15. Двухканальная система с произвольными распределениями

Показатель	Условия	Формула
$P_0^{**}(s, \omega)$	MG21	$s \left(s + \omega + 2\lambda + 2\lambda (1 - F_{B2}^*(\omega)) \left(1 - F_{B1}^* \left(\lambda + \frac{1}{2}(s + \omega) \right) \right) \right) / \left\{ (s + 2\lambda) \left(s + \omega + 2\lambda (1 - F_{B2}^*(\omega)) \left(1 - F_{B1}^* \left(\lambda + \frac{1}{2}(s + \omega) \right) \right) \right) - 2\lambda (s + \omega) F_{B1}^* \left(\lambda + \frac{s + \omega}{2} \right) \right\}$
$\bar{T}_{B3}(t_3)$	MG21	$t_3(1 + A_1) - B_1; \quad A_1 = (1 - F_{B1}^*(\lambda))(1 + 2\lambda\bar{T}_{B2});$ $B_1 = A_1 / 2\lambda - \frac{1}{2}g_1(\lambda)(1 + 2\lambda\bar{T}_{B2});$ $g_i(\lambda) = \int_0^\infty x^i e^{-\lambda x} dF_{B1}(x)$
$T_{Bi} = T$ $r = 1$		$t_3 + (1 + \rho) \left(t_3 - \frac{1}{2\lambda} (1 - e^{-2\rho}) \right),$ $t_3 < \frac{1}{2} T; \quad \rho = \lambda T,$ $t_3 + (1 + \rho) \left(\left(t_3 - \frac{1}{2\lambda} \right) (1 - e^{-\rho}) + \frac{1}{2} T e^{-\rho} \right), \quad t_3 \geq T/2$
$t_3 \gg T, r = 1$		$t_3(1 + \rho + \rho^2)$
$F_{Bi}(t) = 1 - e^{-i\mu t};$ $r = 2$		$(1 + \rho) t_3 - \frac{\rho}{2(\lambda + \mu)} < \bar{T}_{B3} < (1 + \rho) t_3;$ $\rho = \lambda/\mu$
\bar{T}_{B3}	$\Phi(t_3) = 1 - e^{-vt_3}$	$\bar{T}_3 + \frac{2\lambda}{v(2\lambda + v)} (1 + 2\lambda T_{B2}) \left(1 - F_{B1}^* \left(\lambda + \frac{v}{2} \right) \right)$
$DT_{B3}(t_3)$	$r = 2$	$t_3(2\lambda\alpha_2(1 - F_{B1}^*(\lambda)) + \frac{1}{\lambda} A_1 F_{B1}^*(\lambda) - (1 - A_1)g_1(\lambda)(1 + 2\lambda\bar{T}_{B2}))$
$F_{Bi}(t) = 1 - e^{-i\mu t}$		$\rho t_3/\mu, \quad \rho = \lambda/\mu$

Продолжение табл. 15

Показатель	Условия	Формула
$T_{\text{ср. о}}(t_p)$	$t_p > 2\bar{T}_{\text{в1}}$	$At_p + B < T_{\text{ср. о}}(t_p) < \frac{1}{2\lambda} + At_p;$ $r_1 = \sqrt{DT_{\text{в1}}}/\bar{T}_{\text{в1}} < 1,$ $At_p + \frac{1}{2\lambda} < T_{\text{ср. о}}(t_p) < At_p + B;$ $r_1 > 1; A = 1/A_1;$ $B = A \left(\frac{1}{2\lambda} + \bar{T}_{\text{в2}}(1 - F_{\text{в1}}^*(\lambda)) + \right.$ $\left. + \lambda\alpha_2/(1 + 2\lambda\bar{T}_{\text{в2}}) - g_1(\lambda)/2(1 - F_{\text{в1}}^*(\lambda)) \right)$
$T_{\text{ср. о}}(t_p)$	$\bar{T}_{\text{в1}} \ll \frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\alpha_1}{2\bar{T}_{\text{в1}}^2} + \frac{2t_p}{\bar{T}_{\text{в1}}} \right); \alpha_i = \int_0^{\infty} x^2 dF_{\text{в. i}}(x)$
$T_{\text{ср}}(t_p)$		$T_{\text{ср. о}}(t_p) - (P_0/2\lambda F_{\text{в1}}^*(\lambda)) (A(2\lambda\alpha_2 + \lambda^2 g_2(\lambda) +$ $+ (1 + 2\lambda\bar{T}_{\text{в2}})(1 - F_{\text{в1}}^*(\lambda) - \lambda g_1(\lambda))) +$ $+ 2\lambda\bar{T}_{\text{в2}}(1 - F_{\text{в1}}^*(\lambda)))$
$DT_0(t_p)$		$t_p \left\{ A(1 - A)g_1(\lambda)/(1 - F_{\text{в1}}^*(\lambda)) + \right.$ $\left. + \frac{1}{\lambda} A^2 F_{\text{в1}}^*(\lambda) + 2\lambda A^3 \alpha_2 (1 - F_{\text{в1}}^*(\lambda)) \right\}$

16. Многоканальная система с экспоненциальными распределениями

Показатель	Условия	Формула
$P_{\text{о}}^{**}(s, \omega)$	$M_k \geq 0$	$\frac{s}{s + \Lambda_0} + \frac{\Lambda_0}{s + \Lambda_0} P_1^{**}(s, \omega), P_k^{**}(s, \omega) =$ $= \frac{s\bar{c}_k + M_k P_{k-1}^{**}(s, \omega) + \Lambda_k P_{k+1}^{**}(s, \omega)}{s\bar{c}_k + M_k + \Lambda_k + \omega b_k}$ $k = \overline{1, m-1}; P_m^{**}(s, \omega) =$ $= M_m P_m^{**}(s, \omega)/(\omega + M_m)$

Продолжение табл. 16

Показатель	Условия	Формула
$P_0^*(t_3, \omega)$	$M_k = 0$	$\sum_{k=0}^{m-1} \exp(-(\omega b_k + \Lambda_k) t_3 / \bar{c}_k) \times$ $\times \sum_{i=k}^{m-1} a_i \beta_{ik}^{-1} \prod_{j=0}^i (\omega + \alpha_{jk})^{-1};$ $a_0 = 1; a_i = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\Lambda_j}{\bar{c}_j}; \beta_{00} = 1; \beta_{ik} =$ $= \prod_{j=0}^i \left(\frac{1}{\bar{c}_j} - \frac{1}{\bar{c}_k} \right); j \neq k;$ $\alpha_{ik} = (\Lambda_i \bar{c}_k - \Lambda_k \bar{c}_i) / (\bar{c}_k - \bar{c}_i), j \neq k$
$P_0(t_3, t_p)$	$M_k = 0$ $\alpha_{jk} = \alpha_k$	$\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(-\frac{\Lambda_k}{\bar{c}_k} t_3\right) \sum_{i=k}^{m-1} a_i I\left(i, \alpha_k \left(t_p - \frac{b_k}{\bar{c}_k} t_3\right)\right) / \beta_{ik} \alpha_k^i$
	$M_k = 0$ $\alpha_{ik} \neq \alpha_{jh}$ $i \neq j$	$\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(-\frac{\Lambda_k}{\bar{c}_k} t_3\right) \sum_{i=k}^{m-1} a_i \beta_{ik}^{-1} \times$ $\times I\left[t_p - \frac{b_k}{\bar{c}_k} t_3\right] \left\{ \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^i \alpha_{lk}^{-1} - \right.$ $- \sum_{l=0}^i \exp\left(-\left(t_p - \frac{b_k}{\bar{c}_k} t_3\right) \alpha_{lk}\right) \times$ $\left. \times \alpha_{lk}^{-1} \prod_{l=0}^i (\alpha_{jk} - \alpha_{lk})^{-1} \right\}, j \neq k, l \neq k$

Продолжение табл. 16

Показатель	Условия	Формула
$P_0(t_3, t_p)$	$M_k = 0$ $m = 2$	$e^{-\Lambda_0 t_3} \left(1 + \frac{\Lambda_0 \bar{c}_1}{\Lambda_1 - \Lambda_0 \bar{c}_1} \left(1 - \exp \left(-(\Lambda_1 - \bar{c}_1 \Lambda_0) \frac{t_p}{b_1} \right) \right) - \frac{\Lambda_0 \bar{c}_1}{\Lambda_1 - \Lambda_0 \bar{c}_1} \left(1 - \exp \left(-(\Lambda_1 - \Lambda_0 \bar{c}_1) (t_p/b_1 - t_3/\bar{c}_1) \right) \right) \right) \times \exp \left(-\Lambda_1 t_3/\bar{c}_1 \right) 1 [t_p - b_1 t_3/c_1]$
	$M_k = 0$ $\Lambda_i = (m - i) \lambda$ $r = m$	$1 - I(m, m\lambda t_3) = e^{-m\lambda t_3} \sum_{i=1}^k \binom{m}{i} \times \lambda ((m - i) t_3 - i t_p)^{m-i} L_{i-1}^{m-i} \times \lambda ((m - i) t_3 - i t_p) / (m - 1)!;$ $k = [m t_3 / (t_3 + t_p)]; L_n^m(at) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-at)^i \prod_{j=1}^{n-i} (m + j + i) =$ $= \sum_{k=0}^{[m t_p / t]} m (-1)^k (m - k)^{-1} e^{-m\lambda t_3} \times \sum_{i=k}^{m-1} \binom{i}{k} \binom{m-1}{i} (m - k)^i \times (\lambda t_p - k\lambda t_3 / (m - k))^i / i!$
	$M_k = 0$ $t_p = \infty$	$\sum_{k=0}^{\infty} \exp \left(-\frac{\Lambda_k}{\bar{c}_k} t_3 \right) \sum_{i=k}^{m-1} a_i \beta_{ik}^{-1} \times \prod_{j=0}^i \alpha_{jk}^{-1}, j \neq k$
$T_{ср 0}(t_p)$	$t_p > 2M_1^{-1}$	$\frac{1}{\Lambda_0} \left(1 + \frac{t_p}{A} \right) \approx \frac{1}{\Lambda_0} \left(1 + \frac{M_1}{b_1} t_p \right);$ $A = \{ \Lambda_1 \dots \Lambda_{m-1} + \Lambda_1 \dots \Lambda_{m-2} b_{m-1} M_m + \dots + b_1 M_2 \dots M_m \} / \{ \Lambda_0 \dots \Lambda_{m-2} \bar{c}_{m-1} M_m + \Lambda_0 \dots \Lambda_{m-3} \bar{c}_{m-2} M_{m-1} M_m + \dots + M_1 \dots M_m \}$

Продолжение табл. 16

Показатель	Условия	Формула
$T_{cp, 0}(t_p)$	$M_k = 0$	$\frac{1}{\Lambda_0} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\bar{c}_i}{\Lambda_i} \left(1 - \prod_{j=1}^i \frac{\Lambda_j}{b_j} \sum_{k=1}^i \frac{b_k}{\Lambda_k} \times \right.$ $\left. \times e^{-\Lambda_k t_p / b_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^i \left(\frac{\Lambda_j}{b_j} - \frac{\Lambda_k}{b_k} \right) \right)$
	$M_k = 0;$ $c_i = 1 - \frac{i}{m};$ $\Lambda_i = (m - i) \lambda$	$\frac{1}{\lambda} \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} (-m)^{-i} \binom{m-1}{i} \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} \times \right.$ $\left. \times \frac{k^i}{m-k} (-1)^{k-1} \exp \left(-\frac{m}{k} (m-k) \lambda t_p \right) \right)$
$\bar{T}_{вз}(t_3)$	$M_k > 0$	$(1 + A) t_3; A \text{ см. } T_{cp, 0}(t_p)$
	$M_k = 0$ $\alpha_{jk} \neq \alpha_{lk}$	$t_3 + P_0^{-1}(t_3, \infty) \sum_{k=0}^{m-1} \exp \left(-\frac{\Lambda_k}{\bar{c}_k} t_3 \right) \times$ $\times \sum_{i=k}^{m-1} \frac{\alpha_i}{\beta_{ik}} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^i \alpha_{lk}^{-1} \left(\alpha_{lk}^{-1} + \frac{b_k}{\bar{c}_k} t_3 \right) \times$ $\times \prod_{j=1}^i (\alpha_{jk} - \alpha_{lk})^{-1}; j \neq l, j \neq k$
$P_0^{**}(s, \omega)$	$M_k = 0$ $m^* > 1$	$\sum_{i=0}^{m-m^*} s \Lambda_0 \dots \Lambda_{i-1} \bar{c}_i \prod_{j=0}^i (s \bar{c}_j + \omega b_j + \Lambda_j)^{-1}$
$P_0(t_3, t_p)$	$M_k = 0$ $m = 3$ $m^* = 2$	$(1 + 6\gamma) \exp(-3\rho), \gamma \leq \rho/2; \rho = \lambda t_3, \gamma = \lambda t_p$ $(1 + 3\rho) \exp(-3\rho), \gamma \geq \rho/2$
$P_0(t_3, t_p)$	$M_k = 0$ $m = 3$ $m^* = 1$	$(1 + 6\gamma + 4,5\gamma^2) \exp(-3\rho), \gamma \leq \rho/2$ $(1 + 3\rho + 4,5\gamma^2 - 1,5(2\gamma - \rho)^2) \exp(-3\rho);$ $\rho/2 \leq \gamma \leq 2\rho;$ $(1 + 3\rho) \exp(-3\rho), \gamma \geq 2\rho$

17. Многоканальная система с независимым восстановлением

Показатель	Условия	Расчетная формула
$Q^{(1)}(t_3, t_p, m)$	$GGml$ $\bar{c}_i = 1 - i/m$ $r = m$	$Q^{(1)}(mt_3 - (m-1)t, t) + (1 - F(t)) \times$ $\times Q^{(1)}(mt_3 - t, t, m-1) +$ $+ \int_a^b Q^{(1)}(mt_3 - x, t, m-1) a_1(x, t) dx;$ $a = \max(0, mt_3 - (m-1)t)$ $b = \min(mt_3, t); a_1(x, t) = \frac{d}{dx} Q^{(1)}(x, t)$
$P(t_3, t_p, m)$	$M_k = 0$ $m = 2$	$(1 + \gamma) e^{-\rho}, \gamma \leq \rho, \gamma = 2\lambda t_p, \rho = 2\lambda t_3$ $(1 + \rho) e^{-\rho}; \gamma \geq \rho$
	$M_k = 0$ $m = 3$	$(1 + 2\gamma + \gamma^2/2) e^{-\rho}; \gamma \leq \rho/2; \rho = 3\lambda t_3; \gamma = 3\lambda t_p$ $(1 + \rho + \gamma^2/2 - (2\gamma - \rho)^2/3!) e^{-\rho}; \rho/2 \leq \gamma \leq 2\rho$ $(1 + \rho + \rho^2/2) e^{-\rho}; \gamma = 2\rho$
$\Lambda(t_3, t_p, m)$	$m = 2$ $M_k = 0$	$2\lambda, \rho \leq \gamma$ $2\lambda\rho/(1 + \rho), \rho > \gamma$
	$M_k = 0$ $m = 3$	$1,5\lambda\rho^2/(1 + \rho + \rho^2/2), \rho \leq \gamma/2;$ $\rho = 3\lambda t_3; \gamma = 3\lambda t_p$ $\frac{\lambda}{2} (3\gamma^2 + 8\rho - 4\gamma - (2\gamma - \rho)^2) / (1 + \rho +$ $+ \frac{\gamma^2}{2} - \frac{1}{6} (2\gamma - \rho)^2); \frac{\gamma}{2} \leq \rho \leq 2\gamma$ $3\lambda, \rho > 2\gamma$
$\bar{T}_H(t)$	$GGml$ $\bar{c}_i = 1 - i/m$	$\int_0^t K_T(x) dx \approx K_T t = t\bar{T}_0/(\bar{T}_0 + \bar{T}_B)$
	$MMml$ $\bar{c}_i = 1 - i/m$	$\frac{\mu t}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t})$
$DT_H(t)$	$MMml$ $\bar{c}_i = 1 - i/m$	$\frac{1}{m} \left(\frac{2\lambda\mu t}{(\lambda + \mu)^3} - \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^4} (4\mu - \lambda - 2\mu(2 +$ $+ (\lambda + \mu)t) e^{-(\lambda + \mu)t} + \lambda e^{-(\lambda + \mu)t} \right)$

Продолжение табл. 17

Показатель	Условия	Расчетная формула
$\bar{T}_{вз}^y(t_3, m)$	$M_k = 0$ $m = 2$	$t_3 (1 + \lambda t_3 e^{-2\lambda t_3})$
	$M_k = 0$ $m = 3$	$t_3 \left(1 + \frac{1}{4} \lambda t_3 (2 + 5\lambda t_3) e^{-3\lambda t_3}\right)$

Пример 13. Технологическая система с номинальной производительностью $c_0 = 40$ изделий/ч состоит из технологических линий, имеющих интенсивность отказов $\lambda = 0,01 \text{ ч}^{-1}$ и среднее время восстановления $\bar{T}_в = 5$ ч. При технологической подготовке производства к выпуску партии изделий объемом $V = 3200$ шт. в течение $t = 100$ ч для компенсации простоев создан запас готовой продукции $v = 800$ изделий. Необходимо найти вероятность выполнения задания, среднее время выполнения задания, средний объем выпуска за время 100 ч, среднее время до исчерпания запасов, среднюю производительность в интервале $(0, t)$ и до выполнения задания, коэффициент использования запасов.

Решение. Для расчета вероятности выполнения задания используем вычислительную процедуру [5] при $\lambda = 0,01 \text{ ч}^{-1}$, $\beta = \mu/\lambda = 20$, $\lambda t = 1$, $m = 3$, $t_3 = V/c_0 = 80$ ч. Среднюю производительность в интервале $(0, t)$ определяем по формуле $C_{ср}(t) = c_0 \bar{C}_{ср}(t) = 3^{-1} (120 \bar{C}_{ср}(t))$, где $\bar{C}_{ср}(t)$ определяем по формуле табл. 9. Средний объем выпуска $\bar{V} = C_{ср}(t) \cdot t = 38,2 \cdot 100 = 3820$ изделий. Значения $\bar{T}_{вз}^y(t_3)$, $\bar{T}_{ср}(v)$ находим по формулам табл. 16; средняя производительность $c(V) = V/\bar{T}_{вз}(V)$, коэффициент использования запасов $k_{вз} = v/(v + \bar{T}_{вз}(v))$. Другие результаты расчетов: $P(V, t, m) = 0,9984$; $\bar{T}_{вз} = 84$; $T_{ср}(v) = 451,6$; $c_{ср}(t) = 38,2$; $c_{ср} \times (V) = 38,1$; $k_{вз}(v) = 0,042$.

Средняя производительность в интервале $(0, 100 \text{ ч})$ составила 95,5 % от номинального значения.

СИСТЕМА СО СТРУКТУРНЫМ И ВРЕМЕННЫМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ И НЕОБЕСЦЕНИВАЮЩИМИ ОТКАЗАМИ

При организации структуры многоканальной системы, состоящей из N идентичных устройств, могут встречаться следующие варианты:

все N устройств используются как параллельные каналы, т. е. все они имеют многоканальное соединение;

N устройств группируются в k , вообще говоря, не равных групп по N_i устройств в группе ($N_1 + \dots + N_k = N$); из N_i устройств m_i имеют многоканальное соединение, а $n_i = N_i - m_i$ — резервное соединение;

часть устройств (m из N) выделяется для организации параллельных каналов, а остальные $N - m$ переводятся в структурный резерв.

Система с бригадным заданием и общим структурным резервом с дробной кратностью. Система состоит из m параллельных каналов и n резервных устройств, каждое из которых может заменить любой отказавший канал. Отказы обнаруживаются мгновенно и устраняются за время, имеющее экспоненциальное распределение. Все устройства имеют постоянные интенсивности отказов. Система может находиться в одном из состояний e_i , $i = \overline{0, m+n}$. Причем в $e_0 - e_n$ она имеет максимальную производительность $\bar{c}_0 = 1$, в состоянии e_{n+i} производительность $\bar{c}_i = 1 - i/m$. Интенсивность переходов из e_i в e_{i+1} равна Λ_i , а из e_i в e_{i-1} равна M_i .

Заданы число каналов m и число резервных устройств n , интенсивности переходов Λ_i и M_i , $i = \overline{0, m+n}$;

18. Система с общим структурным резервом

Показатель	Особые условия	Расчетная формула
$P_0(t_a, t_p)$	$m = 2, n = 1$ НР, $\alpha = 0$ $M_k = 0$	$(3 - 2e^{-\rho}) e^{-2\rho} + 6e^{-2\rho} (\rho - 1 + e^{-\rho}),$ $t_a \leq t_p, \rho = \lambda t_a$ $(3 - 2e^{-\rho}) e^{-2\rho} + 6e^{-2\rho} (\gamma + e^{-\rho} - e^{-\rho+\gamma}),$ $t_a \geq t_p, \gamma = \lambda t_p$
	$m = 2, n = 1$ ННР, $\alpha = 0$ $M_k = 0$	$(1 + 2\rho + 2\rho^2) e^{-2\rho}, t_a \leq t_p, \rho = \lambda t_a$ $(1 + 2\rho + 4\rho\gamma - 2\gamma^2) e^{-2\rho}, t_a \geq t_p, \gamma = \lambda t_p$
	$m = 3, n = 1$ НР, $\alpha = 0$ $M_k = 0$	$(28 - 27e^{-\rho} - 24\rho + 18\rho^2) e^{-3\rho},$ $t_a \leq t_p/2; \rho = \lambda t_a, \gamma = \lambda t_p$ $(24(\rho - \gamma) + 18\gamma^2 - 20 - 27e^{-\rho} + 48e^{-\rho+\gamma/2} -$ $- 24(\gamma - \rho/2)^2) e^{-3\rho};$ $(24\gamma + 18\gamma^2 + 4 - 27e^{-\rho} - 24e^{-\rho+2\gamma} +$ $+ 48e^{-\rho+\gamma/2}) e^{-3\rho}, t_a \geq 2t_p$
	$m = 3, n = 1$ ННР, $\alpha = 0$ $M_k = 0$	$\left(1 + 3\rho + \frac{1}{2}(3\rho)^2 + \frac{1}{6}(3\rho)^3\right) e^{-3\rho},$ $t_a \leq t_p/2; \rho = \lambda t_a, \gamma = \lambda t_p$ $\left(1 + 3\rho + \frac{1}{2}(3\rho)^2 + \frac{1}{6}(3\rho)^3 +$ $+ \frac{3}{4}(2\rho - \gamma)^2\right) e^{-3\rho}; t_p/2 \leq t_a \leq 2t_p$ $\left(1 + 3\rho + 9\gamma \left(2\rho - 2\gamma + \frac{3}{2}\rho\gamma - \frac{5}{4}\gamma^2\right)\right) e^{-3\rho},$ $t_a \geq 2t_p$
	$m = n = 2$ НР, $\alpha = 0$	$(16e^{-\rho} + 12\rho - 12 - 3e^{-2\rho}) e^{-2\rho}, t_a \leq t_p;$ $(6 - 8e^{-\rho} + 3e^{-2\rho} + 12\gamma - 24e^{-\rho}(e^\gamma - 1) +$ $+ 6e^{-2\rho}(e^{2\gamma} - 1)) e^{-2\rho}; t_a \geq t_p$
	$m = n = 2$ ННР, $\alpha = 0$	$\left(1 + 2\rho + \frac{1}{2}(2\rho)^2 + \frac{1}{6}(2\rho)^3\right) e^{-2\rho}, t_a \leq t_p$ $\left(1 + 2\rho + \frac{1}{2}(2\rho)^2 + 4\gamma(\rho^2 - \rho\gamma + \gamma^2/3)\right) e^{-2\rho},$ $t_a \geq t_p$

Продолжение табл. 18

Показатель	Особые условия	Расчетная формула
$T_{cp}(t_p)$	$m = 2, n = 1$	$\frac{1}{\Lambda_0} + \frac{1}{\Lambda_1} \left(1 + \frac{M_1}{\Lambda_0} \right) +$ $+ \frac{\bar{c}_1 + M_2(1 + M_1/\Lambda_0)/\Lambda_1}{\Lambda_2 + b_1 M_3} \left(M_3 t_p + \right.$ $\left. + \frac{\Lambda_2}{\Lambda_2 + b_1 M_3} \left(1 - e^{-\frac{t_p}{b_1}(\Lambda_2 + b_1 M_3)} \right) \right)$
	$m = n = 2$	$\frac{1}{\Lambda_0} + \frac{1}{\Lambda_1} + \frac{M_1}{\Lambda_0 \Lambda_1} + \bar{T}_3 + \frac{\bar{c}_1 + M_3 \bar{T}_2}{\Lambda_3 + b_1 M_4} \times$ $\times \left(M_4 t_p + \frac{\Lambda_3}{\Lambda_3 + b_1 M_4} \left(1 - e^{-t_p(\Lambda_3/b_1 + M_4)} \right) \right)$ $\bar{T}_2 = \frac{1}{\Lambda_2} \left(1 + \frac{M_2}{\Lambda_1} + \frac{M_1 M_2}{\Lambda_0 \Lambda_1} \right)$
	$m = 3, n = 1$	$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\Lambda_0} - \frac{4}{9\lambda} e^{-3\gamma/2} - \frac{2}{9\lambda} e^{-6\gamma};$ $\Lambda_0 = 4\lambda, \text{ НР}; \Lambda_0 = 3\lambda, \text{ ННР}$
$\bar{T}_{вз}(t_3)$	$m = 2$	$t_3 \left(1 + \frac{b_1 + \Lambda_{n+1}/M_{n+2}}{\bar{c}_1 + M_{n+1} \bar{T}_n} \right),$ $\bar{T}_n = \frac{1}{\Lambda_n} \left(1 + \sum_{i=1}^n \prod_{j=i}^n \frac{M_j}{\Lambda_{j-1}} \right)$
	$m = 3$	$t_3 \left(1 + \left(B_1 + \frac{\Lambda_{n+1}}{M_{n+2}} \left(b_2 + \frac{M_{n+2}}{M_{n+3}} \right) \right) / \left(\bar{c}_1 + \right. \right.$ $\left. \left. + c_2 \frac{\Lambda_{n+1}}{M_{n+2}} + \bar{T}_n (\Lambda_{n+1} + M_{n+1}) \right) \right)$

Принятые обозначения: НР — нагруженный режим резервных устройств; ННР — ненагруженный режим; $\Lambda_0 = (m + n) \lambda$ при НР, $\Lambda_0 = m \lambda$ при ННР.

19. Результаты расчетов к примеру 14

Вероятности	t			
	0	1	2	3
P_i	0,3563	0,4196	0,1851	0,03638
$P(t_3, t_p, m, n)$	0,99898	0,9971	0,9754	0,7866

$$P_0(t_3, t_p, 2, 2) = 0,9834$$

производительность \bar{c}_i , длительность задания t_3 , непополняемый резерв времени t_p или время функционирования $t = t_3 + t_p$. Расчетные формулы приведены в табл. 18.

Пример 14. Невосстанавливаемая вычислительная система (ВС) состоит из четырех идентичных устройств, два из которых образуют двухканальную систему, а два находятся в нагруженном резерве. ВС поручено выполнение двух сеансов расчета и выделено время 12 ч. Интервал времени между сеансами $\tau = 18$ ч. Для выполнения одного расчета одному устройству необходимо 12 ч. Интенсивность отказов устройства в рабочем режиме или нагруженном резерве равна $\lambda_1 = 0,02 \text{ ч}^{-1}$, в ожидании сеанса $\lambda_2 = 0,001 \text{ ч}^{-1}$. Необходимо найти вероятность выполнения задания.

Решение. Согласно исходным данным для каждого сеанса $t_3 = t_p = 6$ ч, структурные параметры системы $m = n = 2$ к началу первого сеанса. К началу второго сеанса с вероятностью p_i , $i = 0, 1$ и 2 ; $m = 2$, $n = 2 - i$, и с вероятностью p_3 : $m = 1$, $n = 0$, где $p_i = \binom{4}{i} \times \exp(-(4-i)(2\lambda_1 t_3 + \lambda_2 \tau)) (1 - \exp(-(2\lambda_1 t_3 + \lambda_2 \tau))^i$, $i = 0, 1, 2$, 3. Искомая вероятность

$$P_0(t_3, t_p, 2, 2) = p_0 P(t_3, t_p, 2, 2) + p_1 P(t_3, t_p, 2, 1) + p_2 P(t_3, t_p, 2, 0) + p_3 e^{-2\lambda_1 t_3}$$

где $P(t_3, t_p, 2, 2)$ и $P(t_3, t_p, 2, 1)$ находят из табл. 18, $P(t_3, t_p, 2, 0)$ — из табл. 17 при $m = 2$, $M_k = 0$, $t_3 = t_p$. Результаты расчетов сведены в табл. 19.

Система с отдельным резервированием каналов и бригадным заданием. Система состоит из m независимых каналов, и каждый канал имеет $n - 1$ идентичное ему устройство в резерве. Резерв, приданный одному из каналов, нельзя использовать для резервирования других каналов. Каждая группа, состоящая из одного канала и резервных устройств, является одноканальной системой. Между m подсистемами распределяется бригадное задание длительностью t_3 . Каждая подсистема имеет собственный ремонтный орган, состоящий из одной или нескольких ремонтных бригад. Каналы, взаимодействующие между собой при выполнении общего задания, слабо связаны, и поэтому $\bar{c}_k = 1 - k/m$. Обнаружение отказов обеспечивается идеальной системой контроля мгновенно и достоверно.

Заданы число каналов m , число устройств в подсистеме n , интенсивности переходов в графе состояний подсистемы, включающей n устройств (одно основное и $n - 1$ резервное): $\Lambda_i^{(1)}$ — интенсивность перехода из e_i в e_{i+1} , $i = \overline{0, n-1}$; $M_i^{(1)}$ — интенсивность перехода из e_i в e_{i-1} , $i = \overline{1, n}$; длительность задания t_3 , непополняемый резерв времени. Величина $\Lambda_i^{(1)}$ равна сумме интенсивностей отказов всех работоспособных

20. Невосстанавливаемые системы с отдельным структурным резервом

Показатель	Особые условия	Расчетная формула
$P_0(t_a, t_p)$	ННР $\Lambda_i^{(1)} = \lambda$	$\sum_{i=0}^{mn-1} \frac{1}{i!} (m\lambda t_a)^i e^{-m\lambda t_a}; t_a \leq t_p/(m-1)$ $\sum_{i=0}^{mn-1} \frac{1}{i!} (m\lambda t_a)^i e^{-m\lambda t_a} -$ $- m \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} (\lambda(t_a + t_p))^i \times$ $\times \sum_{j=n(m-1)}^{mn-i-1} ((m-1)\lambda t_a - \lambda t_p)^j e^{-m\lambda t_a/j!};$ $t_p/(m-1) \leq t_a \leq 2t_p/(m-2)$
	НР, $n = 2$ $\Lambda_0^{(1)} = 2\lambda$ $\Lambda_1^{(1)} = \lambda$	$(-2)^m \sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m-2-i}{m-1} (2^{-i-1} (1 - I(i+1, 2m\rho)) - (-1)^i (1 - I(i+1, m\rho))) = P^0;$ $t_a \leq t_p/(m-1); \rho = \lambda t_a, \gamma = \lambda t_p;$ $P^0 - \Delta P; t_p/(m-1) \leq t_a \leq 2t_p/(m-2);$ $\Delta P = m (-2)^m \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m-3-i}{m-2} \frac{1}{i!} \times \right.$ $\times ((m-1)\rho - \gamma)^i e^{-m\rho} \left((-1)^{i+1} + \frac{1}{2} e^{-m\rho} \right) +$ $+ \sum_{i=0}^{m-2} \binom{2m-3-i}{m-1} \frac{1}{i!} ((m-1)\rho - \gamma)^i \times$ $\left. \times \left(e^{-2m\rho + \rho + \gamma} + \frac{1}{2} (-1)^{m+1+i} e^{-(2m+1)\rho - \gamma} \right) \right\}$

Продолжение табл. 20

Показатель	Особые условия	Расчетная формула
$T_{\text{ср}}(t_p)$	ННР $m = n = 2$	$\frac{2}{\lambda} - \frac{1}{4\lambda} (3 + 2\gamma) e^{-2\gamma}; \quad \gamma = \lambda t_p$
	НР $m = n = 2$	$\frac{3}{2\lambda} - \frac{2}{3\lambda} e^{-2\gamma} + \frac{1}{12\lambda} e^{-4\gamma}$
$T_{\text{вз}}^y(t_a)$	ННР $m = n = 2$	$t_a \left(1 + \frac{\rho^2}{6} (2 + 5\rho) e^{-2\rho} \right) / P_0(t_a, \infty)$
	НР $m = n = 2$	$t_a (1 + 2e^{-2\rho} (2\rho - 4 + (2 + \rho) e^{-2\rho} + (4 - 6e^{-\rho} + 2e^{-2\rho}))) / \rho P_0(t_a, \infty)$
$P_0(t_a, t_p)$	ННР $m = n = 2$	$\left(1 + 2\rho + \frac{1}{2} (2\rho)^2 + \frac{1}{6} (2\rho)^3 \right) e^{-2\rho}, \quad \rho \leq \gamma$
	НР $m = n = 2$	$4(2\rho - 1) e^{-2\rho} + (5 + 4\rho) e^{-4\rho},$ $\rho \leq \gamma, \quad \rho = \lambda t_a, \quad \gamma = \lambda t_p$
$\bar{T}_H(t)$	ННР $m = n = 2$	$\frac{1}{\lambda} (2 - (2 + \lambda t) e^{-\lambda t})$
	НР $m = n = 2$	$\frac{3}{2\lambda} - \frac{2}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda t}$

Примечание. См. принятые обозначения в табл. 18.

устройств группы в состоянии e_i , т. е. $\Lambda_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{n-i} \lambda_j^{(i)}$, где $\lambda_j^{(i)}$ — интенсивность отказов j -го устройства в состоянии e_i . Величину $M_i^{(1)}$ определяют по формуле $M_i^{(1)} = \mu \min(i, r)$, где μ — интенсивность восстановления одной ремонтной бригадой; r — число ремонтных бригад в подсистеме.

Расчет показателей надежности данной системы можно вести по формулам табл. 15—17, если принять, что $\lambda = 1/T_{\text{ср}}(n)$, $F_{\text{вз}}(t) = 1 - \exp \times$

$\times (-M_i t)$, $M_i = iM_n^{(1)}$, где $M_n^{(1)}$ — интенсивность восстановления подсистемы в состоянии e_n ; $T_{\text{ср}}(n)$ — средняя наработка подсистемы до отказа, определяемая по формуле

$$T_{\text{ср}}(n) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^i \frac{\Lambda_0^{(1)} \Lambda_1^{(1)} \dots \Lambda_{s-1}^{(1)}}{M_1^{(1)} M_2^{(1)} \dots M_s^{(1)}} \cdot \frac{\Lambda_0^{(1)} \dots \Lambda_i^{(1)}}{M_1^{(1)} \dots M_i^{(1)}}.$$

21. Результаты расчетов к примеру 15

m	\bar{T}_B	Режим	$\rho = 0,9$	$\rho = 0,99$
			c_p , тыс. операций/с	
2	2	НР, $k_\lambda = 1$	39,12	36,96
2	1	НР, $k_\lambda = 1$	39,72	38,72
2	2	ННР, $k_\lambda = 0$	39,60	37,52
4	2	НР, $k_\lambda = 1$	69,36	60,0

Некоторые частные случаи для невозстановливаемых систем приведены в табл. 20.

Пример 15. В двухканальном вычислительном устройстве с быстродействием каждого канала 20 тыс. операций в секунду и бригадной организацией работы для повышения надежности применено раздельное нагруженное дублирование каналов. Интенсивность отказов одного канала $\lambda = 0,05 \text{ ч}^{-1}$, среднее время восстановления $\bar{T}_B = 2 \text{ ч}$. Оценить гарантируемую с вероятностью ρ реальную производительность системы в интервале времени $t = 20 \text{ ч}$, считая отказы каналов независимыми событиями, а $\rho = 0,9$ и $0,99$. Для тех же ρ оценить реальную производительность также в следующих случаях: а) $\bar{T}_B = 1 \text{ ч}$; б) $m = 2, n = 2$, ННР; в) $m = 4, n = 0$.

Решение. Искомую производительность определяем по формуле $c_p = ct_3(p)/t$, где $c = 40$ тыс. операций в секунду; $t = 20 \text{ ч}$, а $t_3(p)$ определяется из уравнения $Q^{(1)}(t_3, t, m) = 1 - \rho$. Вычисление функции $Q^{(1)} \times (t_3, t, m)$ при $t = 20 \text{ ч}$, $m \leq 4$, $\lambda = 0,05 \text{ ч}^{-1}$, $\beta = 1/\lambda\bar{T}_B = 10$, $\lambda t = 1$ проводим с помощью вычислительной процедуры [5]. С помощью той же процедуры вычисляем вероятность и при $m = 2$, но λ заменяем на $\lambda_0 = (1 + k_\lambda)\lambda^2/(2\lambda + \lambda k_\lambda + \mu)$, а $\beta = M_2/\lambda_0 = 2/\lambda_0\bar{T}_B = r/\lambda_0\bar{T}_B$; $\mu = 1/\bar{T}_B$. Результаты расчетов сведены в табл. 21. Из таблицы следует, что в четырехканальной системе фактическая производительность, гарантируемая с вероятностью ρ , больше не

вдвое, чем в двухканальной системе, а лишь на 77,3 и 62 % соответственно для $\rho = 0,9$ и $\rho = 0,99$ при НР.

СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КОНТРОЛЕМ И НЕПОПОЛНЯЕМЫМ РЕЗЕРВОМ ВРЕМЕНИ

Система состоит из m взаимозаменяемых каналов, выполняющих бригадное задание длительностью t_3 . Выполнение задания нарушается потоком отказов интенсивностью λ_0 в каждом канале. Для уменьшения обесцененной наработки задание разбивают на n этапов. Для организации контрольной точки, подготовки к выполнению нового этапа и действий по проверке результатов выполнения этапа затрачивается время t_R . Время восстановления $T_B = 0$ (случай сбоев) или мало по сравнению с t_R , и тогда его включают в состав t_R . Предельное время завершения работ равно t . По способу контроля выделяют две модели надежности.

Модель 1. Каждому каналу придается устройство аппаратного контроля, включаемое периодически с периодом $\tau = mt_3/n$ и имеющее собственный поток отказов интенсивностью λ_K . Контроль полный и достоверный. После обнаружения отказа (сбоя) и восстановления работоспособности канала он возвращается вновь к выполнению того же этапа сначала. Ни один из этапов не передается для выполнения более чем одному каналу.

Модель 2. Контроль сбоев обеспечивается методом повторного счета по совпадению результатов. После каждого подсчета затрачивается время t_R на сравнение результатов. При

22. Системы с периодическим контролем

Показатель	Условия	Формула
$P_0^{(1)}(n\tau, t, m)$	Модель 1	$\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} q^{m-i} p^i P_0^{(1)}((n-i)\tau, t-\theta, m),$ $n \geq m, \theta = \tau + t_n$ $P^{(1)}(k\tau, t, m) = p^k + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} p^{k-i} q^i \times$ $\times P^{(1)}(i\tau, t, m), k < m$ $P^{(1)}(0, t, m) = 1; p = 1 - q = \exp(-\lambda\theta);$ $\lambda = \lambda_0 + \lambda_k$
	Модель 1 $m = 2$	$p^n \left(1 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^i q^{i+j-1} \binom{n+2j-3}{2j-1} \times \right.$ $\left. \times \left(1 + q \frac{n+2j-2}{2j} \right) \right), n = 2l, r = \left[\frac{t_{\text{пр}}}{\theta} \right]$ $p^n \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^i q^{i+j} \binom{n+2j-2}{2j} \times$ $\times \left(1 + q \frac{n+2j-1}{2j+1} \right),$ $n = 2l + 1, t_{\text{пр}} = t - t_3 - \frac{n}{m} t_n$
$P_k^{(1)}(n\tau, t, m)$	Модель 2	$1 - Q_k^{(1)}(n\tau, t, m); Q_k^{(1)}(n\tau, t, m) =$ $= \sum_{i=0}^m p^i q^{m-i} \sum_{j=\max(0, i-m+k)}^{\min(k, i)} \binom{k}{i} \times$ $\times \binom{m-k}{i-j} Q_{k+i-2j}^{(1)}((n-j)\tau, t, m);$ $q = 1 - p = 1 - e^{-\lambda_0\theta}, k \leq m \leq n$

Продолжение табл. 22

Показатель	Условия	Формула
	Модель 2.1 $k = 0,$ $m = 2$	$1 - \{q^2 Q_0^{(1)}(\tau, t - \theta, 2) + 2pqQ_1^{(1)}(\tau, t - \theta, 2) + p^2 Q_2^{(1)}(\tau, t - \theta, 2)\},$ $Q_1^{(1)}(\tau, t, 2) = q^2 Q_1^{(1)}(\tau, t - \theta, 2) + pqQ_2^{(1)}(\tau, t - \theta, 2);$ $Q_2^{(1)}(\tau, t, 2) = q^2 Q_2^{(1)}(\tau, t - \theta, 2)$
	Модель 2.2 $k = 0,$ $m = 2$	$1 - \{q^2 Q_0^{(1)}(\tau, t - \theta, 2) + 2pqQ_1^{(1)}(\tau, t - \theta, 2)\};$ $Q_1^{(1)}(\tau, t, 2) = q^2 Q_1^{(1)}(\tau, t - \theta, 2)$
	Модель 2.3 $k = 0,$ $m = 2$	$pQ_1^{(1)}(\tau, t - \theta, 2) + qQ_0^{(1)}(\tau, t - \theta, 2);$ $Q_1^{(1)}(\tau, t, 2) = qQ_1^{(1)}(\tau, t - \theta, 2)$
$P_0(n\tau, t_p, 2)$	Модель 2.1	$p^{2n} \left\{ (1 + nq)^2 - nq^2 \left(\frac{1 - (-1)^n}{2} \right), t_{p1} = \theta \right.$ $p^{2n} \left\{ (1 + nq)^2 + n(n + 1)q^2 + 2n(n + 1)(2n + 1)q^3/3 + n(2n^3 + 2n^2 - n - 3)q^4/6 + \right.$ $\left. + \frac{1}{6} q^4 \frac{1 - (-1)^n}{2} (8n^3 + 17n^2 + 11n - 2) \right\},$ $t_{p1} = 2\theta$
$\bar{T}_{вз}(t_3, m)$	Модель 1 $m = 2$	$\frac{n\theta}{2p} \left(1 - \frac{q^2}{p} \right) + \frac{\theta}{4p^2} (1 + 2q^2 - q^3) +$ $+ \frac{\theta}{4} \left(1 - \frac{q^2}{1 + q} \right) \left(-\frac{p}{1 + q} \right)^{n-1}$
	Модель 2 $m = 2$	$\frac{n\theta}{p} + \frac{\theta}{p} \left((-1)^n \left(\frac{p}{1 + q} \right)^n p - \frac{q}{4} - \frac{1}{2} - \right.$ $\left. - \frac{q}{4} \left(\frac{p}{1 + q} \right)^{2n+1} + \frac{\bar{\tau}_0}{2} \left\{ \left(-\frac{p}{1 + q} \right)^{n-1} + \right. \right.$ $\left. \left. + \frac{1 + q}{2} \left(1 + \left(\frac{p}{1 + q} \right)^{2n-1} \right) \right\} +$ $+ \frac{\bar{\tau}_1}{2} \left(1 + \frac{2q}{p} \left(-\frac{p}{1 + q} \right)^n - \left(\frac{p}{1 + q} \right)^{2n-1} \right)$ $\text{Модель 2.1: } \bar{\tau}_0 = 2\theta (1 + 2q + 2q^2)/p(1 + q)^3;$ $\bar{\tau}_1 = \frac{\theta(1 + 2q)}{p(1 + q)^2}$

Продолжение табл. 22

Показатель	Условия	Формула
$\bar{T}_{вз}(t_3, m)$	Модель 2 $m = 2$	Модель 2.2: $\bar{\tau}_0 = \theta(1 + 3q)/\rho(1 + q)^2$; $\bar{\tau}_1 = \theta/\rho(1 + q)$ Модель 2.3: $\bar{\tau}_0 = 2\theta/\rho$; $\bar{\tau}_1 = \theta/\rho$
$\bar{T}_H(t, m)$	Модель 1 $m = 2$	$\theta(2\rho[t/\theta] - (q) + q^{[t/\theta]+1})$
	Модель 2	$\theta\left(\rho[t/\theta] - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2q - 1)^{[t/\theta]}\right)$

несовпадении результатов любых двух просчетов выполняется третий просчет. При совпадении этап считается выполненным, и канал приступает к выполнению следующего этапа. Если число невыполненных этапов стало меньше числа работоспособных каналов, то загрузка освобождающихся каналов происходит согласно одному из следующих правил.

1. Каждый этап, если есть свободные каналы, поступает в два канала и каждый канал выполняет его дважды и сравнивает результаты. Обмена информацией между каналами нет.

2. Каждый этап при наличии свободных каналов передается для исполнения двум каналам, которые обмениваются результатами и сравнивают их.

3. Каждый этап выполняется только одним каналом, освободившиеся каналы простаивают в ожидании окончания работы во всей системе.

Заданы число каналов m , длительность задания t_3 , число этапов $n = mt_3/\tau$, интенсивность отказов канала λ_0 и устройства контроля λ_K , время подготовки нового этапа t_K , максимальное время выполнения задания t .

Расчетные формулы для вероятностей выполнения задания $P_0^{(1)}(n\tau, t, m)$ и $P_K^{(1)}(n\tau, t, m) = 1 - Q_K^{(1)}(n\tau, t, m)$ среднего времени выполнения задания $\bar{T}_{вз}(t_3, m)$ и средней полезной наработки $\bar{T}_H(t, m)$ в интервале $(0, t)$ приведены в табл. 22.

Пример 16. Сравнить по вероятности и среднему времени выполнения задания, содержащего n этапов, при вероятности сбоя на этапе $q = 0,1$ следующие варианты организации работы двух устройств.

1. Одноканальная система с синхронным счетом на двух устройствах по одинаковым алгоритмам и периодическим сравнением результатов.

2. Двухканальная система с аппаратным контролем и $\lambda_K = \lambda_0$.

3. Двухканальная система с контролем по совпадению результатов при повторном счете и тремя вариантами загрузки каналов при одном невыполненном этапе.

Решение. Расчет показателей надежности одноканальной системы проводим по формулам:

$$P_0(n\tau, t_{p1}) = p^{2n}((1 + nq)^2 - n(n + 1)q^2), \quad t_{p1} = \theta;$$

$$P_0(n\tau, t_{p1}) = p^{2n}((1 + nq)^2 - n(n + 1)\left(1 - \frac{1}{2}(1 + p)^2 q^2\right)),$$

$$t_{p1} = 2\theta;$$

$$\bar{T}_{вз}(n\tau) = n\theta/\rho^2.$$

Для двухканальной системы используем формулы табл. 22. Результаты расчетов сведены в табл. 23 и 24. Из таблиц следует, что по среднему времени выполнения задания лучшей

23. Среднее время выполнения задания $\bar{T}_{вз}/\theta$

n	Одноканальная система	Двухканальная система			
		Модель 1	Модель 2.1	Модель 2.2	Модель 2.3
1	1,235	1,238	2,038	1,193	2,222
2	2,469	1,421	2,403	2,334	2,404
3	3,704	2,288	4,136	3,506	4,261
4	4,938	2,689	4,747	4,643	4,751
5	6,172	3,407	6,267	5,772	6,366
10	12,35	6,296	11,57	11,36	11,61
50	61,72	29,89	56,08	55,80	56,13
100	123,5	59,38	111,6	111,4	111,7

24. Вероятность выполнения задания $P_0(n\tau, t_{р1})$

n	Одноканальная система		Двухканальная система			
			Модель 1		Модель 2.1	
	$t_{р}/\theta$					
	1	2	1	2	1	2
6	0,992	0,999	0,757	0,880	0,996	0,999
10	0,981	0,997	0,550	0,804	0,990	0,998
50	0,724	0,908	0,001	0,015	0,817	0,943
100	0,384	0,658	—	—	0,527	0,881

является двухканальная система с аппаратным контролем. Но она имеет практически вдвое больше оборудования, чем остальные системы. Именно поэтому при одинаковом резерве времени $t_{р1}$ она имеет наименьшую вероятность выполнения задания. Далее по величине $\bar{T}_{вз}$ следует двухканальная система с взаимопомощью каналов при выполнении последнего этапа, но она близка к двухканальной системе без взаимопомощи каналов. Последняя превосходит одноканальную систему и по вероятности, и по среднему времени выполнения задания.

6. МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

Работа многофазной системы организована так, что на вход ее первого устройства производительностью c_1 в

каждый отрезок времени Δt поступает столько единиц продукции N , сколько оно сможет обработать за это время при безотказной работе, т. е. $N(\Delta t) = c_1 \Delta t$. После обработки в первом устройстве продукция поступает во второе устройство, затем в третье и т. д. Если все устройства имеют одинаковую производительность, работают безотказно и синхронно, то никаких простоев устройств или неполного использования их производительности из-за отсутствия продукта на входе устройств или невозможности принять обработанную продукцию на выходе нет. Иначе говоря, отсутствуют «технологически связанные» простои (ТСП).

При неравной производительности и отказах устройств возникают технологически связанные простои, обусловленные либо недоиспользованием производительности, либо приостанов-

кой функционирования устройств в работоспособном состоянии. Для уменьшения ТСП устанавливают промежуточные накопители («бункеры», «хранилища», «парки», «запоминающие устройства» и пр.) для хранения внутренних запасов продукции. Систему считают работоспособной до тех пор, пока она может выдавать готовую продукцию.

Наличие запасов в накопителях позволяет при определенных условиях не прерывать выдачу продукции в установленном темпе даже тогда, когда в системе есть отказавшие устройства, что при отсутствии запасов привело бы к прекращению выдачи продукции, а следовательно, к отзыву системы. Именно поэтому наличие запасов создает для отказавших устройств некоторый резерв времени и увеличивает показатели надежности системы. Определенный уровень запасов можно поддерживать благодаря внешним источникам или внутренними средствами в процессе естественного функционирования. Одним из таких средств является запас производительности, позволяющий увеличить заполнение накопителей, расположенных после более производительного устройства. Вместе с тем повышение производительности может сопровождаться снижением безотказности, поэтому оно не всегда целесообразно, так как одновременно с увеличением запасов увеличивается и суммарный поток отказов устройств.

