

Надежность и эффективность в технике

Справочник в десяти томах

Надежность и эффективность в технике

Справочник в десяти томах

Редакционный совет:

*В.С. АВДУЕВСКИЙ, акад. АН СССР
(председатель);*

В.И. КУЗНЕЦОВ, акад. АН СССР;

Н.Д. КУЗНЕЦОВ, акад. АН СССР;

В.А. МЕЛЬНИКОВ, акад. АН СССР;

В.П. МИШИН, акад. АН СССР;

В.Ф. УТКИН, акад. АН СССР;

К.В. ФРОЛОВ, акад. АН СССР;

Б.В. ГНЕДЕНКО, акад. АН УССР;

И.Н. КОВАЛЕНКО, акад. АН УССР;

Б.Ф. ЛОМОВ, чл.-корр. АН СССР

Том
4

*Методы
подобия
в надежности*

*Под редакцией акад.
В.А. МЕЛЬНИКОВА,
д-ра техн. наук
Н.А. СЕВЕРЦЕВА*



Москва
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1987

ББК 30.14
Н17
УДК621-192(035)

Авторы тома: В. А. Мельников, К. В. Фролов, Г. Я. Гуськов, Н. А. Северцев, Л. А. Лейфер, В. П. Савчук, И. В. Апполонов, П. С. Батурин, М. Х. Булатов, В. А. Капитонов, В. М. Крикун, Н. М. Крюков, В. И. Лукьященко, П. А. Попов, А. И. Рембеза, Н. Е. Савушкина, Н. И. Слободина, А. В. Суханов, Ю. Н. Чернев, В. Г. Шолкин, Г. А. Ярыгин

Рецензент д-р техн. наук проф. А. Н. Рохмистров

Надежность и эффективность в технике: Справочник:
Н17 В 10 т./Ред. совет.: В. С. Авдеевский (пред.) и др. — М.: Машиностроение, 1987 — (В пер.).

Т. 4.: Методы подобия в надежности/Под общ. ред. В. А. Мельникова, Н. А. Северцева. — 280 с.: ил. — 1 р. 60 к.

Приведены методы построения и применения критериев стохастического и физического подобия с целью выбора аналогов, обоснования технических характеристик и работоспособности проектируемых изделий с учетом опыта разработки подобных изделий, планирования, анализа испытаний, оценки надежности с использованием обобщенной информации.

Предназначен для инженерно-технических работников, занятых проектированием, изготовлением, испытаниями и эксплуатацией техники. Будет полезен студентам и преподавателям высших технических учебных заведений.

Н 2702000000-601 Подписное
038(01)-87

ББК 30.14

Оглавление

Предисловие (В. А. Мельников, Н. А. Северцев)	9	(П. С. Батурин, В. И. Лукьященко, А. И. Рембеза, Н. И. Слободина)	26
Глава 1. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ В МАШИНОСТРОЕНИИ	11	Глава 3. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ	32
1. Роль методов моделирования при создании техники (А. И. Рембеза, Н. А. Северцев)	11	1. Оценка стохастического подобия на основе проверки статистических гипотез (Н. А. Северцев, Г. А. Ярыгин)	32
2. Основные понятия физического подобия (Н. А. Северцев, Г. А. Ярыгин)	12	2. Представление теории подобия в стохастической постановке (Н. А. Северцев, В. Г. Шолкин,)	34
3. Виды моделей (В. И. Лукьященко, А. И. Рембеза)	15	3. Оценка параметров закона распределения критериев подобия (Н. А. Северцев, В. Г. Шолкин, Г. А. Ярыгин)	35
4. Особенности применения методов теории подобия и моделирования для обеспечения надежности (Н. А. Северцев, Г. А. Ярыгин)	16	4. Построение критериальных моделей отказов (Н. А. Северцев)	39
Глава 2. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ КРИТЕРИЕВ ФИЗИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ	18	5. Точность и достоверность исследований с использованием критериев стохастического подобия (Г. А. Ярыгин)	42
1. Теоремы подобия (Н. А. Северцев)	18	Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ПОДОБИЯ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ	46
2. Элементы теории размерностей (Н. А. Северцев)	22	1. Анализ подобия при выборе аналога Г. А. Ярыгин)	46
3. Определение критериев подобия на основе анализа размерностей (Г. А. Ярыгин)	24		
4. Точность воспроизведения критериев подобия (В. И. Лукьященко)	25		
5. Примеры построения критериев подобия машин			

2. Выбор аналога и обоснование параметров обрабатываемой системы с использованием критериев подобия (Н. А. Северцев, Н. М. Крюков, Г. А. Ярыгин)	49	ности и различных видов резервирования	102
3. Критерии подобия резервированных изделий (П. А. Попов, Г. А. Ярыгин)	52	Глава 6. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ПОДОБИЯ ПРИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКЕ И ИСПЫТАНИЯХ	119
4. Коэффициенты влияния отказов при анализе запасов работоспособности (Г. А. Ярыгин)	55	1. Особенности применения методов подобия в экспериментальной отработке (Н. А. Северцев)	119
5. Анализ надежности систем со структурно-функциональным резервированием (Г. А. Ярыгин)	58	2. Оптимизация стратегий отработки с установлением инвариантов подобия базовому образцу (В. А. Капитонов, Г. А. Ярыгин)	122
6. Объединение информации при оценке надежности по схеме нагрузка—прочность (Н. А. Северцев)	63	3. Критерии подобия по запасам работоспособности при воздействии случайной нагрузки (Г. А. Ярыгин)	126
7. Объединение информации при оценке надежности по схеме успех — отказ (Н. А. Северцев)	67	4. Планирование испытаний на нагрузку с использованием критериев подобия (П. А. Попов, Г. А. Ярыгин)	129
8. Расчет систематической погрешности при количественном анализе надежности изделий (Н. А. Северцев)	69	5. Планирование многофакторных испытаний в критериальной форме подобия (Г. А. Ярыгин)	131
9. Алгоритмы формирования критериев стохастического подобия и получения обобщенной статистически однородной информации по однотипным изделиям (И. В. Апполонов, А. В. Суханов)	72	6. Построение критериев подобия при ограниченном объеме испытаний (Н. А. Северцев, П. А. Попов, Г. А. Ярыгин)	132
Глава 5. ОБЕСПЕЧЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ (Г. Я. Гуськов, М. Х. Булатов, В. М. Крикун)	84	7. Применение критериев подобия при ресурсных испытаниях (Н. И. Слободина, Г. А. Ярыгин)	136
1. Моделирование и оценка надежности программных средств радиоэлектронных устройств	84	8. Контроль испытаний с использованием критериев подобия (В. А. Капитонов, Н. И. Слободина, Г. А. Ярыгин)	143
2. Алгоритмизация процесса обеспечения надежности радиоэлектронной аппаратуры (РЭА)	89	9. Оценка надежности по результатам физического моделирования (Ю. Н. Чернев)	145
3. Анализ и расчет надежности РЭА с учетом аналого-		10. Ускоренные испытания при контроле надежности по альтернативному признаку (Н. А. Северцев, В. Г. Шолкин)	146
		11. Ускоренные испытания при индивидуальном контроле	

надежности (Ю. Н. Чернев)	152	(Л. А. Лейфер, В. С. Шолкин)	169
12. Построение модели базового процесса отработки (Г. А. Ярыгин)	154	7. Унифицированное представление распределений вероятностей, встречающихся в задачах надежности, в виде семейств экспоненциального типа (Л. А. Лейфер)	170
13. Анализ подобия процессов отработки (Г. А. Ярыгин)	156	8. Сбалансированное оценивание параметров на основе объединения двух выборок (Л. А. Лейфер)	173
14. Контроль и оценка завершенности процесса отработки (Н. А. Северцев, Г. А. Ярыгин)	158	9. Оценивание параметров на основе объединения двух выборок при наличии мешающего параметра (Л. А. Лейфер)	176
Глава 7. МЕТОДЫ ОБЪЕДИНЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ ПОДОБНЫХ ИЗДЕЛИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ	161	10. Рекуррентные алгоритмы для оценивания параметров на основе объединения k выборок (Л. А. Лейфер)	182
1. Модели неоднородных выборок и постановка задачи оценивания надежности по неоднородным данным (Л. А. Лейфер)	161	Глава 8. БАЙЕСОВСКИЕ МЕТОДЫ ОБЪЕДИНЕНИЯ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПРИ ОЦЕНКЕ НАДЕЖНОСТИ НЕВОСТАНАВЛИВАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ (В. П. Савчук)	184
2. Некоторые сведения из теории параметрического оценивания (Л. А. Лейфер, В. С. Шолкин)	163	1. Общая схема и разновидности задач байесовского оценивания показателей надежности	184
3. Линейное объединение независимых оценок показателей надежности подобных изделий при известных дисперсиях (Л. А. Лейфер, Н. А. Северцев)	164	2. Параметрические байесовские оценки	184
4. Использование априорной оценки, полученной из предварительных испытаний изделий-аналогов известного объема (Л. А. Лейфер, Н. А. Северцев)	165	3. Непараметрические байесовские оценки	199
5. Объединение оценок показателей надежности подобных изделий с использованием статистических данных (Л. А. Лейфер, Н. А. Северцев, В. С. Шолкин)	167	4. Байесовские оценки вероятности безотказной работы в условиях частичной априорной определенности	204
6. Применение множественной регрессии для линейного объединения оценок		5. Эмпирические байесовские оценки показателей надежности	206

Глава 9. БАЙЕСОВСКИЕ МЕТОДЫ ОБЪЕДИ- НЕНИЯ АПРИОР- НОЙ ИНФОРМА- ЦИИ И ЭКСПЕРИ- МЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПРИ ОЦЕНКЕ НАДЕЖ- НОСТИ ВОССТАНА- ВЛИВАЕМЫХ ОБЪ- ЕКТОВ (Л. А. Лей- фер)	212	2. Механика контакта и опо- ры с газовой смазкой .	228
1. Предварительные замечания	212	3. Тепловая динамика и мо- делирование трения и из- нашивания фрикционных пар	233
2. Интервальные и точечные оценки для параметра по- тока отказов восстанавли- ваемых устройств	212	4. Трение и контактное взаи- модействие при высоких температурах .	242
3. Априорное распределение показателя надежности вос- станавливаемого устройства	216	5. Смазывание водой . . .	249
4. Эмпирический байесовский подход к оценке параметра потока отказов	217	6. Проблемы граничной смаз- ки	251
Глава 10. ТРИБОТЕХНИЧЕ- СКИЕ ЗАДАЧИ НАДЕЖНОСТИ МАШИН (К. В. Фро- лов)	220	7. Теория контактно-гидроди- намической смазки .	252
1. Проблемы теории трения и изнашивания .	220	8. Магнитопорошковый ме- тод смазывания	255
		9. Физико-химические про- цессы при изнашивании электрических контактов	259
		10. Конструирование герме- тизирующих устройств с учетом трибологических факторов .	263
		11. Моделирование абразив- ного изнашивания	266
		Список литературы . .	271
		Предметный указатель . .	272

Предисловие

Одним из решений проблемы обеспечения надежности на стадии проектирования и изготовления изделия является применение теории подобия и моделирования.

При проведении экспериментов, а также в практических расчетах часто возникает необходимость принимать во внимание различные обстоятельства, связанные с подобием явлений и размерностями рассматриваемых величин, характеризующих изучаемое явление. Особенно это необходимо при создании сложных технических систем (ЭВМ сверхвысокого быстродействия, судов, энергостанций и т. д.). В этом случае используют теорию подобия, которая обосновывает условия соблюдения тождественности в опытах с моделями и натурой и устанавливает аналоговость изделий и явлений. Здесь также выделяют характерные и удобные параметры, определяющие основные эффекты и режимы процессов функционирования создаваемой системы (изделия). Сочетание теории подобия и размерностей с общим качественным анализом механизма физических явлений во многих случаях может служить плодотворным теоретическим методом исследования надежности создаваемых сложных технических систем и систем, находящихся в эксплуатации.

В практике обеспечения надежности сложных систем и изделий учитываются и используются закономерности проектирования и экспериментально-технологической отработки систем данного класса. Вопросы обобщения и корректного применения информации по аналогичным разработкам в качестве априорной требуют достаточно строгого обоснования. С помощью методов теории подобия в частности в стохастической постановке решение этой проб-

лемы значительно упрощается, а также преодолеваются противоречия между требованиями к надежности и ограничениями на стоимостные показатели изготавливаемого изделия.

Теория подобия показывает, что любая функциональная зависимость между физическими параметрами исследуемого объекта может быть представлена в виде зависимостей между критериями подобия, составленными из физических параметров. Методы теории подобия могут быть основой подхода для обеспечения надежности при проектировании вновь создаваемых систем с учетом накопленного опыта по ранее созданным системам данного класса, к проведению испытаний в натурных условиях и на моделях, к обработке полученной информации и распространению ее на другие системы, недоступные экспериментальным исследованиям. В этой связи требуется совместное рассмотрение стохастического и детерминированного подходов к постановке и решению задач надежности изделий методами теории подобия. Для практического применения указанных подходов требуется: 1) в каждом случае использовать методы моделирования с учетом запасов работоспособности систем; 2) создавать и испытывать конструктивно и функционально подобные модели, воспроизводящие параметрические отказы при различных испытаниях на ресурс, контролировать, выявлять и устранять источники отказа; 3) разрабатывать правила и процедуры оценки завершенности отработки изделия на основе критериев подобия, с тем, чтобы сравнивать результаты отработки и степень их завершенности. Эти особенности теории подобия представлены в справочнике и могут быть использованы для находде-

ния алгоритмов пересчета оценок надежности изделия.

Один из узловых вопросов надежности — это объединение разнородной информации, полученной на основе испытаний. Данная информация может быть использована при планировании и обработке результатов испытаний создаваемой системы (устройства).

Методы объединения разнородной информации даны в справочнике для практических расчетов по техническим системам (устройствам) различных типов и характеру их предназначения. Такие подходы к методологии создания изделий позволяют уменьшить объем испытаний с сохранением требуемой достоверности. Применение теории подобия в стохастической постановке для обеспечения и исследования надежности технических изделий позволяет повысить эффективность известных методов обеспечения и оценивания надежности на всех этапах жизненного цикла системы (изделия) вследствие основных особенностей: 1) критерии подобия наиболее информативны, а модели развития отказов в критериальной форме являются типовыми для целого класса процессов различных технических систем (изделий); 2) основные критерии подобия — комплексные, независимые параметры, что значительно упрощает модели развития отказов в критериальной форме, а также и сам алгоритм оценивания надежности; 3) критериальная обработка экспериментальных данных значительно сокращает разброс реализаций; 4) стохастическая теория подобия: а) позволяет устанавливать необходимые и достаточные условия подобия исследуемых процессов

и на этой основе доказывать правомочность применения априорно установленных моделей отказов для испытаний конкретных выборок; б) дает возможность создавать типовые модели отказов и устанавливать границы их применения; в) формализованные требования по обеспечению подобия исследуемых процессов являются основой пересчета экспериментальной оценки надежности с одних условий на другие.

Трудности, связанные с использованием функционально-стохастических и физических моделей отказов, преодолеваются с помощью классификации моделей отказов по признаку их физической сущности и стохастической теории подобия с целью построения типовых моделей для каждого выделенного класса.

В связи с тем, что материал справочника по обеспечению и оценке надежности изделий на всех этапах жизненного цикла является первым в технической литературе, то не исключено наличие отдельных методических погрешностей, которые будут учтены при его переиздании. Оригинальность справочника состоит в том, что материалы его применимы к различным видам и типам технических систем и изделий в плане обеспечения и исследования их надежности, а представленные в нем методы подобия и особенно стохастического подобия по сути дела приоритетные в теории и практике надежности в отечественной и зарубежной литературе. Содержание справочника отвечает требованиям времени — создавать качественные и надежные технические системы и изделия.

Академик АН СССР

В. А. Мельников

Доктор технических наук

Н. А. Северцев

Глава 1. Особенности применения методов теории подобия и моделирования в машиностроении

1. РОЛЬ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ СОЗДАНИИ ТЕХНИКИ

Постоянный рост требований к техническому уровню и надежности изделий машиностроения, развитие вычислительной техники и экспериментальной базы привели к широкому применению моделирования при решении задач создания сложных изделий.

Моделирование представляет собой процесс исследования моделируемого объекта, базирующийся на подобии модели и объекта, и включает построение модели, ее изучение и перенос полученных сведений на моделируемый объект. Под моделью понимают объект, например, явление, процесс, систему, экспериментальную установку, знаковое образование, математические выражения, находящиеся в отношении подобия к моделируемому объекту.

Математическое моделирование использует подобие между величинами, входящими в математические выражения, описывающие поведение изучаемого объекта.

Физическое моделирование использует подобие между объектом и моделью, имеющей физическую природу.

Внедрение методов математического моделирования позволяет эффективно решать задачи конструирования машин, расчета надежности, планирования испытаний с учетом значительного числа факторов, организации сбора и использования информации об отказах и неисправностях, выявленных в процессе испытаний, производства и эксплуатации. Применение методов физического моделирования в значительной мере обеспечивает сокращение сроков экспериментальной отработки и объемов

испытаний изделий, введения изделий в эксплуатацию, снижение затрат на разработку новых серий машин и модернизацию старых.

Важность применения методов моделирования как эффективных средств создания и обеспечения надежности сложной техники обусловлена тем, что модели во много раз проще и дешевле самих объектов моделирования. При использовании моделей можно быстро и достаточно полно изучить процессы, протекающие при работе изделий, найти рациональные проектные решения, выявить слабые места в изделиях и, в конечном счете, обеспечить разработку и экспериментальную отработку изделий при минимальных затратах времени и средств. Например, затраты на ремонт и межремонтное обслуживание машины в эксплуатации в среднем за год могут составлять до 25 % стоимости оборудования.

Затраты на капитальные ремонты машин, работающих в особо тяжелых условиях эксплуатации, достигают до 50 % их стоимости. Значительного числа конструкторских ошибок, приводящих к отказу узлов и агрегатов изделий в эксплуатации, удается избежать за счет применения на стадиях проектирования и экспериментальной отработки методов физического и математического моделирования.

На рис. 1 приведена схема рационального цикла испытаний. В сочетании с различными видами моделирования осуществляется подбор для узла трения машины сочетания материалов одновременно с отработкой характеристик изделия в целом.

Экспериментирование на моделях, воспроизводящих трение и изнашивание, в рассматриваемом примере проводят с целью оценки работоспособ-

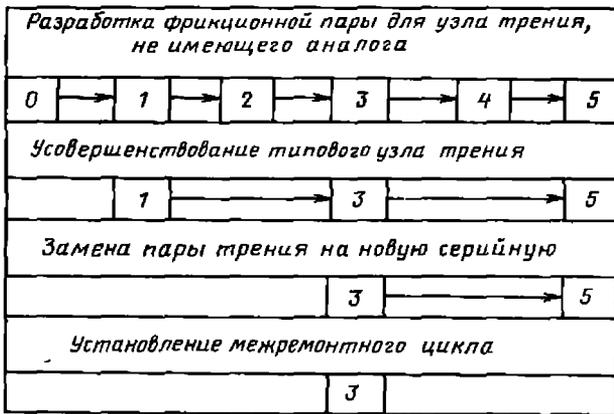


Рис. 1. Схема цикла испытаний при подборе сочетаний материалов для узлов трения:

0 — расчетно-экспериментальные работы по подбору параметров узла; 1 — испытания лабораторные для оценки работоспособности узлов по определяющим параметрам; 2 — испытания граничные исследовательские на запасы работоспособности; 3 — отработочные испытания на комплексном стенде; 4 — натурные испытания; 5 — эксплуатационные испытания

ности узлов при сочетаниях материалов в режимах работы, соответствующих натурным условиям; сравнительных испытаний пар трения; прогнозирования характеристик натурального узла; анализа и выявления факторов, наиболее влияющих на долговечность узла; оптимизации параметров узла.

На рис. 2 показана структурная схема процесса испытаний на долговечность путевой машины в целом. Как видно из схемы, разнообразные виды экспериментальных исследований на моделях заменяют реальные объекты. При этом значительную долю теоретических и экспериментальных работ занимают задачи, непосредственно связанные с расчетами и контролем надежности, испытаниями на надежность, а также работы, направленные на обеспечение и достижение требуемых уровней других технических характеристик.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИЗИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

Под экспериментом понимают специально организованную процедуру постановки и обработки наблюдений, проводимых на экспериментальных установках, схемах, в лаборатор-

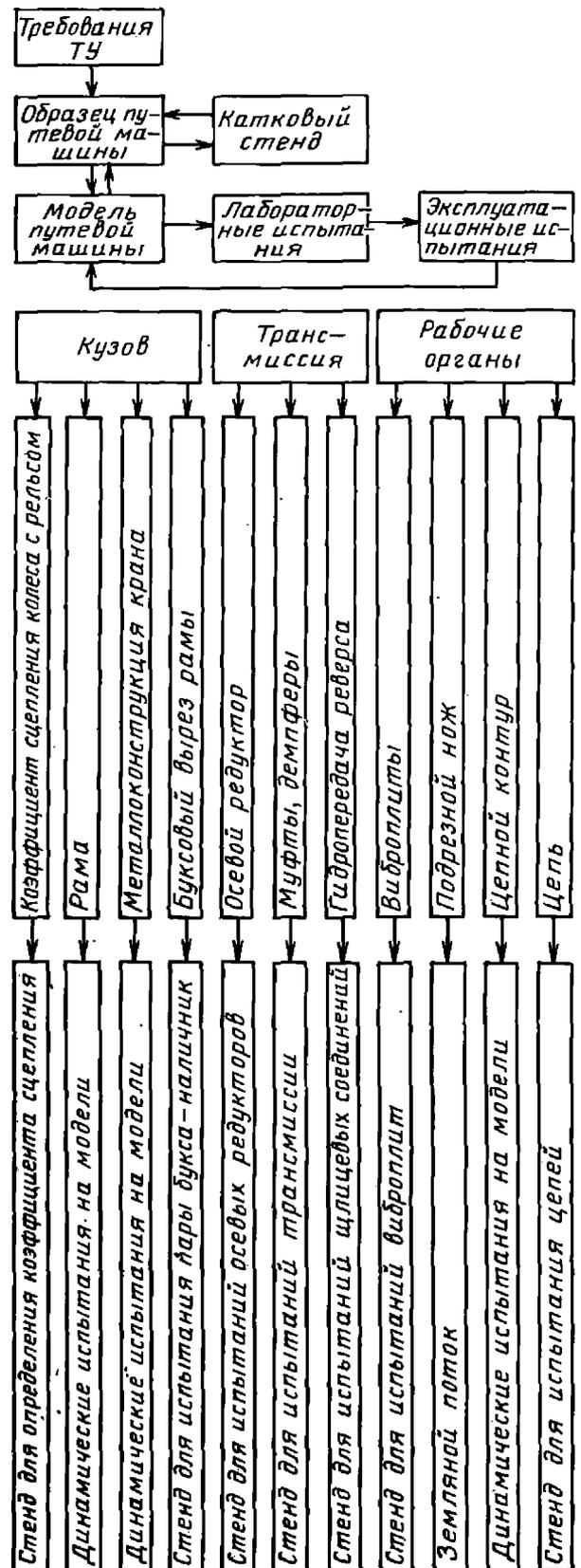


Рис. 2. Схема испытаний путевой машины на долговечность

ных условиях, при натурных испытаниях на изделиях, в производстве. На практике используется или пассивный эксперимент, при котором проводится только наблюдение за протекающим

явлением, или активный эксперимент, допускающий вмешательство в ход процессов и соответствующую организацию планирования и проведения эксперимента.

Разновидностью эксперимента, который проводится на математических моделях, является мысленный эксперимент. В этом случае под моделью понимают содержательное описание исследуемого явления, некоторые логические построения, описывающие изучаемый объект, наборы формул, алгоритмов расчета на ЭВМ.

Основой физического или математического эксперимента являются методы теории подобия, которые применяются при постановке эксперимента, обработке данных о результатах экспериментальных исследований и испытаниях.

В процессе разработки изделия необходимо решать вопросы измерения характеристик и обработки статистических данных, распространения полученных результатов на другие явления, выбора аналогов при создании новых изделий, повышения точности и достоверности оценок надежности вновь создаваемых изделий.

Упомянутые вопросы решаются с помощью методов теории подобия, которая указывает, как нужно ставить опыт, обрабатывать опытные данные, обобщать и распространять полученные результаты на другие объекты.

Модель и отображаемый ею объект находятся в отношении сходства, а не тождества. Это означает, что модель по определенным признакам подобна изучаемой системе, а по каким-то признакам отлична от оригинала.

С точки зрения исследования надежности, подобие объектов и моделей, внешних условий и нагрузок определяют исходя из закономерностей поведения изделий, а также процессов отказов.

Понятие модели взаимно связано с понятием подобия. Модель обеспечивает подобие тех процессов, которые удовлетворяют критериям, полученным с помощью теории подобия. Характеристики любого явления в группе подобных явлений могут быть получены с помощью критериев подобия путем некоторого преобразования характери-

стик другого — подобного явления. В наиболее простом случае это преобразование состоит в изменении масштабов.

Подобие и моделирование классифицируют по видам и группам с учетом признаков полноты и точности воспроизведения изучаемых процессов.

Подобие определяют как взаимнооднозначное соответствие между двумя объектами, при котором функции перехода параметров, характеризующих один из объектов, к другим параметрам известны, а математические описания этих объектов могут быть преобразованы в тождественные.

Это означает, что исследуемое явление можно получить подобным заданному путем такого его преобразования, когда размер каждой его величины изменяется в определенное число раз и это преобразование называется подобным преобразованием явления.

Теория подобия включает в себя такое обширное понятие, как «механическое подобие», куда входят геометрическое, кинематическое, динамическое, тепловое и другие подобия. При *геометрическом подобии* отношение любых сходственных отрезков равно одному и тому же постоянному числу, т. е. изучаемый объект подобен первоначальному и получен путем изображения его в другом геометрическом масштабе.

Кинематическое подобие означает, что в любых сходственных точках систем скорости движущихся тел (объектов) параллельны и пропорциональны друг другу, т. е. отношение между их скоростями одинаково во всех точках системы. Если система рассматривается как состоящая из отдельных элементов, то у подобных систем массы элементов относятся между собой как постоянное число.

Динамическое подобие заключается в параллельности и пропорциональности сил в сходственных точках.

Тепловое подобие означает пропорциональность друг другу всех характеризующих тепловое явление величин: температур, тепловых потоков, теплоемкостей, коэффициентов теплопередачи (теплопроводности) и т. д.

Обозначив отношения сходственных отрезков длин через c_l , скоростей че-

рез c_v , масс через c_m , сил через c_f , для двух подобных систем получим математическую формулировку понятия подобия в виде системы равенств:

$$\frac{l''}{l'} = c_l; \quad \frac{v''}{v'} = c_v; \quad \frac{m''}{m'} = c_m;$$

$$\frac{f''}{f'} = c_f.$$

где одним и двумя штрихами обозначены первое и второе подобные явления.

Коэффициенты c называются константами подобия. Для каждого рода величин константы подобия имеют свою особую численную величину.

В обобщенном понятии подобие явлений определяется как пропорциональность друг другу всех величин, характеризующих явления, а коэффициенты пропорциональности сохраняют постоянное значение во всех точках системы для определенного наименования величин, но являются различными для величин разного наименования.

Подобных явлений может быть не два, а значительное количество, т. е. они могут составлять *группу подобных явлений*. Сравнивая все члены группы с одним явлением, которое является базовым (образцовым), можно заметить закономерность: при переходе от одного, подобного базовому явлению, к другому, третьему, n -му константы подобия каждый раз получают другое значение, сохраняя в то же время свое свойство быть постоянными во всех точках каждой системы, подобной базовому образцу.

Объединяя переход от явлений образца ко всем подобным ему, можно рассматривать его выражение $x'_i = c_{x_i} x_i$ как групповое преобразование явления, подразумевая под константой c_{x_i} последовательное значение для всей группы подобных образцу величин.

Инварианты подобия. Подобие явлений можно выражать не только константами подобия, но и так называемыми инвариантами подобия.

Для пояснения, что такое инварианты подобия, рассмотрим следующий пример.

Выберем за единицы измерения величин рассматриваемой системы значение

этих величин в каких-нибудь точках самой системы (подстрочный индекс 0). Предварительно необходимо перейти от абсолютной системы единиц, общей для всех явлений данного класса, к относительной системе единиц, пригодной только для одного явления этого класса.

Все величины, например, длина (l'), скорость (v'), масса (m') для первого явления получают численные значения:

$$\frac{l'}{l'_0} = L'; \quad \frac{v'}{v'_0} = W'; \quad \frac{m'}{m'_0} = M'$$

Для второго явления за единицы измерения можно выбрать значения величин в сходственных первой системе точках. Тогда их значения в относительных единицах будут равны:

$$\frac{l''}{l''_0} = L''; \quad \frac{v''}{v''_0} = W''; \quad \frac{m''}{m''_0} = M''$$

Для n -го явления

$$\frac{l^n}{l^n_0} = L^n; \quad \frac{v^n}{v^n_0} = W^n; \quad \frac{m^n}{m^n_0} = M^n.$$

Следовательно, L'' , L^n , v'' , v^n , ..., m'' , m^n будут те же, что в первом явлении.

Будет иметь место соотношение $\frac{l''}{l''_0} =$

$$= \frac{l'}{l'_0} \text{ или } L'' = L' \text{ Такие же соотношения будут справедливы и для любых других величин, характеризующих подобные явления. Поэтому значки, отмечающие, к какому из явлений относятся величины } L, v \text{ и др., можно отбросить. Это связано с тем, что при переходе от одного явления к другому, ему подобному, все величины, выраженные в относительных единицах измерения, останутся численно прежними. Таким образом, эти величины являются инвариантами подобия и обозначаются idem, что означает «то же самое». Следовательно, } L = \text{idem, } v = \text{idem, } m = \text{idem или для общего случая}$$

$x'/x_0 = x = \text{idem.}$

Необходимо отличать понятия «константа подобия» и «инвариант подобия».

Константа сохраняет постоянное значение во всех точках системы, но она

будет иной, когда одна пара подобных явлений заменяется другой. Инвариант подобия, наоборот, различен для разных точек системы, поскольку он изображает одну из величин этой системы, имеющую разное численное значение в разных точках системы. Инвариант подобия не меняется при переходе от одного явления к любому другому, подобному ему, т. е. сохраняет одно и то же значение в сходственных точках всей группы подобных явлений.

Константы подобия не являются произвольными. Связь величин, входящих в константы подобия, определяется закономерностью физического явления и выражается в виде уравнений. Наличие такого уравнения, устанавливающего зависимость между величинами, налагает определенные ограничения и на константы подобия.

Различают полное, неполное (частичное, локальное, функциональное), приближенное и другие виды подобия, используемые в соответствующих способах моделирования.

Полное подобие и соответственно полное моделирование в формализованном виде характеризуются следующим соотношением:

$$y_i = m_i x_i,$$

где y_i — i -й параметр системы-оригинала или ее режима работы ($i = \overline{1, k}$); x_i — i -й параметр модели ($i = \overline{1, k}$); m_i — масштабный коэффициент, который обычно является постоянной величиной, но в частном случае может быть и переменной, зависящей от режима, времени или координат пространства.

В общем случае i -й параметр y_i системы может зависеть от других параметров y_1, y_2, \dots, y_{k-i} , геометрических размеров l_x, l_y, l_z и времени t протекания процесса $y_i = \Phi(y_1, y_2, \dots, y_{k-i}, l_x, l_y, l_z, t)$.

Неполное подобие и соответственно способ моделирования характеризуются частичным подобием протекания основных процессов в системе и модели или только во времени или только в пространстве.

В формализованном виде неполное подобие только во времени определяется соотношением

$$y_i = \Phi_1(y_1, y_2, \dots, y_{k-i}, t).$$

Математическая запись неполного подобия только в пространстве имеет вид

$$y_i = \Phi_2(y_1, y_2, \dots, y_{k-i}, l_x, l_y, l_z).$$

В случае приближенного подобия некоторые факторы, имеющие незначительное влияние на протекание изучаемого процесса, моделируются приближенно или совсем не моделируются.

3. ВИДЫ МОДЕЛЕЙ

Различают модели простые и сложные, однородные и неоднородные. Простая модель представляет собой условный образ исследуемого явления, когда учитывается ограниченное число факторов, определяющих поведение исследуемого объекта. Сложная модель отражает поведение нескольких подсистем изучаемого объекта и в математическом описании приближается к идеальному воспроизведению явления.

Сложная модель считается однородной, если класс моделируемых явлений имеет граничные явления. К таким моделям, например, относятся модели, используемые в теории процессов деформации при обработке металлов давлением.

В сложной модели различные части обычно имеют описание соответственно с позиций механики, теплофизики, химии. Начальные и граничные условия у этих частей различны.

Задачу моделирования в таком случае решают по частям при условном предположении, что когда изменяются параметры у исследуемой части задачи, параметры других подмоделей неизменны. Такая сложная модель называется неоднородной.

Для достижения подобия физической модели натурным явлением при исследовании сложной системы целесообразно вначале составить структурную схему, устанавливающую границы подмоделей, прямые и обратные связи между ними. Выделяют определяющие параметры, всегда оказывающие суще-

ственное влияние на выходные характеристики системы, параметры, характеризующие изучаемый процесс в подсистеме, и побочные параметры, которые действуют только в отдельных случаях.

На основе априорных данных устанавливают вероятность появления того или иного явления, которое целесообразно изучать в эксперименте и учитывать при установлении подобия модели и реального объекта. Совокупность масштабных коэффициентов перехода от модели к натуре представляет масштабный фактор системы в целом.

Изменение масштабного коэффициента перехода от модели к натуре для одного из параметров приводит, как правило, к изменению масштабного фактора физической системы пропорционально значению этого параметра для исследуемого процесса.

В сложной неоднородной системе при расчете масштабного фактора должны учитываться взаимовлияния подсистем. При этом должно быть обращено внимание на проверку критериев подобия в широком диапазоне параметров режима испытаний.

Для однородных моделей, полученных на основе теории подобия, как правило, выполняются требования автомодельности. Автомодельностью называют свойство явления автоматически сохранять его подобие исходному явлению (оригиналу) независимо от абсолютных величин параметров элементов той или иной системы, в которой данное явление протекает.

При отыскании режимов модельных испытаний сложной однородной системы учитывают, что согласно теории подобия, если модель и натуральный объект подобны, то они описываются одинаковыми критериями и эти критерии тождественны. В этом случае для моделирования характеристик однородной системы необходимо и достаточно выполнить сравнительно небольшой по объему определительный натуральный эксперимент с целью контроля точности расчета масштабных коэффициентов, связывающих параметры модели и природы.

Для изучения сложных неоднородных систем режимы модельных исследований выбирают с учетом взаимовлия-

ния подсистем. С целью построения критериев подобия составляют систему совместных уравнений, описывающих физическую сущность процессов, протекающих в подсистемах. В ряде случаев стремятся составить описание сложной неоднородной системы при помощи какого-либо простого метода, позволяющего учесть связи между параметрами системы и учесть масштабные коэффициенты перехода для каждого из параметров.

При описании объекта с помощью критериев подобия удается уменьшить количество исследуемых параметров путем учета при моделировании только основных параметров (факторов) или объединяя побочные (второстепенные) параметры в один критерий. В первую очередь целесообразно объединить те параметры, воспроизведение которых на модели представляет практически непреодолимые трудности. Например, при моделировании процессов внешнего трения и изнашивания к таким параметрам относятся плотность материала, модуль упругости, коэффициент линейного расширения.

4. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ

В практике испытаний сложных систем, например супер-ЭВМ, самолетных и судовых комплексов, энергетических и транспортных систем, а также сравнительно простых изделий используются методы теории подобия, которые позволяют оценивать подобие физических процессов, происходящих в модели и исследуемом объекте, и на этой основе приводить результаты испытаний к условиям эксплуатации.

Применительно к теории и практике испытаний систем выделяют следующие основные этапы исследований (рис. 3) с помощью моделей.

На практике имеется тенденция к проектированию систем с максимальным использованием типовых проектных решений при создании конкрет-

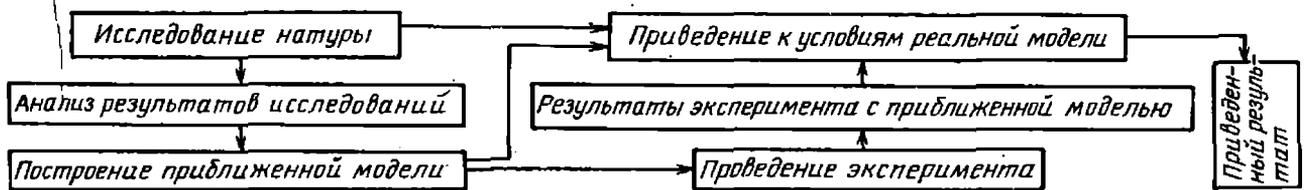


Рис. 3. Схема проведения исследований с использованием методов теории подобия и моделирования

ных изделий. Результаты их испытаний являются естественной информационной основой при количественном анализе надежности вновь разрабатываемых систем, содержащих в своих структурах аналогичные изделия. По целому ряду изделий машиностроения имеется достаточно обширная статистическая информация о результатах испытаний однотипных изделий, которую целесообразно использовать при анализе надежности вновь разрабатываемых изделий.

На этапе серийного производства изделий предполагается, что система полностью прошла конструкторскую отработку. Однако для вновь разрабатываемых или модернизируемых систем этап их серийного освоения в ряде случаев затягивается и по требованию заказчика возникает необходимость эпизодического анализа уровня надежности системы. При этом значительную долю информационного обеспечения количественного анализа надежности изделий может составлять информация, полученная на основании результатов испытаний аналогичных изделий различных уровней.

На этапе эксплуатации (хранения) для проверки стабильности эксплуатационных показателей систем осуществляется периодический поверочный расчет надежности изделий. Поскольку возможности информационного обеспечения путем контрольных испытаний данных изделий, как правило, достаточно ограничены, то необходимо при-

влекать статистическую информацию полученную на основании результатов испытаний аналогичных изделий. Основными направлениями применения методов подобия для обеспечения надежности являются:

выбор аналогов, расширение информации для оценки надежности создаваемых систем и изделий;

выявление слабых мест в аналогах и установление взаимосвязи запасов работоспособности и уровня надежности;

обоснование параметров объектов испытаний и запасов работоспособности по параметрам и действующим факторам с использованием аналогов как натурных моделей создаваемого изделия;

планирование экспериментальной отработки с использованием данных об аналогах и эксперимента на моделях;

разработка методов математического и физического моделирования и проведение испытаний с целью исследования особенностей функционирования изделий, оценки запасов работоспособности при имитации отказов и воздействии нагрузок;

анализ результатов модельных и экспериментальных исследований и испытаний для оценки завершенности, контроля и управления процессом экспериментальной отработки;

оценка и контроль надежности с использованием априорных данных о результатах испытаний и эксплуатации систем и изделий предыдущих разработок.

Глава 2. Методы построения критериев физического подобия

Подобию свойственны некоторые общие закономерности, которые устанавливаются первой, второй и третьей теоремами подобия и дополнительными положениями к ним. Дополнительные положения используются при исследовании подобия явлений в сложных, нелинейных, неоднородных системах.

Первая и вторая теоремы устанавливают соотношения между параметрами подобных явлений, не указывая способов реализации подобия при построении моделей. Третья теорема подобия определяет условия, необходимые и достаточные для того, чтобы явления оказались подобными.

1. ТЕОРЕМЫ ПОДОБИЯ

Первая теорема подобия формулируется следующим образом: у подобных явлений критерии подобия численно одинаковы. Теорема устанавливает необходимые условия подобия.

Подобные явления характеризуются рядом определенных свойств.

1. Величины, определяющие явления во всех точках системы, в которых протекают процессы данного явления, относятся в сходственных точках к одноименным величинам из группы подобных явлений, как постоянные числа. Каждой величине отвечает свое число, различное для каждой пары явлений. При этом необходимо иметь в виду, что изучаемые явления протекают и в геометрически подобных системах.

2. Величины, характеризующие рассматриваемое явление, независимы друг от друга, а между ними существуют определенные связи. Если эти связи могут быть выражены в виде математических зависимостей, то последние для подобных явлений буквенно одинаковы.

Первое условие представляет математическую формулировку понятия подобия, второе — необходимое условие его сохранения, оно налагает определенные ограничения на вид уравнения связи.

Уравнения связи должны быть однородными по отношению к подобному преобразованию входящих в них величин.

Пример 1. Пусть связи между величинами, характеризующие явление, даны в виде m уравнений между их величинами:

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_n)_{i=1}^m = 0, \quad (1)$$

где i последовательно проходит все значения от 1 до m . Уравнения для любых двух подобных явлений имеют вид

$$x_1'' = c_1 x_1', \quad x_n'' = c_n x_n'.$$

Для первого явления

$$\Phi_i(x_1', \dots, x_n') = 0. \quad (2)$$

Для второго

$$\Phi_i(x_1'', \dots, x_n'') = 0. \quad (3)$$

После подстановки уравнения (1) в (3) получим

$$\Phi_i(c_1 x_1', \dots, c_n x_n') = 0. \quad (4)$$

Уравнения (1) и (4) могут одновременно существовать в том случае, когда все константы подобия c_1, \dots, c_n выйдут из-под функции Φ_i в виде одного общего множителя:

$$\Phi_i(c_1 x_1', \dots, c_n x_n') = \Psi_i(c_1, \dots, c_n) \times \Phi_i(x_1', \dots, x_n') = 0.$$

Отбросив множители $\psi(c_1, \dots, c_n)$, получим уравнения $\varphi_i = 0$, инвариантные по отношению к произведенному преобразованию. Функции φ_i называются в теории подобия подобнообразными (гомогенными).

Свойством подобности обладают функции типа степенных комплексов $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n}$, в которых степени $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — отвлеченные числа. Подобнообразными могут быть и суммы степенных комплексов при том условии, что появившиеся после подобного преобразования их сомножители, составленные из констант подобия, все будут равны друг другу.

Пример 2. Если $\sum_{i=1}^m \chi_i(x_1'', \dots, x_n'')$ есть сумма степенных комплексов, то подстановка $x_1'' = c_1 x_1', \dots, x_n'' = c_n x_n'$ приведет к виду

$$\sum_{i=1}^m \chi_i(c_1, \dots, c_n) \chi_i(x_1', \dots, x_n'),$$

где функции χ_i у обоих множителей одинаковы. Гомогенность сумм в этом случае обусловлена равенствами:

$$\chi_1(c_1, \dots, c_n) = \chi_2(c_1, \dots, c_n) = \dots = \chi_m(c_1, \dots, c_n).$$

Поделив эти равенства на одно из них, получим

$$\frac{\chi_1(c_1, \dots, c_n)}{\chi_m(c_1, \dots, c_n)} = 1, \dots, \frac{\chi_{m-1}(c_1, \dots, c_n)}{\chi_m(c_1, \dots, c_n)} = 1. \quad (5)$$

Равенство (5) — это условие, при котором написанные суммы являются подобнообразными, а сами равенства — обуславливающими. В силу того, что эти равенства определяют возможность существования группы исходных явлений, то им дается название индикаторов подобия. Возможно существование таких подобных явлений, у которых индикаторы равны единице.

Подобные явления описываются одинаковыми уравнениями, которые условно или безусловно инвариантны по

отношению к подобным преобразованиям входящих в них величин.

Инвариантными называются уравнения, когда множители $\chi_1(c_1, \dots, c_n), \dots, \chi_m(c_1, \dots, c_n)$ непосредственно сокращаются. В этом случае выбор констант подобия ничем не ограничен.

В противном случае они называются условно инвариантными и тогда могут существовать только те подобные явления, константы подобия которых подчиняются условию равенства единице индикаторов подобия.

Вторая теорема подобия формулируется следующим образом: безразмерный степенной комплекс вида $a_1^{\alpha_1}, \dots, a_n^{\alpha_n}$ обладает свойством после подобного преобразования выделить все константы подобия в один множитель, составленный из констант подобия так, как сам комплекс составлен из величин $c_{a_1}^{\alpha_1}, \dots, c_{a_n}^{\alpha_n}$. Условие однородности уравнений, влекущее за собой его инвариантность, заключается в приравнивании этого множителя единице:

$$c = c_{a_1}^{\alpha_1}, c_{a_2}^{\alpha_2}, \dots, c_{a_n}^{\alpha_n} = 1.$$

Подобное преобразование может быть «формальным», когда одни единицы измерения заменяются другими, и «материальным», когда переходят от одного явления к другому, ему подобному. Переходя от индикаторов подобия к критериям подобия, можно сформулировать первую теорему следующим образом: критерии подобных явлений одинаковы: $\pi_1 = \text{idem}, \pi_m = \text{idem}$ или $a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \dots, a_n^{\alpha_n} = \text{idem}$. Члены безразмерного уравнения представляют собой критерии подобия. Таким образом, для случая отсутствия в уравнении дифференциальных операторов преобразование его к безразмерному виду переводит уравнение непосредственно в критериальное уравнение, составленное из критериев подобия.

В случае дифференциальных уравнений простой результат получить затруднительно, так как знаки дифференциалов являются барьерами, не позволяющими объединять множители безразмерных комплексов в одночлены.

критерии, составленные из конечных величин. Система дифференциальных уравнений в частных производных второго и выше порядков является наиболее частным случаем уравнений связи, описывающих физические явления.

Пусть дана система дифференциальных уравнений вида $D_1(x_1, \dots, x_n) = 0$ и она допускает подобное преобразование. Ее всегда можно преобразовать в групповую:

$$D_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}, \bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_n) = 0, \quad (6)$$

где $x_1^{(0)}, x_m^{(0)}$ — критерии, составленные из единиц измерения $a_1,$

a_n ; $\bar{x}_{m+1} = \frac{x_1}{a_1}, \dots, \bar{x}_n = \frac{x_n}{a_n}$ — симплексы, выражающие величины x_1, \dots, x_n в относительных единицах. Эти критерии сохраняют постоянное значение во всех точках исследуемой системы.

В связи с тем, что уравнение (6) содержит только величины, одинаковые для всех подобных явлений, оно численно одинаково для всей группы подобных явлений. Уравнение (6) преобразовывается в уравнение вида

$$D_1(x_1^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}, \bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_n) = 0.$$

Число критериев m в случае существования группы подобных явлений меньше числа величин n , входящих в уравнение. Выбор единиц a_1, \dots, a_n может быть сделан произвольным образом. Очевидно, m критериям будут отвечать m критериальных комплексов $x_1^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}$.

Остальные $n - m$ комплексов останутся выражениями в простых относительных единицах.

Для уравнения (6) можно сформулировать условия их однозначности и показать, что в этом случае уравнение позволяет установить существование решения и его единственность. Решение (6) приводит к системе уравнений:

$$\Phi_j(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (7)$$

которые содержат только конечные величины.

Уравнения (7) есть частные интегралы, отвечающие заданным условиям

однозначности. Заменяя x_1, \dots, x_n на $x_1^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}, \bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_n$, уравнение

$$\Phi_j(x_1^{(k)}, x_m^{(k)}, \bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_n) = 0 \quad (8)$$

будет решением уравнения (7).

После интегрирования уравнение (8) примет вид:

$$\Psi_j\{x_1^{(k)}, \dots, k_1, \dots, k_{m+1}, \dots, s', \dots\} = 0.$$

Таким образом, система уравнений (6) одинакова для группы подобных явлений и может быть преобразована в систему уравнений, численно одинаковых для всей группы, между критериями и симплексами переменных величин и постоянных, входящих в условия однозначности. Единичные явления выделяются из (1) условиями однозначности, различными для каждого единичного явления. Следовательно, все выводы теории подобия можно получить из дифференциальных уравнений, если решение их представляет преодолимые трудности. Этот вывод позволяет переносить во всех таких случаях данные единичного опыта на все явления, подобные ему, и обобщать результаты опытов при помощи теории подобия, составляя критериальные уравнения. Изложенное составляет суть второй теоремы подобия, которая известна под названием π -теоремы. Функциональная зависимость между характеризующими процесс величинами может быть представлена в виде зависимости между составленными из них критериями подобия.

Применяя безразмерные комплексы величин, полученные результаты можно распространить на все подобные процессы, уменьшить число величин, которые следует связать функциональной зависимостью. В том случае вместо $n + s$ величин будем иметь $n + s - m$ безразмерных комплексов и нахождение зависимости между ними упрощается.

Известны следующие дополнительные положения к основным теоремам подобия.

1. Сложные системы подобны, если подобны соответствующие им подсистемы и равны критерии подобия, составленные из величин, не входящих в какую-либо из подсистем.

2. Условия подобия, справедливые для систем с постоянными параметрами, можно распространить и на системы с переменными параметрами при условии совпадения относительных характеристик переменных параметров.

3. Условия подобия, справедливые для изотропных (однородных систем), могут быть распространены и на анизотропные (неоднородные) системы, если анизотропия в сравниваемых системах относительно одинакова.

Третья теорема устанавливает признаки, по которым можно узнать, подобны ли два явления друг другу. Теорема исходит из того, что известны уравнения, которые связывают между собой величины первого явления, и эти уравнения связи отвечают также условиям существования неограниченного числа подобных первому явлению, т. е. возможно существование группы подобных явлений.

Пусть имеется второе явление, подобие которого с первым должны установить.

Геометрическое подобие систем и буквенная одинаковость уравнений связи есть первое необходимое условие для существования подобия.

Подобие условий однозначности явления, выделяющего его из группы других, есть второе необходимое условие подобия. Эти условия такие же, как и у первого явления, только численные значения величин, входящих в них, у второго явления другие. Величины называют моновалентами. Соответственно условия однозначности называют условиями моновалентности явления. Выбор констант подобия в подобных системах не произволен, т. е. их нельзя выбирать как попало, ибо существуют обуславливающие равенства, требующие, чтобы индикаторы подобия, полученные из уравнений связи, равнялись единице.

Следовательно, третье условие, необходимое для существования подобия, — это равенство единице индикаторов подобия, составленных из кон-

стант величин, входящих в условие однозначности.

Этому требованию подобия отвечает равенство критериев, которые носят название определяющих, ибо их инвариантность входит в условия, определяющие подобие явлений.

Третья теорема подобия формулируется следующим образом: подобны те явления, которые происходят в геометрически подобных системах, подчиняются одним и тем же уравнениям связи, у которых моноваленты находятся в численно постоянном отношении и составленные из них критерии равны. Допустим, что уравнения связи

$$D_i(x_1 \dots x_n) = 0 \quad (9)$$

преобразованы к относительным критериальным единицам. Тогда (9) преобразуется в

$$D_i(\bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_n) = 0, \quad (10)$$

где $\bar{x}'_i = \frac{x_i}{a_i}$ — относительные единицы.

Для подобных явлений $\bar{x}'_1 = \text{idem}$, $\bar{x}'_n = \text{idem}$, ..., $x_i^{(k)} = \text{idem}$. Для условия однозначности (9) их моноваленты будут $\vartheta_1, \dots, \vartheta_q$. Для (10) моноваленты примут вид

$$\frac{\vartheta_1}{a_1} = v_1 = \text{idem}, \quad \frac{\vartheta_q}{a_q} = v_q = \text{idem},$$

где a_1, \dots, a_q — соответственные относительные единицы. Для подобных явлений

$$v_1 = \text{idem}, \quad v_q = \text{idem}.$$

Это и есть условия подобия явлений, описываемых уравнением (9). Так как $x_i^{(k)} = \text{idem}$, то

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k)'} \quad \text{или} \quad \frac{x_i^{(k)'}}{x_i^{(k)}} = 1.$$

Таким образом, $c_i^{(\vartheta)} = 1$ есть индикатор подобия, составленный из констант подобия. Выполнение этого требования выделяет существующие подобные явления. Явления подобны, если их выраженные в относительных единицах моноваленты и моновалентные критерии одинаковы.

Для воспроизведения подобных явлений должны быть установлены условия однозначности (условия работоспособности, граничные условия).

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Измерить любую величину K — значит сравнить ее с любой величиной R той же физической природы, т. е. определить, во сколько раз K больше (меньше) R . Для единообразия устанавливают определенное значение величины R и называют ее единицей измерения.

Единицы измерения различных физических величин, объединенные на основе их непротиворечивости друг другу, образуют систему единиц.

Формула, указывающая зависимость единицы измерения, называется размерностью этой величины. Размерность величины находится при помощи определительного уравнения, которое описывает эту величину в математической форме.

Пример 3. Определительное уравнение для скорости имеет вид

$$v = \frac{dL}{dt}.$$

Размерность величины принято указывать при помощи символа, взятого в квадратные скобки $[v] = [L] [T]^{-1}$, где $[L]$, $[T]$ — размерности длины и времени соответственно.

Пример 4. Определительное уравнение для силы имеет вид

$$F = Mg.$$

Тогда $[F] = [M] [L] [T]^{-2}$. Размерность любой физической величины представляет собой произведение возведенных в степень размерностей первичных величин.

Переход от одних единиц измерения к другим. Рассмотрим механические системы, для которых основными единицами измерения являются длина $[L]$, масса $[M]$, время $[T]$. Для того чтобы выбрать вместо них другие, например u_1, u_2, u_3 , необходимо, чтобы размерности $[u_1], [u_2], [u_3]$ были независимыми функциями $[M], [L], [T]$, т. е. $[u_1] \neq [u_2]^\beta [u_3]^\alpha$ при любых α и β ; возможно было однозначное обратное

преобразование, т. е. чтобы $[M], [L], [T]$ можно было единственным образом выразить через $[u_1], [u_2], [u_3]$.

Эти два требования удовлетворяются следующим образом. Пусть размерности u_1, u_2, u_3 таковы:

$$[u_1] = [M]^{\mu_1} [L]^{\lambda_1} [T]^{\tau_1};$$

$$[u_2] = [M]^{\mu_2} [L]^{\lambda_2} [T]^{\tau_2};$$

$$[u_3] = [M]^{\mu_3} [L]^{\lambda_3} [T]^{\tau_3}.$$

После логарифмирования этих выражений получим:

$$\lg [u_1] = \mu_1 \lg [M] + \lambda_1 \lg [L] + \tau_1 \lg [T];$$

$$\lg [u_2] = \mu_2 \lg [M] + \lambda_2 \lg [L] + \tau_2 \lg [T];$$

$$\lg [u_3] = \mu_3 \lg [M] + \lambda_3 \lg [L] + \tau_3 \lg [T].$$

Данная система имеет единственное решение, если определитель, составленный из коэффициентов уравнения, отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_1 & \lambda_1 & \tau_1 \\ \mu_2 & \lambda_2 & \tau_2 \\ \mu_3 & \lambda_3 & \tau_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (11)$$

Условием возможности выбора в качестве основных единиц $[u_1], [u_2], [u_3]$ является существование условия (11). Полученное правило справедливо и для более общего случая при любом числе основных единиц и для любой материальной системы.

Формирование критериев подобия на основе размерностей. Имеем n величин p_i ($i = \overline{1, n}$). Рассмотрим электро-механические явления с основными единицами измерения $[M], [L], [T], [I]$. Размерность любой величины p_i можно выразить через эти единицы:

$$[p_i] = [L]^{\lambda_i} [M]^{\mu_i} [T]^{\tau_i} [I]^{j_i}.$$

Любой критерий подобия есть комбинация величин p_i ($i = \overline{1, n}$):

$$\pi = p_1^{z_1} p_2^{z_2} \dots p_n^{z_n} = c [p_1]^{z_1} [p_2]^{z_2} \dots [p_n]^{z_n},$$

где c — безразмерная величина, или

$$\begin{aligned} \pi &= c [L^{\lambda_1} M^{\mu_1} T^{\tau_1} J^j]^{z_1} \times \\ &\times [L^{\lambda_2} M^{\mu_2} T^{\tau_2} J^j]^{z_2} \times \\ &\times [L^{\lambda_n} M^{\mu_n} T^{\tau_n} J^j]^{z_n} = \\ &= c [L]^{(\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_n z_n)} \times \\ &\times [M]^{(\mu_1 z_1 + \dots + \mu_n z_n)} \times \\ &\times [T]^{(\tau_1 z_1 + \dots + \tau_n z_n)} [J]^{(j_1 z_1 + \dots + j_n z_n)} \end{aligned}$$

Так как критерии подобия — величины нулевой размерности, то

$$\begin{aligned} \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_n z_n &= 0; \\ \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \dots + \mu_n z_n &= 0; \\ \tau_1 z_1 + \tau_2 z_2 + \dots + \tau_n z_n &= 0; \\ j_1 z_1 + j_2 z_2 + \dots + j_n z_n &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Получена система четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

Для выяснения числа независимых решений составляется матрица:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n; \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n; \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n; \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n. \end{vmatrix}$$

Система (12) имеет $n - r$ независимых решений. Любое $(n - r + 1)$ решение будет линейно зависимым от предыдущих:

$$\begin{aligned} z_1^{(n-r+1)} &= k_1 z_1^{(1)} + k_2 z_1^{(2)} + \\ &+ k_3 z_1^{(3)} + \dots + k_{n-1} z_1^{(n-1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_n^{(n-r+1)} &= k_1 z_n^{(1)} + k_2 z_n^{(2)} + \\ &+ k_3 z_n^{(3)} + \dots + k_{n-1} z_n^{(n-1)}. \end{aligned}$$

В соответствии с (11) каждое решение $z_1^{(i)}$, $z_2^{(i)}$, ..., $z_n^{(i)}$ позволяет получить один критерий подобия. Это значит, что $n - r$ независимых решений дадут $n - r$ независимых критериев подобия, которые могут быть выражены через другие критерии подобия. Тогда любой $n - r + 1$ критерий подо-

бия может быть выражен через $n - r$ независимых.

С учетом (11)

$$\pi_i = \rho_1^{z_1^i} \rho_2^{z_2^i} \dots \rho_n^{z_n^i}, \quad (i = \overline{1, n-r}).$$

Эти $n - r$ независимых критериев называются фундаментальными. Кроме фундаментальных критериев подобия возможны другие наборы $n - r$ независимых между собой критериев, каждый из которых выражается через фундаментальные.

Пример 5. Изделие характеризуется следующими критериями подобия:

$$\pi'_i = \pi_1^{k_1^{(i)}} \pi_2^{k_2^{(i)}} \dots \pi_{n-r}^{k_{n-r}^{(i)}};$$

$$\pi'_{n-r} = \pi_1^{k_1^{(n-r)}} \pi_2^{k_2^{(n-r)}} \dots \pi_{n-r}^{k_{n-r}^{(n-r)}}$$

Штрихом обозначены новые критерии. Критерии π' независимы между собой, если коэффициенты k подобны таким образом, что

$$\begin{vmatrix} k_1^{(1)} & k_2^{(1)} & \dots & k_{n-r}^{(1)} \\ k_1^{(2)} & k_2^{(2)} & \dots & k_{n-r}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{(n-r)} & k_2^{(n-r)} & \dots & k_{n-r}^{(n-r)} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (13)$$

Таким образом, независимых критериев может быть $n - r$, где r — ранг матрицы (13).

Количество независимых критериев подобия ($n - r$) для описания исследуемых явлений определяется числом независимых единиц измерения. Появление или исчезновение каждой новой единицы сопровождается появлением или исчезновением нового размерного коэффициента. Этот коэффициент может входить в число определяющих поведение системы величин. Таким образом, увеличение числа единиц измерения позволит уменьшить количество независимых критериев в том случае, если появившиеся размерные коэффициенты не войдут в дифференциальные уравнения системы.

В противном случае число независимых критериев остается прежним.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ

Для определения критериев подобия с помощью π -теоремы необходимо:

выявить m параметров $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_k, \dots, p_s, \dots, p_m$, которые характеризуют изучаемый процесс;

составить матрицы размерностей m параметров;

установить числа k независимых между собой параметров;

представить описание изучаемого явления в критериальной форме;

составить выражения $m - k$ критериев подобия во всех формах записи.

Пример 6. Рассмотрим нахождение критериев подобия вынужденных механических колебаний с демпфированием. Пусть груз с массой M_J колеблется на пружине жесткостью C , причем при перемещении его на расстояние l в вязкой среде появляется сила сопротивления, пропорциональная скорости v : $F_c = -Kv$. На груз действует возмущающая сила $F_R = F \sin \omega t$. Участвующих величин будет семь ($m = 7$):

$$p_1 = M_J; p_2 = \omega; p_3 = F;$$

$$p_4 = l; p_5 = K; p_6 = C; p_7 = t.$$

Функциональная зависимость, подлежащая исследованию, имеет следующий вид:

$$\Phi(M_J, \omega, F, l, K, C, t) = 0. \quad (14)$$

Выберем три ($k = 3$) независимые единицы применительно к системе измерений LMT . Пусть $p_1 = M_J, p_2 = \omega, p_3 = F_0$. Тогда на основании (14) получим систему уравнений:

$$[M_J] = [M]^1 [L]^0 [T]^0;$$

$$[\omega] = [M]^0 [L]^0 [T]^{-1}; \quad (15)$$

$$[F] = [M]^1 [L]^1 [T]^{-2}.$$

Остальные четыре уравнения имеют вид:

$$[l] = [M]^0 [L]^1 [T]^0;$$

$$[K] = [M]^1 [L]^0 [T]^{-1};$$

$$[C] = [M]^1 [L]^0 [T]^{-2};$$

$$[t] = [M]^0 [L]^0 [T]^1.$$

Правильность выбора числа независимых параметров ($k = 3$) проверяется путем вычисления определителя, составленного из размерностей уравнения (15):

$$D_{1-3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1.$$

Поскольку $D_{1-3} \neq 0$, то значение $k = 3$ выбрано правильно и величины M, ω, F действительно независимы.

Нахождение критериев подобия заключается в определении формы записи их согласно уравнению (15) и далее в отыскании значений показателей степени $\alpha'_s, \beta'_s, \xi'_s$.

Применительно к данному примеру будем иметь:

$$\pi_1 = \frac{[l]}{[M_J]^{\alpha'_1} [\omega]^{\beta'_1} [F]^{\xi'_1}};$$

$$\pi_2 = \frac{[K]}{[M_J]^{\alpha'_2} [\omega]^{\beta'_2} [F]^{\xi'_2}};$$

$$\pi_3 = \frac{[C]}{[M_J]^{\alpha'_3} [\omega]^{\beta'_3} [F]^{\xi'_3}};$$

$$\pi_4 = \frac{[t]}{[M_J]^{\alpha'_4} [\omega]^{\beta'_4} [F]^{\xi'_4}}.$$

Определим значения α', \dots, ξ' .
Для рассматриваемого примера

$$\pi_1 = \frac{[L]}{[M]^{\alpha'_1} [T]^{-\beta'_1} [M]^{\xi'_1} [L]^{\xi'_1} [T]^{-2\xi'_1}}.$$

Приравнявая показатели одноименных основных величин, стоящих в числителе и знаменателе, получим

$$\xi'_1 = 1; \alpha'_1 = -1; \beta'_1 = -2.$$

Аналогично

$$\pi_2 = \frac{[M] [T]^{-1}}{[M]^{\alpha'_2} [T]^{-\beta'_2} [M]^{\xi'_2} [L]^{\xi'_2} [T]^{-2\xi'_2}},$$

откуда $\xi'_2 = 0$;

$$\alpha'_2 + \xi'_2 = 1,$$

отсюда $\alpha'_k = 1$;

$$-\beta'_k - 2\xi'_k = -1,$$

отсюда $\beta'_k = 1$.

Аналогично

$$\pi_3 = \frac{[M][T]^{-2}}{[M]^{\alpha'_c} [T]^{-\beta'_c} [M]^{\xi'_c} [L]^{\xi'_c} [T]^{-2\xi'_c}},$$

откуда $\xi'_c = 0$;

$$-\beta'_c - 2\xi'_c = -2,$$

отсюда $\beta'_c = 2$;

$$\alpha'_c + \xi'_c = 1;$$

тогда $\alpha'_c = 1$.

Аналогично

$$\pi_4 = \frac{[T]}{[M]^{\alpha'_t} [T]^{-\beta'_t} [M]^{\xi'_t} [L]^{\xi'_t} [T]^{-2\xi'_t}},$$

откуда $\xi'_t = 0$;

$$\alpha'_t + \xi'_t = 0,$$

отсюда $\alpha'_t = 0$;

$$-\beta'_t - 2\xi'_t = 1;$$

тогда $\beta'_t = -1$.

Критерии подобия имеют, таким образом, следующий вид:

$$\pi_1 = \frac{M_J l \omega^2}{F}; \quad \pi_2 = \frac{K}{M_J \omega};$$

$$\pi_3 = \frac{C}{M_J \omega^2}; \quad \pi_4 = \omega t.$$

Поскольку любые произведения критериев подобия являются также критериями, то справедливы соотношения:

$$(\pi_1^{-1}) \pi_4^2 = \frac{\omega^2 t^2 F}{M_J l \omega^2} = \frac{F t^2}{M_J l} = \pi'_1;$$

$$\pi_2 \pi_4 = \frac{K \omega t}{M_J \omega} = \frac{K t}{M_J} = \pi'_2;$$

$$\pi_3 \pi_4^2 = \frac{C \omega^2 t^2}{M_J \omega^2} = \frac{C t^2}{M_J} = \pi'_3.$$

4. ТОЧНОСТЬ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Постоянные параметры, входящие в критерии подобия, оказывают различное явление на результат исследования. Поэтому при установлении условий подобия при моделировании существенной оказывается не вся совокупность процессов, а только главные процессы изучаемого аппарата. Всякое подобие сложного явления является в какой-то степени приближением.

Подобные модели всегда строятся с некоторой степенью точности. Пусть в оригинале зависимость какой-либо переменной величины x от другой переменной t изображается в виде:

$$x^{\text{ор}} = f^{\text{ор}}(t^{\text{ор}}).$$

В модели аналогичная зависимость выглядит следующим образом:

$$x^{\text{м}} \pm \Delta x = f^{\text{м}}(t^{\text{м}}),$$

где Δx — погрешность моделирования.

Погрешность моделирования определяется следующими факторами:

1) заданием параметров оригинала, входящих в критерии подобия, и воспроизведением параметров на модели (этого вида неточности можно свести к некоторым суммарным неточностям воспроизведения критериев подобия);

2) погрешностями измерений при проведении опытов; они могут быть уменьшены многократным повторением измерений, выбором более точных приборов;

3) наличием факторов, иначе проявляющихся в опытах на модели, чем в опытах на оригинале. Влияние этих факторов может привести к тому, что результирующие зависимости, полученные на модели, будут отличаться от аналогичных зависимостей, полученных в оригинале;

4) неполным учетом в модели факторов, влияющих на главные процессы, т. е. осуществлением приближенного моделирования вместо точного.

Первые три вида неточностей проявляются как при полном, так и при приближенном подобии, четвертый вид неточностей характерен только для приближенного подобия. Рассмотрим

неточности в определении параметров, входящих в критерии подобия, и их влияние на критерии подобия. Обозначим через A, B, C, D некоторые физические параметры, входящие в критерии подобия. $A^{op}, B^{op}, C^{op}, D^{op}$ — идеальные значения этих величин.

Соответствующие им величины в модели:

$$A^M = \frac{A^{op}}{m_A}; \quad B^M = \frac{B^{op}}{m_B};$$

$$C^M = \frac{C^{op}}{m_C};$$

$$D^M = \frac{D^{op}}{m_D},$$

где m_A, m_B, m_C, m_D — масштабные коэффициенты.

Фактические значения этих параметров отличаются от идеальных значений. Поэтому

$$A_{\phi}^{op} = A^{op} (1 \pm \delta_A^{op});$$

$$B_{\phi}^{op} = B^{op} (1 \pm \delta_B^{op}),$$

$$A_{\phi}^M = A^M (1 \pm \delta_A^M);$$

$$B_{\phi}^M = B^M (1 \pm \delta_B^M),$$

где $\delta_A^M = \Delta A/A^M, \delta_B^M = \Delta B/B^M, \dots$ — относительные погрешности, причем $\Delta A, \Delta B$ — абсолютные погрешности.

Критерий подобия может быть представлен как

$$\pi = [A]^{\alpha'} [B]^{\beta'} [C]^{\gamma'},$$

где α', β', γ' — показатели (положительные и отрицательные) степени.

Критерии подобия, составленные из идеальных величин, называются идеальными. Они одинаковы для модели и оригинала.

Фактические критерии отличаются от идеальных:

$$\pi_{\phi}^M = \xi_{\pi} \pi_{\phi}^{op}; \quad \pi_{\phi}^{op} = \xi^{op} \pi; \quad \pi_{\phi}^M = \xi^M \pi;$$

ξ_{π} характеризует погрешность в определении критериев подобия.

Выясним зависимость ξ_{π} от погрешности в определении параметров модели и оригинала. Для этого выразим

критерий подобия один раз через фактические (с учетом погрешностей) параметры модели, а другой раз — через фактические параметры оригинала:

$$\begin{aligned} \pi_{\phi}^{op} &= [A^{op} (1 \pm \delta_A^{op})]^{\alpha'} [B^{op} (1 \pm \delta_B^{op})]^{\beta'} [F^{op} (1 \pm \delta_F^{op})]^{\eta'} = \\ &= \pi (1 \pm \delta_A^{op})^{\alpha'} (1 \pm \delta_B^{op})^{\beta'} \times \\ &\times (1 \pm \delta_F^{op})^{\eta'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{\phi}^M &= \pi (1 \pm \delta_A^M)^{\alpha'} \times \\ &\times (1 \pm \delta_B^M)^{\beta'} (1 \pm \delta_F^M)^{\eta'} \end{aligned}$$

Поделив π_{ϕ}^M на π_{ϕ}^{op} , получим

$$\begin{aligned} \xi_{\pi} &= 1 \pm (\delta_A^M \pm \delta_A^{op}) \alpha' \pm (\delta_B^M \pm \delta_B^{op}) \beta' \pm \\ &\pm (\delta_F^M \pm \delta_F^{op}) \eta' = \\ &= 1 \pm \alpha' \sum_A \delta \pm \beta' \sum_B \delta \pm \\ &\pm \eta' \sum_F \delta. \end{aligned}$$

Анализ этого выражения показывает, что надо как можно больше уменьшить погрешности на модели у тех величин, которые входят в критерии подобия с наивысшим показателем степени.

Идеальным моделированием было бы такое, при котором погрешность δ (в модели и оригинале) отсутствовала. Наличие погрешностей приводит к тому, что при $\pi = idem$ результаты фактически произведенных на модели опытов получаются неоднозначными. Эта неоднозначность связана не только с моделированием, но и с различными условиями проведения опытов.

5. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ МАШИН

Подобие поршневых машин. Мощность поршневой машины

$$N = P_{ср} \frac{\pi D^2}{4} l \frac{n}{60 \cdot 75},$$

где $P_{ср}$ — среднее давление газа; l — длина хода поршня; D — диаметр поршня; n — число оборотов вала кривошипа в минуту.

При подобии модели и реальной машины

$$N_c = \frac{N}{N_1} = P_c l_c^3 n_c$$

или

$$G_c = l_c^3 = \frac{N_c}{P_c n_c}.$$

Для машин с одинаковыми степенями сжатия

$$P_c = \frac{P_H}{P_M} = 1.$$

Следовательно, $N_c = l_c^3 n_c$, откуда $l_c^3/N_c = 1/n_c$ или $G/N = c/n$, где $c = \text{const}$.

Следовательно, при подобии отношение массы (и объема) машины к ее мощности обратно пропорционально числу оборотов машины.

Коэффициент мощности поршневой машины

$$N_c = P_c l_c^3 n_c = \rho_c l_c^3 \frac{l_c^2}{t_c^2}.$$

Сократив это выражение на $l_c^3 n_c$ (при $n_c = t_c^{-1}$), получим

$$P_c = \rho_c v_c^2.$$

При $\rho_c = 1$

$$P_c = v_c^2.$$

Если $P_c = 1$, то $v_c = l_c/t_c = 1$, т. е. $t_c = l_c$.

При одинаковых давлениях на модели и натуре скорости совершающихся подобных явлений одинаковы, времена пропорциональны линейным размерам. Отношение чисел оборотов

$$n_c = 1/t_c = 1/l_c.$$

При $v_c = \rho_c = 1$

$$N_c = \rho_c v_c^3 l_c^3 = l_c^2.$$

При одинаковых степенях сжатия и скорости совершающихся процессов мощности подобных поршневых машин относятся как квадраты линейных размеров (диаметра цилиндра).

Рассмотрим условия подобия при одинаковом числе оборотов и одинаковых плотностях ($t_c = 1$ и $\rho_c = 1$). Тогда $v_c = l_c/t_c = l_c/1 = l_c$, $P_c = v_c^2 = l_c^2$.

Необходимая мощность определяется из соотношения

$$N_c = \rho_c v_c^3 l_c^2 = 1 l_c^3 l_c^2 = l_c^5.$$

Так, если масштаб $l_c = 10$, то развиваемая мощность натуральной машины в этих условиях больше мощности на модели в 10^5 раз.

Подобие электропневматических машин ударного действия. Представление о рабочем процессе машины с двумя степенями свободы можно получить из решения двух совместных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами:

уравнения движения бойка

$$F = \frac{Q_6}{g} \frac{d^2 S_6}{dt^2};$$

уравнения движения поршня

$$M = \frac{d}{d\varphi} \left(J \frac{\omega^2}{2} \right),$$

где Q_6 — масса бойка; S_6 — перемещение бойка; F — результирующая всех сил, приложенных к бойку; ω — угловая скорость кривошипа; M — результирующий момент сил на валу кривошипа с учетом характеристики электродвигателя; J — момент инерции движущихся масс, приведенный к валу кривошипа.

При наличии рассчитанной, а тем более созданной и хорошо работающей машины эффективными методами решения задачи выбора параметров новой машины могут быть теории подобия и размерностей.

В поставленной задаче уравнение движения бойка между двумя ударами выражается в виде

$$\frac{Q_6}{g} = \frac{d^2 S_6}{dt^2} = - \frac{\pi D^2}{4} P_0 \left[\left(\frac{l_0}{l} \right)^m - 1 \right].$$

Тогда

$$J_E = M_k + M_p - \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ}{d\varphi},$$

где $M_k = f(\omega)$ — уравнение характеристики электродвигателя; M_p — момент от действия избыточного воздушного давления.

При одинаковых степенях сжатия для динамически подобной системы

$$\frac{Q_c}{g_c t_c^2} = D_c^2 \rho_{0c}.$$

Характеристическое число

$$\frac{g_c D_c \rho_{0c} t_c}{Q_c l_c} = \frac{g_c D_c^2 \rho_{0c}}{Q_c l_c \omega_c^2} = 1,$$

так как $t_c = 1/\omega_c$. Значение критерия подобия

$$\pi = \frac{g D \rho_0}{Q l \omega^2} = \text{idem}$$

или

$$\pi = \frac{\rho_0 g D^2}{Q l_0 \omega^2} \approx \frac{\rho_0 g \pi D^2 m}{4 Q l_0 \omega^2}.$$

Подобие вентиляторов. Рабочий процесс вентилятора определяют следующие величины: число оборотов в единицу времени n , диаметр винта D , плотность среды ρ , расход воздуха Q , напор H , мощность N . Между этими величинами существует функциональная зависимость

$$f(\rho, n, D, Q, H, N) = 0,$$

которая согласно π -теореме может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия. Для перехода к критериям подобия выберем в качестве основных единиц ρ, n, D , для которых определитель $\Delta \neq 0$. Размерность остальных величин в новых единицах

$$[Q] = [D]^3 [n]; [H] =$$

$$= [\rho] [D]^2 [n]^2;$$

$$[N] = [\rho] [D]^5 [n]^3.$$

Применяя метод нулевых размерностей, получим

$$f\left(1, 1, 1, \frac{Q}{D^3 n}, \frac{H}{\rho D^2 n^2}, \frac{N}{\rho D^5 n^3}\right) = 0$$

или

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0, \quad \text{где}$$

$$\pi_1 = \frac{Q}{D^3 n}; \quad \pi_2 = \frac{H}{\rho D^2 n^2}; \quad \pi_3 = \frac{N}{\rho D^5 n^3}.$$

На основании экспериментальных исследований строится на плоскости

обобщенная характеристика вентилятора $\pi_1 = f(\pi_2)$ с параметром π_3 . Каждая точка плоскости будет при этом соответствовать шести параметрам. Таким образом, постановка эксперимента и обработка опытных данных значительно упрощается.

Из условия равенства критерия π_1 , зная расход воздуха одного вентилятора, можно определить расход воздуха другого.

Подобие электромагнитов. При оценке подобия двух электромагнитов рассматриваются основные параметры:

электрические и магнитные величины — число витков катушки ω , $[\omega] = 0$; ток i , $[i] = [I]$; удельное электрическое сопротивление ρ_R , $[\rho_R] = [L]^3 [M] [T]^{-3} [I]^{-2}$; напряжение на зажимах катушки u , $[u] = [L]^2 \times [M] [T]^{-3} [I]$; магнитная проницаемость вещества магнитопровода μ , $[\mu] = [M] [T]^{-2} [I]^{-2}$, ($\mu = \mu_0 \mu_u$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-8}$ — магнитная проницаемость «пустоты»);

механические величины — некоторый характерный размер l , $[l] = [L]$ (это может быть диаметр или длина сердечника, или максимальный воздушный зазор); плотность ρ , $[\rho] = [M] [L]^{-3}$; жесткость пружины k , $[k] = [M] \times [T]^{-2}$; частота срабатываний электромагнита ω , $[\omega] = [T]^{-1}$;

тепловые величины — коэффициент теплоотдачи η , $[\eta] = [M] [T]^{-3} [\theta]^{-1}$, равный тепловому потоку, приходящемуся на единицу поверхности теплоизлучения при разности температур поверхности и окружающей среды; теплоемкость c , $[c] = [L]^2 [T]^{-2} [\theta]^{-1}$; температура θ , $[\theta] = [\theta]$.

Вводятся следующие упрощающие предположения:

1) принимаем $\mu_H(H_H)/\mu_M(H_M) = \mu_c = \text{const}$, $H_H = H_c H_M$, т. е. ограничиваемся случаем, когда кривые намагничивания подобны;

2) считаем коэффициент теплоотдачи η линейной функцией разности температур поверхности и окружающей среды;

3) пренебрегаем зависимостью удельного сопротивления ρ_k от температуры.

Таким образом, имеется одиннадцать размерных величин, независимо

одна от другой определяющих рабочий процесс электромагнита. Размерность этих величин образуется при помощи пяти основных единиц измерения $[M]$, $[L]$, $[T]$, $[I]$, $[\Theta]$.

Согласно положениям теории размерности критерии подобия в общем случае имеет вид:

$$\pi = \rho_1^{z_1} \rho_2^{z_2} \rho_3^{z_3} \rho_{11}^{z_{11}},$$

где

$$[\rho_i] = [M]^{\mu_i} [L]^{\lambda_i} [T]^{\tau_i} [I]^{\iota_i} [\Theta]^{\theta_i}.$$

В результате решения системы уравнений относительно z_i находим конкретные значения критериев:

$$\pi_1 = \frac{i \rho R}{u} \sqrt{\frac{\eta}{ck}};$$

$$\pi_2 = u \mu \sqrt[4]{\frac{c^3 k}{\rho_R^6 \eta^3}};$$

$$\pi_3 = l \sqrt{\frac{\eta}{ck}}; \quad \pi_4 = \rho u \sqrt[4]{\frac{c^5}{\rho_R^2 k \eta^5}};$$

$$\pi_5 = \frac{\omega}{u} \sqrt[4]{\frac{\rho_R^2 k^3 c}{\eta}};$$

$$\pi_6 = \frac{\theta \rho_R}{u^2} \sqrt{kc\eta};$$

$$\pi_7 = \omega.$$

Если вместо $\sqrt{\frac{\eta}{ck}}$ ввести величину той же размерности l/l , то критерии можно выразить так:

$$\pi'_1 = \frac{i \rho_R}{lu}; \quad \pi'_2 = u \mu \sqrt{\frac{l^3}{k \rho_R^3}};$$

$$\pi'_3 = l \sqrt[3]{\frac{\rho \omega}{k}}; \quad \pi'_4 = \rho u \sqrt[4]{\frac{c^5}{\rho_R^2 k \eta^5}};$$

$$\pi'_5 = \frac{\omega}{u} \sqrt[4]{\rho_R k l}; \quad \pi'_6 = \frac{\theta \rho_R}{u^2} \sqrt{kc\eta};$$

$$\pi'_7 = \omega.$$

Если некоторые параметры для исследования несущественны, соответствующее количество критериев подобия можно исключить из рассмотрения.