По структуре многофазные системы относят к последовательным системам, в которых фазой называют участок системы от входа до первого накопителя, между накопителями и от последнего накопителя до выхода системы. Многофазное соединение может использоваться наряду с другими видами соединений в последовательно-параллельной структуре. Повышение показателей надежности наблюдается при установке накопителей для хранения внутренних запасов и в сетевой структуре. В этом случае понятие многофазного соединения следует относить к любому пути между одним из входов и одним из выходов системы.

В многофазной системе исследуются те же случайные величины, что и в дру-

гих классах систем. При отсутствии общего непополняемого резерва исследуются время до первого отказа T_0 (первого прекращения выдачи готовой продукции на выходе системы), наработка между соседними отказами T_H . Кроме того, рассматриваются суммарное время собственных $T_{пс i}$ и технологически связанных простоев $T_{пт i}$ i -го устройства и системы, уровень заполнения накопителей V_i . При наличии общего непополняемого резерва времени рассматриваются также такие величины, которые уже были рассмотрены для одноканальных и многоканальных систем. Вероятностные характеристики перечисленных случайных величин являются показателями надежности.

ДВУХФАЗНЫЕ ОДНОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Показатели надежности системы при выполнении задания известной длительности. Система состоит из двух последовательно соединенных элементов, имеющих производительность соответственно c_1 и c_2 , и промежуточного накопителя транзитного (Н1) или тупикового (Н2) типов емкостью $V_0 = z_0 \min(c_1, c_2)$. В начальный момент времени накопитель заполнен до уровня $V_1 = z_1 \min(c_1, c_2)$. Интенсивность отказов элементов У1 и У2 и накопителя Н равна соответственно λ_1 , λ_2 и λ_H . Времена восстановления имеют распределения $F_{в1}(t)$, $F_{в2}(t)$ и $F_{вH}(t)$. Восстановление неограниченное, т. е. каждый элемент ремонтирует собственная ремонтная бригада. Если $c_1 > c_2$ и элемент У1 работает с производительностью c_2 из-за переполнения Н, то его интенсивность отказов равна $\lambda'_1 = \gamma_1 \lambda_1$. Если $c_1 < c_2$ и накопитель пуст, то У2 работает с производительностью c_1 . Тогда его интенсивность отказов равна $\lambda'_2 = \gamma_2 \lambda_2$. При выполнении задания длительностью t_3 и $c_1 = c_2$ уровень заполнения накопителя не возрастает, так как У2 должен работать непрерывно в течение времени t_3 . При $c_1 > c_2$ допускаются отказы У1, но такие, что за время восстановления текущий уровень запасов в накопителе не падает до нуля. При $c_1 < c_2$ допускаются

отказы У2, при этом У1 работает на заполнение накопителя. Но к моменту t_3 накопитель должен быть пуст, чтобы задание было выполнено своевременно. Отказы У1, У2 и Н — события независимые.

Заданы интенсивности отказов λ_1, λ_2 и λ_H , λ'_1 и λ'_2 ; функции распределения $F_{У1}(t), F_{У2}(t)$ и $F_{Н}(t)$; производительности c_1 и c_2 , тип накопителя Н1 или Н2, емкость $z_0 = V_0/\min(c_1, c_2)$ и начальное заполнение накопителя $z_1 = V_1/\min(c_1, c_2)$, непополняемый резерв времени t_p .

Расчетные формулы приведены в табл. 25, где знаком * обозначена операция свертки. Значение $P_2(t_3, a)$ при $c_1 < c_2$ следует находить численно, применяя для решения интегрального уравнения с разностным ядром $k(t)$ метод последовательных приближений. В той же таблице через $p(z_1)$ обозначена плотность распределения уровня заполнения накопителя в начальный момент времени.

Пример 17. В вычислительном комплексе из двух ЭВМ решается задача статистического моделирования. ЭВМ-1 с быстродействием $c_1 = 90$ тыс. операций/с подготавливает предварительные данные для модели и передает их через устройство обмена (УО) в буферное запоминающее устройство (БЗУ), состоящее из двух блоков оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) и одного накопителя на магнитной ленте (НМЛ), откуда эти данные поступают по требованию в основную память ЭВМ-2 с быстродействием $c_2 = 80$ тыс. операций/с. Найти вероятность безотказного функционирования комплекса в течение $t = 18$ ч и среднюю наработку до первого отказа, полагая, что обе ЭВМ выполняют в одной реализации моделирующего алгоритма одинаковое число операций. Нарботка на отказ ЭВМ-1, ЭВМ-2, НМЛ и УО с ОЗУ равна соответственно 100, 250, 1250 и 5000 ч. Среднее время восстановления $\bar{T}_в = 0,5$ ч. Сравнить полученные характеристики с характеристиками надежности того же комплекса без БЗУ. Как изменятся показатели надежности, если предварительную обработку поручить ЭВМ-2, а основную — ЭВМ-1?

Решение. Согласно исходным данным ЭВМ-1 имеет запас производительности в 10 тыс. операций/с, т. е. $a = 1,125$. По исходным данным находим $\rho_1 = \lambda_1 t_3/a = 0,16$, $\alpha = \mu \times (a-1)/\lambda_1 = 25$, $c_1 > c_2$, $t_p = 0$, $V_0 = \infty$, $z_1 = 0$. Расчет проводим по формулам табл. 25. Вероятность $P_1(t_3, a) \approx P_1(\infty, a) = 1 - 1/a = 0,96$. Согласно точной формуле $P_1(t_3, a) = 0,961$. Вероятность $P(t_3, a) = \exp(-(\lambda_2 + \lambda_{НМЛ} + \lambda_{УО}) t_3) P_1 \times (t_3, a) = \exp(-0,005 \cdot 18) 0,961 = 0,878$. При $z_1 = 0$ находим среднюю наработку

$$T_{ср}(a) = \frac{1}{\lambda_{2Н}} \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \left(a \frac{\lambda_{2Н}}{\lambda_1} + \alpha + 1 - \sqrt{\left(a \frac{\lambda_{2Н}}{\lambda_1} + \alpha + 1 \right)^2 - 4\alpha} \right) \right) = 196 \text{ ч.}$$

Без БЗУ средняя наработка $T_{ср} \times (a-1) = (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} = 0,014^{-1} = 71$ ч. Вероятность $P(t_3) = \exp(-t_3/T_{ср}) = \exp(-18/71) = 0,777$. Если ЭВМ поменять местами, то согласно формулам табл. 25 имеем: $P(t_3, a) = \exp(-(\lambda_2 + \lambda_{НМЛ} + \lambda_{УО}) t_3) \times P_2(t_3, a) = \exp(-0,05 \times 18) 24/25 \times (1 + 0,01/2) = \exp(-0,09) \times 0,952 = 0,87$; $\bar{T}_{ср} = 172$ ч. В этом случае БЗУ работает лишь при отказе ЭВМ-1. Поэтому требуемый объем памяти уменьшается. Если емкости БЗУ достаточно для хранения передаваемых данных, то можно не использовать НМЛ. При этом $P(t_3, a) = 0,952 \exp(-0,0042 \times 18) = 0,883$, $T_{ср} = 210$ ч, т. е. больше, чем в 1-м варианте.

Коэффициент готовности двухфазной системы. Система состоит из элементов У1 и У2 и тупикового накопителя Н2. Интенсивности отказов в рабочем состоянии равны λ_1, λ_2 и λ_H . Во время простоя в работоспособном состоянии интенсивности отказов элементов равны λ'_1 и λ'_2 , а $\lambda'_H = 0$. При работе с неполной производительностью интенсивности отказов элементов равны соответственно λ''_1 и λ''_2 . Восстановление работоспособности осуществляется различными ремонтными бригадами с интенсивностями μ_1, μ_2

25. Показатели безотказности двухфазной системы

Показатель	Условия	Формула
Система при $c_1 > c_2$ и $t_p = 0$		
$P(t_3, a)$	$c_1 > c_2, t_p = 0$ $V_0 = \infty,$ $V_1 \geq 0$	$(1 - F_H(t_3))(1 - F_2(t_3))P_1(t_3, a)$ для H_1 ; $(1 - F_2(t_3)) \exp(-\lambda_1 \lambda_H t_3 / (\lambda_1 + \mu_H)) \times$ $\times P_1(t_3, a)$ для H_2
$P_1(t_3, a)$	$c_1 > c_2,$ $t_p = 0,$ $V_0 = \infty,$ $V_1 \geq 0$ $F_{в1}(t) = 1 - \exp(-\mu_1 t)$	$e^{-\mu_1 z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_1 z_1)^n}{n! \alpha^{n/2}} \int_0^{\rho_1} (I_n(2\sqrt{\alpha\tau}) - I_{n+2}(2\sqrt{\alpha\tau})) e^{-(1+\alpha)\tau} d\tau =$ $= e^{-\mu_1 z_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_1 z_1)^n}{n!} I(n+1, (1+\alpha)\rho_1) / (1+\alpha)^{n+1} \right) + O(\rho_1^3)$ $O(\rho_1^3) \leq \Delta = \frac{1}{3} \alpha \rho_1^3 e^{-\mu_1 z_1} \times$ $\times I_0(2\sqrt{\mu_1 z_1 \rho_1 \sqrt{\alpha}}), \rho_1 = \frac{\lambda_1 t_3}{a};$ $\alpha = \mu_1 (a-1) / \lambda_1, a = c_1 / c_2$
	$c_1 > c_2, t_p = 0$ $V_0 = \infty,$ $V_1 = 0$ $F_{в1}(t) = 1 - e^{-\mu_1 t}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{\alpha^n}{n+1} (1+\alpha)^{-2n-1} I(2n+1, (1+\alpha)\rho_1) = 1 - e^{-(1+\alpha)\rho_1} (I_0\Phi_1) +$ $+ \sqrt{\alpha} I_1(\Phi_1) + (\alpha-1) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\frac{n-1}{2}} \times$ $\times I_n(\Phi_1); \Phi_1 = 2\sqrt{\alpha\rho_1};$ $I_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2v+n}}{v!(n+v)!} I \text{ см. табл. 10}$

Продолжение табл. 25

Показатель	Условия	Формула
$P_1(t_3, a)$	$c_1 > c_2, t_p = 0$ $V_0 = \infty,$ $V_1 = 0$ $T_B = \text{const}$	$1 - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)\gamma} \left(I(n, x_n) + \sum_{j=0}^{n-3} (j+1) \gamma^{n-2-j} I(j+2, x_n) \right)$ $x_n = \min(\gamma, \max(0, \rho_1 - (n-1)\gamma));$ $\gamma = \lambda_1 T_B / (a-1)$
	$t_3 = \infty$	$\max(0, 1 - 1/\alpha), \rho > 3/\alpha, \alpha > 3$
$\Lambda(t_3, a, z_1)$	$c_1 > c_2, t_1 = 0$ $z_0 = \infty$	$\lambda_2 + \lambda_H + \Lambda_1(t_3, a, z_1);$ $\Lambda_1 = a_1(t_3, a, z_1) / P_1(t_3, a, z_1)$ $a_1(t_3, a, z_1) = \frac{\lambda_1}{a} e^{-\mu_1 z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \times$ $\times \left(\frac{\mu_1 z_1}{\sqrt{\alpha}} \right)^n e^{-(1+\alpha)\rho_1} (I_n(\Phi_1) - I_{n+2}(\Phi_1))$
$T_{cp}(a, z_1)$	$c_1 > c_2, t_p = 0$ $z_1 \geq 0$ $z_0 = \infty$	$\frac{1}{\lambda_{2H}} (1 - Q_1^*(\lambda_{2H}, a) \exp(-\mu_1 z_1 (1 - Q_1^*(\lambda_{2H}, a))))); \lambda_{2H} = \lambda_2 + \lambda_H;$ $Q_1^*(\lambda_{2H}, a) = \left(a \frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} + \alpha + \right.$ $\left. + 1 - \sqrt{\left(a \frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} + \alpha + 1 \right)^2 - 4\alpha} \right) / 2\alpha$
	$\lambda_{2H} = 0$ $\alpha < 1$	$(1 + \mu_1 z_1) / \left(\lambda_1 - \mu_1 \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right);$ $a - 1 < \lambda_1 / \mu_1$
$P_1(t_3, a, z_0)$	$c_1 > c_2$ $z_1 = 0$ $z_0 \geq 0$	$P_1 < P_1 < \bar{P}_1; P_1 = e^{-\rho_1} \left(1 + \rho_1 - \right.$ $\left. - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \rho_1}) \right);$

Продолжение табл. 25

Показатель	Условия	Формула
$P_1(t_3, a, z_0)$	$c_1 > c_2$ $z_1 = 0$ $z_0 \geq 0$	$\bar{P}_1 = 1 - \frac{1}{1 + \alpha} (1 - e^{-(1+\alpha)\rho_1}),$ $\rho_1 \leq \lambda_1 z_0 / (a - 1)$ $P_1 = e^{-\lambda_1(t_3 - z_0)} + e^{-\rho_1} \left(\gamma - \frac{1}{\alpha} (1 - \alpha(\rho_1 - \gamma))(1 - e^{-\mu_1 z_0}) \right), \rho_1 \geq \gamma$ $\bar{P}_1 = 1 - \frac{1}{1 + \alpha} (1 - e^{-(1+\alpha)\gamma}) + e^{-\alpha\gamma} (e^{-\gamma} - e^{-\rho_1}), \rho_1 \geq \gamma = \frac{\lambda_1 z_0}{a - 1}$
$T_{cp}(a, z_0, z_1)$	$z_1 = z_0,$ $\lambda_{2H} = 0$	$\frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{\gamma_1} e^{\lambda_1 \delta z_0} + \left(\frac{a\alpha}{(\alpha - 1)^2} + \frac{1}{\gamma_1(\alpha - 1)} \right) \times \right.$ $\left. \times (e^{\lambda_1 \delta z_0} - 1) - \frac{\lambda_1 z_0}{a - 1} \left(1 + \frac{a}{\alpha - 1} \right) \right)$ $\delta = (\alpha - 1) / (a - 1); \quad \gamma_1 = \lambda'_1 / \lambda_1;$ $\alpha = \mu_1 (a - 1) / \lambda_1 \neq 1;$
	$z_1 = z_0, \alpha = 1$ $\lambda_{2H} = 0$	$\frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{\gamma_1} + \lambda_1 z_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma_1 (a - 1)} \right) + \right.$ $\left. + \frac{a}{2} \left(\frac{\lambda_1 z_0}{a - 1} \right)^2 \right)$
	$z_1 < z_0$ $\lambda_{2H} = 0$	$\frac{1}{\lambda_1} \left\{ \frac{1}{\gamma_1} e^{\lambda_1 \delta z_0} + \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{a}{\alpha - 1} \right) \times \right.$ $\times (e^{\delta \lambda_1 z_0} - e^{\delta \lambda_1 (z_0 - z_1)}) +$ $+ \frac{a}{\alpha - 1} (-1 + e^{\delta \lambda_1 z_0}) +$ $\left. + \lambda_1 z_1 (1 + \mu_1 / \lambda_1) / (1 - \alpha) \right\}, \alpha \neq 1$
	$a = \gamma_1 = 1$	$\frac{1}{\lambda_1} (1 + z_1 (1 + \mu_1 / \lambda_1)), \lambda_{2H} = 0$

Продолжение табл. 25

Показатель	Условия	Формула
$T_{\text{ср}}(a, z_0, z_1)$	$z_1 = z_0,$ $\gamma_1 = 1$ $\lambda_{2H} = 0$	$\frac{1}{\lambda_1} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha - 1} e^{\delta \lambda_1 z_0} + \frac{\alpha \alpha}{(\alpha - 1)^2} (e^{\delta \lambda_1 z_0} - 1) + \frac{\beta + 1}{\alpha - 1} \lambda_1 z_0 \right\}, \quad \beta = \mu_1 / \lambda_1$
	$z_1 = z_0$ $\lambda_{2H} > 0$	$\frac{1}{\lambda_{2H}} \left\{ 1 - \left\{ \gamma_1 (a - 1) (\omega_2 - \omega_1) \exp \left(- \frac{\lambda_1 z_0}{a - 1} \times \left(\alpha - 1 + \frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} (a - 2) \right) \right) \right\} / \left\{ \left(\frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} + (a - 1) (\gamma_1 + \omega_2) \right) - (a - 1) \gamma_1 \omega_1 \right) \times \right. \right.$ $\left. \times e^{-\omega_1 \lambda_1 z_0} - \left(\frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} + (a - 1) \times (\gamma_1 + \omega_1) \right) - (a - 1) \gamma_1 \omega_2 \right) e^{-\omega_2 \lambda_1 z_0} \right\}$ $\omega_{1,2} = \frac{1}{2(a-1)} \left(\frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} (a-2) + \alpha - 1 \mp \sqrt{\left(\frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} (a-2) + \alpha - 1 \right)^2 + 4(a-1) \frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} \left(1 + \beta + \frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} \right)} \right)$
	$z_1 < z_0$	$\frac{1}{\lambda_{2H}} \left\{ 1 - \left\{ \left(1 - \gamma_1 - \frac{\gamma_1}{\lambda_{2H}} (a - 1) \lambda_1 \omega_1 \right) \times \right. \right.$ $\left. \times e^{-\lambda_1 \omega_1 z_0 - \lambda_1 \omega_2 z_1} - \left(1 - \gamma_1 - \gamma_1 (a - 1) \omega_2 \times \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{2H}} \right) e^{-\lambda_1 \omega_2 z_0 - \lambda_1 \omega_1 z_1} \right) \right\} / \left\{ \left(1 + \frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} + (a - 1) \left(\gamma_1 + \omega_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{2H}} \gamma_1 \omega_1 \right) \right) \times \right.$ $\left. \times e^{-\omega_1 \lambda_1 z_0} - \left(1 + \frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} + (a - 1) \left(\gamma_1 + \omega_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{2H}} \gamma_1 \omega_2 \right) \right) e^{-\omega_2 \lambda_1 z_0} \right\}$

Продолжение табл. 25

Показатель	Условия	Формула
$T_{\text{ср}}(a, z_0, z_1)$	$z_0 = \infty$ $\lambda_{2H} > 0$	$\frac{1}{\lambda_{2H}} (1 - A \exp(-(\lambda_{2H} + \mu_1(1 - A))z_1));$ $A = \frac{1}{2\alpha} \left(a \frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} + \alpha + \right.$ $\left. + 1 - \left(\left(\frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} (a - 2) + \alpha - 1 \right)^2 + \right.$ $\left. + 4(a - 1) \frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} \left(1 + \beta + \frac{\lambda_{2H}}{\lambda_1} \right) \right)^{1/2} \right) = \frac{a - 1}{\alpha}$
	$z_0 = \infty,$ $\lambda_{2H} = 0$	$\frac{1}{\lambda_1} (a/(1 - \alpha) + (\beta + 1)z_1/(1 - \alpha)), \alpha < 1$
$DT(a)$	$z_1 = z_0$ $\lambda_{2H} = 0$	$T_{\text{ср}} \left(T_{\text{ср}} + \frac{2a(\alpha + 1)}{\lambda_1(\alpha - 1)^2} - 2z_0 \frac{a - 2}{a - 1} \right) +$ $+ (A_2 - B_2)/\lambda_1^2; \quad A_2 = b + \left(\frac{a - 2}{a - 1} \lambda_1 z_0 \right)^2 -$ $- 2a(\alpha + 1)(a - 2)\lambda_1 z_0 / (\alpha - 1)^2 (\alpha - 1);$ $b = (a - 1)(1 - a\alpha)(2a + a\alpha - 1) / (a - 1)^2;$ $B_2 = 2a/\gamma_1 (\alpha - 1)^2 + 2(1 - a\gamma_1 / (\alpha - 1)) (a\alpha -$ $- \alpha + 1) \lambda_1 z_0 / \gamma_1 (a - 1) (\alpha - 1)^2 +$ $+ (\lambda_1 z_0 (a\alpha - \alpha + 1) / (\alpha - 1) (a - 1))^2 +$ $+ e^{\delta \lambda_1 z_0} \left(\frac{2a\alpha}{\gamma_1 (\alpha - 1)^2} + b + c \lambda_1 z_0 \right);$ $c = 2\alpha(\alpha - 1 + a\gamma_1)(a + \alpha - 1) / \gamma_1 (\alpha - 1)^3 (a - 1)$
$P(t_3, a)$	$V_0 = \infty,$ $z_1 = 0$	<p>Система при $c_1 \leq c_2$ и $t_p = 0$</p> $(1 - F_1(t_3))(1 - F_H(t_3))P_2(t_3, a) \text{ для } H1,$ $(1 - F_1(t_3)) \exp(-\lambda_2 \lambda_H t_3 / (\lambda_2 +$ $+ \lambda_H)) P_2(t_3, a) \text{ для } H2$
$P_2(t_3, a)$	$F_{H2}(t) =$ $= 1 - e^{-\mu_2 t}$ $V_0 = \infty$ $z_1 = 0$	$e^{-\lambda_2 t_3} + \lambda_2 a \sqrt{\alpha} \int_0^{t_3} k(t_3 - y) P_2(y, a) dy;$ $a = c_2 / c_1;$ $k(t - y) = \int_0^{t-y} \frac{1}{\theta} I_1(2\sqrt{\alpha} \lambda_2 \theta / a) \times$ $\times \exp\left(-\frac{a-1}{a}(\mu_2 - \lambda_2)\theta - \lambda_2(t - y)\right) d\theta$ $\alpha = \mu_2(a - 1) / \lambda_2$

Продолжение табл. 25

Показатель	Условия	Формула
$P_2(\infty, a)$	$V_0 = \infty;$ $z_1 = 0$	$\max(0, (\alpha - 1)/\alpha (1 + \lambda_2/\mu_2))$
$T_{cp}(a)$	$V_0 = \infty$	$2 \left\{ \sqrt{(a\lambda_{1H} + \lambda_2(\alpha + 1))^2 - 4\alpha\lambda_2^2} + \right.$ $\left. + (2 - a)\lambda_{1H} - (\alpha - 1)\lambda_2 \right\}, \lambda_{1H} = \lambda_1 + \lambda_H$
	$\lambda_{1H} = 0$	$1/\lambda_2 (1 - \alpha), \alpha < 1$
$P(t_3, a, z_1)$	$c_1 = c_2$ $z_1 = z_0$	$e^{-\lambda_{2H}t_3} \left(1 - e^{-\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma^i}{i!} I(i + 1, \lambda_1(t_3 - z_0)) \right);$ $\gamma = \mu_1 z_0; \lambda_{2H} = \lambda_2 + \lambda_H$
	$c_1 = c_2$	$\rho_0 P(t_3, a, z_0) + \rho_1 e^{-\lambda t_3} +$ $+ (1 - \rho_0 - \rho_1) e^{-\lambda_{2H}t_3} \left(1 - \frac{\lambda t_3}{(\lambda + \mu_1) z_0} + \right.$ $\left. + \frac{\exp(-\gamma)}{(\lambda + \mu_1) z_0} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\gamma} (t_3 - z_0)} \times \right.$ $\left. \times I_1 \left(2\sqrt{\lambda_1 (t_3 - z_0) \gamma} \right) \right), \gamma = \mu_1 z_0;$ $\lambda = \lambda_1 + \lambda_{2H}$ $\rho_1 = P(z_1 = 0), \rho_0 = P(z_1 = z_0),$ $\rho(z_1) = (1 - \rho_0 - \rho_1)/z_0$
$T_{cp}(a, z_1)$	$\rho(z_1) = (1 - \rho_0 - \rho_1)/z_0$ $c_1 = c_2$	$\frac{\rho_1}{\lambda} + \rho_0 T_{cp}(a, z_1 = z_0) + (1 - \rho_0 - \rho_1) \times$ $\times \left(1 - \frac{\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_{2H} z_0 (1 + \mu_1/\lambda)))}{(\lambda_1 + \mu_1) \lambda_{2H} z_0} \right)$
	$c_1 = c_2$ $z_1 = z_0$	$\frac{1}{\lambda_{2H}} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda} e^{-\lambda_{2H} z_0 (1 + \mu_1/\lambda)} \right)$
	$c_1 = c_2$ $z_1 = z_0$ $\lambda_{2H} = 0$	$\frac{1}{\lambda_1} (1 + (\lambda_1 + \mu_1) z_0)$

Продолжение табл. 25

Показатель	Условия	Формула
Система при $c_1 > c_2$ и $t_p > 0$		
$P(t_3, a)$	$H1, z_0 = \infty$ $z_1 = 0$ $F_{B1}(t) =$ $= 1 - e^{-\mu_1 t}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_2^n}{n!} e^{-\rho_2} (I(n, \mu_2 t_p) * P_1(t_3, t_p, a)),$ $\rho_2 = (\lambda_2 + \lambda_H) t_3$ $P_1(t_3, t_p, a) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!} e^{-\gamma} A_n(\rho_1) =$ $= e^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \gamma^{n-i} \alpha^i (A_{ni} (1 +$ $+ \alpha)^{-n-i-1} / (n+i)! I(n+i+1, \rho_1);$ $A_{ni} = \frac{(n+i)! (n+1-i)!}{(n+1)! i!}, \quad i \leq n$ $A_n(\rho_1) =$ $= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k+n}{k} \frac{\alpha^k (n+1)}{(n+k+1) (1+\alpha)^{2k+n+1}} \times$ $\times I(2k+n+1, \rho_1 (1+\alpha))$ $\gamma = \mu_1 t_p, \quad \rho_1 = \lambda_1 t_3 / a; \quad \rho_2 = (\lambda_2 + \lambda_H) t_3$
	$H1, z_0 = \infty$ $z_1 = 0$ $\mu_1 = \mu_2$	$1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^k}{k!} e^{-\gamma} \left(I(k+1, \rho_2) + \right.$ $\left. + \sum_{i=0}^k \frac{\rho_2^i}{i!} A_{k-i}(\rho_1) e^{-\rho_2} \right)$
$T_{cp}(a, z_0)$	$H2, z_1 = z_0$ $\lambda_2 = 0$	$\frac{1}{\lambda_1} \left(A_0 + A_2 + A_1 \left(1 + \frac{\gamma_H}{\gamma_1 + \beta_H} \right) \right);$ $\gamma_H = \frac{\lambda_H}{\lambda_1}, \quad \gamma_1 = \frac{\lambda_1'}{\lambda_1}; \quad \beta_H = \frac{\mu_H}{\lambda_1}$ $A_0 = \frac{(1 + B_1) D_1 + (a-1) (1 + B_2) D_2 - (a-1) B_2 \Delta \omega}{(a-1) ((\omega_2 B_1 - \gamma_1 \omega_1) e^{-\omega_1 \lambda_1 z_0} -$ $- (\omega_1 B_1 - \gamma_1 \omega_2) e^{-\omega_2 \lambda_1 z_0} + \gamma_H \Delta \omega)}$

Продолжение табл. 25

Показатель	Условия	Формула
$T_{ср}(a, z_0)$	$H2, z_1 = z_0$ $\lambda_2 = 0$	$A_1 = \left(\beta \left(\frac{\gamma_1 \gamma_H A_0}{\gamma_1 + \beta_H} - 1 \right) \frac{\Delta \omega - D_2}{\omega_1 \omega_2} + \right.$ $\left. + D_1 \left(\left(1 + \frac{\gamma_H}{\gamma_1 + \beta_H} \right) \gamma_1 A_0 - 1 \right) \right) \left \Delta \omega (a - 1); \right.$ $A_2 = \left((a - 1) \gamma_1 D_1 A_0 - \frac{\Delta \omega - D_2}{\omega_1 \omega_2} \right) \left \Delta \omega (a - 1); \right.$ $B_1 = \gamma_H \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_H} \right), \quad \beta_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1}$ $B_2 = \frac{\beta + 1}{\beta \gamma_H} (\gamma_1 + \beta_H); \quad D_1 = e^{-\omega_1 \lambda_1 z_0} -$ $- e^{-\omega_2 \lambda_1 z_0}; \quad D_2 = (\omega_2 e^{-\omega_1 \lambda_1 z_0} -$ $- \omega_1 e^{-\omega_2 \lambda_1 z_0}); \quad \omega_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\delta \mp \right.$ $\mp \sqrt{\left(\delta - \frac{\gamma_1 \gamma_H}{(a - 1)(\gamma + \beta_H)} \right)^2 + \frac{4\beta \gamma_1 \gamma_H}{(a - 1)(\gamma + \beta_H)} -$ $\left. - \frac{\gamma_1 \gamma_H}{(a - 1)(\gamma_1 + \beta_H)} \right), \quad \delta = \frac{\alpha - 1}{a - 1},$ $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$

и μ_H . Во время ремонта одного из элементов другие также могут отказывать. Емкость накопителя $V_0 = z_0 \min(c_1, c_2)$.

Заданы производительности элементов c_1 и c_2 ; емкость накопителя z_0 ; интенсивности отказов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_H, \lambda'_1, \lambda'_2$; интенсивности восстановления μ_1, μ_2 и μ_H . При $c_1 > c_2$ задана λ''_1 , а при $c_1 < c_2$ интенсивность λ''_2 .

Расчетные формулы для случая $c_1 = c_2$ приведены в табл. 26, а при $c_1 > c_2$ в табл. 27. При $c_1 < c_2$ расчетные формулы получают также из табл. 27 путем круговой замены индексов 1 и 2 во всех входящих в формулы переменных $\lambda_i, \mu_i, \lambda''_i, \lambda'_i$. Кроме коэффициентов готовности, вычисляют коэффициент наложения потерь $\delta(z_0, a)$ — условное значение коэффициента простоя системы при усло-

вии, что элемент У2 работоспособен, а элемент У1 — нет.

Пример 18. Автоматическая станочная линия разделяется на два участка с равной производительностью и имеет промежуточный бункер емкостью, достаточной, чтобы принять всю продукцию первого участка, изготовленную в течение 1 ч. Интенсивности отказов и восстановления: $\lambda_1 = 0,2 \text{ ч}^{-1}$, $\lambda_2 = 0,02 \text{ ч}^{-1}$, $\mu_1 = 1 \text{ ч}^{-1}$, $\mu_2 = 0,2 \text{ ч}^{-1}$. Найти коэффициент готовности и вероятности состояний в установившемся режиме для трех режимов работы: 1) $\lambda'_i = \lambda_i$; 2) $\lambda'_1 = 0, \lambda'_2 = \lambda_2$; 3) $\lambda'_1 = \lambda'_2 = 0$. Как изменится коэффициент готовности, если увеличить на 10 % производительность первого участка?

Решение. Согласно исходным данным $z_0 = 1, \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 0,22 \text{ ч}^{-1}$, $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 1,2 \text{ ч}^{-1}, v = 0,5$. Ре-

26. Стационарные показатели надежности двухфазной системы при $c_1 = c_2$

Показатель	Особые условия	Расчетная формула
$K_T(z_0)$	$\lambda_H = 0$	$\frac{\mu_1}{\lambda} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (\mu + \gamma_2 \lambda) (e^{Az_0} / (\mu + \lambda \gamma_1) + (e^{Az_0} - 1) / (v - 1) \mu_2) \right) / \left(1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\lambda_2'}{\mu} + \frac{v}{\lambda} (\mu + \lambda \gamma_2) \left(\frac{\lambda + \mu_2 + \lambda_1' \lambda / \mu}{\mu + \lambda \gamma_1} e^{Az_0} + \frac{\lambda + \mu}{\mu (v - 1)} (e^{Az_0} - 1) \right) \right)$ $A = \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda \mu} (v - 1) (\lambda + \mu); \quad v = \lambda_2 \mu_1 / \lambda_1 \mu_2;$ $\gamma_i = \lambda_i' / \lambda_i; \quad \mu = \mu_1 + \mu_2; \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
	$\lambda_H = 0$ $\gamma_i = v = 1$	$\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^2 + \frac{\lambda_2 \mu_1 z_0}{\lambda + \mu} \left(1 + \frac{\lambda_2 \mu_1}{\lambda \mu} (\lambda + \mu) z_0 \right)^{-1}$
	$\lambda_H = 0$ $\gamma_i = 0,$ $v = 1$	$\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda} \left(1 + \frac{\mu}{\lambda} \right) \mu_1 z_0 \right) / \left(2 + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\lambda_1 \mu_2}{\mu} \left(1 + \frac{\mu}{\lambda} \right) z_0 \right)$
	$\lambda_H = 0,$ $\gamma_i = 0$ $v \neq 1$	$(v^2 e^{Az_0} - 1) / (v - 1) \left(1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \left(1 + \frac{\mu_2}{\lambda} \right) v e^{Az_0} + v (\lambda + \mu) (e^{Az_0} - 1) / \lambda (v - 1) \right)$
	$\lambda_H = 0,$ $\gamma_i = 1$ $v \neq 1$	$\frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \delta(z_0) \right);$ $\delta(z_0) = (1 + v (e^{Az_0} - 1) / (v - 1))^{-1}$
	$\lambda_H > 0,$ $\gamma_i = 1$ $\mu_i = \mu,$ $\lambda_i = \lambda$	$\left(\mu^2 + \frac{1}{2} \mu z_0 (\lambda + \mu) (\lambda + \mu (1 + c)) \right) / \left(1 + \frac{1}{2} (\lambda' + \mu) z_0 (1 + c) \right) (\lambda + \mu)^2,$ $c = \lambda_H (\mu_H + 2\lambda) (\mu_H + 2\mu) + (\mu_H + 2\mu) (2\lambda + \mu + \mu_H)$
$\delta(z_0)$	$\lambda_H = 0$ $\gamma_i = v = 1$	$(1 + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda + \mu) z_0 \lambda^{-2})^{-1}$
	$\lambda_H = 0$ $\gamma_i = 0,$ $v \neq 1$	$(v - 1) / (v e^{Az_0} - 1)$

Продолжение табл. 26

Показатель	Особые условия	Расчетная формула
$\delta(z_0)$	$\lambda_H = 0$ $\gamma_i = 1,$ $v \neq 1$	$\lambda \left(1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right) / \left(\lambda + \mu_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mu_1 e^{Az_0} + \frac{v(\lambda + \mu)}{v-1} (e^{Az_0} - 1) \right)$
	$\lambda_H > 0$ $\gamma_i = 1,$ $\mu_i = \mu$ $\lambda_i = \lambda$	$(1 - (\lambda + \mu) z_0 / (2 + (\lambda + \mu) (1 + c) z_0))$

27. Коэффициент готовности двухфазной системы при $\lambda_H = 0, c_1 > c_2$

Условия	Формула
$\lambda_2 = 0$	$1 - \lambda_1 / \left(\lambda_1 + \mu_1 e^{-b\mu_1 z_0} + \frac{\alpha \lambda_1}{b(a-1)} (1 - e^{-b\mu_1 z_0}) \right),$ $b = \frac{\lambda_1}{\mu_1(a-1)} - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}$
$\lambda_2 > 0$	$(A_0 + A_3 + A_4) / \sum_{i=1}^8 A_i;$ $A_0 = ((\lambda'_1 + \mu)(a-1)c_3 + \mu c_4) D_1 - ((\lambda'_1 + \mu)(a-1) D_3 + \mu D_4) D_5 / (\lambda''_1 (\lambda'_1 + \mu) + \lambda'_1 \lambda_2);$ $A_1 = \mu ((\lambda_2 c_3 (a-1) + c_4 (\lambda''_1 + \lambda_2)) D_1 - (\lambda_2 (a-1) D_3 + D_4 (\lambda''_1 + \lambda_2)) D_5) / (\mu_2 (\lambda''_1 (\lambda'_1 + \mu) + \lambda'_1 \lambda_2));$ $A_2 = \lambda'_1 A_1 / \mu;$ $A_3 = c_3 D_2 + D_1 D_3; \quad A_4 = ((a-1)c_3 + c_4) D_2 + ((a-1) D_3 + D_4) D_1; \quad A_5 = \frac{1}{a} (c_4 D_2 + D_4 D_1);$ $A_6 = \frac{1}{\mu} A_5 (\lambda_2 (a-1) + \lambda_1); \quad A_7 = 1; \quad A_8 = \lambda'_2 / \mu;$ $D_1 = e^{-s_1 z_0} - e^{-s_2 z_0}; \quad D_2 = \frac{1}{s_1} (1 - e^{-s_1 z_0}) - \frac{1}{s_2} (1 - e^{-s_2 z_0}); \quad \mu = \mu_1 + \mu_2; \quad D_3 = \frac{\mu_1}{(a-1)(s_2 - s_1)};$ $D_4 = \frac{\lambda'_2 \mu}{\mu a (s_2 - s_1)}; \quad D_5 = s_1 e^{-s_1 z_0} - s_2 e^{-s_2 z_0};$ $b_1 = a\lambda - (a-1)(a\mu_1 - \mu_2 + (a\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2) / \mu);$ $b_2 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 - \mu_1 (a-1) (\lambda_2 + \mu_2));$ $s_{1,2} = (b_1 \mp \sqrt{b_1^2 - 4ab_2(a-1)}) / 2a(a-1)$

Продолжение табл. 27

Условия	Формула
$\lambda_i = \lambda'_i = \lambda''_i = \lambda$ $\mu_1 = \mu_2 = \mu$	$c_3 = \mu_1 (\mu_1 (\lambda'_2 - \lambda_2) + \frac{\mu_2}{a} (\mu + \lambda_1 + \lambda'_2)) / (\mu(a-1) (s_2 - s_1));$ $c_4 = \mu_1 (\mu_1 (\lambda_2 - \lambda'_2) + (\lambda_2 \mu + \lambda \lambda'_2) / (a-1)) / (\mu a (s_2 - s_1))$ $\frac{1}{(a-1) (s_2 - s_1)} \left\{ \frac{\mu}{\lambda} (a-1) (s_2 e^{-s_2 z_0} - s_1 e^{-s_1 z_0}) + \right.$ $\left. + (\lambda + \mu)^2 \left(\frac{1}{s_1} (1 - e^{-s_1 z_0}) - \frac{1}{s_2} (1 - e^{-s_2 z_0}) \right) + \right.$ $\left. + \left(\mu (a+1) + \frac{a-1}{2a\lambda} (2\mu^2 + \lambda\mu + a\lambda^2) (e^{-s_1 z_0} - e^{-s_2 z_0}) \right) \right\} / \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2\mu} + \frac{(\lambda + \mu)^2 (1 + \lambda(a+1)/2a\mu)}{(a-1) (s_2 - s_1)} \right\} \times$ $\times \left(\frac{1}{s_1} (1 - e^{-s_1 z_0}) - \frac{1}{s_2} (1 - e^{-s_2 z_0}) \right) + (s_2 e^{-s_2 z_0} - s_1 e^{-s_1 z_0}) \frac{\mu^2 + (\lambda + \mu)^2}{2\lambda\mu (s_2 - s_1)} + \frac{1}{s_2 - s_1} \left(\lambda + \right.$ $\left. + \frac{(\lambda + \mu) (\lambda + 2\mu)}{2\lambda a} + \frac{\lambda^2 (a+1)}{4\mu a} + \frac{\lambda}{2a} + \right.$ $\left. + \frac{(\lambda + \mu^2) + a\mu^2}{\mu (a-1)} (e^{-s_1 z_0} - e^{-s_2 z_0}) \right)$

28. Результаты расчетов к примеру 18

Условия	Режим	P	Φ	G	K _п	K _г
c ₁ = c ₂	1	0,7652	0,1279	0,1069	0,2283	0,7717
	2	0,7565	0,1380	0,1055	0,2269	0,7731
	3	0,7855	0,1214	0,0931	0,2197	0,7803
c ₁ > c ₂	1	0,0872	0,3180	0,5948	0,1768	0,8231

Результаты расчетов для коэффициента готовности и вероятностей заставить бункер пустым P, полным Φ и с промежуточным заполнением G приведены в табл. 28.

Без бункера коэффициент готовности K_г = 0,7576 в режиме 1 и K_г = 0,7692 в режиме 3. Коэффициент простоя K_п уменьшился на 5,8 % в режиме 1 и на 4,8 % в режиме 3. При запасе производительности K_п уменьшился на 27 %.

МНОГОФАЗНЫЕ ОДНОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДИНАКОВОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬЮ ФАЗ

Система состоит из m последовательно соединенных устройств одинаковой производительности с промежуточными накопителями емкостью V_{ок} = cz_{ок}, k = 1, m-1 (рис. 4, а). При отказе одного из устройств остальные продолжают работать до тех пор, пока не заполнятся все накопители

между входом системы и отказавшим устройством и не опустошатся все накопители между ним и выходом системы. Устройства приостанавливают свою работу не одновременно, а по мере переполнения своего выходного или опустошения входного накопителя. Во время работы k -е устройство отказывает с интенсивностью λ_k , а после приостановки работы в работоспособном состоянии не отказывает вовсе. Поскольку во время ремонта отказавшего устройства другие еще работают в течение некоторого времени, в системе возможно появление более одного неработоспособного устройства. Время восстановления имеет экспоненциальное распределение с параметром μ .

Заданы интенсивности отказов λ_i , $i = \overline{1, m}$; емкости накопителей V_{oi} , $i = \overline{1, m-1}$; интенсивность восстановления μ , производительность устройств c .

Коэффициент готовности

$$K_r(z_{oi}, i = \overline{1, m-1}) = 1 - \bar{\lambda} / (\bar{\lambda} + \mu), \quad \bar{\lambda} = \lambda_k^* + \lambda_k^{**} - \lambda_k, \quad (99)$$

а значения λ_k^* и λ_k^{**} находят из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1}^* &= \lambda_{k+1} + \lambda_k^* \times \\ &\times \left(1 - \frac{1}{2} (v_k + 1) g(\lambda, v_k, z_{ok}) \right), \\ v_k &= \lambda_{k+1}^{**} / \lambda_k^*, \quad k = \overline{1, m-1}; \\ \lambda_k^{**} &= \lambda_k + \lambda_{k+1}^* (1 - (v_k + 1) \times \\ &\times g(\lambda, 1/v_k, z_{ok}) / 2v_k), \\ k &= \overline{1, m-1}; \quad \lambda = \lambda_k^* + \lambda_{k+1}^{**}; \\ \lambda_1^* &= \lambda_1, \quad \lambda_m^{**} = \lambda_m, \quad g(\lambda, v, z_0) = \\ &= \{2\mu v (e^{Az_0} - 1)\} / \{(v-1)(\lambda + \mu) \times \\ &\times (1 + ve^{Az_0}) + v(2\mu + \lambda)(e^{Az_0} - 1)\}, \end{aligned} \quad (100)$$

$$A = \frac{v-1}{v+1} \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right)$$

Решение системы (100) следует проводить методом последовательных приближений, полагая в качестве началь-

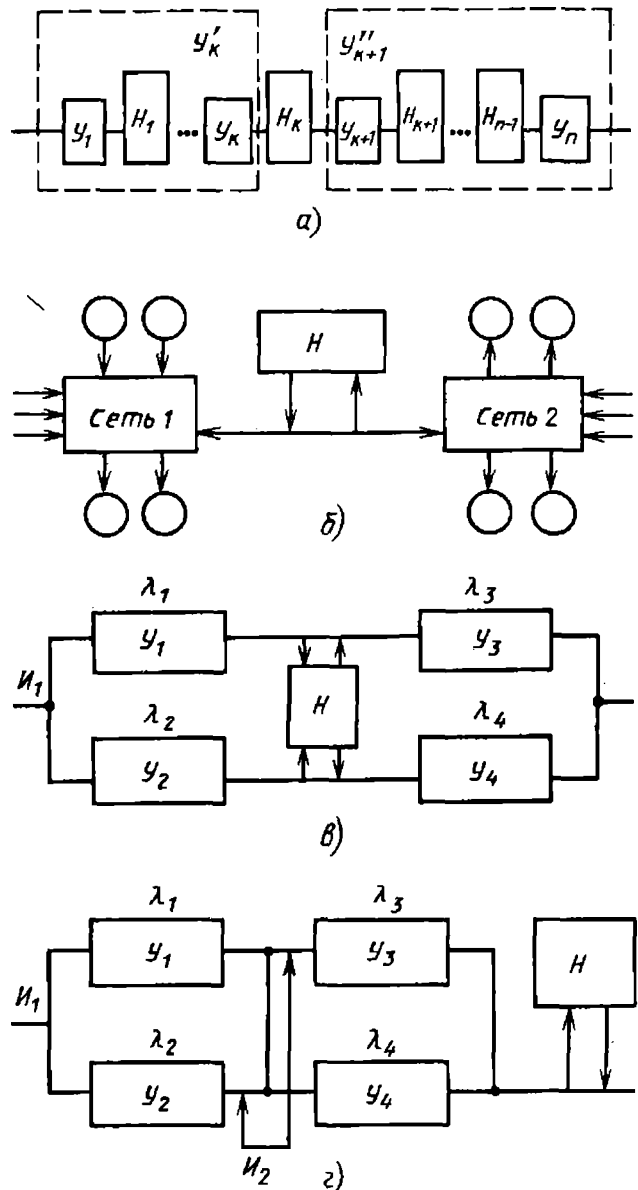


Рис. 4. Структурные схемы многофазных систем и сетей

ных условий значения $\lambda_k^* = \lambda_k^{**} = \lambda_k$. Вычисления прекращают, когда разность между значениями $\bar{\lambda} = \lambda_k^* + \lambda_{k+1}^{**} - \lambda_k$ для различных k не станет меньше заданного значения:

$$\max_{(k \neq l)} |\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_l| < \varepsilon.$$

Пример 19. Автоматическая станочная линия разделена на четыре участка с тремя промежуточными бункерами. Интенсивности отказов участков $\lambda_1 = \lambda_4 = 0,01 \text{ ч}^{-1}$, $\lambda_2 = 0,02 \text{ ч}^{-1}$, $\lambda_3 = 0,1 \text{ ч}^{-1}$. Интенсивность восстановления $\mu = 1 \text{ ч}^{-1}$. Емкости бункеров $z_{01} = 10 \text{ ч}$, $z_{02} = 2 \text{ ч}$, $z_{03} = 5 \text{ ч}$. Найти коэффициент готовности и коэффициент наложения потерь.

29. Результаты расчетов к примеру 19

Номер итерации	λ_2^*	λ_2^{**}	λ_3^*	λ_3^{**}	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	K_{Γ}
1	0,02087	0,1056	0,1056	0,10095	0,10647	0,10655	0,9038
2	0,02096	0,10685	0,1067	0,10125	0,10781	0,10722	0,9027

$$\lambda_1^{**} = 0,10781, \lambda_4^* = 0,10792.$$

Решение. Из уравнений (99), (100) составляем шесть уравнений относительно λ_k^* , $k = 2, 3, 4$, и λ_k^{**} , $k = 1, 2, 3$:

$$\lambda_2^* = \lambda_2 + \lambda_1 \left(1 - \frac{1}{2} (1 + v_1) g(\lambda_1 \times \right. \\ \left. \times (1 + v_1), v_1, z_{01}) \right); \quad (1)$$

$$\lambda_3^* = \lambda_3 + \lambda_2^* \left(1 - \frac{1}{2} (1 + v_2) g(\lambda_2^* \times \right. \\ \left. \times (1 + v_2), v_2, z_{02}) \right), \quad v_2 = \lambda_3^{**} / \lambda_2^*; \quad (2)$$

$$\lambda_4^* = \lambda_4 + \lambda_3^* \left(1 - \frac{1}{2} (1 + v_3) g(\lambda_3^* \times \right. \\ \left. \times (1 + v_3), v_3, z_{03}) \right),$$

$$v_3 = \lambda_4 / \lambda_3^*, \quad v_1 = \lambda_2^{**} / \lambda_1; \quad (3)$$

$$\lambda_1^{**} = \lambda_1 + \lambda_2^{**} (1 - (1 + v_1) g \times \\ \times (\lambda_2^{**} (1 + v_1) / v_1, 1/v_1, z_{01}) / 2v_1); \quad (4)$$

$$\lambda_2^{**} = \lambda_2 + \lambda_3^{**} (1 - (1 + v_2) g \times \\ \times (\lambda_3^{**} (1 + v_2) / v_2, 1/v_2, z_{02}) / 2v_2); \quad (5)$$

$$\lambda_3^{**} = \lambda_3 + \lambda_4 (1 - (1 + v_3) g(\lambda_4 \times \\ \times (1 + v_3) / v_3, 1/v_3, z_{03}) / 2v_3). \quad (6)$$

Сначала задаем $\lambda_2^* = \lambda_2$, $\lambda_3^{**} = \lambda_3$ из уравнений (2) и (5) найдем λ_3^* и λ_2^{**} , затем из уравнений (1) и (6) λ_4^* и λ_3^{**} . Это первое приближение подставляем вновь в (2) и (6) и т. д. Когда найдены установившиеся значения λ_2^* , λ_2^{**} и λ_3^* , λ_3^{**} , из уравнений (3) и (4) находим λ_1^{**} и λ_4^* . Результаты расчетов сведены в табл. 29.

Коэффициент наложения потерь $\delta = (\bar{\lambda} - \lambda_4) / \lambda_3^* K_{\Gamma 4} = (0,10781 - 0,01) \times \times / (0,10667 \cdot 0,991) = 0,917$. В отсутствие бункеров $K_{\Gamma} = 1/1,14 = 0,8772$; $g(\lambda, v) = 0$; $\lambda_2^* = \lambda_1 + \lambda_2$; $\lambda_3^* = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$; $\lambda_4^* = \lambda$; $\lambda_3^{**} = \lambda_3 + \lambda_4$; $\lambda_2^{**} = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$, $\lambda_1^* = \lambda$; $\bar{\lambda} = \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$; $K_{\Gamma} = \mu / (\lambda + \mu)$; $\delta = (\bar{\lambda} - \lambda_4) / \lambda_3^* = 1$.

Выигрыш по $K_{\Pi} = 1 - K_{\Gamma}$ будет $G_{K_{\Pi}} = 0,1229/0,0973 = 1,26$.

СИСТЕМЫ С СЕТЕВОЙ СТРУКТУРОЙ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЗАПАСАМИ

Ниже дано обобщение результатов для двухфазной системы на случай сети с произвольной структурой и одним встроенным в нее накопителем. Частным случаем такой сети является многоканальная двухфазная система с одним входом и одним выходом. Скорость заполнения или опустошения накопителя в общем случае меняется при каждом отказе в одном из устройств сети. Однако могут быть ситуации, когда при отказе скорость изменения запасов не меняется. Это зависит от расположения накопителя и алгоритма управления материальными и информационными потоками в сети. Заполнение накопителя может происходить как вследствие избыточного продукта в сети, так и вследствие временного падения производительности участка сети. Сеть может иметь несколько входов материальных или информационных потоков и несколько выходов. Поставка продукции по заданному выходу продолжается с интенсивностью, которая

позволяет обеспечить потребность в продукции по этому выходу и которая определяется пропускной способностью и запасами в данный момент времени. Если позволяет пропускная способность, то заданная интенсивность поддерживается до тех пор, пока есть запасы. Полное прекращение подачи продукта или снижение интенсивности подачи (снижение производительности) вследствие исчерпания запасов рассматривается как отказ системы. Коэффициент готовности показывает среднюю долю времени, в течение которого производительность системы не меньше заданного значения. Однако, кроме этого показателя, с помощью стационарных вероятностей можно найти коэффициент сохранения эффективности $K_g = \sum_{(i)} c_i P_i / c_0$, где c_i — произ-

водительность в i -м состоянии; c_0 — заданная производительность (по данному выходу системы).

Сеть со сбалансированным потреблением. Структура сети и расположение накопителя показаны на рис. 4, б. Особенность сети состоит в том, что при всех работоспособных элементах уровень заполнения накопителя не меняется и относительная интенсивность изменения запасов $a_0 = |\Delta V_0| / c_0 \Delta t = 0$, где ΔV_0 — изменение запасов за время Δt ; c_0 — производительность системы в работоспособном состоянии. Состояния системы разбивают на восемь групп (см. рис. 5, а). В состояниях D_0 , D_1 и D_2 все элементы работоспособны, но в D_0 накопитель полон, в D_2 пуст, а в D_1 заполнен до промежуточного уровня $z < z_0$. В состояниях R_i , $i = \overline{1, k}$, в сети есть отказавший элемент, уровень запасов $z > 0$, происходит потребление запасов с интенсивностью a_i . В состояниях B_i в сети также есть отказавший элемент, накопитель пуст, производительность меньше требуемой. В состояниях F_i и Φ_i уровень запасов не меняется, хотя есть отказавший элемент. В состояниях Φ_i накопитель полон, в F_i заполнение промежуточное. В состояниях P_i накопитель полон и восстанавливается работоспособность одного из элементов. В состояниях M_i накопитель пуст, а в состоя-

ниях G_i имеет промежуточное заполнение и пополняется с интенсивностью b_i . В состояниях R_i пропускная способность элементов сети между накопителем и выходом системы такова, что при наличии запасов всегда может быть компенсировано уменьшение потока продукции от входов системы. Аналогично в состояниях G_i пропускная способность элементов сети между входами системы и накопителем такова, что накопитель всегда может принять весь избыточный поток без изменения суммарного входного потока.

Отказы являются редкими событиями. Поэтому возможность повторного отказа во время ремонта считают маловероятной и в модели надежности повторные отказы не учитывают. Все элементы по последствиям отказов разделяют на три группы: приводящие к снижению уровня запасов (интенсивности отказов λ_{1i} , при отказе происходит переход $D_i \rightarrow R_j$ или $D_2 \rightarrow b_i$), не приводящие к изменению уровня запасов (интенсивности отказов λ_{2i} , переходы $D_0 \rightarrow \Phi_i$ и $D_1 \rightarrow F_i$, $D_2 \rightarrow M_i$) и приводящие к возрастанию запасов (интенсивности отказов λ_{3i} , переходы $D_0 \rightarrow P_i$, $D_1 \rightarrow G_i$, $D_2 \rightarrow G_i$), интенсивности восстановления этих групп элементов равны соответственно μ_{1i} , μ_{2i} , μ_{3i} . Как и в предыдущей модели, стационарные вероятности состояний обозначены теми же буквами, что и сами состояния, а через $r_i(z)$, $g_i(z)$, $f_i(z)$, $d_1(z)$ обозначены плотности распределения уровня запасов z в накопителе ($0 \leq z \leq z_0$).

Заданы число элементов в каждой из трех групп: k , n , m ; интенсивности отказов элементов: λ_{1i} , $i = \overline{1, k}$; λ_{2j} , $j = \overline{1, n}$; λ_{3l} , $l = \overline{1, m}$; интенсивности восстановления μ_{1i} , μ_{2j} , μ_{3l} ; скорости уменьшения запасов a_i , $i = \overline{1, k}$; увеличения запасов b_j , $j = \overline{1, m}$; емкость накопителя $v_0 = z_0 c_0$, производительность системы при нормальном функционировании c_0 .

Коэффициент готовности и коэффициент сохранения эффективности:

$$K_g(z_0) = 1 - \sum_{i=1}^k B_i - \sum_{i=1}^m (P_i + G_i); \quad (101)$$

$$K_0(z_0) = 1 - \sum_{i=1}^k a_i B_i - \sum_{i=1}^m b_i (P_i + G_i). \quad (102)$$

Вероятности B_i , P_i и G_i определяют из системы уравнений:

$$(1) \lambda D_0 = \sum_{i=1}^m \mu_{3i} P_i + \sum_{i=1}^n \mu_{2i} \Phi_i,$$

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^k \lambda_{1i},$$

$$\Lambda_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_{2i}, \quad \Lambda_3 = \sum_{i=1}^m \lambda_{3i},$$

$$\lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3;$$

$$(2) \mu_{2i} \Phi_i = \lambda_{2i} D_0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (103)$$

$$(3) \mu_{3i} P_i = \lambda_{3i} D_0 + b_i g_i(z_0),$$

$$i = \overline{1, m};$$

$$(4) \lambda D_2 = \sum_{i=1}^k \mu_{1i} B_i + \sum_{i=1}^n \mu_{2i} M_i;$$

$$(5) \mu_{2i} M_i = \lambda_{2i} D_2, \quad i = \overline{1, n};$$

$$(6) \mu_{1i} B_i = \lambda_{1i} D_2 + a_i r_i(0),$$

$$i = \overline{1, k};$$

$$(7) b_i g_i'(z) + \mu_{3i} g_i(z) -$$

$$- \lambda_{3i} d_1(z) = 0, \quad i = \overline{1, m};$$

$$(8) -a_i r_i'(z) + \mu_{1i} r_i(z) -$$

$$- \lambda_{1i} d_1(z) = 0, \quad i = \overline{1, k};$$

$$(9) \lambda d_1(z) = \sum_{i=1}^k \mu_{1i} r_i(z) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \mu_{2i} f_i(z) + \sum_{i=1}^m \mu_{3i} g_i(z);$$

$$(10) \mu_{2i} f_i(z) = \lambda_{2i} d_1(z), \quad i = \overline{1, n};$$

$$(11) a_i r_i(z_0) = \lambda_{1i} D_0, \quad i = \overline{1, k};$$

$$(12) b_i g_i(0) = \lambda_{3i} D_2.$$

Систему дифференциальных уравнений порядка $m + k$ решают в такой последовательности.

1. Составляют определитель

(s) =

$$= \begin{vmatrix} sa_1 - \mu_{11} \left(1 - \frac{\lambda_{11}}{\Lambda_{13}}\right) & \frac{\lambda_{11}}{\Lambda_{13}} \mu_{12} \dots \frac{\lambda_{11}}{\Lambda_{13}} \mu_{1k} & \frac{\lambda_{11}}{\Lambda_{13}} \mu_{31} \dots \frac{\lambda_{11}}{\Lambda_{13}} \mu_{3m} \\ \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{13}} \mu_{11} & sa_2 - \mu_{12} \left(1 - \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{13}}\right) \dots \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{13}} \mu_{1k} & \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{13}} \mu_{31} \dots \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{13}} \mu_{3m} \\ \frac{\lambda_{1k}}{\Lambda_{13}} \mu_{11} & \frac{\lambda_{1k}}{\Lambda_{13}} \mu_{12} \dots sa_k - \mu_{1k} \left(1 - \frac{\lambda_{1k}}{\Lambda_{13}}\right) & \frac{\lambda_{1k}}{\Lambda_{13}} \mu_{31} \dots \frac{\lambda_{1k}}{\Lambda_{13}} \mu_{3m} \\ - \frac{\lambda_{31}}{\Lambda_{13}} \mu_{11} & - \frac{\lambda_{31}}{\Lambda_{13}} \mu_{12} \dots - \frac{\lambda_{31}}{\Lambda_{13}} \mu_{1k} & sb_1 + \mu_{31} \left(1 - \frac{\lambda_{31}}{\Lambda_{13}}\right) \dots - \frac{\lambda_{31}}{\Lambda_{13}} \mu_{3m} \\ - \frac{\lambda_{3m}}{\Lambda_{13}} \mu_{11} & - \frac{\lambda_{3m}}{\Lambda_{13}} \mu_{12} \dots - \frac{\lambda_{3m}}{\Lambda_{13}} \mu_{1k} & - \frac{\lambda_{3m}}{\Lambda_{13}} \mu_{31} \dots sb_m + \mu_{31} \left(1 - \frac{\lambda_{3m}}{\Lambda_{13}}\right) \end{vmatrix}$$

Находят корни уравнения $\Delta(s) = 0$ и представляют $\Delta(s)$ в виде $\Delta(s) = a_1 \dots a_k b_1 \dots b_m (s + s_1) \dots (s + s_{k+m})$, где $\Lambda_{13} = \Lambda_1 + \Lambda_3$.

2. В определителе $\Delta(s)$ заменяют i -й столбец вектор-столбцом $\|\mu_{11}B_1 - \lambda_{11}D_2, \dots, \mu_{1k}B_k - \lambda_{1k}D_2, \lambda_{31}D_2, \dots, \lambda_{3m}D_2\|$ и представляют новый определитель $\Delta_i(s)$ в виде

$$\Delta_i(s) = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}(s) B_j + \alpha_{i0}(s) D_2,$$

$$i = \overline{1, k+m}.$$

3. Вычисляют коэффициенты

$$A_{ij}^{(1)}(z_0) = a_i \sum_{v=1}^{k+m} \alpha_{ij}(-s_v) \times$$

$$\times e^{-s_v z_0} / A_v, \quad i = \overline{1, k};$$

$$j = \overline{1, k}; \quad A_v = \prod_{i=1}^k a_i \prod_{j=1}^m b_j \times$$

$$\times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq v}}^{k+m} (s_i - s_v);$$

$$A_i^{(1)}(z_0) = \sum_{v=1}^{k+m} \alpha_{i0}(-s_v) \times$$

$$\times e^{-s_v z_0} / A_v, \quad i = \overline{1, k};$$

$$A_i^{(2)} = \frac{1}{\Delta^{(2)}} \begin{vmatrix} A_{11}^{(1)} & \dots & \lambda_{11} & \dots & A_{1k}^{(1)} \\ A_{12}^{(1)} & \dots & \lambda_{12} & \dots & A_{2k}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1k}^{(1)} & \dots & \lambda_{1k} & \dots & A_{kk}^{(1)} \end{vmatrix};$$

$$c_i^{(2)} = \begin{vmatrix} A_{11}^{(1)} & \dots & -A_1^{(1)} & \dots & A_{1k}^{(1)} \\ A_{12}^{(1)} & & -A_2^{(1)} & \dots & A_{2k}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1k}^{(1)} & \dots & -A_k^{(1)} & \dots & A_{kk}^{(1)} \end{vmatrix};$$

$$\Delta^{(2)} = \text{Det} \|\| A_{ij}^{(1)} \|\|;$$

$$A_{iv}^{(3)} = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}(-s_v) A_j^{(2)} / A_v; \quad c_{iv}^{(3)} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^k \alpha_{ij}(-s_v) c_j^{(2)} + \alpha_{i0}(-s_v) \right) / A_v;$$

$$i, v = \overline{1, k+m};$$

$$A_{D2} =$$

$$= \frac{\left(\Lambda_1 - \sum_{i=1}^k a_i \sum_{v=1}^{k+m} A_{iv}^{(3)} e^{-s_v z_0} \right)}{\sum_{i=1}^k a_i \sum_{v=1}^{k+m} c_{iv}^{(3)} e^{-s_v z_0}},$$

$$E_i = \sum_{v=1}^{k+m} E_{iv} (1 - e^{-s_v z_0}) / s_v,$$

$$i = \overline{1, k+m};$$

$$E_{iv} = \frac{1}{A_v} \left(\sum_{j=1}^k \alpha_{ij}(-s_v) \times \right. \\ \left. \times (A_j^{(2)} + A_{D2} c_j^{(2)}) + A_{D2} \alpha_{i0}(-s_v) \right);$$

$$A_{pi} = \rho_{3i} + b_i \sum_{v=1}^m E_{k+i, v} e^{-s_v z_0},$$

$$i = \overline{1, m}; \quad \rho_{3i} = \lambda_{3i} / \mu_{3i};$$

$$A_{D1} = \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{1i}}{\Lambda_{13}} E_i + \sum_{i=1}^m \frac{\mu_{3i}}{\Lambda_{13}} E_{k+i},$$

$$\Lambda_{13} = \Lambda_1 + \Lambda_3.$$

4. Вычисляют коэффициент готовности и коэффициент сохранения эффективности:

$$K_{\Gamma}(z_0) = 1 - \frac{1}{A} \left\{ \sum_{i=1}^k (A_i^{(2)} + c_i^{(2)} A_{D2}) + \sum_{i=1}^m (E_{k+i} + A_{pi}) \right\}; \quad (104)$$

$$K_{\Theta}(z_0) = 1 - \frac{1}{A} \left\{ \sum_{i=1}^k a_i (A_i^{(2)} + c_i^{(2)} A_{D2}) + \sum_{i=1}^m b_i (E_{k+i} + A_{pi}) \right\}; \quad (105)$$

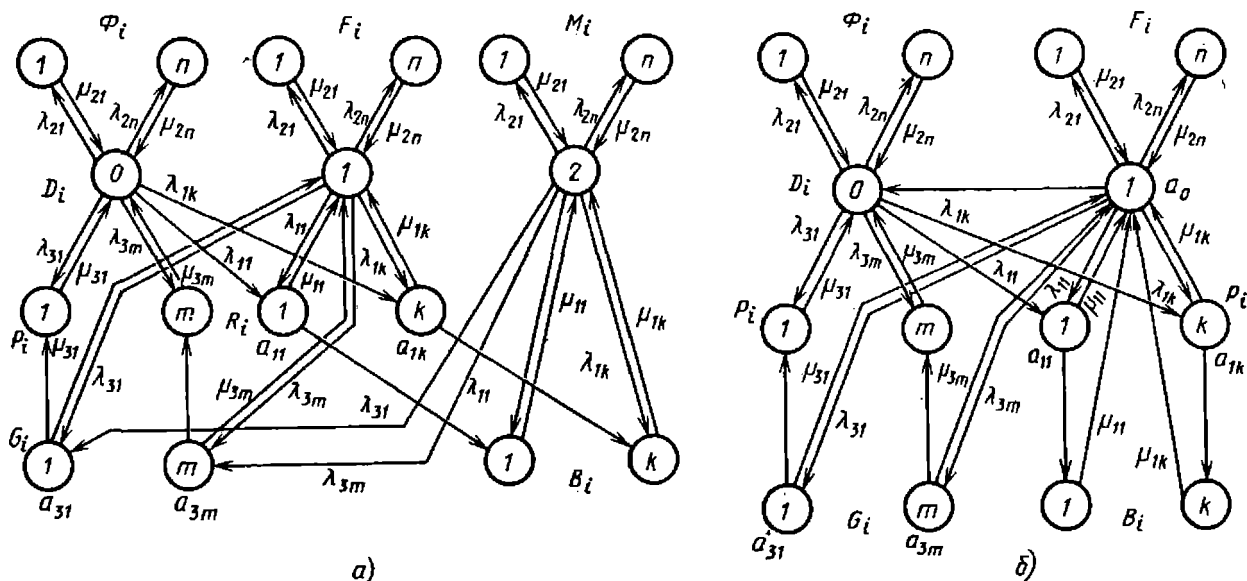


Рис. 5. Граф состояний сети со сбалансированным (а) и несбалансированным (б) потреблением

$$\begin{aligned}
 A &= (1 + \rho_2) (1 + A_{D1} + A_{D2}) + \\
 &+ \sum_{i=1}^k (A_i^{(2)} + c_i^{(2)} A_{D2}) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{k+m} E_i + \sum_{i=1}^m A_{Pi}. \quad (106)
 \end{aligned}$$

Сеть с несбалансированным потреблением. Структура сети и расположение накопителя представлены на рис. 4, б. Условия функционирования такие же, как в системе со сбалансированным потреблением. Отличие состоит лишь в том, что при работоспособном состоянии сети суммарный входной поток превышает суммарный выходной поток, а их разность поступает в накопитель, пока он не заполнен. При заполнении накопителя суммарный входной поток уменьшается до величины выходного потока. Граф состояний (рис. 5, б) получается из графа состояний сети со сбалансированным потреблением (рис. 5, а), если удалить в нем состояния D_2 и M_i , $i = \overline{1, n}$. В состояниях G_i последствия отказа элемента могут быть неодинаковы. При отказе некоторых элементов производительность сети 1 (рис. 4, в) снижается на величину, меньшую a_0 . Поэтому $b_i < a_0$, и выходной поток не меняется. Такие состояния являются работоспособными для системы. При отказах других элемен-

тов снижается производительность сети 2 до такого уровня, что она не может обеспечить требуемую производительность c_0 . Поэтому скорость пополнения запасов при неизменном входном потоке возрастает до величины $b_i > a_0$. Тогда возникает недоотпуск выходной продукции на величину $b_i - a_0$. Такие состояния являются частично работоспособными, а их вероятность входит в коэффициент простоя системы.

Заданы число элементов в трех группах: k, n, m , интенсивности отказов λ_{1i} , $i = \overline{1, k}$; λ_{2j} , $j = \overline{1, n}$; λ_{3l} , $l = \overline{1, m}$; интенсивности восстановления μ_{1i} , μ_{2i} , μ_{3i} ; скорость увеличения запасов при работоспособном состоянии a_0 и при отказе одного из элементов третьей группы b_i , $i = \overline{1, m}$; скорость уменьшения запасов при отказе элемента первой группы a_i , $i = \overline{1, k}$; производительность системы при нормальном функционировании системы c_0 ; емкость накопителя $V_0 = c_0 z_0$.

Коэффициент готовности и коэффициент сохранения эффективности:

$$\begin{aligned}
 K_r(z_0) &= 1 - \sum_{i=1}^k B_i - \\
 &- \sum_{i=1}^m (G_i + P_i) [b_i - a_0]; \quad (107)
 \end{aligned}$$

$$K_0(z_0) = 1 - \sum_{i=1}^k a_i B_i - \sum_{i=1}^m (G_i + P_i) \max(0, b_i - a_0). \quad (108)$$

Стационарные вероятности состояний находят из системы уравнений:

$$(1) \lambda D_0 = \sum_{i=1}^n \mu_{2i} \Phi_i + \sum_{i=1}^m \mu_{3i} P_i + a_0 d_1(z_0), \quad \lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3;$$

$$(2) \mu_{2i} \Phi_i = \lambda_{2i} D_0, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^k \lambda_{1i}, \quad \Lambda_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_{2i},$$

$$\Lambda_3 = \sum_{i=1}^m \lambda_{3i};$$

$$(3) \mu_{3i} P_i = \lambda_{3i} D_0 + b_i g_i(z_0), \quad i = \overline{1, m};$$

$$(4) \mu_{1i} B_i = a_i r_i(0), \quad i = \overline{1, k};$$

$$(5) b_i g'_i(z) + \mu_{3i} g_i(z) - \lambda_{3i} d_1(z) = 0, \quad i = \overline{1, m};$$

$$(6) -a_i r'_i(z) + \mu_{1i} r_i(z) - \lambda_{1i} d_1(z) = 0, \quad i = \overline{1, k};$$

$$(7) a_0 d'_1(z) + \lambda d_1(z) - \sum_{i=1}^k \mu_{1i} r_i(z) - \sum_{i=1}^n \mu_{2i} f_i(z) - \sum_{i=1}^m \mu_{3i} g_i(z) = 0,$$

$$(8) \mu_{2i} f_i(z) = \lambda_{2i} d_1(z), \quad i = \overline{1, n};$$

$$(9) a_0 d_1(0) = \sum_{i=1}^k \mu_{1i} B_i;$$

$$(10) a_i r_i(z_0) = \lambda_{1i} D_0. \quad (109)$$

Систему дифференциальных уравнений порядка $m + k + 1$ решают в такой последовательности.

1. Составляют определитель:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} sa_1 - \mu_{11} + \lambda_{11} \bar{a}_1 & \lambda_{11} \bar{a}_2 \dots \lambda_{11} \bar{a}_k & -\lambda_{11} \bar{b}_1 & -\lambda_{11} \bar{b}_m \\ \lambda_{12} \bar{a}_1 & sa_2 - \mu_{12} + \lambda_{12} \bar{a}_2 \dots \lambda_{12} \bar{a}_k & -\lambda_{12} \bar{b}_1 & -\lambda_{12} \bar{b}_m \\ \lambda_{1k} \bar{a}_1 & \lambda_{1k} \bar{a}_2 \dots sa_k + \lambda_{1k} \bar{a}_k - \mu_{1k} & -\lambda_{1k} \bar{b}_1 & -\lambda_{1k} \bar{b}_m \\ -\lambda_{31} \bar{a}_1 & -\lambda_{31} \bar{a}_2 & -\lambda_{31} \bar{a}_k & sb_1 + \mu_{31} + \lambda_{31} \bar{b}_1 \dots \lambda_{31} \bar{b}_m \\ -\lambda_{3k} \bar{a}_1 & -\lambda_{3k} \bar{a}_2 \dots -\lambda_{3k} \bar{a}_k & \lambda_{3m} \bar{b}_1 \dots sb_m + \mu_{3m} + \lambda_{3m} \bar{b}_m \end{vmatrix}.$$

где $\bar{a}_i = a_i/a_0$, $\bar{b}_i = b_i/a_0$, находят корни уравнения $\Delta(s) = 0$ и представляют $\Delta(s)$ в виде: $\Delta(s) = a_1 \dots a_k b_1 \dots b_m (s + s_1) \dots (s + s_{k+m})$.

2. Составляют определители $\Delta_i(s)$ путем замены i -го столбца в $\Delta(s)$ на вектор-столбец $\|\mu_{11} B_1, \dots, \mu_{1k} B_k, 0, \dots, 0\|^*$ и представляют их в виде

$$\Delta_i(s) = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}(s) B_j.$$

3. Вычисляют коэффициенты:

$$A_{ijv} = \alpha_{ij}(-s_v)/A_v;$$

$$A_v = \prod_{i=1}^k a_i \prod_{j=1}^m b_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq v}}^{k+m} (s_i - s_v);$$

$$A_{ij}(z_0) = \sum_{v=1}^{k+m} A_{ijv} e^{-s_v z_0},$$

$$i = \overline{1, k+m}; \quad j = \overline{1, k};$$

$$A_{Bj} = \frac{\begin{vmatrix} A_{11} \dots \lambda_{11} & A_{1k} \\ A_{21} \dots \lambda_{12} & A_{2k} \\ \dots & \dots \\ A_{k1} \dots \lambda_{1k} & \dots A_{kk} \end{vmatrix}}{\prod_{i=1}^k a_i \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots A_{kk} \end{vmatrix}}, \quad j = \overline{1, k};$$

30. Исходные данные к примеру 20

i	λ_i	μ_i	$\rho_i = \lambda_i/\mu_i$
1	0,002	0,02	0,1
2	0,001	0,04	0,025
3	0,001	0,02	0,05
4	0,0005	0,04	0,0125

$$A_{Ri} = \sum_{v=1}^{k+m} b_{iv} (1 - e^{-s_v z_0}) / s_v;$$

$$A_{Gi} = \sum_{v=1}^{k+m} b_{k+iv} (1 - e^{-s_v z_0}) / s_v;$$

$$b_{iv} = \sum_{j=1}^k A_{ijv} A_{Bj}; \quad i = \overline{1, k+m};$$

$$v = \overline{1, k+m};$$

$$A_{Pi} = \rho_{3i} + b_i \sum_{v=1}^{k+m} b_{k+iv} e^{-s_v z_0},$$

$$i = \overline{1, m}; \quad \rho_{3i} = \lambda_{3i}/\mu_{3i};$$

$$A_{D1} = \sum_{i=1}^k \bar{a}_i A_{Ri} - \sum_{i=1}^m b_i A_{Gi}.$$

4. Вычисляют искомые характеристики:

$$K_{\Gamma}(z_0) = 1 - D_0 \left(\sum_{i=1}^k A_{Bi} + \sum_{j=1}^m (A_{Gj} + A_{Pj}) 1 [b_j - a_0] \right); \quad (110)$$

$$K_{\Theta}(z_0) = 1 - D_0 \left(\sum_{i=1}^k a_i A_{Bi} + \sum_{i=1}^m (A_{Gi} + A_{Pi}) \max(0, b_i - a_0) \right), \quad (111)$$

где

$$D_0^{-1} = (1 + \rho_2) (1 + A_{D1}) + \sum_{i=1}^k A_{Ri} + \sum_{i=1}^k A_{Bi} + \sum_{i=1}^m (A_{Gi} + A_{Pi}).$$

Отсюда можно получить как частный случай модель системы, в которой сеть 2 (см. рис. 4, б) пуста и накопитель оказывается на выходе системы (рис. 4, з). Тогда надо положить $\lambda_{3i} = \mu_{3i} = 0$, из (109) удалить третье и пятое уравнения, а из остальных уравнений удалить слагаемые, содержавшие P_i и G_i , $g_i(z)$.

Пример 20. В транспортной сети (рис. 4, в) с требуемой пропускной способностью c_0 и производительно-

31. Результаты расчетов к примеру 20

$z_0, \text{ч}$	K_{Γ} для вариантов			K_{Θ} для вариантов		
	1	2	3	1	2	3
0	0,8421	0,8421	0,8632	0,9116	0,9074	0,9558
20	0,8689	0,9007	0,9447	0,9227	0,9345	0,9833
40	0,8731	0,9208	0,9668	0,9284	0,9463	0,9916
60	0,8794	0,9316	0,9752	0,9320	0,9527	0,9954
80	0,8837	0,9352	0,9793	0,9344	0,9565	0,9974
100	0,8866	0,9400	0,9815	0,9361	0,9577	0,9985

стью участков $c_i = \bar{c}_i c_0$, $\bar{c}_1 = \bar{c}_3$, $\bar{c}_2 = \bar{c}_4$ установлен накопитель емкостью $V_0 = c_0 z_0$, доступный участкам 1 и 2 для заполнения, а участкам 3 и 4 для потребления. Интенсивности отказов и восстановлений участков приведены в табл. 30. Необходимо найти коэффициент готовности и коэффициент сохранения эффективности для следующих вариантов исходных данных:

- 1) $\bar{c}_i = c_i/c_0$, $\bar{c}_1 = \bar{c}_3 = 0,6$, $\bar{c}_2 = \bar{c}_4 = 0,4$;
- 2) $\bar{c}_1 = \bar{c}_3 = 0,8$, $\bar{c}_2 = \bar{c}_4 = 0,4$;
- 3) $\bar{c}_1 = \bar{c}_3 = 0,8$, $\bar{c}_2 = \bar{c}_4 = 0,4$.

Накопитель перемещен на выход системы, и между выходами участков 1 и 2 установлена безотказная перемычка, к которой подключен запасной источник продукта U_2 производительностью $0,4 c_0$ (рис. 4, з). Пополнение накопителя может происходить только за счет основного источника U_1 производительностью $1,2 c_0$.

Решение. Для варианта 1 по исходным данным устанавливаем: $k = m = 2$, $n = 0$, $\lambda_{11} = \lambda_1$, $\lambda_{12} = \lambda_2$, $\lambda_{31} = \lambda_3$, $\lambda_{32} = \lambda_4$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0,6$, $a_2 = 0,4$, $b_1 = 0,6$, $b_2 = 0,4$. Для варианта 2 $a_0 = 0,2$, $a_1 = 0,6$, $a_2 = 0,2$, $b_1 = 0,8$, $b_2 = 0,4$, другие данные, как в варианте 1. Для варианта 3 $k = 3$, $n = 1$, $m = 0$, $a_0 = 0,2$, $a_1 = 0,6$, $a_2 = 0,2$, $a_3 = 0,2$, $\lambda_{11} = \lambda_3$, $a_{12} = \lambda_4$, $\lambda_{13} = \lambda_1$, $\lambda_{21} = \lambda_2$.

Результаты расчетов сведены в табл. 31.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М.: Наука, 1981. 720 с.
2. Черкесов Г. Н. Надежность технических систем с временной избыточностью. М.: Сов. радио, 1974, 296 с.
3. Креденцер Б. П. Прогнозирование надежности систем с временной избыточностью. Киев: Наукова думка, 1978. 240 с.
4. Черкесов Г. Н., Бабушкин А. Н., Макаров Ю. М. Анализ надежности двухуровневой иерархической системы управления ГПС//Тр. ЛПИ. 1987. Вып. 394. С. 18—25.
5. Черкесов Г. Н., Езимов С. Ф. Расчет вероятности выполнения задания многоканальной системой с взаимозаменяемыми каналами. Алгоритм ГФАП, рег. № ПОО3604//Алгоритмы и программы, 1979, № 3 (29). С. 45.
6. Черкесов Г. Н., Митрофанов С. Ф. Расчет надежности одноканальных систем с временной избыточностью на основе численного обращения преобразования Лапласа. Алгоритм ГФАП, рег. № ПОО4529//Алгоритмы и программы, 1980, № 6 (38). С. 36.

Глава 5. Обеспечение надежности по стадиям жизненного цикла

1. МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ ПО СТАДИЯМ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА

Жизненный цикл системы охватывает ряд стадий и этапов проектирования, испытаний, изготовления и эксплуатации.

Уровень надежности системы в общем случае зависит от уровней надежности, достигаемых на каждой стадии жизненного цикла системы следующим образом:

$$R = R(P_{\text{пр}}, P_{\text{исп}}, P_{\text{изг}}, P_{\text{эк}}),$$

где $P_{\text{пр}} = [P_0 + (1 - P_0) a_{\text{пр}}] b_{\text{пр}}; \quad (1)$

здесь P_0 — надежность номинального (исходного) варианта системы без какого-либо резерва или других форм избыточности; $a_{\text{пр}}$ — коэффициент, выражающий эффективность введения избыточности и других дополнительных проектных решений, направленных на обеспечение надежности; $b_{\text{пр}}$ — коэффициент, выражающий качество (бездефектность) проектно-конструкторской документации; $P_{\text{исп}}$ — надежность системы, достигнутая в процессе экспериментальных работ и испытаний,

$$P_{\text{исп}} = [P_{\text{пр}} + (1 - P_{\text{пр}}) a_{\text{исп}}] b_{\text{исп}}, \quad (2)$$

где $P_{\text{пр}}$ — надежность системы, достигнутая в результате проектирования; $a_{\text{исп}}$ — коэффициент, выражающий эффективность выявления и устранения дефектов в конструкторской документации (конструкторских ошибок); $b_{\text{исп}}$ — коэффициент, выражающий качество (бездефектность) испытаний и корректировки рабочей документации на изготовление изделий;

$P_{\text{изг}}$ — надежность системы, обеспеченная при изготовлении,

$$P_{\text{изг}} = [P_{\text{исп}} + (1 - P_{\text{исп}}) a_{\text{изг}}] b_{\text{изг}}; \quad (3)$$

здесь $P_{\text{исп}}$ — надежность системы после завершения экспериментальных исследований и испытаний; $a_{\text{изг}}$ — коэффициент, выражающий эффективность мероприятий, направленных на обеспечение качества и надежности изделий системы в процессе производства, в том числе эффективность мер по выявлению и устранению дефектов в технической и нормативной документации на серийное изготовление; $b_{\text{изг}}$ — коэффициент, выражающий качество (бездефектность) изготовления изделий; $P_{\text{эк}}$ — надежность системы, введенной в эксплуатацию,

$$P_{\text{эк}} = [P_{\text{изг}} + (1 - P_{\text{изг}}) a_{\text{эк}}] b_{\text{эк}}. \quad (4)$$

В этой формуле $P_{\text{изг}}$ — надежность системы, обеспеченная при изготовлении; $a_{\text{эк}}$ — коэффициент, выражающий эффективность выявления и устранения дефектов эксплуатационно-технической документации и локализации последствий отказа системы в начале эксплуатации; $b_{\text{эк}}$ — коэффициент, выражающий качество (бездефектность) работы персонала.

Используя формулы (1)–(4), получим рекуррентные выражения для достигнутого уровня надежности системы после каждой стадии работ:

$$\begin{aligned} P_{\text{пр}} &= [P_0 + (1 - P_0) a_{\text{пр}}] b_{\text{пр}} = [\cdot] b_{\text{пр}}; \\ P_{\text{исп}} &= \{[\cdot] b_{\text{пр}} + (1 - [\cdot] b_{\text{пр}}) a_{\text{исп}}\} \times \\ &\times b_{\text{исп}} = \{[P_0 + (1 - P_0) a_{\text{пр}}] b_{\text{пр}} + \\ &+ (1 - [P_0 + (1 - P_0) a_{\text{пр}}] b_{\text{пр}}) a_{\text{исп}}\} \times \\ &\times b_{\text{исп}} = \{\cdot\} b_{\text{исп}}; \end{aligned}$$

$$P_{изг} = \{ \cdot \} b_{исп} + (1 - \{ \cdot \} b_{исп}) \times \\ \times a_{изг} \} b_{изг} = \{ \{ [P_0 + (1 - P_0) a_{пр}] \times \\ \times b_{пр} + (1 - [P_0 + (1 - P_0) a_{пр}] \times \\ \times b_{пр}) a_{исп} \} b_{отр} + (1 - \{ [P_0 + \\ + (1 - P_0) a_{пр}] b_{пр} + (1 - [P_0 + \\ + (1 - P_0) a_{пр}] a_{исп}) b_{исп} \} a_{изг} \} \times \\ \times b_{изг} = [*] b_{изг};$$

$$P_{эк} = \langle [*] b_{изг} + (1 - [*] b_{изг}) a_{эк} \rangle \times \\ \times b_{эк} = \langle \{ [[P_0 + (1 - P_0) a_{пр}] b_{пр} + \\ + (1 - [P_0 + (1 - P_0) a_{пр}] b_{пр}) a_{исп} \} \times \\ \times b_{исп} + (1 - \{ [P_0 + (1 - P_0) a_{пр}] \times \\ \times b_{пр} + (1 - [P_0 + (1 - P_0) a_{пр}] \times \\ \times b_{пр}) a_{исп} \} b_{исп}) a_{изг} \} b_{изг} + \\ + (1 - \{ [[P_0 + (1 - P_0) a_{пр}] b_{пр} + \\ + (1 - [P_0 + (1 - P_0) a_{пр}] b_{пр}) a_{отр} \} \times \\ \times b_{отр} + (1 - \{ [P_0 + (1 - P_0) a_{пр}] \times \\ \times b_{пр} + (1 - [P_0 + (1 - P_0) a_{пр}] \times \\ \times b_{пр}) a_{исп} \} b_{исп}) a_{изг} \} b_{изг} \rangle a_{эк} \} b_{эк}.$$

Как следует из этих выражений, надежность, достигнутая на *i*-й стадии работ, зависит от номинального (исходного) уровня надежности P_0 и коэффициентов a_i, b_i .

Коэффициенты a_i характеризуют эффективность мероприятий, оцениваемых математическим аппаратом теории вероятностей и математической статистики. Коэффициенты b_i характеризуют потери надежности системы вследствие разных ошибок, допущенных при проектировании, испытаниях, оформлении документов, в производстве и эксплуатации, т. е. отражают слабо формализуемую, неточно прогнозируемую и неоперативно контролируемую статистически неустойчивую часть надежности изделия [2, 6].

На рис. 1 показано влияние различных уровней P_0, a_i и b_i на надежность системы по стадиям работ. Из рисунка 1 следует:

наибольший рост надежности может быть достигнут на ранних стадиях разработки системы, а именно при проектировании, однако достигнутую надежность можно утратить на любой последующей стадии жизненного цикла системы;

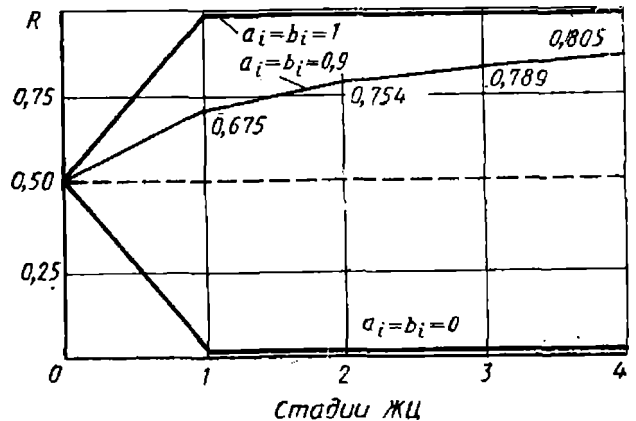


Рис. 1. Динамика изменения надежности R системы по стадиям жизненного цикла (ЖЦ):

1 — проектирование; 2 — испытания; 3 — изготовление; 4 — эксплуатация; $P_0 = 0,5$

важнейшую роль играет выбор исходного варианта системы, обеспечивающего уровень P_0 (в частности, использование новых, неапробированных решений может снизить или повысить P_0);

реализация эффективных мероприятий по обеспечению надежности (повышение a_i) позволяет снизить потери и достичь требуемой высокой надежности системы;

совершенно недопустимо пренебрегать «бездефектной» составляющей надежности, особенно применительно к уникальным системам, так как ошибки и дефекты могут испортить самую лучшую разработку;

необходимо учитывать затраты ресурсов на повышение надежности, реализуемые на различных стадиях создания изделий, уметь рационально распределять располагаемые ресурсы по стадиям работ;

увеличение числа контролируемых стадий и этапов в разумных пределах позволяет уменьшить потери из-за недостаточной надежности.

На рис. 2 показаны относительные потери надежности в зависимости от числа контролируемых стадий при фиксированных значениях $P_0 = 0,5, a_i = 0,5$ и $b_i = 0,9$. Ломаная линия 1 соответствует четырём контролируемым стадиям, ломаная линия 2 — двенадцати. Ломаная линия 3 показывает разницу $\Delta Q_i = Q_i^{(1)} - Q_i^{(2)}$, получаемую при переходе от четырехк двенадцатистадийному процессу создания и эксплуатации системы.

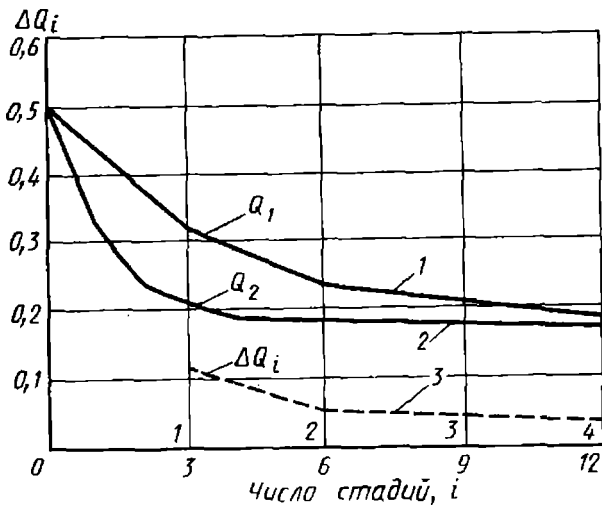


Рис. 2. Относительные потери надежности в зависимости от числа контролируемых стадий

На рис. 3 показана разница в затратах на устранение причин и последствий ненадежности при четырех и двенадцати стадиях жизненного цикла системы, полученная в предположении, что стоимость доработок документации и изделий от стадии к стадии возрастает примерно на порядок. Несмотря на уменьшение разницы ΔQ_i при переходе от стадии к стадии, потери от ненадежности при реализации двенадцатистадийной программы работ меньше примерно в 1,5 раза, чем при четырехстадийной программе.

Рассмотренный пример характеризует качественную картину распределения потерь по стадиям жизненного цикла системы. Для более детального исследования конкретных многостадийных программ целесообразно разрабатывать статистические модели.

При создании дорогостоящих уникальных сложных систем наибольший эффект в экономии материальных, стоимостных и временных ресурсов при прочих равных условиях дает расчленение сложного процесса создания и эксплуатации системы на большее число контролируемых стадий.

Однако при введении каждой контролируемой стадии в процесс требуются дополнительное время на сбор информации, на анализ полученных результатов и выработку управляющих воздействий, а также дополни-

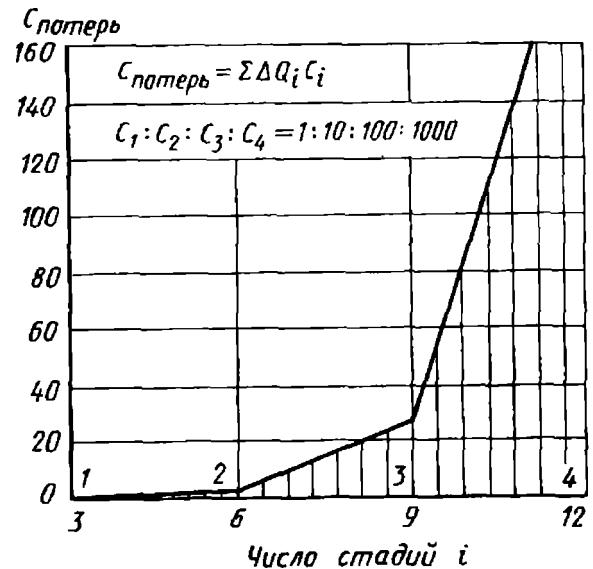


Рис. 3. Зависимость экономического эффекта от числа контролируемых стадий

тельные затраты материально-технических и стоимостных ресурсов. Поэтому разделение процесса на число стадий больше двенадцати может быть оправданно только для сверхсложных уникальных систем, отказы которых совершенно недопустимы. При создании простых систем, по которым имеется большой опыт аналогичных разработок, целесообразно сокращать число контролируемых стадий не в ущерб надежности.

2. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Сетевые методы планирования позволяют осуществить комплексный подход при создании программы работ и выборе оптимальной последовательности ее выполнения.

Различные методы сетевого планирования и управления дают возможность оценивать и оптимизировать затраты различных видов располагаемых ресурсов (временных, стоимостных, материальных и трудовых), а также выбирать рациональные пути достижения требуемых значений основных проектных параметров и надежности системы.

Все мероприятия планируемой программы в их взаимосвязи представляются в виде наглядной схемы — сетевого графика. Сетевой график состоит из элементов двух видов: работ и событий [4].

Основные свойства сетевого графика: ни одно событие не может произойти до тех пор, пока не будут закончены все входящие в него работы;

ни одна работа, выходящая из данного события, не может начинаться до тех пор, пока не произойдет данное событие;

ни одна последующая работа не может начаться раньше, чем будут закончены все предшествующие ей работы.

Работа кодируется индексом, содержащим номера событий, между которыми она заключена. Свершение события зависит от окончания самой длительной из всех входящих в него работ. Последовательные работы и события формируют пути (цепочки), которые ведут от исходного к завершающему событию. Максимальное число отдельных работ, входящих в какой-либо из путей, ведущих из исходного события в данное, и дает ранг события.

Сетевой график дает возможность оценить количество и качество мероприятий планируемой операции. Он позволяет установить, от каких из них и в какой степени зависит достижение конечной цели операции.

Основные параметры сетевого графика приведены ниже.

1. Наиболее раннее возможное наступление времени j -го события $T_p(j)$, вычисляемое по формуле

$$T_p(j) = \max_{i \subset j} \{T_p(i) + t_{ij}\},$$

где символами i и j обозначены номера соответственно предшествующего и последующего событий; t_{ij} — продолжительность (i, j) -й работы.

Обозначение $i \subset j$ показывает, что событие i предшествует событию j .

2. Самое позднее допустимое время наступления i -го события

$$T_{\Pi}(i) = \min_{j \subset i} [T_{\Pi}(j) - t_{ij}],$$

где обозначение $j \subset i$ показывает, что событие j предшествует событию i .

3. Резерв времени данного события

$$R_i = T_{\Pi}(i) - T_p(i).$$

4. Полный резерв времени работы

$$r_{\Pi}(i, j) = T_{\Pi}(j) - T_p(i) - t_{ij}.$$

Смысл полного резерва времени работы заключается в том, что задержка в выполнении работы (i, j) на величину $\Delta t_{ij} > r_{\Pi}$ приводит к задержке в наступлении завершающего события на величину $\Delta t_{ij} - r_{\Pi}(i, j)$.

5. Свободный резерв времени работы

$$r_c(i, j) = T_p(j) - T_{\Pi}(i) - t_{ij}.$$

Смысл свободного резерва времени работы заключается в том, что задержка в выполнении работы на величину $\Delta t_{ij} \leq r_c(i, j)$ не влияет ни на один другой срок, определенный данным сетевым графиком.

Основные показатели сетевого графика, по которым выполняется его анализ, перечислены ниже.

1. Критический путь — полный путь, на котором суммарная продолжительность работ является максимальной. Это самый длинный по времени путь в сетевом графике от исходного до завершающего события. Критический путь лимитирует выполнение операций, поэтому любая задержка критического пути увеличивает время всего процесса. События, через которые проходит критический путь, и работы, лежащие на критических путях, называют напряженными. Полные и свободные резервы времени критических работ равны нулю (признак критической работы). Критический путь рассчитывают путем определения работ, полные резервы времени которых равны нулю.

2. Полный резерв времени ненапряженного пути — это резерв времени ненапряженных событий и работ, т. е. тех, которые лежат не на критическом пути. Если ненапряженный и критический пути не пересекаются, то полный резерв времени ненапряженного пути равен разности между его длиной и длиной критического пути (во временной мере). Если ненапряженный и критический пути пересекаются, полный резерв времени равен самому длительному участку ненапряженного пути, заключенному между соответствующими парами событий критического пути. Полный резерв времени ненапряженного пути показывает, насколько может быть

увеличена продолжительность всех работ этого пути без изменения срока выполнения операции в целом.

Сущность анализа сетевого графика заключается в том, что выявляются резервы времени работ, лежащие на ненапряженных путях, и направляются на работы, лежащие на критическом пути. Этим достигается сокращение времени выполнения критических работ, а значит, и всей операции.

3. Время выполнения работ (временная оценка работ) может определяться либо по нормативам (статистическим показателям), либо (при отсутствии их) по следующим эмпирическим формулам:

$$\bar{t}_{ij} = \frac{t_{\min} + 4t_{\text{нв}} + t_{\max}}{6};$$

$$\sigma_{ij} = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{6},$$

где \bar{t}_{ij} — математическое ожидание продолжительности выполнения работы; t_{\min} — продолжительность работы в наиболее благоприятных условиях (оптимистическая оценка); $t_{\text{нв}}$ — продолжительность работы при условии, что не возникает никаких неожиданных трудностей (наиболее вероятная оценка); t_{\max} — продолжительность работы при самом неблагоприятном стечении обстоятельств (пессимистическая оценка); σ_{ij} — средняя квадратическая ошибка в определении продолжительности работы.

Математическое ожидание любого параметра сетевого графика равно $\sum \bar{t}_{ij}$. Средняя квадратическая ошибка в определении этого параметра равна

$$\sqrt{\sum \sigma_{ij}^2}.$$

Вероятность свершения j -го события в расчетный срок

$$P_j = \Phi \left(\frac{T_3 - T_p(j)}{\sqrt{\sum \sigma_{ij}^2}} \right),$$

где Φ — функция Лапласа; T_3 — заданный срок свершения событий; $T_p(j)$ — время заданного свершения j -го события; σ_{ij} — средняя квадратическая ошибка в определении продолжительности работы, которая ис-

пользуется при вычислении раннего срока наступления j -го события.

Методы сетевого планирования широко применяют для обоснования требуемых ресурсов на различных стадиях жизненного цикла системы, включая разработку, производство и эксплуатацию техники.

3. МЕТОД ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ С ПОГЛОЩЕНИЕМ РЕСУРСОВ В ВЕРШИНАХ

Любой поэтапно рассматриваемый процесс со случайными исходами на отдельных этапах может быть представлен некоторым ориентированным графом, т. е. перечислением вершин графа операций, подлежащих выполнению, и указанием последовательности перехода от одной операции к другой, что означает задание ребер графа и выбор направлений на них. Одна из вершин графа соответствует началу работ, другая их окончанию. Тогда реализация процесса соответствует блужданиям по графу, ведущим из начала в конец.

При этом некоторые заранее заданные вершины графа могут обладать задерживающим (поглощающим) свойством: траектория может проходить через поглощающую вершину не более заданного числа раз, своего для каждой вершины. Это число называют индексом поглощения. Постепенное поглощение траекторий в вершинах соответствует исчерпанию некоторого запаса ресурсов (средств, времени, изделий и т. д.).

Некоторые вершины графа — простые, элементарные вершины, другие вершины графа сами представляют собой граф и являются сложными.

Условия поглощения в элементарных поглощающих вершинах задаются индексом поглощения в сложной вершине.

В каждой вершине графа с l выходами из нее задаются вероятности P_1, \dots, P_l выходов по соответствующим направлениям, так что $P_1 + P_2 + \dots + P_l = 1$. Предполагается, что величины P_i остаются постоянными в течение всего времени процесса блуждания, если только не изменится

сам граф в случае поглощения или условного изменения ребер.

«Путем» называют любую линию, которая может быть проведена на графе от начальной вершины по направлению, определенному ориентацией ребер графа и в соответствии с условным заданием ребер. «Траекторией» называют любой путь, проходящий через поглощающую вершину с индексом n не более чем n раз.

Таким образом, если траектория блуждания проходит через поглощающую вершину, индекс этой вершины уменьшается на единицу. Если индекс вершины 0, то траектория обрывается. Путь на графе может быть бесконечным; траектория всегда конечна, так как она всегда проходит через поглощающие вершины, а индексы поглощения — конечные числа.

Траектории, ведущие из начальной точки в конечную, называют успешными. Задача состоит в том, чтобы при заданном графе, заданных индексах поглощения и вероятностях выхода из элементарных вершин вычислить вероятность успеха, состоящего в том, что блуждание будет проходить по одной из успешных траекторий. Необходимо вычислить вероятности каждой отдельной траектории и сложить их.

Метод ориентированных графов с поглощением пригоден для описания и вычисления вероятности успеха любой целенаправленной операции с ограниченными ресурсами (времени или средств), поглощаемыми (расходуемыми) в ходе ее выполнения. Если, например, считать, что x_i — средства, отпущенные на осуществление i -й операции, то можно решить задачу об оптимальном распределении общей суммы средств X для достижения наибольшей вероятности успеха.