Так, если не учитывать тепловых процессов, можно ограничиться критериями

$$\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3, \pi'_5, \pi'_7;$$

$$\pi'_1 = \Phi_1(\pi'_{10}, \pi'_{20}, \pi'_{30}, \pi'_4, \pi'_{50}, \pi'_{60}, \pi'_7);$$

$$\pi'_3 = \Phi_2(\pi'_{10}, \pi'_{20}, \pi'_{30}, \pi'_4, \pi'_{50}, \pi'_{60}, \pi'_7);$$

$$\pi'_6 = \Phi_3(\pi'_{10}, \pi'_{20}, \pi'_{30}, \pi'_4, \pi'_{50}, \pi'_{60}, \pi'_7),$$

где в критериях $\pi'_{10}, \pi'_{20}, \pi'_{30}, \pi'_{50}, \pi'_{60}$ включены фиксированные значения переменных.

Если при моделировании нужно изменять количество витков, то использовать ω как самостоятельный определяющий параметр можно в том случае, если он будет иметь некоторую размерность, а полученная после этого единица измерения будет содержаться в размерности остальных величин.

Подобие коллекторных машин. Критерии подобия переходных процессов в машинах постоянного тока с независимым возбуждением с достаточной точностью можно найти из двух дифференциальных уравнений:

$$u - \omega J(i_B) = L \frac{di}{dt} + iR;$$

$$J_0 \omega \frac{d\omega}{dt} - M_{ном} \omega = v i - i^2 R,$$

где u — напряжение на якоре, $[L^2 M^1 T^{-3} I^{-1}]$; ω — частота вращения якоря, $[L^0 M^0 T^1 I^0]$; i_B — ток возбуждения, $[L^0 M^0 T^0 I^1]$; L и R — суммарные индуктивность и сопротивление цепи якоря (соответственно размерности $[L^2 M^1 T^{-2} I^{-2}]$ и $[L^2 M^1 T^{-3} I^{-2}]$); i — ток якоря; $M_{ном}$ — номинальное значение вращающего момента, $[L^2 M T^{-2}]$.

Разделив первое уравнение на iR , а второе — на u , найдем интегральные аналоги, на основании которых устанавливаем, что определяющих критериев будет три:

$$\pi_1 = \omega \Phi(i_B) / u;$$

$$\pi_2 = J_0 \omega_{ном}^2 / (\rho_{ном} - t) = T_j / t = T_{*j};$$

$$\pi_3 = L / (Rt) = T_{*L},$$

где $\omega_{ном}$ — номинальная частота вращения; $\rho_{ном}$ — номинальная мощность.

Первый критерий, приближенно характеризующий размагничивающее действие якоря, может быть записан так:

$$\pi_1 = \omega_{\text{ном}} \frac{E}{u_{\text{ном}}} \Phi(i_B/i_{\text{ном.в}}),$$

где E ЭДС, соответствующая нормальному току возбуждения; $\Phi(i_B/i_{\text{ном.в}})$ — функция, представляющая собой относительную характеристику холостого хода.

Выбор масштабов для величин i и ω производится на основании дополнительных критериев подобия:

$$iR/u = \text{idem}; \quad \omega/\omega_{\text{ном}} = \text{idem}.$$

Характеристика механического момента M_M в функции должна быть тождественно одинаковой в модели и оригинале; кроме того, должно выполняться условие $u/u_{\text{ном}} = \text{idem}$ (u — подведенное к двигателю напряжение).

Если одновременно учитывать переходные процессы в обмотке возбуждения, то необходимо дополнить критерии подобия условием $L_B(R_B t) = \text{idem}$, где L_B и R_B — индуктивность и сопротивление обмотки возбуждения.

Подобие электромагнитных полей в электрических машинах. Электромагнитные процессы в электрических машинах описываются в общем случае системой уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \bar{H} = k_1 (j + \partial \bar{D} / \partial t);$$

$$\text{rot } \bar{E} = k_2 (-\partial \bar{B} / \partial t),$$

в которых при исследовании всех процессов, кроме волновых, протекающих при высоких частотах, можно не учитывать плотности тока смещения:

$$\partial \bar{D} / \partial t = \epsilon \partial \bar{E} / \partial t = 0.$$

Если изготовить модель некоторой электрической машины, геометрически подобной оригиналу, т. е. связать все линейные размеры модели l^M со сходственными размерами оригинала l^{OP} соотношением $l^M = m_l l^{OP}$, где m_l — масштаб линейных размеров, то соотношение между масштабами других величин можно установить путем сопоставления сходственных уравнений Максвелла, записанных, например, в

прямоугольной системе координат для модели и оригинала. Для этого при помощи масштабов нужно связать величины, характеризующие элементарный объем модели, с величинами оригинала и обеспечить подобие процессов в модели и оригинале.

Если пренебречь токами смещения и изготовить модель и оригинал из одинаковых материалов, обладающих в сходственных элементарных объемах и в сходственных направлениях одними и теми же физическими свойствами, то можно найти соотношения между масштабами величин, характеризующих электромагнитные процессы в элементарном объеме, и масштабом линейных размеров:

$$m_t = m_l^2; \quad m_H = 1; \quad m_i = 1/m_l;$$

$$m_\mu = 1; \quad m_E = m_j; \quad m_\gamma = 1.$$

Для машин, в которых существуют периодически изменяющиеся поля, масштаб частоты (без учета токов смещения)

$$m_f = 1/m_t = 1/m_l^2.$$

Соотношения между масштабами обеспечивают подобие магнитных полей и токов во всех контурах геометрически подобных, насыщенных электрических машин (модели и оригинала), изготовленных из одинаковых материалов, одинаково ориентированных в пространстве.

Моделирование равновесия упругих конструкций. Упругие свойства изотропного материала определяются двумя постоянными: модулем Юнга E и безразмерным коэффициентом Пуассона σ .

Для определения размеров модели достаточно задать некоторый характерный ее размер B . Если в состоянии равновесия сила тяжести конструкции существенна, то удельный вес $\gamma = \rho g$ должен фигурировать в качестве определяющего параметра. Кроме силы тяжести частей сооружения, на него действуют еще внешние нагрузки, распределенные некоторым определенным способом по элементам конструкции. Пусть величина этих нагрузок определяется силой P . Системой определяющих параметров будет $\sigma, E, B, \gamma = \rho g, P$.

Базой для механических подобных состояний упругого равновесия будут три безразмерных параметра:

$$\sigma; E/\rho g B; P/EB^2.$$

Критерии подобия заключаются в равенстве этих параметров на модели и в натуре. При выполнении этих условий все деформации будут подобными. Если модель в n раз меньше натуре, то на модели деформации будут в n раз меньше, чем в натуре.

Если модель и сооружение в натуре выполнены из одного и того же материала, то значения ρ , σ и E одинаковы на модели и в натуре, поэтому для механического подобия необходимо соблюдение условия

$$gB = \text{const.}$$

В обычных условиях $g = \text{const}$, следовательно, для соблюдения механического подобия должно быть $B = \text{const}$, т. е. модель должна совпадать с натурой.

1. ОЦЕНКА СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ НА ОСНОВЕ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

В общем случае параметры исследуемых процессов и явлений могут рассматриваться как случайные величины. Поэтому необходимо применять основные положения теории подобия с учетом стохастического характера процессов и явлений, изучаемых при испытаниях и обеспечении надежности систем.

Принципы подобия в стохастическом смысле основаны на том, что параметры, входящие в критерии подобия, являются случайными величинами, а сами критерии подобия — функциями этих случайных величин. Тогда подобие стохастически определенных физических систем должно основываться на равенстве функций плотностей распределения параметров, характеризующих эти системы.

Классическая теория подобия для определения подобия технических систем сводит задачу к решению отношения вида:

$$\pi = \frac{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k}}{x_{k+1}^{a_{k+1}} x_{k+2}^{a_{k+2}} \dots x_m^{a_m}}, \quad (1)$$

где x_1, x_2, \dots, x_k — параметры первой технической системы; $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m$ — параметры второй, вновь создаваемой технической системы.

Если отношение (1) равно единице $|\pi = 1|$, сравниваемые системы подобны. В противном случае, если $\pi \neq 1$, системы не подобны.

Если π рассматривается как непрерывная случайная величина, то ве-

роятность $P(\pi = 1)$ того, что критерий подобия равен единице, равна нулю. Поэтому необходима постановка задачи определения стохастического подобия. Параметры x_1, x_2, \dots, x_m являются случайными, имеющими функции плотностей вероятности $f(x_i)$, $i = \overline{1, m}$. Оценка подобия путем проверки статистических гипотез проводится следующим образом. Обозначим

$y_1 = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k}$ и $y_2 = x_{k+1}^{a_{k+1}} \times$
 $\times x_{k+2}^{a_{k+2}} \dots x_m^{a_m}$. Тогда нулевая гипотеза H_0 будет состоять в том, что

$$\Phi(y_1) = \Phi(y_2).$$

Альтернативная гипотеза H состоит в том, что

$$\Phi(y_1) \neq \Phi(y_2).$$

Из теории гипотез следует, что сравниваемые технические системы будут подобны, если

$$\pi \in [\underline{\pi}, \bar{\pi}],$$

где $\bar{\pi}$, $\underline{\pi}$ — соответственно верхняя и нижняя границы для π , определяемые для доверительной вероятности γ , причем $1 - \gamma$ — уровень значимости гипотезы H_0 .

Определение $\bar{\pi}$ и $\underline{\pi}$ при заданных γ и n (n — число испытаний) состоит из двух задач:

1) определения функции плотности вероятности $f(\pi)$ случайной величины π по функциям плотности вероятности случайных величин x_1, x_2, \dots, x_m ;

2) определения критической области для критерия π .

Рассмотрим решение первой задачи. Обычно величины x_j при всех j нормируют таким образом, что они изме-

няются от нуля до единицы. Одним из наиболее общих распределений, которое удобно принять, является обобщенное Г-распределение. Тогда $f_j(x_j)$ определяется следующим образом:

$$f_j(x_j) = \frac{\beta_j a_j^{\alpha_j/\beta_j}}{\Gamma(\alpha_j/\beta_j)} x^{\alpha_j-1} e^{-a_j x_j^{\beta_j}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{если } x_j > 0; \quad a_j > 0; \\ \alpha_j > 0; \quad \beta_j > 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

и $f_j(x_j) = 0$ в любом другом случае.

Распределение (2) является трехпараметрическим и имеет своим частным случаем почти все известные законы распределения. Необходимо определить функцию плотности распределения величины π в виде $\pi = \frac{y_1}{y_2}$.

Для этого следует:

определить коэффициенты $a_1, a_m;$

определить нижнюю и верхнюю доверительные границы для π при заданной доверительной вероятности γ .

Для решения задачи построения распределения π целесообразно использовать функцию плотности вероятности семейства Пирсона. Плотность распределения критерия подобия:

$$f(\pi) = \int_0^\infty y_2 f(y_1 y_2) dy_2,$$

где $f(y_1 y_2)$ — совместная функция плотности вероятности случайных величин y_1 и y_2 .

В случае независимости случайных величин $f(y_1 y_2) = f(y_1) \cdot f(y_2)$. Для практических целей можно ограничиться нормальным приближением при определении нижней и верхней доверительной границ $\underline{\pi}, \bar{\pi}$ математического ожидания критерия подобия по следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \bar{\pi} &= \hat{\pi}_{\text{ср}} + \frac{h_\gamma}{\sqrt{n}} \hat{\sigma}_\pi; \\ \underline{\pi} &= \hat{\pi}_{\text{ср}} - \frac{h_\gamma}{\sqrt{n}} \hat{\sigma}_\pi, \end{aligned} \quad (3)$$

где h_γ — квантиль распределения Стьюдента, оцениваемый по значе-

ниям доверительной вероятности $\gamma' = 2\gamma - 1$ и числу n испытаний, по которым определяется критерий подобия.

Для нахождения $f(\pi)$ может быть разработана программа для ЭВМ, которая решит две задачи: нахождение функции плотности вероятности распределения критерия подобия $f(\pi)$ и нахождение среднего значения и дисперсии π по формулам:

$$\pi_{\text{ср}} = \int_0^\infty f(\pi) \pi d\pi;$$

$$\sigma_\pi^2 = \int_0^\infty f(\pi) (\pi - \pi_{\text{ср}})^2 d\pi.$$

Для определения нижних и верхних границ критерия подобия по экспериментальным данным находят оценку:

$$\hat{\pi}_{\text{ср}} = \hat{y}_1 / \hat{y}_2.$$

Величина \hat{y}_1 (аналогично также и \hat{y}_2) находится по формуле:

$$\hat{y}_1 = C \prod_{j=1}^k \frac{\Gamma(\hat{a}_j + \hat{\delta}_j)}{\Gamma(\hat{a}_j + \hat{\beta}_j + \hat{\delta}_j)},$$

где \hat{a}_j и $\hat{\beta}_j$ — оценки параметров, получаемых по экспериментальным данным; $\hat{\delta}_j$ — оценка для δ_j , определяемая по данным, с помощью которых определяется критерий π .

Доверительный интервал для критериев подобия находится при одной и той же доверительной вероятности. Тогда, если соблюдены условия:

$$1 \in [\underline{\pi}_1, \bar{\pi}_1];$$

$$1 \in [\underline{\pi}_2, \bar{\pi}_2], \quad 1 \in [\underline{\pi}_n, \bar{\pi}_n] \quad (4)$$

и эти условия выполняются одновременно, то исследуемые системы можно считать подобными и объединить соответствующую имеющуюся информацию.

Если хотя бы одно из условий (4) не выполняется, то объединение информации может быть частичным, а подобие исследуемых систем приближенным.

Проверка статической гипотезы о подобии двух технических систем осу-

ществляется построением критических областей для математического ожидания критерия π_i , $i = \overline{1, N}$.

Таким образом, можно сформулировать принцип подобия исследуемых объектов и явлений в стохастическом смысле: если исследуемые изделия и физические процессы, протекающие в них, а также параметры, определяющие природу изучаемого события, имеют тождественные плотности распределения, а критерии подобия как функции распределения плотностей вероятности, получаемые на основании равенства функций, плотностей вероятности параметров, приведенных к безразмерному виду, по своей значимости находятся в пределах верхней и нижней границ доверительного интервала, то эти события принадлежат одной генеральной совокупности и их вероятностные характеристики одинаковы.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

Вторая теорема подобия утверждает, что физическое уравнение вида

$$r = W(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \quad (5)$$

может быть заменено зависимостью

$$\begin{aligned} \pi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, r, t) = \\ = \Psi[\pi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, r), \\ \pi_3(x_1, x_2, \dots, x_n, r), \\ \dots, \pi_{n-k}(x_1, x_2, \dots, x_n, r)], \end{aligned} \quad (6)$$

где π — критерии подобия, соответствующим образом составленные из параметров физического уравнения (5).

Если выражением (5) описывается уравнение работоспособности системы или его элемента, то замена его критериальным уравнением (6) позволяет построить модель развития отказа этой системы в критериальной форме. Для этого в качестве неопределяющего критерия π_1 выбирается критерий подобия, включающий в себя временной параметр t , а в качестве определяющих критериев подобия $\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-k}$ — критерии подобия, характеризующие

физическую сущность исследуемого процесса.

В случае стохастически определенных систем выражение (5) является функцией случайных аргументов и построение модели развития отказов в критериальной форме в общем виде является достаточно сложной задачей. Однако проведенные исследования различных физических процессов (изнашивание, старение и т. д.) показывают, что для многих случайных процессов изменения характеристик технических систем можно выделить ряд следующих общих свойств:

1) исследуемые физические процессы — это долговременные необратимые процессы изменения характеристик;

2) оцениваемые показатели надежности количественно описывают наиболее устойчивые свойства распределения параметров исследуемых процессов;

3) математические модели таких процессов могут быть представлены в виде случайных функций, которые имеют определенную функциональную зависимость от времени, а их случайный характер обуславливается случайными факторами, не зависящими от времени;

4) случайные процессы изменения характеристик, как правило, являются нормально распределенными.

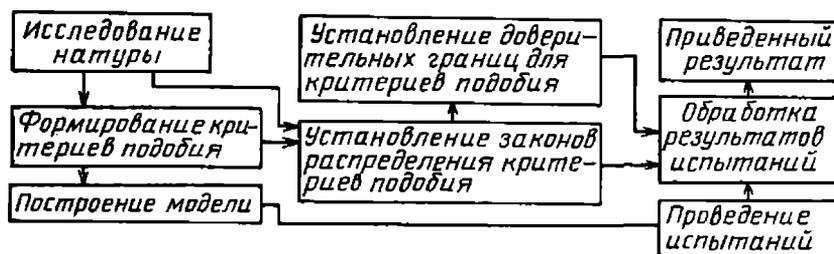
Тогда выражение (6) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} M[\pi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, r, t)] = \\ = \Psi\{M[\pi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, r)], \\ M[\pi_3(x_1, x_2, \dots, x_n, r)], \\ \dots, M[\pi_{n-k}(x_1, x_2, \dots, x_n, r)]\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где математическое ожидание i -го критерия подобия может быть определено следующим образом:

$$\begin{aligned} M[\pi_i] = \pi_i\{M(x_1), M(x_2), \\ \dots, M(x_n), r\} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial x_j^2} \right)_{\mu} D(x_j) + \\ + \sum_{j < l} \left(\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial x_j \partial x_l} \right)_{\mu} K[x_j x_l]. \end{aligned} \quad (8)$$

Рис. 1. Схема этапов исследований на моделях с учетом стохастического характера исследуемых процессов



В этом выражении μ — точка, в которой $x_j = M(x_j)$, а последние два члена представляют собой поправку на нелинейность функции

$$\pi_j(x_1, x_2, \dots, x_n, r).$$

В стохастической постановке π -теорема отражает некоторые общие свойства случайных процессов изменения физических характеристик технических систем. Функциональная зависимость между определяющими физический процесс характеристиками, являющаяся функцией случайных аргументов, может быть представлена в виде неслучайной зависимости между математическими ожиданиями критериев подобия, являющихся функцией от математических ожиданий соответствующих характеристик исследуемого процесса.

В этом случае в классическую схему исследований на основе методов теории подобия и моделирования добавляются этапы, связанные с построением законов распределения критериев подобия, как случайных величин, установления границ доверительного интервала их возможных отклонений и проверки условий стохастического подобия. Схема этапов исследований на моделях с учетом стохастического характера исследуемых процессов представлена на рис. 1.

3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Применение элементов теории стохастического подобия связано с учетом фактора случайности физических параметров при определении критериев подобия.

Величина критерия подобия может быть записана в виде

$$\pi = x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}, \quad (9)$$

где π — критерий подобия; x_i — параметр физического процесса ($i = \overline{1, n}$); γ_i — некоторые степени параметров x_i , определяемые, например, из анализа размерностей.

Для учета случайных факторов при определении критериев стохастического подобия могут решаться задачи двух видов:

1) по известным значениям математических ожиданий и дисперсий $D\{x_i\}$ случайных величин x_i определяются математическое ожидание $m\{\pi\}$ и дисперсия $D\{\pi\}$ (или коэффициент вариации ρ^2) критериев подобия;

2) по известным реализациям критериев подобия π_1, \dots, π_n получают несмещенные оценки математического ожидания $m\{\pi\}$ и дисперсию $D\{\pi\}$.

Существует несколько способов получения критериев подобия на основе установленной номенклатуры параметров, характеризующих физическую сущность исследуемого процесса. Наиболее эффективным способом, позволяющим использовать средства вычислительной техники, являются алгоритмы, разработанные на основе методов линейной алгебры.

Основные этапы алгоритма построения критериев подобия следующие: составление списка параметров x_1, \dots, x_n , характеризующих процесс; составление матрицы из показателей степеней размерностей параметров; выявление числа k независимых между собой параметров путем вычисления ранга матрицы; расчет значений показателей степеней $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ основных параметров; нахождение всех форм записи критериев подобия;

определение выражений критериев подобия во всех формах записи.

Блок-схема алгоритма расчета критериев подобия приведена на рис. 2.

Набор полученных в результате осуществления описанного алгоритма рас-

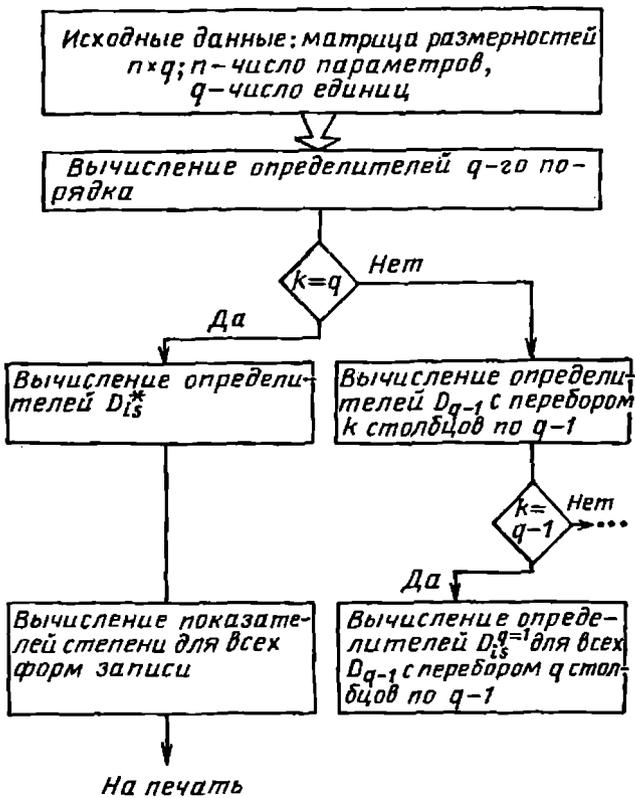


Рис. 2. Блок-схема алгоритма расчета критериев подобия:

$D_{is}^{q=1}$ — определитель, получаемый из определителя D_q путем замены i строчек матрицы размерностей на s строку из размерности q -го параметра

четов критериев подобия избыточен, так как он включает всевозможные варианты безразмерных показателей. Из него необходимо выделить те критерии подобия, которые характеризуют основные свойства исследуемого процесса. Размерные параметры должны быть разнесены по различным критериям подобия.

Показатели степени параметров, входящих в критерии подобия, должны быть целыми числами, наименьшими по абсолютной величине.

Помимо строго формализованного алгоритма расчета процесс определения критерия подобия содержит два этапа, выполняемых на эвристическом уровне:

начальный, когда устанавливается номенклатура основных размерных параметров;

конечный, когда выбираются основные критерии подобия и осуществляется их объединение.

Пример 1. Рассмотрим процедуру определения критериев подобия. Система параметров, характеризующих утеч-

ку газа через предохранительный клапан в условиях воздействия вибрационных нагрузок заданной частоты и с разными амплитудами, имеет вид: $\{Q, \Delta p, \eta, L, d, a, R_{\max}, \omega\}$,

где $Q = Q_v - Q_0$ (Q_v и Q_0 — расход газа в условиях, когда вибрационные нагрузки моделируются и отсутствуют); L и d — характерные геометрические параметры; a — амплитуда вибраций; R_{\max} — сумма наибольших высот микронеровностей уплотнительной поверхности; ω — частота вибраций; Δp — градиент давления; η — динамический коэффициент вязкости.

Используем способ получения критериев подобия, основанный на методе нулевых размерностей.

Размерности для названных выше параметров приведены в табл. 1.

Запишем зависимость параметра утечки от других параметров в общем виде:

$$Q = f(\Delta p, \eta, L, d, R_{\max}, a, \omega). \quad (10)$$

Выберем произвольно три параметра, для которых определитель, составленный из степеней основных размерностей (метр, килограмм, секунда) не равен нулю.

Запишем размерности для трех параметров:

$$\Delta p = [M] [L]^{-2} [T]^{-2};$$

$$[\eta] = [M]^{-1} [T]^{-1} [L]^{-1};$$

$$R_{\max} = [M]^0 [L]^1 [T]^0.$$

1. Значения параметров и их размерности для исследуемого клапана

Параметр	Размерность	Показатель степени		
		M	L	T
Q	$[M] [T]^{-1}$	1	0	-1
Δp	$[M] [L]^{-2} [T]^{-2}$	1	-2	-2
η	$[M] [L]^{-1} [T]^{-1}$	1	-1	-1
d	$[L]$	0	1	0
L	$[L]$	0	1	0
a	$[L]$	0	1	0
R_{\max}	$[L]$	0	1	0
ω	$[T]^{-1}$	0	0	-1

Для них

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Запишем уравнение (10) следующим образом:

$$\frac{Q}{\Delta \rho^{\alpha_Q} \eta^{\beta_Q} R_{\max}^{\gamma_Q}} = \varphi \left(\frac{L}{\Delta \rho^{\alpha_L} \eta^{\beta_L} R_{\max}^{\gamma_L}}; \frac{d}{\Delta \rho^{\alpha_d} \eta^{\beta_d} R_{\max}^{\gamma_d}}; \frac{a}{\Delta \rho^{\alpha_a} \eta^{\beta_a} R_{\max}^{\gamma_a}}; \frac{\omega}{\Delta \rho^{\alpha_\omega} \eta^{\beta_\omega} R_{\max}^{\gamma_\omega}} \right). \quad (11)$$

Значения степеней $\alpha_Q, \beta_Q, \gamma_Q, \alpha_\omega, \beta_\omega, \gamma_\omega$ определяем из условия, что входящие в выражение (11) комплексные параметры являются безразмерными величинами:

$$1) \frac{[Q]}{[\Delta \rho]^{\alpha_Q} [\eta]^{\beta_Q} [R_{\max}]^{\gamma_Q}} = \frac{[M]^1 [T]^{-1}}{[M]^{\alpha_Q} [L]^{-2\alpha_Q} [T]^{-2\alpha_Q} [M]^{\beta_Q} \times [T]^{-\beta_Q} [L]^{-\beta_Q} [L]^{\gamma_Q}} = [M]^{1-\alpha_Q-\beta_Q} [L]^{2\alpha_Q+\beta_Q-\gamma_Q} \times [T]^{-1+2\alpha_Q+\beta_Q} = 1;$$

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha_Q - \beta_Q &= 0; \\ 2\alpha_Q + \beta_Q - \gamma_Q &= 0; \\ -1 + 2\alpha_Q + \beta_Q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Решая систему уравнений (12), получим

$$\alpha_Q = 0; \quad \beta_Q = 1; \quad \gamma_Q = 1.$$

Тогда

$$\pi'_1 = \frac{Q}{\eta R_{\max}}.$$

$$2) \frac{L}{\Delta \rho^{\alpha_L} \eta^{\beta_L} R_{\max}^{\gamma_L}} = \frac{[L]^1}{[M]^{\alpha_L} [L]^{-2\alpha_L} [T]^{-2\alpha_L} [M]^{\beta_L} \times [T]^{-\beta_L} [L]^{-\beta_L} [L]^{\gamma_L}} = [M]^{-\alpha_L-\beta_L} [L]^{1+2\alpha_L+\beta_L-\gamma_L} \times [T]^{2\alpha_L+\beta_L} = 1;$$

$$\left. \begin{aligned} -\alpha_L - \beta_L &= 0; \\ 1 + 2\alpha_L + \beta_L - \gamma_L &= 0; \\ 2\alpha_L + \beta_L &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Решая систему уравнений (13), получим

$$\alpha_L = 0; \quad \beta_L = 0; \quad \gamma_L = 1.$$

Тогда

$$\frac{L}{\Delta \rho^{\alpha_d} \eta^{\beta_d} R_{\max}^{\gamma_d}} = \pi'_2; \quad \pi'_2 = \frac{L}{R_{\max}}.$$

$$3) \frac{d}{\Delta \rho^{\alpha_d} \eta^{\beta_d} R_{\max}^{\gamma_d}} = \frac{[L]}{[M]^{\alpha_d} [L]^{-2\alpha_d} [T]^{-2\alpha_d} [M]^{\beta_d} \times [T]^{\beta_d} [L]^{-\beta_d} [L]^{\gamma_d}} = [M]^{-\alpha_d-\beta_d} [L]^{1+2\alpha_d+\beta_d-\gamma_d} \times [T]^{2\alpha_d+\beta_d} = 1;$$

$$\left. \begin{aligned} -\alpha_d - \beta_d &= 0; \\ 1 + 2\alpha_d + \beta_d - \gamma_d &= 0; \\ 2\alpha_d + \beta_d &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Решая систему уравнений (14), получим

$$\alpha_d = 0; \quad \beta_d = 0; \quad \gamma_d = 1.$$

Тогда

$$\pi'_3 = \frac{d}{R_{\max}}$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{a}{\Delta p^{\alpha_a} \eta^{\beta_a} R_{\max}^{\gamma_a}} &= \\ &= \frac{[L]^1}{[M]^{\alpha_a} [L]^{-2\alpha_a} [T]^{-2\alpha_a} [M]^{\beta_a} \times} \\ &\quad \times [T]^{-\beta_a} [L]^{-\beta_a} [L]^{\gamma_a} \\ &= [M]^{-\alpha_a - \beta_a} [L]^{1 + 2\alpha_a + \beta_a - \gamma_a} \times \\ &\quad \times [T]^{2\alpha_a + \beta_a} = 1; \\ &\left. \begin{aligned} -\alpha_a - \beta_a &= 0; \\ 1 + 2\alpha_a + \beta_a - \gamma_a &= 0; \\ 2\alpha_a + \beta_a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (15), получим

$$\alpha_a = 0; \quad \beta_a = 0; \quad \gamma_a = 1.$$

Тогда

$$\pi'_4 = \frac{a}{R_{\max}}$$

$$\begin{aligned} 5) \frac{\omega}{\Delta p^{\alpha_\omega} \eta^{\beta_\omega} R_{\max}^{\gamma_\omega}} &= \\ &= \frac{[T]^{-1}}{[M]^{\alpha_\omega} [L]^{-2\alpha_\omega} [T]^{-2\alpha_\omega} [M]^{\beta_\omega} \times} \\ &\quad \times [L]^{-\beta_\omega} [T]^{\beta_\omega} [L]^{\gamma_\omega} \\ &= [M]^{-\alpha_\omega - \beta_\omega} [L]^{2\alpha_\omega + \beta_\omega - \gamma_\omega} \times \\ &\quad \times [T]^{-1 + 2\alpha_\omega + \beta_\omega} = 1; \\ &\left. \begin{aligned} -\alpha_\omega - \beta_\omega &= 0; \\ 2\alpha_\omega + \beta_\omega - \gamma_\omega &= 0; \\ -1 + 2\alpha_\omega + \beta_\omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (16), получим

$$\alpha_\omega = 1; \quad \beta_\omega = -1; \quad \gamma_\omega = 1.$$

Тогда

$$\pi'_5 = \frac{\omega \eta}{\Delta p R_{\max}}$$

Таким образом, получено пять критериев подобия, которые в комплексе характеризуют рассматриваемый физический процесс. Однако для того, чтобы более эффективно использовать выведенные критерии подобия, необходимо выполнить ряд операций, обеспечивающих разнесение параметров по разным критериям подобия и объединение их по физической значимости.

Объединив с этой целью критерии π'_1 и π'_5 , а π'_2 с π'_3 , получим

$$\pi_1 = \pi'_1 \quad \pi'_5 = \frac{Q}{\eta R_{\max}} \frac{\Delta p R_{\max}}{\omega \eta} = \frac{Q \Delta p}{\eta^2 \omega};$$

$$\pi_2 = \pi'_3 \quad \pi'_2 = \frac{d}{R_{\max}} \frac{R_{\max}}{L} = \frac{d}{L}.$$

Четвертый критерий останется без изменений.

В результате объединения критериев получим

$$\pi_1 = \frac{Q \Delta p}{\eta^2 \omega} \text{ — критерий подобия,}$$

который характеризует основные физические параметры процесса;

$$\pi_2 = \frac{d}{L} \text{ — критерий подобия, кото-}$$

рый характеризует геометрические параметры клапана;

$$\pi_3 = \frac{d}{R_{\max}} \text{ — критерий подобия, ко-}$$

торый характеризует факторы разгерметизации клапана.

Для того чтобы оценить физическую значимость установленных критериев подобия, рассмотрим результаты эксперимента по исследованию утечки сжатого воздуха через предохранительные клапаны.

Эксперименты проводились с тремя типами предохранительных клапанов, отличающихся друг от друга геометрическими параметрами и параметрами рабочей среды, что позволяло не только оценить физическую значимость, но и универсальность критериев подобия по отношению целой группы типовых изделий.

На рис. 3 представлена зависимость расхода воздуха через предохранительные клапаны от наработки τ и частоты вибраций клапана.

Так как расходная характеристика меняется в зависимости от вибрации, между критериями подобия должна

Q , условные единицы

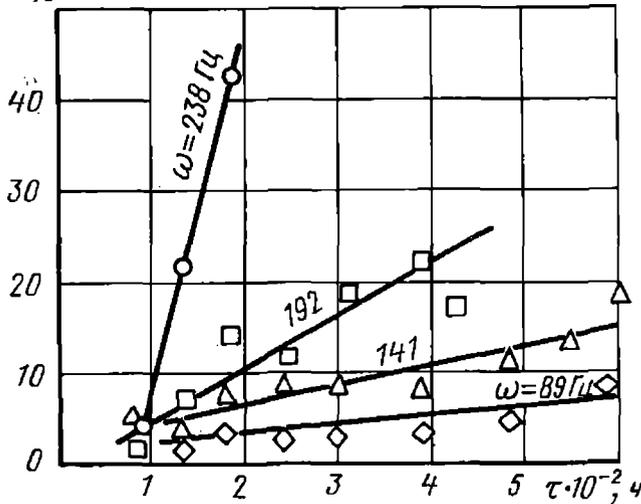


Рис. 3. Зависимость массового расхода Q от наработки τ и частоты вибраций ω клапана

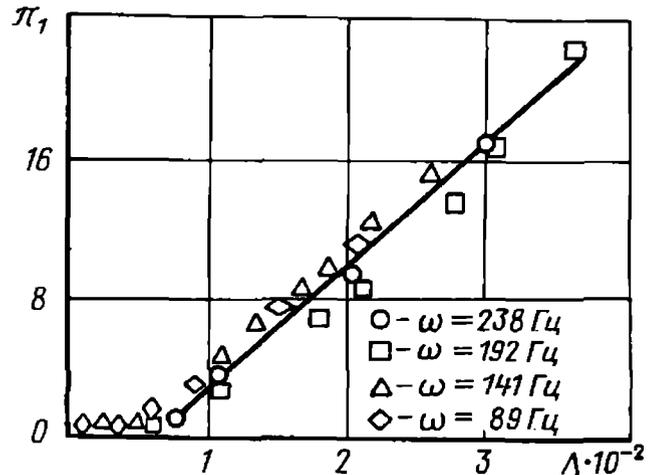


Рис. 4. Зависимость приведенного расхода π_1 от обобщенного параметра Λ

существовать функциональная связь, которую можно представить в виде степенного одночлена:

$$\pi_1 = \pi_2^m \pi_3^n, \quad (17)$$

где m и n — показатели степени, определяемые экспериментальным путем. В рассмотренном эксперименте опытные данные удовлетворительно описываются зависимостью (17) при $m = -1$ и $n = 2$.

На рис. 4 те же экспериментальные данные представлены в виде зависимости между критериями подобия. Экспериментальные данные всех трех пневмоклапанов, полученные с помощью критериев подобия, с небольшим разбросом легли на одну прямую. Это свидетельствует о том, что физические процессы, происходящие во всех пневмоклапанах, подобны.

4. ПОСТРОЕНИЕ КРИТЕРИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ОТКАЗОВ

В зависимости от абстрактности моделей отказов по отношению к физическим процессам, происходящим в исследуемых технических системах, можно выделить три класса моделей: статистические, функционально-статистические и физические.

Статистические модели отказов описываются методами математической статистики, учитывающими закономерности

моментов появления отказов. Это наиболее разработанные и широко используемые модели отказов. Однако они наименее информативны и требуют значительного объема экспериментального материала.

Широко применяются методы оценки надежности технических систем, основанные на изучении и моделировании физических процессов, обуславливающих появление отказов. Эти модели не исключают статистические зависимости, так как параметры, входящие в такие модели, являются случайными величинами и описываются методами математической статистики.

В общем виде функционально-статистическую модель отказов можно записать в виде:

$$r_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (18)$$

где r_i — i -й выходной параметр технической системы, определяющий его работоспособность; x_1, \dots, x_n — параметры, характеризующие конструктивно-технологические особенности и воздействующие нагрузки; φ_i — i -я функциональная зависимость; t — параметр наработки.

Отказ технической системы наступает в момент достижения выходного параметра предельно-допустимого значения. Тогда выражение (18) может быть записано в следующем виде:

$$r_{i \text{ пр}} = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t_0). \quad (19)$$

Наиболее целесообразно использовать для описания функционально-статистических моделей отказов квазидетерминированные математические модели, т. е. модели, которые описываются математическими функциями, реализация которых представляет собой функции заданного вида со случайными аргументами. Выбор такой модели объясняется тем, что исследуемые выходные случайные характеристики количественно описываются наиболее устойчивыми параметрами распределения.

Еще более информативными моделями являются физические модели отказов, которые устанавливают причины изменения конструктивно-технологических параметров технических систем, происходящих в процессе их испытаний или эксплуатации. В общем виде такая модель представляется следующим образом:

$$r_i = \psi_i [x_1(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), x_2(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), \dots, x_n(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), t], \quad (20)$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ — параметры физико-химических процессов, происходящих в материале деталей и узлов изделия, вызывающие изменение выходной характеристики.

Модели отказов разрабатываются для конкретных типов технических систем и, следовательно, характеризуются конкретной индивидуальностью, что затрудняет их построение и применение в практике.

Эффективным методом обобщения и типизации функционально-статистических и физических моделей отказов является применение методов стохастической теории подобия. Анализ этих моделей с использованием соответствующих теорем теории подобия в стохастической трактовке позволяет представить модели в критериальной форме, в которой критерии подобия являются обобщенными параметрами, характеризующими физическую сущность процессов, происходящих в технических системах, а сама модель является типовой для определенного класса процессов.

Практическое использование функционально-статистических моделей от-

казов на основе их типизации связано с решением трех задач:

установления закона распределения вероятностей случайной величины π и определения параметров этого распределения;

установления вида функциональной зависимости φ ;

определения границ применимости типовой модели отказов в критериальной форме для конкретных условий.

В соответствии со второй теоремой функциональная зависимость между физическими параметрами, характеризующими процесс, может быть заменена критериальным уравнением подобия. Тогда, выделив критерий подобия, в который входит параметр наработки, получим критериальное уравнение в виде

$$\Pi_t = W(\pi_1, \pi_j, \pi_k, \pi_t, c_1, c_2, \dots), \quad (21)$$

где $\pi_t = \Phi_\pi(t_1, x_1, x_2, \dots, x_n, r)$ — критерий подобия, включающий параметр наработки t ; $\pi_j = \Psi_{\pi_j}(x_1, x_2,$

$x_n, r)$ при $j = \overline{1, k}$ — критерии подобия, характеризующие конструктивно-технологические параметры и параметры нагружения; c_1, c_2, \dots — некоторые эмпирические коэффициенты.

Критерии подобия, входящие в уравнение, есть функции случайной величины и в общем виде записываются следующим образом:

$$\pi_j = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \dots x_n^{\gamma_n}, \quad (22)$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — некоторые степени параметров, определяемые из анализа размерностей этих параметров.

В общем случае задача определения закона распределения функции случайных величин является весьма сложной задачей, которая решается следующим образом.

Прологарифмируем выражение (22):

$$u = \lg \pi_j = \gamma_1 \lg x_1 + \gamma_2 \lg x_2 + \dots + \gamma_n \lg x_n. \quad (23)$$

Согласно центральной предельной теореме распределение вероятностей

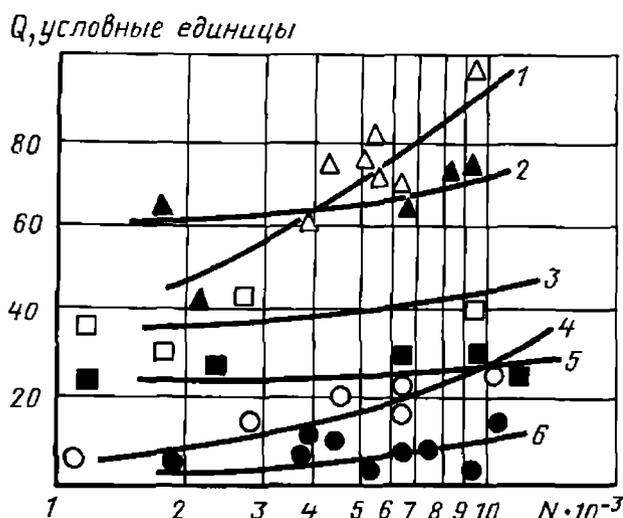


Рис. 5. Графики результатов ресурсных испытаний 1—6-го пневмоцилиндров

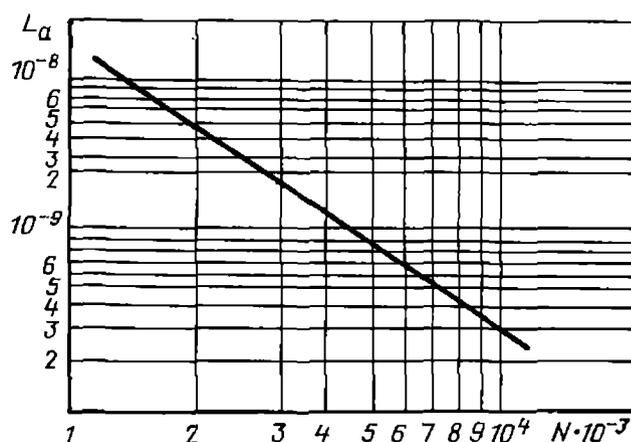


Рис. 6. Результаты ресурсных испытаний пневмоцилиндров, обработанных с помощью теории подобия

функции суммы случайных величин приближается к нормальному закону. Распределение вероятностей критерия подобия π будет приближаться к логарифмически нормальному закону.