Если в двух разных вариантах для одного и того же графа наборы поглощающих вершин есть $J = (i_1, \dots, i_m)$ и $G = (j_1, \dots, j_n)$, причем $J = G$, то нужно решить обе задачи и путем сравнения вариантов по определенному показателю выбрать более рациональное решение. Данный метод можно использовать для вычисления математического ожидания времени окончания работ и вообще для вычисле-

ния функции распределения этой случайной величины. Действительно, $\bar{F} = [Y_1, \dots, Y_n]$ есть вероятность того, что успешная траектория Y_1 раз пройдет через первую поглощающую вершину, Y_2 — через вторую и т. д.

Допустим, что каждое прохождение через первую поглощающую вершину требует t_1 времени, через вторую t_2 и т. д. Тогда $T = Y_1 t_1 + Y_2 t_2 + \dots + Y_n t_n$ есть время выполнения работ по траектории, соответствующее набору $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$.

Пусть $U_x = (Y_1, \dots, Y_n)$ есть совокупность решений неравенства

$$\sum_{k=1}^n Y_k t_k < X.$$

Тогда вероятность

$$P(T < X) = \sum_{Y \in U_x} \bar{F}[Y_1, \dots, Y_n]$$

есть функция распределения времени окончания работ.

Изложенный метод можно использовать для решения задач оптимального резервирования (средств, времени, изделий, элементов и т. д.).

Введение зависимости P_i от прошлого траектории (например, от времени и т. д.) позволяет учесть динамику процесса.

Оценки затрат ресурсов на строительство линий электропередачи, газопровода, железных дорог, многосекционных мостов, на проведение испытаний изделий и другие задачи можно решать этим методом.

4. МОДЕЛЬ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РАБОТ И ИСПЫТАНИЙ

Для сложных систем и их элементов характерна связь между выбранной структурой системы, проектными параметрами ее элементов, требуемым уровнем надежности и затратами располагаемых ресурсов, времени и средств на ее экспериментальную отработку.

Затраты средств на экспериментальную отработку основных элементов системы составляют обычно значительную долю затрат на создание изделий. Поэтому в целях экономии средств на создание системы при проектировании следует выбирать такие

ее структуру и характеристики, которые давали бы возможность, чтобы экспериментальная обработка систем могла быть выполнена в приемлемые сроки и с минимальными затратами.

Ввиду большой размерности задачи выбора оптимального варианта системы и планирования экспериментальных работ можно успешно решить только с помощью ЭВМ в диалоговом режиме, причем при моделировании статистически устойчивых, детерминированных свойств элементов системы и процессов их отработки следует использовать детерминированные модели и методы, а для недетерминированных процессов функционирования изделий и процессов их экспериментальной отработки — стохастические модели и методы.

Экспериментальную отработку сложной системы можно представить в виде многоэтапного ориентированного графа [1].

На первом этапе испытываются элементы, на втором этапе — изделия или группы взаимодействующих приборов, узлов, на третьем — функциональные группы изделий (ФГ), на четвертом — составные части системы, на пятом — система в целом.

Практика экспериментальной отработки сложных изделий такова, что не исключает повторения испытаний на каждом этапе и даже возвращения на предыдущие этапы испытаний. Например, при комплексном испытании составной части могут обнаружиться отказы, из-за которых требуются доработка и повторные испытания элементов, изделий, функциональных групп изделий и составной части, прежде чем можно будет перейти к испытаниям системы.

Всю совокупность отказов изделий, выявляемых при экспериментальной отработке, делят на две группы. К первой группе относят отказы, проявляющиеся детерминированно в первом же испытании при имитации одного воздействующего фактора. Предполагается, что после доработки изделия отказ по данному фактору больше не проявляется.

Общее число испытаний, требующихся для выявления и устранения отказов первой группы,

$$N_{\Sigma} = \sum_{m_i} (2n_{\Phi i} + 1),$$

где m_i — число изделий, на которых проявляются отказы первой группы; $n_{\Phi i}$ — число факторов, проверяемых на i -м изделии (как правило, это приборы, узлы).

Ко второй группе относят отказы, проявляющиеся случайно с некоторой интенсивностью.

Предположим, что после выявления отказа по данному элементу и проведения доработки требуется провести одно дополнительное испытание для подтверждения эффективности доработки. Это условие не нарушает общности модели, так как можно задать любое число дополнительных испытаний. Общее число испытаний элементов, составных частей и системы в целом для выявления отказов первой и второй групп определяется с помощью теории полного факторного эксперимента. При этом матрица факторов разбивается на две самостоятельные матрицы.

Первая матрица соответствует детерминированным факторам, а вторая — случайным.

Учитывая возможность проведения утяжеленных испытаний по отдельным воздействующим факторам, кратность испытаний изделий, а также опыт отработки и выявления случайных отказов на изделиях-аналогах, можно каждый из случайных факторов описать некоторым законом его проявления, имеющим математическое ожидание, дисперсию или другие параметры, например:

$$P_{эл}^i = \frac{\lambda_i^{k_i}}{k_i!} \exp(-\lambda_i);$$

$$P_n^j = \frac{\lambda_j^{k_j}}{k_j!} \exp(-\lambda_j);$$

$$P_{фг}^f = \frac{\lambda_f^{k_f}}{k_f!} \exp(-\lambda_f);$$

$$P_c^g = \frac{\lambda_g^{k_g}}{k_g!} \exp(-\lambda_g);$$

$$P_c^h = \frac{\lambda_h^{k_h}}{k_h!} \exp(-\lambda_h),$$

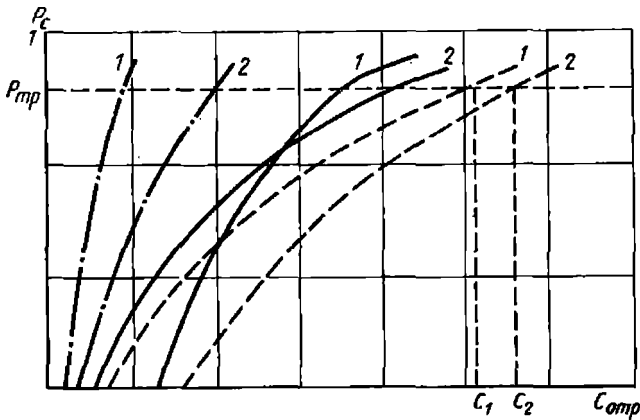


Рис. 4. Затраты на экспериментальные работы и испытания двух вариантов системы (1 и 2):

— — — детерминированная составляющая затрат; — — — стохастическая составляющая затрат; — — — суммарные затраты на отработку и испытания

где $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_f, \lambda_g, \lambda_h$ — параметры закона Пуассона для элементов, изделий, функциональных групп, составных частей и систем в целом; $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

При переходе на следующий уровень испытаний в более крупной структуре необходимо «запомнить» число оставшихся невыявленных факторов для каждого элемента структуры, а также число проведенных испытаний по каждому фактору после последней доработки.

Кроме того, при переходе от автономных испытаний элементов к испытаниям изделий добавляются дополнительные факторы — факторы связи, взаимодействия элементов в составе изделий, обладающие также пуассоновской плотностью распределения вероятностей с параметром λ_k . Эти факторы должны проявиться в процессе испытаний изделий.

Аналогично добавляются новые факторы и выявляется взаимодействие изделий в процессе испытаний функциональных групп, составных частей и системы в целом.

Постановка задачи: найти вариант экспериментальной отработки системы, позволяющей удовлетворить условию $P_c \geq P_c^{тр}$ с минимальными затратами ресурсов. Задачу решают следующим образом. На систему задаются значе-

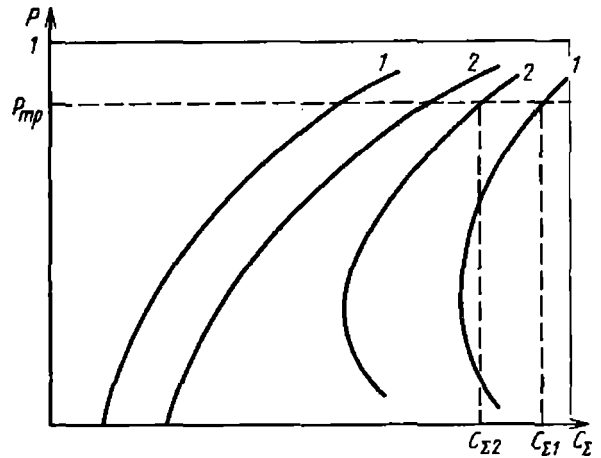


Рис. 5. Затраты на экспериментальную отработку и выполнение задачи двух вариантов системы (1 и 2)

ния $P_c^{тр}$, которые необходимо подтвердить к концу экспериментальной отработки, например,

$$P_{c_{\min}}^{тр} \leq P_c^{тр} \leq P_{c_{\max}}^{тр}$$

Учитывая известную из проектного анализа структуру элементов, изделий, функциональных групп, составных частей и системы в целом, а также априорные сведения о запасах работоспособности, кратности испытаний для выявления каждого фактора, накопленные по результатам экспериментальной отработки изделий-аналогов, назначают интенсивности отказов по каждому фактору λ_i для систем каждого уровня иерархической структуры, в том числе по каждому фактору связи.

При экспериментальной отработке в первую очередь проявляются отказы, вызванные конструктивно-технологическими недоработками или недостаточным знанием влияния внешних случайных факторов на работоспособность объекта испытания. Для описания этих отказов используется обычно закон Пуассона вида

$$P_{об}^i = P(X = K) = \frac{\lambda_i^K}{K!} \exp(-\lambda_i),$$

где $X = 0, 1, 2, \dots, n$ и $K = 0, 1, 2, \dots, n$, λ_i — интенсивность отказов

i -го объекта испытаний по каждому фактору.

Таким образом, в результате решения задачи на ЭВМ для каждого из альтернативных вариантов, отличающихся уровнем структурной избыточности и проектной надежности $P_{прив}$, находим зависимость $c = f(P_{отр})$, каждая точка которой соответствует варианту экспериментальной отработки системы на случайные факторы до задаваемого уровня $P_{отр}^{тр}$ с минимальными затратами. К полученным затратам добавляются стоимость проектно-конструкторской разработки $C_{пр}$ и стоимость отработки системы на детерминированные факторы, постоянные для каждого уровня структуры (рис. 4). Добавляя к полученным затратам на экспериментальную отработку затраты на выполнение задачи невозстанавливаемой системой не менее чем $N_{тр}$ раз с гарантией

$$\begin{aligned} \gamma_{тр} &= P \{N_{\nu} \geq N_{тр}\} = \\ &= \sum_{m=N_{тр}}^{N_{г}} C^m P_i^m (1 - P_i)^{N_{г}-m} = \\ &= \sum_{k=0}^{N_{г}-N_{тр}} C_{N_{г}} P_i^{N_{г}-k} (1 - P_i)^k, \end{aligned}$$

можно получить оптимальное решение, соответствующее минимуму суммарных затрат на отработку и выполнение задачи (рис. 5). Этому решению соответствует единственный вариант системы.

Из рис. 4 следует, что затраты на экспериментальные работы и испытания второго варианта системы больше, чем первого. Однако согласно рис. 5 суммарные затраты на экспериментальную отработку и выполнение задачи с использованием второго варианта системы меньше, чем у первого. Следовательно, разработка второго варианта системы предпочтительнее.

Аналогично могут быть оценены затраты времени на испытание и выполнение задачи системой и сделан окончательный выбор варианта системы с учетом стоимостных и временных ограничений.

5. ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ МЕРОПРИЯТИЙ ПО ОБЕСПЕЧЕНИЮ НАДЕЖНОСТИ ИЗДЕЛИЙ

В практике проектирования, производства и эксплуатации изделий обычно возникает задача выбора не одного, а группы (комплекса) наиболее эффективных мероприятий из множества возможных. Эту задачу решают в два этапа:

1) оценивают эффективность обеспечения конкурирующими мероприятиями требуемого уровня надежности и отбирают (формируют комплекс) мероприятия, удовлетворяющие ограничениям на продолжительность их реализации;

2) из сформированного комплекса возможных мероприятий выбирают такие, затраты на реализацию которых являются минимальными.

Для оценки экономической эффективности ПОН необходимо знание зависимостей между стоимостью и надежностью каждого изделия, входящего в состав системы. Обычно используют зависимость стоимости C_i от интенсивности отказов изделия λ_i :

$$C_i = f(\lambda_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Оценку эффекта от использования изделия следует проводить по результатам применения соответствующей системы. Для этого формируют целевую функцию выбора оптимального варианта ПОН системы по стоимости

$$C = F(C_i), \quad i = \overline{1, n},$$

где C_i определяют по формуле (5).

Математическая постановка задачи оптимального формирования ПОН систем имеет вид

$$C_{\min} = \min_{C_i} F(C_i) = F(C_i^*), \quad i = \overline{1, n},$$

$$Q(C_i^*) \geq Q_{тр}, \quad i = \overline{1, n},$$

где C_i^* — затраты на обеспечение надежности каждого изделия, при которых общие затраты на обеспечение необходимого уровня надежности си-

стемы являются минимальными; $Q_{тр}$ — требуемый уровень обеспечения надежности системы.

Поиск оптимального варианта ПОН каждого изделия и системы в целом проводят с применением методов математического программирования (МП). Особенностью поиска является наличие дискретных переменных, характеризующих комплекс возможных мероприятий по обеспечению надежности изделий. Эта особенность обуславливает использование методов целочисленного программирования.

Более простым и более удобным для анализа является выбор оптимального варианта ПОН с использованием методов МП, в которых аналогичные переменные являются непрерывными. В этом случае необходимо знание по каждому изделию зависимости стоимости ПОН от интенсивности отказов. Данная зависимость имеет строго монотонный убывающий характер и для ее аппроксимации по экспериментальным данным обычно используют функцию

$$C = \alpha e^{\beta \lambda}, \tag{6}$$

где $\alpha > 0$, $\beta < 0$ — неизвестные параметры, оценки которых находят методами нелинейного регрессионного анализа [1]. Поиск оценок неизвестных параметров модели (6) включает два этапа:

- 1) путем логарифмирования модель (6) преобразуют в линейную

$$\ln C = \ln \alpha + \beta \lambda \tag{7}$$

и по методу наименьших квадратов (МНК) находят начальные оценки неизвестных параметров;

- 2) уточняют начальные оценки путем минимизации функционала

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{u=1}^N (C_u - \alpha e^{\beta \lambda_u})^2, \tag{8}$$

где N — число экспериментальных значений стоимости ПОН и интенсивности отказов какого-либо изделия, входящего в систему.

С целью наибольшей простоты поиска начальных оценок параметров модель (7) преобразуют к виду

$$\ln C = \ln \alpha + \beta \sum_{u=1}^N \lambda_u / N + \beta \left(\lambda - \sum_{u=1}^N \lambda_u / N \right)$$

и находят начальную оценку параметра β по формуле

$$\beta_H = \sum_{u=1}^N \left(\lambda_u - \sum_{u=1}^N \lambda_u / N \right) \times \times \ln C_u / \sum_{u=1}^N \left(\lambda_u - \sum_{u=1}^N \lambda_u / N \right)^2$$

Затем с использованием преобразованного функционала МНК, позволяющего двухпараметрический поиск минимума функционала свести к однопараметрическому в соответствии с условием

$$\Phi(\beta_{opt}) = \max_{\beta} \times \times \left[\left(\sum_{u=1}^N C_u e^{\beta \lambda_u} \right)^2 / \sum_{u=1}^N e^{2\beta \lambda_u} \right],$$

находят оптимальное значение параметра β и по формуле

$$\alpha = \sum_{u=1}^N C_u e^{\beta \lambda_u} / \sum_{u=1}^N e^{2\beta \lambda_u}$$

вычисляют оптимальное значение другого параметра.

Для поиска оптимального значения параметра β вычисляют различные значения преобразованного функционала МНК и аппроксимируют функцией

$$Z(\beta) = b_0 + b(x + a(x^2 - 1)), \tag{9}$$

где $x = (\beta - \beta_H) / \Delta\beta$, $|x| \leq 1$.

Область изменения значений β выбирают достаточной для накрытия оптимального значения.

Оценки неизвестных параметров в модели (9) находят по формулам:

$$b_0 = (Z(\beta_H + \Delta\beta) + Z(\beta_H - \Delta\beta)) / 2;$$

$$b = (Z(\beta_H + \Delta\beta) - Z(\beta_H - \Delta\beta)) / 2;$$

$$a = (b_0 - Z(\beta_H)) / b.$$

Экстремум функции (9) вычисляют по формуле

$$x_{\text{ЭК}} = -1/2a,$$

а соответствующее значение параметра β — по формуле

$$\beta_{\text{ЭК}} = \beta_{\text{Н}} - \Delta\beta/2a.$$

Для последующего уточнения оценки параметра β выбирают в окрестности $\beta_{\text{ЭК}}$ новую более малую область и проводят аналогичные вычисления.

Реальные зависимости ПОН от интенсивности отказов изделий могут быть более сложными, чем экспоненциальные, например, иметь характер логистической кривой. В этом случае увеличивается число неизвестных параметров в модели (5), и вместо однофакторной функции (9) необходимо использовать функцию

$$Z(\beta) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{j>i=1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2, \quad (10)$$

где

$$x_i = (\beta_i - \beta_{i\text{Н}})/\Delta\beta_i, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\beta_{i\text{Н}} - \Delta\beta_i \leq \beta_i \leq \beta_{i\text{Н}} + \Delta\beta_i,$$

$$i = \overline{1, n}; \quad (11)$$

$\beta_{i\text{Н}}$ — начальные оценки параметров β_i ; $\Delta\beta_i > 0$ — интервалы, с помощью которых образуется область, накрывающая оптимальные значения параметров β_i .

Для оценки параметров модели (10) проводят вычислительный эксперимент (ВЭ):

1) выбирают в области (11) различные комбинации значений параметров β_i

для них находят соответствующие значения преобразованного функционала МНК, имеющего вид

$$Z(\beta) = \left(\sum_{u=1}^N C_u \eta(\lambda_u, \beta) \right)^2 / \sum_{U=1}^N \eta(\lambda_u, \beta)^2,$$

где β — вектор неизвестных параметров в функции

$$C = \alpha\eta(\lambda, \beta),$$

используемой для аппроксимации исследуемой зависимости. Число таких комбинаций (точек плана) должно быть не меньше числа неизвестных параметров модели (10);

2) путем статистической обработки полученных таким образом данных находят по МНК оценки неизвестных параметров модели (10).

Для проведения ВЭ используют планы второго порядка на кубе типа B_n [5]. Точки данных планов располагаются в вершинах гиперкуба и в центрах его $(n-1)$ -мерных граней. Оценки параметров модели (10) вычисляют по формулам [3]:

$$b_0 = \frac{1}{2(n-1)} \left(\sum_{u=N_1+1}^N Z_u - \frac{1}{N_1} \sum_{u=1}^{N_1} Z_u \right);$$

$$b_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{u=N_1+1}^N x_{iu}^2 Z_u - b_0;$$

$$b_i = \left(\sum_{u=1}^N x_{iu} Z_u \right) / (N_1 + 2);$$

$$b_{ij} = \left(\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} Z_u \right) / N_1,$$

где N_1 — число точек плана, располагаемых в вершинах гиперкуба; N — общее число точек плана.

Уточненные оценки параметров β_i находят путем решения системы линейных уравнений:

$$b_i + \sum_{j \neq i=1}^n b_{ij} x_j + 2b_{ii} x_i = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

После решения системы $x_{i\text{ЭК}}$ вычисляют значения

$$\beta_{i\text{ЭК}} = \beta_{i\text{Н}} + \Delta\beta_i x_{i\text{ЭК}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Для последующего уточнения оценок параметров β_i проводят новый аналогичный ВЭ в более малой области с центром в точке с координатами (12).

Для вновь создаваемых и эксплуатируемых изделий целесообразно проводить построение достаточно достоверных моделей, описывающих зависимости стоимости ПОН от интенсивности отказов изделий в различных условиях эксплуатации. Наличие такой информации позволяет при проектировании систем выбрать наилучший вариант технических мероприятий по обеспечению их надежности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бард Й. Нелинейное оценивание: Пер. с англ. М.: Статистика, 1979. 349 с.

2. Надежность и эффективность в технике: Справочник. Т. 1. Методология, организация, терминология/Под ред. А. И. Рембезы. М.: Машиностроение, 1986. 223 с.

3. Слотин Ю. С. Композиционное планирование регрессионного эксперимента. М.: Знание, 1983. 51 с.

4. Справочник по исследованию операций/Под ред. Ф. А. Матвейчука. М.: Воениздат, 1979. 368 с.

5. Таблицы планов эксперимента: Справочное издание/Под ред. В. В. Налимова. М.: Metallургия, 1982. 750 с.

6. Эффективность и надежность сложных систем (информация, оптимальность, принятие решений)/И. Л. Плетнев, А. И. Рембеза, Ю. А. Соколов, В. А. Чалый-Прилуцкий. М.: Машиностроение, 1977, 216 с.

1. АНАЛИЗ ПРИЧИН ОТКАЗОВ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При проектировании машин, механических систем, механизмов и отдельных элементов необходимо не только обеспечить требуемые параметры и характеристики изделий, но и гарантировать эти показатели в заданных пределах в течение всего периода эксплуатации.

В процессе эксплуатации на машину действуют внутренние и внешние факторы, которые могут привести к изменению параметров отдельных элементов, механизмов и машины в целом. Известны три основных источника воздействий:

действие энергии окружающей среды, включая человека, выполняющего функции оператора или ремонтника;

внутренние источники энергии, связанные как с рабочими процессами, протекающими в машине, так и с работой отдельных механизмов машины;

потенциальная энергия, которая накоплена в материалах и деталях машины в процессе их изготовления (внутренние напряжения в отливке, монтажные напряжения).

Различные виды энергии, действующие на машину, вызывают в ее узлах и деталях процессы, связанные со сложными физико-химическими явлениями, приводящими к деформации, износу, поломке, коррозии и другим видам повреждений. Возникновение повреждений влечет за собой изменение выходных параметров изделия, что может привести к отказу.

Процессы, приводящие к изменению начальных свойств изделия, протекают в материалах, из которых создано изделие, включая не только де-

тали машины, но и смазочные материалы, топливо, которые участвуют в рабочем процессе. Приведем примеры этих взаимосвязей. Механическая энергия, действующая в звеньях металлорежущего станка, приводит к изнашиванию его звеньев. Это вызывает искажение начальной формы сопряжений (т. е. их повреждение) и потерю точности станка, которая является его основным выходным параметром. При достижении определенной погрешности в движении форм образующих узлов станка возникает отказ.

Химическая энергия вызывает процессы коррозии в резервуарах и трубопроводах агрегатов химической промышленности. Повреждение стенок резервуаров может привести вначале к ухудшению выходных параметров агрегата (загрязнение химических веществ, изменение пропускных сечений трубопроводов), а затем при разрушении стенок к полному выходу из строя изделия.

Различают обратимые и необратимые процессы, происходящие в машине и влияющие на ее технические характеристики. Обратимые процессы временно изменяют параметры деталей, узлов и всей системы в некоторых пределах, без прогрессивного ухудшения. Наиболее характерный пример таких процессов — упругая деформация узлов и деталей.

Необратимые процессы приводят к прогрессивному ухудшению технических характеристик машины с течением времени. Наиболее характерными необратимыми процессами в машинах являются изнашивание, коррозия, усталость, перераспределение внутренних напряжений и коррозия деталей с течением времени.

1. Классификация процессов старения (необратимые процессы)

Объект	Внешнее проявление процессов (вид повреждения)	Разновидности процесса	
Тело детали (объемные явления)	Разрушение	Хрупкое разрушение, вязкое разрушение	
	Деформация	Пластическая деформация, коробление	
	Изменение свойств материала	Изменение структуры материала, механических свойств (пластичность), химического состава, магнитных свойств, газопроницаемости, загрязнения жидкостей (смазочного материала, топлива)	
Поверхность (поверхностные явления)	Детали	Разъедание	Коррозия, эрозия, кавитация, прогар, трещинообразование
		Нарост	Налипание (адгезия, когезия, адсорбция, диффузия), нагар, облитерация (заращивание)
		Изменение свойств поверхностного слоя	Изменение шероховатости, твердости, отражательной способности, напряженного состояния
	Пары	Износ	Износ (истирание), усталость поверхностных слоев, смятие, перенос материала
		Изменение условий контакта	Изменение площади контакта, глубины внедрения микровыступов, сплошности смазочного материала, коэффициента трения

Для оценки надежности изделия необходимо знать скорость протекания процессов, снижающих его работоспособность. Быстропротекающие процессы имеют периодичность изменения, измеряемую обычно долями секунды. Эти процессы заканчиваются в пределах цикла работы машины и вновь возникают при следующем цикле. Сюда относят вибрации узлов, изменения сил трения в подвижных соединениях, колебания рабочих нагрузок и другие процессы, влияющие на взаимное

положение узлов машины в каждый момент времени и искажающие цикл ее работы.

Процессы средней скорости связаны с периодом непрерывной работы машины. Их длительность измеряется обычно в минутах или часах. Они приводят к монотонному изменению начальных параметров машины. К этой категории относят как обратимые процессы (изменение температуры самой машины и окружающей среды, изменения влажности среды), так и не-

2. Показатели степени повреждения материала изделия

Повреждение	Методы оценки степени повреждения		
	интегральный	дифференциальный	по выходным параметрам изделия
Глубинное	Ослабление сечения трещинами (фактическая площадь сечения). Суммарная деформация детали. Число дислокаций в опасном сечении	Размер трещин и их распределение. Эюра деформаций. Распределение дислокаций по объему детали	Потеря несущей способности детали
Поверхностное	Полное	Весовой износ. Средний износ. Объемный показатель коррозии	Линейный износ поверхности. Глубинный показатель коррозии. Изменение твердости по поверхности
	Локальное	Суммарная площадь повреждения. Число дефектов на единицу площади. Размеры наибольшего повреждения	Законы распределения параметров, характеризующих отдельные повреждения. Плотность повреждения на отдельных участках поверхности
			Изменение температуры, коэффициента трения, утечек, плотности, давления, вибраций

обратимые (износ режущего инструмента, который протекает во много раз интенсивнее, чем изнашивание деталей и узлов машины).

Медленные процессы протекают за время работы машины между периодическими осмотрами или ремонтами. Они длятся дни и месяцы. К таким процессам относят обратимые процессы, например, сезонные изменения температуры, но в основном это необратимые процессы старения — изнашивание основных механизмов машины, перераспределение внутренних напряжений в деталях, ползучесть металлов, загрязнение поверхностей трения, коррозия.

Эти процессы также влияют на точность, мощность, КПД и другие параметры машин, но изменения их происходят очень медленно. Обычные методы борьбы с медленными процес-

сами — ремонт и профилактические мероприятия, которые проводятся через определенные промежутки времени.

Протекание в машине процессов старения является одной из основных причин потери ею работоспособности [6].

В табл. 1 дана классификация процессов старения по их внешнему проявлению и указаны основные разновидности каждого процесса.

Тело детали может подвергаться разрушению, которое является наиболее опасным проявлением процессов старения, деформироваться или изменять свойства материала — его пластичность, электропроводимость, магнитные свойства и т. п.

Наиболее часто процессы старения протекают в поверхностных слоях. При этом поверхность детали может

подвергаться температурным, химическим, механическим или иным воздействиям внешней среды. В результате могут происходить явления, связанные с потерей (отделением) материала поверхности вследствие коррозии, эрозии, кавитации и других процессов, которые можно объединить одним термином — разъедание поверхности.

На поверхности могут протекать и такие процессы, как адгезия, абсорбция, нагар и другие, которые характеризуются присоединением к поверхности других материалов. Их будем называть наростом. В результате внешних воздействий возможно также изменение свойств поверхностного слоя — его микрогеометрии, твердости, отражательной способности и др.

Чтобы оценить запас надежности детали, необходимо численно определить степень ее повреждения.

Существуют два основных метода оценки степени повреждения.

При первом методе выбирают численные критерии для непосредственного измерения степени повреждения изделия, например, величины деформации детали, ее линейного или весового износа, глубины и размеров каверн при локальном разрушении поверхности и т. п. Однако во многих случаях, особенно при локальных видах повреждения, бывает трудно непосредственно оценить степень повреждения.

В этом случае применяют второй метод, когда о повреждении судят по изменению выходного параметра. Например, при местных повреждениях детали или при возникновении пластических зон о степени повреждения судят по потере несущей способности (прочности); о локальных повреждениях направляющего гидрораспределителя судят по падению давления и т. п.

Показатели, которые используют для определения степени повреждения материала изделия, приведены в табл. 2.

Оценка степени повреждения материала изделия и изучение закономерностей процессов старения, приводящих к данным повреждениям, являются

основой для построения моделей расчета и прогнозирования надежности механических систем.

2. МОДЕЛИ ОТКАЗОВ МАШИН

Постепенные (износные) отказы возникают в результате протекания того или иного процесса старения, ухудшающего начальные параметры изделия. При этом чем дольше эксплуатируется изделие, тем выше вероятность возникновения отказа. К этому виду относят большинство отказов машины. Они связаны с процессами изнашивания, коррозии, усталости и ползучести материалов.

Внезапные отказы возникают в результате сочетания неблагоприятных факторов и случайных внешних воздействий, превышающих возможности изделия.

Основным признаком внезапного отказа является независимость вероятности его возникновения в течение заданного периода времени от длительности предыдущей работы изделия. Примерами таких отказов могут служить тепловые трещины, возникающие в детали вследствие прекращения подачи смазочного материала, поломки детали из-за неправильной эксплуатации машины или возникновения перегрузок, деформация или поломка деталей, попавших в такие условия работы, когда каждый параметр имеет экстремальное значение. Выход из строя при этом происходит, как правило, внезапно, без предшествующих признаков разрушения.

Отказы разделяют также на **отказы функционирования**, когда изделие перестает выполнять свои функции в результате поломок, заклинивания, и **параметрические отказы**, когда регламентированные параметры изделия выходят за допустимые пределы. При отказе функционирования дальнейшее использование машины возможно только после ее ремонта. Продолжение эксплуатации машины, имеющей параметрический отказ, может привести к выпуску некачественной продукции или к снижению эффективности работы машины. Более того, в сложных машинах и системах параметрические отказы элементов могут привести к отказу функционирования.

Основной задачей при оценке надежности изделия на стадии проектирования является отыскание закона распределения времени работы изделия до отказа, выраженного в дифференциальной форме в виде плотности вероятности $f(t)$ или в интегральной форме в виде функции распределения $F(t)$. Закон распределения $F(t)$ является полной характеристикой надежности изделия или его элемента и позволяет определить вероятность безотказной работы $P(t) = 1 - F(t)$ и другие показатели надежности.

Теория вероятностей рассматривает различные законы распределения случайных величин, которые могут быть использованы и для решения задач надежности (см. т. 2). Основанием для использования того или иного закона распределения и оценки его параметров обычно служат статистические данные, полученные при испытании изделий или образцов, сведения об аналогах, эксплуатационные наблюдения или теоретические предпосылки. При этом следует применять методы проверки статистических гипотез о правомерности применения данного закона распределения.

Для оценки надежности при постепенных отказах широко применяют нормальный и логарифмически нормальный законы распределения, закон Вейбулла, гамма-распределение и другие, а для внезапных отказов — экспоненциальное и равновероятное распределения [3].

Однако непосредственное применение законов распределения сроков службы не может быть признано основным методом решения на стадии проектирования задач надежности по следующим причинам. Во-первых, закон выбирают формально, по внешним признакам, он не отражает процесса формирования отказа, и поэтому всегда имеется опасность весьма грубого приближения. Во-вторых, для получения статистических данных, позволяющих судить о законе распределения, требуется, как правило, очень длительное время, так как фиксируется конечная стадия процесса повреждения — отказ.

Статистика дает достоверную информацию о надежности изделий, уже на-

ходящихся в эксплуатации, и, как правило, не может служить единственной основой для расчетов надежности при проектировании машин, так как при разработке новых изделий реализуются многие мероприятия, предотвращающие повторение отказов, наблюдавшихся ранее.

Для более полного анализа надежности новых машин необходимо построение моделей формирования отказов, которые отражают процессы, изменяющие выходные параметры проектируемых изделий.

Рассмотрим общую схему формирования отказа изделий (рис. 1), когда протекание различных процессов повреждения приводит к изменению во времени выходного параметра X . Отказ возникает при достижении предельно допустимого значения X_{\max} параметра, что произойдет через некоторый случайный промежуток времени работы изделия.

На схеме показаны основные этапы формирования закона распределения $f(t)$. Вначале имеет место рассеяние параметров изделия $f(a)$ относительно своего математического ожидания a_0 . Это связано с рассеянием начальных показателей новой машины, с возможностью ее работы при различных режимах и протеканием таких процессов, как вибрация, деформация и другие, которые проявляются сразу же при работе машины. Затем в процессе эксплуатации параметры изделия ухудшают медленно протекающие процессы, например, изнашивание. В общем случае процесс изменения параметра может начаться через некоторый промежуток времени t_b , который также является случайной величиной и связан с накоплением повреждений (например, усталостных) или действием внешних причин.

Процесс изменения параметра X со скоростью γ_X (скорость деградации) также является случайным и зависит от изменения повреждений отдельных элементов изделия (их износа со скоростью $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$).

Надежная работа изделия будет обеспечена в том случае, если его выходные параметры X_1, X_2, \dots, X_n находятся внутри области работоспо-

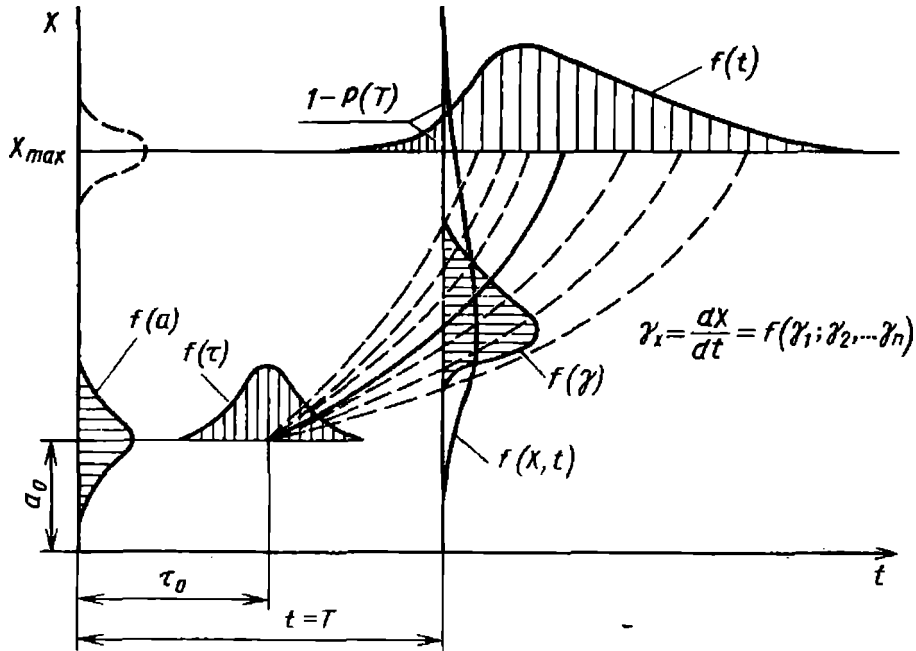


Рис. 1. Общая схема формирования параметрического отказа

способности, т. е. в области допустимых значений, которая определяется значениями $X_{1max}, X_{2max}, \dots, X_{nmax}$ для каждого параметра. В общем случае X_{max} также может иметь рассеяние, если оно оценивает диапазон требований потребителей к предельным значениям показателей машины (размытое множество).

Область, в которой находятся параметры изделий в данный момент времени, называют областью состояний.

Анализ явлений, приводящих к выходу области состояний за пределы области работоспособности, и должен дать возможность определить закон распределения $f(X, t)$, оценивающий вероятность этого события и позволяющий определить вероятность отказа.

Рассмотренная схема в общем виде описывает процесс возникновения отказа и при частных значениях входящих параметров может отражать те или иные случаи, характерные для определенных условий работы и конструктивных особенностей изделия. Если процесс изменения параметра начинается сразу ($\tau_B = 0$), то получаем типичную схему возникновения постепенного параметрического отказа. Если при достижении X_{max} будет резкое возрастание $X(t)$, то, как правило, возникает отказ функционирования. Если в процессе формирования

отказа основную роль играет возникновение (зарождение) процесса, т. е. функция $f(\tau_B)$, а затем процесс протекает с большой интенсивностью $X(t) \rightarrow \infty$, то получаем модель внезапного отказа.

Рассеяние начальных параметров изделия $f(a)$ следует учитывать при рассмотрении определенной совокупности изделий, например, всех машин данной модели, выпускаемых заводом. Если рассматривается конкретное изделие, то значение a превращается в неслучайную величину, так как характеризует начальные параметры данного образца. Если же учитывать рассеяние начальных параметров машины в результате ее работы при различных режимах, то a будет случайной величиной и для одного экземпляра изделия.

Если изменение параметра X во времени происходит по линейному закону, то

$$X = a + \gamma t, \quad (1)$$

где a — начальный параметр изделия (например, точность изготовления детали), который также является случайной величиной и подчиняется некоторому закону распределения.

Срок службы T (наработки) до отказа является функцией двух неза-

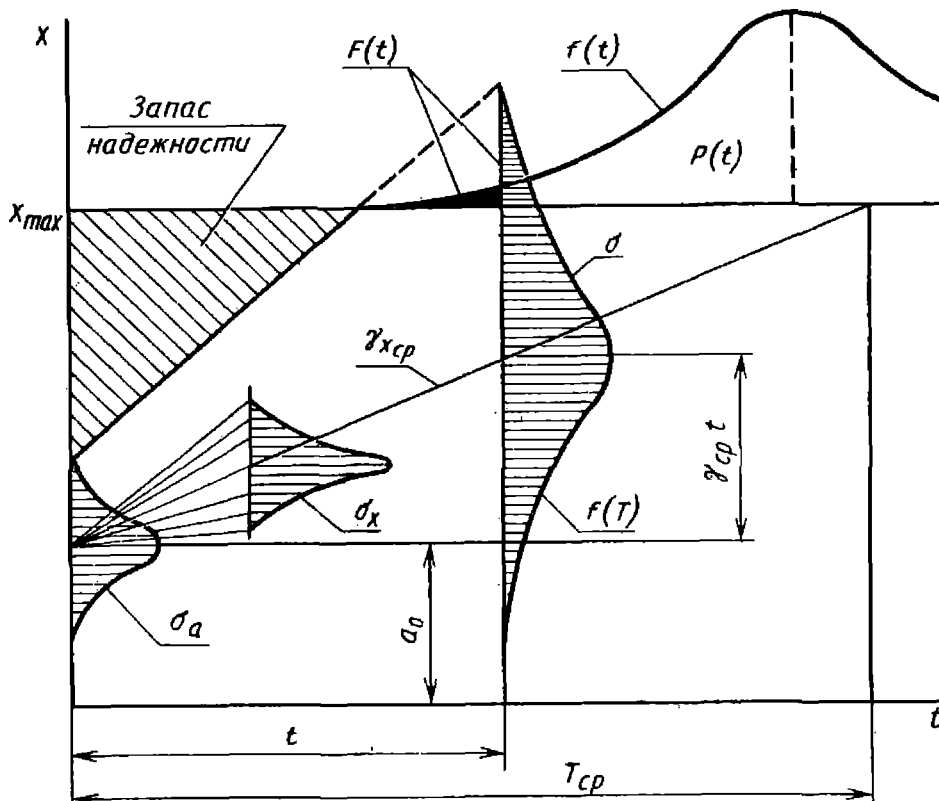


Рис. 2. Модель параметрического отказа при рассеянии параметров по нормальному закону и постоянной скорости изменения параметра

висимых случайных аргументов a и γ :

$$T = \frac{X_{\max} - a}{\gamma}. \quad (2)$$

При этом $a < X_{\max}$, так как изделие изготовлено в пределах допуска.

Если случайные аргументы a и γ распределены по нормальному закону, то и параметр X для каждого значения $t = T$ будет распределен по тому же закону с параметрами (рис. 2): математическое ожидание

$$X_{cp} = a_0 + \gamma_{cp}T; \quad (3)$$

среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\sigma_a^2 + (T\sigma_X)^2}, \quad (4)$$

где a_0 — математическое ожидание; σ_a — среднее квадратическое отклонение случайного параметра a .

Учитывая, что вероятность безотказной работы изделия равна вероятности того, что параметр X не выйдет за допускаемые пределы X_{\max} в течение $t = T$, т. е. $P(t) = \text{Вер}(X \leq X_{\max})$, получим

$$P(T) = \Phi \left[\frac{X_{\max} - a_0 - \gamma_{cp}T}{\sqrt{\sigma_a^2 + (\sigma_X T)^2}} \right], \quad (5)$$

где Φ — функция Лапласа ($0,5 \leq \Phi \leq 1$) (см. [13]).

В общем случае, если известны математическое ожидание изменения параметра X во времени $M_X(t)$ и дисперсия $D_X(t)$ этого параметра в каждый момент времени с учетом начального рассеяния, то вероятность безотказной работы изделия может быть определена как

$$P(T) = \Phi \left[\frac{X_{\max} - a_0 - M_X(t)}{\sqrt{D_X(t)}} \right]. \quad (6)$$

Пусть, например, изменение параметра во времени подчиняется экспоненциальному закону (тепловые процессы, процесс коробления изделия и др.):

$$X(t) = A \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{\alpha} \right) \right], \quad (7)$$

где A — установившееся значение процесса (при $t \rightarrow \infty$); α — постоянная, характеризующая параметры узла и его материала (например, тепловая постоянная узла).

Тогда математическое ожидание

$$M_X(t) = a_0 + \bar{A} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right) \right], \quad (8)$$

где \bar{A} — математическое ожидание параметра A , который имеет рассеяние по нормальному закону.

Если среднее квадратическое отклонение этого параметра σ_A также изменяется во времени по экспоненциальному закону с параметрами σ_0 и α_0 , т. е.

$$\sigma_X(t) = \sigma_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\alpha_0}\right) \right], \quad (9)$$

то вероятность безотказной работы

$$P(t) = \Phi(z), \text{ где } z =$$

$$= \left[\frac{X_{\max} - a_0 - \bar{A} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\alpha_0}\right) \right]}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_0^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\alpha_0}\right) \right]^2}} \right]. \quad (10)$$

Данные зависимости позволяют, используя закономерности процесса изменения (деградации) параметра, прогнозировать надежность изделия.

В общем случае функция рассеяния параметра $f(t)$ не будет подчиняться нормальному закону распределения при рассеянии исходных параметров (a ; γ_X) по нормальным законам.

Лишь при частном значении параметров, когда основную роль играет рассеяние начальных параметров, а дисперсия процесса незначительна [$\sigma_X = 0$ в формуле (5)], закон распределения наработки до отказа $f(t)$ будет нормальным.

При малом рассеянии начальных параметров ($\sigma_a = 0$) по сравнению с дисперсией σ_X^2 скорости процесса деградации $X(t)$ закон $f(t)$ будет асимметричным с большим значением коэффициента асимметрии, чем в общем случае при $\sigma_a \neq 0$.

Свою специфику в формировании закона распределения до отказа имеют те случаи, когда модель, помимо закона старения, учитывает также флуктуацию параметра. Это случай, когда имеются дополнительные возмущения,

приводящие к большему или меньшему перемешиванию реализаций и к возникновению помех (например, типа «белый шум»).

Случайный процесс $X(t)$, основанный на функциональной зависимости того или иного процесса старения, возникает в связи с тем, что его аргументы являются случайными величинами, не зависящими от времени. Такие процессы называют детерминированными случайными (или полуслучайными) процессами. Эти процессы и были положены в основу рассмотренных выше моделей отказов.

В общем виде случайный процесс изменения параметра X во времени можно представить как

$$X(t) = a + \dot{X}(t) + \varepsilon(t), \quad (11)$$

где a — начальное значение параметра; $\dot{X}(t)$ — центрированный случайный детерминированный процесс; $\varepsilon(t)$ — флуктуации параметра.

Флуктуации параметра также могут содержать детерминированную составляющую (например, периодические компоненты кинематических ошибок механических передач) и случайные флуктуации [10]. В результате этого реализации процесса старения (деградации) отличаются от линейных, обладают свойством «перемешанного» процесса и могут иметь как монотонный, так и немонотонный характер. Эти свойства случайного процесса влияют на параметры закона распределения $f(t)$ и на оценку вероятности безотказной работы изделия $P(t)$.

С учетом указанной динамики процесса старения (при $a = 0$) получены следующие зависимости для оценки параметрической надежности при различной степени влияния флуктуаций процесса [1, 10] (рис. 3):

а) для верного случайного процесса (рис. 3, а)

$$P(T) = \Phi \left[\frac{X_{\max} - \gamma_{\text{ср}} T}{\sigma_X T} \right], \quad (12)$$

т. е. получаем формулу (5) при $a = 0$ и $\sigma_a = 0$. Данное распределение не является нормальным;

б) модель деградации в виде «сильно перемешанного» гауссовского процесса

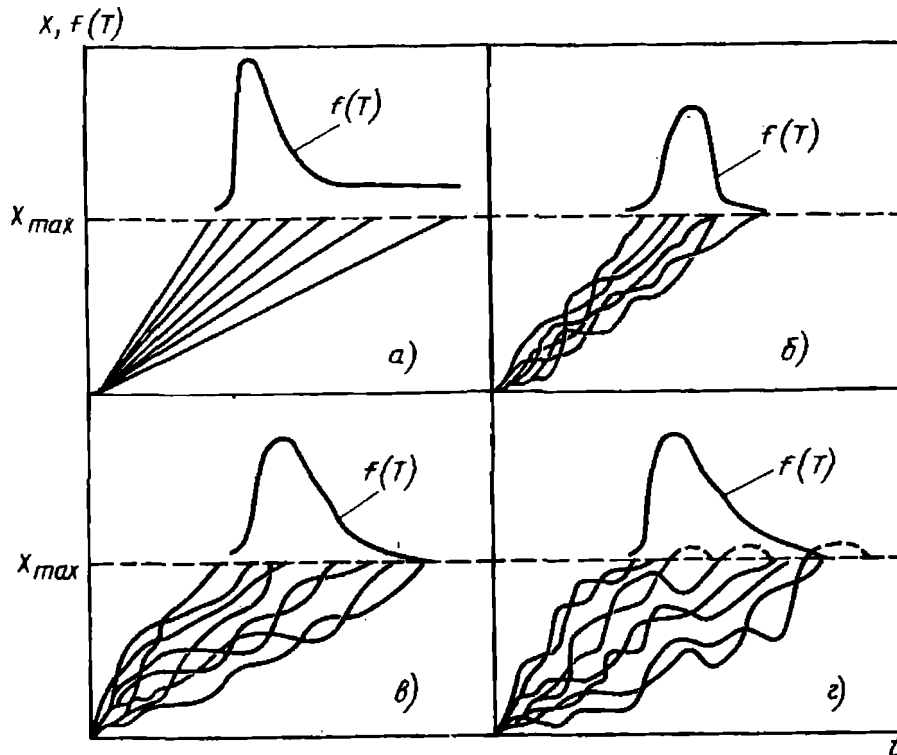


Рис. 3. Модели отказов при различном характере перемешивания реализаций процесса деградации

(рис. 3, б) приводит к нормальному распределению;

в) представление деградационного процесса в виде непрерывного марковского процесса с монотонными реализациями (рис. 3, в) приводит к так называемому диффузионному распределению, для которого

$$P(T) = \Phi \left[\frac{X_{\max} - \gamma_{\text{ср}}}{\sigma_X \sqrt{\frac{X_{\max} T}{\gamma_{\text{ср}}}}} \right]. \quad (13)$$

Эта модель может быть использована, например, применительно к накоплению усталостных повреждений в различных деталях механических систем [4];

г) модель непрерывного марковского процесса деградации с немонотонными реализациями, которые в процессе изменения параметра могли бы выходить за допустимый уровень и возвращаться обратно (рис. 3, г), описывается следующим диффузионным распределением:

$$P(T) = \left(1 - \exp \left(-\frac{2\gamma_X^2}{\sigma_X^2} \right) \right) \times$$

$$\times \Phi \left[\frac{X_{\max} - \gamma_{\text{ср}}}{\sigma_X \sqrt{\frac{X_{\max} T}{\gamma_{\text{ср}}}}} \right]. \quad (14)$$

Физический смысл такой модели, когда реализации не могут выйти за пределы «экрана» — X_{\max} и возвращаются обратно. К такому распределению могут привести модели усталостной долговечности материалов при учете процесса «разупрочнения — упрочнения» металла [4, 11].

В основу любых моделей отказов положены закономерности изменения выходных параметров изделия, которые в свою очередь определяются закономерностями процессов старения с учетом их физической природы.

Рассмотренные выше модели постепенного изменения параметров изделия оценивают вероятность их выхода за пределы X_{\max} , т. е. Вер ($X \leq X_{\max}$). Однако в ряде случаев возможно наличие для данного параметра двух пределов — верхнего X_{\max} и нижнего X_{\min} . Выход за границы X_{\min} также будет отказом изделия. Данная схема будет иметь место, когда выходной параметр должен находиться в

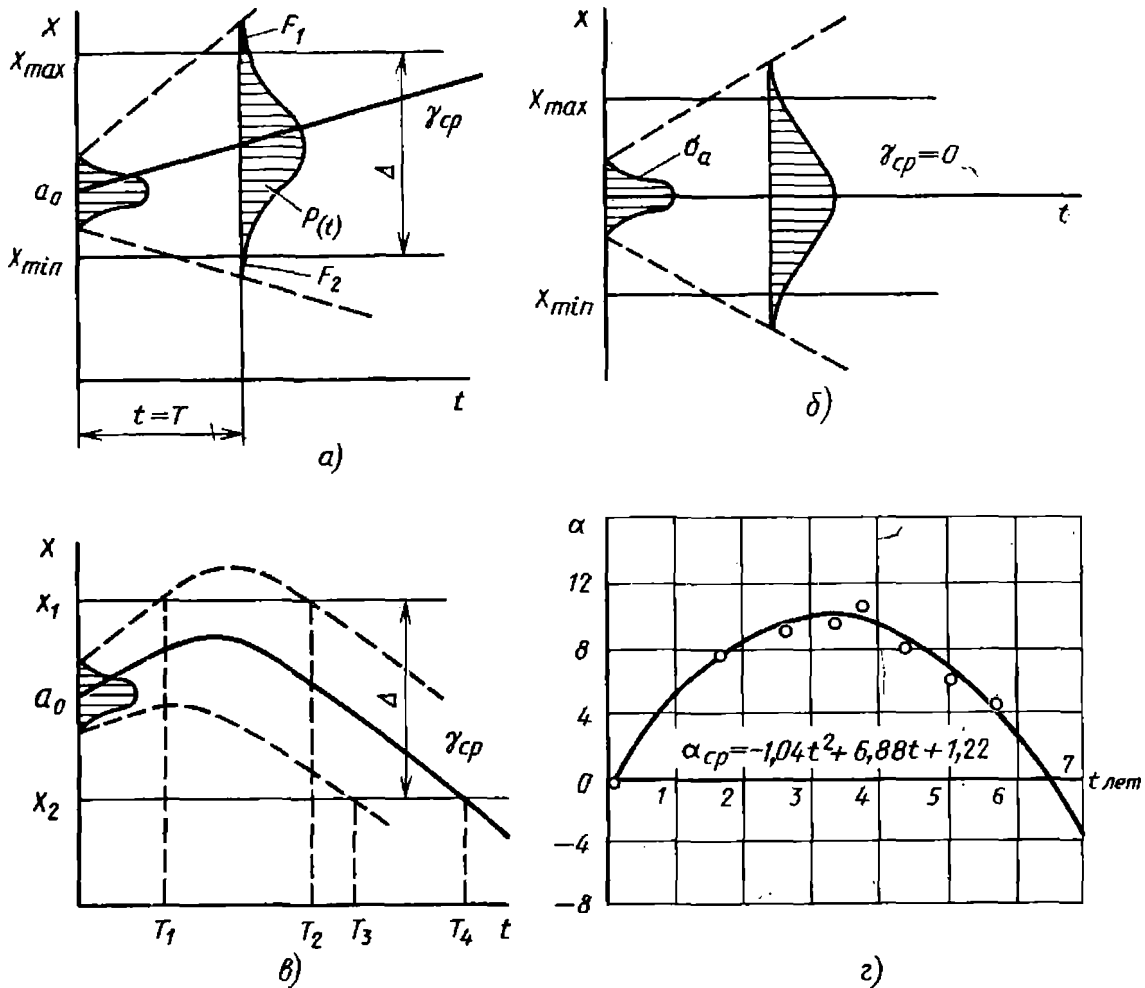


Рис. 4. Модели отказов с двумя пределами

определенных границах, например, допуск на размер обрабатываемого на станке изделия, жесткость пружины и др. Закон изменения выходного параметра может быть достаточно сложным и не обязательно монотонно возрастающим, так как в общем случае он является следствием нескольких процессов повреждения.

На рис. 4, а показана модель отказа при наличии двух пределов. Вероятность безотказной работы изделия в данный момент времени $t = T$ численно равна площади кривой $f(X, t)$, находящейся в пределах допуска $\delta = X_{\max} - X_{\min}$:

$$P(T) = \Phi\left(\frac{X_{\max} - a_0 - \gamma_{cp}T}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_{\gamma}^2 T^2}}\right) + \Phi\left(\frac{a_0 + \gamma_{cp}T - X_{\min}}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_{\gamma}^2 T^2}}\right) - 1.$$

В частном случае при симметричном допуске $X_{\max} = -X_{\min}$, $a_0 = 0$ и $\gamma_{cp} = 0$ (рис. 4, б), т. е. при увеличении со временем лишь дисперсии процесса без смещения центра группирования поля рассеяния параметров, получим

$$P(T) = 2\Phi\left(\frac{X_{\max}}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_{\gamma}^2 T^2}}\right) - 1.$$

В ряде случаев закон изменения выходных параметров $X(t)$ может быть достаточно сложным, но общий методический подход для оценки вероятности отказа будет тем же. Так, на рис. 4, в приведен случай со знакопеременным (по скорости процесса) изменением выходного параметра (см. типовые кривые, табл. 4). В среднем за пределы допуска параметр изделий выйдет только через промежуток времени $t = T_4$.

Однако в процессе работы в начальный период эксплуатации в период времени t от T_1 до T_2 возникает опас-

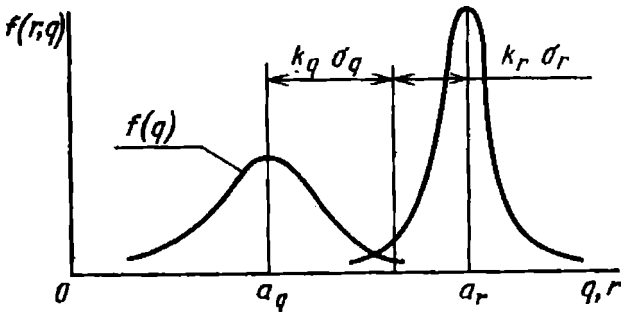


Рис. 5. Схема модели «нагрузка—прочность»

ность отказа для изделий, выполненных по верхней границе допуска. Затем их безотказность будет возрастать. Изделия, выполненные по нижней границе допуска, не будут иметь такого периода, но их выход за нижнюю границу допуска возможен с момента времени $t = T_3$. Такая картина наблюдалась, например, при исследовании изменения в процессе эксплуатации точности одностоечного координатно-расточного станка мод. 2А450.

На рис. 4, з показано изменение отклонения от перпендикулярности оси вращения шпинделя к поверхности стола станка в поперечной плоскости за 7 лет эксплуатации. Обработка опытных данных показала, что математическое ожидание угла поворота шпинделя $\alpha_{ср}$ и среднее квадратическое отклонение σ_α в функции времени t (лет) могут быть аппроксимированы следующими зависимостями:

$$\alpha_{ср}(t) = 1,04t^2 + 6,88t - 1,22;$$

$$\sigma_\alpha(t) = 0,17e^{0,47t} + 0,9.$$

Такой сложный характер изменения положения оси шпинделя связан с суммированием двух различных процессов — коробления чугунных корпусных деталей станка и изнашивания направляющих шпиндельного блока, которые действуют в противоположных направлениях.

Свою специфику имеют модели надежности механических систем, когда причиной отказа является разрушение конструкции. К этой категории относятся модели «нагрузка—прочность», учитывающие рассеяние прочностных характеристик материалов и дисперсию действующих нагрузок, а также различные модели, которые базируются

на законах механики разрушения материалов и учитывают процессы накопления повреждений (зарождения и развития трещин) [2].

Простейшая модель «нагрузка — прочность» может быть представлена как статическая (без фактора времени), когда учитываются законы распределения нагрузки q [плотность вероятности $f(q)$] и прочности r [плотность вероятности $f(r)$] (рис. 5). Тогда вероятность безотказной работы P определится условием, что нагрузки не превзойдут требуемых показателей прочности. В общем виде

$$P = \int \int_{r-q>0} f(r, q) dr dq. \quad (15)$$

Так, если распределение величин r и q подчиняется нормальному закону (что, однако, не всегда соблюдается), математическое ожидание этих значений соответственно a_r и a_q , а дисперсии σ_r^2 и σ_q^2 , то разность этих величин $(r - q)$ также распределена нормально.

Тогда вероятность безотказной работы конструкции

$$P = \Phi \left(\frac{a_r - a_q}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_q^2}} \right). \quad (16)$$

Если считать, что расчетные значения прочности r и нагрузки q равны их математическим ожиданиям, то необходимо установить коэффициенты запаса (см. рис. 5):

$$\left. \begin{aligned} \text{по материалу } K_M &= 1 - k_r W_r; \\ \text{по нагрузке } K_H &= 1 + k_q W_q, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где $W_r = \frac{\sigma_r}{a_r}$ и $W_q = \frac{\sigma_q}{a_q}$ — коэффициенты

вариации; k_r и k_q — числовые коэффициенты, характеризующие требуемый уровень надежности.

Данный подход является простейшим, не учитывает фактор времени и не позволяет проследить эволюцию системы, связанную с процессами разрушения.

Модели отказов, связанные с постепенным накоплением поврежде-

ний — пластических деформаций, усталостных разрушений, рассмотрены В. В. Болотиным [2]. При этом автор отдает предпочтение так называемым полуэмпирическим моделям, связывающим скорость накопления повреждений с действующими нагрузками и условиями окружающей среды.

Рассматривая различные методы анализа надежности механических систем и модели отказов, предпочтение следует отдавать тем, которые, учитывая физику процесса и его стохастическую природу, позволяют установить непосредственную аналитическую зависимость между показателями надежности [в первую очередь для $P(t = T)$] и исходными параметрами. Такие зависимости служат основой для разработки программ ЭВМ для прогнозирования надежности и оценки различных вариантов принимаемых решений по совершенствованию конструкции.

Рассмотренные выше зависимости позволяют при знании физических законов изнашивания или других законов старения, с учетом возможных вариаций исходных показателей работоспособности и условий эксплуатации, прогнозировать потерю работоспособности изделия и определять основные показатели надежности, так как в структуру формул входят исходные данные, не зависящие от времени.

При использовании моделей отказов следует иметь в виду, что между выходным параметром изделия X и степенью повреждения (например, износом) имеется обычно детерминированная зависимость $X = \Phi[U]$. Наиболее характерна линейная зависимость между X и U . Например, износ направляющих поверхностей механизмов линейно связан с точностью перемещений ведомого звена. Для многих динамических процессов характерна степенная зависимость между X и U , когда в качестве выходного параметра приняты значения динамических нагрузок в машине. Например, величина износа зубчатых передач связана степенной зависимостью с динамическими нагрузками в приводе [6]. Получение таких соотношений базируется на анализе работы данных механизмов с учетом их функционального назначения.

3. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Знание законов старения и взаимосвязей между степенью повреждения элементов машины и ее выходными параметрами и разработка моделей отказов позволяют построить схему расчета параметрической надежности машины (рис. 6).

Целью расчета является оценка основных показателей надежности и сравнение их с заданными. Поэтому технические условия на машину должны устанавливать допустимые отклонения выходных параметров X_1, X_2, \dots, X_n , т. е. предельные значения $X_{i \max}$ для каждого из них и значения показателей надежности для всего изделия. В первую очередь следует установить допускаемую величину вероятности безотказной работы и запас надежности для каждого из параметров и для машины в целом и ресурс, в течение которого целесообразно эксплуатировать машину с учетом технического обслуживания и ремонта.

При проведении расчета должны быть известны конструкция всех элементов и узлов, применяемые материалы, условия эксплуатации и режимы работы.

Расчет заключается в оценке всех тех факторов, которые участвуют в формировании процесса потери машинной работоспособности и в определении основных показателей надежности, например, по формуле (5).

Для решения этой задачи необходимо в первую очередь оценить на основании законов старения степень или скорость повреждения тех элементов, которые определяют значение выходного параметра. При этом математическое ожидание и дисперсия процесса оцениваются с учетом спектра нагрузок и режимов работы. Одновременно на основании данных о конструкции основных элементов машин и общей компоновки ее узлов определяются начальные параметры изделия — его геометрическая точность, жесткость, влияние быстропротекающих процессов и процессов средней скорости на параметры изделия. Обычно не все

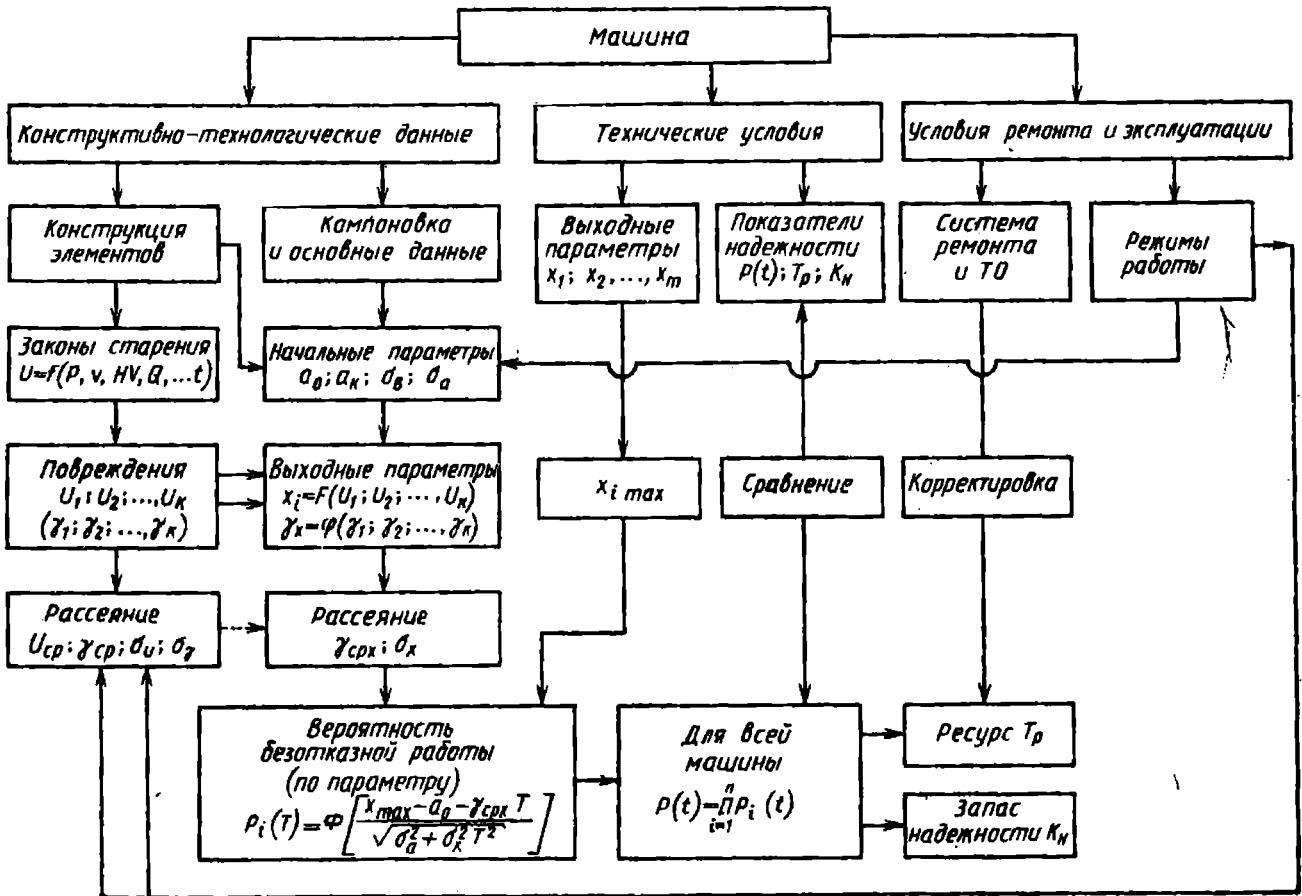


Рис. 6. Схема расчета машины на параметрическую надежность

эти показатели могут быть получены расчетным путем. Так, например, методы расчета, связанные с виброустойчивостью и с тепловыми деформациями сложных деталей и узлов, еще недостаточно разработаны. В этом случае следует использовать данные аналогов, производить моделирование процессов на макетах или задаваться допустимой их величиной. В последнем случае при окончательной отработке конструкции изделия всегда могут быть приняты меры для доведения данного параметра до требуемого уровня.

Прием, когда устанавливаются ограничения для скоростей протекания ведущих процессов, снижающих работоспособность изделия, можно широко использовать при оценке надежности сложных систем, трудно поддающихся расчету. Устанавливая допустимые значения для изменения отдельных показателей и для степени повреждения (износа) элементов, можно расчетным путем показать, что при этом

будут обеспечены требуемые показатели надежности машины в целом. Используя конструктивные и технологические методы и зная закономерности процессов повреждения, можно добиться, чтобы скорость процессов старения находилась в установленных пределах.

Изменение выходных параметров происходит в результате развития повреждений во времени и подчиняется той или иной функциональной связи $X_i = F(U_1, U_2, \dots, U_k)$. Для выявления этих взаимосвязей необходимо построить расчетную схему, которая, например, для процессов износа машины позволяет установить функциональную зависимость между износом отдельных элементов и выходными параметрами узла.

Расчет вероятности безотказной работы изделия по данному параметру и других показателей надежности ведут на основе принятой модели отказа.

Если выходные параметры независимы и необходимо оценить $P(t)$ для

3. Характеристика последствий отказа

Последствия отказа		Допустимая вероятность безотказной работы	Тип машины
Катастрофические	Авария. Катастрофа. Невыполнение ответственного задания	$P(t) \rightarrow 1;$ $K_H = 1,2 \div 1,5$	Летательные аппараты. Подъемно-транспортные машины. Машины химического производства. Медицинское оборудование
Экономический ущерб	Повышенные простои в ремонте. Работа на пониженных режимах. Работа с ухудшенными параметрами	Значительный ущерб: $P(t) \geq 0,99$ Незначительный ущерб: $P(t) \geq 0,9$	Технологическое оборудование. Сельскохозяйственные. Бытовые
Без последствий (затраты на ремонт в пределах нормы)		$P(t) < 0,9$	Отдельные узлы и элементы машин

всей машины, то используют теорему умножений вероятностей. Если надо учесть также и вероятность внезапных отказов, то оценивают их уровень и характер взаимодействия с постепенными отказами.

Для высоконадежных систем основной характеристикой является запас надежности по каждому из выходных параметров.

Запас надежности $K_H \geq 1$ — это отношение допустимого значения выходного параметра X_{\max} к его экстремальному значению $X_{\text{ЭК}}$, которое параметр может принять за данный период работы изделия (см. рис. 2). При высоких значениях вероятности безотказной работы $P(t)$ (порядка 0,999 и выше), когда этот показатель теряет свою эффективность, для оценки степени надежности изделия целесообразнее применять показатель K_H [6].

Полученные в результате расчета показатели надежности корректируют с учетом системы ремонта (это в основном относится к установлению ресурса T_p) и сравнивают с заданными техническими требованиями значениями.

Если полученные результаты не удовлетворяют этим требованиям, то исходные данные корректируют. При этом, поскольку известна структура

формирования показателей надежности, можно указать оптимальные варианты корректирования исходных параметров (характеристики материалов, смазочных материалов, размеры и конструкцию узла и т. п.).

Для сложных систем указанная схема является основной для разработки алгоритма расчета надежности с применением ЭВМ.

Выбор допустимых значений показателей надежности проводят исходя из оценки тех последствий, к которым может привести отказ изделия.

Нормированию подлежат в первую очередь вероятность безотказной работы $P(t)$ с оценкой ресурса T_p , в течение которого она регламентируется, а для высоконадежных систем, в которых $P(t) \rightarrow 1$, определяют запас надежности K_H .

Во многих случаях с экономической точки зрения выгодно делать более надежное изделие даже в том случае, если к нему не предъявляются высокие требования безотказности по условиям эксплуатации.

Допустимые значения вероятности безотказной работы машин приведены в табл. 3.

Нормирование показателей надежности всей машины связано, в первую очередь, с оценкой изменения выход-

ных параметров, определяющих ее работоспособность.

Надежность машины определяется работой наиболее ответственных узлов и систем, так как в любой машине есть узлы, выход из строя которых не приводит к указанным недопустимым последствиям.

Расчет машины на надежность позволяет указать наиболее рациональные пути повышения ее технических характеристик.

Методы повышения надежности изделий разнообразны и связаны в первую очередь с повышением стойкости изделий к внешним воздействиям. Сюда относят методы создания прочных, жестких, износостойких узлов за счет их рациональной конструкции, применение материалов с высокой прочностью, износостойкостью, антикоррозийностью, теплостойкостью, а также применение различных смазочных материалов.

Другой путь повышения надежности работы машин и изделий — это их изоляция от вредных воздействий: установка машины на фундамент, защита поверхностей от запыления и загрязнения, создание для машин специальных условий по температуре и влажности, применение антикоррозийных покрытий, виброизолирующих устройств и т. д.

Активным средством для решения проблемы надежности является применение автоматики для обеспечения длительного выполнения машиной своего служебного назначения в различных условиях эксплуатации.

4. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПРОЦЕССОВ СТАРЕНИЯ

Изменение начальных свойств и состояния материалов, из которых выполнено изделие, является первопричиной потери им работоспособности, так как эти изменения могут привести к повреждению изделия и к опасности возникновения отказа.

Для расчета надежности необходимо знать скорость протекания процесса повреждения $\gamma(t)$ или степень данного повреждения $U(t)$ в функции времени.

Такие зависимости могут быть получены на основе рассмотрения физики процесса или экспериментальным путем.

В табл. 4 представлены типовые закономерности протекания процессов старения во времени. Они относятся к одностадийным процессам, когда в течение рассматриваемого периода не происходит изменения физико-химической картины процесса.

Наиболее просто протекают стационарные процессы, когда скорость процесса постоянна или колеблется относительно среднего значения. Это происходит в том случае, если все факторы, влияющие на скорость процесса, стабилизировались и нет причин, изменяющих интенсивность процесса. Зависимость $U(t)$ имеет обычно линейный или близкий к нему характер. Такая закономерность характерна для установившегося периода изнашивания, для некоторых видов коррозии и других процессов. Если при старении возникают факторы, которые интенсифицируют или, наоборот, замедляют скорость его протекания, т. е. скорость процесса γ изменяется монотонно, функция $U(t)$ будет иметь нелинейный вид и соответственно описывать интенсификацию или затухание процесса повреждения материала изделия. Ход процесса в этом случае связан с тем, что его скорость зависит не только от внешних факторов, но и от степени повреждения U . Поэтому сам процесс (его результат) влияет на интенсивность дальнейшего его протекания. Это условие может быть записано как

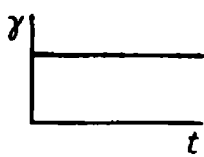

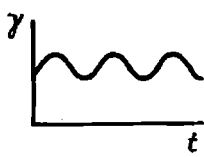

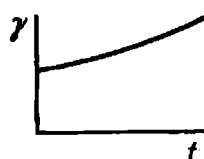
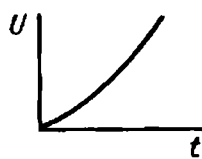


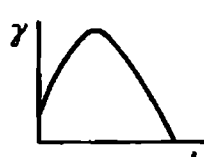
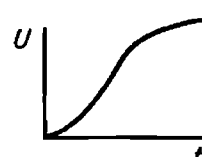

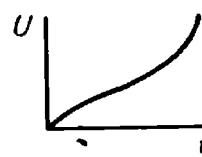
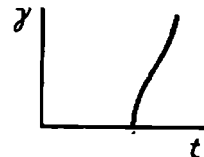
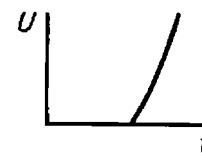
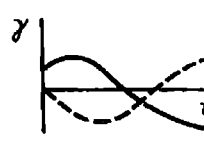
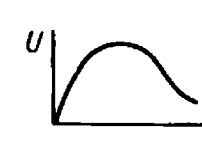
$$\frac{dU}{dt} = f(U). \quad (18)$$

Например, некоторыми исследователями установлено, что скорость роста усталостной трещины зависит от ее длины. Есть примеры аналогичного подхода и к оценке скорости изнашивания сопряжений.

При линейной зависимости γ от U , т. е. при

$$\frac{dU}{dt} = C \pm kU, \quad (19)$$

4. Типовые закономерности протекания во времени процессов старения

Процессы (по γ -характеристике)		$\gamma(t) = \frac{dU}{dt}$	$U(t)$	Примеры
Стационарные	Постоянные			Износ: $U = kt$
	Псевдостационарные			Износ при переменных режимах
Монотонные	Возрастающие			Износ при засорении поверхностей: $U = kt^n; n > 1;$ $U = A(e^{kt} - 1)$
	Убывающие			Износ в период приработки, распад мартенсита: $U = kt^n; n < 1;$ $U = A(1 - e^{-kt})$
Экстремальные	С максимумом			Коррозия, коробление $\gamma = ate^{-bt}$
	С минимумом			Ползучесть, износ, коррозия
С запаздыванием			Усталость, хрупкое разрушение	
Знакопеременные			Изменение механических характеристик	

интегрированием этого уравнения получим экспоненциальную зависимость для величины повреждения как функции времени.

В некоторых случаях, когда на скорость процесса одновременно действует ряд равноценных факторов, которые претерпевают изменение во времени, зависимость $\gamma(t)$ может иметь экстремум (максимум или минимум), что характерно, например, для некоторых видов коррозии, для процессов коробления и др. В этом случае функция $U(t)$ имеет точку перегиба. При достижении максимума и последующем падении до нуля процесс повреждения прекращается. Такая зависимость характерна, например, для перераспределения внутренних напряжений и деформаций в отливках в процессе их эксплуатации. После определенного периода, который иногда длится несколько лет, коробление отливки прекращается.

Существует определенная категория процессов, для которой вначале происходит накопление каких-то внутренних повреждений, а затем с некоторым запаздыванием начинается сам процесс.

Если в процессе с запаздыванием время до начала процесса (порог чувствительности) является основным периодом эксплуатации изделия, а сам процесс протекает с большой интенсивностью, то такое явление воспринимается обычно как спонтанный (самопроизвольно возникающий) процесс. Так, хрупкое разрушение металлов, схватывание при трении и ряд других процессов носят лавинообразный характер и возникают после накопления внутренних повреждений или при неблагоприятном сочетании внешних воздействий.

Если скорость процесса меняет знак, что характерно для сложных физико-химических процессов, протекающих в материале, то функция $U(t)$, характеризующая степень повреждения, будет иметь экстремум.

При протекании различных процессов старения могут быть случаи, когда изменяется физическая сущность процессов и соответственно меняется и закономерность, описывающая данное явление. Такие процессы называют

многостадийными. Для их описания, как правило, применяют законы для каждой стадии процесса $\gamma(t)$ и $U(t)$.

Все рассмотренные функциональные зависимости, определяющие протекающие процессы старения, проявляются при эксплуатации изделий как случайные процессы. Это связано с двумя основными причинами. Во-первых, начальные свойства материала и геометрические параметры изделия имеют рассеяние, так как являются продуктом некоторого технологического процесса, который может функционировать лишь с определенной точностью и стабильностью. Во-вторых, стохастическая природа процесса старения связана с широкой вариацией режимов работы и условий эксплуатации изделий. В результате зависимости, описывающие процессы старения, становятся функциями случайных аргументов — нагрузок, скоростей, температур и т. п.

Поэтому скорость процесса старения γ является случайной величиной, и ее полной характеристикой будет закон распределения $f(\gamma)$. Для получения $f(\gamma)$ экспериментальным методом применяется физико-статистическое моделирование [8], при котором испытание, например для оценки скорости изнашивания проводят при различных значениях внешних факторов (нагрузок, скоростей, смазочного материала и т. п.). При этом значения этих факторов принимают в соответствии с законом их распределения, отражающим условия эксплуатации. Применяя метод статистического моделирования (метод Монте-Карло), определяют закон распределения и его статистические характеристики для искомой величины — скорости изнашивания (в общем случае — скорости процесса повреждения) [9].

5. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ИХ ИЗНОСА

Износ, возникающий при трении сопряженных поверхностей, является наиболее характерным видом повреждения большинства машин и механизмов.

Изнашивание — это процесс постепенного изменения размеров тела при трении, проявляющийся в отделении с поверхности трения материала и (или) его остаточной деформации. Изнашивание может сопровождаться процессами коррозии и является сложным физико-химическим процессом. Его изучению посвящена обширная литература [5, 12].

Основными показателями износа являются:

линейный износ U (мкм) — изменение размера поверхности при ее изнашивании, измеренное в направлении, перпендикулярном к поверхности трения;

скорость изнашивания $\gamma = \frac{dU}{dt}$ (мкм/ч) — отношение величины износа ко времени, в течение которого он возник;

интенсивность изнашивания $j = \frac{dU}{ds}$ — отношение величины износа к относительному пути трения, на котором происходило изнашивание.

При изнашивании деталей машин в первый период приработки износ возрастает нелинейно во времени, а в период установившегося износа его скорость γ постоянна. Этот период является основным, и при расчетах можно принимать $\gamma = U/t = \text{const}$.

Анализ большого числа исследований износа различных материалов в условиях граничного трения и трения без смазочного материала показывает, что в общем случае скорость изнашивания может быть выражена зависимостью

$$U = kp^m Vt = kp^m s, \quad (20)$$

т. е.

$$\gamma = kp^m V \text{ и } j = kp^m, \quad (21)$$

где k — коэффициент износа, характеризующий материал пары и условия изнашивания; $m = 0,5 \div 3$, $s = Vt$ — путь трения.

Для абразивного и ряда других видов изнашивания $m = 1$.

На значение коэффициента k влияют характеристики применяемых материалов пары, условия в зоне контакта и, в первую очередь, смазочный материал.

5. Классы износостойкости материалов по скорости изнашивания

Класс	γ , мкм/ч	Примеры
0	$\leq 5 \cdot 10^{-5}$	Калибры, гидро-
1	$\leq 10^{-4}$	распределители
2	$\leq 2 \cdot 10^{-4}$	Зубчатые переда-
3	$\leq 4 \cdot 10^{-4}$	чи
4	$\leq 8 \cdot 10^{-4}$	Направляющие
5	$\leq 1,6 \cdot 10^{-3}$	станков, ходовые
		винты
6	$\leq 3,2 \cdot 10^{-3}$	Фрикционные
7	$\leq 6,4 \cdot 10^{-3}$	муфты
8	$\leq 1,25 \cdot 10^{-2}$	Лемехи
9	$> 1,25 \cdot 10^{-2}$	Авиатормоза

При расчетах надежности изделий необходимо оценить скорость процесса повреждения, скорость изнашивания основных сопряжений.

Особую сложность при расчетах представляет определение коэффициента износа материалов k , которые зависят от большого числа факторов. Наиболее желательно определение этих значений из закономерностей, полученных на основе изучения физики процесса изнашивания.

При отсутствии значений коэффициентов износа материалов в расчетах сопряжений на износ можно использовать следующие приемы.

1. Проводить сравнительные расчеты, определяя, во сколько раз повысится износостойкость данной пары по отношению к прототипу или при сравнении нескольких вариантов конструкций.

2. Оценивать значение коэффициента k на основе опыта эксплуатации аналогичных пар трения или прогнозируя возможное повышение износостойкости при применении новых материалов, зная изменение их механических характеристик и структуры.

3. Нормировать скорости и интенсивности изнашивания, назначая определенный класс износостойкости и ставя условие перед технологами и эксплуатационниками о необходимости подбора таких пар трения и создания

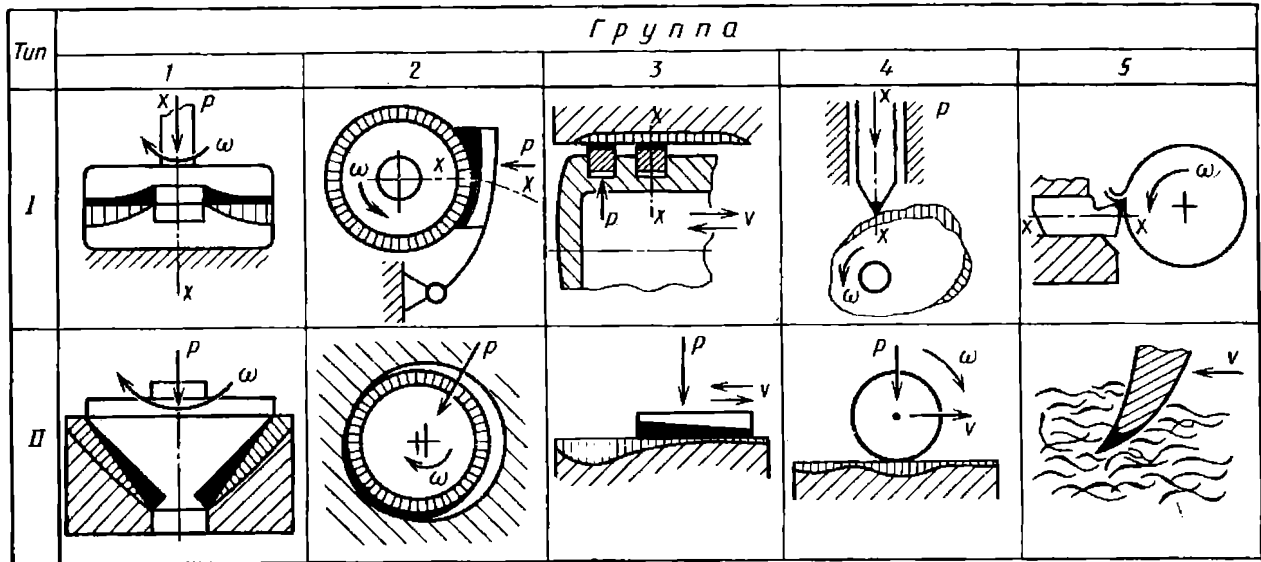


Рис. 7. Классификация сопряжений по условиям их изнашивания

таких условий эксплуатации, чтобы интенсивность их изнашивания находилась в установленных пределах.

4. Проводить испытание образцов сопряженных материалов, используя эти данные для расчета сопряжений.

Классы износостойкости по скорости изнашивания и примеры сопряжений машин приведены в табл. 5.

Знание закономерностей изнашивания является предпосылкой для расчета износа сопряжений и механизмов на стадии проектирования.

Основной характеристикой износа детали является линейный износ U , который измеряется в направлении, перпендикулярном к поверхности трения. Вследствие ряда причин (различные значения удельных давлений и скоростей относительного скольжения на поверхности трения, неодинаковое попадание абразива и т. д.) износ детали может быть неравномерным.

Для полной характеристики величины износа детали необходимо знать его распределение по поверхности трения $U(x, y)$, т. е. форму изношенной поверхности.

В результате износа сопряженных деталей происходит изменение их относительного положения, которое называют износом сопряжения.

Износ сопряжения является той геометрической характеристикой, которая непосредственно связана с потерей машиной или механизмом их началь-

ных служебных свойств. Он является выходным параметром сопряжения.

При решении задач, связанных с износом деталей, необходимо учитывать, что конструктивная схема сопряжения оказывает влияние на распределение износа по поверхности трения и на характер взаимодействия изношенных поверхностей.

Во многих случаях влияние конструктивных факторов на форму изношенной поверхности проявляется в большей степени, чем влияние закономерностей изнашивания материалов. При проектировании машин конструктор должен располагать методами расчета на износ различных сопряжений, характерных для данной машины, чтобы обосновать выбор той или иной конструкции. На рис. 7 приведена классификация сопряжений по условиям их изнашивания. В зависимости от характера возможного сближения деталей при износе их поверхностей все сопряжения подразделяют на два типа. У сопряжений типа I имеются дополнительные неизнашивающиеся и малоизнашивающиеся направляющие, которые обеспечивают сближение деталей при износе только в заданном направлении $x-x$. В сопряжениях типа II происходит самоустановка изношенных деталей, а их взаимное положение зависит от формы изношенной поверхности. В таких сопряжениях износ обычно более сильно сказывается на функциональных свойствах пары.

Кроме того, в классификации все сопряжения разделены на пять групп в зависимости от постоянства условий трения и износа для расположенных на одной траектории точек сопряженных поверхностей.

У сопряжений 1-й группы точки, расположенные на одной траектории, имеют одинаковые условия изнашивания для каждого из тел. Поэтому их износ будет одинаков, и для определения формы изношенной поверхности достаточно рассмотреть осевое сечение.

Ко 2-й группе относят сопряжения, у которых сохраняются постоянными условия изнашивания для всех точек, лежащих на данной траектории, для одного тела. Поэтому только одна поверхность имеет условия для равномерного изнашивания в данном сечении.

У сопряжений 3-й и 4-й групп условия изнашивания не сохраняются постоянными для всех точек обоих тел. Следовательно, здесь имеются большие возможности для возникновения неравномерного износа поверхностей. К 3-й группе отнесены сопряжения с низшими парами, к 4-й — с высшими парами.

К 5-й группе относят сопряжения, когда поверхность детали контактирует с твердой средой — почвой, породой, обрабатываемой деталью. В этом случае изучается износ лишь одной поверхности, которую обтекает абразивная или иная среда, от характера взаимодействия с которой (эпюры нагрузок и скоростей) будет зависеть форма изношенной поверхности.

Разработанные методы расчета на износ сопряжений различных типов позволяют определить форму изношенной поверхности и износ сопряжений в зависимости от применяемых материалов, условий изнашивания и режимов работы узла трения [6].

В качестве примера на рис. 8 приведена расчетная схема для определения износа направляющих скольжения при условии, что износ материалов подчиняется зависимости (20); при $m = 1$ уравнение эпюры давлений $p = f(l)$ известно, а ползун (суппорт) совершает по направляющим перемещения различной длины, которые характеризуются законом распределения $y = \varphi(x)$.

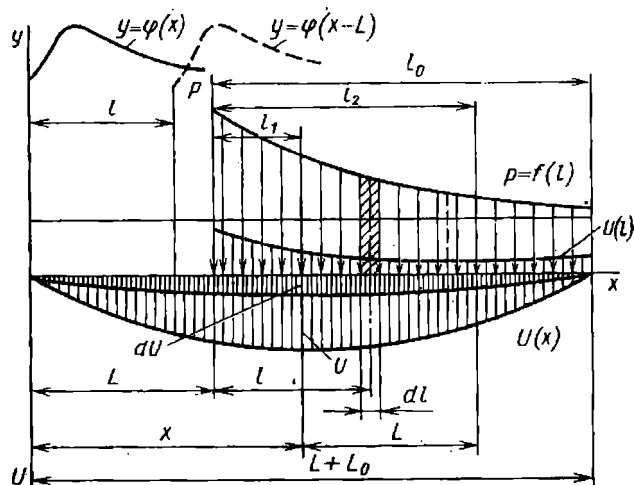


Рис. 8. Расчетная схема для определения износа направляющих скольжения

На рисунке приняты следующие обозначения: $U(x)$ — искомая величина линейного износа направляющих станины (U_1) по длине x при $0 \leq x \leq (L + l_0)$; $U(l)$ — искомая величина линейного износа направляющих стола (суппорта) (U_2) по длине l при $0 \leq l \leq l_0$; L — максимальный ход стола; l_0 — длина направляющих стола; $p = f(l)$ — уравнение эпюры давлений; $y = \varphi(x)$ — кривая распределения общего пути трения (кривая условно отнесена к левой точке стола).

Форма изношенной поверхности направляющих определяется в этом случае в виде

$$U(x) = ks \int_{l_1}^{l_2} \varphi(x-l) f(l) dl, \quad (22)$$

где s — путь трения, который проходит каждая точка направляющих стола за рассматриваемый промежуток времени; k — коэффициент износа.

Данная формула является общей для различных случаев. При этом пределы интегрирования определяются в зависимости от того, какой участок эпюры давлений воздействует на данную точку станины с координатой x (табл. 6).

В формуле (22) учтено влияние основных факторов на форму изношенной поверхности направляющих; k отражает износостойкость материалов и условия изнашивания; s — интенсивность работы машины во времени; $p = f(l)$ отражает конструкцию суп-

6. Пределы интегрирования при расчете износа по формуле

$\frac{L}{l_0}$	Уча- сток	Пределы участка	Пределы интегри- рования	
			l_1	l_2
>1	I	$0 \leq x \leq l_0$	0	x
	II	$l_0 \leq x \leq L$	0	l_0
	III	$L \leq x \leq L + l_0$	$x - L$	l_0
<1	I	$0 \leq x \leq L$	0	x
	II	$L \leq x \leq l_0$	$x - L$	x
	III	$l_0 \leq x \leq l_0 + L$	$x - L$	l_0

порта (стола), т. е. расположение сил (характер эпюры давлений), и величины действующих сил; $\varphi(x)$ характеризует процесс работы машины, например, технологические процессы обработки, осуществляемые на универсальном станке.

Пользуясь полученной формулой, можно проанализировать влияние отдельных факторов на величину и характер $U(x)$ и в каждом конкретном случае указать наиболее эффективные пути для уменьшения величины износа и получения более равномерной формы изношенной поверхности, которая непосредственно связана с точностью работы, виброустойчивостью конструкции и возможностью компенсации износа.

Для расчета надежности машины необходимо установить значения, до которых можно допускать износ отдельных деталей и сопряжений, т. е. установить их предельные износы.

Можно выделить три группы критериев предельного износа:

1) в результате износа машина не может больше работать (происходит поломка детали, заклинивание механизма или невыполнение им своих функций);

2) износ приводит к попаданию машины и узлов в зону интенсивного выхода их из строя (возникают удары, интенсивный износ поверхностей, вибрации машины, повышается температура узлов);

3) в результате износа характеристики машины выходят за допустимые

или рекомендуемые пределы (ухудшается качество продукции, понижается производительность, снижается КПД, увеличивается шум).

Критерии предельного износа в одних случаях связаны только с работой данного сопряжения или детали, в других — с работой нескольких деталей механизма или узла.

Для машины в целом наиболее характерен отказ, связанный с выходом ее параметров за допустимые пределы. В этом случае необходимо установить зависимость между износом отдельных сопряжений и изменением выходных параметров машины.

Например, при износе направляющих тяжелых продольно-фрезерных и продольно-строгальных станков наибольший износ U_{\max} связан с возникающей погрешностью обработки поверхности Δ зависимостью [6]

$$U_{\max} = \Delta \left(\frac{L_0}{L} \right)^2, \quad (23)$$

где L_0 — длина направляющих и L — длина обрабатываемой на станке поверхности.

Для расчета и прогнозирования надежности механических систем с учетом износа отдельных сопряжений и механизмов необходимо осуществить следующее:

рассчитать износ сопряжения с данными конструктивными особенностями, т. е. рассмотреть макрокартину процесса изнашивания;

оценить влияние износа сопряжений на выходные параметры машины;

учесть вероятностную природу всех явлений и действующих факторов;

разработать модель параметрического отказа для расчета показателей надежности машины при ее износе.

На рис. 9 схематично показаны этапы прогнозирования параметрической надежности изделия при износе его элементов с использованием в качестве входных данных расчетных или полученных на основе специально проведенных испытаний для оценки начальных параметров изделия [7].

В качестве примера показано влияние износа направляющих, который рассчитывается по формуле (22), на изменение траектории Δ , оценивающей точность функционирования машины.

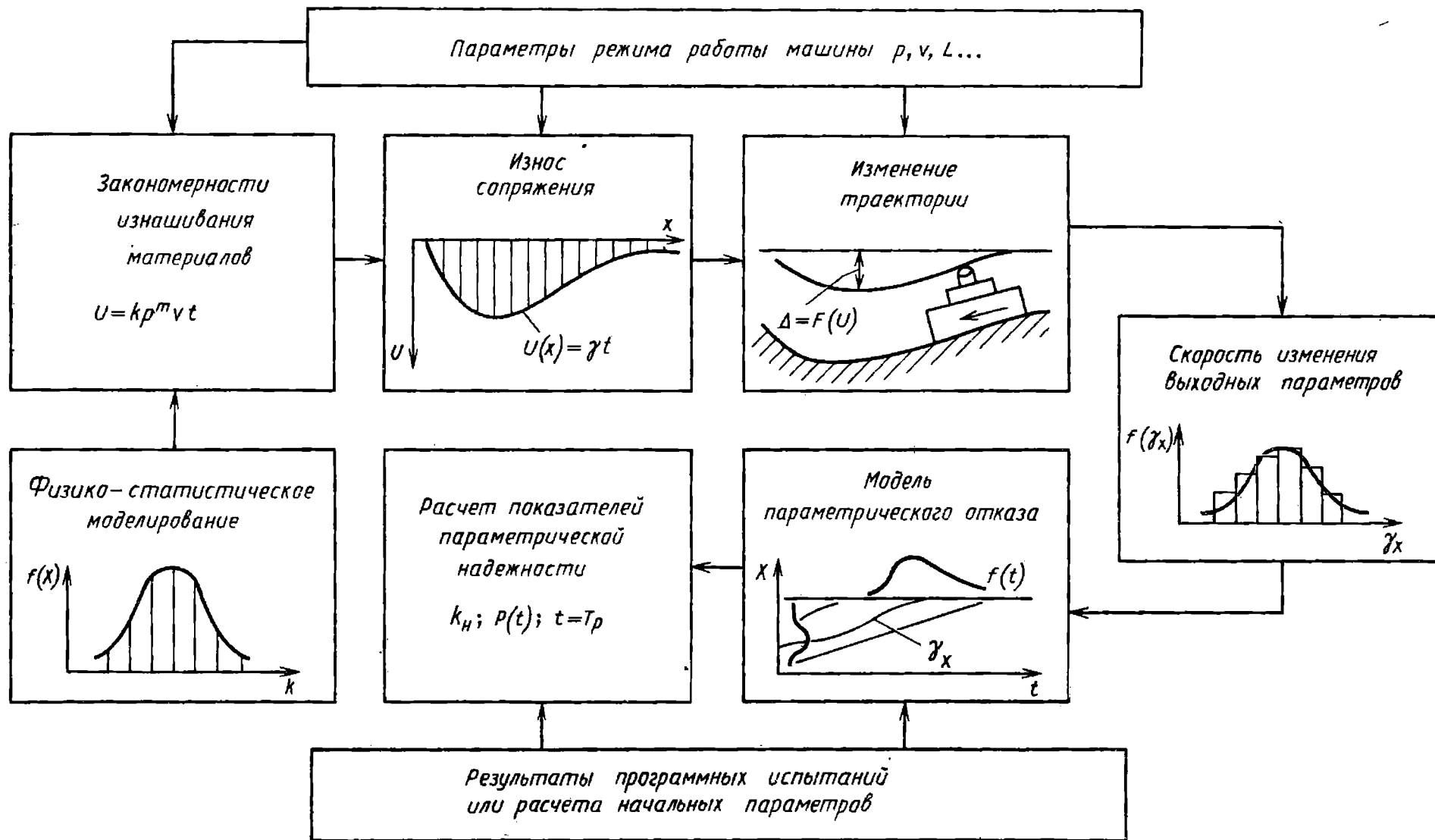


Рис. 9. Этапы прогнозирования параметрической надежности изделий при износе

Многokратные расчеты данного параметра при различных входных данных, т. е. моделирование процесса эксплуатации машины, например, с использованием метода Монте-Карло, позволяют получить закон распределения скоростей γ_x изменения выходного параметра $X = \Delta$. Применение модели параметрического отказа (см. рис. 2) дает возможность рассчитать показатели надежности по каждому выходному параметру изделия.

Большинство изделий машиностроения являются сложными системами, состоящими из отдельных узлов, деталей, агрегатов, систем управления и т. п. Специфика механических систем заключается в том, что метод структурного резервирования здесь сравнительно редко применяется в чистом виде.

Создание запасов прочности, износостойкости (например, за счет увеличения площади опорных поверхностей), жесткости, виброустойчивости, теплостойкости приводит к тому, что повышается запас надежности, поскольку область состояний изделий удаляется от предельных значений параметра. Для механических систем наиболее характерен случай, когда при расчете надежности нельзя считать отдельные элементы независимыми и применять теорему умножения.

Для оценки надежности необходимо рассматривать весь механизм или узел в целом и оценивать процесс изменения выходного параметра, как это было изложено выше. Разбивать сложную систему на независимые элементы можно для механических систем и машин в следующих основных случаях:

1) при рассмотрении больших систем, состоящих из отдельных машин, агрегатов, подсистем, которые могут функционировать самостоятельно (например, технологические комплексы);

2) при рассмотрении нескольких независимых выходных параметров изделия;

3) при анализе надежности систем, состоящих из отдельных агрегатов, особенно в тех случаях, когда их принцип работы и особенность функционирования представляют самостоятельную конструктивную единицу (узлы гидросистем, двигатели и агрегаты самолета, целевые узлы станков —

коробка скоростей, механизм загрузки и др.). Все перечисленные случаи условны, и требуется предварительный анализ для решения вопроса о возможности расчленения изделия на независимые элементы или подсистемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баронс П. П., Звиедрис А. В., Салиниекс Н. К. Надежность и качество механических систем. Рига: Авото, 1982. 86 с.

2. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 280 с.

3. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524 с.

4. Кордонский Х. Б., Фридман Я. Ф. Некоторые вопросы вероятностного описания усталостной долговечности// Заводская лаборатория. 1976. № 7. С. 825—847.

5. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.

6. Проников А. С. Надежность машин. М.: Машиностроение, 1978. 592 с.

7. Проников А. С. Программный метод испытания металлорежущих станков. М.: Машиностроение, 1985. 288 с.

8. Проников А. С. Программный метод испытания технологического оборудования по параметрам качества и надежности//Вестник машиностроения. 1984. № 3. С. 51—56.

9. Проников А. С., Бугаков А. В. Вероятностная оценка скоростей изнашивания на основе физико-статистического моделирования//Трение и износ. 1983. № 1. С. 26—33.

10. Стрельников В. П. Модели отказов механических объектов//Киев: Знание, 1982. 20 с.

11. Стрельников В. П., Таций В. Г. Приложение теории процессов Маркова к исследованию механического износа//Прикладная механика. 1977. Т. XIII, № 3. С. 63—69.

12. Трение, изнашивание, смазка: Справочник. М.: Машиностроение. Кн. 1, 1978. 400 с.; кн. 2, 1979. 358 с.

13. Шор Н. Б., Кузьмин Р. И. Таблицы для анализа и контроля надежности. М.: Сов. радио, 1968. 284 с.

Глава 7. Обеспечение надежности радиоэлектронных систем

1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ (РЭС) ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Количественные методы анализа надежности создаваемых систем на ранних этапах проектирования позволяют выбрать оптимальную структуру построения системы, определить требования к надежности комплектующих элементов, сформировать принципы оптимальных режимов их использования, определить оптимальную стратегию эксплуатации и обслуживания системы [1, 3, 4, 5].

Наряду с количественными (вероятностными) требованиями и методами их оценки и контроля широко используют детерминированные количественные и (или) качественные требования инженерного характера, которыми разработчики обычно руководствуются в своей практической деятельности.

Опыт разработок сложных систем дает возможность сформулировать ряд общих конструктивных требований, норм надежности, выполнение которых на ранних стадиях проектирования позволяет гарантировать определенный, хотя и не всегда измеримый количественно уровень надежности будущей системы. Как правило, такие требования носят детерминированный характер и базируются на оценке конкретных физических свойств материалов и КЭ, из которых строится система схемных решений, конструкции, общих характеристик и параметров функционирования, в том числе запасов работоспособности, режимов использования и других технических мер и средств, обеспечивающих надежность аппаратуры. Кроме того,

к нормам обеспечения надежности следует отнести и требования организационно-технического характера, регламентирующие обязательный порядок проведения работ по стадиям создания изделия, контроль и отчетность.

Выбор надежной элементной базы. Особо важное место в проблеме обеспечения надежности РЭС занимают вопросы правильного выбора элементной базы, обоснования оптимальных требований к ее надежности.

Выбор комплектующих электрорадиоизделий (ЭРИ) должен проводиться с учетом эксплуатационных условий работы системы. Кроме приемлемости по своим функциональным характеристикам, КЭ должны иметь и необходимую механическую, тепловую и электрическую прочность, обладать высокой безотказностью и долговечностью.