Установление вида функциональной зависимости основывается на типизации математических моделей с помощью их критериальной обработки: выражение (21), являющееся критериальным уравнением подобия, заменив функциональное выражение, является типовым для определенного класса технических систем.

Рассмотрим на конкретном примере свойство критериальной обработки обобщать экспериментальные данные, которые положены в основу типизации функционально-статистических и физических моделей отказов.

Для проверки предложенного подхода типизации моделей отказов были проведены эксперименты с группой пневмоцилиндров, различающихся по конструктивным параметрам и параметрам рабочей среды. В процессе ресурсных испытаний происходило изнашивание уплотнительных соединений и в результате увеличивалась интенсивность утечки рабочей среды. Отказом цилиндра считалось превышение величины утечки через уплотнительные соединения.

На рис. 5 представлены данные ресурсных испытаний пневмоцилиндров. Для описания процесса развития отказов, происходящего в пневмоцилиндрах, использована модель расчета

утечек газа через уплотнения с помощью критерия Лагранжа. В общем виде функционально-статистическая модель отказов пневмоцилиндров может быть записана в следующем виде:

$$N = f [L_a],$$

где N — число циклов наработки пневмоцилиндра;

$$L_a = \frac{\mu QL}{(\phi h)^2 \Delta p} \text{ — критерий подобия;}$$

μ — динамический коэффициент вязкости; Q — величина утечки; L — длина контакта уплотнения и уплотняемой поверхности; ϕ — периметр уплотняемой поверхности; h — характеристический размер неплотности; Δp — перепад давлений.

На рис. 6 представлены результаты критериальной обработки данных испытаний, представленных на рис. 5.

Как видно из рис. 6, точки, соответствующие результатам испытаний пневмоцилиндров, с небольшим разбросом легли на одну прямую. Таким образом, в сходственные моменты времени критерии подобия равны, что свидетельствует о подобии физических явлений, имеющих место при испытании этих пневмоцилиндров.

Физические величины, входящие в критерии подобия, являются случайными величинами, поэтому в реальных условиях испытаний естественно наблюдается некоторый разброс значений критериев подобия. При принятии решения относительно правомерности

применения той или иной типовой модели для исследуемой технической системы следует оценить принадлежность вычисленного значения критерия подобия некоторому интервалу, в пределах которого сохраняется подобие физических процессов. Границы интервала могут быть определены по методу, основанному на построении критических областей для математического ожидания подобия. Обычно рассматривают нормальное приближение при определении искомых границ математического ожидания критерия подобия. В этом случае рассматривается параметр u_j , равный логарифму соответствующего j -го критерия подобия:

$$\bar{u}_j = \hat{u}_{срj} + \frac{h_\gamma}{\sqrt{n}} \hat{\sigma}_{u_j};$$

$$\underline{u}_j = \hat{u}_{срj} - \frac{h_\gamma}{\sqrt{n}} \hat{\sigma}_{u_j},$$

где

$$\hat{u}_{срj} = \frac{1}{n} \sum_{\xi=1}^n u_{j\xi}; \quad \hat{\sigma}_{u_j} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{\xi=1}^n (u_{j\xi} - \hat{u}_{срj})^2};$$

h_γ — квантиль распределения Стьюдента, определяемый по значениям доверительной вероятности и числу n испытаний, по которым определялся критерий подобия.

Тогда для обеспечения подобия исследуемого технического устройства по критерию подобия π_j необходимо, чтобы

$$u_j \in [\underline{u}_j, \bar{u}_j].$$

Работоспособность технической системы в целом характеризуется N выходными характеристиками, а каждая i -я выходная характеристика k — критериями подобия. Тогда вектор критериев подобия, определяющих работоспособность технической системы, мо-

жет быть записан в виде $|N \times k|$ матрицы:

$$\Pi = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1k} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{N1} & \pi_{N2} & \dots & \pi_{Nk} \end{vmatrix}$$

Используя известные методы определения выборочных оценок параметров распределения критериев подобия и рассмотренную выше процедуру построения функционально-статистической модели и условий ее применения для i -й выходной характеристики, можно распространить эту процедуру для технической системы в целом.

5. ТОЧНОСТЬ И ДОСТОВЕРНОСТЬ ИССЛЕДОВАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИТЕРИЕВ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

При оценке точности и достоверности результатов исследований при воздействии случайных факторов необходимо учитывать: погрешности в определении параметров и условий эксплуатации; неточности исходной зависимости, описывающей изучаемое явление; погрешности получения критериев подобия вследствие упрощения физического явления; случайные отклонения параметров модели и испытуемого изделия вследствие разброса характеристик материалов, технологии изготовления; случайные отклонения условий эксплуатации и режимов функционирования от расчетных; погрешности проведения опытов; погрешности обработки результатов модельных и экспериментальных исследований.

Погрешности воспроизведения условий испытаний и отработки результатов исследований вследствие действия перечисленных выше факторов вызывают случайные и систематические ошибки.

В зависимости от поставленной задачи, возможностей экспериментальной базы, затрат на проведение исследова-

дований и потерь из-за отличия модели от природы должны приниматься решения по выбору методов полного, неполного или приближенного подоби́я.

Возможности применения теории подоби́я для исследования надежности в процессе экспериментальной обработки могут быть существенно расширены путем использования методов приближенного подоби́я.

В отличие от полного в приближенном подоби́и допускается нарушение взаимодностнозначного соответствия между элементами модели и натурального объекта, которое оценивается аналитически или экспериментально.

Если сравниваются два класса изделий, для которых по результатам испытаний получены оценки критериев подоби́я для изделия $(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \dots, \hat{\pi}_{n\pi})$ и аналога $(\hat{\pi}_1^A, \hat{\pi}_2^A, \dots, \hat{\pi}_{n\pi}^A)$, условие стохастического подоби́я можно записать в виде равенства критериев подоби́я по вероятности:

$$P \{ |\hat{\pi}_j - \hat{\pi}_j^A| < \Delta_\pi \} = \gamma,$$

где Δ_π — требуемая точность определения подоби́я, т. е. допустимая мера неподоби́я; γ — заданная достоверность определения подоби́я.

Систематические ошибки связаны с исходными упрощающими методическими допущениями при построении модели, невозможностью воспроизведения в полном объеме реальных условий технологии производства и эксплуатации, недостаточной глубиной познания оригинала. Влияние этих ошибок на точность и достоверность модельных и экспериментальных исследований в конечном счете проверяется путем сравнения результатов исследований с натурными испытаниями и результатами применения изделия.

Значение критерия подоби́я π^B , полученное по результатам расчетов с учетом опыта обработки и эксплуатации аналогов или по результатам натурных испытаний, принимается в качестве базового значения. Величина π^B характеризует эталон, который желательно достичь при моделировании и проведении испытаний.

Мера неподоби́я:

$$\Delta_\pi = \pi^B - \pi,$$

где π^B — базовое значение критериального комплекса, полученное расчетным путем с использованием информации об аналогах или по результатам натурных испытаний; π — значение критериального комплекса, характеризующего условия и результаты моделирования или отработочных испытаний.

Относительную меру приближенного подоби́я определяют как:

$$\delta = \frac{\Delta_\pi}{\pi^B} = 1 - \frac{\pi}{\pi^B}. \quad (24)$$

Из (24) следует

$$\pi = \pi^B (1 - \delta).$$

С учетом (24) получим

$$\Delta_\pi = \delta \pi^B.$$

Тогда

$$\frac{\Delta_\pi}{\pi} = \frac{\delta}{1 - \delta}. \quad (25)$$

При малых значениях δ выражение (25) запишется в виде:

$$\frac{\Delta_\pi}{\pi} = \delta + \delta^2 + \dots \quad (26)$$

Задаваясь значениями относительной меры приближения δ из (26) для определенного значения критерия подоби́я π , можно назначать граничную величину Δ_π . Задаваемую величину Δ_π используют для формирования критериев достижения требуемого подоби́я модели натурному объекту.

Критерий типа «граничное условие» реализуется путем введения ряда последовательных предположений « π, j », означающих, что при анализе подоби́я формируется модель, которая отражает j свойств ($j = 1, N$) реального изделия.

Целесообразность перехода к следующему уровню сложности модели « $\pi, j + 1$ », имеющей более высокое приближение к натуре, устанавливается в случае, если

$$|\pi_j - \pi_{j-1}| > \Delta_\pi,$$

где π_{j-1} , π_j — значения величин критериальных комплексов, характеризующих исследуемое явление с j -м и $(j-1)$ -м приближениями.

Экономический критерий достижения требуемого подобия путем рассмотрения и реализации последовательного ряда предположений « π , j » записывается в виде функционала:

$$u_j = \Phi_j + C_j,$$

где $\Phi_j = R(\pi_N) - R(\pi_j)$ — потери, обусловленные приближенным подобием модели с j -ми свойствами реального объекта исследования по сравнению с полным подобием модели, отражающей N свойств; C_j — приведенные затраты на создание и реализацию модели с j -ми свойствами реального объекта.

Критерий определения модели оптимальной сложности, отражающей j -свойств реального объекта, имеет вид

$$\min_j u_j.$$

Анализ и оценку приближенного подобия можно использовать для обоснования характеристик объекта испытаний при планировании испытаний и для управления качеством процесса испытаний относительно базового образца.

При создании изделия обычно за основу выбирается некоторый базовый образец по принципам функционирования, конструктивным, схемным и технологическим решениям, материалам, условиям применения.

В задачах управления качеством экспериментальной отработки в виде базового образца целесообразно рассматривать изделие с техническими характеристиками и надежностью, уровень которых устанавливается исходя из заданных требований с учетом опыта отработки изделий.

Тогда сущность модели управления качеством по критериям подобия фактического и базового процессов создания изделий будет состоять в контроле рассогласования траекторий процессов по обобщенным параметрам и использовании меры неподобия для поиска оптимальных технических решений относительно базового образца.

Использование приближенного подобия связано с тем, что постановка задачи обоснования технических решений относительно базового образца как эталона не всегда возможна при условии равенства сходственных критериев подобия ($\pi_v = \text{idem}$, $v = \overline{1, n_\pi}$).

В формализованной постановке управление качеством будет определяться как минимизация неподобия траекторий фактического и базового процессов.

При учете стохастических факторов, когда критерии подобия π_v , $v = \overline{1, n_\pi}$ рассматриваются как случайные величины, управление с целью приближения фактической к базовой траектории создания процесса можно осуществить по критериям:

$$\min \sum_{v=1}^{n_\pi} \alpha_v (\pi_v^B - m_{\pi_v})^2$$

или

$$\min M \left[\sum_{v=1}^{n_\pi} \alpha_v (\pi_v - \hat{\pi}_v^B)^2 \right],$$

где π_v , π_v^B — критерии подобия, характеризующие фактический и базовый процессы создания соответственно ($v = \overline{1, n_\pi}$); m_{π_v} — математическое ожидание v -го критерия подобия; α_v — весовой коэффициент, определяющий важность v -го критерия.

Для решения задач обоснования технических решений относительно базового образца обобщают параметры $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{k+1}, \dots, x_n$ и $x_1^B, x_2^B, x_k^B, x_{k+1}^B, \dots, x_n^B$ сравниваемых изделий и процессов их испытаний в критериальные комплексы таким образом, чтобы объединить исходные зависимости:

$$y^B = \Phi(x_1^B, x_2^B, \dots, x_k^B, x_{k+1}^B, \dots, x_n^B)$$

и

$$y = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

в модель для обобщенного анализа типа

$$\delta y = \varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n_\pi}, A),$$

где $\delta y = \frac{y - y^B}{y^B}$ — относительное от-

клонение фактической характеристики от базовой; A — параметр, определяющий вид зависимости.

В этом случае критерий оптимизации может строиться исходя из достижения минимума относительного отклонения $\min_c \delta y$ при условии сохра-

нения $\pi_\nu = \text{idem}, \nu = \overline{1, n_\pi}$.

Использование условия сохранения инвариантности в виде критерия подоби́я $\pi_\nu = \text{idem}, \nu = \overline{1, n_\pi}$ может позволить распространить полученное оптимальное решение на множество других аналогичных случаев.

Глава 4. Применение методов подобия для обеспечения надежности при проектировании

1. АНАЛИЗ ПОДОБИЯ ПРИ ВЫБОРЕ АНАЛОГА

Привлечение априорной информации об аналогах позволяет расширить совокупность данных о создаваемой сложной технической системе (изделии), оценить уровень надежности и новизны. За счет обоснованного заимствования ранее отработанных технических решений, переноса результатов испытаний и эксплуатации аналога на создаваемое вновь изделие можно сократить объемы теоретических и экспериментальных работ при обеспечении заданных уровней технических характеристик и показателей надежности.

Методы теории подобия для обеспечения надежности сложных систем и изделий с учетом данных об аналогах предусматривают решение взаимосвязанных задач: выбор аналога; обоснование параметров и запасов работоспособности; проверку по результатам испытаний и эксплуатации допущений, принятых при выборе аналогов, построении моделей и критериев подобия; оценку и контроль фактически достигнутого уровня надежности с учетом данных об испытаниях и эксплуатации аналогов.

На рис. 1 показана схема анализа и использования подобия на базе накапливаемой информации в процессе проектирования, экспериментальной отработки, производства и эксплуатации определенного класса систем и изделий.

Одним из условий анализа подобия является создание информационного банка данных о предшествующих разработках, испытаниях и эксплуатации изделий.

Для автоматизации процесса создания изделия решаются следующие задачи:

контролируются структура, состав изделий и изменения конструкторской документации;

анализируются результаты испытаний при экспериментальной отработке, производстве и эксплуатации;

контролируются отклонения технических характеристик изделий от заданных требований и т. д.

Эти задачи позволяют на базе объективной информации провести построение моделей и критериев, используемых для обеспечения и контроля надежности. Анализ подобия при выборе аналогов должен прежде всего начинаться с выделения составных элементов (узлов, приборов, агрегатов, систем), процессов функционирования и экспериментальной отработки, процессов технологии изготовления, используемых материалов, для которых может иметь место тот или иной вид подобия.

Для практического решения указанных задач осуществляется декомпозиция системы (изделия) по структурным элементам и физическим процессам. Одновременно проводится анализ данных об испытаниях и эксплуатации с целью построения моделей функционирования, экспериментальной отработки, оценки и контроля надежности и получения критериев подобия путем преобразования исходных моделей или анализа размерностей.

В результате разукрупнения системы или изделия и обобщения параметров в критериальные комплексы одновременно с оценкой подобия можно решать вопросы, связанные с сокращением числа рассматриваемых параметров.

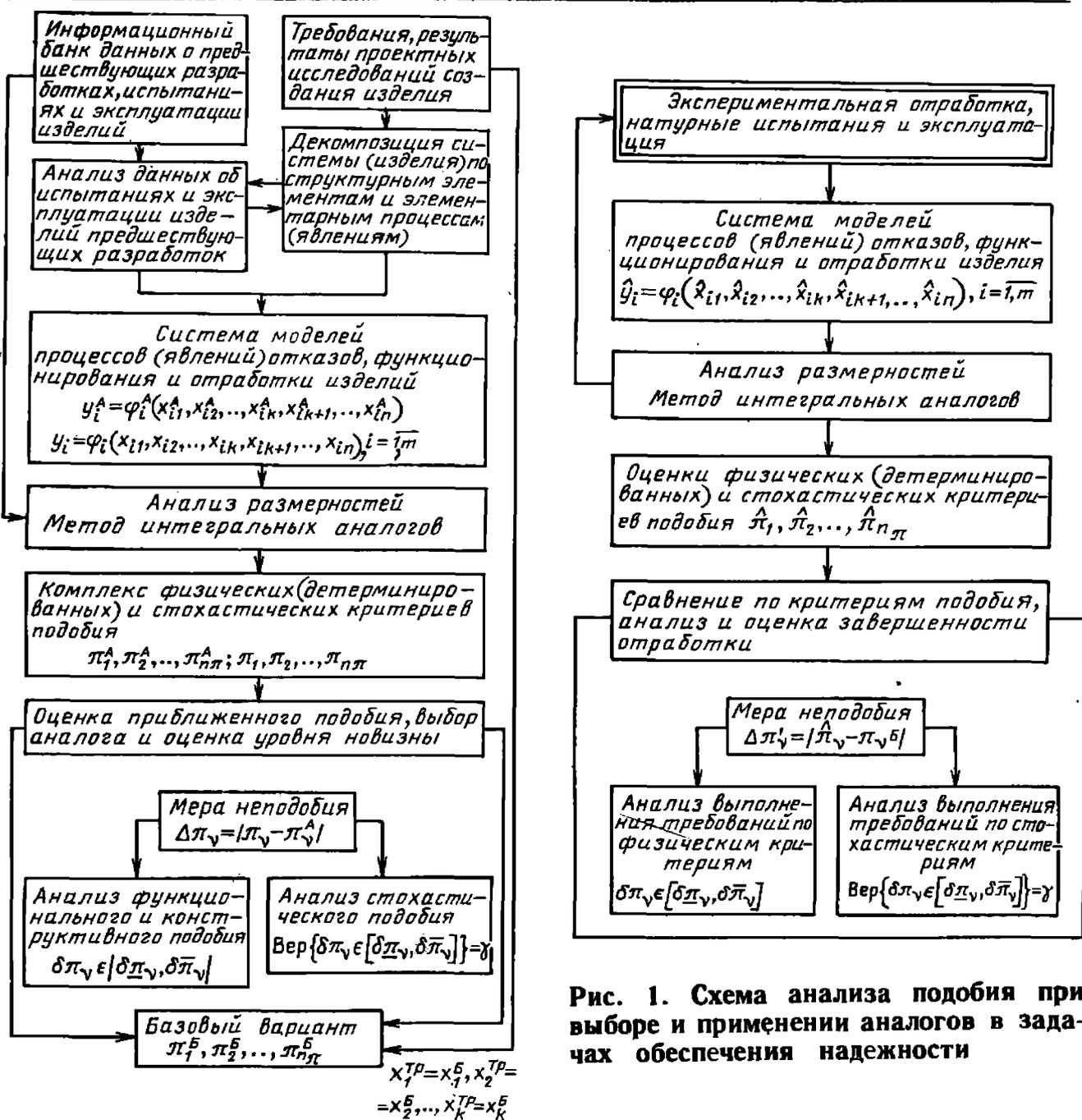


Рис. 1. Схема анализа подобия при выборе и применении аналогов в задачах обеспечения надежности

Анализ подобия проводится с помощью детерминированных и стохастических критериев подобия, полученных для создаваемого изделия $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n\pi})$ и аналога $(\pi_1^A, \pi_2^A, \dots, \pi_{n\pi}^A)$.

При этом детерминированные критерии отражают физическое подобие изделий по функциям, конструктивным параметрам, технологии изготовления, применяемым материалам, процессам возникновения отказов. Стохастические критерии подобия отражают в обобщенном смысле сохранение работоспособности при воздействии внешних случайных факторов,

разбросе параметров, изменении внутренних свойств, приводящих к отказам, схожесть случайных процессов функционирования, возникновения отказов, ход экспериментальной обработки и т. д.

Задача оценки подобия при выборе аналогов из предыдущих разработок и существующих перспективных изделий представляет более общую задачу определения физического и стохастического подобия натурального изделия и его модели, под которой понимается аналог, макет, физическая конструктивно-подобная модель и собственно изделие, испытываемое в условиях, отличных от реальных.

При анализе подобия изделия и его аналога возможно изучение для структурных элементов и элементарных процессов полного, неполного и приближенного подобия. Во многих задачах обеспечения надежности целесообразно рассматривать приближенное подобие.

Рассмотрим случай, когда изделия сравниваются по некоторой выходной характеристике (точности, мощности, разрешающей способности и т. п.) y , зависимость которой от параметров $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ с помощью метода интегральных аналогов или анализа размерностей может быть получена в критериальном выражении.

Критериальное выражение, описывающее характерное явление или процесс для сравниваемых изделий, имеет вид

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_j, \dots, \pi_{n_\pi-1}), \quad (1)$$

где π_j — физический критерий подобия, определенный как детерминированная величина ($j = \overline{1, n_\pi}$).

Результирующая мера отклонения совокупности критериев подобия в общем случае:

$$\Delta\pi_1 = \Phi(\Delta\pi_2, \Delta\pi_3, \dots, \Delta\pi_{n_\pi-1}). \quad (2)$$

Учитывая, что относительная мера неподобия

$$\delta\pi_j = \frac{\Delta\pi_j}{\pi_j}$$

(где $\Delta\pi_j = \pi_j - \pi_j^A$), разложим в ряд Тейлора выражение (2). Запишем относительную меру неподобия в виде

$$\delta\pi_1 = d_2 \frac{\Delta\pi_2}{\pi_2^A} + d_3 \frac{\Delta\pi_3}{\pi_3^A} + \dots + d_{n_\pi-1} \frac{\Delta\pi_{n_\pi-1}}{\pi_{n_\pi-1}^A}, \quad (3)$$

где $d_{n_j} = \partial\pi/\partial\pi_j$ — частная производная ($j = \overline{2, n_\pi - 1}$).

Относительные допустимые отклонения $\overline{\delta\pi}$ и $\underline{\delta\pi}$ могут быть установлены с использованием опытных данных по

результатам расчетов или математического моделирования. Тогда приближенное подобие изделий по физическим критериям будет иметь место при выполнении условия

$$\delta\pi_j \in [\underline{\delta\pi}_j, \overline{\delta\pi}_j], \quad (4)$$

где $\underline{\delta\pi}_j, \overline{\delta\pi}_j$ — нижняя и верхняя границы допуска для изменения значений j -го критерия подобия ($j = \overline{1, n_\pi}$).

При анализе стохастического приближенного подобия целесообразно воспользоваться аппаратом проверки статистических гипотез.

Важным моментом в задачах надежности является проведение прогнозов по данным об аналогах и с учетом заданных требований для установления уровня отработанности, в том числе промежуточного уровня надежности. Результаты прогнозов можно представить в виде комплекса базовых критериев $\pi_1^B, \pi_2^B, \dots, \pi_{n_\pi}^B$, описывающих вариант планируемого процесса экспериментальной отработки.

Заключительным этапом применения методов подобия является использование результатов экспериментальной отработки и натурных испытаний с целью получения обобщенных оценок параметров создаваемых изделий и процесса их экспериментальной отработки в виде критериев $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \dots, \hat{\pi}_{n_\pi}$. С помощью этих критериев проводится проверка адекватности моделей планирования, оценки и анализа результатов испытаний и, соответственно, оценка и контроль фактически достигнутого уровня технических характеристик и показателей надежности создаваемых изделий.

При этом, так же как и при выборе аналогов, осуществляется с помощью критериев подобия анализ уровня отработанности базового и реального изделий путем сравнения значений $\pi_1^B, \pi_2^B, \dots, \pi_{n_\pi}^B$ и оценок критериев подобия $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \dots, \hat{\pi}_{n_\pi}$.

Результаты эксплуатации используются для уточнения критериев подобия и моделей исследования.

2. ВЫБОР АНАЛОГА И ОБОСНОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОТРАБАТЫВАЕМОЙ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Достижение полного подобия создаваемой системы и существующих прототипов может вызвать затруднения или не иметь смысла. Различие конструктивных схем не дает возможности полностью использовать полученные ранее результаты по отработанным и находящимся в эксплуатации системам. Кроме того, процесс отработочных испытаний неоднороден, так как непрерывно осуществляется доработка конструкции. В результате испытаний может возникнуть вопрос о правомерности ранее принятых решений при выборе параметров объектов испытаний и планировании испытаний. Поэтому возникает необходимость разработки методов установления приближенного подобия систем, аналогичных по назначению и физическому принципу работы, но отличающихся конструктивной схемой и соответственно математической моделью.

При выборе аналога с целью объединения информации о результатах испытаний однотипных систем устанавливают группу систем-аналогов; для чего необходимо:

рассмотреть интересующий физический процесс и выявить определяющие параметры, влияющие на изделие при его протекании;

получить критерии подобия, характеризующие протекание рассматриваемого физического процесса;

проанализировать результаты испытаний, которые предполагаются подобными данному физическому процессу.

При этом результаты испытаний систем считаются принадлежащими к одной генеральной совокупности при наличии статистической однородности соответствующих критериев подобия.

Однотипность систем устанавливается путем проверки статистических гипотез, и тогда критерии подобия рассматриваются как случайные величины. Решается задача установления приближенного подобия систем, имею-

щих один и тот же физический принцип функционирования, но отличающихся конструктивными решениями, а следовательно, математическим описанием.

Рассмотрим разрабатываемую систему с технической характеристикой y и базовую систему с характеристикой y^B . Эти системы принадлежат по целевому назначению и физическому принципу работы к одному классу, но отличаются конструктивным исполнением. В качестве базового может быть взята штатная система, предшествующая разрабатываемой, либо некоторая «идеальная» система, которую по причинам технологии изготовления, отсутствия материалов или экспериментальной базы реализовать в настоящее время не удастся.

Вследствие идентичности целевого назначения систем физический смысл характеристик y и y^B одинаков.

Основная техническая характеристика вновь создаваемой системы определяется параметрами x_1, x_2, \dots, x_n , которые могут варьироваться конструктором при проектировании и экспериментальной отработке с целью обеспечения заданных требований к характеристике y . Для обеих рассматриваемых систем существуют математические модели, описывающие зависимость от параметров $x_i, i = 1, n$ в виде:

$$y = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5)$$

Система может описываться уравнением, определяющим характеристику y в неявном виде. Кроме того, система может иметь несколько выходных характеристик и описываться системой уравнений.

В число входных параметров x_1, x_2, \dots, x_n могут включаться первичные, независимые величины, вводимые без учета других параметров, и вторичные, являющиеся функциями первичных.

Для системы, принятой за базовую, например аналога по целевому назначению и принципу функционирования зависимость характеристики y^B от параметров $x_1^B, x_2^B, \dots, x_n^B$ имеет вид

$$y^B = f^B(x_1^B, x_2^B, \dots, x_n^B), \quad (6)$$

Значение основной технической характеристики, которое должна принимать величина y в процессе функционирования, обозначим $y_{ном}$.

Пусть для системы заданы требования работоспособности в виде двусторонних границ:

$$y_{min} \leq y \leq y_{max}, \quad (7)$$

где y_{max} , y_{min} — максимальное и минимальное значения величины соответственно.

С учетом разбросов параметров и влияния случайных факторов условие работоспособности (7) рассматривается в стохастическом смысле и записывается как вероятность пребывания основной технической характеристики в заданных допусках $[y_{min}, y_{max}]$ в виде

$$P \{y_{min} \leq y \leq y_{max}\} = \gamma. \quad (8)$$

Условие стохастического подобия на основе общей закономерности функционирования систем, определяемой условием сохранения работоспособности (8), примет вид

$$P \{y_{min} \leq y \leq y_{max}\} = idem. \quad (9)$$

Кроме установления подобия определяются параметры x_1, x_2, \dots, x_n обрабатываемой системы через параметры $x_1^B, x_2^B, \dots, x_n^B$ аналога с известными результатами испытаний. Чтобы значение основной характеристики y было не хуже y^B , с учетом (9) необходимо выполнить условие:

$$\begin{aligned} P \{y_{min} \leq y \leq y_{max}\} = \\ = P \{y_{min}^B \leq y^B \leq y_{max}^B\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для исследования подобия систем требуется преобразовать параметры зависимостей (5) и (6). Это даст возможность сравнить идентичные критерии подобия и учесть погрешности приближенного подобия.

Для примера рассмотрим случай, когда имеется односторонняя граница допуска y_{min} .

Относительная величина границ интервала есть номинальный коэффициент

искажения. В данном случае для одностороннего допуска

$$\delta_{ном} = \frac{y_{min}}{y_{ном}}. \quad (11)$$

Отклонение математического ожидания значения y от номинального $y_{ном}$ определяется коэффициентом искажения выходной характеристики:

$$\varepsilon_y = \frac{m_y}{y_{ном}}. \quad (12)$$

Принятое допущение идентичности физических принципов функционирования систем дает основание преобразовывать зависимости (5) и, соответственно, (6) к некоторому общему виду, отражающему существующую общую закономерность функционирования систем рассматриваемого класса, хотя они и будут иметь конструктивное отличие:

$$y = y(z_1, z_2, \dots, z_m), \quad (13)$$

где z_j — обобщенная j -я переменная ($j = \overline{1, m}$), представляющая собой функциональные комплексы параметров x_i , $i = \overline{1, n}$.

Преобразование исходных зависимостей осуществляется таким образом, чтобы комплексы z_j и z_j^B , $j = \overline{1, m}$ имели одинаковый вид для уравнений (5) и (6).

Функцию произвольного вида с помощью подобных преобразований можно представить в виде степенного комплекса, используя свойство условной гомогенности функций. Подобное преобразование достигается нормировкой функциональных комплексов z_j , $j = \overline{1, m}$. При этом вводятся новые безразмерные комплексы:

$$\bar{z}_j = \frac{z_j}{z_{0j}},$$

где z_{0j} — характерное значение комплекса z_j , $j = \overline{1, m}$, например, начальное или граничное.

В обобщенной зависимости (13) возможно выделение размерной составляющей $[y]$, представляющей собой комплекс характерных значений параметров, определяющих физическую

размерность и абсолютное значение величины y .

При записи преобразованной зависимости (13) необходимо учесть возможные искажения, связанные с преобразованием, ошибкой модели, разбросом параметров, которые, по существу, и определяют приближенное подобие. Запишем (13) в следующем виде:

$$y = [y] A_y \delta_x \delta_m \delta_z \prod_{j=1}^m \bar{z}_j, \quad (14)$$

где $[y]$ — масштабная характеристика величины y ; A_y — безразмерная константа; δ_x — коэффициент учета влияния разброса параметров изделия; δ_m — коэффициент учета неточности исходной модели; δ_z — коэффициент искажения исходной модели в результате подобных преобразований; \bar{z}_j — j -й безразмерный функциональный комплекс.

Функционал выходной характеристики

$$\Phi_y = \prod_{j=1}^m \bar{z}_j.$$

Номинальному значению выходной характеристики $y_{\text{ном}}$ соответствует некоторое номинальное значение функционала $\Phi_{y_{\text{ном}}}$:

$$y_{\text{ном}} = [y] A_y \Phi_{y_{\text{ном}}}.$$

Для установления подобия систем следует считать равными их функционалы: $\Phi_{y_{\text{ном}}} = \text{idem}$.

Таким образом, на основе комплексов \bar{z}_j , $j = \overline{1, m}$ определяются физические (детерминированные) критерии подобия, характеризующие соответствие номинальных характеристик сравниваемых систем. На основе использования случайных величин δ_x , δ_m и δ_z определяется стохастический критерий подобия, характеризующий выполнение условия подобия по работоспособности (9).

Детерминированное подобие может быть отнесено к системе любых правил преобразования, взаимно однозначно связывающих параметры исследуемых систем. При этом ограничения на правила преобразования не накладываются, так как может использоваться

любой оператор. Вследствие этого детерминированные критерии подобия, определяющие выполнение условия (9), должны представлять собой комбинации не параметров x_i , $i = \overline{1, n}$ в соответствующих степенях как при установлении классического подобия, а комбинации функций z_j , $j = \overline{1, m}$ параметров x_i , $i = \overline{1, n}$.

Стохастическое подобие, в данном случае дополняющее детерминированное подобие, определяет соответствие запасов работоспособности сравниваемых систем по пределам изменения выходных характеристик y и y^B , которые обуславливаются функциональным назначением систем.

Вводится понятие функционального подобия систем данного класса, формулируемое следующим образом: системы, аналогичные по физическому принципу работы и целевому назначению, являются функционально подобными, если между их основными входными параметрами x_1, x_2, \dots, x_n ; $x_1^B, x_2^B, \dots, x_n^B$ в области определения существует однозначная связь, которой соответствует изменение выходных характеристик y и y^B в области допустимых значений.

Основными признаками отличия физических величин являются физическая размерность и физический смысл величин. Поэтому при построении комплексов z_j , $j = \overline{1, m}$, определяющих функциональное подобие систем, должна быть отражена физическая модель процесса функционирования. Если в рассматриваемую математическую модель входят несколько параметров или их функций, комбинация которых имеет определенный физический смысл, это дает основание объединить их в один функциональный комплекс.

Число критериев подобия n_π будет равным числу m функциональных комплексов:

$$\pi_1 = \bar{z}_1 = \text{idem}; \quad \pi_2 = \bar{z}_2 = \text{idem},$$

$$\pi_m = \bar{z}_m = \text{idem}.$$

При этом число m может быть произвольным, но не может превышать число критериев подобия n_π , определяемых согласно второй теореме подобия.

Степень близости критериальной модели, определяющей функциональное подобие, и критериальной модели обычного типа может быть оценена с помощью коэффициента ассоциации:

$$K_a = \frac{m}{n_{\pi \max}},$$

где m — число функциональных z -комплексов; $n_{\pi \max}$ — максимальное число π -критериев, определяемых для каждой модели.

Могут быть использованы различные модели оценки стохастического критерия подобия сравниваемых систем. Учитывая идентичность приемов проектного анализа систем и рассматриваемого метода выбора параметров по критериям подобия его прототипу, используют введенные выше поправочные коэффициенты искажения. Условие (9) примет вид:

$$P \{A_y A_x \geq A_{\text{ном}}\} = \gamma.$$

Тогда стохастический критерий работоспособности

$$\pi_{m+1} = \text{sign} [P \{A_y A_x \geq A_{\text{ном}}\} - \gamma], \quad (15)$$

где

$$\text{sign} [x] = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0; \\ 0 & \text{при } x = 0; \\ -1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

При $\pi_{m+1} = 1$ система выполняет поставленную задачу с запасом работоспособности по отклонениям основных характеристик; в случае $\pi_{m+1} = 0$ система работоспособна, а отклонения ее характеристик соответствуют номинальным; в случае $\pi_{m+1} = -1$ система является неработоспособной и необходимо, уточнив имеющуюся информацию, искать пути конструктивного усовершенствования.

Условие стохастического подобия используется для обоснования параметров объекта обработки, обеспечивающих повышение его характеристик по сравнению с прототипом.

Влияние существующих погрешностей на точность определения характеристик разрабатываемой системы следует оценивать с помощью коэффициен-

тов искажения выходных характеристик системы и аналога.

В соответствии с условием функционального подобия и моделью (13) (пользуясь определениями номинальных параметров и коэффициентов искажения) обобщенный коэффициент искажения

$$\delta_y = \delta_y^B \frac{\delta_m \delta_z}{\delta_m^B \delta_z^B}.$$

Используя аналог как базовый образец, определяется целевой функционал в критериальной форме и осуществляется оптимальный выбор параметров относительно базового образца.

3. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ РЕЗЕРВИРОВАННЫХ ИЗДЕЛИЙ

Структурная и функциональная избыточность является одним из основных способов обеспечения надежности.

При проектировании на основании данных расчетов и моделирования вначале выбирается минимально необходимая структура изделия, обеспечивающая требуемые уровни технических характеристик для выполнения целевого назначения изделия. Затем путем введения резервирования структура доводится до соответствующего уровня сложности, который обеспечивает выполнение заданных функций с требуемой надежностью. Окончательно структура сложной системы доводится в процессе отработки с использованием объективной информации о результатах испытаний и с имитацией отказов на физических моделях, макетах и изделиях. На этом этапе проверяется правильность заложенных проектных решений и выявляются истинные запасы структурной и функциональной избыточности, обеспечивающие требуемую надежность.

Анализ стохастического подобия может быть использован при обосновании запасов структурной и функциональной избыточности по данным об аналогах в процессе моделирования и отработочных испытаний создаваемого изделия.

Для установления подобия изделий по запасам структурной и функциональной избыточности необходимо ис-

пользовать, кроме данных о конкретных физических явлениях, и результаты исследования общих закономерностей функционирования изделий. Стохастическое подобие определяется сравнением изделий по запасам структурной и функциональной избыточности при условии их равнонадежности.

Для невозстанавливаемых изделий при предположении о независимости отказов элементов, т. е. последовательной схемы надежности, вероятность безотказной работы изделия в течение заданной наработки $(0, t)$

$$P(t) = \prod_{j=1}^n P_j(t) = \exp \left[- \sum_{j=1}^n \int_0^t \lambda_j(t) dt \right],$$

где $P_j(t)$ — вероятность безотказной работы j -го элемента; $\lambda_j(t)$ — интенсивность отказов j -го элемента; n — число элементов в изделии.

При постоянной интенсивности отказов

$$P_j(t) = \exp [-\lambda_j t].$$

Интенсивность отказов изделия

$$\Lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j.$$

Условие стохастического подобия $P(t) = \text{idem}$ сравниваемых двух изделий (1-го и 2-го) может быть записана в виде $P_1(t_1) = P_2(t_2)$.

В случае, когда интенсивности отказов зависят от времени, критерий подобия

$$\sum_{j=1}^n \int_0^t \lambda_j(t) dt = \text{idem}.$$

При постоянных интенсивностях отказов

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j t = \text{idem}.$$

Если $t_1 = t_2$, т. е. $t = \text{idem}$, тогда

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = \text{idem}.$$

При общем резервировании вероятность безотказной работы

$$P(t) = 1 - \prod_{j=1}^{k+1} [1 - P_j(t)],$$

где $P_j(t)$ — вероятность безотказной работы j -го устройства (системы) в течение наработки $(0, t)$; $k+1$ — число соединенных параллельно на логической схеме устройств.

Для показательного распределения наработки до отказа в случае общего резервирования

$$P(t) = 1 - \prod_{j=1}^{k+1} [1 - \exp [-\lambda_j t]], \quad (16)$$

где λ_j — интенсивность отказов j -го устройства.

Для высоконадежных устройств ($\lambda_j t \ll 1$) имеем

$$\exp [-\lambda_j t] \approx 1 - \lambda_j t.$$

Тогда (16) можно записать в виде:

$$P(t) \approx 1 - \prod_{j=1}^{k+1} \lambda_j t.$$

Отсюда критерий стохастического подобия изделий с общим резервированием

$$\prod_{j=1}^{k+1} \lambda_j t = \text{idem}.$$

В случае $t = \text{idem}$ и $k = \text{idem}$

$$\prod_{j=1}^{k+1} \lambda_j = \text{idem}.$$

При отдельном резервировании вероятность безотказной работы изделия

$$P(t) = \prod_{i=1}^m \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{k_i+1} [1 - \exp [-\lambda_{ij} t]] \right\}.$$

Для высоконадежных изделий ($\lambda_{ij} \ll 1$) выражение (16) имеет вид:

$$P(t) \approx \prod_{i=1}^m \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{k_i+1} (\lambda_{ij} t) \right\} \approx \\ \approx 1 - \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{k_i+1} (\lambda_{ij} t).$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{k_i+1} \lambda_{ij} t = \text{idem.} \quad (17)$$

В случае одинаковой кратности резервирования по участкам, когда $k_i = k = \text{idem}$, а также при $t = \text{idem}$ выражение (17) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{k+1} \lambda_{ij} = \text{idem.}$$

Для примера при резервировании элементов с двумя видами отказов (обрыв и короткое замыкание) в расчетах надежности рассматривают электрические схемы соединений элементов. Вероятности обрыва и короткого замыкания обозначим соответственно q_0 и q_s . В общем случае для получения критериев подобия с учетом двух видов отказов элементов составляется таблица всех возможных вариантов состояний элементов схемы, выделяются комбинации, при которых схема не работает, вычисляются и суммируются вероятности появления этих комбинаций.