Необходимо стремиться использовать отработанные ЭРИ, высокое качество и надежность которых с большой достоверностью подтверждены практической эксплуатацией их в условиях, близких к эксплуатационным условиям проектируемой РЭА.

Одним из важнейших факторов обеспечения надежности РЭА является проведение систематического анализа качества и надежности ЭРИ с целью подготовки ограничительных перечней элементов для данной разработки, наиболее полно отвечающих не только требованиям необходимой функциональной полноты, обеспечивающей реализацию всех функций и режимов работы системы, но и обладающих требуемыми характеристиками качества и надежности. При этом необходимо стремиться к максимальному снижению разнообразия типов и номиналов применяемых элементов, что позволяет

более эффективно осуществлять контроль качества и оперативно управлять этим процессом. Режимы применения указанных в перечнях комплектующих ЭРИ должны строго соответствовать требованиям технических условий на них.

Надежность ЭРИ зависит не только от качества их разработки и изготовления, но и от условий (режимов) использования их в аппаратуре (в основном электрических и тепловых). Кроме того, на РЭА могут воздействовать и другие факторы: влажность, давление, вибрация, удары, вакуум и др. Номенклатура и уровни воздействующих факторов зависят от назначения РЭА и ее конструктивного исполнения.

Режим электрической нагрузки обычно характеризуется коэффициентом нагрузки K_p , определяющим запас по определенному параметру ЭРИ для реального режима по сравнению с номинальным по ТУ.

Для большинства комплектующих ЭРИ существует явно выраженная зависимость их надежности от величины K_p [5]. Поэтому требование использования ЭРИ в облегченных режимах (с $K_p < 1$) является конструктивным и широко используется разработчиками РЭА как одна из важнейших норм проектного обеспечения надежности РЭС. Однако не во всех случаях и не для всех элементов уменьшение K_p приводит к росту надежности. Ряд элементов критичен к снижению K_p , и его уменьшение ниже определенного уровня может привести не к повышению надежности, а к ее снижению.

Значительное снижение K_p непосредственно связано с увеличением числа комплектующих ЭРИ для реализации заданной функциональной схемы или устройства, которое, в свою очередь, приводит к увеличению габаритов и массы аппаратуры, потребляемой мощности.

Одним из важнейших факторов, существенно влияющим на надежность ЭРИ, является тепловой режим работы аппаратуры. Повышение температуры приводит к ускоренному окислению проводников, ухудшению изоляционных свойств диэлектриков,

нарушению герметичности спаев, ускорению различного рода коррозионных процессов, процессов старения материалов и др.

Основным источником теплоты являются сами ЭРИ. Поэтому при конструировании аппаратуры следует принимать такие конструктивные меры, которые обеспечивают работу ЭРИ в температурных режимах, близких к нормальным условиям.

Выбор надежных схемно-конструктивных решений. Постоянное увеличение сложности проектируемых РЭС при сохранении и даже повышении предельно жестких требований к ее надежности не позволяет обеспечить высокую надежность только за счет правильного выбора надежной элементной базы. Дальнейшее повышение надежности обеспечивается на этапе схемно-технического проектирования и конструирования. Основными факторами обеспечения надежности на этом этапе являются: выбор надежных схемно-конструктивных решений; введение различных видов избыточности; обеспечение определенных запасов работоспособности.

Критериями правильности выбора схемно-конструктивных решений и обоснования необходимости и достаточности используемых видов избыточности и запасов работоспособности на данном этапе являются количественные требования в виде вероятностных показателей надежности на отдельные блоки, приборы и систему в целом, а также количественные и качественные требования детерминированного характера, представляющие собой совокупность норм, приемов и правил, реализация которых способствует правильному решению вопросов обеспечения надежности на данном этапе проектирования.

2. ОСОБЕННОСТИ ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ ЦИФРОВОЙ АППАРАТУРЫ

При обеспечении надежности цифровой аппаратуры необходимо учитывать ряд особенностей этого класса РЭА. К ним прежде всего относят: дискретный характер работы всех элементов; наличие двух видов неискравностей;

использование программного управления.

Дискретный характер работы цифровой аппаратуры определяется дискретностью входных, внутренних и выходных сигналов.

Для цифровой аппаратуры и ЭВМ характерны два вида неисправностей — отказы и сбои. Сбои в цифровой аппаратуре объясняются тем, что использование микроэлектроники связано со значительным уменьшением действующих в схемах сигналов в виде уровней напряжений и токов, снижением порогов срабатывания логических элементов, а резкое повышение плотности компоновки цифровой аппаратуры на ИМС увеличило число и интенсивность взаимных паразитных связей и наводок.

Кроме того, причинами сбоев могут быть факторы, связанные с неправильным выбором рабочей точки устройства и допусков, старение комплектующих элементов, изменение электрических режимов под действием внешних факторов, флюктуации напряжения питающей сети, нарушения контактов в различных цепях устройства и др.

Последствием сбоя является искажение информации или нарушение вычислительного процесса, которые в конечном счете приводят к нарушению правильного функционирования цифрового устройства или вычислительной машины в целом, что эквивалентно отказу.

Поскольку сбой вызывается воздействием на схему ряда независимых факторов случайного характера, то и поток сбоев будет иметь стохастический характер.

Для случая, когда рабочая точка устройства находится далеко от границы области работоспособности, поток сбоев близок к простейшему, а вероятность их появления описывается экспоненциальным законом [2]. В этом случае вероятность отсутствия сбоя в логическом элементе за время t определяется как

$$P_{сб}(t) = e^{-\lambda_{сб}t},$$

где $\lambda_{сб}$ — интенсивность сбоя логического элемента.

Если устройство состоит из N логических элементов и возникновение сбоя в каждом логическом элементе является событием независимым, то вероятность бессбойной работы устройства за время t будет

$$P_{сб}(t) = e^{-\sum_{i=1}^N \lambda_{сбi}t} = e^{-\Lambda_{сб}t},$$

где $\sum_{i=1}^N \lambda_{сбi} = \Lambda_{сб}$ — интенсивность сбоя устройства.

Если рабочая точка находится вблизи границ области работоспособности устройства, то поток сбоев такого устройства уже не является простейшим. Вероятность появления сбоя в этом случае может быть описана законом Паскаля

$$P_{сб}(t) = \frac{1/\Lambda_{сб}}{1/\Lambda_{сб} + t} = \frac{1}{1 + \Lambda_{сб}t},$$

где $\Lambda_{сб}$ — среднее значение интенсивности сбоя устройства.

Надежность нерезервированной цифровой аппаратуры с учетом отказов и сбоев в предположении, что поток сбоев является простейшим, а само появление сбоя эквивалентно отказу аппаратуры, может быть определена как

$$P(t) = e^{-t(\Lambda_{отк} + \Lambda_{сб})} \quad (1)$$

Оценка надежности с учетом сбоев в соответствии с (1) является довольно приближенной, так как не учитывает структуру цифровой аппаратуры и возможные входные наборы. Это объясняется тем, что воздействие сбоя продолжается очень короткий промежуток времени, который обычно сравним с длительностью такта машины, и может оказаться, что при данных входных наборах и конкретной структуре построения устройства сбои в отдельных элементах не окажут влияния на выходной результат. Поэтому для более точных оценок надежности необходимо учитывать фильтрующие в отношении сбоев свойства конкретной структуры цифрового устройства и системы или использовать оценку $\Lambda_{сб}$, полученную эксперимен-

тально для цифрового устройства в целом в процессе реальной эксплуатации.

Конструктивными методами решения проблемы устранения сбоев являются:

применение серий логических элементов, обладающих повышенной помехоустойчивостью;

применение тщательной экранировки устройств, чувствительных к помехам;

специальная компоновка и соблюдение правил монтажа слаботочных и силовых цепей устройств;

установка развязывающих и подавляющих фильтров по цепям питания;

использование гальванических развязанных цепей с симметричными входами и выходами;

использование линий связи, нечувствительных к внешним наводкам.

Наряду с техническими методами, направленными на снижение интенсивности сбоев в цифровой аппаратуре, важное значение имеют методы проектирования цифровой аппаратуры и систем, нечувствительных к сбоям, т. е. такой аппаратуры, которая способна автоматически парировать последствия возникающих в ней сбоев. К таким методам относят методы проектирования аппаратуры с введением специальных видов избыточности и контроля.

По характеру парирования сбоев все методы можно разделить на две группы: 1) методы маскирования сбоев; 2) методы выявления и исключения последствий сбоев.

Методы маскирования сбоев обеспечивают автоматическое исключение последствий сбоев без прерывания процесса функционирования системы [7]. Таким свойством обладают избыточные структуры, построенные по принципу мажоритарного резервирования или учетверенной логики.

Вторая группа методов парирования сбоев предполагает разработку структуры и алгоритмов функционирования избыточной системы таким образом, чтобы обеспечивался контроль работоспособности устройств системы, оперативное выявление факта сбоя и последующая нейтрализация его последствий с помощью дополнительных аппаратурных или программных средств [7].

По принципу используемых средств контроль бывает аппаратным и программным [7, 11].

Аппаратный контроль осуществляют с помощью специальной контрольной аппаратуры, вводимой в структуру цифровой аппаратуры или ЭЦВМ. Аппаратный контроль позволяет в отличие от программных видов контроля определить место отказа или сбоя именно в момент его возникновения, что важно с точки зрения возможности оперативного устранения последствий отказа или сбоя.

Контроль по модулю применяется наиболее широко. Эффективность данного метода растет с увеличением количества модулей в аппаратуре, однако при этом возрастает количество дополнительного контрольного оборудования, что существенно сказывается на надежности аппаратуры контроля, а значит, и на надежности системы в целом. Так, для организации контроля трех модулей процессора требуется ~15% дополнительного оборудования, пяти модулей — в 2 раза больше, семи модулей — в 3,5 раза больше. Контроль по модулю обнаруживает как сбои, так и отказы.

Существенными недостатками метода являются:

трудность применения метода к устройствам ЦВМ, не имеющих регистров (устройство управления и другие последовательные устройства ЦВМ);

усложнение обнаружения неисправностей как в контролируемом устройстве, так и в самой контролирующей схеме;

резкое увеличение количества дополнительного оборудования с ростом глубины контроля.

Кодовый контроль. Его эффективность определяется информационной избыточностью, т. е. дополнительными разрядами двоичной информации, которые вводятся в исходную с целью обнаружения или (и) исправления ошибок. Затраты дополнительного оборудования примерно соответствуют рассмотренному методу контроля по модулю.

Однако при использовании кодового контроля невозможно осуществить сквозной оперативный контроль всей

ЦВМ из-за того, что информационная избыточность может быть использована не во всех устройствах ЦВМ. Кроме того, с ростом глубины контроля усложняется схема контроля и увеличивается дополнительное оборудование. Наиболее распространенным методом использования указанного вида контроля являются цепи и устройства передачи информации,

Аппаратный контроль из двух или трех однотипных ЦВМ применяют как при решении вычислительных задач, так и при использовании ЦВМ в автоматизированных системах управления.

Сравнение информации в таких системах может осуществляться на различных уровнях: канал, блок, устройство и т. д. Выбранный уровень сравнения определяет глубину контроля и, соответственно, степень локализации места отказа или сбоя. Ограничением при выборе уровня сравнения является наличие регистров в данном устройстве.

Основные недостатки аппаратного контроля данного вида: большое количество дополнительного оборудования (одна или две ЦВМ); ограниченная глубина контроля; недостаточно эффективное использование избыточного оборудования.

Программный контроль включает в себя программно-логический и тестовый контроль.

Программно-логический контроль базируется на использовании программной и временной избыточности, позволяющей путем повторения операций переработки или пересылки информации и последующего их сравнения обнаруживать наличие сбоя в контролируемом устройстве.

Тестовый контроль осуществляют с помощью специально подготовленных и заложенных в программное обеспечение тестовых программ. Для его использования также требуется временная избыточность.

Введение контроля в цифровую аппаратуру сопровождается обязательной платой. Это может быть увеличение дополнительного оборудования, или (и) увеличение непроизводительных затрат машинного времени.

Не все виды контроля в одинаковой мере влияют на показатели надежности цифровой аппаратуры.

Так, программные методы контроля улучшают готовность и достоверность, не изменяя при этом, как правило, безотказность системы. Аппаратный контроль, как правило, улучшает достоверность, но ухудшает безотказность системы вследствие введения дополнительного оборудования. Для аппаратного контроля с дублированием и троированием каналов улучшается достоверность, безотказность, а в отдельных случаях и готовность.

3. НАДЕЖНОСТЬ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Проблема надежности программного обеспечения (ПО) приобретает все большее значение в связи с постоянным усложнением разрабатываемых систем, расширением круга задач, возлагаемых на них, а следовательно, и значительным увеличением объемов и сложности ПО.

Реальная надежность ПО нередко оказывается ниже, чем надежность самой аппаратуры.

Под ПО понимают совокупность программ и документов на них для реализации целей и задач ЦВМ.

Производство программ регламентируется Единой системой программной документации — ЕСПД, представляющей собой комплекс государственных стандартов, устанавливающих общие положения, виды программ и программных документов, правила разработки, оформления и обращения программ и программной документации.

Ненадежность программного обеспечения обуславливается наличием в программах разного рода ошибок, внесенных в нее, как правило, при разработке или в процессе эксплуатации.

Под ошибкой понимают всякое невыполнение программой функций, которые заданы в ТЗ на разработку ПО или вытекают непосредственно из инструкции пользователю. Проявление ошибки является отказом программы. Программа при фиксированных исходных данных и абсолютно надежной

аппаратуре должна давать однозначный результат на выходе при многократном его повторении. Однако комбинаторный характер исходных данных, множество условных переходов, зависящих от промежуточных результатов вычислений, создают огромное число возможных путей исполнения программы, которое может быть на несколько порядков больше числа команд в программе. Проверить все варианты исполнения программы практически невозможно, и практика создания сложных комплексов программного обеспечения показывает, что и после нескольких лет эксплуатации встречаются непроверенные варианты, в которых вдруг обнаруживаются ошибки.

Вследствие изложенного проявление ошибки в ПО, т. е. отказ ПО, является случайным событием, хотя сама ошибка не является случайной.

Факторы, определяющие надежность ПО. Главную роль в создании надежного ПО играют правильная организация и управление процессом разработки:

подготовка инженерного и руководящего персонала по технологии использования вычислительных машин;

контроль выдачи и изменений программ;

постоянная связь между разработчиком и заказчиком ПО;

применение эффективных методов контроля процесса разработки программ и документации;

внедрение стандартов, регламентирующих работы по проектированию ПО.

Важную роль в повышении качества и надежности разрабатываемого ПО играет *постоянный контроль* в виде достаточно формализованных «просмотров» проектной и программной документации специальной группой экспертов, в которую включаются: специалисты по проектированию и программированию; специалисты по отладке и испытаниям ПО; специалисты по компоновке программ; представители заказчика.

Повышению качества разработки сложных программ способствуют прогрессивные приемы структурного про-

граммирования и принцип модульности ПО.

В основу *структурного программирования* положены достаточно простые положения:

программа должна состояться мелкими шагами;

сложная задача должна разбиваться на достаточно простые, легко воспринимаемые части, каждая из которых имеет только один вход и выход;

логика программы должна опираться на минимальное число достаточно простых базовых управляющих структур.

Принцип модульности заключается в разбиении сложной программы на отдельные подпрограммы — модули, характеризующиеся функциональной законченностью, автономностью и независимостью в разработке и оформлении. Рекомендуется объем модулей в 100–500 команд. Запрет на применение потенциально ненадежных программных конструкций, возможность оперативного автономного контроля результатов функционирования модуля обеспечивают высокую вероятность исключения ошибок на самых ранних этапах разработки ПО.

Для создания надежного ПО используют также *принцип структурирования массивов данных*, что позволяет снизить вероятность появления ошибок из-за их неправильного использования.

Отладка и испытания ПО. Исходя из задач и применяемых методов для выявления ошибок, процесс отладки можно разделить на три этапа:

1) структурный контроль соответствия ПО формализованным требованиям;

2) отладка ПО методами детерминированного тестирования;

3) отладка ПО методами статистического тестирования.

Структурный контроль соответствия ПО формализованным требованиям применяют на нижних уровнях иерархической структуры ПО — модулях, подпрограммах, отдельных блоках программы. Формализованные требования содержат правила структурного, синтаксического и семантического построения программы, выполнение которых обязательно для всех ее составных частей.

Детерминированное тестирование предусматривает задание конкретных исходных данных и маршрутов исполнения программы. Проверка всех маршрутов при всех значениях исходных данных может быть реализована только для очень простых программ и при малых диапазонах изменения исходных данных. Диапазон варьирования исходных данных и степень охвата возможных маршрутов определяют эффективность обнаружения ошибок данным методом.

Различают тестирование восходящее и нисходящее.

Восходящее тестирование начинается с автономного тестирования программных модулей самого нижнего уровня. После этого проводится тестирование модулей более высокого уровня, проверка которых требует обращения к уже оттестированным модулям. После проверки данного уровня совершается переход к модулям все более высокого уровня вплоть до программы в целом.

Недостатком данного метода тестирования является то, что для сложного ПО с многоуровневой иерархией выявление серьезных ошибок в спецификациях, алгоритмах и интерфейсах осуществляется только на завершающей стадии отладки ПО — стадии комплексного тестирования программ и ПО в целом.

При *нисходящем тестировании* автономно тестируется только головная программа, затем подсоединяются программы модулей и компоненты следующего уровня, и так до тех пор, пока не будет собрана и испытана вся программа.

Преимущество нисходящего тестирования заключается в том, что оно позволяет выявить ошибки и качественно их устранить.

Сложное ПО целесообразно подвергать *статистическому тестированию* для проверки комплекса программ в расширенных по сравнению с детерминированным подходом условиях функционирования и, соответственно, получения более достоверных данных о надежности ПО. Статистические проверки проводят комплексно с целью получения основных характеристик

программ и подтверждения их соответствия требованиям ТЗ, в том числе и по надежности.

4. ВЫБОР МЕТОДОВ ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ

Выбрать эффективный метод обеспечения надежности можно только тогда, когда известно, как изменяются количественные характеристики надежности при применении различных методов [5].

При экспоненциальном законе надежности все основные количественные характеристики и показатели надежности нерезервированной системы выражаются через интенсивность отказов λ , среднее время восстановления T_v и суммарное время t работы системы. Для резервированных систем надежность зависит также от способа и кратности m резервирования.

Все методы повышения надежности принципиально могут быть сведены к следующим основным:

- 1) резервированию;
- 2) уменьшению интенсивности отказов системы;
- 3) сокращению времени непрерывной работы;
- 4) уменьшению среднего времени восстановления.

Указанные методы реализуются по стадиям создания и применения системы.

Уменьшить интенсивность отказов системы можно многими способами, основными из которых являются:

выбор более надежного опорного варианта системы при проектировании;

упрощение системы;
выбор наиболее надежных элементов и материалов;

облегчение электрических, механических, тепловых и других режимов работы элементов или введение запасов работоспособности;

тщательная экспериментальная отработка и испытания;

тренировка элементов и системы;
создание схем с ограниченными последствиями отказов элементов;

создание контролепригодных и восстанавливаемых систем;

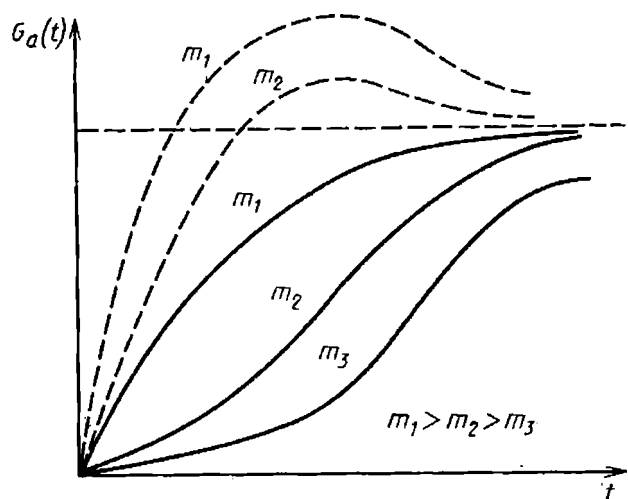


Рис. 1. Зависимость $G_Q(t)$ для различных способов резервирования:

— — резервирование с дробной кратностью; — резервирование с целой кратностью

стандартизация и унификация элементов и узлов;

совершенствование технологии производства, разработка упрощающих технологий;

автоматизация проектирования, производства, испытаний;

статистический контроль качества продукции;

проведение профилактических мероприятий при эксплуатации аппаратуры, направленных на предупреждение отказов;

обучение персонала.

Большая часть этих способов реализуется при проектировании, остальные — при производстве и эксплуатации.

Эффективность этих способов состоит в том, что они позволяют получать варианты системы, обладающие высокой надежностью, реализовать наиболее эффективные мероприятия на всей совокупности будущих изделий с минимальными затратами ресурсов. На последующих стадиях работ можно повысить надежность по мере выявления и устранения недостатков путем осуществления мероприятий, связанных с большими материальными затратами, что не всегда оправданно.

Для каждого конкретного изделия применяют не все из перечисленных способов, а наиболее эффективные из

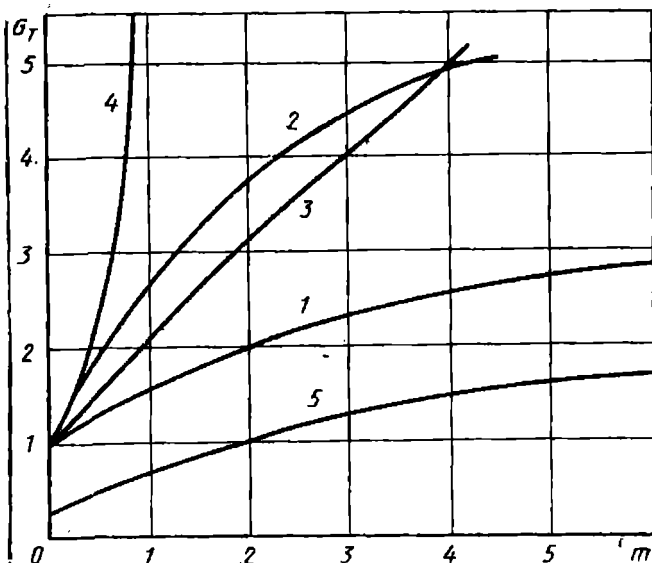


Рис. 2. Зависимость G_T от кратности резервирования m :

1 — общее постоянное резервирование; 2 — поэлементное постоянное; 3 — общее замещением; 4 — поэлементное замещением; 5 — с дробной кратностью

них в данных конкретных условиях.

Резервирование. Методы резервирования позволяют из элементов и материалов с ограниченной надежностью создавать надежные системы [1, 5, 6].

Выигрыш в надежности по вероятности отказов $G_Q(t)$ всегда начинается с нуля (рис. 1) и асимптотически стремится к единице независимо от надежности резервированной системы и ее элементов. При этом скорость роста $G_Q(t)$ тем выше, чем менее надежна основная система и чем ниже кратность резервирования. При нескольких резервировании с дробной кратностью величина $G_Q(t)$ может быть больше единицы, начиная с определенного значения времени непрерывной работы системы t .

Выигрыш в надежности резервированной аппаратуры тем выше, чем меньше время непрерывной работы резервированной системы.

Выигрыш в надежности по интенсивности отказов $G_A(t)$ качественно не отличается от $G_Q(t)$. Поэтому свойства резервированных систем, если их надежность оценивать интенсивностью

* Выигрыш по вероятности отказов определяется как отношение вероятности отказа нерезервированной системы к вероятности отказа резервированной.

отказов Λ , будут теми же, что и при оценке надежности с помощью вероятности отказов.

Среднее время безотказной работы при резервировании с дробной кратностью и нескользящем резерве может быть меньше, чем среднее время безотказной работы нерезервированной системы в том случае, если число резервных систем меньше числа основных. С ростом кратности резервирования выигрыш надежности G_T по среднему времени безотказной работы растет, причем скорость роста существенно убывает с повышением кратности резервирования (рис. 2). Это свойство также присуще общему и поэлементному резервированию с постоянно включенным резервом.

При резервировании замещением и идеальных переключателях выигрыш G_T растет с ростом кратности резервирования линейно при общем резервировании, а при отдельном (поэлементном) или скользящем — быстрее. Для схемной реализации резервирования замещением требуются переключатели, при этом существенно снижается скорость роста выигрыша G_T (m).

Резервирование системы приводит к снижению ее коэффициента готовности. Выигрыш надежности резервированной системы по K_r для всех значений t превышает единицу лишь при условии $T_0/T_c < \bar{T}_{в0}/T_{вс}$, где T_0 , $T_{в0}$ — соответственно среднее время безотказной работы и среднее время восстановления нерезервированной (основной) системы; T_c , $T_{вс}$ — соответственно среднее время безотказной работы и среднее время восстановления резервированной системы.

С ростом кратности резервирования среднее время безотказной работы T_c растет медленнее, чем растет сложность системы.

Поэтому $T_{вс}$ может увеличиться в большее число раз, чем увеличится T_c , и неравенство будет нарушено.

Эти соображения справедливы и для режима длительного хранения аппаратуры.

Таким образом, резервирование как средство повышения надежности дает наибольший эффект для сложных систем, непрерывно работающих корот-

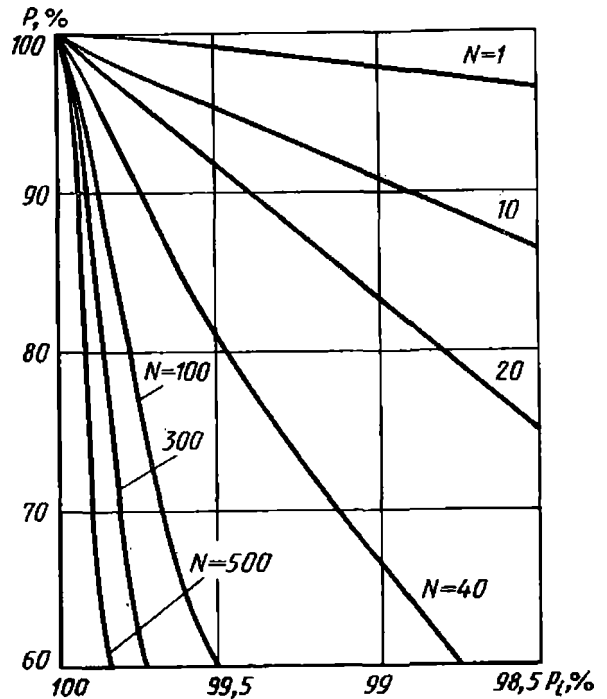


Рис. 3. Зависимости вероятности безотказной работы аппаратуры от числа элементов N и вероятности их безотказной работы

кое время. Повышение надежности путем резервирования достигается за счет ухудшения таких ее характеристик, как масса, габариты, энергопотребление, стоимость, усложнение условий эксплуатации (увеличение частоты проверок, ЗИП и т. п.).

Уменьшение интенсивности отказов системы. Уменьшение числа элементов в системе (уменьшение сложности системы) может существенно повысить ее надежность [5].

На рис. 3 приведены зависимости вероятности безотказной работы аппаратуры от числа элементов и вероятности их безотказной работы для случая экспоненциального закона надежности. Эффект от упрощения системы тем больше, чем ниже надежность элементов и чем сложнее система.

Однако значительное упрощение системы в большинстве случаев не позволяет обеспечить выполнение предъявляемых к ней технических требований по производительности, точности и быстродействию. Таким образом, упрощение системы является весьма эффективным, но достаточно трудно реализуемым методом повышения надежности.

Выбор наиболее надежных элементов. Эффект увеличения надежности системы за счет повышения надежности элементов тем выше, чем сложнее система. Однако стоимость более надежных элементов, как правило, больше. Может оказаться, что предъявляемые требования таковы, что при данном числе элементов и при данных условиях работы системы удовлетворить их можно, выбирая не самые надежные элементы.

Облегчение режимов работы элементов. Улучшить условия работы элементов можно, во-первых, уменьшая вредное влияние окружающей среды и внешних воздействий, и, во-вторых, облегчая режимы работы. Применительно к аппаратуре облегчение электрических режимов работы и температуры дает эффект, если элементы в аппаратуре работают в перегруженном или в близком к номинальному режиме. Зная принципиальную схему системы и зависимость интенсивности отказов от нагрузок для всех элементов системы, можно выбрать режим работы (или запасы работоспособности) такие, чтобы вероятность безотказной работы системы была максимальной или не ниже требуемой.

Если однотипные элементы равнонадежны и подчиняются экспоненциальному закону распределения, можно записать

$$\Lambda_c = \sum_{i=1}^r N_i \lambda_i = - \frac{\ln P_c(t)}{t}. \quad (2)$$

Надежность сложной системы, как правило, определяется ограниченным числом типов элементов: это либо наименее надежные, либо наиболее многочисленные элементы. Поэтому облегченные режимы следует применять в первую очередь для наименее надежных элементов. Пусть элементы типов $1 \div (k-1)$ или не оказывают существенного влияния на надежность, или обеспечение их режимов работы не представляется возможным. Тогда выражение (2) можно записать в виде

$$\Lambda_c = \Lambda_{c0} + \sum_{i=k}^r N_i \lambda_i. \quad (3)$$

$$\text{где } \Lambda_{c0} = \sum_{i=1}^{k-1} N_i \lambda_i.$$

Учитывая (2), выражение (3) можно записать в виде

$$\sum_{i=k}^r N_i \lambda_i = - \frac{\ln P_c(t)}{t} - \Lambda_{c0}. \quad (4)$$

При разработке принципиальной схемы наиболее важным является выбор t^0 и K_H элементов. Амплитуды и частоты вибраций, влажность и давление влияют не столько на выбор типов элементов, сколько на конструкцию узлов и устройств (амортизация, герметизация и т. п.).

Имея зависимость $\lambda_i = f(K_H, t^0)$, можно выбрать режимы работы элементов следующим образом. По выражению (4) на плоскости переменных λ_i и λ_j (где $j \neq i \geq k$) строится семейство прямых $\lambda_i = f(\lambda_j)$ для различных значений λ остальных элементов.

Имея зависимости интенсивностей отказов от K_H и t^0 , можно определить значения t^0 и K_H для выбранных λ .

Если хотя бы по одному значению λ , взятому из семейства прямых, не удовлетворяет ни одно из значений функции $\lambda = f(K_H, t^0)$, то это значит, что невозможно подобрать режимы работы, удовлетворяющие заданной надежности. В этом случае нужно подбирать либо другие элементы, либо использовать другие способы повышения надежности, например, резервирование.

Решение получается простым, если число типов элементов, режим работы которых выбирают, не превышает трех.

На практике наиболее часто встречается, когда $r - k > 3$. В этих случаях режимы работы удобно выбирать по средневзвешенным значениям λ для однотипных элементов. Методика выбора заключается в следующем.

1. Строят зависимости средневзвешенных значений интенсивностей отказов $\lambda_{вз}$ для однотипных элементов от коэффициента нагрузки K_H и температуры t^0 . Построение осуществляют по известной принципиальной

схеме и кривым $\lambda_i = f_i(K_H, t^0)$ с использованием формулы

$$\lambda_{вз} = \sum_{j=1}^r \frac{\lambda_j N_j}{N},$$

где r — число элементов данного типа, но различных номинальных данных; λ_j, N_j — интенсивность отказов и число j -х элементов; N — общее число элементов данного типа.

2. Определяют λ_i по семейству прямых, построенных по выражению (4). Определенные таким образом $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ будут средневзвешенными значениями интенсивности отказов элементов данного типа.

3. По кривым $\lambda_{вз} = f(K_H, t^0)$ определяют средние значения коэффициентов нагрузки и температуры элементов данного типа. Полученные значения K_H и t^0 можно выбрать при проектировании, а по кривым определить действительные значения интенсивностей отказов всех элементов.

Отбраковка мало надежных элементов. Интенсивность отказов системы на начальном участке ее работы обычно значительно выше, чем на участке нормальной работы. Это объясняется тем, что при изготовлении системы в нее могут попасть элементы с внутренними производственными дефектами, которые трудно выявить при обычных методах испытаний в течение сравнительно короткого времени работы системы.

Отбраковать ненадежные элементы можно путем тщательной проверки элементов при тяжелых условиях их работы. Утяжелять условия работы элементов наиболее удобно, увеличивая либо коэффициент нагрузки K_H , либо температуру окружающей среды. Выбрать режим выжигания потенциально ненадежных элементов можно на основании анализа кривых $\lambda = f(t)$. Эти кривые для большинства элементов, из которых состоит система, имеют вид такой, как показано на рис. 4. С увеличением K_H (или при увеличении t^0 окружающей среды) кривая $\lambda = f(t)$ смещается вверх и влево. При этом участок, где $\lambda = \text{const}$, сокращается, а начало этого участка смещается влево.

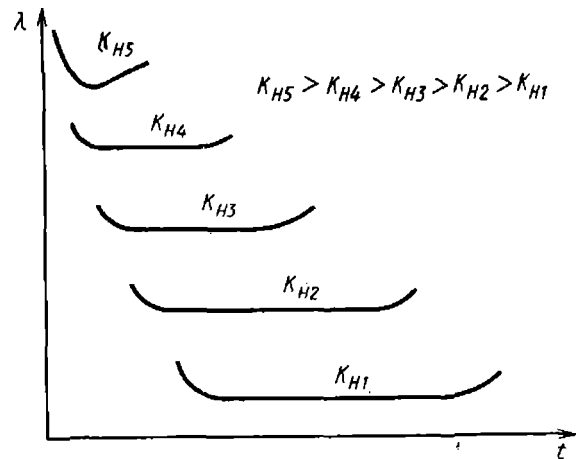


Рис. 4. Зависимость интенсивности отказов от времени при различных коэффициентах нагрузки

Включать элементы можно при таком режиме, при котором имеется участок $\lambda = \text{const}$. При установлении значений коэффициентов нагрузки и времени выжигания необходимо провести испытания элементов при различных коэффициентах нагрузки и на основании статистических данных об отказах построить кривые $\lambda = f(t)$.

Необходимо дополнительно проанализировать, как сохраняются основные параметры элементов при том или ином режиме выжигания. Если интенсивность отказов на основании статистических данных об отказах сохраняет постоянную величину, а параметры элемента «уходят» за допустимые пределы, то такой режим выжигания является вредным.

Создание схем с ограниченными последствиями отказов элементов. Отказы элементов сложной системы неравноценны. Одни отказы приводят к потере работоспособности, другие лишь ухудшают характеристики системы, третьи нарушают контроль человека за работой системы и т. п. Очевидно, что та часть системы, отказ которой приводит к тяжелым последствиям, должна быть более надежной, другие части — менее надежными.

Созданию высоконадежных систем способствуют методы логического и инженерного анализа отказов элементов и частей системы и их влияния на работоспособность и надежность системы в целом.

Стандартизация и унификация. Использование стандартизированных и унифицированных узлов и элементов упрощает построение систем высокой надежности, позволяет повышать контролепригодность систем, облегчает поиски и устранение неисправностей, удешевляет разработку, изготовление и эксплуатацию изделий.

Совершенствование технологии производства и его автоматизация обеспечивают высокую однородность продукции, повышают ее надежность и уменьшают дисперсию времени возникновения отказов. Большой эффект дает применение упрочняющих технологий, например, порошковая металлургия, перспективные методы обработки поверхности деталей, применение робототехники.

Однако насколько бы совершенны ни были технология производства и его автоматизация, возможны отклонения качества продукции вследствие ряда закономерных или случайных причин, нарушающих нормальное течение технологического процесса.

Профилактические мероприятия, проводимые при эксплуатации аппаратуры и направленные на предупреждение отказов, позволяют выявить слабые элементы и узлы, устранить их дефекты до появления полного отказа и тем самым уменьшить интенсивность отказов всей системы. В процессе эксплуатации надежность аппаратуры расходуется. При проведении профилактических мероприятий она может частично или полностью восстанавливаться.

Оценим эффективность, которую дают способы, обеспечивающие уменьшение интенсивности отказов системы. Как обычно, оценка дается по выигрышу в надежности. Вероятность безотказной работы системы, интенсивность отказов которой уменьшена в K раз при экспоненциальном законе надежности, может быть выражена формулой

$$P_c(t) = \exp(-\Lambda_0/K)t,$$

где Λ_0 — интенсивность отказов системы до ее повышения; K — коэффициент, показывающий, во сколько раз уменьшена интенсивность отказов системы.

Тогда выигрыш в надежности по основным количественным характеристикам можно представить следующими выражениями:

по вероятности отказов

$$G_Q(t) = \frac{1 - \exp(-\Lambda_0/K)t}{1 - \exp(-\Lambda_0 t)}; \quad (5)$$

по среднему времени безотказной работы $G_T = K$;

по частоте отказов

$$G_a(t) = \frac{1}{K} \exp \Lambda \left(\frac{K-1}{K} \right) t;$$

по интенсивности отказов $G_\Lambda(t) = 1/K$.

Зависимости $G_Q(t) = f(\Lambda_0 t)$ для различных значений K , рассчитанные по (5), приведены на рис. 5. Из (5) и рис. 5 следует, что при малых $\Lambda_0 t$ выигрыш по вероятности отказов равен примерно $1/K$, а при больших $\Lambda_0 t$ стремится к единице (т. е. выигрыш исчезает).

Выигрыш в надежности по среднему времени безотказной работы растет прямо пропорционально K и не зависит от величины $\Lambda_0 t$, выигрыш по интенсивности отказов обратно пропорционален K .

Недостатком способа снижения интенсивности отказов по сравнению со способом повышения надежности путем резервирования является незначительный выигрыш надежности по интенсивности и вероятности отказов при малых значениях $\Lambda_0 t$.

Сокращение времени непрерывной работы аппаратуры достигается ее многократным включением и выключением (в тех случаях, когда это допускается логикой функционирования системы). Это позволяет разумно расходовать надежность изделий.

Однако при частом включении и выключении переходные процессы могут оказывать настолько сильное вредное влияние, что дискретная работа системы станет нецелесообразной.

Вероятности безотказной работы $P_1(t)$ и $P_2(t)$ двух идентичных систем, одна из которых работает непрерывно, а вторая — с перерывами в работе, так

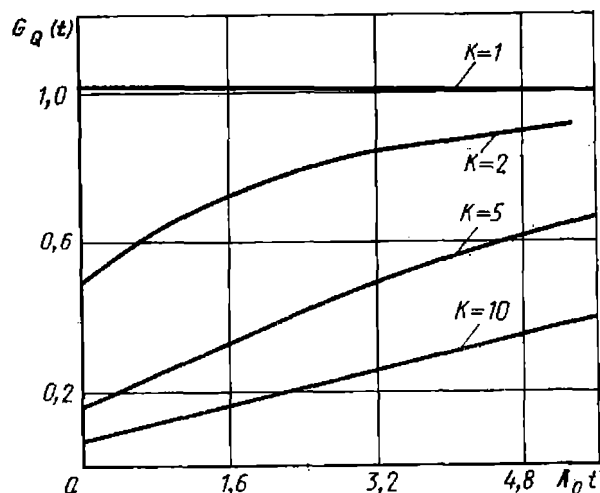


Рис. 5. Зависимость G_Q от интенсивности отказов системы

что время ее функционирования в K раз меньше, будут:

$$P_1(t) = \exp(-\Lambda_0 t);$$

$$P_2(t) = \exp(-\Lambda_0 t/K).$$

Тогда выигрыш надежности по вероятности отказа

$$G_Q = [1 - \exp(-\Lambda_0 t/K)] - [1 - \exp(-\Lambda_0 t)]. \quad (6)$$

Сравнивая (6) и (5), видим, что сокращение времени функционирования эквивалентно уменьшению интенсивности отказов системы. Наибольший эффект дает этот метод применительно к резервированным системам (рис. 6).

Уменьшение времени восстановления не влияет на основные количественные характеристики надежности. Оно позволяет повысить коэффициент готовности и другие коэффициенты, связанные с вынужденным простоем, проведением обслуживания, частотой обслуживания, и тем самым повысить эффективность системы. Это достигается путем повышения надежности системы рассмотренными выше способами, созданием контролепригодной и восстанавливаемой аппаратуры, введением встроенного контроля, использованием научных методов эксплуатации (например, временного резерва).

Эффективность различных методов повышения надежности. Оценить эффективность того или иного метода можно на основании сравнения коли-

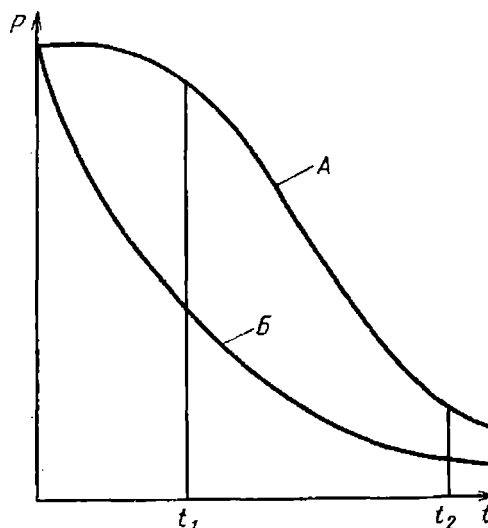


Рис. 6. Зависимость вероятности безотказной работы резервированной (А) и нерезервированной (Б) систем при сокращении времени непрерывной работы

чественных характеристик надежности идентичных по своей конструкции и принципу действия систем, но разных по методам повышения надежности. За критерий эффективности удобно принять выигрыш надежности по всем или по большинству количественных характеристик, прежде всего по тем, что заданы в ТЗ.

Резервирование и уменьшение интенсивности отказов системы.

Общее резервирование при постоянно включенном резерве

$$G_Q(t) = [1 - \exp(-\Lambda_0 t)]^{m+1} / [1 - \exp(-\Lambda_0 t/K)];$$

$$G_T = \sum_{i=0}^m \frac{1/1+i}{K};$$

$$G_a(t) = K(m+1) \exp(-\Lambda_0 t) [1 - \exp(-\Lambda_0 t)]^m / \exp(-\Lambda_0 t/K); \quad (7)$$

$$G_\Delta(t) = K(m+1) \exp(-\Lambda_0 t) [1 - \exp(-\Lambda_0 t)]^m / [1 - \exp(-\Lambda_0 t)]^{m+1}. \quad (8)$$

При резервировании замещением

$$G_Q(t) = [1 - \exp(-\Lambda_0 t)] \times \sum (\Lambda_0 t)^i / i! / [1 - \exp(-\Lambda_0 t/K)];$$

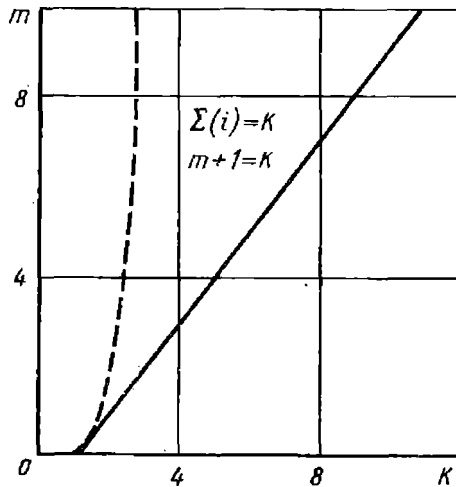


Рис. 7. Предельные зависимости кратности резервирования:

— при постоянно включенном резерве;
— при резервировании замещением

$$G_T = (m + 1)/K;$$

$$G_a(t) = K (\Lambda_0 t)^m \exp(-\Lambda_0 t)/m! \times \exp[-\Lambda_0 t/K]; \quad (8)$$

$$G_\Delta(t) = K (\Lambda_0 t)^m / m! \sum (\Lambda_0 t)^i / i!$$

Рассмотрим выигрыш в надежности по среднему времени безотказной работы. Из выражений (7) и (8) следует, что резервирование по сравнению с уменьшением интенсивности отказов системы выгоднее, если выполняются следующие условия:

$$\sum_{i=0}^m \frac{1}{1+i} > K \text{ и } m+1 > K. \quad (9)$$

На рис. 7 приведены предельные зависимости (9). Из рисунка следует, что условие (9) выполняется при весьма высокой кратности резервирования.

Уменьшение интенсивности отказов системы вдвое достигается при $m = 2$ с постоянно включенным резервом, а уменьшение Λ_0 втрое ($K = 3$) достигается при $m = 10$. Такого же результата легче добиться облегчением режимов работы и отбраковкой малонадежных элементов.

При поэлементном резервировании приведенные выше рассуждения справедливы для отдельных элементов, а значит, и для системы в целом. При резервировании с дробной кратностью среднее время безотказной работы

может быть меньше, чем нерезервированной системы, а следовательно, оно будет меньше по сравнению с системой, у которой уменьшена интенсивность отказов. Исключение составляет резервирование по плавающему принципу при идеальном переключателе. Однако это практически очень трудно реализовать.

Таким образом, повышения среднего времени безотказной работы легче добиться уменьшением интенсивности отказов системы, чем резервированием.

Анализ функций $G_\Delta(t)$ показывает, что резервирование является наиболее эффективным способом повышения надежности системы, у которой $\Lambda_0 t$ мало. При больших $\Lambda_0 t$ предпочтительней уменьшение интенсивности отказов системы.

При малых значениях $\Lambda_0 t$ $G_Q(t) \approx \approx K (\Lambda_0 t)^m$, а при больших $\Lambda_0 t$ $\lim_{t \rightarrow \infty} G_Q(t) = 1$.

При больших K имеем $1 - \exp(-\Lambda_0 t/K) \approx \Lambda_0 t/K$; тогда

$G_Q(t) \approx K [1 - \exp(-\Lambda_0 t)]^{m+1} / \Lambda_0 t$, откуда следует, что при сколь угодно большой кратности резервирования m всегда найдется такое значение K , при котором $G_Q \geq 1$. Из этого следует, что зависимости $G_Q(t)$ начинаются при малых $\Lambda_0 t$ с нуля, пересекают ось $G_Q(t) = 1$, имеют максимум и в области больших значений $\Lambda_0 t$ стремятся к единице (рис. 8). При малых $\Lambda_0 t$ наиболее эффективным способом повышения надежности является резервирование, при больших $\Lambda_0 t$ — уменьшение интенсивности отказов системы. Увеличение m расширяет, а увеличение K уменьшает область значений $\Lambda_0 t$, при которых целесообразно резервирование. Аналогичный результат получаем при резервировании замещением; при этом область целесообразности резервирования смещается вправо, т. е. расширяется.

При других методах резервирования качественно картина остается такая же, а изменяется лишь область целесообразности резервирования. Так как выигрыш $G_Q(t)$ и $G_\Delta(t)$ тем больше, чем меньше Λ_0 , то наиболее целесообразно резервировать простые системы.

Сравнивая указанные методы по коэффициентам надежности с помощью следующих аналитических зависимостей:

для коэффициента готовности

$$G_{K_r}(t) = [1 + \Lambda_0 t / K] / [1 + \omega_c(t) T_{вс}];$$

для коэффициента простоя

$$G_{K_n}(t) = \frac{K \omega_c(t) T_{вс} [1 + (\Lambda_0 / K) T_{в0}]}{\Lambda T_{в0} [1 + \omega_c(t) T_{вс}]};$$

для коэффициента профилактики

$$G_{K_p}(t) = K \omega_c(t) (T_{вс} / \Lambda_0) T_{в0},$$

приходим к выводу, что K_r резервированной системы будет выше K_r системы с уменьшенной в K раз интенсивностью отказов при следующих условиях:

$$\frac{\Lambda_0}{K} \bar{T}_{в0} > \omega_c(t) \bar{T}_{вс}. \quad (10)$$

Если предположить, что $T_{в0} = T_{вс}$, то

$$\Lambda_0 > K \omega_c(t). \quad (11)$$

Средняя частота отказов $\omega_c = f(t)$ резервированной системы при $t = 0$ всегда равна нулю, а при увеличении t растет, асимптотически стремясь к значению, обратному среднему времени безотказной работы. Это означает, что условия (10) и (11) при малых t выполняются независимо от кратности m резервирования, величины K и соотношения между $T_{в0}$ и $T_{вс}$. Таким образом, при малых t K_r резервированной системы выше, чем системы с уменьшенной интенсивностью отказов. При $t \rightarrow 0$

$$\lim G_{K_r}(t) = 1 + \frac{\Lambda_0}{K} \bar{T}_{в0}.$$

При $t \rightarrow 0$ условие (11) имеет вид

$$\Lambda_0 > \frac{K}{T_c} \text{ или } G_T > K, \text{ т. е. выигрыш}$$

в надежности резервированной системы по сравнению с нерезервированной должен быть больше коэффициента K уменьшения интенсивности отказов системы.

Условие $G_T > K$ справедливо при больших значениях m . Для сложных систем большой кратности резервирования m достичь не удастся. Поэ-

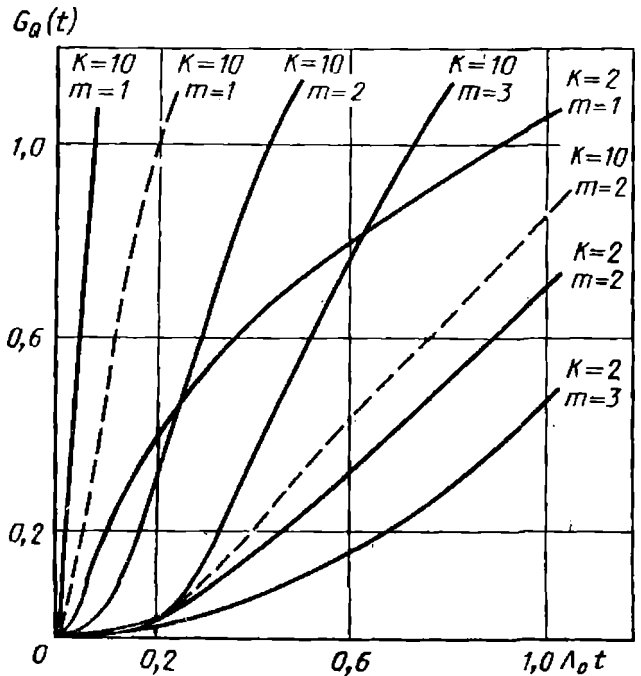


Рис. 8. Зависимости $G_Q(t)$ при различных кратностях резервирования и коэффициентах уменьшения интенсивности отказов: — постоянное резервирование; --- резервирование замещением

тому при больших K это условие не выполняется. Отсюда следует, что для сложных систем больший эффект достигается не резервированием, а уменьшением интенсивности отказов элементов системы.