Для схем (например, релейно-контактных), характеризуемых одноименными видами отказов, вероятность отказа

$$Q = Q_0 + Q_s.$$

При последовательном (электрическом) соединении m элементов

$$Q_0 = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - q_{0j}) \approx \sum_{j=1}^m q_{0j};$$

$$Q_s = \prod_{j=1}^m q_{sj}.$$

Тогда критерий стохастического подобия схем

$$\sum_{j=1}^m q_{0j} + \prod_{j=1}^m q_{sj} = \text{idem.}$$

При параллельном (электрическом) соединении элементов

$$Q_0 = \prod_{j=1}^n q_{0j}; \quad Q_s = 1 -$$

$$- \prod_{j=1}^n (1 - q_{sj}) \approx \sum_{j=1}^n q_{sj}.$$

Тогда критерий стохастического подобия схем

$$\prod_{j=1}^n q_{0j} + \sum_{j=1}^n q_{sj} = \text{idem.}$$

Для ремонтируемых, невосстанавливаемых в процессе работы изделий в качестве основных показателей надежности используются вероятность безотказной работы в течение наработки $(0, t)$, а также вероятность безотказной работы в интервале $[t_1, t_2]$. Принципы определения стохастических критериев подобия для таких изделий идентичны рассмотренным выше неремонтируемым изделиям.

Для ремонтируемых изделий, допускающих перерывы в работе, в качестве показателей надежности используются функция готовности $k_{\Gamma}(t)$ или функция простоя $k_{\Pi}(t)$, а также их стационарные значения k_{Γ} и k_{Π} для установившегося режима эксплуатации.

Условие стохастического подобия для изделий, допускающих перерывы в работе, может быть записано в следующем виде:

$$k_{\Gamma} = \text{idem.}$$

Тогда, например, для дублированной схемы с горячим резервом

$$k_{\Gamma} = P_0 + P_1 + P_2,$$

где P_0, P_1, P_2 — вероятности состояния соответственно при отсутствии отказов, с отказом одного из двух устройств (систем) и с отказами двух устройств.

Используя правило определения вероятностей состояний по схеме состояний, можно записать

$$k_T = \frac{\mu_1 \mu_2^2 \lambda_1 + \mu_1^2 \mu_2 \lambda_2 + \mu_1^2 \mu_2^2}{\mu_1 \mu_2^2 \lambda_1 + \mu_1^2 \mu_2 \lambda_2 + \mu_1^2 \mu_2^2 + 2\mu_1 \mu_2 \lambda_1 \lambda_2},$$

где λ_1 , μ_1 и λ_2 , μ_2 — соответственно интенсивности отказов и восстановления 1-го и 2-го изделий.

Если

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}; \quad i = \overline{1,2};$$

$$k_T = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_1 \rho_2 + 2},$$

то критерий стохастического подобия $\rho_1 + \rho_2 + \rho_1 \rho_2 = \text{idem}$.

4. КОЭФФИЦИЕНТЫ ВЛИЯНИЯ ОТКАЗОВ ПРИ АНАЛИЗЕ ЗАПАСОВ РАБОТОСПОСОБНОСТИ

Общее число возможных состояний изделия из n элементов в случае зависимых отказов, вероятности появления которых зависят от того, произошли или нет отказы других элементов:

$$N_3 = \sum_{b=0}^n A_n^b,$$

где A_n^b — число размещений из n элементов по b .

Каждый элемент при этом может находиться в одном из двух состояний: работоспособном или неработоспособном.

Число возможных состояний при зависимых отказах N_3 велико. Кроме того, на практике не удается получить данные для расчета вероятностей состояний, зависящих от порядка отказа элементов. Поэтому принимается допущение о независимости отказов элементов. Тогда число N возможных состояний изделия при двух возможных состояниях каждого элемента 2^n . Естественным является ограничение числа рассматриваемых состояний с учетом коэффициентов их значимости, а также проведения эксперименталь-

ных исследований работоспособности с имитацией отказов на составных частях с последующим объединением результатов испытаний с помощью моделей функционирования изделия, реализуемых на ЭВМ.

В зависимости от целевого назначения изделия, принципов и алгоритма его функционирования, физического состояния технических характеристик, сложности изделия математические модели функционирования изделий разнообразны. Могут рассматриваться детерминированные и стохастические, линейные и нелинейные модели функционирования. Обобщение различных математических моделей функционирования изделий для оценки надежности с учетом влияния отказов элементов возможно с помощью моделей состояния изделия.

При построении моделей состояний исходят из необходимости разрешить противоречие между глубиной описания поведения изделия и возможностью рассмотрения необходимого числа состояний. Критерии отбора состояний должны учитывать точность решения задачи, затраты на исследования при испытаниях, а также потери, связанные с неточностью модели изделия.

В модели состояний рассматривается процесс функционирования изделия на заданном интервале времени $[t_3, t_3]$. В каждый момент времени $t \in [t_3, t_3]$ изделие находится в одном из возможных состояний при отсутствии или возникновении отказов элементов.

В начальный момент времени t_3 изделие находится в работоспособном состоянии.

В процессе функционирования при проведении испытаний или в эксплуатации изделие может остаться в начальном работоспособном состоянии 0, либо перейти с некоторой вероятностью в результате отказов в одно из возможных неисправных состояний.

Каждому из возможных состояний изделия в момент $t \in [t_3, t_3]$ соответствует определенное значение основных технических характеристик изделия $y_s = [y_{1s}, y_{2s}, \dots, y_{ks}]$, где $s = 0, N$ — номер состояния изделия (число возможных состояний N изделия — конечно).

Идеальному состоянию изделия, когда отсутствуют отказы элементов, ставят в соответствие характеристику отклика состояния в виде значения основной характеристики y_0 .

Тогда характеристикой отклика состояния изделия, состоящего из n элементов, на возникновение отказа i -го элемента ($i = \overline{1, n}$) будет y^i .

Характеристикой состояния изделия при отказах i -го и η -го элементов ($i = \overline{1, n}, \eta = \overline{1, n}, i \neq \eta$) будет $y^{i\eta}$.

В случае, когда сначала отказал η -й, а затем i -й элемент ($\eta = \overline{1, n}, i = \overline{1, n}, \eta \neq i$), имеем $y^{\eta i}$.

Наконец, в случае отказов первого, второго, ..., i -го, η -го, ..., n -го элементов характеристикой состояния изделия будет $y^{1, 2, \dots, i, \eta, \dots, n}$.

Обобщение множества откликов $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ в единый количественный признак позволяет оценивать состояние изделия.

Принципиально для каждой из технических характеристик $y_j, j = \overline{1, m}$ может быть построена модель, определяющая зависимость в момент $t \in [t_2, t_3]$ величины отклика от параметров элементов:

$$y_j = \Phi_j(x_1, x_2, \dots, x_n), j = \overline{1, m}.$$

В задачах оптимизации структуры обычно используют функционал, выбрав одну характеристику как определяющую функциональное назначение изделия.

Для исследования влияния состояния изделия при отсутствии или наличии отказов элементов на значения технических характеристик $y_j, j = \overline{1, m}$ в момент $t \in [t_2, t_3]$ используют условия работоспособности, которые в общем задаются в виде

$$y_j \in \Omega_j, j = \overline{1, m},$$

где Ω — допустимая область работоспособности по j -й характеристике.

В стохастической постановке задача уменьшения числа выходных технических характеристик может быть решена с использованием корреляционного анализа. Парно рассматриваются характеристики, например, y_1 и y_2 и оценивается коэффициент парной

корреляции r_{y_1, y_2} . При значительном коэффициенте корреляции любая из двух анализируемых характеристик может быть исключена.

На практике обычно описывают изделие независимыми в стохастическом смысле характеристиками $y_j, j =$

$\overline{1, m}$. Поскольку каждая из них представляет величины различной физической природы и размерности, можно воспользоваться применяемыми при построении критериев подобия приемами нормализации, облегчающими сравнение характеристик и их обобщение при анализе запасов избыточности.

Для оценки весомости состояний вводят учет приоритета отказов с использованием показателей значимости в виде относительных характеристик весомости состояний для выполнения целевой задачи, определяемой соответственно характеристикой $y_j, j = \overline{1, m}$. Значимость состояний оценивается с помощью коэффициентов влияния отказов (КВО) на изменение технических характеристик и вероятностей состояний.

Под коэффициентом влияния отказов понимается относительное отклонение некоторой технической характеристики $y \in \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ изделия, находящегося в s -м состоянии в момент времени $t \in [t_2, t_3]$, от базового значения y_0 , которое характеризует изделие при отсутствии отказов:

$$\delta y_s = \frac{y_0 - y_s}{y_0}.$$

Считается, что величина δy_s остается постоянной в течение некоторого случайного времени до смены состояний изделия в результате очередного отказа (восстановления для восстанавливаемых изделий) какого-либо элемента.

Когда заданы нижнее y_{\min} и верхнее y_{\max} допустимые значения технической характеристики, условие работоспособности можно записать в виде

$$\delta y_{\min} \leq \delta y_s \leq \delta y_{\max}.$$

Оценка величины δy_s производится следующим образом. Изделие раз-

бывается на $l = \overline{1, k}$ подсистем. Состояние l -й подсистемы характеризуется параметрами x_l , связанными определенной зависимостью с характеристикой изделия. Изделие разбивается на подсистемы таким образом, чтобы при отработочных испытаниях имелась возможность исследовать влияние отказов элементов, составляющих подсистему, на параметр x_l и получить, соответственно, коэффициенты влияния отказов элементов δx_{lc} ($l = \overline{1, k}$; $c = \overline{1, n_l}$).

Если каждая подсистема содержит n_l элементов, то для изделия в целом

$$n = \sum_{l=1}^k n_l. \text{ Число состояний каждой}$$

подсистемы $N_l = 2^{n_l}$, $l = \overline{1, k}$.

Используя величины δx_{lc} , рассчитываются коэффициенты δy_s ($s = \overline{1, N}$) для изделия в целом. Таким образом, можно рассмотреть $N =$

$$= \sum_{l=1}^m N_l \text{ состояний изделия по}$$

результатам испытаний подсистем с исследованием для каждой подсистемы N_l состояний.

Исходная зависимость преобразуется для получения в безразмерных относительных единицах комплексов, устанавливающих связь между величинами δy_s ($s = \overline{1, N}$) и величинами δx_{lc} ($l = \overline{1, k}$; $c = \overline{1, N_l}$).

При аддитивном функционале

$$y = \sum_{l=1}^k x_l,$$

коэффициент влияния

$$\delta y_s = \frac{\sum_{l=1}^k \delta x_{lc} x_l}{\sum_{l=1}^k x_l} = \sum_{l=1}^k \delta x_{lc} \bar{x}_l$$

$$(s = \overline{1, N}; \quad c = \overline{1, l}; \quad l = \overline{1, k}).$$

При функционале в мультипликативной форме

$$y = \prod_{l=1}^k x_l$$

коэффициент влияния

$$\delta y_L = \sum_{r=1}^L \left[(-1)^{r-1} \sum_{v=1}^{C_L^r} \left(\prod_{l=1}^r \delta x_{gl}^{\mu} \right)^v \right],$$

где $L = \overline{1, k}$ — число подсистем, в которых одновременно рассматриваются отказы элементов; δx_{gl}^{μ} — коэффициенты влияния отказов gl элементов в l -й подсистеме ($gl = \overline{1, n_l}$); C_L^r — число сочетаний из L по r .

В случае необходимости учета нелинейных зависимостей между характеристиками изделия y_j , $j = \overline{1, m}$ и параметрами подсистем x_{lc} , $l = \overline{1, k}$, $c = \overline{1, n_l}$ используется метод статистического моделирования на ЭВМ с имитацией процесса функционирования изделия путем решения, например, системы дифференциальных уравнений, описывающих его функционирование. При этом модель состояний используется для предварительного отбора частично работоспособных состояний, классификация которых проводится с помощью критериев сокращения пространства рассматриваемых состояний.

При исследовании с помощью коэффициентов отказов изделий, обладающих структурной и функциональной работоспособности используются как единичные показатели в виде δy_s , $s = \overline{1, N}$, рассчитываемые сначала для подсистем и затем для изделия, так и комплексные показатели запасов работоспособности.

Так, показатель запаса работоспособности по отношению к числу отказавших элементов оценивается по формуле

$$\delta a = \frac{N_a}{N_a},$$

где N_a — число работоспособных состояний при отказах $a = 1, 2, \dots$ элементов в подсистемах изделия; N_a — общее число возможных состояний

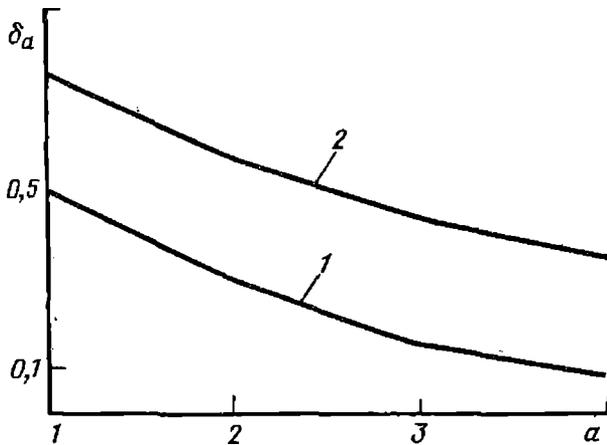


Рис. 2. Изменение запаса работоспособности нерезервированной (1) и резервированной (2) систем при накоплении отказов элементов $a = 1, 2, \dots$

изделия при отказах $a = 1, 2$, элементов.

В случае применения другого показателя запаса работоспособности при отказах элементов целесообразно возможный диапазон значений коэффициентов влияния отказов разбить на $\xi = 1, 2, \dots, n$ интервалов и рассчитать для каждого ξ интервала

$$\delta_a^\xi = \frac{r_\xi}{N},$$

где r_ξ — число величин δy_a , характеризующих работоспособные состояния при $a = 1, 2, \dots$, попавших в ξ -й интервал; N — общее число состояний изделия.

На рис. 2 приведен график изменения комплексного показателя запаса работоспособности δ_a системы, а на рис. 3 показано распределение запаса работоспособности δ_a^ξ системы в диапазоне возможных значений коэффициентов влияния отказов.

На графике рис. 2 видно, что значения коэффициентов влияния отказов и комплексные показатели запасов работоспособности могут быть использованы для анализа качества и надежности систем с различными видами резервирования, применение которой обеспечивает способность изделия работать при накоплении отказов элементов.

Применение коэффициентов влияния отказов позволяет учитывать

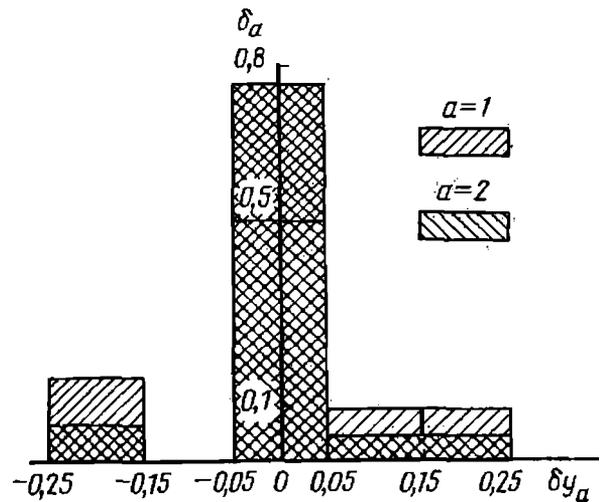


Рис. 3. Распределение запаса работоспособности системы в диапазоне возможных значений коэффициентов влияния отказов

функциональные связи между элементами, место, занимаемое элементом в структуре изделия, степень нарушения структуры и связей между элементами при накоплении отказов.

5. АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ СО СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ

Анализ приближенного подобия может быть использован для построения моделей состояний с помощью коэффициентов влияния и их применения с целью анализа возможных отказов по результатам физического моделирования и испытаний отдельных подсистем (устройств, блоков, агрегатов).

Для решения задачи необходимо увязать технические характеристики изделия в целом с параметрами подсистем, запасами работоспособности и вероятностями состояний при возникновении и накоплении отказов элементов. Связь технических характеристик и запасов работоспособности оценивается с помощью коэффициентов влияния отказов. Устанавливается взаимосвязь коэффициентов влияния отказов y_s и вероятностей состояний $P_s(t)$, $s = \overline{1, N}$, $t \in [t_2, t_3]$.

Коэффициенты влияния δx_{lc} , $l = \overline{1, k}$, $c = \overline{1, n_l}$ получаются по результатам имитации отказов в про-

цессе физического моделирования или отработочных испытаний l -й подсистемы.

Кроме непосредственного анализа запасов работоспособности в изделии по отношению к отказам, возникающим в подсистемах, используют расчетные коэффициенты δy_s , $s = \overline{1, N}$ для отбора работоспособных и неработоспособных состояний при оценке показателя надежности в виде вероятности безотказного функционирования:

$$P(t) = \sum_{s=0}^N P_s(t),$$

где $P_s(t)$ — вероятность пребывания изделия в s -м работоспособном состоянии; N — число работоспособных состояний.

Анализ функционирования изделия, когда коэффициенты отказов используются для отбора частично работоспособных состояний с целью последующего их исследования, может быть произведен с помощью выражения

$$P(t) = \sum_{s=0}^{N_1} \Phi_s P_s(t),$$

где Φ_s — коэффициент значимости s -го состояния в виде вероятности выполнения задачи изделием в s -м состоянии; $P_s(t)$ — вероятность пребывания изделия в s -м состоянии; N_1 — число отобранных частично работоспособных состояний.

Величина коэффициента значимости Φ_s (при $s = \overline{1, N_1}$) оценивается путем статистического моделирования с имитацией на ЭВМ модели функционирования изделия.

Для восстанавливаемых изделий используют коэффициенты отказов с целью отбора состояний при расчетах по известным формулам коэффициента готовности k_r .

Оценки вероятностей состояний $P_s(t)$, $s = \overline{1, N}$ производят с использованием методов, позволяющих при расчетах коэффициентов δy_s с целью отбора состояний и вычисления вероятностей $P_s(t)$, $s = \overline{1, N}$ организовать рекуррентную процедуру оценивания приближенного подобия

модели исследуемого изделия некоторой эталонной модели.

При предположении показательного распределения времени пребывания изделия в работоспособных состояниях используют процедуру составления системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс перехода изделия из одного состояния в другое вследствие отказов элементов. В случае невозстанавливаемого изделия одноразового действия для состояний $\delta y_0, \delta y_i, \delta y_{ij}, \dots, \delta y_{ij} \dots$ пр имеется система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} P'_0(t) &= - \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \right] P_0(t); \\ P'_i(t) &= \lambda_i P_0(t) - \\ &\quad - \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(i)} \right] P_i(t); \\ P'_{ji}(t) &= \lambda_j^{(i)} P_i(t) - \\ &\quad - \left[\sum_{\eta=1}^n \lambda_{\eta}^{(ij)} \right] P_{ij}(t); \\ P'_{ji}(t) &= \lambda_i^{(j)} P_j(t) - \\ &\quad - \left[\sum_{\eta=1}^n \lambda_{\eta}^{(ji)} \right] P_{ji}(t); \\ P'_{ij\dots\eta\rho}(t) &= \\ &= \lambda^{(ij\dots\eta)} P_{ij\dots\eta}(t) - \\ &\quad - \left[\sum_{\varepsilon=1}^n \lambda_{\varepsilon}^{(ij\dots\eta\rho)} \right] P_{ij\dots\eta\rho}(t), \end{aligned} \right\} (18)$$

где $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}; \dots$; $\eta = \overline{1, n}$; $\rho = \overline{1, n}$; $i \neq j \neq \dots \neq \eta \neq \rho$ с начальными условиями:

$$P_0(0) = 1; P_i(0) = 0; P_{ji}(0) = 0; \\ P_{ji}(0) = 0 \dots; P_{ij\dots\eta\rho}(0) = 0.$$

В (18) обозначены: $P_0(t)$ — вероятность пребывания изделия в течение времени t в состоянии при отсутствии отказов элементов; $P_i(t)$ — вероятность пребывания изделия в течение времени t в состоянии с отказавшим

i -м элементом ($i = \overline{1, n}$); $P_{ij}(t)$ — вероятность пребывания изделия в течение времени t в состояниях с отказавшими i -м и j -м элементами ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$; $i \neq j$); $P_{ij\dots\eta\rho}(t)$ — вероятность пребывания изделия в течение времени t в состояниях с отказавшими i -м, j -м, η -м, ρ -м элементами ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$; $\eta = \overline{1, n}$; $\rho = \overline{1, n}$; $i \neq j \neq \eta \neq \rho$); $\lambda_j^{(i)}$, $\lambda_\eta^{(ij)}$, $\lambda_\rho^{(ij\dots\eta)}$ — интенсивности отказов j -го, η -го, ρ -го элементов при отказах соответственно i -го, i -го и j -го; i -го, j -го и η -го элементов.

При использовании соотношения

$$P_{ij\dots\eta\rho}(t) = \exp \left[- \sum_{\varepsilon=1}^n \lambda_\varepsilon^{(ij\dots\eta\rho)} t \right] \times \\ \times \left[\int_0^t \lambda_\rho^{(ij\dots\eta)} P_{ij\dots\eta}(t) \times \right. \\ \times \exp \left[- \sum_{\varepsilon=1}^n \lambda_\varepsilon^{(ij\dots\eta\rho)} \times \right. \\ \left. \left. \times t \right] dt \right] + C_{ij\dots\eta\rho}$$

с начальными условиями

$$P_{ij\dots\eta\rho}(0) = C_{ij\dots\eta\rho}$$

можно получить рекуррентные соотношения для вычисления вероятностей состояний $P_s(t)$ или иначе $P_0(t)$, $P_i(t)$, $P_{ij}(t)$, ..., $P_{ij\dots\eta\rho}(t)$.

Процедура вычисления коэффициентов влияния отказов и вероятностей состояний, являющаяся основой анализа приближенного подобия, состоит в следующем. При анализе невосстанавливаемых изделий в ЭВМ вводятся массивы исходных данных $A[\delta x_{lc}]$, $B[\lambda_{lc}]$, $l = \overline{1, k}$, $c = \overline{1, N_l}$. Массив $A[\delta x_{lc}]$ содержит коэффициенты δx_{lc} , полученные экспериментальным путем по результатам испытаний подсистем. Коэффициент δx_{lc} характеризует c -е состояние l -й подсистемы. В массив $B[\lambda_{lc}]$ включаются интенсивности λ_{lc} переходов

l -й подсистемы из c -го состояния в результате отказов элементов. Оценка коэффициентов значимости состоит в последовательном вычислении множества $M[\delta y_s]$, $s = \overline{1, N}$ коэффициентов δy_s при рассмотрении отказов элементов в одной l -й подсистеме ($l = \overline{1, k}$), затем в двух l -й и d -й ($l = \overline{1, k}$; $d = \overline{1, k}$; $l \neq d$) и так далее. Число подсистем, в которых одновременно исследуется влияние отказов элементов на работоспособность изделия, определяется требуемой точностью оценки $\Delta_{\text{тр}}$ показателей качества и надежности, а также величиной коэффициентов δy_s при проверке подмножеств работоспособных $M_p[\delta y_s]$, $s = \overline{1, r}$ и неработоспособных $M_n[\delta y_s]$, $s = \overline{1, z}$ состояний. Требования к точности вычисления показателей качества и надежности, число рассмотренных состояний учитываются при формировании критериев приближенного подобия на основе анализа последовательного расширения совокупности состояний изделия.

Номера коэффициентов δx_{lc} , $l = \overline{1, k}$, $c = \overline{1, N_l}$ используются как признаки для определения адресов, хранящихся в памяти ЭВМ характеристик надежности элементов из массива $B[\lambda_{lc}]$. В каждом цикле расчета δy_s и идентификации s -го состояния проводится обращение к массиву $B[\lambda_{lc}]$ и затем к подпрограмме расчета вероятностей $P_s(t)$. С целью ускорения процесса отбора подмножеств состояний $M_p[\delta y_s]$ и $M_n[\delta y_s]$ коэффициенты в массиве $A[\delta x_{lc}]$, $l = \overline{1, k}$, $c = \overline{1, N_l}$ располагаются по возрастанию их величины, что позволяет существенно сократить затраты машинного времени на перебор состояний изделия.

При исследовании восстанавливаемых изделий в ЭВМ вводится дополнительно к массивам исходных данных $A[\delta x_{lc}]$ и $B[\lambda_{lc}]$ также массив $E[\mu_{lc}]$, $l = \overline{1, k}$, $c = \overline{1, N_l}$, содержащий интенсивности восстановления l -й подсистемы, находящейся в c -м состоянии.

Для восстанавливаемых изделий используется рекуррентная процедура

расчета коэффициента готовности k_r без составления и решения системы дифференциальных уравнений. Эта процедура удобна для реализации на ЭВМ и анализа приближенного подобия как и система рекуррентных соотношений на основе последовательного исследования постепенно расширяющейся совокупности состояний изделия.

Тогда коэффициент готовности

$$k_r = \frac{\sum_{i=1}^r T_i}{\sum_{\eta=1}^d T_\eta + \sum_{i=1}^r T_i},$$

где T_η — произведение интенсивностей переходов из всех состояний графа $G(N)$ в η -е неработоспособное состояние при движении в η -е состояние по кратчайшему пути в направлении стрелок; T_i — произведение интенсивностей переходов из всех крайних состояний графа $G(N)$ в i -е работоспособное состояние при движении в i -е состояние по кратчайшему пути в направлении стрелок; r — число работоспособных состояний; d — число неработоспособных состояний.

При этом $N = d + r$.

В процессе расчета $\delta y_s, s = \overline{1, N}$ с целью анализа возможных отказов изделия последовательно наращивается матрица состояний $M[\delta y_s]$, идентичная графу $G_s(N)$, описывающему дерево отказов. Каждой вершине графа ставится в соответствие коэффициент $\delta y_s, s = \overline{1, N}$ с целью определения работоспособных и неработоспособных состояний. Формируются признаки, характеризующие пути переходов в графе $G(N)$ с учетом восстановления отказавших элементов и адреса обращения к массивам $B[\lambda_{lc}]$ и $E[\mu_{lc}], l = \overline{1, k}, c = \overline{1, N_l}$.

Основой анализа приближенного подобия модели с целью исследования запасов структурного и функционального резервирования при возможных отказах элементов является последовательное расширение пространства рассматриваемых состояний изделия по критериям, учитывающим точность

модели и возможный эффект ее применения.

Сущность процедуры последовательного расширения пространства рассматриваемых состояний при анализе приближенного подобия можно применить к критерию типа граничное условие, учитывающему требуемую точность оценки показателей качества и надежности, а также к технико-экономическому критерию, учитывающему затраты на построение и использование модели и возможные потери из-за недостаточного приближения используемой модели к полной модели состояний, принятой в качестве эталона.

В критерии типа граничное условие, задавшись уровнем точности $\Delta_{тр}$ оценки показателя надежности, рассматривают последовательно следующие допущения:

возможны $N_1 = n + 1$ состояний изделия, которые соответствуют отказу одного из n элементов, в течение времени t ;

возможны $N_2 = n + 1 + A_n^2$ состояний изделия, когда в течение времени t неработоспособны не более чем два элемента;

возможны $N_j = n + 1 + A_n^2 + \dots + A_n^j$ состояний изделия, когда в течение времени t неработоспособны не более чем j элементов; здесь A_n^j — число перестановок из n по j .

Доли времени нахождения в других состояниях считаются пренебрежимо малыми.

Показатель $P^{(j+1)}$, например вероятность безотказной работы $P^{(j+1)}(t)$ или коэффициент готовности $k_r^{(j+1)}$, целесообразно оценивать в том случае, когда

$$|\Delta P^{(j)}| = |P^{(j)} - P^{(j+1)}| \geq \Delta_{тр}.$$

Для восстанавливаемых изделий, модель состояний которых относится к классу $\frac{\lambda_i}{\mu_i} = \rho, i = \overline{1, n}$, в табл. 1 приведены зависимости j (номера последовательного предположения) от числа элементов n изделия и требуемой

точности $\Delta_{тр}$ оценки коэффициента готовности.

Расчеты показывают, что чем ниже надежность элементов, а это соответствует обычно повышению его иерархического уровня в структуре изделия, тем большее число возможных отказов элементов в подсистемах в течение времени t необходимо рассматривать при оценке показателей качества и надежности.

При анализе приближенного подобия используется также технико-экономический критерий $\mathcal{E}(P)$.

Общие потери при оценке показателя надежности P по результатам имитации отказов при испытаниях и последующем анализе состояний на ЭВМ с использованием предположения «П, j »:

$$u(j) = \Phi(j) + C(j),$$

где $\Phi(j)$ — потери, обусловленные погрешностью оценки показателя P за счет нерассмотренных состояний; $C(j)$ — приведенная стоимость оценки с использованием j -го предположения.

Критерий останова процедуры построения модели состояний, исходя из обеспечения приближенного подобия, имеет вид

$$\min_j u(j).$$

Возможный вид функции $u(j)$ представлен на рис. 4.

Таким образом, переход к оценке показателя P по предположению «П, $(j+1)$ » осуществляется, когда $u(j) - u(j+1) > 0$,

где $u(j) = C(j) - \mathcal{E}[P(j)]$.

Для модели состояний функция $C(I)$ может быть задана в виде:

$$C(I) = C \sum_{i=1}^j A_n^i,$$

где C — стоимостной коэффициент весомости рассмотренных состояний; A_n^i — число перестановок из n по i .

Функция $\mathcal{E}[P(j)]$ может быть задана в виде:

$$\mathcal{E}[P(j)] = \alpha [1 - P(j)] + \beta [\ln(1 - P(j))] \gamma,$$

где α, β, γ — эмпирические коэффициенты, зависящие от типа изделия.

Указанные критерии целесообразно использовать при построении модели состояний в два этапа. На первом этапе отобрать варианты модели по критерию типа граничное условие и затем в рамках отобранных вариантов рассмотреть возможность использования технико-экономического критерия.

На рис. 5 показана графическая зависимость изменения вероятности безотказной работы $P(t)$ для системы, которая получена с использованием модели состояний и традиционным расчетным методом с помощью структурных схем надежности. Модель состояний построена по критерию приближенного подобия типа граничное условие. При расчетах $P(t)$ использовались коэффициенты влияния отказов элементов, полученные аналитическим путем для отдельных блоков системы.

Применение коэффициентов влияния отказов и критерия типа гранич-

1. Число отказавших элементов при исследовании работоспособности системы

$\Delta_{тр}$	ρ	Число отказавших элементов j при числе элементов n										
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
0,001	0,001	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
	0,01	2	2	3	4	4	5	6	8	8	9	9
0,00001	0,0001	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
	0,001	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
	0,01	3	4	5	6	7	9	10	13	14	14	14

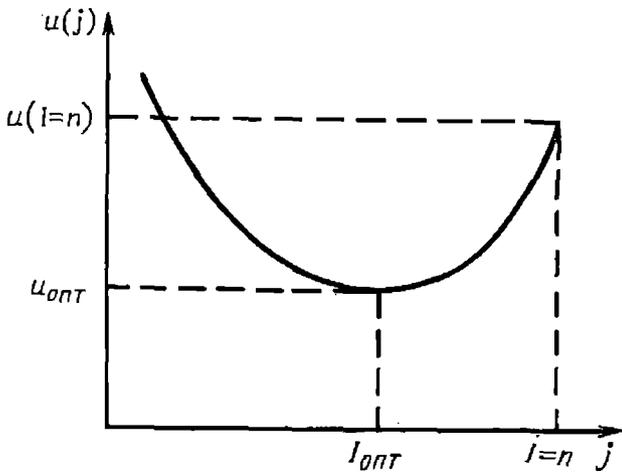


Рис. 4. Вид функции $u(j)$ суммарных затрат на анализ надежности и потерь из-за погрешности оценки надежности

ное условие для построения модели позволяет более глубоко учесть запасы структурной и функциональной работоспособности в системе, что видно на графиках рис. 5.

На рис. 6 представлены графики изменения вероятности отказа $Q(t) = 1 - P(t)$ для различных вариантов структурного построения системы, рассчитанные с помощью модели состояний и при использовании критерия приближенного подобия типа граничное условие.

Таким образом, метод анализа приближенного подобия и построения модели состояний с учетом коэффициентов влияния отказов позволяют устанавливать глубину и рацио-

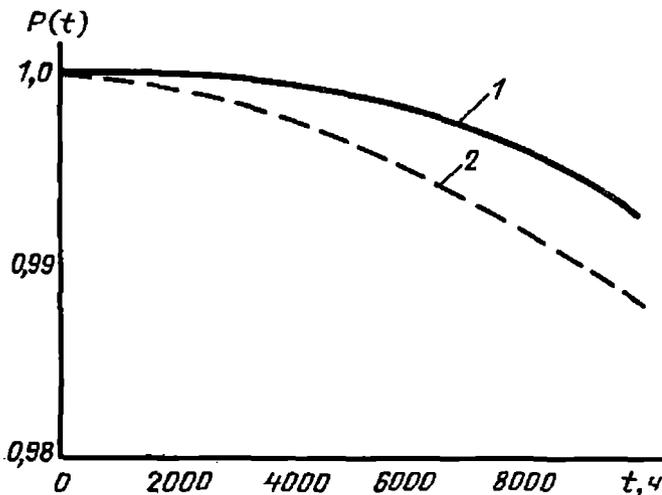


Рис. 5. Зависимость $P(t)$ при оценках с использованием модели состояний с учетом коэффициентов влияния отказов (1) и модели структурных схем надежности (2)

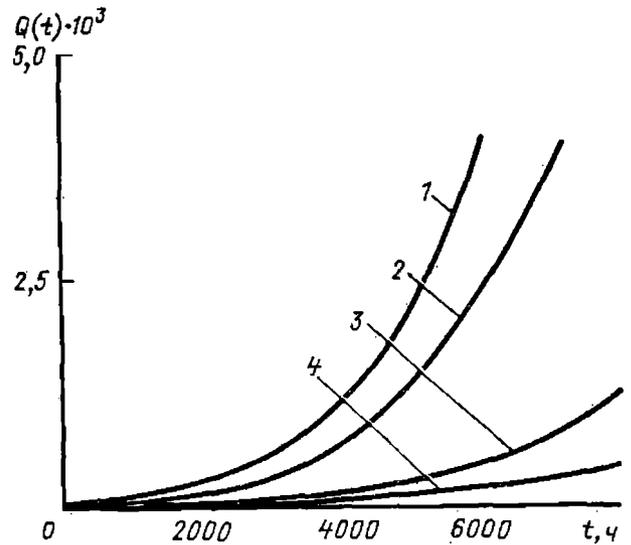


Рис. 6. Зависимости вероятности отказа $Q(t)$ системы:

1 — двукратное общее горячее резервирование с одним комплектом холодного резерва; 2 — четырехкратное общее горячее резервирование; 3 — элементное резервирование с общим двукратным резервированием; 4 — каскадное резервирование с общим двукратным горячим резервом

нальные объемы исследования возможных отказов при их анализе в процессе испытаний и с помощью ЭВМ.

6. ОБЪЕДИНЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ОЦЕНКЕ НАДЕЖНОСТИ ПО СХЕМЕ НАГРУЗКА — ПРОЧНОСТЬ

Полное удовлетворение требований подобия ранее созданных и вновь разрабатываемых изделий не всегда возможно. Однако на уровне отдельных подсистем изделия и физических явлений различных уровней условия подобия могут быть соблюдены. Если имеются результаты испытаний по двум или некоторому ряду аналогичных изделий, то при соблюдении определенных условий подобия можно получить обобщенную статистическую информацию, которая используется для оценки надежности вновь создаваемого изделия. При этом полученная обобщенная информация может быть использована с целью количественного анализа надежности изделий по двум основным схемам: нагрузка — прочность или успех — отказ.

Пусть количественная информация по измеренному признаку, необходимая для оценки надежности изделия по схеме нагрузка — прочность, представлена в виде N пар выборочных рядов из некоторых генеральных совокупностей (где N — число предполагаемых изделий аналогов):

$$R_{11}, R_{12}, \dots, R_{1n}; R_{21}, R_{22}, \dots \\ \dots, R_{2m}; \dots; R_{N1}, R_{N2}, \dots, R_{Nl}; \quad (19)$$

$$Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{1n}; Q_{21}, Q_{22}, \dots \\ \dots, Q_{2m}; \dots; Q_{N1}, Q_{N2}, \dots, Q_{Nl},$$

где R и Q — несущая способность (прочность) и нагрузка на рассматриваемое изделие в обобщенном смысле (силовая статическая, силовая динамическая, ударная, вибрационная, тепловая и т. д.).

Выборочные ряды (19) следует выразить в безразмерных относительных величинах, что позволит сделать соответствующие обобщения для изделий, результаты испытаний которых в общем случае несут неоднородную статистическую информацию. Для этого каждый член рядов (19) необходимо разделить на соответствующие средние значения несущих способностей изделий \bar{R}_j ($j = 1, 2, \dots, N$). Общие члены рядов можно записать как

$$\hat{R}_{ij} = \frac{R_{ij}}{\bar{R}_j}; \quad (20)$$

$$\hat{Q}_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\bar{Q}_j} \frac{1}{\eta_j}, \quad (21)$$

где R_{ij} , Q_{ij} , \hat{R}_{ij} , \hat{Q}_{ij} — абсолютные и относительные значения несущих способностей (прочностей) и нагрузок в i -м испытании из j -й серии наблюдений ($i = 1, 2, \dots, n, m, \dots, l$ соответственно для каждого j -х пар наблюдений, $j = 1, 2, \dots, N$; N — число рассматриваемых изделий; \bar{R}_j , \bar{Q}_j — средние выборочные значения величины R_j и Q_j , полученные по n, m, \dots, l наблюдениям соответственно в j -х сериях опытов). Обозначим $\eta_j = \bar{R}_j / \bar{Q}_j$.

Если в (20) и (21) использовать не опытные значения величин \bar{R}_j и \bar{Q}_j , а теоретические (расчетные), то можно получить соответствующие система-

тические погрешности детерминистических методов расчета несущих способностей и нагрузок. Учет систематических погрешностей расчетных соотношений несущих способностей и нагрузок позволяет более эффективно использовать аналитические методы количественного анализа надежности изделий на этапах проектирования и опытной отработки. Одним из важных практических приложений статистической обработки информации, получаемой по результатам испытаний аналогичных изделий, в безразмерной относительной форме является получение систематических погрешностей детерминистических методов и теорий расчета несущих способностей изделий и действующих на них нагрузок.

Порядок получения обобщенной статистической информации по результатам испытания однотипных изделий для последующего ее использования при количественном анализе надежности аналогичных изделий по схеме нагрузка — прочность следующий. По результатам измеренных количественных признаков (нагрузок, перемещений и т. д.) при испытаниях N предполагаемых изделий-аналогов составляются статистические выборки рядов (18), (19), члены которых представляются затем в виде выражений (20) и (21). Далее проводится статистическая обработка всех выборочных рядов. Если оказывается, что плотности распределения вероятностей относительных величин несущих способностей рассматриваемых однотипных изделий совпадают по соответствующим статистическим критериям, то такие изделия по несущей способности считаются стохастически подобными, а результаты испытаний таких изделий — принадлежащими одной генеральной совокупности. Если плотности распределения относительных нагрузок (Q_{ij}/\bar{Q}_j) на рассматриваемые однотипные изделия не совпадают, то результаты таких испытаний также рассматриваются в другой (для нагрузок) общей генеральной совокупности.

Физической предпосылкой объединения результатов испытаний предполагаемых изделий-аналогов в соот-

ветствующие обобщенные выборки должна служить одинаковая физическая картина протекаемых процессов. Для этого все рассматриваемые изделия должны быть рассмотрены как подобные, характеризующие физическую модель отказа изделия при его функционировании в составе системы. Математически это представляется безразмерными комплексами.

На базе полученной таким образом обобщенной статистической информации строят обобщенные зависимости надежности данного типового изделия в функции условного запаса прочности $\bar{\eta}$ ($\bar{\eta}_j = \bar{R}_j / \bar{Q}_j$). Эти зависимости затем используют в качестве априорной исходной информации при количественном анализе надежности однотипных изделий на этапе схемных проработок и эскизном проектировании вновь разрабатываемых систем.