Аналогичные выводы получаем, оценивая надежность системы по коэффициентам простоя, обслуживания и частоты обслуживания.

Резервирование и уменьшение времени восстановления. Время восстановления входит как параметр лишь в выражения для коэффициентов надежности. Поэтому сравнить эти методы можно по коэффициентам надежности.

Выигрыш надежности G_{K_r} резервированной системы по сравнению с системой с уменьшением времени восстановления будет

$$G_{K_r} = (1 + \Lambda_0 T_{в0} / K) / (1 + \omega_c(t) T_{вс}), \quad (12)$$

где K — коэффициент, показывающий, во сколько раз уменьшено среднее время восстановления нерезервированной системы.

Из (12) следует, что резервирование целесообразно, если

$$\frac{\Lambda_0}{\omega_c(t)} > \frac{T_{вс}}{T_{во}} K. \quad (13)$$

Так как средняя частота отказов ω_c при $t \rightarrow 0$ также стремится к нулю, то при сколь угодно больших K найдется такое значение τ , что при $t < \tau$ условие (13) выполняется.

При большом t средняя частота отказов $\omega_c \rightarrow \frac{1}{T}$. Тогда в пределе условие (13) переходит в следующее:

$$G_T > \frac{T_{вс}}{T_{во}} K. \quad (14)$$

Но $T_{вс}$ резервированной системы всегда больше $T_{во}$ нерезервированной. Поэтому при большом коэффициенте K условие (14) может выполняться лишь при большой кратности резервирования и при условии, если с увеличением кратности среднее время восстановления резервированной системы растет медленнее, чем среднее время ее безотказной работы. Таким образом, для систем, предназначенных для короткого времени работы, резервирование является лучшим способом повышения K_T . При больших t более эффективным может оказаться уменьшение среднего времени восстановления. Тем не менее уменьшение времени восстановления всегда целесообразно.

Уменьшение интенсивности отказов системы и времени восстановления.

Из выражений для коэффициентов надежности K_T , K_n , K_p следует, что Λ_0 и $T_{во}$ входят как произведение. Это означает, что уменьшение в одно и то же число раз интенсивности отказов Λ_0 или среднего времени восстановления $T_{во}$ приводит к одинаковому

увеличению коэффициентов надежности. Однако это вовсе не означает, что данные методы повышения надежности эквивалентны. Интенсивность отказов системы определяет все количественные характеристики надежности. От нее зависит и среднее время восстановления. Однако среднее время восстановления не влияет на основные количественные характеристики надежности и в том числе на интенсивность отказов.

Разный эффект от этих мероприятий следует учитывать при проектировании системы.

Рассмотренные выше методы повышения надежности дают максимальный эффект, если они применяются не в отдельности, а в комплексе, с учетом особенностей системы, условий ее эксплуатации, а также ограничений, накладываемых на ее массу, габариты, энергопитание, стоимость и т. п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дружинин Г. В. Надежность автоматизированных систем. М.: Энергия, 1977. 526 с.
2. Журавлев Ю. П., Комелюк А. А., Циклинский Н. И. Надежность и контроль ЭВМ. М.: Сов. радио, 1978. 416 с.
3. Левин Б. Р. Теория надежности радиотехнических систем. М.: Сов. радио, 1978. 262 с.
4. Надежность технических систем: Справочник. М.: Радио и связь, 1985. 606 с.
5. Половко А. М. Основы теории надежности. М.: Наука, 1964. 446 с.
6. Райкин А. Л. Элементы теории надежности технических систем. М.: Сов. радио, 1978. 280 с.
7. Щербаков Н. С. Самокорректирующиеся дискретные устройства. М.: Машиностроение, 1975. 214 с.

Приложения

Приложение 1

ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАТРАТ ПО ОБЕСПЕЧЕНИЮ НАДЕЖНОСТИ НЕРЕЗЕРВИРОВАННЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Постановка задачи. Рассмотрим нерезервируемые технические системы (НТС), состоящие из последовательно соединенных независимых между собой подсистем или основных технических элементов (ОТЭ). Надежность каждого ОТЭ системы зависит от надежности используемых комплектующих изделий, условий изготовления и эксплуатации ОТЭ. Перечисленные факторы непосредственно определяют затраты на создание ОТЭ и системы в целом.

Рассмотрим показатели надежности ОТЭ системы, которые при условии независимости отказов ОТЭ позволяют оценку надежности НТС проводить по формуле

$$R_j = \prod_{i=1}^n R_{ij}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (1)$$

где R_{ij} — j -й показатель надежности i -го ОТЭ системы.

При проектировании НТС необходимо выполнение требований по надежности:

$$\prod_{i=1}^n R_{ij} \geq R_{j0}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (2)$$

где R_{j0} — требуемый уровень j -го показателя надежности НТС.

Анализ условий (2) показывает, что выполнение требований по надежности НТС возможно при различных комбинациях значений показателей надежности ОТЭ, а следовательно, и при

различных затратах на создание ОТЭ и системы в целом. Поэтому возможны различные варианты создания ОТЭ системы (сроки и условия создания, эксплуатации и т. п.).

Рассмотрим затраты, например, по стоимости создания НТС, как детерминированную функцию показателей надежности ОТЭ системы:

$$C = f(R_{ij}), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, k}. \quad (3)$$

Функцию (3) называют целевой функцией затрат (ЦФЗ). Будем полагать, что с повышением надежности каждого ОТЭ системы при постоянном уровне надежности других ОТЭ скорость роста затрат непрерывно повышается и ЦФЗ имеет строго монотонный выпуклый характер.

Данное свойство изменения затрат наиболее четко проявляется при создании высоконадежных НТС. Размерность ЦФЗ равна числу показателей надежности системы, умноженному на число последовательно соединенных ОТЭ.

Задачу минимизации затрат можно записать следующим образом:

$$C_{\min} = \min_{R_{ij}} f(R_{ij}) = f(R_{ij}^*), \quad (4)$$
$$i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, k},$$

$$\prod_{i=1}^n R_{ij}^* - R_{j0} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$
$$j = \overline{1, k},$$

где R_{ij}^* — значения показателей надежности ОТЭ системы, при обеспечении которых затраты на создание НТС являются минимальными.

Данные значения показателей надежности ОТЭ называют оптимальными, и нахождение их является задачей оптимизации затрат по стоимости создания НТС.

Сформулированная задача оптимизации затрат является задачей поиска условного минимума и с учетом характера ЦФЗ и ограничений (5) может быть решена с использованием методов нелинейного программирования. При решении этой задачи область поиска оптимальных значений показателей надежности ОТЭ системы является известной и

$$R_{j0} < R_{ij} < 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (6)$$

где R_{j0} — требуемый уровень j -го показателя надежности системы. Уточнение области (6) производится при анализе различных вариантов создания ОТЭ системы. Чем более точно будет определена область поиска, тем более точно и просто можно найти оптимальные значения показателей надежности ОТЭ. В более общем виде область поиска

$$R_{j0} < R_{ij \min} \leq R_{ij} \leq R_{ij \max} < 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (7)$$

где $R_{ij \min}$, $R_{ij \max}$ есть соответственно минимально и максимально возможные значения j -го показателя надежности i -го ОТЭ системы.

Следует также учитывать наличие зависимости между значениями показателей надежности каждого из ОТЭ системы. При большом числе различных показателей надежности системы могут возникнуть трудности при поиске оптимальных значений.

Для решения задачи оптимизации затрат необходимо построение ЦФЗ или знание методики определения затрат в области поиска (7).

В ряде случаев может оказаться, что найденные оптимальные значения показателей надежности ОТЭ системы не могут быть практически реализованы. В этой ситуации принимают решение о выборе наилучшего варианта создания системы.

Решение задачи минимизации стоимости создания системы с одним пока-

зателем надежности. Рассмотрим НТС с одним показателем надежности R , определяемым по формуле (1). Путем логарифмирования формула (1) преобразуется к виду

$$\ln R = \sum_{i=1}^n \ln R_i. \quad (8)$$

В этом случае вместо ограничения

$$\prod_{i=1}^n R_i \geq R_0, \quad (9)$$

где R_0 — допускаемое значение показателя надежности системы, можно использовать ограничение

$$\sum_{i=1}^n \ln R_i \geq \ln R_0$$

или

$$\sum_{i=1}^n \ln R_i - \ln R_0 \geq 0.$$

Соотношение (7) преобразуется к виду

$$\ln R_0 < \ln R_{i \min} \leq \ln R_i \leq \ln R_{i \max} < 0. \quad (10)$$

Геометрически неравенству (9) в пространстве преобразованных по формуле (8) показателей надежности ОТЭ системы соответствует область в виде правильной пирамиды с вершиной в центре координат. Основанием данной пирамиды является многомерный тетраэдр. Координаты любой точки, лежащей внутри и на поверхности тетраэдра, определяются в соответствии с условием

$$\sum_{i=1}^n \ln R_i - \ln R_0 = 0. \quad (11)$$

При числе ОТЭ системы, равном двум, условию (11) будет соответствовать основание (отрезок прямой) прямоугольного равнобедренного треугольника; при числе ОТЭ системы, равном трем, — равносторонний треугольник и т. д.

Условие (11) преобразуем к виду

$$\frac{1}{\ln R_0} \sum_{i=1}^n \ln R_i = \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad (12)$$

где переменные

$$x_i = \frac{\ln R_i}{\ln R_0}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

являются положительными и с учетом выполнения условия (12) изменяются в области

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Величины, определяемые по формуле (13), называют преобразованными показателями надежности (ППН) ОТЭ системы. Значению ППН, равному единице, соответствует значение показателя надежности ОТЭ системы, равное R_0 , а значению ППН, равному нулю, — значение показателя надежности ОТЭ, равное единице.

В соответствии с условием (12) при изменении значения одной из переменных (преобразованного показателя надежности) изменяются значения остальных переменных. Геометрическую фигуру, соответствующую условию (12), называют правильным симплексом. Она представляет собой выпуклый многогранник, величина каждого из ребер которого равна единице. Число вершин (ребер симплекса) равно числу ППН ОТЭ системы. В каждой вершине симплекса значение одной переменной равно единице, а значения остальных переменных равны нулю.

Ввиду строго монотонного характера ЦФЗ оптимальные значения показателей надежности ОТЭ системы (R_i^* , $i = \overline{1, n}$) удовлетворяют условию (11), а соответственно и условию (12). Это объясняется тем, что при выборе любых значений показателей надежности ОТЭ (\tilde{R}_i , $i = \overline{1, n}$), удовлетворяющих условию (11), и при увеличении значения показателя надежности одного из ОТЭ системы значение ЦФЗ также увеличивается, т. е. имеет место соотношение

$$f(R_i > \tilde{R}_i) > f(\tilde{R}_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

С учетом (15) условие минимизации затрат (4) при одном показателе на-

дежности системы можно записать следующим образом:

$$C_{\min} = \min_{R_i} f(R_i) = f(R_i^*),$$

$$R_i \in \mathcal{P}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

где R_i^* — оптимальное значение показателя надежности i -го ОТЭ системы; \mathcal{P} — область значений показателей надежности ОТЭ системы, удовлетворяющих условию (12), и представляющая в пространстве ППН правильный n -мерный симплекс.

Сформулированная задача оптимизации затрат при строго монотонном характере ЦФЗ является задачей поиска условного минимума при наличии ограничений в виде равенства (12). Областью поиска минимума затрат является правильный симплекс. Значения показателей надежности ОТЭ системы определяют с помощью формулы

$$\ln R_i = x_i \ln R_0, \quad i = \overline{1, n} \quad (17)$$

и подставляют в целевую функцию затрат.

В соответствии со строго монотонным выпуклым характером ЦФЗ затраты вблизи вершин симплекса будут возрастать, а по мере удаления от вершин — уменьшаться.

Для ряда случаев ЦФЗ может быть представлена в виде функции

$$C = \alpha_0 \prod_{i=1}^n e^{\alpha_i R_i} = \alpha_0 \exp \sum_{i=1}^n \alpha_i R_i, \quad (18)$$

$\alpha_0 > 0, \alpha_i > 0,$

которая учитывает строго монотонный характер зависимости затрат при изменении значений каждого из показателей надежности ОТЭ системы, а также учитывает эффекты взаимодействия затрат на создание каждого ОТЭ системы, которые проявляются в том, что с повышением указанных затрат повышаются затраты, необходимые для обеспечения согласованного функционирования ОТЭ в системе.

Данную функцию назовем экспоненциальной функцией затрат (ЭФЗ). Главной особенностью ЭФЗ является возможность аналитического наход-

дения минимума затрат при условии выполнения ограничений

$$\prod_{i=1}^n R_i = R_0, \quad (19)$$

где R_0 — допускаемое значение показателя надежности системы,

$$R_0 < R_i < 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Минимальное значение затрат

$$C_{\min} = \exp n \sqrt[n]{R_0 \prod_{i=1}^n \alpha_i}, \quad (21)$$

а для нахождения оптимальных значений показателей надежности ОТЭ системы используют формулу

$$R_i^* = \sqrt[n]{\frac{R_0}{\alpha_i^{n-1}} \prod_{j \neq i=1}^n \alpha_j}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (22)$$

Оптимальные значения показателей надежности ОТЭ системы, определяемые по формуле (22), удовлетворяют условию (19). В результате подстановки значений (22) в формулу (19) образуется соотношение

$$\prod_{i=1}^n R_i^* = R_0 \prod_{i=1}^n \times \sqrt[n]{\frac{\prod_{j \neq i=1}^n \alpha_j}{\alpha_i^{n-1}}} = R_0.$$

Для системы, состоящей из двух ОТЭ, формулы (21), (22) соответственно имеют вид

$$C_{\min} = \exp 2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 R_0};$$

$$R_1^* = \sqrt{\alpha_2 R_0 / \alpha_1}, \quad R_2^* = \sqrt{\alpha_1 R_0 / \alpha_2}.$$

Для системы, состоящей из трех ОТЭ,

$$C_{\min} = \exp 3 \sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 R_0};$$

$$R_1^* = \sqrt[3]{\alpha_2 \alpha_3 R_0 / \alpha_1^2};$$

$$R_2^* = \sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_3 R_0 / \alpha_2^2};$$

$$R_3^* = \sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 R_0 / \alpha_3^2}.$$

Аналогичным образом можно записать формулы для системы, состоящей из большого числа ОТЭ. Формулы (21), (22) получены следующим образом. Минимум ЭФЗ (18) при условии выполнения ограничения (19) достигается в соответствии с условием

$$C_{\min} = \min_{R_i} \alpha_0 \exp \sum_{i=1}^n \alpha_i R_i =$$

$$= \alpha_0 \exp \min_{R_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i R_i, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha_i > 0.$$

Используя условие (19), значение показателя надежности одного (последнего по порядку) из ОТЭ системы можно определить через значения показателей надежности остальных ОТЭ:

$$R_n = R_0 / \prod_{i=1}^{n-1} R_i. \quad (23)$$

С учетом (23) получим

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i R_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i R_i + \frac{\alpha_n R_0}{\prod_{i=1}^{n-1} R_i}. \quad (24)$$

Путем дифференцирования (24) по каждому $(n-1)$ -му показателю надежности ОТЭ образуется система уравнений

$$\alpha_i - \frac{\alpha_n R_0}{R_i^2 \prod_{j \neq i=1}^{n-1} R_j} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (25)$$

в результате решения которой находят оптимальные значения показателей надежности ОТЭ, за исключением последнего ОТЭ.

Оптимальное значение показателя надежности последнего ОТЭ системы находят с помощью формулы (23) путем подстановки найденных оптимальных значений показателей надежности ОТЭ.

Для трех ОТЭ система уравнений (25) состоит из двух уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \frac{\alpha_3 R_0}{R_1^2 R_2} = 0; \\ \alpha_2 - \frac{\alpha_3 R_0}{R_2^2 R_1} = 0 \end{cases}$$

с неизвестными величинами R_1, R_2 .

Из первого уравнения определяют

$$R_2 = \alpha_3 R_0 / \alpha_1 R_1^2$$

и подставляют во второе уравнение, из которого

$$R_1^* = \sqrt[3]{\frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1^2} R_0}.$$

Затем определяют значение R_2^* и с помощью формулы (23) значение R_3^* .

Полученные оптимальные значения показателей надежности ОТЭ подставляют в ЭФЗ (18):

$$C_{\min} = \alpha_0 \exp \left(\alpha_1 \sqrt[3]{\frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1^2} R_0} + \alpha_2 \sqrt[3]{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2^2} R_0} + \alpha_3 \sqrt[3]{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2} R_0} \right),$$

которая преобразуется к виду

$$C_{\min} = \alpha_0 \exp \sqrt[3]{\frac{R_0}{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}} \times \left(\alpha_1 \sqrt[3]{\alpha_2^3 \alpha_3^3} + \alpha_2 \sqrt[3]{\alpha_1^3 \alpha_3^3} + \alpha_3 \sqrt[3]{\alpha_1^3 \alpha_2^3} \right) = \alpha_0 \exp \sqrt[3]{\frac{R_0}{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}} \times 3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \alpha_0 \exp 3 \sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 R_0}.$$

Аналогично находят оптимальные значения показателей надежности большего числа ОТЭ и соответствующие им значения затрат.

Используя ЭФЗ для аппроксимации целевой и других функций затрат, достаточно легко можно найти

оптимальные значения показателей надежности ОТЭ и минимум затрат на создание системы.

Процесс аппроксимации зависимости затрат с использованием ЭФЗ состоит в вычислении оценок неизвестных параметров α_0 и α_i по совокупности значений затрат ($C_u, u = \overline{1, N}$), соответствующих различным значениям показателей надежности ОТЭ, удовлетворяющих условию (19).

Число различных комбинаций (число опытов) значений показателей надежности ОТЭ должно быть не меньше числа неизвестных параметров, равного $(n + 1)$.

Для выбора числа опытов и условий их проведения используют равномерно распределенные в симплексе последовательности точек (планы эксперимента). При числе опытов, равном $(n + 1)$, точки располагаются в центре и на высотах симплекса. Высотами симплекса являются расстояния от вершин симплекса до центров противоположных $(n - 1)$ -мерных граней. На каждой высоте симплекса выбирают по одной точке на равном расстоянии между центром и вершиной симплекса.

Оценки параметров находят в результате решения системы нелинейных уравнений

$$C_u - \alpha_0 \exp \sum_{i=1}^n \alpha_i R_{iu} = 0,$$

$$u = \overline{1, n + 1},$$

которую путем логарифмирования ЭФЗ преобразуют в систему линейных уравнений

$$\ln C_u - \ln \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i R_{iu} = 0,$$

$$u = \overline{1, n + 1}. \tag{26}$$

Найденные (исходные) оценки параметров ($\bar{\alpha}_0 (n+2), \bar{\alpha}_i (n+2)$) используют для определения с помощью формул (21), (22) исходных оценок минимума затрат (\bar{C}_{n+2}) и оптимальных значений показателей надежности ($\bar{R}_i^* (n+2)$) ОТЭ системы.

Одновременно для исходных оценок оптимальных значений показателей на-

дежности ОТЭ системы определяют затраты (C_{n+2}) с использованием расчетных методов (машинных программ) и сравнивают с затратами, полученными по формуле (21).

Затем независимо от точности прогнозирования минимума затрат уточняют исходные оценки параметров ЭФЗ путем аппроксимации исследуемой функции затрат в области неправильного симплекса, который является n -й частью исходного (правильного) симплекса и внутри которого находятся найденные исходные оценки оптимальных значений показателей надежности ОТЭ системы. Одна из вершин данного симплекса расположена в центре исходного симплекса, а остальные вершины совпадают с вершинами исходного симплекса. В этом случае из системы линейных уравнений (26) исключают уравнение, соответствующее точке плана эксперимента, лежащей за пределами вновь образованного симплекса, и вводят уравнение, соответствующее найденным исходным оценкам оптимальных значений показателей надежности ОТЭ системы:

$$\ln C_{n+2} - \ln \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{R}_i^* (n+2) = 0.$$

Решают новую систему линейных уравнений и с помощью формул (21), (22) уточняют исходные оценки минимума затрат и оптимальных значений показателей надежности ОТЭ системы.

Если уточненные оценки оптимальных значений показателей надежности ОТЭ системы незначительно (в пределах точности используемых методов определения затрат) отличаются от исходных, то их принимают в качестве оптимальных значений показателей надежности соответствующих ОТЭ системы и для них находят соответствующий минимум затрат. В противном случае уточнение оптимальных значений показателей надежности ОТЭ системы следует продолжить. Из предшествующей системы линейных уравнений исключают уравнение с наилучшим значением затрат и вводят

уравнение с уточненными оценками оптимальных значений показателей надежности ОТЭ системы:

$$\ln C_{n+3} - \ln \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{R}_i^* (n+3) = 0.$$

В случае плохой сходимости процесса уточнения оптимальных значений показателей надежности ОТЭ системы целесообразно по мере накопления достаточного числа опытов для аппроксимации ЦФЗ использовать канонические полиномы Шеффе второго порядка [1]

$$C(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{j>i=1}^n b_{ij} x_i x_j, \quad (27)$$

где x_i удовлетворяют условию (12); b_i , b_{ij} — неизвестные параметры, оценки которых находят по формуле

$$B = (X^T X)^{-1} X^T C,$$

где B — вектор параметров; X — прямоугольная матрица размерности $N \times k$, с помощью которой записывают значения ППН, соответствующие вычисленным значениям затрат C_u ($u = \overline{1, N}$); k — число неизвестных параметров в модели (27); C — вектор значений затрат, вычисленных при различных значениях ППН ОТЭ системы.

Число опытов, минимально необходимое для оценки параметров модели (27), равно $n(n+1)/2$ и при большем числе ОТЭ системы значительно превышает число опытов, необходимое для оценки параметров ЭФЗ.

Модели (27) путем замены одной из переменных по формуле

$$x_i = 1 - \sum_{j \neq i=1}^n x_j, \quad i = \overline{1, n},$$

преобразуются в полиномиальные модели второго порядка

$$C(x) = a_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i + \sum_{j>i=1}^{n-1} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} x_i^2, \quad (28)$$

Координаты минимума затрат находят в результате решения системы линейных уравнений, образованных путем дифференцирования функции (28) по каждому $(n - 1)$ -му преобразованному показателю надежности и приравнивания производных нулю.

При большом числе (несколько десятков и более) ОТЭ системы нахождение оптимальных значений показателей надежности ОТЭ с помощью ЭФЗ и полиномов Шеффе является затруднительным ввиду большой размерности системы линейных уравнений. Если для вычисления затрат не требуются продолжительные расчеты на ЭВМ, то размерность системы линейных уравнений можно уменьшить путем разбиения ОТЭ на группы.

Поиск оптимальных значений показателей надежности ОТЭ системы проводится последовательно по каждой из групп. В процессе поиска по какой-либо группе ОТЭ значения показателей надежности по остальным группам являются постоянными (равными найденным в процессе поиска значениям). Поиск по группам продолжается циклически до получения устойчивых оценок максимальных значений показателей надежности ОТЭ системы.

Другим методом поиска оптимальных значений показателей надежности ОТЭ при большом их числе, позволяющим уменьшить объем вычислений по сравнению с аппроксимационными методами поиска, является поиск по различным направлениям в симплексе. Суть данного метода, названного методом ножиц, состоит в последовательном выборе в области симплекса различных отрезков прямых и нахождении на данных отрезках прямых условных минимумов затрат таким образом, чтобы координаты условных минимумов затрат последовательно приближались к абсолютному минимуму затрат.

Поиск начинается с нахождения условного минимума затрат (УМЗ) на одной из высот симплекса аппроксимацией зависимости затрат на отрезке прямой (высоте симплекса) полиномиальной моделью второго порядка: $C(h) = b_0 + b_1(h - \alpha) + b_2(h(h - \beta) - \gamma)$, (29) где $b_0, b_1, b_2, \alpha, \beta, \gamma$ — неизвестные

параметры; h — длина отрезка прямой, положение которого внутри симплекса фиксируется с помощью двух точек. Так, для высоты симплекса такими точками являются вершины и центр противоположной $(n - 1)$ -мерной грани симплекса.

Для любого отрезка прямой, не совпадающего ни с одним из ребер симплекса, выполняется условие $h < 1$.

Значения параметров в модели (29) определяют по методу наименьших квадратов по формулам:

$$b_0 = \sum_{u=1}^N C_u / N;$$

$$b_1 = \sum_{u=1}^N (h_u - \alpha) C_u / \sum_{h=1}^N (h_u - \alpha)^2,$$

$$\alpha = \sum_{u=1}^N h_u / N;$$

$$b_2 = \sum_{u=1}^N (h_u (h_u - \beta) - \gamma) \times$$

$$\times C_u / \sum_{u=1}^N (h_u (h_u - \beta) - \gamma)^2,$$

$$\gamma = \frac{1}{N} \left(\sum_{u=1}^N h_u^2 - \beta \sum_{u=1}^N h_u \right),$$

$$\beta = \left(N \sum_{u=1}^N h_u^3 - \right.$$

$$\left. - \sum_{u=1}^N h_u \sum_{u=1}^N h_u^2 \right) / \left(N \sum_{u=1}^N h_u^2 - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{u=1}^N h_u \right)^2 \right),$$

где C_u — затраты в u -й точке отрезка прямой; N — число точек. Для этого необходимо определить затраты не менее чем в трех точках на отрезке прямой. Координаты УМЗ (точки УМЗ) находят в соответствии с условием

$$\frac{dC(h)}{dh} = b_1 + 2b_2 h - \beta b_0 = 0;$$

$$h_{\text{ЭК}} = (b_1 - \beta b_0) / 2b_2.$$

Через найденную точку УМЗ из различных вершин симплекса проводят два отрезка прямых и на каждом из них с использованием модели (29) находят точки УМЗ. Направление прямых (вершины симплекса) выбирают из условия наиболее равномерного размещения внутри симплекса всех трех отрезков прямых, проходящих через найденную точку УМЗ.

Через две вновь найденные точки УМЗ, лежащие на отрезках прямых, проходящих через вершины симплекса, проводят отрезок прямой и на нем находят соответствующую точку УМЗ. Данный отрезок прямой и найденную точку УМЗ называют *основными*, а два предыдущих отрезка прямых, проходящих через вершины симплекса, и найденные на них точки УМЗ называют *вспомогательными*.

Через основную точку УМЗ вновь проводят два вспомогательных отрезка прямых, определяют вспомогательные точки УМЗ, через которые проводят новый основной отрезок прямой, и на нем находят основную точку УМЗ. Процесс поиска заканчивается при размещении основных и вспомогательных точек УМЗ вблизи друг друга.

С целью более равномерного размещения вспомогательных и основного отрезков прямых внутри симплекса вспомогательные отрезки прямых проводят из точек, лежащих на высотах вблизи вершин симплекса.

Следует отметить, что метод ножиц можно использовать при определении минимума затрат не только на симплексе, но и в области многомерного параллелепипеда или в другой многомерной выпуклой области. Возможны различные модификации метода, например, одновременно с основным отрезком прямой использовать часть окружности, вращающуюся вокруг основного отрезка прямой, и на ней найти точку УМЗ, через которую затем провести вспомогательные отрезки прямых.

Решение задачи оптимизации затрат с несколькими показателями надежности системы и ограничениями на другие виды затрат. В случае нескольких показателей надежности НТС, определяемых по формуле (1), по каждому

из показателей с помощью формулы преобразования (13) образуются соответствующие симплексы, которые используют при минимизации затрат.

При независимых затратах по каждому показателю надежности (симплексу) системы находят минимальные затраты, которые затем суммируют.

Если целевая функция затрат учитывает взаимное влияние затрат по каждому из показателей надежности системы, то поиск минимума затрат необходимо проводить одновременно по всем симплексам (преобразованным показателям надежности ОТЭ системы).

Полученные оптимальные значения показателей надежности ОТЭ системы анализируют и уточняют с учетом возможности практической реализации (учет корреляции значений показателей надежности ОТЭ системы). Может оказаться, что одновременно с целевой функцией одного вида затрат имеются ограничения по другим видам затрат, которые необходимо учесть при минимизации ЦФЗ. Пусть по каждому виду затрат имеются функции ограничений, аналогичные по характеру ЦФЗ (строго монотонные выпуклые):

$$Y_j(R_i) = \varphi_j(R_i), \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n} \quad (30)$$

и ограничения имеют вид

$$Y_{j \min} \leq Y_j(R_i) \leq Y_{j \max}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (31)$$

где $Y_{j \min}$, $Y_{j \max}$ — минимально и максимально допустимые значения j -го вида затрат.

По каждой функции (30) образуется две функции:

$$\varphi_j(R_i)_1 = Y_j(R_i) - Y_{j \min}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (32)$$

$$\varphi_j(R_i)_2 = Y_{j \max} - Y_j(R_i), \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (33)$$

которые при изменении значений показателей надежности ОТЭ системы могут быть знакопеременными.

При выполнении ограничений (31) функции принимают положительные и равные нулю значения. При не-

выполнении ограничений (31) значения функций являются отрицательными. Данное свойство функций (32), (33) используют при поиске минимума затрат с учетом выполнения ограничений (31).

Первоначально проверяют возможность одновременного выполнения всех ограничений на симплексе. Образуется функция

$$\varphi(R_i) = \min_{j, k} [\varphi_j(R_i)_k / (Y_{j, \max} - Y_{j, \min})], \quad j = \overline{1, m},$$

$$k = 1, 2, \quad i = \overline{1, n}, \quad (34)$$

которая является огибающей снизу значений всех функций (32), (33).

Функцию (34) называют обобщенной функцией ограничений. При выполнении всех ограничений (31) одновременно обобщенная функция ограничений принимает положительные или равные нулю значения. Условие одновременного выполнения всех ограничений (31) на симплексе имеет вид

$$\max_{R_i} \varphi(R_i) \geq 0, \quad R_i \in \mathcal{P}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (35)$$

где \mathcal{P} — область значений показателей надежности ОТЭ системы, удовлетворяющих условию (11).

При проверке условия (35) необязательно находить максимум, а достаточно найти одно положительное значение обобщенной функции ограничений.

Поиск минимума затрат при наличии ограничений (31) проводят в определенной последовательности [2], указанной ниже.

1. Находят минимум затрат без учета ограничений (31).

2. Оптимальные значения (R_i^*) показателей надежности ОТЭ системы подставляют в обобщенную функцию ограничений и вычисляют ее значение. Если

$$\varphi(R_i^*) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (36)$$

то найденный минимум затрат является искомым. Если условие (36) не выполняется, то уточняют найденный минимум затрат (C_{\min}).

3. Образуют функцию

$$\tilde{C}(R_i, C) = \frac{1}{C_{\min}} [C - f(R_i)],$$

$$i = \overline{1, n}, \quad (37)$$

где $C > C_{\min}$ является параметром, значение которого изменяется в процессе уточнения минимума затрат. Данный параметр называют уточняющим.

Функцию (37) объединяют с обобщенной функцией ограничений (34)

$$Y(R_i, C) = \min \tilde{C}(R_i, C) \vee \varphi(R_i),$$

$$i = \overline{1, n}. \quad (38)$$

Функция (38) является огибающей снизу двух функций (34), (37). Функцию (38) называют обобщенной целевой функцией затрат; при различных значениях показателей надежности ОТЭ системы и значениях уточняющего параметра она может быть знакопеременной. Положительные и равные нулю значения функции соответствуют выполнению ограничений (31).

4. С помощью обобщенной ЦФЗ записывают условие нахождения минимума затрат с учетом выполнения ограничений (31)

$$\min_C \max_{R_i} Y(R_i, C) =$$

$$= \max_{R_i} Y(R_i, C^*) = 0,$$

$$R_i \in \mathcal{P}, \quad i = \overline{1, n} \quad (39)$$

и проводят поиск искомого (оптимального) значения C^* .

Для этого уточняющему параметру задают различные значения (не менее трех)

$$C_{\min} < C_1 < C_2 < \dots < C_N$$

и для каждого значения на симплексе определяют соответствующие максимальные значения обобщенной ЦФЗ (38).

$$Y(C_u)_{\max} = \max_{R_i} Y(R_i, C_u), \quad R_i \in \mathcal{P},$$

$$u = \overline{1, N}. \quad (40)$$

Если имеются положительные и отрицательные значения, то оптимальная величина затрат находится между выбранными значениями уточняющего параметра. Если положительных значений не имеется, то оптимальная величина затрат превышает заданные значения уточняющего параметра. В обоих случаях для нахождения оптимального значения затрат зависимость максимального значения обобщенной ЦФЗ от значений уточняющего параметра целесообразно аппроксимировать моделью

$$Y(C)_{\max} = b_0 + b_1C + b_2C^2$$

и находить оптимальное значение затрат из условия

$$b_0 + b_1C + b_2C^2 = 0,$$

которое соответствует условию (39).

Приложение 2

УЧЕТ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ТРЕБОВАНИЙ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ

1. ОЦЕНКА ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ИЗДЕЛИЯ И РАЦИОНАЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧНОСТИ ЕГО ПРОВЕДЕНИЯ

Техническое обслуживание (ТО) представляет собой комплекс мероприятий (работ) для поддержания исправности или только работоспособности изделия (системы) при подготовке и использовании по назначению, а также хранении и транспортировании. Виды ТО, сроки их проведения, объемы выполняемых работ и трудозатраты при каждом виде обслуживания устанавливают с учетом обеспечения требуемого обобщенного показателя надежности изделия, эффективного его использования и принятой системы ТО.

Оценка целесообразности технического обслуживания изделия и рациональной периодичности его проведения в зависимости от имеющихся ограничений может быть произведена на основании решения прямой или обратной задачи оптимизации.

При поиске минимума затрат без учета и с учетом ограничений на различные виды затрат используют одинаковые методы оптимизации. Это позволяет сосредоточить основное внимание на анализе целевой функции затрат и функций ограничений, а не на выборе соответствующего метода поиска минимума затрат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зедгинидзе И. Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. М.: Наука, 1976. 390 с.
2. Слотин Ю. С. Аппроксимационный поиск оптимальных проектных решений // Прочность и долговечность элементов конструкций. Киев: Наукова думка, 1983. С. 128—137.

Целью решения прямой задачи является обеспечение заданного (требуемого) обобщенного показателя надежности, в частности, коэффициента оперативной готовности $K_{ог}$ изделия при минимальных удельных суммарных затратах (стоимость, трудоемкость) $C_{уд}$ на техническое обслуживание:

$$K_{ог} \geq K_{ог}^*; C_{уд} = \min;$$

$$\min \{T_{опт i}\} \geq T_{\min}, i = \overline{1, N_{ТО}}. \quad (1)$$

где $K_{ог}^*$ — требуемое значение $K_{ог}$; $T_{опт i}$ — оптимальная (в указанном выше смысле) периодичность проведения ТО i -го вида или i -го изнашиваемого и стареющего элемента; T_{\min} — минимально допустимая периодичность ТО изделия (системы); $N_{ТО}$ — число видов ТО или число изнашиваемых и стареющих элементов изделия, подвергаемых профилактическому обновлению (замене, регулировке, настройке и т. п.).

Цель решения обратной задачи — обеспечение максимума обобщенного показателя надежности (коэффициента оперативной готовности $K_{ог}$ изделия) при заданных (допустимых) удельных суммарных затратах (стоимости, тру-

доемкости и т. п.) $C_{уд}^*$ на техническое обслуживание:

$$C_{уд} \leq C_{уд}^*; K_{ог} = \max;$$

$$\min \{T_{опт\ i}\} \geq T_{мин}, i = \overline{1, N_{то}}. \quad (2)$$

Под удельными суммарными затратами (стоимость, трудоемкость и т. п.) на ТО понимают отношение средних суммарных совокупных затрат (стоимости, трудоемкости) за определенную наработку или период эксплуатации к математическому ожиданию этой наработки или длительности эксплуатации

$$C_{уд} = \sum_{i=1}^{N_{то}} C_{уд\ i}, C_{уд\ i} = C_i/T_i,$$

$$i = \overline{1, N_{то}}, \quad (3)$$

где $C_{уд}$, $C_{уд\ i}$ — удельные суммарные затраты на ТО изделия в целом и ТО i -го вида (i -го изнашиваемого и стареющего элемента); C_i — средние затраты на ТО i -го вида (i -го элемента); T_i — наработка или длительность эксплуатации между соседними ТО i -го вида (i -го элемента).

Для оценки целесообразности ТО и рациональной периодичности его проведения выделим два наиболее характерных режима эксплуатации: первый — режим «ожидание—работа»; второй — режим «непрерывная работа».

Первый режим эксплуатации характерен тем, что в режиме ожидания с устанавливаемой периодичностью проводится ТО изделия (с проверкой его работоспособности, проведением соответствующих профилактических работ и устранением выявленных неисправностей), во время которого использование изделия по назначению не планируется. Заявка на использование изделия по назначению может поступить в любой (случайный) момент между плановыми ТО. При этом непосредственно перед применением по назначению ТО изделия не проводится.

При втором режиме эксплуатации изделие используется по назначению

непрерывно, кроме вынужденных перерывов на проведение ТО (осуществление соответствующих профилактических работ) и устранение возникших в процессе работы нарушений работоспособности.

Показатель надежности изделия в целом можно и целесообразно представить в виде двух составляющих

$$K_{ог} = K_{огсэ} K_{огнэ}, \quad (4)$$

где $K_{огсэ}$, $K_{огнэ}$ — коэффициенты оперативной готовности изнашиваемых и стареющих (подвергаемых ТО), а также неизнашиваемых и нестареющих (не подвергаемых ТО) элементов.

Соотношение (4) позволяет установить требование к надежности изнашиваемых и стареющих элементов, исходя из требований к надежности изделия в целом, а также ожидаемой (прогнозируемой) надежности неизнашиваемых и нестареющих элементов:

$$K_{огсэ} = K_{ог}/K_{огнэ}. \quad (5)$$

В общем случае вероятность возникновения отказа изделия на интервале $\tau = \overline{t_1, t_2}$ определяется соотношением

$$P(t_1, t_2) = \exp \left[- \int_{t_2}^{t_1} \Lambda(t) dt \right]; \quad (6)$$

при этом $\Lambda(t) = \lambda(t)$ — интенсивность отказов (для невозстанавливаемых изделий); $\Lambda(t) = \omega(t)$ — параметр потока отказов (для восстанавливаемых изделий).

Если фактические распределения длительности безотказной работы (невозникновения отказа) изнашиваемых и стареющих элементов не установлены, то в качестве наиболее универсального аппроксимирующего распределения рекомендуется использовать распределение Вейбулла—Гнеденко, при котором

$$\Lambda(t) = (b/a^b) t^{b-1}, \quad (7)$$

где a, b — параметры масштаба и формы распределения.

Для первого режима эксплуатации («ожидание—работа») условия прямой задачи оптимизации (1) ТО изделия с последовательным соединением эле-

ментов (не имеющего избыточности) принимают вид

$$\sum_{i=1}^{N_{сэ}} \left(\frac{T_{pi} + t_p}{a_{pi}} \right)^{b_{pi}} \leq -\ln K_{огсэ}^*;$$

$$\sum_{i=1}^{N_{сэ}} \frac{C_i}{T_i} = \min; \quad \min \{T_{опт i}\} \geq T_{мин};$$
(8)

где $T_{pi} = a_{pi} \sqrt[b_{pi}]{\left(\frac{T_i}{a_{oi}}\right)^{b_{oi}}}$;

здесь $N_{сэ}$ — число стареющих элементов в изделии; t_p — длительность непрерывной работы изделия; a_{pi} , b_{pi} — параметры распределения длительности безотказной работы i -го элемента; $K_{огсэ}^*$ — требование к надежности ($K_{ог}$) стареющих элементов; a_{oi} , b_{oi} — параметры распределения длительности невозникновения отказа i -го элемента в режиме ожидания применения.

В результате решения системы (8) относительно T_i , $i = \overline{1, N_{сэ}}$ находят оптимальные периодичности ТО стареющих элементов. Если при этом выполняется условие $\min \{T_{опт i}\} \geq T_{мин}$, то проведение ТО с полученными периодичностями является целесообразным. В частности, в случае одного стареющего элемента или полного обновления изделия в целом в процессе ТО в результате решения системы (8) находим оптимальную периодичность проведения ТО

$$T_{опт} = a_0 \times \sqrt[b_0]{\left(\frac{b_p \sqrt[b_p]{-\ln K_{огсэ}^*} - t_p}{a_p}\right)^{b_p}}$$
(9)

и минимальные удельные суммарные затраты на ТО

$$C_{уд мин} = \frac{C_{ТО}}{a_0} \times \sqrt[b_0]{\left(\frac{a_p}{a_p \sqrt[b_p]{-\ln K_{огсэ}^*} - t_p}\right)^{b_p}}$$
(10)

Проведение ТО с установленной периодичностью (9) является целесообразным при выполнении условия $T_{опт} \geq T_{мин}$.

В случае отсутствия процессов старения и изнашивания ($b_{oi} = b_{pi} = 1$, $i = \overline{1, N_э}$), когда ТО проводится в целях проверки работоспособности и устранения выявляемых неисправностей, условия (8) оптимизации ТО принимают вид

$$\sum_{i=1}^{N_э} \left(\frac{T_i}{T_{oi}} + \frac{t_p}{T_{pi}} \right) \leq -\ln K_{ог}^*;$$

$$\sum_{i=1}^{N_э} \frac{C_i}{T_i} = \min, \quad \min \{T_{опт i}\} \geq T_{мин};$$
(11)

где T_{oi} — средняя длительность эксплуатации между отказами (до отказа) в режиме ожидания применения; T_{pi} — средняя наработка между отказами (до отказа) в режиме применения.

В результате решения системы (11) получаем соотношения, определяющие оптимальные периодичности ТО элементов:

$$T_{опт i} = \frac{\sqrt{C_i T_{oi}}}{\sum_{i=1}^{N_э} \sqrt{\frac{C_i}{T_{oi}}}} \times \left(-\ln K_{ог}^* - t_p \sum_{i=1}^{N_э} \frac{1}{T_{pi}} \right),$$
(12)

а также минимальные удельные суммарные затраты на ТО:

$$C_{уд мин} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_э} \sqrt{\frac{C_i}{T_{oi}}} \right)^2}{\left(-\ln K_{ог}^* - t_p \sum_{i=1}^{N_э} \frac{1}{T_{pi}} \right)}$$
(13)

Если при этом выполняется условие $\min \{T_{\text{опт } i}\} \geq T_{\text{мин}}, i = \overline{1, N_{\text{э}}}$, то проведение ТО с установленными периодичностями (12) является целесообразным. В частности, в случае однотипных ТО для изделия в целом на основании зависимостей (12) получаем выражения, определяющие оптимальную периодичность ТО:

$$T_{\text{опт}} = T_0 \left(-\ln K_{\text{ог}}^* - \frac{t_p}{T_p} \right), \quad (14)$$

а также минимальные удельные суммарные затраты на ТО:

$$C_{\text{уд мин}} = \frac{C_{\text{то}}}{T_0 \left(-\ln K_{\text{ог}}^* - \frac{t_p}{T_p} \right)}. \quad (15)$$

При выполнении условия $T_{\text{опт}} \geq T_{\text{мин}}$ проведение ТО с установленной периодичностью (14) является целесообразным.

При втором режиме эксплуатации, когда изделие используется по назначению непрерывно, кроме вынужденных перерывов на проведение ТО и устранение возникших в процессе работы нарушений работоспособности, оптимизацию ТО необходимо проводить на основе минимизации простоя изделия в неработоспособном состоянии:

$$K_{\text{прсэ}} \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{сэ}}} K_{\text{пр } i},$$

$$\text{где } K_{\text{пр } i} = K_{\text{то } i} + K_{\text{вр } i}, \quad (16)$$

где $K_{\text{то}}$, $K_{\text{вр}}$ — коэффициенты соответственно простоя на ТО и простоя на восстановлении работоспособности (на текущем ремонте).

Коэффициент простоя (16) в неработоспособном состоянии любого i -го изнашиваемого и стареющего элемента, полностью обновляемого (заменяемого) в процессе ТО, в общем случае определяется соотношением

$$K_{\text{пр } i} = \frac{\tau_i}{T_i} + \frac{T_{\text{в}i}}{T_i} \int_0^{T_i} \Lambda_i(t) dt, \quad (17)$$

где τ_i , T_i — продолжительность и периодичность ТО (замены) i -го элемента; $T_{\text{в}i}$ — среднее время восстановления работоспособности (текущего ремонта) i -го элемента; $\Lambda_i(t)$ — интенсивность (параметр потока) отказов элемента.

Полагая в соответствии с зависимостью (7) $\Lambda_i(t) = (b_i/a_i^{b_i}) \times t^{b_i-1}$ и исследовав соотношение (17) на экстремум, получаем выражения, определяющие:

оптимальную периодичность ТО (обновления, замены) каждого i -го стареющего элемента

$$T_{\text{опт } i} = \frac{a_i}{b_i \sqrt{b_i - 1}} \sqrt{\frac{\tau_i}{T_{\text{в}i}}}; \quad (18)$$

оптимальное значение коэффициента простоя на ТО каждого i -го элемента

$$K_{\text{то } i \text{ опт}} = \frac{\sqrt{b_i - 1}}{a_i} \tau_i \sqrt{\frac{T_{\text{в}i}}{\tau_i}}; \quad (19)$$

оптимальное значение коэффициента простоя каждого i -го элемента на восстановлении работоспособности

$$K_{\text{вр } i \text{ опт}} = \frac{\sqrt{b_i - 1}}{a_i (b_i - 1)} \tau_i \sqrt{\frac{T_{\text{в}i}}{\tau_i}}; \quad (20)$$

оптимальное соотношение между простоем на ТО и восстановлении работоспособности

$$K_{\text{то } i \text{ опт}} / K_{\text{вр } i \text{ опт}} = b_i - 1. \quad (21)$$

Из приведенных зависимостей (18)–(21) следует, что проведение планового обновления (настройки, регулировки, замены) путем проведения ТО имеет смысл только применительно к изнашиваемым и стареющим элементам, интенсивность (параметр потока) отказов $\Lambda_i(t)$ которых возрастает со временем ($b_i > 1$). Профилактическая замена неизнашиваемых и нестареющих элементов ($b_i = 1$) не имеет смысла ($T_{\text{опт } i} = \infty$).

Оптимальное соотношение между простоем на ТО и простоем на восста-

новлении работоспособности (21) зависит только от коэффициента формы распределения наработки элемента до отказа (между отказами) b_i .

2. ОЦЕНКА ГАРАНТИЙНОЙ НАРАБОТКИ (ГАРАНТИЙНОГО СРОКА СЛУЖБЫ) ИЗДЕЛИЯ

Для сокращения затрат на гарантийные ремонты (гарантийные замены) целесообразно выявлять скрытые дефекты изделия до передачи его потребителю. Для выявления скрытых дефектов целесообразно проводить доводочные испытания опытных изделий (образцов), а также технологический прогон (технологическую тренировку) серийно выпускаемых изделий, что связано с определенными материальными затратами разработчика и изготовителя изделия.

В этих условиях возникают задачи (прямая и обратная) оптимизации объема доводочных испытаний и технологического прогона с учетом затрат на их проведение и гарантийные ремонты (гарантийные замены) на протяжении гарантийного срока службы (гарантийной наработки) t_r . Эти задачи формулируются следующим образом.

Прямая задача — установить оптимальный объем доводочных испытаний, обеспечивающий заданную гарантийную наработку изделия многоразового применения (заданный гарантийный срок хранения изделия одноразового применения) t_r^* при соответствии безотказности изделия $q(\omega)$ заданным требованиям при минимальных суммарных затратах (времени, трудоемкости, стоимости) разработчика (завода-изготовителя) на проведение доводочных испытаний и гарантийные ремонты (замены):

$$t_r \geq t_r^*; \quad q(\omega) \leq q^*(\omega^*); \quad C = \min, \quad (22)$$

где q^* , ω^* — допустимая (заданная) величина вероятности отказа и параметра потока отказов; C — суммарные затраты на проведение доводочных испытаний (технологической тренировки) и гарантийные ремонты (замены).

Обратная задача — установить оптимальный объем доводочных испытаний (технологической тренировки), обеспечивающий максимальную гарантийную наработку изделия многоразового применения (максимальный гарантийный срок хранения изделия одноразового применения) при соответствии безотказности изделия заданным требованиям и заданных суммарных затратах (продолжительности, трудоемкости, стоимости) разработчика (завода-изготовителя) на проведение доводочных испытаний (технологической тренировки) и гарантийные ремонты (замены):

$$t_r = \max, \quad q(\omega) \leq q^*(\omega^*), \quad C \leq C^*, \quad (23)$$

где C^* — допустимые (заданные) суммарные затраты на проведение доводочных испытаний (технологической тренировки) и гарантийные ремонты (замены).

Решим указанные задачи оптимизации применительно к двум характерным для практики вариантам.

1. Скрытые дефекты изделия одноразового применения выявляются в процессе проводимых разработчиком доводочных испытаний опытных образцов; при этом технологическая тренировка серийно выпускаемых изделий не проводится.

2. Скрытые дефекты изделия многоразового применения выявляются в процессе проводимой заводом-изготовителем технологической тренировки, представляющей собой специальные испытания.

Доводочные испытания изделий одноразового применения, как правило, являются разрушающими испытаниями. Снижение вероятности отказа изделия q при использовании по назначению в зависимости от объема n_0 доводочных испытаний часто описывается соотношением

$$q(n_0) = q_y + \Delta q e^{-a q n_0}, \quad \Delta q = (q_0 - q_y), \quad (24)$$

где q_y — минимально достижимая (предельная) величина вероятности отказа изделия за цикл испытаний, кото-

рая может быть достигнута при $n_0 \rightarrow \infty$; a_q — оценка коэффициента, характеризующего скорость уменьшения вероятности отказа (выявления скрытых дефектов) в процессе испытаний; q_0 — оценка вероятности отказа изделия при использовании по назначению (за цикл испытаний), соответствующая началу доводочных испытаний ($n_0 = 0$).

Условие возможности достижения в процессе доводочных испытаний заданного уровня безотказности изделия q^* имеет вид

$$q_0 \geq q^* \geq q_y; \quad (25)$$

при этом минимальный объем доводочных испытаний, обеспечивающий снижение вероятности отказа изделия до максимально допустимой (предельной) величины q^* , составляет

$$n_{0 \text{ min}} = \frac{1}{a_q} \ln \frac{\Delta q}{q^* - q_y}. \quad (26)$$

Суммарные затраты на доводочные испытания и гарантийные замены изделия одноразового применения составляют

$$C = C_0 + C_{\text{хр}} + C_{\text{пр}}, \quad (27)$$

где C_0 , $C_{\text{хр}}$, $C_{\text{пр}}$ — затраты на доводочные испытания, а также гарантийные замены изделий, отказывающихся соответственно при хранении и использовании по назначению в пределах гарантийного срока службы.