Пример 1. Пусть проведено $n'_1, n'_2, \dots, n'_{10}$ испытаний до разрушения однотипных десяти изделий. Кроме того, проведено $n''_1, n''_2, \dots, n''_{10}$ испытаний этих изделий при нормальной эксплуатационной нагрузке, изменяющейся в каждом опыте под влиянием случайных возмущающих факторов. При испытаниях замерены разрушающие и действующие нагрузки во всех опытах. Требуется получить обобщенные статистические данные и построить обобщенную зависимость вероятности безотказной работы изделия в зависимости от условного запаса прочности.

Порядок расчета. 1. Результаты измерений разрушающих и действующих нагрузок представляются в виде выборочных рядов:

$$\left. \begin{array}{l} R_{11}, R_{12}, \dots, R_{1n'_1}; \\ R_{21}, R_{22}, \dots, R_{2n'_2}; \\ R_{101}, R_{102}, \dots, R_{10n'_{10}}; \end{array} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{1n''_1}; \\ Q_{21}, Q_{22}, \dots, Q_{2n''_2}; \\ Q_{101}, Q_{102}, \dots, Q_{10n''_{10}}. \end{array} \right\} \quad (23)$$

2. Статистические ряды (22) и (23) представляются в безразмерной форме (20) и (21) соответственно для несущих способностей и нагрузок, а именно:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{R}_{11} = \frac{R_{11}}{\bar{R}_1}; \widehat{R}_{12} = \frac{R_{12}}{\bar{R}_1} \dots; \\ \widehat{R}_{1n'_1} = \frac{R_{1n'_1}}{\bar{R}_1}; \\ \widehat{R}_{101} = \frac{R_{101}}{\bar{R}_{10}}; \\ \widehat{R}_{102} = \frac{R_{102}}{\bar{R}_{10}}; \dots; \\ \widehat{R}_{10n'_{10}} = \frac{R_{10n'_{10}}}{\bar{R}_{10}}, \end{array} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{Q}_{11} = \frac{Q_{11}}{\bar{Q}_1} \frac{1}{\bar{\eta}_1}; \\ \widehat{Q}_{12} = \frac{Q_{12}}{\bar{Q}_1} \frac{1}{\bar{\eta}_1}, \dots; \\ \widehat{Q}_{1n''_1} = \frac{Q_{1n''_1}}{\bar{Q}_1} \frac{1}{\bar{\eta}_1}; \\ \widehat{Q}_{101} = \frac{Q_{101}}{\bar{Q}_{10}} \frac{1}{\bar{\eta}_{10}}; \\ \widehat{Q}_{102} = \frac{Q_{102}}{\bar{Q}_{10}} \frac{1}{\bar{\eta}_{10}}, \dots; \\ \widehat{Q}_{10n''_{10}} = \frac{Q_{10n''_{10}}}{\bar{Q}_{10}} \frac{1}{\bar{\eta}_{10}}. \end{array} \right\} \quad (25)$$

3. Проводится статистическая обработка результатов наблюдений, представленных выборочными рядами (24) и (25), т. е. проверяется по общепринятым статистическим критериям согласие с теми или иными теоретическими законами распределения для рядов (24) и (25). Пусть при статистической обработке результатов испытаний изделий, представленных выборочными рядами, получено, что все выборки рядов (24) и (25) удовлет-

ворительно согласуются с нормальным законом распределения. Выборочные дисперсии рядов (24) и (25) (они по физическому смыслу являются квадратами коэффициентов вариации) образуют статистически однородные ряды, что установлено, например, по критерию Кохрена. Тогда полученную в соответствии с изложенной методикой информацию можно считать однородной в статистическом смысле. На базе этой информации представляется возможным получить обобщенные выборки относительных величин несущих способностей и нагрузок, распределенных по гауссовскому закону с параметрами:

для несущей способности

$$\begin{aligned} \widehat{R}_\Sigma &= 1; S_{R_\Sigma}^2 = \\ &= \sum_{j=1}^{10} S_{\widehat{R}_j}^2 n_j' / \sum_{j=1}^{10} n_j'; \end{aligned} \quad (26)$$

для нагрузки

$$\begin{aligned} \widehat{Q}'_\Sigma &= \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \frac{Q_{ij}}{Q_j} = 1; \\ S_{\widehat{Q}'_\Sigma}^2 &= \sum_{j=1}^{10} S_{\widehat{Q}'_j}^2 n_j'' / \sum_{j=1}^{10} n_j''. \end{aligned} \quad (27)$$

4. Пусть по результатам испытаний $n_1', n_2', \dots, n_{10}', n_1'', n_2'', \dots, n_{10}''$ с учетом соотношений (26) и (27) получено $S_{\widehat{R}_\Sigma}^2 = 0,006$ (по $n_\Sigma' \approx 1000$) и $S_{\widehat{Q}'_\Sigma}^2 = 0,009$ (по $n_\Sigma'' \approx 900$).

Тогда по соотношениям

$$\widehat{R} = F(\widehat{h}) \quad (28)$$

$$\text{и } S_{\widehat{R}}^2 \approx \left[\frac{\partial F(\widehat{h})}{\partial \widehat{h}} \right]^2 S_{\widehat{h}}^2 \approx$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\varphi^2(\widehat{h})}{S_{\widehat{R}_\Sigma}^2 + S_{\widehat{Q}'_\Sigma}^2 / \bar{\eta}^2} \left[\frac{S_{\widehat{R}_\Sigma}^2}{n_\Sigma'} \left(1 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\widehat{h}^2}{2} \frac{S_{\widehat{R}_\Sigma}^2}{S_{\widehat{R}_\Sigma}^2 + S_{\widehat{Q}'_\Sigma}^2 / \bar{\eta}^2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{S_{\widehat{Q}'_\Sigma}^2 / \bar{\eta}^2}{n_\Sigma''} \left(1 + \frac{\widehat{h}^2}{2} \frac{S_{\widehat{Q}'_\Sigma}^2 / \bar{\eta}^2}{S_{\widehat{R}_\Sigma}^2 + S_{\widehat{Q}'_\Sigma}^2 / \bar{\eta}^2} \right) \right], \quad (29)$$

где

$$F(\widehat{h}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\widehat{h}} \exp(-x^2/2) dx;$$

$$\varphi(\widehat{h}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\widehat{h}^2/2);$$

$$\widehat{h} = \frac{\bar{\eta} - 1}{\sqrt{\bar{\eta}^2 S_{\widehat{R}_\Sigma}^2 + S_{\widehat{Q}'_\Sigma}^2}};$$

$$\bar{\eta} = \frac{\bar{R}}{\bar{Q}},$$

в предположении, что величины R и Q являются независимыми случайными величинами, получают обобщенные зависимости оценки надежности (28) и оценки ее дисперсии (29) как функцию условного запаса прочности $\bar{\eta}$. В виде графической зависимости для $S_{\widehat{R}_\Sigma}^2 = 0,006$ и $S_{\widehat{Q}'_\Sigma}^2 = 0,009$ при $n_\Sigma' = 1000$ и $n_\Sigma'' = 900$ результат представлен на рис. 7.

Пример 2. Пусть $\eta = 1,45$. Тогда из графика рис. 7 получим:

$$-\lg [1 - \widehat{P}] = 3,1;$$

$$\lg [1 - \widehat{P}] = 3,1 = 4,9;$$

$$1 - \widehat{P} = 0,000954; \quad \widehat{P} = 0,999046;$$

$$-\lg S_{\widehat{P}}^2 = 7,2; \quad \lg S_{\widehat{P}}^2 = -7,2 = 8,8;$$

$$S_{\widehat{P}}^2 = 0,92 \cdot 10^{-7}; \quad S_{\widehat{P}} = 3,3 \cdot 10^{-4}.$$

Подобные графические зависимости, которые затем при необходимости можно представить соответствующими ана-

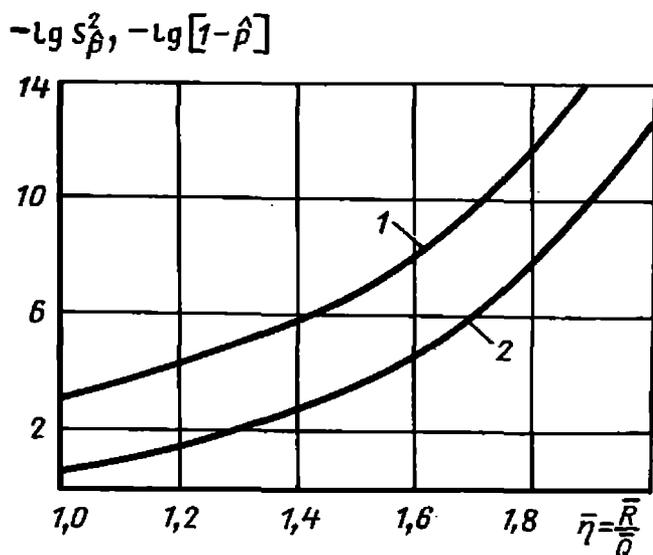


Рис. 7. К расчету надежности изделий по обобщенным опытным данным:

1 — $\lg S_p^2$; 2 — $\lg (1 - p)$

литическими аппроксимациями, могут быть получены для любых изделий различных уровней по результатам испытаний однотипных изделий по изложенной методике. Графические зависимости и соответствующие им аналитические аппроксимации могут быть использованы в качестве априорной информации при анализе надежности однотипных изделий вновь разрабатываемых систем.

7. ОБЪЕДИНЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ОЦЕНКЕ НАДЕЖНОСТИ ПО СХЕМЕ УСПЕХ—ОТКАЗ

Количественный анализ надежности изделий оказывается возможным в ряде случаев провести только на базе имеющейся альтернативной информации типа успех — отказ. Однако число потребных испытаний для анализа надежности может оказаться достаточно большим. В этом случае возникает необходимость привлечения информации, полученной по результатам испытаний аналогичных изделий.

Процедура получения обобщенной альтернативной информации по результатам испытаний однотипных изделий для последующего ее использования при количественной оценке

надежности по схеме успех — отказ заключается в следующем:

для рассматриваемого физического процесса, характеризующего работоспособность изделия, выявляют определяющие параметры, влияющие на его протекание;

известными методами выводят критерии подобия, характеризующие протекание рассматриваемого физического процесса;

рассматривают результаты испытаний изделий, которые предполагают подобными физическому процессу.

При этом результаты испытаний изделий в данном процессе считаются принадлежащими к одной генеральной совокупности при наличии статистической однородности соответствующих одноименных критериев подобия.

При исследовании надежности протекания исследуемого физического процесса важен вопрос об учете статистически значимых определяющих параметров. Достаточно корректно этот вопрос может быть решен проведением корреляционно-регрессионного и факторного анализов. На этапе схемных проработок и эскизного проектирования при наличии большого числа определяющих параметров достаточно эффективным может оказаться использование эвристических процедур. При этом выбор определяющих параметров делается на основе опроса ряда специалистов в данной области.

Пример 3. Пусть имеются результаты испытаний четырех однотипных изделий. Установлено, что определяющими параметрами, характеризующими протекание физического процесса, являются x_1, x_2, \dots, x_9 .

Требуется выяснить: можно ли эти изделия рассматривать в качестве взаимных аналогов с точки зрения надежности протекания некоторого физического процесса, характеризующегося параметрами x_1, x_2, \dots, x_9 , а количественную оценку надежности протекания этого процесса в любом изделии провести, используя информацию по результатам испытаний всех четырех изделий.

Исследуемый физический процесс определяется условной обобщенной

координатой x , являющейся функцией девяти определяющих параметров:

$$x = f(x_1, x_2, \dots, x_9). \quad (30)$$

Параметры x_1, x_2, \dots, x_9 характеризуются четырьмя основными единицами измерения (табл. 2): массой M , длиной L , временем T , температурой θ .

Следовательно, пять независимых критериев подобия (число параметров минус число независимых размерностей) характеризуют рассматриваемый физический процесс. Эти критерии получают методом нулевых размерностей. Выберем в качестве основных параметры x_1, x_2, x_5 и x_7 (по числу первоначальных), имеющие основные размерности (килограмм, метр, секунда, градус), для которых определитель, составленный из размерностей этих параметров, отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_2 & \lambda_2 & \tau_2 & \eta_2 \\ \mu_5 & \lambda_5 & \tau_5 & \eta_5 \\ \mu_7 & \lambda_7 & \tau_7 & \eta_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

В этом случае соотношение (30) можно записать в безразмерных величинах:

$$\frac{x}{x_1^\alpha x_2^\beta x_5^\gamma x_7^\delta} = \Phi \left(1, 1, \frac{x_3}{x_1^{\alpha_3} x_2^{\beta_3} x_5^{\gamma_3} x_7^{\delta_3}}, \frac{x_4}{x_1^{\alpha_4} x_2^{\beta_4} x_5^{\gamma_4} x_7^{\delta_4}}, 1, \frac{x_6}{x_1^{\alpha_6} x_2^{\beta_6} x_5^{\gamma_6} x_7^{\delta_6}}, 1, \frac{x_8}{x_1^{\alpha_8} x_2^{\beta_8} x_5^{\gamma_8} x_7^{\delta_8}}, \frac{x_9}{x_1^{\alpha_9} x_2^{\beta_9} x_5^{\gamma_9} x_7^{\delta_9}} \right). \quad (31)$$

Значения коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ ($i = 3, 4, 6, 8, 9$) определяются из условия, что входящие в (31) комплексы должны быть размерными величинами. Находятся значения $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3$ из условия, что размерности числителя и знаменателя выражения $x_3/x_1^{\alpha_3} x_2^{\beta_3} x_5^{\gamma_3} x_7^{\delta_3}$ должны быть одинаковыми. На основании данных табл. 2 $[M] = ([M] [L]^{-1} [T]^{-2})^{\alpha_3} ([L]^2)^{\beta_3} \times$
 $\times ([M]^{-1} [L]^{-1} [T] [\theta]^{-1})^{\gamma_3} ([T])^{\delta_3}$.

Откуда $1 = \alpha_3 - \gamma_3 -$ (показатели степеней слева и справа при $[M]$), $0 = -\alpha_3 - 2\beta_3 - \gamma_3$ (показатели при $[L]$), $0 = -2\alpha_3 + \gamma_3 + \delta_3$ (показатели при $[T]$), $0 = -\gamma_3$ (показатели при $[\theta]$).

2. Исходные данные для получения критериев подобия

Определяющий параметр	Размерность	Степень размерности			
		μ	λ	τ	η
x_1	$[M] [L]^{-1} [T]^{-2}$	1	-1	-2	0
x_2	$[L]^2$	0	2	0	0
x_3	$[M]$	1	0	0	0
x_4	$[M] [L]^2 [T]^{-2}$	1	2	-2	0
x_5	$[M]^{-1} [L]^{-1} [T] [\theta]^{-1}$	-1	-1	1	-1
x_6	$[L]^{-3}$	0	3	0	0
x_7	$[T]$	0	0	1	0
x_8	$[L]^2 [T]^2 [\theta]^{-1}$	0	2	2	-1
x_9	$[L] [T]^{-2}$	0	1	-2	0

Значения $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3$ являются решением этих уравнений.

Подставив полученные значения коэффициентов в соответствующий член уравнения (31), получим критерий подобия

$$\pi_3 = x_3 x_1^{-1} x_2^{-1/2} x_7^2.$$

Аналогичным образом находим остальные значения коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ ($i = 4, 6, 8, 9$):

$$\alpha_4 = 1; \beta_4 = 3/2; \gamma_4 = 0, \delta_4 = 0;$$

$$\alpha_8 = 1; \beta_8 = 2; \gamma_8 = 1; \delta_8 = 3;$$

$$\alpha_6 = 0; \beta_6 = 3/2; \gamma_6 = 0; \delta_6 = 0;$$

$$\alpha_9 = 0; \beta_9 = 1/2; \gamma_9 = 0; \delta_9 = 2.$$

Подставив полученные значения коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ в (31), получим следующую группу критериев подобия, характеризующих рассматриваемый физический процесс:

$$\pi_3 = x_3 x_1^{-1} x_2^{-1/2} x_7^{-2};$$

$$\pi_4 = x_4 x_1^{-1} x_2^{-1/2}; \pi_6 = x_6 x_2^{-3/2};$$

$$\pi_8 = x_8 x_1^{-1} x_2^{-1} x_5^{-1} x_7^{-3};$$

$$\pi_9 = x_9 x_7^2 x_4^{-1/2}.$$

Средние значения и средние квадратичные отклонения одноименных критериев подобия, полученные по статистическим данным рассматриваемых четырех изделий ($N = 1-4$), представлены в табл. 3.

Проведенный на основе числовых данных табл. 2 статистический анализ позволяет сделать вывод о том, что

одноименные критерии подобия представляют собой статистически однородные ряды для всех изделий. Это указывает на статистическое подобие рассматриваемого физического процесса для всех четырех изделий и служит основанием для положительного заключения об их подобии по данному физическому процессу. Следовательно, данные по результатам испытаний этих изделий в этом физическом процессе могут рассматриваться в одной генеральной совокупности.

8. РАСЧЕТ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ КОЛИЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ НАДЕЖНОСТИ ИЗДЕЛИЙ

При количественном анализе схемных и конструкторских решений на ранних этапах проектирования изделий расчетными методами часто используют детерминированные соотношения, описывающие конкретные физические теории. В расчетах надежности вновь разрабатываемых изделий возникают систематические погрешности, которые следует исключить, используя результаты испытаний аналогичных изделий. В противном случае результаты расчетов надежности будут содержать значительные погрешности.

Статистическая информация по результатам испытаний аналогичных изделий для получения систематических погрешностей детерминистиче-

3. Результаты расчета средних значений и среднеквадратических отклонений критериев подобия по числовым данным параметров x_1, \dots, x_9

Критерий подобия	Изделие № 1		Изделие № 2		Изделие № 3		Изделие № 4	
	$\bar{\pi}_i$	S_{π_i}	$\bar{\pi}_i$	S_{π_i}	$\bar{\pi}_i$	S_{π_i}	$\bar{\pi}_i$	S_{π_i}
$\pi_3 \cdot 10^4$	2,91	0,94	3,20	1,04	3,34	1,08	3,05	0,99
$\pi_4 \cdot 10^3$	3,01	0,45	3,26	0,49	2,28	0,34	2,26	0,34
π_6	0,116	0,012	0,099	0,010	0,105	0,010	0,117	0,012
$\pi_8 \cdot 10^2$	3,85	1,25	3,95	1,52	3,85	1,25	3,82	1,48
π_9	0,107	0,021	0,134	0,027	0,079	0,016	0,086	0,017

ских методов расчета представляется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_{11} &= \frac{x_{11}^{\text{оп}}}{\bar{k}_1 \bar{x}_1^{\text{P}}}; \hat{x}_{12} = \frac{x_{21}^{\text{оп}}}{\bar{k}_1 \bar{x}_1^{\text{P}}}, \dots; \\ \hat{x}_{1n_1} &= \frac{x_{n_1}^{\text{оп}}}{\bar{k}_1 \bar{x}_1^{\text{P}}}; \\ \hat{x}_{21} &= \frac{x_{12}^{\text{оп}}}{\bar{k}_2 \bar{x}_2^{\text{P}}}; \hat{x}_{22} = \\ &= \frac{x_{22}^{\text{оп}}}{\bar{k}_2 \bar{x}_2^{\text{P}}}, \dots; \hat{x}_{2n_2} = \frac{x_{2n_2}^{\text{оп}}}{\bar{k}_2 \bar{x}_2^{\text{P}}}, \\ \hat{x}_{N_1} &= \frac{x_{N_1}^{\text{оп}}}{\bar{k}_N \bar{x}_N^{\text{P}}}; \\ \hat{x}_{N_2} &= \frac{x_{N_2}^{\text{оп}}}{\bar{k}_N \bar{x}_N^{\text{P}}}, \dots; \\ \hat{x}_{Nn_N} &= \frac{x_{Nn_N}^{\text{оп}}}{\bar{k}_N \bar{x}_N^{\text{P}}}. \end{aligned} \right\} (32)$$

В соотношениях (32) величины $x_{ij}^{\text{оп}}$ ($i = 1, 2, \dots, n_1$) (для первого статистического ряда $i = n_1$, для второго ряда $i = n_2$ и т. д.; для N ряда $i = n_N$; $j = 1, 2, \dots, N$; N — число изделий-аналогов) представляют собой значения случайных величин в каждом конкретном i -м опыте из j -й серии наблюдений. Величины $x_j^{\text{P}} = (j = 1, 2, \dots, N)$ представляют собой средние расчетные значения этих же случайных величин ($x_{ij}^{\text{оп}}$), вычисленные по соответствующим детерминистическим соотношениям. Величины \bar{k}_j ($j = 1, 2, \dots, N$) представляют собой систематические погрешности j -го детерминистического метода расчета, определяемые как

$$\bar{k}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^{\text{оп}} / \bar{x}_j^{\text{P}}.$$

В расчетах надежности изделий необходимо пользоваться такими де-

терминистическими методами, для которых систематические погрешности \bar{k}_j минимальны.

В качестве простейшего примера рассмотрим порядок получения систематической погрешности расчета разрушающей нагрузки для изделия, представляющего собой стальную ортотропную круглую цилиндрическую оболочку вращения, нагруженную равномерным внутренним избыточным давлением.

Относительная величина разрушающей статистической нагрузки по безмоментной теории

$$\begin{aligned} (\hat{P}_p)_{ij} &= \frac{1}{\bar{k}_j} \frac{(P_p^{\text{оп}})_{ij}}{\bar{P}_p^{\text{T}}} = \\ &= \frac{(P_p^{\text{оп}})_{ij}}{\bar{\sigma}_B \bar{h} / \bar{R}}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $(P_p^{\text{оп}})_{ij}$ — опытное значение разрушающей нагрузки в испытании из j -й серии наблюдений; $\bar{\sigma}_B$ — среднее значение предела прочности материала оболочки, полученное по результатам испытаний образцов при одноосном растяжении; \bar{h} , \bar{R} — среднее значение толщины и радиуса оболочки ($R \gg h$); \bar{k}_j — среднее значение систематической погрешности детерминистического метода расчета несущей способности оболочки для j -й серии наблюдений, определяемой из соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{k}_j &= \frac{\bar{P}_p^{\text{T}}}{(P_p^{\text{оп}})_{ij}} = \frac{m_k}{n_j} \times \\ &\times \frac{1}{\bar{\sigma}_B \bar{h} / \bar{R}} \sum_{i=1}^{n_j} (P_p)_{ij}, \end{aligned} \quad (34)$$

где n_j — число опытов в j -й серии наблюдений; m_k — коэффициент, учитывающий детерминистический метод прочностного расчета (k -ю теорию прочности); \bar{P}_p^{T} — среднее теоретическое значение разрушающей нагрузки, равное $\bar{\sigma}_B \bar{h} / \bar{R}$; $(P_p^{\text{оп}})_j$ —

среднее опытное значение разрушающей нагрузки в j -й выборке,

$$\sum_{i=1}^{n_j} (P_p)_{ij} / n_j \quad (j = 1, 2, \dots, N;$$

N — число выборок),

Цилиндрическая оболочка рассчитывается по безмоментной теории (рис. 8). При этом $\sigma_y = pR/h = \sigma_{\max}$, $\sigma_x = pR/2h$, $\sigma_x = 0$.

Условия неразрушения изделия в соответствии с четырьмя различными теориями прочности для плоского напряженно-деформированного состояния оболочки определяются из следующих соотношений:

1) для теории наибольших нормальных напряжений

$$\sigma_y = pR/h \leq \sigma_B; \tag{35}$$

2) для теории наибольшего относительного удлинения

$$\sigma_y - \mu\sigma_x = [pR(1 - \mu/2)]/h \leq \sigma_B; \tag{36}$$

3) для теории наибольших касательных напряжений

$$\sigma_y = pR/h \leq \sigma_B; \tag{37}$$

4) для энергетической теории прочности

$$\sqrt{\sigma_y + \sigma_x - 2\mu\sigma_x\sigma_y} = \frac{pR}{h} \sqrt{5/4 - \mu} \leq \sigma_B. \tag{38}$$

Условия прочности для всех четырех теорий в общем виде можно представить так:

$$m_k \frac{pR}{h} \leq \sigma_B. \tag{39}$$

4. Значения коэффициента прочности m_k

№ теории прочности	m_k	№ теории прочности	m_k
1	1	3	1
2	0,75	4	$\sqrt{3/2}$

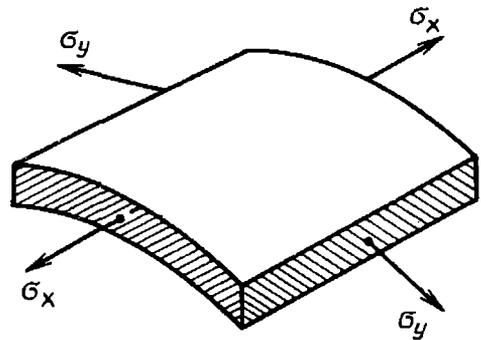


Рис. 8. К расчету цилиндрической оболочки по безмоментной теории

Значения коэффициентов m_k для четырех теорий прочности при ($\mu = 0,5$) представлены в табл. 4.

Аналізу были подвергнуты восемь аналогичных изделий, представляющие собой цилиндрические оболочки сосудов высокого давления, изготовленные в одних условиях из сталей типа 30ХГСА. Результаты расчетов по соотношениям (35)–(38) систематических погрешностей детерминистических методов расчета разрушающих нагрузок с использованием упомянутых четырех теорий прочности представлены в табл. 5.

Анализируя результаты табл. 5, можно заметить, что наилучшее соответствие опытным данным дают первая и третья теории прочности при расчете гладких осесимметричных стальных изделий вращения, нагруженных

5. Результаты расчетов систематических погрешностей.

№ испытуемого изделия	Теории прочности			
	1	2	3	4
1	1,05	0,787	1,05	0,908
2	1,08	0,810	1,08	0,934
3	1,07	0,803	1,07	0,926
4	1,06	0,795	1,06	0,917
5	1,02	0,765	1,02	0,882
6	1,02	0,765	1,02	0,882
7	1,04	0,780	1,04	0,900
8	1,01	0,758	1,01	0,873
$\bar{k} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^8 k_j$	1,04	0,780	1,04	0,901

внутренним статистическим избыточным давлением. Это обстоятельство следует учитывать при анализе их надежности расчетными методами.

9. АЛГОРИТМЫ ФОРМИРОВАНИЯ КРИТЕРИЕВ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОДОБИ́Я И ПОЛУЧЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СТАТИСТИЧЕСКИ ОДНОРОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПО ОДНОТИПНЫМ ИЗДЕЛИЯМ

Описание общей процедурной схемы.

Общая процедурная схема для формализации процесса получения π -критериев стохастического подоби́я и формирования обобщенной статистической однородной информации по однотипным техническим устройствам представляется на основе методов теории распознавания образов и стохастического подоби́я. Целесообразно формировать критерий в два этапа. На первом этапе по параметрическому описанию $I(D)$ некоторого множества N технических устройств данного класса, состоящего из подмножеств n_1, n_2, \dots, n_l (l — число подмножеств), осуществляется идентификация изделий с помощью информационно́й матрицы вида

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N_1} & x_{N_2} & & x_{N_n} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Каждая строка i матрицы (40) представляет собой параметрическое описание конкретного технического устройства данного класса ($i = \overline{1, n}$; n — число параметров, определяющих их признаковое пространство), а каждый столбец j определяет набор значений определенного признака в исследуемой совокупности технических устройств этого класса ($j = \overline{1, N}$; N — число однотипных изделий). На втором этапе осуществляется дальнейшая идентификация отобранных на первом этапе однотипных технических устройств на уровне процессов, происходящих при функционировании изделий, что необходимо

при исследовании их качества и надежности с ориентацией на конкретные модели отказов. При этом в качестве теоретической основы используется понятие стохастического подоби́я технических устройств в отношении надежности протекания конкретных физических процессов.

При получении обобщенной количественной информации формируются однородные статистические выборки количественных признаков, характеризующих физические модели отказов технических устройств при их функционировании. На базе этих выборок устанавливаются обобщенные выборки, для которых подбираются подходящие законы распределения. При получении обобщенной качественной информации выявляются определяющие параметры, характеризующие надежность протекания конкретных физических процессов, происходящих при функционировании составных частей технических устройств; затем определяются совокупности критериев стохастического подоби́я, характеризующих эти процессы. После этого рассматриваются результаты испытаний некоторой совокупности технических устройств, которые предполагаются принадлежащими к одной генеральной совокупности при наличии статистической однородности всех одноименных критериев стохастического подоби́я, характеризующих надежность протекания определяющих физических процессов.

Полученная таким образом обобщенная статистически однородная информация используется для расчета показателей надежности вновь создаваемых модификаций однотипных технических устройств, для которых имеется недостаточная информация для принятия решения об их уровне достигнутой надежности. Формирование обобщенной статистически однородной информации по некоторой совокупности созданных или параллельно создаваемых однотипных технических устройств осуществляется по следующему укрупненному алгоритму, представленному в операторной форме:

$$U_1 U_2 U_3 U_4 U_5, \quad (41)$$

где U_1 — блок определения класса (типа, вида, конструктивного ряда) аналогичных технических устройств; U_2 — блок выявления определяющих физических процессов при построении данного вида отказа в ходе функционирования изделия; U_3 — блок выявления совокупности количественных признаков, характеризующих данный вид отказа; U_4 — блок получения критериев стохастического подобия, характеризующих надежность протекания рассматриваемых физических процессов в данной отказовой ситуации; U_5 — блок анализа статистической однородности совокупностей одноименных критериев стохастического подобия однотипных технических устройств по отношению к данным физическим процессам и формирования совокупностей изделий-аналогов.

Реализация процедур в блоке U_1 . Определение класса однотипных технических устройств в одномерном случае осуществляется с помощью разделяющей функции следующего вида (случай двух классов A_1 и A_2):

$$h(x) = \frac{1}{2\sigma_1} (x - m_1) - \frac{1}{2\sigma_2} (x - m_2) + \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \geq 0, \quad (42)$$

где x — количественный признак, по которому ведется распознавание класса (типа, вида, конструктивного ряда) изделий; $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ — соответственно математические ожидания и средние квадратические отклонения признака x в классах A_1 и A_2 .

Операторная блок-схема разделяющей функции (42) имеет вид:

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8 P_{9 \downarrow 10}^{\uparrow 11} A_{10}^{\uparrow 12} {}^9 A_{11} {}^{10,11} Y_{12}, \quad (43)$$

где A_1 — оператор вычисления величины $u = x - m_1$; A_2 — оператор вычисления $u \uparrow = u * u$; A_3 — оператор вычисления $B_1 = (1/2\sigma_1) u_1$; A_4 — оператор вычисления $V = x - m_2$; A_5 — оператор вычисления $V_1 = V * V$; A_6 — оператор вычисления $B_2 = (1/2\sigma_2) V_1$; A_7 — оператор

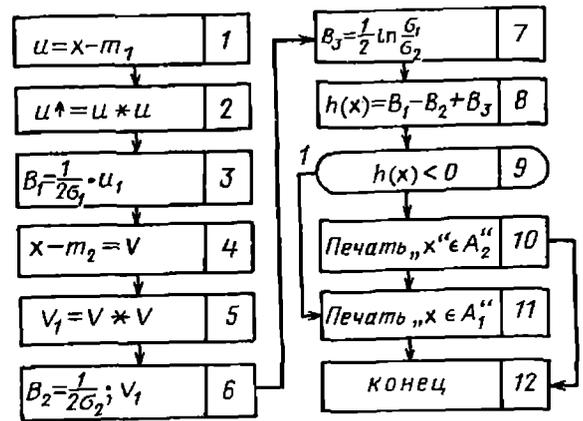


Рис. 9. Блок-схема алгоритма вычисления разделяющей функции в одномерном случае (случай двух классов A_1 и A_2); 1—12 — номера блоков

присвоения $B_3 = \frac{1}{2} \ln (\sigma_1 / \sigma_2)$; A_8 — оператор вычисления $h(x) = B_1 - B_2 + B_3$; $P_{9 \downarrow 10}^{\uparrow 11}$ — оператор проверки условия $h(x) < 0$, если условие выполняется, то переход к следующему оператору, а если нет, то к ${}^9 A_{11}$; $A_{10}^{\uparrow 12}$ — оператор печати « x принадлежит к классу A_2 » и переход к оператору Y_{12} ; ${}^9 A_{11}$ — оператор печати « x принадлежит к классу A_1 »; Y_{12} — оператор окончания счета.

Блок-схема алгоритма (43) представлена на рис. 9. (На рис. 9—17 в операторах сравнения обозначено: 0 — нет, 1 — да).

Определение класса однотипных изделий в многомерном случае осуществляется с помощью следующего вида (случай двух классов A_1 и A_2):

$$h(X) = \frac{1}{2} (X - M_1)^T \sum_1^{-1} (X - M_1) - \frac{1}{2} (X - M_2)^T \times \sum_2^{-1} (X - M_2) + \frac{1}{2} \ln (|\sum_1| / |\sum_2|) \geq 0, \quad (44)$$

где X — многомерный вектор количественных признаков x_1, x_2, \dots, x_N , по которому ведется распознавание класса изделий-аналогов; M_1, M_2 — математические ожидания вектора X

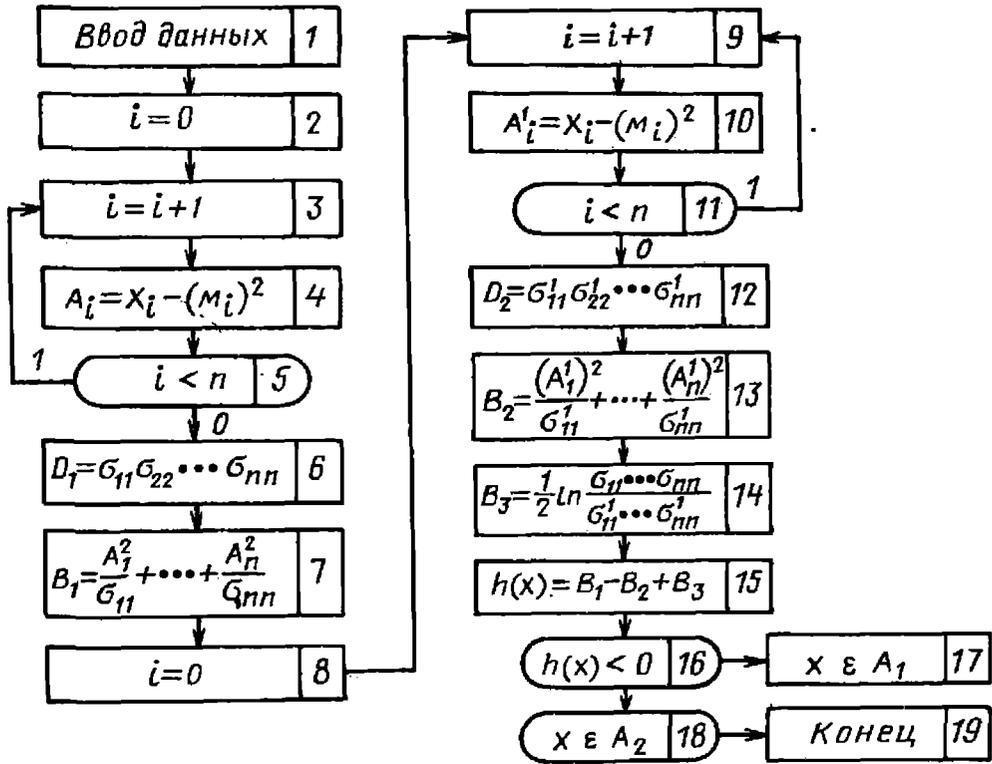


Рис. 10. Блок-схема алгоритма вычисления разделяющей функции в многомерном случае (случай двух классов A_1 — A_2): 1—19 — номера блоков

в классах A_1 и A_2 ; Σ_1, Σ_2 — ковариационные матрицы вектора X в классах A_1 и A_2 ; Σ_j^{-1} — матрицы, обратные ковариационным матрицам Σ_j ($j = 1, 2$); T — индекс транспонирования.

Операторная блок-схема вычисления функции (44) имеет вид:

$$A_1 A_2 {}^5 K_{i3} A_4 P_{5 \downarrow 3}^{\uparrow 6} A_6 A_7 A_8 {}^{11} K_{i9} A_{10} P_{11 \downarrow 9}^{\uparrow 12} A_{12} A_{13} A_{14} A_{15} P_{16 \downarrow 18}^{\uparrow 17} A_{17} A_{18} {}^{17,18} \mathcal{Y}_{19}, \tag{45}$$

где A_1 — оператор ввода исходных данных; A_2 — оператор присвоения $i = 0$; ${}^5 K_{i3}$ — оператор-счетчик по $i, i \pm 1$; A_4 — оператор вычисления $A_i = X_i - (M_i)^2$; $P_{5 \downarrow 3}^{\uparrow 6}$ — оператор проверки условия $i < n$, если оно выполняется, то переход к оператору K_{i3} , а если нет, то переход к следующему оператору; A_6 — оператор вычисления $D_1 = \sigma_{11} \sigma_{22} \dots \sigma_{nn}$; A_7 — оператор вычисления $B_1 = A_1^2 / \sigma_1 + A_2^2 / \sigma_2 + \dots + A_n^2 / \sigma_n$; A_8 — оператор присвоения $i = 0$; ${}^{11} K_{i9}$ — опе-

ратор-счетчик по $i, i + 1$; A_{10} — оператор вычисления $A_i^1 = X_i^1 - (M_i^1)^2$; $P_{11 \downarrow 9}^{\uparrow 12}$ — проверка условия $i < n$, если оно выполняется, то переход к оператору K_{i9} , а если не выполняется, то переход к следующему оператору; A_{12} — оператор вычисления $D_2 = \sigma_{11}^1 \sigma_{22}^1 \dots \sigma_{nn}^1$; A_{13} — оператор вычисления $B_2 = (A_1^1)^2 / \sigma_{11}^1 + (A_2^1)^2 / \sigma_{22}^1 + \dots + (A_n^1)^2 / \sigma_{nn}^1$; A_{14} — оператор вычисления $B_3 = \frac{1}{2} \ln [(\sigma_{11} \sigma_{22} \dots \sigma_{nn}) / (\sigma_{11}^1 \sigma_{22}^1 \dots \sigma_{nn}^1)]$; A_{15} — оператор вычисления $h(x) = B_1 - B_2 + B_3$; $P_{16 \downarrow 18}^{\uparrow 17}$ — оператор проверки условия $h(x) < 0$, если это условие выполняется, то переход к оператору A_{18} , а если не выполняется, то переход к оператору A_{17} ; A_{17} — оператор печати « X принадлежит классу A_1 », переход к оператору \mathcal{Y}_{19} ; A_{18} — оператор печати « X принадлежит классу A_2 »; \mathcal{Y}_{19} — оператор окончания счета.

Блок-схема алгоритма (45) представлена на рис. 10.

Определение конкретного класса однотипных технических устройств

из некоторого множества классов изделий может быть определено по правилу K ближайших соседей с помощью непараметрического метода распознавания. Операторная блок-схема алгоритма этого метода имеет вид

$$A_1 A_2^{16} K_{i3} A_4 A_5^{14} K_{l6} A_7 A_8^{13} K_{j9} \times \\ \times A_{10} A_{11} A_{12} P_{13 \downarrow 16}^{\uparrow 14} P_{14 \downarrow 15}^{\uparrow 6} K_{li15} P_{16 \downarrow 3}^{\uparrow 17} \times \\ \times A_{17} A_{18}^{22} K_{i19} P_{20 \downarrow 21}^{\uparrow 22} A_{21}^{20, 21} P_{22 \downarrow 19}^{\uparrow 23} Y_{23}, \quad (46)$$

где A_1 — оператор ввода исходных данных; A_2 — оператор присвоения $i = 0$; $^{16}K_{i3}$ — оператор-счетчик по i , $i + 1$; $^{14}K_{l6}$ — оператор присвоения по l , $l + 1$; A_4 — оператор присвоения $K_i = 0$; A_5 — оператор присвоения $R = 0$; A_7 — оператор присвоения $R = 0$; A_8 — оператор присвоения $j = 0$; K_{j9} — оператор-счетчик по j , $j + 1$; A_{10} — оператор вычисления $R_1 = (x_{lij} - x_{ij})$; A_{11} — оператор вычисления $R_2 = R_1 * * R_1$; A_{12} — к текущему значению R добавляется значение R_2 $R' = R + R_2$; $P_{13 \downarrow 16}^{\uparrow 14}$ — оператор проверки условия $j < n$, если такое условие выполняется, то переход к оператору K_{j9} , а если не выполняется, то переход к следующему оператору;

$P_{14 \downarrow 15}^{\uparrow 6}$ — оператор проверки условия $r_{li} < \bar{r}$, если это условие выполняется, то переход к следующему оператору, а если не выполняется, то переход к оператору K_{li15} — оператор-счетчик по K_i $K_i = K_i + + 1$; $P_{16 \downarrow 13}^{\uparrow 17}$ — оператор проверки условия $i < N$, если это условие выполняется, то осуществляется переход к оператору K_{i3} , а если не выполняется, то к следующему оператору; A_{17} — оператор нахождения $K = \max(K_1, \dots, K_N)$; A_{18} — оператор присвоения $i = 0$; K_{i19} — оператор-счетчик по i $i = i + 1$; $P_{20 \downarrow 21}^{\uparrow 22}$ — оператор проверки условия $K = K_i$, если это условие выполняется, то переход к следующему оператору, а если нет, то осуществляется переход к оператору $P_{22 \downarrow 19}^{\uparrow 23}$; A_{21} — оператор печати значения i , при котором достигается равенство $K = K_i$; $P_{22 \downarrow 19}^{\uparrow 23}$ — оператор проверки условия $i < N$, если оно выполняется, то переход к K_{i19} , а если нет, то переход к следующему оператору; Y_{23} — оператор окончания счета.