При фактических уровнях безотказности изделий одноразового применения ($q \leq 0,1$) относительные затраты на доводочные испытания и гарантийные замены, приходящиеся на каждое выпускаемое изделие, характеризуются величиной

$$C_{\text{отн}} = \frac{C}{C_{\text{изд}}} \approx \frac{n_0}{N} + q_{\text{хр}} + q_{\text{пр}}, \quad (28)$$

где $C_{\text{изд}}$ — стоимость изделия; N — общий объем производимых изделий; $q_{\text{хр}}$, $q_{\text{пр}}$ — вероятность отказа изделия соответственно при хранении и использовании по назначению в пределах гарантийного срока службы.

При условии, что в пределах гарантийного срока службы процессы изнашивания и старения не имеют суще-

ственного значения, и учитывая, что $q \leq 0,1$, будем иметь

$$q_{\text{пр}} \approx q(n_0); \quad q_{\text{хр}} \approx \frac{t_{\text{г}}}{\tau_{\text{пр}} K} q(n_0). \quad (29)$$

где $q(n_0)$ — достигнутый к концу доводочных испытаний уровень вероятности отказа изделия при использовании по назначению (24); $\tau_{\text{пр}}$ — длительность функционирования изделия при использовании по назначению; $K = \lambda_{\text{пр}}/\lambda_{\text{хр}}$ — отношение интенсивности отказов изделия при применении по назначению к интенсивности отказов при хранении.

При решении прямой задачи оптимизации исследуется на экстремум относительно n_0 соотношение (28) с учетом выражений (24), (29), в результате чего устанавливается объем доводочных испытаний, обеспечивающий заданный гарантийный срок службы $t_{\text{г}}^*$ при минимальных суммарных затратах на доводочные испытания и гарантийные замены изделия (28):

$$n_{0 \text{ опт}} = \frac{1}{a_q} \ln \left[N a_q \Delta q \left(\frac{t_{\text{г}}^*}{\tau_{\text{пр}} K} + 1 \right) \right]. \quad (30)$$

Для решения обратной задачи оптимизации соотношение (28) с учетом зависимостей (29) представляем в виде

$$t_{\text{г}} = \frac{\tau_{\text{пр}} K}{q(n_0)} \left[C_{\text{отн}} - \frac{n_0}{N} - q(n_0) \right]. \quad (31)$$

В результате исследования выражения (31) на экстремум относительно n_0 с учетом зависимости (24) определяем объем доводочных испытаний, обеспечивающий максимальный гарантийный срок службы (31) при заданных суммарных затратах на доводочные испытания и гарантийные замены изделия $C_{\text{отн}}^*$:

$$n_{0 \text{ опт}} = f(a_q, N, \Delta q, C_{\text{отн}}^*, \tau_{\text{пр}}, K). \quad (32)$$

В качестве необходимого объема доводочных испытаний n_0 принимаем.

при решении прямой задачи — наибольший из объемов испытаний, определяемых соотношениями (26) и (30);

при решении обратной задачи — наибольший из объемов испытаний, определяемых выражениями (26) и (32).

Соответствующие условиям прямой задачи минимальные относительные затраты на доводочные испытания и гарантийные замены, приходящиеся на каждое производимое изделие, рассчитываем по формуле (28) с учетом выражения (24). В свою очередь, соответствующий условиям обратной задачи максимальный гарантийный срок службы изделия определяем по зависимости (31) с учетом соотношения (24).

Технологическая тренировка (технологический прогон) изделия много-разового применения является составной частью технологического процесса изготовления и охватывает все выпускаемые изделия. Зависимость параметра потока отказов изделия ω от объема (длительности) $t_{тр}$ технологической тренировки обычно описывается выражением вида

$$\omega(t_{тр}) = \omega_y + \Delta\omega e^{-a_\omega t_{тр}},$$

$$\Delta\omega = (\omega_0 - \omega_y), \quad (33)$$

где ω_y — оценка минимально достижимого (предельного) значения параметра потока отказов изделия при $t_{тр} \rightarrow \infty$; a_ω — оценка коэффициента, характеризующего скорость изменения параметра потока отказов (выявления скрытых дефектов) в процессе испытаний; ω_0 — оценка параметра потока отказов изделия, соответствующая началу тренировки ($t_{тр} = 0$).

Условием возможности достижения в процессе технологической тренировки требуемого уровня безотказности изделия ω^* является

$$\omega_0 \geq \omega^* \geq \omega_y; \quad (34)$$

при этом минимальный объем технологической тренировки, обеспечивающий снижение параметра потока отказов до максимально допустимого (предельного) значения ω^* составляет

$$t_{тр \min} = \frac{1}{a_\omega} \ln \frac{\Delta\omega}{\omega^* - \omega_y}. \quad (35)$$

Суммарные затраты на технологическую тренировку и гарантийные ремонты восстанавливаемого изделия много-разового применения составляют

$$C = C_{тр} + C_{гр}, \quad (36)$$

где $C_{тр}$ — затраты на технологический прогон; $C_{гр}$ — затраты на гарантийные ремонты,

$$C_{тр} = t_{тр} C_{тр1}; \quad C_{гр} = m_{гр} C_{гр1};$$

$$m_{гр} = t_{гр} \omega(t_{тр}), \quad (37)$$

где $C_{тр1}$ — затраты на единицу времени технологической тренировки; $m_{гр}$ — среднее количество отказов (гарантийных ремонтов) изделия на протяжении гарантийной наработки; $C_{гр1}$ — затраты на один гарантийный ремонт; $\omega(t_{тр})$ — достигнутый к концу технологической тренировки уровень параметра потока отказов изделия (33).

Обычно в пределах гарантийной наработки процессы изнашивания и старения еще не оказывают заметного влияния, поэтому параметр потока отказов изделия на протяжении гарантийной наработки $\omega_{гр}$ практически является постоянным и равным достигнутому к концу технологической тренировки значению $\omega_{гр} = \omega(t_{тр})$.

С учетом соотношений (36), (37) относительные затраты на технологическую тренировку и гарантийные ремонты изделия представляются в виде

$$C_{отн} = C/C_{гр1} = \mu t_{тр} + t_{тр} \omega(t_{тр}), \quad (38)$$

где $\mu = C_{тр1}/C_{гр1}$.

При решении прямой задачи исследуется на экстремум относительно $t_{тр}$ выражение (38) с учетом соотношения (33) и в результате устанавливается длительность технологической тренировки, обеспечивающая заданную гарантийную наработку изделия $t_{гр}^*$ при минимальных суммарных затратах на технологический прогон и гарантийные ремонты:

$$t_{тр \text{ опт}} = \frac{1}{a_\omega} \ln \frac{\Delta\omega a_\omega t_{гр}^*}{\mu}. \quad (39)$$

Для решения обратной задачи соотношение (38) представляется в виде

$$t_T = \frac{C_{отн} - \mu t_{тр}}{\omega(t_{тр})} \quad (40)$$

В результате исследования выражения (40) с учетом соотношения (33) на экстремум относительно $t_{тр}$ определяется длительность технологической тренировки, обеспечивающая максимальную гарантийную наработку изделия (40) при заданных суммарных затратах на технологический прогон и гарантийные ремонты $C_{отн}^*$:

$$t_{тр. опт} = f(\Delta\omega, a_\omega, \mu, C_{отн}^*). \quad (41)$$

В качестве необходимой длительности технологической тренировки $t_{тр}$ принимаем:

при решении прямой задачи — наибольшую из длительностей, определяемых соотношениями (35) и (39);

Приложение 3

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ИЗБЫТОЧНОСТИ СЛОЖНОГО ИЗДЕЛИЯ

Пусть сложное изделие включает в себя N_1 основных (целевых) систем, отказ каждой из которых приводит к отказу изделия в целом, и N_2 вспомогательных систем, отказ каждой из которых приводит к частичной потере эффективности изделия. Общее число систем равно i ($i = \overline{1, N_1 + N_2}$). Каждая система включает в себя N_j подсистем (приборов, агрегатов, узлов, $j = \overline{1, N_i}$), отказ каждой из которых приводит в свою очередь к отказу системы. Числа N_j, N_1, N_2 — целые, натуральные. Подсистемы могут быть зарезервированы, если это технически возможно.

Введем обозначения: $\overset{0}{X}$ — вектор, составляющие которого означают оптимальное число N_{ij} резервных подсистем для каждой j -й подсистемы i -й системы; E_0 — заданная эффектив-

при решении обратной задачи — наибольшую из длительностей, определяемых выражениями (35) и (41).

Соответствующие условиям прямой задачи минимальные суммарные затраты на технологическую тренировку и гарантийные ремонты рассчитываем по соотношениям (36) или (38), а соответствующую условиям обратной задачи максимальную гарантийную наработку изделия определяем по зависимости (40).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барзилович Е. Ю. Модели технического обслуживания сложных систем. М.: Высшая школа, 1982. 232 с.
2. Дедков В. К., Северцев Н. А. Основные вопросы эксплуатации сложных систем. М.: Высшая школа, 1976. 406 с.
3. Кузьмин Ф. И. Задачи обеспечения надежности технических систем. М.: Радио и связь, 1982. 176 с.

ность функционирования изделия W_0 — максимально допустимая масса резервного оборудования; W_{ijk} — масса k -й резервной подсистемы j -й подсистемы i -й системы $j = \overline{1, N_i}; i = \overline{1, (N_1 + N_2)}$.

При наличии ограничений снизу на E_0 или сверху на W_0 задача выбора оптимальной избыточности сложного изделия может быть сформулирована двумя способами.

1. Определить $\overset{0}{X}$, при котором достигается $W_\Sigma(\overset{0}{X}) = \min \sum_{ijk} W_{ijk}$,

при условии, что $E(\overset{0}{X}) \geq E_0$.

2. Определить $\overset{0}{X}$, при котором достигается $E(\overset{0}{X}) = \max E(X)$, при условии, что $W_\Sigma(\overset{0}{X}) \leq W_0$.

Эффективность функционирования рассматриваемого в данном примере изделия за время T измеряется вели-

чиной обобщенной функции готовности $E = E(T)$:

$$E(T) = \left\{ \sum_{z=1}^R \sum_{l_1=1, N_2}^{C_N^Z} G_{l_1, l_2, \dots, l_z} q_{l_1} \times \right. \\ \left. \times q_{l_2} \dots q_{l_z} \prod_{k=1}^{N_2} P_k(T) + \right. \\ \left. + \prod_{i=1}^{N_2} P_i(T) \right\} \prod_{j=1}^{N_1} P_j(T),$$

где G_{l_1, l_2, \dots, l_z} — значимость данного состояния; R — максимально допустимое число отказавших основных (целых) подсистем.

Если $\bar{N}_2 = 0$, то $E = P(T)$, т. е. эффективность E становится численно равной надежности.

При больших N_1 и N_2 размерность задачи может быть очень велика. С целью снижения размерности используется прием, связанный с построением для систем изделия непрерывных функциональных зависимостей надежности каждой i -й системы (p_i) от суммарной массы резервного оборудования, вводимого в систему ($\sum W_{ijk}$):

$$p_i(T) = f \left(\sum_{jk} W_{ijk} \right). \quad (1)$$

Построение этих зависимостей ведется с использованием алгоритма направленного перебора Кеттеля и его модификации при добавлении k -й резервной подсистемы к той j -й подсистеме, относительное приращение надежности для которой дает наибольшее приращение надежности всей системы на единицу массы добавленного элемента:

$$\max_i \{ \Delta P / \Delta W_{ij} \}. \quad (2)$$

Затем эти дискретные функции аппроксимируются непрерывной кривой вида (1). Может возникнуть ситуация, когда с помощью резервирования не

достигается необходимый уровень надежности из-за ограничений по массе. Тогда наряду с резервированием для повышения надежности резервных групп (и систем) может быть использована «доработка» основных подсистем.

Зависимость надежности от затрат на доработку может быть описана выражением

$$C_{\text{д}} = C_0 \frac{(1-P_0)^{\alpha'}}{P_0^{\alpha'}} \frac{P^{\alpha'}}{(1-P)^{\alpha'}}, \quad (3)$$

где C_0 и P_0 — начальная стоимость и надежность основной подсистемы; α' — величина, обратная коэффициенту формы зависимости $P = \varphi(C)$.

Из (3) получаем зависимость $P = \varphi(C)$:

$$P = \frac{1}{1 + K_0^\alpha (C/C_0)^\alpha}, \quad (4)$$

где $\alpha = \frac{1}{\alpha'}$; $1 < \alpha < \infty$;

$$C_0 \leq C < \infty; \quad K_0 = \frac{(1-P_0)^{\alpha'}}{P_0^{\alpha'}}$$

Тогда надежность $P_{\text{рг}}$ каждой резервной группы или подсистемы зависит от числа резервных подсистем (n) и от затрат на доработку основной подсистемы РГ ($C_{\text{д}}$):

$$P_{\text{рг}} = \varphi(n, C_{\text{д}}). \quad (5)$$

Учитывая, что частные производные $\frac{\partial P_{\text{рг}}}{\partial n}$ и $\frac{\partial P_{\text{рг}}}{\partial C_{\text{д}}}$ — функции, монотонно убывающие (т. е. функция $P_{\text{рг}}$ — вогнутая в пространстве $n, C_{\text{д}}$), можем использовать для построения (5) алгоритм (2).

Свойство вогнутости позволяет использовать данный алгоритм и для построения зависимости надежности i -й системы от числа резервных элементов n_{ijk} ($j = \bar{1}, N_i$ и $k = \bar{1}, N_j$) и от затрат на доработку $C_{\text{д}ij}$:

$$P_c = f(C_{\text{д}}, C_n) = f'(C), \quad (6)$$

где $C_d = \sum_j C_{dj}$; $C_n = \sum_{jk} C_{njk}$; здесь C_{njk} — стоимость резервной подсистемы j -го типа $C = C_d + C_n$.

Если величина C_{njk} пропорциональна массе W_{njk} резервной подсистемы, т. е.

$$C_{njk} = KW_{njk}. \quad (7)$$

то оптимальный вариант системы по стоимости будет соответствовать оптимальному ее варианту и по массе, что позволяет контролировать одновременно и ограничения на массу изделия.

В общем случае это условие не соблюдается. Тогда используют алгоритмы Барлоу [1], позволяющие получить оптимальный вариант размещения резервных элементов при двух ограничениях: на массу и стоимость. Однако эти ограничения должны быть заданы при условии преобразования структурной схемы надежности системы в последовательную. Кроме того, стоимость резервного элемента считают неизменной.

Если стоимость резервной подсистемы много меньше общей стоимости системы, т. е.

$$C_{nijk} \ll C_{oi}, \quad (8)$$

то при соблюдении условий (7) и (8) минимизация стоимости будет равнозначна минимизации по массе при некоторой погрешности в определении общих затрат. Однако эти затраты можно уточнить после отыскания оптимального варианта размещения резервных подсистем и при необходимости произвести пересчет.

Полученные зависимости (6) для всех систем изделия позволяют решить первую задачу оптимизации в два этапа: сначала с использованием непрерывных зависимостей определить вектор $\overset{0}{P}$, оптимизирующий систему, затем с использованием его составляющих в качестве ограничений для каждой системы найти оптимальное число резервных элементов и затраты на доработку.

Эта задача может быть сформулирована следующим образом:

1) определить $\overset{0}{X}$, при котором $C = C_{\min}$, при условии, что $E(\overset{0}{X}) = E_0$ и $W_{\Sigma}(\overset{0}{X}) = W_0$, или

2) определить $\overset{0}{X}$, при котором $E(\overset{0}{X}) = \max E(\overset{0}{X})$, при условии, что $C = C_0$ и $W_{\Sigma}(\overset{0}{X}) = W_0$.

Рассмотрим соотношение затрат на доработку и резервирование. Для каждой резервной группы зависимость надежности от затрат на доработку определим, используя (3). Введем обозначение (δ) — отношение стоимости резервированной подсистемы (ΔC_n) к начальной стоимости основного звена этой подсистемы:

$$\delta = \Delta C_n / C_0.$$

Путем сравнения относительных приращений надежности (ΔP) подсистемы при доработке ($\Delta P / \Delta C_d$) и резервировании ($\Delta P / \Delta C_n$) можно определить точки, в которых эти отношения становятся равными, т. е.

$$\Delta P / \Delta C_d = \Delta P / \Delta C_n \rightarrow \Delta C_d = \Delta C_n. \quad (9)$$

На практике обычно резервирование является более экономичным способом обеспечения требуемой надежности. Только при наличии жестких ограничений на массу системы необходима доработка основных элементов.

Число резервных элементов $n = \ln a / \ln(b/a)$,

$$\text{где } a = \frac{K_0}{1 + K_0 + \frac{C_d}{C_0}};$$

$$b = \frac{K_0}{1 + K_0 + \frac{C_d + \Delta C_n}{C_0}}$$

Если начальная стоимость подсистемы больше или даже равна стоимости резервной, то всегда сначала выгоднее использовать резервирование, а доработку проводить после

решения задачи распределения резерва.

При решении подобных оптимизационных задач необходимо учитывать ожидаемые разбросы параметров надежности, массы, стоимости. В работе [2] приведена вычислительная процедура, позволяющая решать задачу в тех случаях, когда эти параметры заданы не точечными своими значениями, а возможным диапазоном этих значений.

Приложение 4

РАНЖИРОВАНИЕ ФАКТОРОВ

Основной трудностью проектного анализа надежности при поиске оптимальных вариантов создания технических систем является большая размерность поиска и как следствие этого сложность и громоздкость проведения необходимых расчетов. С целью уменьшения размерности поиска целесообразно предварительно выявить факторы, в наибольшей степени влияющие на изменение затрат, показателей надежности и характеристик систем. Данные факторы называют значимыми, а процесс количественной оценки влияния факторов — ранжированием факторов. Используемые для выбора наилучшего проектного решения методы математического программирования не позволяют количественно оценить величину «вклада» каждого фактора или группы факторов.

Обычно задача количественной оценки влияния факторов в заданной области их исследования решается путем последовательного варьирования значений каждого из факторов при постоянных значениях остальных факторов. Однако данный традиционный метод ранжирования факторов не позволяет учесть их взаимодействие, и может быть принято ошибочное решение об их влиянии на характеристики системы.

Ранжирование факторов для случаев, когда модели проектирования исследуемых систем заданы не аналитически, а в виде машинных программ, производят с использованием статистических методов теории экспери-

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности: Пер. с англ./Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Сов. радио, 1969. 245 с.

2. Эффективность и надежность сложных систем (информация, оптимальность, принятие решений)/И. Л. Плетнев, А. И. Рембеза, Ю. С. Соколов, В. А. Чалый-Прилуцкий. М.: Машиностроение, 1977. 216 с.

мента, названных планами группового отсеивания факторов (ГОФ) [1]. Наиболее простые из них — *двухстадийные* — предусматривают деление всех исходных факторов на группы с равным числом факторов. На первой стадии проводят ранжирование каждой группы факторов. При этом предполагают:

все факторы независимо друг от друга с равной вероятностью могут оказаться эффективными (оказывающими влияние);

отсутствуют эффекты взаимодействия факторов и направления возможных (главных) эффектов известны;

существуют планы, обеспечивающие ранжирование факторов; ошибки всех опытов, полученных в соответствии с данными планами, независимы и нормально распределены с известной постоянной дисперсией.

По каждому фактору определяют верхний и нижний уровни. В качестве верхнего уровня принимают значение фактора, при котором получается наилучший результат (наивысший отклик), а в качестве нижнего уровня — наихудший результат.

Все верхние уровни факторов в каждой группе образуют верхний уровень соответствующего группового фактора (ГФ), а нижние уровни — нижний уровень ГФ. С использованием двухуровневых отсеивающих планов проводят ранжирование групповых факторов.

На второй стадии проводят ранжирование исходных факторов в каждой из эффективных (значимых) групп факторов.

С целью большего сокращения числа опытов используют *многостадийное*

групповое отсеивание, при котором на первой стадии формируются группы факторов достаточно большой размерности. На второй стадии каждую из значимых групп факторов делят на группы и среди них выявляют значимые факторы, т. е. на последующей стадии исследуют группы факторов, которые оказались значимыми на предыдущей стадии.

Эффективность процедур двухстадийного и многостадийного группового отсеивания факторов во многом зависит от удачного формирования групп. Если даже в каждой из групп окажется по одному значимому фактору, то на последующей стадии необходимо рассматривать все исходные группы факторов. Использование процедур ГОФ целесообразно для случаев, когда действительно есть уверенность в отсутствии эффектов взаимодействия факторов и известно направление возможного влияния каждого фактора.

Количественную оценку влияния факторов с учетом их взаимодействия проводят следующим образом. Область изменения значений факторов (X_1, X_2, \dots, X_n) задается в виде многомерного параллелепипеда (R_n) и имеет вид

$$X_{i \min} \leq X_i \leq X_{i \max}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $X_{i \min}$, $X_{i \max}$ — минимально и максимально допускаемые значения i -го фактора. Область (1) называют областью допустимых значений факторов (ДЗФ).

Зависимость исследуемой величины (отклика) от факторов рассматривается в виде детерминированной функции

$$Y(X) = f(X), \quad X \in R_n, \quad (2)$$

где X — вектор факторов.

Функцию (2) называют функцией отклика. Фактор, подлежащий оценке, называют ранжируемым, а остальные — базовыми.

Путем фиксации значений базовых факторов из многофакторной функции отклика (2) образуется условно однофакторная функция отклика

$$Y(X_i/\tilde{X}) = Y(\tilde{X})_i = f(X_i/\tilde{X}), \\ X_i \in \mathfrak{X}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad \tilde{X} \in R_{n-1}, \quad (3)$$

где \tilde{X} — вектор базовых факторов; \mathfrak{X}_i — область допустимых значений Ранжируемого фактора, заданная i -м условием (1); R_{n-1} — область допустимых значений базовых факторов в виде $(n-1)$ -мерного параллелепипеда, заданная соответствующими условиями (1).

Находят значения:

$$Y(\tilde{X})_{i \max} = \max_{X_i} f(X_i/\tilde{X}), \quad X_i \in \mathfrak{X}_i, \\ i = \overline{1, n}, \quad \tilde{X} \in R_{n-1}; \quad (4)$$

$$Y(\tilde{X})_{i \min} = \min_{X_i} f(X_i/\tilde{X}), \quad X_i \in \mathfrak{X}_i, \\ i = \overline{1, n}, \quad \tilde{X} \in R_{n-1}. \quad (5)$$

Величина

$$\Delta Y(\tilde{X})_i = Y(\tilde{X})_{i \max} - Y(\tilde{X})_{i \min}, \\ \tilde{X} \in R_{n-1}, \quad i = \overline{1, n} \quad (6)$$

характеризует влияние ранжируемого фактора на отклик при фиксированных значениях базовых факторов.

Затем находят значения базовых факторов (\tilde{X}^*) , при которых величина (6) будет максимальной:

$$\Delta Y_{i \max} = \Delta Y(\tilde{X}^*)_i = \max_{\tilde{X}} \Delta Y(\tilde{X})_i, \\ i = \overline{1, n}, \quad \tilde{X} \in R_{n-1}. \quad (7)$$

Полученное значение (7) используют для оценки влияния факторов с учетом их взаимодействия. Суть данной оценки заключается в отыскании таких значений базовых факторов, при которых разность между максимальным (4) и минимальным (5) значениями условно однофакторной функции отклика (3) является максимальной. Данный критерий оценки влияния факторов назван критерием максимума разности значений функции отклика (МРЗФО).

МРЗФО определяют следующим образом:

1) выбирают исходные значения базовых факторов, получают условно однофакторную функцию отклика (3) и в области допустимых значений ранжируемого фактора находят ее максимальное и минимальное значения;

2) вычисляют значение (6), соответствующее исходному значению вектора базовых факторов;

3) с использованием методов поиска максимума в соответствии с условием (7) находят МРЗФО.

Выбор методов поиска МРЗФО зависит от степени сложности функции отклика в области ДЗФ. Если в области ДЗФ функция отклика многоэкстремальная, то для поиска максимального и минимального значений условно однофакторной функции отклика необходимо использовать однофакторные методы глобального поиска оптимума, а для поиска МРЗФО — многофакторные методы глобального поиска оптимума.

При большом числе факторов для поиска МРЗФО можно использовать метод поиска оптимума по различным направлениям в области допустимых значений базовых факторов. Суть данного метода состоит в преобразовании многофакторного поиска в условно однофакторный. В области допустимых значений базовых факторов последовательно выбирают различные отрезки прямых и на них находят значения факторов, при которых МРЗФО является максимальным. Данные значения МРЗФО называют условными. Для их нахождения используют однофакторные методы глобального поиска оптимума. Отрезки прямых (направление поиска) выбирают таким образом, чтобы условные значения оптимума (значения МРЗФО) последовательно улучшались.

Поиск оптимума в области, заданной в виде многомерного параллелепипеда, можно начинать с поиска условного оптимума на одной или нескольких главных диагоналей параллелепипеда, проходящих через его центр. Найденные точки условного оптимума используют для построения новых отрезков прямых с более лучшими значениями условного оптимума.

Метод поиска оптимума, называемый методом ножниц, удобен при использовании диалоговых систем оптимизации, позволяющих графически представлять однофакторные зависимости и находить координаты условного экстремума. Для ранжирования факторов по МРЗФО характерен боль-

шой объем расчетов на ЭВМ. Однако, как правило, затраты на использование ЭВМ для проведения необходимых расчетов оказываются значительно меньше затрат на создание опытных образцов изделий системы и их экспериментальную обработку. С целью сокращения календарных сроков проведения необходимых расчетов по ранжированию факторов возможно проведение расчетов одновременно на нескольких ЭВМ.

Большинство зависимостей характеристик систем от факторов в области ДЗФ имеют строго монотонный или унимодальный характер. Данное свойство зависимостей позволяет использовать для ранжирования факторов процедуру, основанную на предварительной аппроксимации исследуемой зависимости полиномиальными моделями (ПМ):

$$Y(x) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{j>i=1}^n b_{ij} x_i x_j \quad (8)$$

$$Y(x) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{j>i=1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 \quad (9)$$

где

$$x_i = (X_i - \bar{X}_i) / \Delta X_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (10)$$

$$\bar{X}_i = (X_{i \max} + X_{i \min}) / 2, \\ \Delta X_i = (X_{i \max} - X_{i \min}) / 2.$$

Формулу (10) называют формулой нормализации значений факторов (преобразования натуральных значений факторов в безразмерные).

В соответствии с (10) области ДЗФ (1) будет соответствовать область значений

$$-1 \leq x_i \leq +1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

МРЗФО по каждому фактору при аппроксимации исследуемой зависи-

мости неполной ПМ второго порядка (8) вычисляют по формуле [2]

$$\Delta Y_{i \max} = 2 \left(|b_i| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \right),$$

$$i \neq j, \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

а при аппроксимации моделью (9) — по формуле

$$\Delta Y_{i \max} = \frac{1}{4 |b_{ii}|} \left(|b_i| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| + 2 |b_{ii}| \right)^2, \quad i \neq j, \quad i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

если функция отклика по ранжируемому фактору в области (11) имеет унимодальный характер, и по формуле (12) — в случае строго монотонного характера функции отклика по ранжируемому фактору.

Неполные ПМ второго порядка можно использовать для аппроксимации зависимостей, имеющих прямо (обратно) пропорциональный или строго монотонный характер по ранжируемому фактору в области ДЗФ. Для аппроксимации унимодальных зависимостей используют ПМ второго порядка (9).

Процесс аппроксимации состоит в вычислении значений оценок неизвестных параметров в ПМ (8), (9) по совокупности наблюдений отклика (Y_u) при различных значениях факторов в области ДЗФ:

$$Y_u = f(X_u), \quad u = \overline{1, N}. \quad (14)$$

Число различных наблюдений (опытов) отклика должно быть не меньше числа неизвестных параметров, равного

$$k = 1 + 2n + \binom{n}{2} \quad (15)$$

для неполной ПМ второго порядка и

$$k = \frac{1}{2} (n + 1) (n + 2) \quad (16)$$

для полной ПМ второго порядка.

Формулы (15), (16) позволяют определить минимально необходимое

число опытов в зависимости от числа факторов. В случае равенства числа опытов числу неизвестных параметров их оценки находят путем решения системы линейных уравнений, каждое из которых образуется приравниванием полиномиальной модели с соответствующими значениями факторов к полученному по формуле (2) значению отклика.

При числе опытов больше числа неизвестных параметров появляется возможность проводить оценку точности аппроксимации по величине отклонений значений функции отклика (2) от значений отклика, определяемых с помощью полиномиальных моделей.

В теории эксперимента модели, в которых проведена оценка неизвестных параметров, называют регрессионными. Полиномиальные модели относят к классу моделей, линейных по параметрам.

Для построения неполных регрессионных полиномиальных моделей (РПМ) второго порядка используют двухуровневые планы первого порядка, а для построения полных РПМ второго порядка — планы второго порядка.

При использовании методов теории эксперимента (ТЭ) для аппроксимации исследуемых зависимостей в процессе проектирования сложных технических систем появляется возможность учета случайного характера параметров, значения которых определяют эмпирическим путем. В этом случае модель наблюдений отклика при различных значениях факторов имеет случайный характер

$$Y_u = f(X_u) + \epsilon_u, \quad u = \overline{1, N}, \quad (17)$$

где ϵ — случайная величина, относительно которой предполагается, что математическое ожидание равно нулю, дисперсия является постоянной в области ДЗФ и отсутствует корреляция между значениями случайной величины при различных значениях факторов.

В отличие от модели (17) модель наблюдений отклика (14) является детерминированной, ее используют только для вычисления оценок параметров ПМ без анализа статистических свойств моделей.

Наиболее простыми методами ТЭ для построения РПМ второго порядка являются композиционные симметричные планы второго порядка типа B_n . Область планирования эксперимента данных планов совпадает с областью ДЗФ. Планы имеют минимально необходимое число уровней варьирования факторов, равное трем, близки к D - и G -оптимальным планам и позволяют использовать простые формулы для построения РПМ второго порядка [2]:

$$b_0 = \frac{1}{2(n-1)} \left(\sum_{u=N_{\text{я}}-1}^{N^*} \bar{Y}_u - \frac{2}{N_{\text{я}}} \sum_{u=1}^{N_{\text{я}}} \bar{Y}_u \right);$$

$$b_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{u=N_{\text{я}}+1}^N x_{iu}^2 \bar{Y}_u - b_0,$$

$$i = \overline{1, n};$$

$$b_i = \frac{1}{2 + N_{\text{я}}} \sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{Y}_u, \quad i = \overline{1, n};$$

$$b_{ij} = \frac{1}{N_{\text{я}}} \sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} \bar{Y}_u, \quad (18)$$

$$j > i = \overline{1, n};$$

$$S^2 \{b_0\} = (2 + nN_{\text{я}}) S^2 \{Y\} / m\varphi;$$

$$S^2 \{b_{ii}\} =$$

$$= ([n(n-3) + 3] N_{\text{я}} + 2) S^2 \{Y\} / m\varphi,$$

$$i = \overline{1, n};$$

$$S^2 \{b_i\} = S^2 \{Y\} / m(2 + N_{\text{я}});$$

$$i = \overline{1, n};$$

$$S^2 \{b_{ij}\} = S^2 \{Y\} / mN_{\text{я}}, \quad j > i = \overline{1, n};$$

$$\varphi = 2N_{\text{я}}(n-1)^2,$$

где \bar{Y}_u — среднее значение отклика в u -й точке плана; $N_{\text{я}}$ — число точек ядра плана, равное 2^{n-p} ($p = 0, 1, 2, \dots$); N^* — число точек плана, за исключением центральной точки;

m — число параллельных опытов в каждой точке плана.

В случае исключения из РПМ некоторых функций x_i^2 ($i = \overline{1, d}$) ввиду незначимости соответствующих оценок параметров b_{ii} ($i = \overline{1, d}$) уточнение оценок остальных параметров b_{ii} производится по формулам:

$$b'_0 = Z^{-1} \left\{ (n-d-1) \times \right.$$

$$\times \left[2^{n-1-p} \sum_{u=N_{\text{я}}+1}^{N^*} \bar{Y}_u - \sum_{u=1}^{N_{\text{я}}} \bar{Y}_u \right] + (1 + 2^{n-1-p}) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^d \sum_{u=N_{\text{я}}+1}^N x_{iu}^2 \bar{Y}_u \left. \right\};$$

$$b'_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{u=N_{\text{я}}+1}^N x_{iu}^2 \bar{Y}_u -$$

$$- Z^{-1} \left\{ (n-1) \left[2^{n-1-p} \times \right.$$

$$\times \left. \sum_{u=N_{\text{я}}+1}^N \bar{Y}_u - \sum_{u=1}^{N_{\text{я}}} \bar{Y}_u \right] -$$

$$- [(n-2) 2^{n-1-p} - 1] \times$$

$$\times \left. \sum_{i=1}^d \sum_{u=N_{\text{я}}+1}^N x_{iu}^2 \bar{Y}_u \right\},$$

$$Z = 2^{n-p} \times$$

$$\times [(n-1)^2 - d(n-2)] + 2d,$$

$$p = 0, 1, 2, \dots$$

Точки плана (значения факторов) располагаются в вершинах ($\pm 1, \dots, \pm 1$) гиперкуба (ядро плана), в центрах $(n-1)$ -мерных граней куба (звездные точки с координатами $0, \dots, \pm 1, \dots, 0$)

и в центре куба (центральная точка).
Число точек плана

$$N = 2^{n-p} + 2n + 1, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

оно должно быть наиболее близким числу неизвестных параметров модели.

Точки, образующие ядро плана, могут быть расположены не во всех вершинах куба ($p = 0$), а в некоторых из них ($p = 1, 2, \dots$).

Ядро плана используют для построения неполных РПМ второго порядка с помощью формул:

$$b_0 = \frac{1}{N_{\text{я}}} \sum_{u=1}^{N_{\text{я}}} \bar{Y}_u;$$

$$b_i = \frac{1}{N_{\text{я}}} \sum_{u=1}^{N_{\text{я}}} x_{iu} \bar{Y}_u, \quad i = \overline{1, n},$$

а b_{ij} определяют по формуле (18).

Композиционность планов B_n позволяет по результатам опытов в точках ядра плана построить вначале неполные РПМ второго порядка и в случае недостаточной их точности провести опыты в звездных точках плана и построить полную РПМ второго порядка.

Основной трудностью ранжирования факторов с использованием РПМ второго порядка является громоздкость моделей (большое число степенных функций) при большом числе факторов. В этом случае по аналогии с групповым отсеиванием факторов целесообразно использовать разбиение факторов по группам. Построение РПМ в каждой группе проводят при постоянных (нормализованных нулевых) значениях остальных факторов.

С помощью построенных РПМ проводят ранжирование факторов и по каждой группе факторов определяют максимальное

$$Y_{g \text{ max}} = \max_{X_g} \hat{Y}(X_g),$$

$$X_g \in \mathfrak{X}_g, \quad g = \overline{1, t},$$

и минимальное

$$Y_{g \text{ min}} = \min_{X_g} \hat{Y}(X_g),$$

$$X_g \in \mathfrak{X}_g, \quad g = \overline{1, t},$$

значения отклика, где X_g — вектор факторов, образовавших g -ю группу; \mathfrak{X}_g — область допустимых значений факторов g -й группы.

Затем находят разность

$$\Delta Y_g = Y_{g \text{ max}} - Y_{g \text{ min}},$$

$$g = \overline{1, t}, \tag{19}$$

которую принимают в качестве оценки влияния соответствующей группы факторов.

С учетом результатов ранжирования факторов проводят переформирование факторов по группам. В первую группу включают факторы с наибольшими значениями МРЗФО, во вторую группу — с меньшими значениями МРЗФО и т. д.

Для вновь образованных групп снова проводят построение соответствующих РПМ, ранжирование факторов и определяют значения (19).

Если по результатам второго этапа ранжирования факторов в первой группе оказались факторы с меньшими значениями МРЗФО, чем в остальных группах, то снова проводят перегруппировку факторов и процесс ранжирования повторяют до образования устойчивой группы факторов.

Разность (19), соответствующую устойчивой группе факторов, сравнивают с аналогичной разностью ΔY , полученной для функции отклика по всем факторам. По каждой устойчивой группе факторов определяют

$$\eta_g = \Delta Y_g / \Delta Y, \quad g = \overline{1, t},$$

называемое относительным групповым вкладом факторов.

Если устойчивой группе факторов соответствует максимальное значение относительного группового вклада факторов, то можно полагать, что данные факторы являются наиболее значимыми, и их исключают из дальнейшего рассмотрения. Значения данных факторов в функции отклика

остаются постоянными до окончания процесса ранжирования факторов. После этого аналогичным образом находят следующую устойчивую группу факторов и исключают ее из дальнейшего рассмотрения. По мере исключения факторов размерность функции отклика уменьшается, и на последнем этапе она равна числу оставшихся факторов.

Выбор числа групп и числа факторов в каждой группе проводят с учетом характера функции отклика. При строго монотонном характере число факторов в группе может быть большим по сравнению с числом факторов в группах при унимодальном характере функции отклика. Например, при унимодальном характере функции отклика наименьшее число факторов в каждой группе может быть равным пяти. В этом случае реализуется план B_5 из 27 точек. Ядро плана представляет ДФЭ типа 2^{5-1} . При исследовании, например, ста факторов на первом этапе проводится 540 опытов. В случае существенного отличия значений МРЗФО некоторых факторов от МРЗФО остальных факторов на втором этапе можно рассмотреть не все группы, а только несколько групп, обра-

зованных из наиболее значимых факторов, и на их основе выделить одну или две устойчивые группы, которые исключают из дальнейшего рассмотрения.

Эффективность процедуры ранжирования факторов по МРЗФО с использованием РПМ зависит от отношения числа значимых факторов к общему числу факторов. Небольшому числу значимых факторов и существенному отличию их влияния от влияния остальных факторов соответствует достаточно быстрое их выделение. При относительно равном влиянии факторов процедура ранжирования факторов потребует большего числа опытов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. Вып. 2. М.: Статистика, 1978. 335 с.
2. Слотин Ю. С. Композиционное планирование регрессионного эксперимента. М.: Знание, 1983. 52 с.
3. Таблицы планов эксперимента: Справочное издание/Под ред. В. В. Нахимова. М.: Металлургия, 1982. 750 с.

Предметный указатель

А

- Алгоритм разрезания 64—71
- Анализ отказов возможных 22—25
 - качественный 24
 - количественный 24
- Аппроксимация кусочно-линейная 132

В

- Вероятность выполнения задания 138
 - отказа систем с временным резервированием 139
- Вес функции в обеспечении надежности системы 79
 - элемента в обеспечении надежности системы 78—80 — Пример распределения 91

Вклад элемента в надежность системы 81, 82

— удельный 82 — Примеры распределения 91, 92

Выбор методов надежности радиоэлектронных систем 281—290

— Выбор наиболее надежных элементов 284

— Облегчение режимов работы элементов 284, 285

— Отбраковка малонадежных элементов 285

— Профилактические мероприятия 286

— Резервирование 282, 283

— Резервирование и уменьшение времени восстановления 289, 290

— Резервирование и уменьшение ин-

тенсивности отказов системы 287—289
 — Создание схем с ограниченными последствиями отказов элементов 285
 — Сокращение времени непрерывной работы аппаратуры 286, 287
 — Стандартизация и унификация 286
 — Уменьшение времени восстановления 287
 — Уменьшение интенсивности отказов системы 283—286
 — Уменьшение интенсивности отказов системы и времени восстановления 290

Г

Гамма—распределение 37
 Граф переходов двухуровневой адаптивной системы автоматического управления 128
 — состояния системы 68

Д

Дерево отказов — Структурные элементы 24

З

Задачи оценивания надежности 15—19
 Значимость элемента в обеспечении надежности системы 78, 80, 81

И

Избыточность оптимальная сложного изделия — Задача определения 307—310
 Износ — Основные показатели 269
 — предельный — Критерии 272
 Интенсивность отказов — Формула 139
 Исследование надежности — Задачи, модели и методы 13—19 — Логическая схема постановки задачи 12

К

Контроль аппаратный 278, 279
 — кодовый 278, 279
 — по модулю 278
 — постоянный 280
 — программно-логический 279
 — программный 279
 — структурный 280
 — тестовый 279
 Коэффициент готовности за заданное время 139
 — оперативный 139
 Критерий максимума разности значений функции отклика 317

М

Материал изделия — Показатели степени повреждения 254
 Матрица переходов 63

Метод временного резервирования 136—138

— дерева отказов 24, 25
 — логико-вероятностный расчет структурной надежности сложных систем с учетом восстановления 92—101 — Основы метода 92—94
 — модифицированный логико-вероятностный — см. *Расчет надежности двухполюсных систем с помощью модифицированного логико-вероятностного метода*
 — ножниц 303
 — определителей 103
 — ориентированных графов с поглощением ресурсов в вершинах 244, 245
 — подстановки 103
 — сетевого планирования и управления 242—244

Метод расчета коэффициентный 56, 57
 — надежности восстанавливаемых систем с помощью теории совпадения импульсов независимых потоков 94—101
 — с помощью алгоритма ортогонализации 69—72
 — с помощью несовместных гипотез 76—78

— структурных схем надежности 23, 24
 — схемно-логический 73—76
 — табличный 72, 73

Методы оценки важности отдельных элементов при синтезе систем с заданной надежностью 78—92

Методы расчета логико-вероятностные структурной надежности сложных систем без учета восстановления 64—78 — с учетом восстановления 92—101

Модели исследования надежности — см. под их названиями

Модели отказов при различном характере перемешивания реализаций процесса деградации 259, 260
 — с двумя пределами 261, 262

Модель изготовления и контроля качества опытных образцов 11
 — изготовления и контроля качества серийных образцов 12
 — изменения надежности по стадиям жизненного цикла 240—242
 — «нагрузка—прочность» 262
 — надежности полумарковская 127—134

— параметрического отказа при рассеянии параметров по нормальному закону и постоянной скорости изменения параметра 258

- применения 13
- сильной связности 200
- слабой связности 200
- функционирования изделия 12, 13
- экспериментальной отработки 11, 12
- экспериментальных работ и испытаний 245—248
- эксплуатации и обслуживания 12

Н

- Надежность** — Задание и распределение требований 38—42
- механических систем — Расчет с учетом износа 268—274
 - параметрическая изделий при износе — Этапы прогнозирования 272—274
 - параметрическая машины 263, 264
- Наработка обесцененная** 136
- полезная 136
- Нормы надежности проектные** 19—22

О

- Обеспечение программное (ПО)** — Надежность 279—281
- Область работоспособности** 256, 257
- состояний 257
- Отказ возможный** — Понятие 22
- систем с временным резервированием 135, 136
- Отказы** — Виды 32—38
- внезапные 255
 - механических систем — Анализ причин 252—255
 - параметрические 255
 - постепенные (износные) 255
 - функционирования 255
- Оценки важности элементов для анализа надежности систем** — Примеры применения 85—92

П

- Перечень возможных отказов** — Понятие 22
- Планирование сетевое** 242—244
- Подход к выбору проектных решений** нормативный вероятностный 11
- нормативный детерминистский 10
 - программно-целевой 10
 - программно-целевой вероятностный 11
- Показатели надежности** — Типичные формы кривых 34
- восстанавливаемых систем 28—31
 - для произвольного распределения 43
 - невосстанавливаемых систем 25—27

- основные для восстанавливаемого элемента 48
 - последовательной системы 51
 - последовательной системы из N одинаковых восстанавливаемых элементов 54, 55
 - последовательной системы из различных восстанавливаемых элементов 53, 54
 - последовательной системы из «стающих» элементов 52
 - при задании требований — Общие рекомендации по выбору 31, 32
 - систем и изделий 25—32 — Функциональные связи между показателями 27
- Потери надежности относительные в зависимости от числа контролируемых стадий** 241, 242
- Принцип модульности** 280
- структурирования массивов данных 280
- Приращения качественное и количественное надежности системы** 82—84
- Программирование структурное** 280
- Проектирование систем** — Учет эксплуатационных требований 300—307
- Процессы быстропротекающие** 253
- детерминированные случайные 259
 - медленные 254, 255
 - необратимые 252, 253
 - обратимые 252
 - средней скорости 253, 254
 - старения — Классификация 253

Р

- Ранжирование факторов** 310—316
- Распределение логарифмически нормальное** 37
- нормальное 37
 - Рэлея 37
 - экспоненциальное 34—37
 - экстремальных значений 37
 - Эрланга 37
- Распределения дискретные** 37, 38
- основные дискретные 38
 - основные непрерывные 34—36
- Расчет надежности двухполосных систем с помощью модифицированного логико-вероятностного метода** — Математические основы метода 101—106 — Многосвязанные системы с ориентированной структурой при неполном оповещении о состоянии сети 109—111 — Многосвязные системы с ориентированной структурой при не-

полном оповещении о состоянии сети 106—109 — Оценка распределения информационной нагрузки элементов ненадежной сети 112, 113

Расчет надежности систем с ветвящейся структурой и меридианными связями — Изотропные системы с однозначным подчинением при неполном оповещении о состоянии сети 117—120

— Изотропные структуры с неоднозначным подчинением неизотропных структур 120—122

— Математические основы метода 113—116

— Оценка распределения информационной нагрузки элементов ненадежной сети при централизованном сборе информации 123, 124

— Расчет надежности и выбор структурных параметров с однозначным подчинением при полном оповещении о состоянии сети 116, 117

Расчет надежности элемента восстанавливаемого 47 — Асимптотические характеристики процесса восстановления 49, 50 — Характеристики надежности мгновенно восстанавливаемого элемента 48, 49

— невозстанавливаемого — Внезапные отказы. Экспоненциальное распределение 44 — ВСФИ (УСФИ) распределение 45, 47 — ВФИ (УФИ) распределение 45, 46 — Постепенные отказы. «Стареющие» распределения 44, 45

Резерв времени 136, 137

Резервирование временное 135

С

Сечение отказов минимальное 60

Система автономная электроэнергетическая — Схемы 61, 62

— восстанавливаемая — Графическая иллюстрация процесса функционирования 94

— многосвязная — Расчет надежности 106—113 — Структурная схема 106

Система одноканальная с непополняемым резервом времени последовательная с необесцениваемыми отказами и идеальным контролем 171—181

— последовательная с обесцениваемыми отказами 182—186

— последовательная с отказами двух типов 187—189

— с отказами двух типов, непрерыв-

ным контролем и непополняемым резервом времени (общий случай) 182, 186, 187

— с многоэтапным заданием 189—196

— с необесцениваемыми отказами и непрерывным контролем работоспособности 170, 171

— с обесцениваемыми отказами и непрерывным контролем работоспособности (общий случай) 181, 182

Система одноканальная с пополняемым резервом времени при непрерывной загрузке и идеальном контроле работоспособности как один восстанавливаемый элемент 141—145

— с нагруженным, облегченным или ненагруженным структурным резервом 145—154

— со смешанным по нагрузке структурным резервом 154—156

Система одноканальная с пополняемым резервом времени при различных способах контроля и случайной загрузке с дискретным полным достоверным контролем 156—160

— с идеальным контролем основных и дискретным полным достоверным контролем резервных элементов 161—164

— с недостоверным непрерывным полным контролем основных и резервных элементов 160, 161

— со случайной загрузкой 164—170

Система полносвязная четырехъярусная без оповещения о состоянии сети 118, 119

— полносвязная четырехъярусная с оповещением о состоянии прямой линии связи с центром 119, 120

— с дискретным контролем 156—160 —

Схема функционирования 156

— со структурным дублированием узлов 121, 122

— управления двухуровневая адаптивная с обучаемым наблюдателем — Структурная схема 124

Системы — двухполюсные — Расчет надежности — см. *Расчет надежности двухполюсных систем с помощью модифицированного логико-вероятностного метода* — двухфазные одноканальные — Коэффициент готовности 219, 227—230 — Показатели надежности системы при выполнении задания известной длительности 218—227

Системы механические — Анализ причин отказов 252—255 — Расчет надежности на стадии проектирования 263—

266 — Расчет надежности с учетом износа 268—274

Системы многоканальные 196, 197
— с взаимозаменяемыми каналами и необесцениваемыми отказами 198—207 — Двухканальная система с произвольным распределением времени восстановления 200—202 — Система ММт 1200, 202—205 — Система со слабой связанностью каналов и независимым восстановлением 200, 206, 207 — с непополняемым резервом времени 197, 198

— со структурным и временным резервированием и необесцениваемыми отказами 207—213 — Система с бригадным заданием и общим структурным резервом с дробной кратностью 207—210 — Система с отдельным резервированием каналов и бригадным заданием 210—213

— с периодическим контролем и непополняемым резервом времени 213—217

Системы многофазные одноканальные с одинаковой производительностью фаз 230, 231

— с сетевой структурой и сосредоточенными запасами 232—239 — Сеть со сбалансированным потреблением 233—236 — Сеть с несбалансированным потреблением 236—239

Системы последовательные восстанавливаемые — Расчет надежности 53—55 — невосстанавливаемые — Расчет надежности 50—53

Системы радиоэлектронные — Выбор методов обеспечения надежности — см. *Выбор методов обеспечения надежности радиоэлектронных систем* — Общие принципы обеспечения надежности при проектировании 275, 276 — Особенности обеспечения надежности цифровой аппаратуры 276—279

Системы с ветвящейся структурой и меридианными связями — Понятие 113, 114 — Расчет надежности — см.

Расчет надежности систем с ветвящейся структурой и меридианными связями — Структура 114

Системы с временной избыточностью — Классификация методов временного резервирования и систем с резервом времени 136—138 — Основные понятия и определения 135, 136 — Показатели надежности систем с временным резервированием 138—141

Системы технические нерезервированные — Оптимизация затрат по обеспечению надежности 291—300

Системы управления иерархические адаптивные — Расчет надежности 124—134

Смесь распределений 37, 38

Сопряжения — Износ 270, 271 — Классификация по условиям изнашивания 270

Старение — Закономерности процессов 266—268

Схема структурная системы 59
— с эквивалентными элементами 100

Ц

Цикл жизненный системы — Модель изменения надежности по стадиям цикла 240—242

Э

Элемент восстанавливаемый — Расчет надежности 47—50

— мгновенно восстанавливаемый — Характеристики надежности 48, 49 — Схема работы 48

— невосстанавливаемый — Расчет надежности 44—47

— системы структурный — Понятие 59

Эффект экономический — Зависимость от числа контролируемых стадий 242

Эффективность экономическая технических мероприятий по обеспечению надежности изделий — Оценка 248—251