Блок-схема алгоритма (46) представлена на рис. 11.

Реализация процедур в блоках U_2 и U_3 . Выявление определяющих

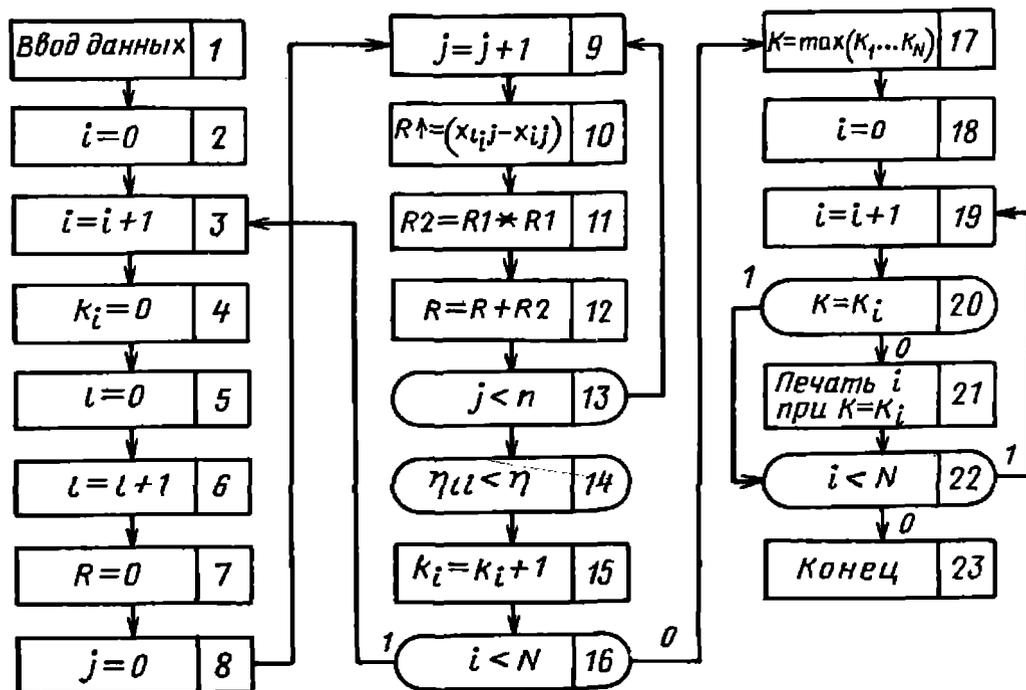


Рис. 11. Блок-схема алгоритма распознавания изделий данного класса в некоторой совокупности классов: 1—23 — номера блоков

процессов, а также основных факторов, их характеризующих, для реализации алгоритма (41) достаточно эффективно осуществляется с использованием эвристических процедур, т. е. процесса принятия решений на основе обобщенного опыта экспертов-специалистов в данной области. Каждому из n экспертов предлагается перечислить основополагающую совокупность процессов и возможных отказовых ситуаций при формировании конкретных моделей надежности составных частей технических устройств. При этом каждому определяющему процессу ставится в соответствие определенный количественный признак x или совокупность признаков, т. е. некоторый вектор $\underline{x} = (x_1, \dots, x_N)$, где N — размерность вектора \underline{x} . Далее для всех определяющих процессов соответствующими специалистами выявляются основные факторы, влияющие на надежность их протекания. Обработку мнений экспертов принято осуществлять с помощью формальных критериев. Одним из таких достаточно общих критериев может служить коэффициент конкордации. Алгоритмы его вычисления в операторной форме имеют вид

$$\begin{aligned}
 & A_1 A_2 A_3 \quad {}^{3,6} K_{i4} A_5 P_{6 \downarrow 4}^{\uparrow 7} A_7 A_8 \quad {}^{8,11} K_{i9} A_{10} \times \\
 & \times P_{11 \downarrow 9}^{\uparrow 12} A_{12} A_{13} \quad {}^{13,17} K_{j14} A_{15} A_{16} P_{17 \downarrow 14}^{\uparrow 18} \times \\
 & \times A_{18} \quad {}^{18,25} K_{i19} A_{20} A_{21} \quad {}^{21,24} K_{j22} A_{23} P_{24 \downarrow 22}^{\uparrow 25} \times \\
 & \times P_{25 \downarrow 19}^{\uparrow 26} A_{26} A_{27} \quad {}^{27,30} K_{i28} A_{29} \times \\
 & \times P_{30 \downarrow 28}^{\uparrow 31} A_{31} A_{32} \mathcal{Y}_{33}, \quad (47)
 \end{aligned}$$

где A_1 — оператор ввода исходных данных x_{ij} , t_j ; A_2 — оператор присвоения ($i = 0$); A_3 — оператор присвоения $X_j = 0$; ${}^{3,6} K_{i4}$ — оператор суммирования: к текущему значению i прибавляем единицу ($i = i + 1$); A_5 — оператор вычисления текущего значения $X_j = X_j + X_{ij}$; $P_{6 \downarrow 4}^{\uparrow 7}$ — оператор проверки условия $i < n$; A_7 — оператор присвоения ($j = 0$); A_8 — оператор присвоения ($X = 0$);

${}^{8,11} K_{i9}$ — оператор суммирования: к текущему значению j прибавляем единицу ($j = j + 1$); A_{10} — оператор вычисления текущего значения $X = X + X_j$; $P_{11 \downarrow 9}^{\uparrow 12}$ — оператор проверки условия $j < m$; A_{12} — оператор присвоения ($j = 0$); A_{13} — оператор присвоения ($S = 0$); ${}^{13,17} K_{j14}$ — оператор суммирования: к текущему значению j прибавляем единицу ($j = j + 1$); A_{15} — оператор вычисления $V_j = X_j - \frac{1}{m} X$; A_{16} — оператор вычисления $S = S + V_j$; $P_{17 \downarrow 14}^{\uparrow 18}$ — оператор проверки условия $j < m$; A_{18} — оператор присвоения ($i = 0$); ${}^{18,25} K_{i19}$ — оператор суммирования: к текущему значению i прибавляем единицу ($i = i + 1$); A_{20} — оператор присвоения ($T_i = 0$); A_{21} — оператор присвоения ($j = 0$); ${}^{21,24} K_{j22}$ — оператор суммирования: к текущему значению j прибавляем единицу ($j = j + 1$); A_{23} — оператор вычисления $T_i = T_i + (t_{ij}^3 - t_{ij})$; $P_{24 \downarrow 22}^{\uparrow 25}$ — оператор проверки условия $j < m$; $P_{25 \downarrow 19}^{\uparrow 26}$ — оператор проверки условия $i < n$; A_{26} — оператор присвоения ($i = 0$); A_{27} — оператор присвоения ($T = 0$); ${}^{23,30} K_{i28}$ — оператор суммирования: к текущему значению i прибавляем единицу ($i = i + 1$); A_{29} — оператор суммирования: к текущему значению T прибавляем T_i $T = T + T_i$; $P_{30 \downarrow 28}^{\uparrow 31}$ — оператор проверки условия $i < n$; A_{31} — оператор вычисления коэффициента конкордации: $W = S / \left[\frac{1}{12} n^2 (m^3 - m) - nT \right]$; A_{32} — оператор вычисления Z-критерия: $Z = \frac{1}{2} \ln [(n - 1) W / (1 - W)]$; \mathcal{Y}_{33} — оператор окончания счета, печать Z.

Блок-схема алгоритма (47) представлена на рис. 12.

Далее оценивается различие существенности влияния исследуемых количественных признаков (определяющих процессов и факторов) путем сравнения оценок дисперсий S_1^2 между признаками с остаточной дисперсией

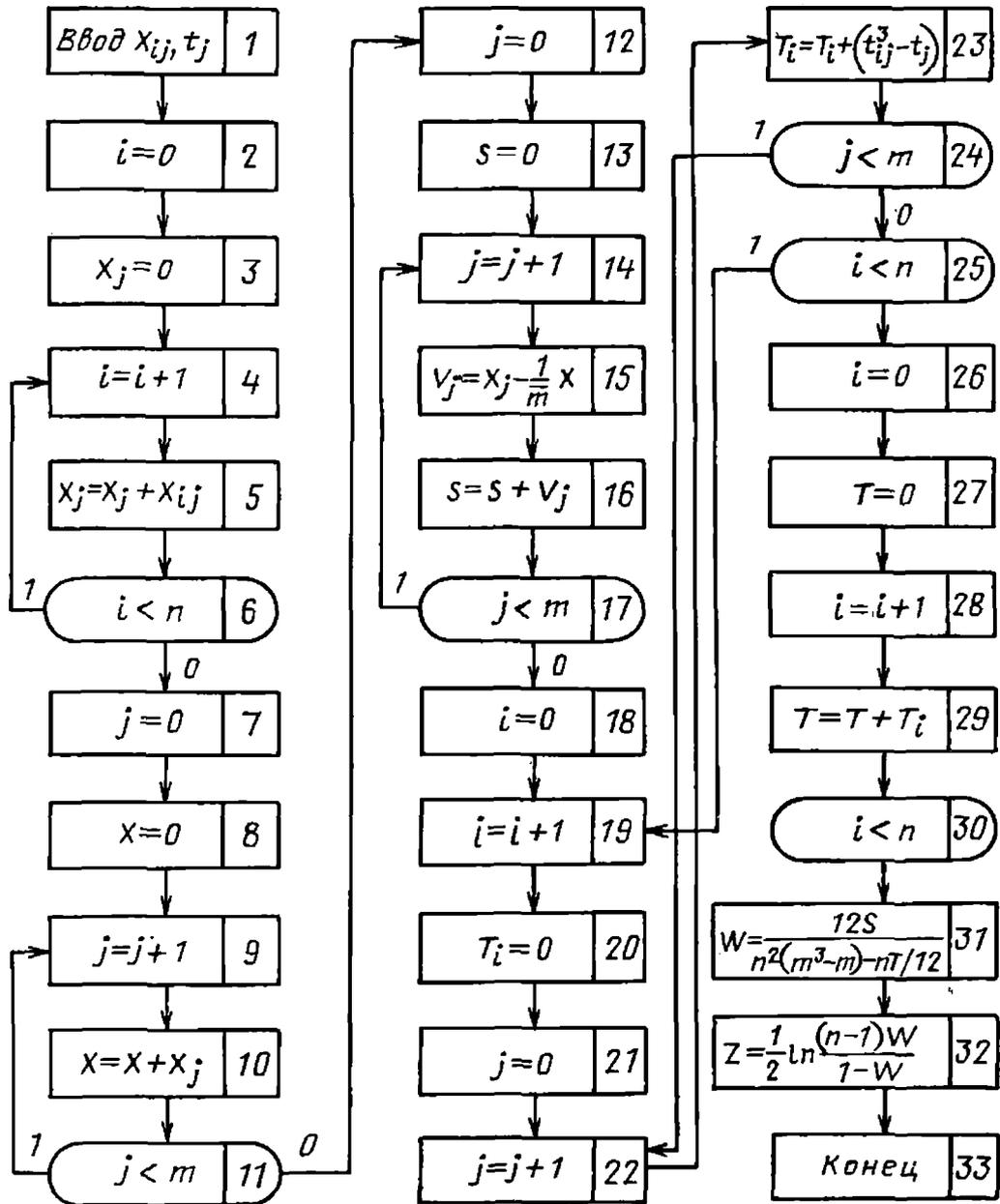


Рис. 12. Блок-схема алгоритма проведения оценки степени согласия экспертов при определении определяющих процессов и параметров, влияющих на надежность составных частей изделий:

1—33 — номера блоков

$S_{ост}^2$, которые определяются по следующим формулам:

$$S_1^2 = \frac{1}{m-1} \left[n \sum_{j=1}^m (\bar{X}_j)^2 - mn (\bar{X}_{ij})^2 \right];$$

$$S_{ост}^2 = \frac{1}{(m-1)(n-1)} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (X_{ij})^2 - m \sum_{i=1}^n (\bar{X}_i)^2 - n \sum_{j=1}^m (\bar{X}_j)^2 + mn (\bar{X}_{ij})^2 \right],$$

где

$$\bar{X}_{ij} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_{ij} \text{ — общий сред-}$$

ний ранг;

$$\bar{X}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{ij} \text{ — средний ранг } y$$

j -го эксперта;

$$X_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij} \text{ — средний ранг } y \text{ } i\text{-го}$$

признака.

Значимость различия дисперсий S_1^2 и $S_{\text{ост}}^2$ проверяется по Z -критерию

$\left[Z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{S_1^2}{S_{\text{ост}}^2} \right) \right]$ при числе степеней свободы $\nu_1 = m - 1$ и $\nu_2 = (m - 1)(n - 1)$. Если $Z \geq Z_\alpha$ (где Z_α — табличное значение), то с вероятностью $P \geq 1 - \alpha$ можно утверждать, что различие в оценках дисперсий статистически значимо, т. е. различие во влиянии исследуемых признаков статистически значимо и влияние выбранных признаков на исследуемые процессы и факторы существенно.

Операторная блок-схема алгоритма вычисления величины Z имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & A_1^{1,9} K_{j_2} A_3 A_4^{4,7} K_{i_5} A_6 P_{7 \downarrow 5}^{\uparrow 8} A_8 P_{9 \downarrow 2}^{\uparrow 10} \times \\ & \times A_{10}^{10,18} K_{i_{11}} A_{12} A_{13}^{13,16} K_{j_{14}} A_{15} \times \\ & \times P_{16 \downarrow 14}^{\uparrow 17} A_{17} P_{18 \downarrow 11}^{\uparrow 19} A_{19} A_{20}^{20,28} K_{i_{21}} \times \\ & \times A_{22} A_{23}^{23,26} K_{j_{24}} A_{25} P_{26 \downarrow 24}^{\uparrow 27} A_{27} \times \\ & \times P_{28 \downarrow 21}^{\uparrow 29} A_{29} A_{30} A_{31}^{31,34} K_{j_{32}} A_{33} \times \\ & \times P_{34 \downarrow 32}^{\uparrow 35} A_{35} A_{36} A_{37}^{37,45} K_{i_{38}} A_{39} A_{40} \times \\ & \times A_{47}^{40,43} K_{j_{41}} A_{42} P_{43 \downarrow 41}^{\uparrow 44} A_{44} P_{45 \downarrow 38}^{\uparrow 46} A_{46} \times \\ & \times A_{47}^{47,50} K_{i_{48}} A_{49} P_{50 \downarrow 48}^{\uparrow 51} A_{51} A_{52} \times \\ & \times A_{53}^{53,56} K_{j_{54}} A_{55} P_{56 \downarrow 54}^{\uparrow 57} A_{57} A_{58} A_{59} \times \\ & \times A_{60} A_{61} A_{62}. \end{aligned} \quad (48)$$

В операторном соотношении (48) обозначено: A_1 — оператор присвоения ($j = 0$); $^{1,9}K_{j_2}$ — оператор-

счетчик по j $j = j + 1$; A_3 — оператор присвоения ($i = 0$); A_4 — оператор присвоения ($\bar{X}_j = 0$); $^{4,7}K_{i_5}$ — оператор-счетчик по i $i = i + 1$; A_6 — оператор суммирования: к текущему значению \bar{X}_j прибавляем X_{ij} $\bar{X}_j = \bar{X}_j + X_{ij}$; $P_{7 \downarrow 5}^{\uparrow 8}$ — оператор проверки условия $i < n$; A_8 — оператор вычисления $\bar{X}_j = \bar{X}_j / m$; $P_{9 \downarrow 2}^{\uparrow 10}$ — оператор проверки условия $j < m$; A_{10} — оператор присвоения ($i = 0$); $^{10,18}K_{i_{11}}$ — оператор-счетчик по i $i = i + 1$; A_{12} — оператор присвоения ($j = 0$); A_{13} — оператор присвоения ($\bar{X}_i = 0$); $^{13,16}K_{j_{14}}$ — оператор-счетчик по j $j = j + 1$; A_{15} — оператор суммирования: к текущему значению \bar{X}_i прибавляем X_{ij} $\bar{X}_i = \bar{X}_i + X_{ij}$; $P_{16 \downarrow 14}^{\uparrow 17}$ — оператор проверки условия $j < m$; A_{17} — оператор вычисления $\bar{X}_i = \bar{X}_i / m$; $P_{18 \downarrow 11}^{\uparrow 19}$ — оператор проверки условия $i < n$; A_{19} — оператор присвоения ($i = 0$); A_{20} — оператор присвоения ($V = 0$); $^{20,28}K_{i_{21}}$ — оператор суммирования: к текущему значению i прибавляем единицу: $i = i + 1$; A_{22} — оператор присвоения ($j = 0$); A_{23} — оператор присвоения ($V_i = 0$); $^{23,26}K_{j_{24}}$ — оператор-счетчик по j $j = j + 1$; A_{25} — оператор суммирования: к текущему значению V_i прибавляем X_{ij} $V_i = V_i + X_{ij}$; $P_{26 \downarrow 24}^{\uparrow 27}$ — оператор проверки условия $j < m$; A_{27} — оператор суммирования: к текущему значению V прибавляем V_i $V = V + V_i$; $P_{28 \downarrow 21}^{\uparrow 29}$ — оператор проверки условия $i < n$; A_{29} — оператор вычисления $X_{ij} = V / mn$; A_{30} — оператор присвоения ($j = 0$); A_{31} — оператор присвоения ($u = 0$); $^{31,34}K_{j_{32}}$ — оператор-счетчик по j $j = j + 1$; A_{33} — оператор суммирования: к текущему значению u прибавляем \bar{X}_j^2 $u = u + \bar{X}_j^2$; $P_{34 \downarrow 32}^{\uparrow 35}$ — оператор проверки условия $j < m$; A_{35} — оператор вычисления величины: $S_1^2 = \frac{1}{m-1} [nu - mn (\bar{X}_{ij})^2]$; A_{36} — оператор присвоения ($i = 0$);

A_{37} — оператор присвоения ($V = 0$); ${}^{37,45}K_{i38}$ — оператор-счетчик по i $i = i + 1$; A_{39} — оператор присвоения ($j = 0$); A_{40} — оператор присвоения ($V_i = 0$); ${}^{40,43}K_{j41}$ — оператор-счетчик по j $j = j + 1$; A_{42} — оператор суммирования: к текущему значению V_i прибавляем X_{ij}^2 $V_i = V_i + X_{ij}^2$; $P_{43 \downarrow 41}^{\uparrow 44}$ — оператор проверки условия $j < m$; A_{44} — оператор суммирования: к текущему значению V прибавляем V_i $V = V + V_i$; $P_{45 \downarrow 38}^{\uparrow 46}$ — оператор проверки условия $i < n$; A_{46} — оператор присвоения ($i = 0$); A_{47} — оператор присвоения ($u = 0$); ${}^{47,50}K_{i48}$ — оператор-счетчик по i $i = i + 1$; A_{49} — оператор суммирования: к текущему значению u прибавляем \bar{X}_i^2 $u = u + \bar{X}_i^2$; $P_{50 \downarrow 48}^{\uparrow 51}$ — оператор проверки условия $i < n$; A_{51} — оператор вычисления $u = mu$; A_{52} — оператор присвоения $j = 0$; A_{53} — оператор присвоения $W = 0$; ${}^{53,56}K_{j54}$ — оператор-счетчик по j $j = j + 1$; A_{55} — оператор суммирования: к текущему значению W прибавляем \bar{X}_j $W = W + \bar{X}_j$; $P_{56 \downarrow 54}^{\uparrow 57}$ — оператор проверки условия $j < m$; A_{57} — оператор вычисления $W = n \times W$; A_{58} — оператор вычисления $S_{ост}^2 = \frac{V - u - W + mn(X_{ij}^2)}{(m-1)(n-1)}$; A_{59} — оператор вычисления $Z = \frac{1}{2} \ln(S_1^2/S_{ост}^2)$; A_{60} — оператор вычисления $v_1 = m - 1$; A_{61} — оператор вычисления $v_2 = (m - 1) \times (n - 1)$; $Я_{62}$ — оператор окончания счета.

Блок-схема алгоритма (48) представлена на рис. 13.

После того, как оценено влияние исследуемых признаков, следует определить структуру, т. е. влияние каждого фактора на исследуемый процесс. Это можно осуществить с помощью стандартных процедур дисперсионного анализа, но так как экспертные методы являются достаточно приближенными, то можно ограничиться оценками различия в средних рангах между параметрами.

Операторная блок-схема алгоритма такой оценки имеет вид

$$A_1^{1,10} K_{j2} A_3 A_4^{4,7} K_{i5} A_6 P_{7 \downarrow 5}^{\uparrow 8} A_8 A_9 P_{10 \downarrow 2}^{\uparrow 11} \times \\ \times A_{11}^{11,18} K_{k12} A_{13}^{13,17} K_{l14} A_{15} A_{16} \times \\ \times P_{17 \downarrow 14}^{\uparrow 18} P_{18 \uparrow 22}^{\uparrow 19} Я_{19}, \quad (49)$$

где A_1 — оператор присвоения ($j = 0$); ${}^{1,10}K_{j2}$ — оператор-счетчик по j $j = j + 1$; A_3 — оператор присвоения $i = 0$; A_4 — оператор присвоения $u_j = 0$; ${}^{4,7}K_{i5}$ — оператор-счетчик по i $i = i + 1$; A_6 — оператор вычисления $u_j = u_j + (X_{ij} - X_i)^2$; $P_{7 \downarrow 5}^{\uparrow 8}$ — оператор проверки условия $i < n$; A_8 — оператор вычисления $S_j = [u_j / (n - 1)]^{1/2}$; A_9 — оператор вычисления $S_{Xj} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_j$;

$P_{10 \downarrow 2}^{\uparrow 11}$ — оператор проверки условия $j < m$; A_{11} — оператор присвоения $K = 0$; ${}^{11,18}K_{k12}$ — оператор-счетчик по K $K = K + 1$; A_{13} — оператор присвоения $l = K$; ${}^{13,17}K_{l14}$ — оператор-счетчик по l : $l = l + 1$; A_{15} — оператор вычисления $t_{\bar{X}_k - \bar{X}_l} = (\bar{X}_k - \bar{X}_l) / S_{X_k - X_l}$; A_{16} — оператор вычисления $S_{\bar{X}_k - \bar{X}_l} = (S_{X_k}^2 + S_{X_l}^2)^{1/2}$; $P_{17 \downarrow 14}^{\uparrow 18}$ — оператор проверки условия $l < m$; $P_{18 \uparrow 22}^{\uparrow 19}$ — оператор проверки условия $K < m$; $Я_{19}$ — оператор окончания счета.

Блок-схема алгоритма (49) представлена на рис. 14.

Финишной операцией алгоритма (49) является проверка условия $t_{\bar{X}_k - \bar{X}_l} > t_\alpha$ (где t_α — табличное значение квантили распределения t Стьюдента). Если это условие выполняется, то с вероятностью $P \geq 1 - \alpha$ можно утверждать, что различие в средних значениях исследуемых признаков статистически значимо, т. е. их следует отнести к различным группам.

Реализация процедур в блоке. U_4 . Наиболее часто используемый на

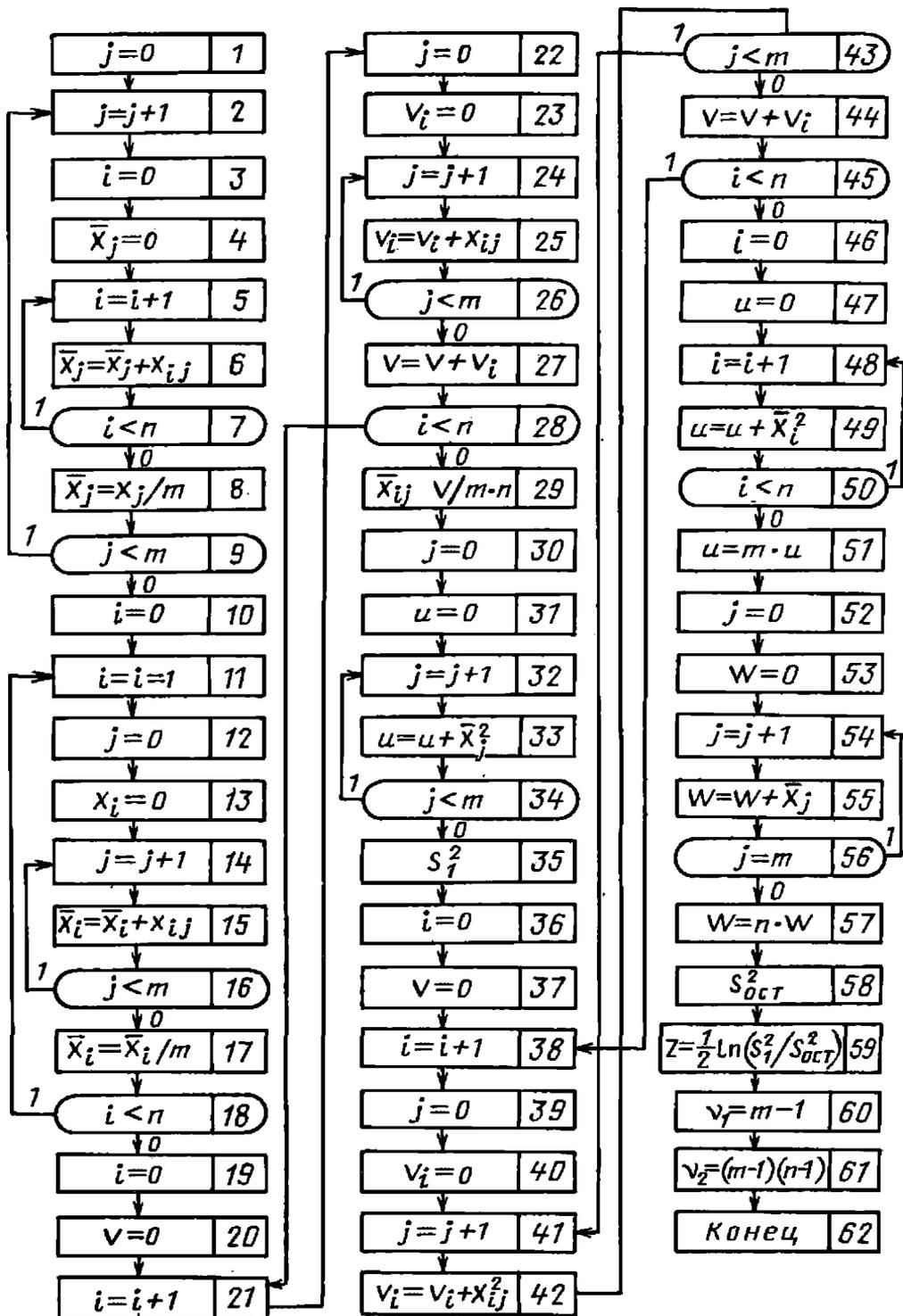


Рис. 13. Блок-схема алгоритма оценки существенности влияния исследуемых признаков:

1—62 — номера блоков

практике способ получения λ -критериев подобию основан на применении метода нулевых размерностей. Пусть имеется m величин определяющих параметров x_i ($i = \overline{1, m}$). Для конкретности рассмотрим физические явления механического типа, основные единицы которых $[M]$, $[L]$, $[T]$, т. е. масса, длина, время. Принци-

пиальная блок-схема алгоритма решения этой задачи представлена на рис. 15, где $m = 9/m$ — число факторов, определяющих надежность протекания некоторого физического процесса.

В качестве исходных данных используется полная матрица размерностей $\|A\|$ вида $m \times q$. Счет начи-

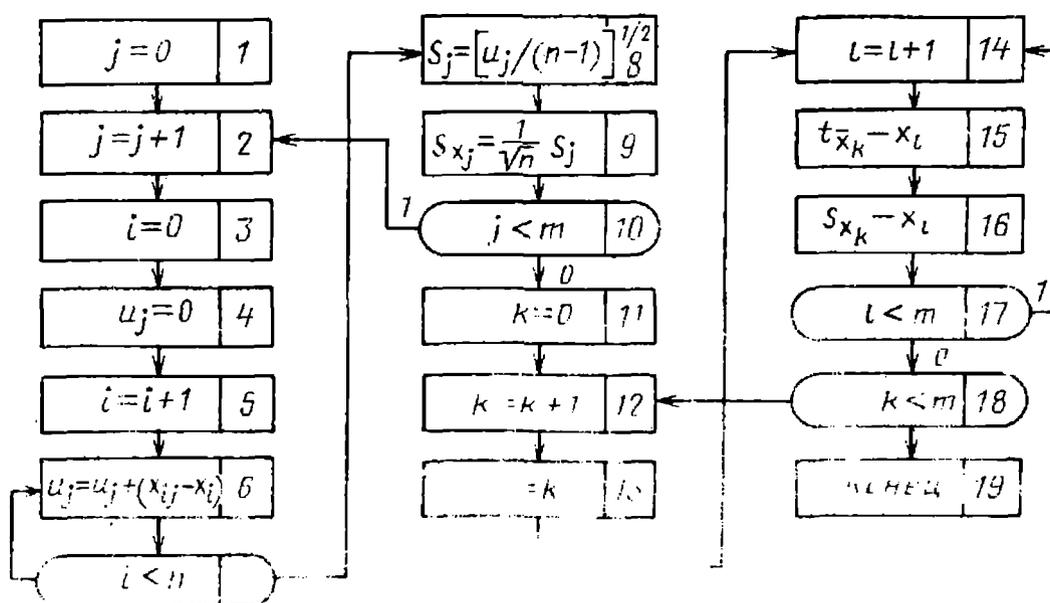


Рис. 14. Блок-схема алгоритма оценки структуры влияния исследуемых признаков:

1—19 — номера блоков

нается с вычисления определителей q -го порядка в блоке I (рис. 16). Возможны два случая: в первом случае существует хотя бы один определитель $D^q \neq 0$ ($k = q$) и во втором случае все определители $D^q = 0$ ($k < q$). В первом случае осуществляется переход к блоку II, в котором вычисляются определители D_{is}^q для всех $D^q \neq 0$. Затем вычисляются значения показателей степеней $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ ($i = 1, 4$) в блоке III для всех возможных форм записей. Во втором случае осуществляется переход к блоку IV, в котором вычисляются все равные нулю определители $(q - 1)$ -го порядка D^{q-1} в отличие от блока I, где вычисляются определители, составленные из столбцов частичной матрицы $\|B\|$. Перебор столбцов каждой частичной матрицы $\|B\|$ ведется до тех пор, пока не встретится определитель, не равный нулю. Если такой определитель D^{q-1} найден, то $k < q - 1$. Если же все определители $D^{q-1} = 0$, то $k < q - 1$. При $k = q - 1$ в блоке V вычисляются определители D_{is}^{q-1} для случая, когда $D^{q-1} \neq 0$. Дальнейший расчет осуществляется по процедурам блока III. При $k < q - 1$ последовательность расчета остается той же самой, что и ранее, с той лишь разницей, что в последующих блоках

должны вычисляться определители каждый раз на порядок ниже предыдущего с учетом размеров частичной матрицы $\|B\|$. В предельном случае расчет по правой ветви (см. рис. 16) заканчивается вычислением определителей D^2 и D_{is}^2 второго порядка, после чего следует снова расчет по процедурам блока III.

Реализация процедур в блоке U_5 . После того, как получена некоторая совокупность одноименных групп критериев подобию, необходимо осуществить проверку их статистической однородности. Практически такую проверку можно осуществить попарно по критерию t Стьюдента. Расчетная формула для t -критерия имеет вид:

$$t = \frac{\bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j}{(n_1 S_{\pi_i}^2 + n_2 S_{\pi_j}^2)^{1/2}} \times \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}, \quad (50)$$

где $\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j, S_{\pi_i}, S_{\pi_j}$ — оценки средних значений и средних квадратических отклонений i -го и j -го критериев подобию из одноименной группы; n_1, n_2 — числа наблюдений при формировании i -го и j -го критериев подобию соответственно.



Рис. 15. Блок-схема получения критериев подобия:

1—12 — номера блоков

Операторная блок-схема вычисления t -критерия имеет вид:

$$\begin{aligned} & A_1 A_2 A_3^{3,6} K_{i4} A_5 P_{6 \downarrow 4}^{\uparrow 7} A_7 A_8 A_9^{9,12} K_{j10} \times \\ & \times A_{11} P_{12 \downarrow 10}^{\uparrow 13} A_{13} A_{14} A_{15}^{15,18} K_{i16} A_{17} \times \\ & \times P_{18 \downarrow 16}^{\uparrow 19} A_{19} A_{20} A_{21}^{21,24} K_{j22} A_{23} \times \\ & \times P_{24 \downarrow 22}^{\uparrow 25} A_{25} A_{26} A_{27} A_{28} Y_{29}, \end{aligned} \quad (51)$$

где A_1 — оператор ввода исходных данных (π_i, π_j, n_1, n_2) ; A_2 — оператор присвоения $i = 0$; A_3 — оператор

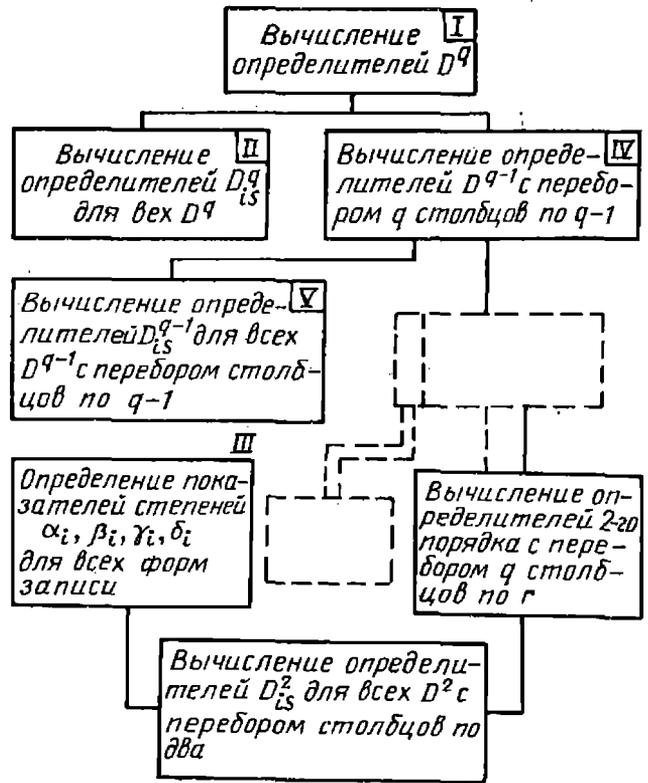


Рис. 16. Схема анализа определителей при определении критериев подобия

присвоения $u = 0$; $^{3,6}K_{i4}$ — оператор суммирования: к текущему значению i прибавляем единицу: $(i = i + 1)$; A_5 — оператор вычисления $u = u + \pi_i$; $P_{6 \downarrow 4}^{\uparrow 7}$ — оператор проверки условия $i < n_1$; A_7 — оператор вычисления $\bar{\pi}_i = u/n_1$; A_8 — оператор присвоения $j = 0$; A_9 — оператор присвоения $V = 0$; $^{9,12}K_{j10}$ — оператор суммирования: к текущему значению j прибавляем единицу ($j = j + 1$); A_{11} — оператор вычисления $v = v + \pi_j$; $P_{12 \downarrow 10}^{\uparrow 13}$ — оператор проверки условия $j < n_2$; A_{13} — оператор вычисления $\pi_j = v/n_2$; A_{14} — оператор присвоения $S_{\pi_i 1} = 0$; A_{15} — оператор присвоения $i = 0$; $^{15,18}K_{i16}$ — оператор суммирования: к текущему значению i прибавляем единицу ($i = i + 1$); A_{17} — оператор вычисления $S_{\pi_i 1} = S_{\pi_i 1} + (\pi_i - \bar{\pi}_i)^2$; $P_{18 \downarrow 16}^{\uparrow 19}$ — оператор проверки условия $i < n_1$; A_{19} — оператор вычисления величины $S_{\pi_i}^2 = S_{x1}/(n_1 - 1)$; A_{20} — оператор присвоения $S_{\pi_i 1} = 0$; A_{21} — оператор присвоения $j = 0$; $^{21,24}K_{j22}$ — опера-

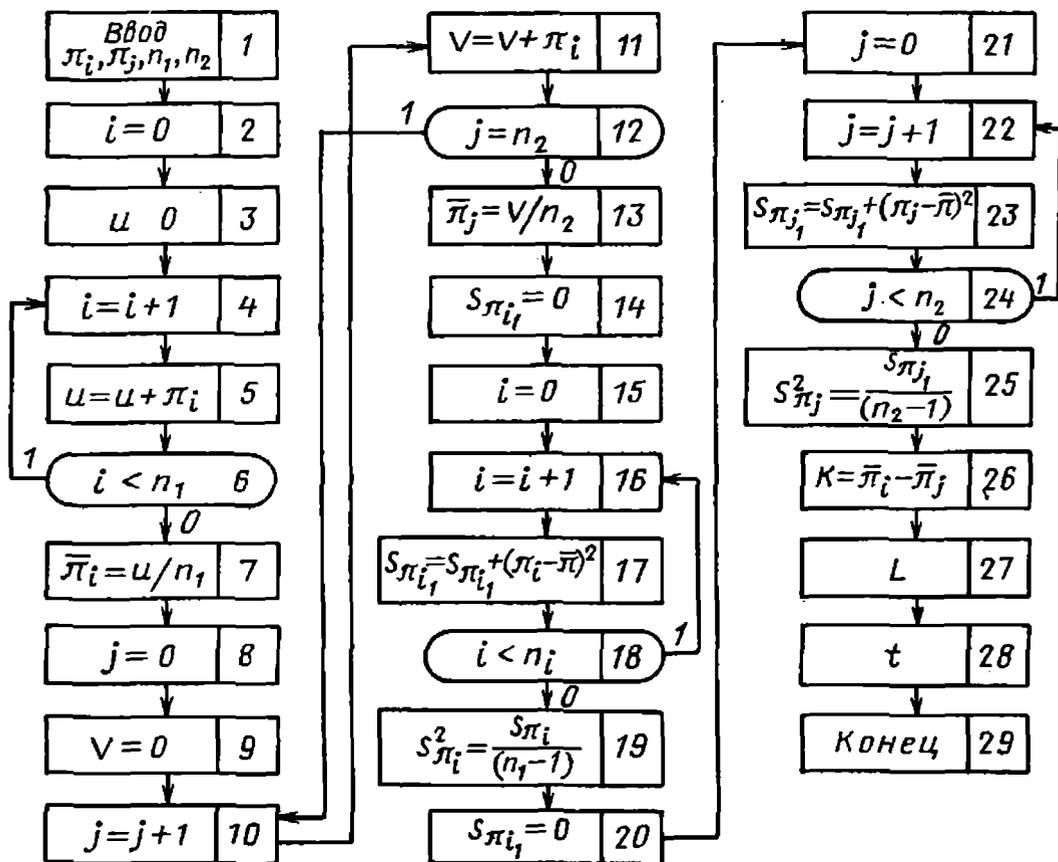


Рис. 17. Блок-схема алгоритма для критериев подобию:

1--29 — номера блоков

тор присвоения: к текущему значению j прибавляем единицу ($j = j + 1$); A_{23} — оператор вычисления $S_{\pi_j} = S_{\pi_j} + (\pi_j - \bar{\pi}_j)^2$; $P_{24} \uparrow 25$ — оператор проверки условия $j < n_2$; A_{25} — оператор вычисления $S_{\pi_j} = S_{\pi_j} + (\pi_j - \bar{\pi}_j)^2$; A_{26} — оператор вычисления $K = \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j$; A_{27} — оператор вычисления $L = (n_1 S_{\pi_i}^2 + n_2 S_{\pi_j}^2)^{1/2}$; A_{28} — оператор вычисле-

ния t -критерия как $t = \left(\frac{K}{L} \right) [n_1 n_2 \times (n_1 + n_2 - 2) / (n_1 + n_2)]^{1/2}$; A_{29} — оператор печати t окончания счета. Блок-схема алгоритма (51) представлена на рис. 17. При $|t| \leq t_\alpha$ (t_α — табличное значение t при уровне значимости α) считаем, что критерии π_i и π_j принадлежат одной генеральной совокупности, а при $|t| > t_\alpha$ — не принадлежат, т. е. критерии подобию статистически неоднородны.

Глава 5. Обеспечение надежности радиоэлектронных систем

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ

Структурная сложность больших программ, огромная трудоемкость процесса их разработки, трудности отладки приводят к тому, что практически всегда существует вероятность наличия ошибки в программе. Хотя процессы, происходящие в аппаратуре и приводящие к отказу системы, существенно отличаются от процессов, приводящих к отказу из-за наличия ошибок в программном обеспечении (ПО), при оценке надежности программного обеспечения пользуются основными положениями теории надежности, заимствуя из нее не только сам подход, но и отдельные понятия и терминологию.

Программное обеспечение можно рассматривать как подсистему некоторой системы, надежность которой может быть определена как надежность системы, состоящей из двух последовательно соединенных подсистем. Отказ программного обеспечения определяется как отклонение от правильного хода выполнения программы вследствие ошибок, допущенных в процессе преобразования исходного алгоритма в действующую программу, либо при таких воздействиях внешней среды, на которые программное обеспечение не было рассчитано. Понятие отказа позволяет определять надежность программного обеспечения (ПО) как вероятность того, что его отказ, вызывающий отклонение получаемого выхода от требуемого за допустимые пределы, не произойдет при опре-

деленных условиях внешней среды в течение заданного периода наблюдения (под определенными условиями внешней среды следует понимать поток входных данных и состояние управляющей системы в процессе выполнения программы, а под заданным периодом наблюдения — время, необходимое для выполнения поставленной задачи).

Типовые модели надежности ПО, наиболее часто применяемые на практике, приведены ниже.

Определение надежности ПО можно уточнить в статистическом смысле, приняв следующие допущения:

машинная программа P_p может быть определена как описание некоторой вычисляемой функции F на множестве всех значений наборов входных данных, таких, что каждый элемент $E_i \in E$ представляет собой набор значений данных, необходимый для выполнения прогона программы:

$$E = (E_i, i = 1, 2, \dots, N);$$

выполнение программы P_p приводит к получению для каждого E_i определенного значения $F(E_i)$;

множество E определяет все возможные вычисления в программе P_p , т. е. каждому набору входных данных E_i соответствует некоторый прогон программы P_p и, наоборот, каждому прогону соответствует некоторый набор входных данных E_i ;

наличие ошибок к программе P_p приводит к тому, что ей на самом деле соответствует функция F' , отличная от заданной функции F ;

для некоторого E_i отклонение выхода $F'(E_i)$, полученного в результате выполнения программы, от заданного

значения $F(E_i)$ находится в допустимых пределах Δ_i :

$$|F'(E_i) - F(E_i)| \leq \Delta_i;$$

для всех остальных E_i , образующих подмножество $E_l \in E$, выполнение программы Π_p не обеспечивает приемлемого результата, т. е.

$$|F'(E_i) - F(E_i)| > \Delta_i.$$

Все такие случаи называются рабочими отказами.

Каждое E_i представляет возможную комбинацию значений, которые могут быть приписаны входным данным программы Π_p . Число N возможных E очень велико, но конечно. Совокупность действий, включающая ввод E_i , выполнение программы Π_p , которая оканчивается получением результата $F'(E_i)$ или рабочим отказом, называется прогоном программы Π_p . Таким образом, вероятность P того, что прогон программы Π_p приведет к рабочему отказу, равна вероятности, что набор входных данных E_i , использованный в данном прогоне, принадлежит множеству E_l . Пусть n_l — число различных наборов значений входных данных, содержащихся в E_l , тогда $Q = n_l/N$ есть вероятность того, что прогон программы на наборе входных данных E_i , случайно выбранном из E среди равновероятных, закончится рабочим отказом. При этом $P = 1 - Q = 1 - n_l/N$ есть вероятность, что прогон программы Π_p на наборе входных данных E_i , случайно выбранном из E , приведет к получению приемлемого результата.

Однако в процессе реального функционирования программы выбор входных данных из E обычно осуществляется не с одинаковыми априорными вероятностями, а диктуется определенными условиями работы. Эти условия могут быть охарактеризованы распределением вероятностей P_i того, что будет сделан выбор именно входных данных E_i .

Распределение Q можно определить через P_i с помощью динамической переменной y_i , которая принимает нулевое значение, если прогон программы на наборе E_i заканчивается вычислением приемлемого значения функ-

ции, и единичное значение, если этот прогон заканчивается рабочим от-

казом. Тогда $Q = \sum_{i=1}^N P_i y_i$ есть ве-

роятность того, что прогон программы Π_p на входных данных E_i , выбранных в соответствии с распределением вероятностей P_i , закончится отказом и

$$P = 1 - Q = \sum_{i=1}^N P_i (1 - y_i)$$

есть вероятность того, что прогон программы с входными данными E_i , выбранными в соответствии с распределением P_i , приведет к правильному выполнению программы.

Так как P — вероятность того, что единичный прогон программы не закончится отказом на наборе входных данных, выбранных в соответствии с распределением P_i , то вероятность успешного выполнения n независимых прогонов этой программы

$$P(n) = P^n = (1 - Q)^n.$$

Таким образом, можно дать математическое определение надежности ПО: надежность программы — это вероятность безотказного выполнения n прогонов программы.

На практике обычно выбор входных данных для каждого прогона нельзя считать независимым. Условия выбора набора данных определяются в терминах вероятностей P_{ij} выбора E_i входных данных при j -м прогоне из некоторой последовательности прогонов. Тогда вероятность того, что j -й прогон закончится отказом,

$$Q_j = \sum_{i=1}^N P_{ij} y_i.$$

Надежность $P(n)$ программы Π_p равна вероятности того, что в последовательности из n прогонов ни один из них не закончится отказом:

$$P(n) = (1 - Q_1)(1 - Q_2)$$

$$(1 - Q_n) = \prod_{j=1}^n (1 - Q_j).$$

Эту формулу можно представить в следующем виде:

$$P(n) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \ln(1 - Q_j) \right\}.$$

С помощью соответствующих замен переменных и подстановок функцию $P(n)$ можно выразить через время функционирования t . Обозначив через Δt_j время выполнения j -го прогона программы, через $t_j = \sum_{i=1}^j \Delta t_i$ — суммарное время выполнения первых j прогонов программы, примем, что

$$h(t_j) = -[\ln(1 - Q_j)] \frac{1}{\Delta t_j}.$$

Тогда

$$P(n) = \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n \Delta t_j h(t_j) \right\}.$$

Если Δt_j стремится к нулю с ростом n , то сумма в показателе экспоненты становится интегралом и формула принимает вид

$$P(t) = \exp \left[- \int_0^t h(S) dS \right].$$

При $Q_i \ll 1$ функция $h(t_j)$ может быть интерпретирована как интенсивность отказов, которая, будучи умноженной на Δt_j , дает условную вероятность появления отказов в интервале $(t_j, t_j + \Delta t_j)$ при отсутствии отказов до момента t_j . Надежность программы может быть оценена прогоном про-

граммы на n наборах входных данных и расчетом оценки по формуле

$$\hat{P} = 1 - \frac{\hat{n}_l}{n},$$

где \hat{n}_l — число наборов входных данных, при которых произошли отказы.

В качестве типового примера в табл. 1 приведены результаты коррекций при отладке и испытаниях ПО конкретной системы.

Оценка надежности этой программы к моменту окончания отладки и испытаний на основе собранных данных:

$$\hat{P} = 1 - \frac{\hat{n}_l}{n} \approx 1 - \frac{206}{4109} \approx 0,95,$$

где $\hat{n}_l = 206$ — число ошибок программы из общего количества ($N = 4109$) проведенных коррекций ПО.

В процессе создания высоконадежной ПО необходимо анализировать ряд показателей, удобных для сравнительной оценки качества вариантов ПО, оценки оптимальной длительности отладки, испытаний и др.

Для оценки надежности рассмотрим модель без допущения о постоянстве интенсивности обнаружения ошибок. Предположим, что обнаружение ошибок неоднородно, а его интенсивность меняется во времени.

Пусть $\{P_p(t), t \geq 0\}$ — дискретный процесс (поток событий), означающий накопленное число обнаруженных ошибок к моменту времени t на этапе испытаний программы, содержащей ошибки двух типов: легко

1. Экспериментальные данные коррекций при отладке и испытаний ПО

Ошибка	Число коррекций (по неделям)								Общее число коррекций за весь период испытаний
	1—2	3—4	5—6	7—8	9—10	11—12	13—14	15—16	
Алгоритмическая	192	121	99	167	211	196	90	53	1129
Программная	289	176	139	213	244	287	94	51	1490
Технологическая	247	145	122	200	233	181	84	51	1263
Структурная	27	20	14	13	11	103	10	—	198
Семантическая	5	3	1	—	—	—	—	—	9
Синтаксическая	10	8	2	—	—	—	—	—	20

обнаруживаемые (1-й тип) и трудно обнаруживаемые (2-й тип).

Пусть к моменту начала испытаний программа содержит начальное число ошибок 1-го и 2-го типов с долей ошибок первого типа P_1 и второго типа P_2 ($P_1 + P_2 = 1$).

Допустим, что число ошибок, обнаруживаемых в единицу времени, к моменту времени $t > 0$ подчиняется монотонно убывающей функции и пропорционально зависит от начального количества ошибок программы. В этом случае плотность функции распределения $f(t)$ обнаруживаемых ошибок (среднее число обнаруживаемых ошибок в единицу времени к моменту времени t) подчиняется экспоненциальному закону:

$$f(t) = ap_i b_i e^{-b_i t}$$

где ap_i — начальное число ошибок 1-го типа; b_i — положительная постоянная.

Пусть $\Pi_p(t)$ — случайное событие, состоящее в обнаружении ошибки за время t и принимающее дискретные значения:

$$\{\Pi_p(t) = n, t \geq 0\}.$$

Допустим, что вероятность $P(t, t + dt)$ наступления события $\Pi_p(t)$ в промежутке времени $(t, t + dt)$ равна bdt (b — положительная постоянная, dt — бесконечно малый интервал времени).

Пусть $P(t)$ — вероятность появления рассматриваемого события n раз за промежуток времени $(0, t)$. Тогда вероятность того, что событие $\Pi_p(t)$ ни разу не произойдет на интервале $(0, t + dt)$:

$$P_{\Pi_p=0}(t + dt) = P_{\Pi_p=0}(t) \times (1 - b dt) = P_0(t) - bP_0(t) dt$$

и, следовательно,

$$\frac{P_0(t + dt) - P_0(t)}{dt} = -bP_0(t). \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение [при $dt \rightarrow 0$ из (1)]

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -bP_0(t)$$

имеет решение

$$P_0(t) = e^{-bt}.$$

Вероятность того, что событие $\Pi_p(t)$ появится хотя бы один раз на интервале $(0, t)$,

$$q_0(t) = 1 - e^{-bt}$$

с плотностью появления

$$f(t) = be^{-bt}.$$

Тогда функция плотности распределения $\lambda(t)$ для ошибок ПО

$$\lambda(t) = aP_1 b_1 e^{-b_1 t} + aP_2 b_2 e^{-b_2 t} =$$

$$= a \sum_{i=1}^r P_i b_i e^{-b_i t} \quad (2)$$

На основе функции $\lambda(t)$ получим функцию распределения числа обнаруживаемых ошибок на интервале $(0, t)$:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(t) dt = a \sum_{i=1}^2 P_i (1 - e^{-b_i t}). \quad (3)$$

Таким образом, поток событий $\{\Pi_p(t) = n, t \geq 0\}$ представляет собой нестационарный пуассоновский процесс с функцией среднего значения $m(t)$, т. е. вероятность

$$P\{\Pi_p(t) = n\} = \frac{\{m(t)\}^n}{n!} \times \exp[-m(t)] \quad (4)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

есть вероятность того, что событие $\Pi_p(t)$ за время $(0, t)$ появится n раз.

Из (2) и (4) можно получить выражение для интенсивности обнаружения

ошибок в ПО в единицу времени на одну обнаруживаемую ошибку:

$$d(t) = \frac{\lambda(t)}{a - m(t)} =$$

$$= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{P_i e^{-b_i t}}{P_1 e^{-b_1 t} + P_2 e^{-b_2 t}} \right) b_i,$$

где $d(0) = P_1 b_1 + P_2 b_2 = \sum_{i=1}^2 P_i b_i$;

$$d(\infty) = 0.$$

Дополнительные количественные характеристики представляют практический интерес при обеспечении и оценке надежности ПО.

На основании выражения (4) оценивается среднее значение ожидаемого прогнозируемого количества ошибок программного обеспечения (или текущее число оставшихся ошибок):

$$r(t) = a \sum_{i=1}^2 P_i e^{-b_i t}$$

Вероятность того, что ошибка в программе не появится на интервале $(S, S+x)$ при условии, что последняя ошибка появилась в момент S (можно трактовать как условную функцию надежности), равна

$$R\left(\frac{x}{S}\right) =$$

$$= \exp \left[-a \sum_{i=1}^2 P_i \{ e^{-b_i S} - e^{-b_i (x+S)} \} \right].$$

Для оценки введенных неизвестных параметров a и b_i , $i = 1, 2$ программного обеспечения, используемых для точечного и интервального оценивания введенных показателей, целесообразно использовать метод максимального правдоподобия.

Предположим, что данные накопленного числа обнаруженных ошибок y_k представлены в интервалах времени $(0, t_k)$, где $k = 1, 2, \dots, n$ по результатам наблюдения. Тогда логарифмическая функция максимального правдоподобия для нестационарной пуассо-

новской модели с функцией среднего значения $m(t)$ имеет выражение

$$\ln L = \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) \ln a +$$

$$+ \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) \ln \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^2 P_i (e^{-b_i t_{k-1}} - e^{-b_i t_k}) \right] -$$

$$- a \sum_{i=1}^2 P_i (1 - e^{-b_i t_k}) -$$

$$- \sum_{k=1}^n \ln [(y_k - y_{k-1})!],$$

при $t_0 = 0, y_0 = 0$.

Учитывая, что $0 < b_2 < b_1$, получим оценку \hat{a} и \hat{b}_i ($i = 1, 2$) неизвестных параметров a и b ($i = 1, 2$) рассмотренной модели из уравнений:

$$\frac{y_k}{a} = \sum_{i=1}^2 P_i (1 - e^{-b_i t_k}); \quad (5)$$

$$a t_n e^{-b_i t_n} =$$

$$\sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) \times$$

$$= \frac{\times (t_k e^{-b_j t_k} - t_{k-1} e^{-b_j t_{k-1}})}{\left\{ \sum_{i=1}^2 P_i (e^{-b_i t_{k-1}} - e^{-b_i t_k}) \right\}}, \quad (6)$$

$j = 1, 2$.

Методом численного решения уравнений (5) и (6) для исходных данных ПО (см. табл. 1) получены следующие оценки параметров a , b_i ($i = 1, 2$): $a = 4120,8$; $b_1 = 0,0797$; $b_2 = 0,0229$.

При значениях $P_1 = 0,9$ и $P_2 = 0,1$ оценка функции распределения числа обнаруженных ошибок на интервале $(0, t)$ (в неделях)

$$\hat{m}(t) = 4120,8 [(0,9) (1 - e^{0,0797t}) + (0,1) (1 - e^{0,0229t})].$$

На рис. 1 приведены экспериментальные данные процесса отладки и испытаний ПО конкретной системы и оценка параметра $\hat{m}(t)$ в соответствии с рассмотренной моделью. Границы соответствуют 90 %-ному доверительному интервалу для оценки текущего числа $\hat{m}(t)$ ошибок в программе.

Рассмотренную модель удобно применить для решения задач обеспечения надежности за счет оптимального времени их доработки и испытаний. Оптимизация ведется на основе учета затрат, связанных с появлением отказов на различных фазах жизненного цикла программы.

Полные затраты на доработку программы, ее испытания и эксплуатацию, которые определяются надежностью программы, могут быть выражены следующей формулой:

$$C \left(\frac{t_q}{T_{ц}} \right) = C_1 m(t_q) + C_2 \{ m(T_{ц}) - m(t_q) \} + C_3 t_q,$$

где C_1 — затраты на устранение ошибок во время испытаний; C_2 — затраты на устранение ошибок во время эксплуатации; C_3 — удельные затраты на проведение испытаний; t_q — длительность доработки и испытаний программы; $T_{ц}$ — продолжительность жизненного цикла программы в изделии.

Обеспечение надежности программных средств, как и самой аппаратуры, планируется в виде программы работ, включающей как организационные, так и технические мероприятия.

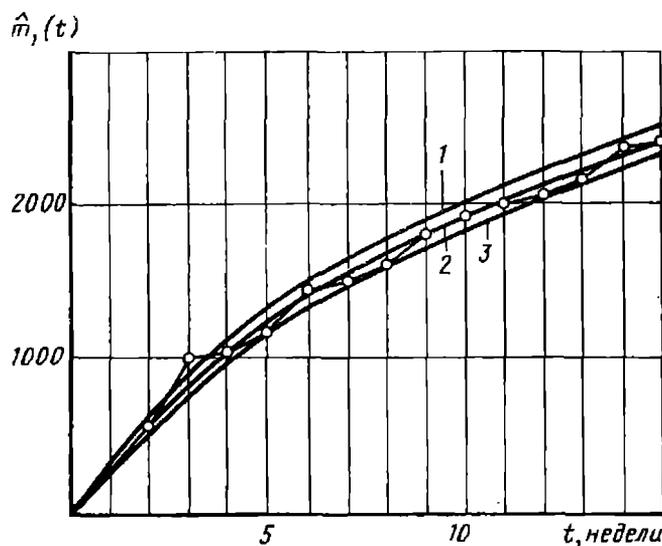


Рис. 1. Оценка параметра $\hat{m}(t)$ программного обеспечения с 90 %-ной доверительной вероятностью ($P_1 = 0,9$, $P_2 = 0,1$):

1, 3 — границы значений параметра $\hat{m}(t)$; 2 — экспериментальные значения параметра $\hat{m}(t)$

2. АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ РАДИО-ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ (РЭА)

В идеальном случае решение всей совокупности задач обеспечения надежности должно выполняться в процессе разработки РЭА автоматизированными системами проектирования САПР. При этом возникает необходимость алгоритмизации решения задач надежности на основе универсальных моделей, обобщающих свойства многих отказоустойчивых систем. Такая задача решается на основе описания работоспособности систем на языке пространств состояний, соответствующих определенным уровням качества функционирования (когда надежность системы удобно характеризовать многокритериальными показателями, что свойственно многим реальным системам) или топологическим описанием работоспособности систем с различными видами резервирования (геометрическим изображением) надежностной структуры [структурной схемой надежности (СН)].

Метод алгоритмизации составления систем марковских уравнений. Любую отказоустойчивую систему S можно представить в виде последовательности стохастически независимых подсистем, надежность которых полностью может быть охарактеризована совокупностью параметров $H(S)$, называемую вектором состояний системы. Вектор состояний $H(S)$ должен содержать все параметры, достаточные для описания надежности системы (в общем случае состоящей из аппаратно-программных компонентов) с учетом функциональных зависимостей от показателей качества среды проектирования, режимов и условий функционирования, уровней внешних воздействующих факторов.

Вектор состояний $H(S)$ определяется следующими параметрами: $\{N, D, R, P_0, P_l, P_w, P_k, Y, CY, \lambda_a, \lambda_r, \lambda_\mu\}$, где N — начальное число активных модулей; D — число деградаций, допустимых в активной конфигурации; R — число резервных модулей; P_0 — условная вероятность обнаружения неисправностей подсистемой контроля при появлении отказов, ошибок, дефектов и т. д. в системе; P_l — условная вероятность локализации места неисправности подсистемой диагностики при обнаружении отказа в системе; P_w — условная вероятность восстановления работоспособности системы при локализации места неисправности в системе; P_k — условная вероятность классификации вида отказа при условии его обнаружения [катастрофического (полного) и перемежающегося (сбоя)]; Y — вектор последовательности возможных деградаций конфигураций $\{Y[1], Y[2], \dots, Y[P]\}$ ($Y[i]$ — число активных модулей после i -й деградации); CY — вектор степени восстановления при деградации активной конфигурации, $\{CY = (CY[1], \dots, CY[P])\}$ ($CY[1]$ ассоциируется с переходом к конфигурации, описываемой $Y[i]$, и характеризует уровень качества функционирования); λ_a — интенсивность отказов активного модуля; λ_r — интенсивность отказов резервного модуля; λ_μ — интенсивность отказов из-за ошибок программного обеспечения.

В такой системе в каждый момент времени t_i можно выделить следующие возможные состояния:

выявление отказа S_1 ; в функционирующей системе появился отказ (ошибка) и подсистема контроля осуществляет поиск с целью его выявления в течение заданного интервала времени;

установление вида отказа S_2 ; средства контроля и диагностики при обнаружении (локализации отказа) осуществляют выявление вида отказа (полный катастрофический или перемежающийся отказ);

восстановления S_3 работоспособности системы за счет резервных модулей, реконфигурации или повторного запуска с обновлением информации;

локализации S_4 отказа в системе средствами диагностики до уровня модуля замены.

Тогда процесс перехода системы из одного работоспособного состояния в другое можно представить в виде диаграммы (рис. 2), построенной по следующему правилу: узловым вершинам диаграммы соответствуют возможные состояния, а дугам — переходы между состояниями с известными вероятностями рассмотренных переходных процессов.

При допущении, что все состояния, определенные как узловые вершины диаграммы, являются независимыми событиями, можно вычислить переходные вероятности P_{ij} между двумя работоспособными состояниями и состоянием отказа системы. Правило вычисления вероятностей P_{ij} состоит в том, что для их вычисления в диаграмме состояний (направленный граф G) определяются всевозможные пути перехода из исходной вершины (начальной), соответствующей работоспособному состоянию, в вершину, соответствующую следующему состоянию работоспособности или отказа (конечная вершина графа). Тогда переходная вероятность P_{ij} между i -й и j -й вершинами:

$$P_{ij} = \sum_{N \in N_{ij}} r_i(\pi_n), \quad (7)$$

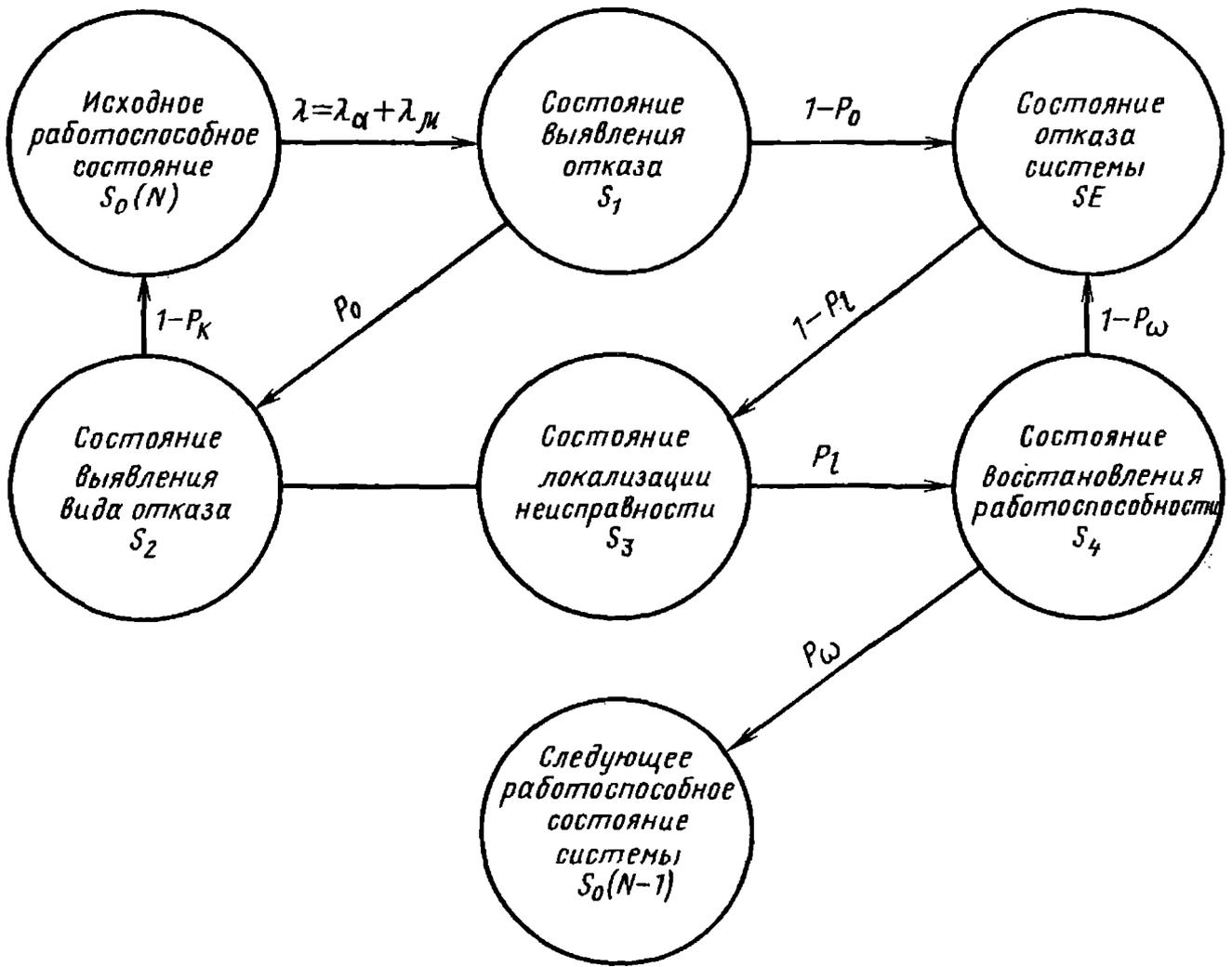


Рис. 2. Диаграмма возможных переходов между работоспособными состояниями отказоустойчивой системы

где $r(\pi_n) = \prod_{k \in \pi_n} q(l_k)$;

N_{ij} — множество всех путей между вершинами i и j ; $r(\pi_n)$ — переходная вероятность по n -му пути между вершинами i и j [k_n — множество всех дуг n -го пути между i -й и j -й вершинами; $q(l_k)$ — переходная вероятность k -й дуги направленного графа G (диаграммы состояний)].

В соответствии с выражением (7) для системы, представленной на рис. 3, переходные вероятности $P_{S(0;N), S(0;N-1)}$ и $P_{S(0;N), S(F)}$ между исходным и последующим работоспособными состояниями $S(0;N)$ и $S(0;N-1)$ и состоянием отказа равны соответственно:

$$\begin{aligned}
 P_{S(0;N), S(0;N-1)} &= \\
 &= \lambda_\alpha P_\alpha P_l P_w N + \lambda_\mu P_0 P_l P_k P_w = \\
 &= P_0 P_l P_w (N \lambda_\alpha + P_k \lambda_\mu);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{S(0;N), S(F)} &= \\
 &= N(1 - P_0)(\lambda_\alpha - \lambda_\mu) + \\
 &+ NP_0 [(1 - P_l) + P_l(1 - P_w)] \lambda_\alpha + \\
 &+ P_0 P_k [(1 - P_l) + P_l(1 - P_w)] \lambda_\mu.
 \end{aligned}$$

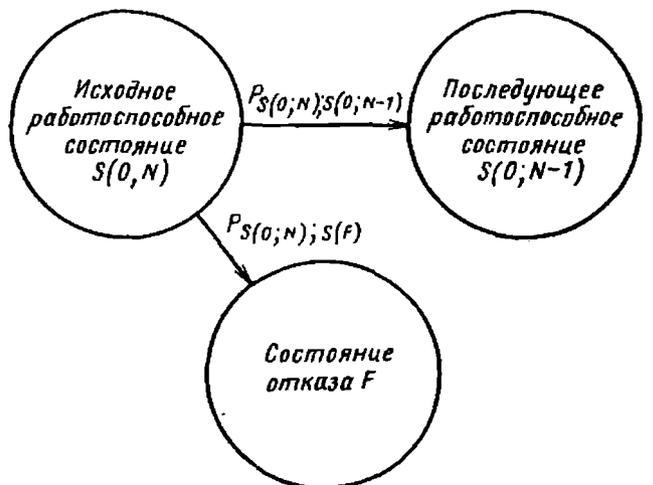


Рис. 3. Укрупненная диаграмма состояний системы

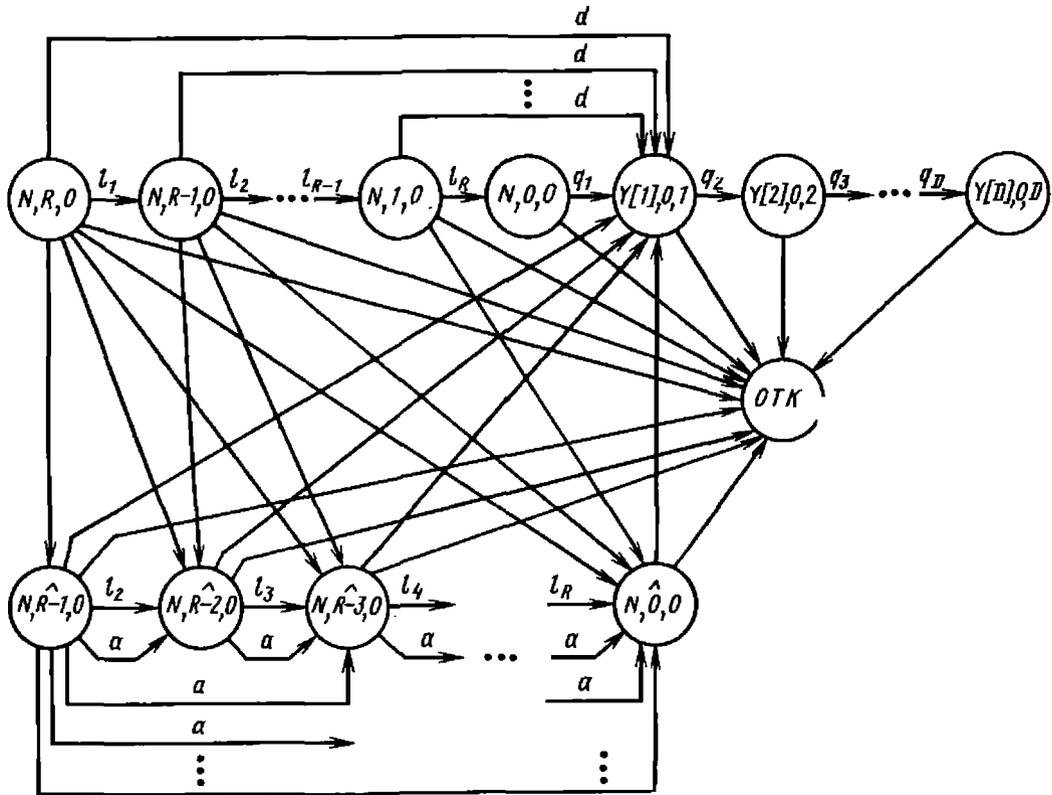


Рис. 4. Диаграмма состояний отказоустойчивой системы

В соответствии с выражением (7) исходная диаграмма состояний преобразуется в эквивалентную укрупненную диаграмму, состоящую из исходной вершины $S(0; N)$ и двух конечных вершин $S(0; N-1)$ и $S(F)$ (см. рис. 3).

Марковская модель системы, описываемая вектором состояний $H(S)$ с полным набором параметров, имеет диаграмму состояний, представленную на рис. 4, где каждая вершина характеризуется тремя параметрами N, R, D (N — число активных модулей исходной конфигурации, R — число резервных модулей, D — число уровней деградации). Состояния $\{(N, R, 0), (N, R-1, 0), \dots, (N, 0, 0)\}$ соответствуют постепенной исчерпанности количества (запаса) резервных модулей, т. е. переходы между элементами этого подмножества состояний происходят при восстановлении работоспособности за счет подключения резервных модулей. Подмножество состояний $\{(Y[1], 0, 1), (Y[2], 0, 2), \dots, (Y[D], 0, D)\}$ соответствует постепенной деградации системы, т. е. когда полностью исчерпаны резервные модули, система восстанавливает свою работоспособность меньшим числом активных модулей за счет реконфигура-

ции структуры. В каждом реконфигурационном состоянии $(Y[i], 0, i)$ ($i = 1, 2, \dots, D$) число активных модулей определяется величиной $Y[i]$, а качество функционирования системы определяется величиной $SY[i]$ ($i = 1, 2, \dots, D$). Наличие состояний этого подмножества характерно не только для систем с постепенной деградацией, но и для статических, гибридных систем, а также динамических систем с параллельной работой модулей (например, дублированные системы), имеющих избыточный набор активных модулей. В последнем случае (для перечисленных систем с резервированием) функционирование таких систем не сопровождается понижением качества или уровня работоспособности и вектор SY является единичным вектором для всех состояний $(Y[i], 0, i)$ с меньшим числом активных модулей. Подмножество состояний $\{(N, \hat{R}-1, 0), (N, \hat{R}-2, 0), \dots, (N, \hat{0}, 0)\}$ соответствует появлению отказов в резервных модулях. Эти состояния являются обобщенными в смысле равенства нумераций отказавшего модуля среди R резервных модулей, так как функционирование системы не зависит от номера отказавшего модуля. Переходные ве-

роятности P_{ij} , обозначенные на диаграмме как весовые параметры дуг между вершинами, являются обобщенными и определяются через параметры вектора состояний $H(S)$. Для их вычисления рассмотрим переходные процессы между состояниями подмножеств:

$$\{(N, R, 0), (N, R-1, 0), (N, 0, 0)\}; \{(Y[1], 0, 1), (Y[2], 0, 2), \dots, (Y[D], 0, D)\}; \{(N, \widehat{R-1}, 0), (N, \widehat{R-2}, 0), (N, \widehat{0}, 0)\}$$

и состоянием отказа (ОТК) (см. рис. 4).

Воспользуясь диаграммой состояний (рис. 4 и 5) получим переходные вероятности: между работоспособными состояниями

$$P_{(N, R, 0), (N, R-1, 0)} = P_{(N, \widehat{R-1}, 0), (N, \widehat{R-2}, 0)} = l_i = P_0 P_l P_w [N \lambda_a + (R-i) \lambda_r + P_k \lambda_\mu],$$

где $i = 1, 2, \dots, R$;

между работоспособными состояниями подмножеств

$$\{(N, R, 0), \dots, (N, 0, 0)\}; \{(N, \widehat{R-1}, 0), \dots, (N, \widehat{0}, 0)\}$$

и состоянием отказа {(ОТК)}

$$P_{(N, R, 0), (ОТК)} = P_{(N, \widehat{R-1}, 0), (ОТК)} = b_i = (1 - P_0) (N \lambda_a + R \lambda_r + \lambda_\mu) + P_0 (1 - P_l P_w) [\lambda_a N + (R-i) \lambda_r] + P_0 P_k (1 - P_l P_w) \lambda_\mu,$$

где $i = 1, 2, \dots, R$;

между деградационными состояниями подмножества $\{(Y[1], 0, 1), (Y[2], 0, 2), \dots, (Y[D], 0, D)\}$ состоянием $\{(N, 0, 0)\}$

$$P_{(Y[i], 0, i), (Y[i+1], 0, i+1)} = q_i = P_0 P_l P_w (Y[i] \lambda_a + P_k \lambda_\mu), \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, D;$$

между состояниями подмножеств $\{(Y[1], 0, 1), \dots, (Y[D], 0, D)\}$ и состоянием {(ОТК)}

$$P_{(Y[i], 0, i), (ОТК)} = f_i = \lambda_a Y[i] (1 - P_0 P_l P_w) + \lambda_\mu (1 - P_0 P_k - P_0 P_k P_l P_w),$$

где $i = 1, 2, \dots, D$;

между состояниями подмножеств

$$\{(N, R, 0), (N, R-1, 0), \dots, (N, 1, 0)\}, \{(N, \widehat{R-1}, 0), (N, \widehat{R-2}, 0), \dots, (N, \widehat{1}, 0)\}$$

и первым деградационным состоянием $(Y[1], 0, 1)$

$$P_{(N, R, 0), (Y[1], 0, 1)} = P_{(N, \widehat{R-1}, 0), (Y[1], 0, 1)} = d_i = \lambda_r (R-i), \quad i = 1, 2, \dots, D.$$

Аналогично найдем переходные вероятности

$$P_{(N, R, 0), (N, \widehat{R-1}, 0)} = a_i = (R-i) \lambda_r, \quad i = 1, 2, \dots, R-1.$$

На основе диаграммы состояний с учетом переходных вероятностей составляется марковская модель, представляющая систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_j P_{ij}(t) P_j(t) \quad (8)$$

с начальными условиями $P_0(t=0) = 1$; $P_i(0) = 0$; $i = 1, 2, \dots, L$, где L — множество работоспособных состояний.

Вероятность безотказной работы системы определяется как сумма вероятностей пребывания ее в состояниях работоспособности:

$$P(S) = \sum_{i \in L} P_i(t).$$

Процесс составления системы дифференциальных уравнений — процедура довольно трудоемкая и не формализована для использования ЭВМ.

Для составления системы уравнений (8) с помощью ЭВМ и ее численного решения может быть эффективно использован алгоритм составления систем марковских уравнений.

Будем считать, что модель системы задана диаграммой состояний (т. е. направленным графом G) с известными переходными вероятностями P_{ij} между соответствующими вершинами.

Первым шагом алгоритма является представление графа $G(V, X)$ (V — множество вершин, X — множество дуг) матрицей связности M_c , являющейся матрицей $n \times n$ (n — число вершин графа). При переходе от диаграммы состояний к направленному графу $G(V, X)$ осуществляется произвольная нумерация вершин и дуг. Тогда элементы матрицы связности определяются следующим образом:

$$m_{ij} = \begin{cases} x_k(i, j), & \text{если } \{v_i v_k\} \in V; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\{v_i, v_k\}$ — ориентированная сеть между вершинами графа. Диаграмма состояний (рис. 5) имеет вид

$$M_c = \begin{matrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2\lambda_n & 2\lambda & 0 & 0 & \lambda_c \\ \mu_1 & 0 & 0 & \lambda_n & \lambda & 0 \\ \mu_2 & 0 & 0 & \lambda_n & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Второй шаг алгоритма состоит в формировании системы дифференциальных уравнений в соответствии со следующими процедурами.

Процедура А. В матрице M_c для выбранной i -й строки, соответствующей S_i вершине графа, определяются все элементы m_{ij} , $j = 1, \dots, n$, не равные нулю, и составляется уравнение

$$\frac{dP_{S_i}(t)}{dt} = - \left(\sum_{j \in J} m_{ij} \right) P_{S_i}(t), \quad (9)$$

где $j \in J$ — индексы ненулевых элементов i -й строки матрицы.

Процедура В. Выбирается i -й столбец матрицы и для всех $m_{ij} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ формируются дополнительные слагаемые вида

$$\sum_{i \in k} m_{ij} P_{S_i}(t), \quad (10)$$

где $i \in k$ — индексы ненулевых элементов i -го столбца матрицы.

Процедура С. Складывая правую часть уравнения (9) с (10), получим

$$\begin{aligned} \frac{dP_{S_i}(t)}{dt} &= \\ &= - \left(\sum_{j \in J} m_{ij} \right) P_{S_i}(t) + \\ &+ \sum_{i \in k} m_{ij} P_{S_i}(t). \end{aligned}$$

Для диаграммы состояний (рис. 6) в соответствии с рассмотренным алгоритмом получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{S_1}(t)}{dt} + (2\lambda_n + 2\lambda + \lambda_c) P_{S_1}(t) &= \\ &= \mu_1 P_{S_2}(t) + \mu_2 P_{S_3}(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{S_2}(t)}{dt} + (\mu_1 + \lambda_n + \lambda) P_{S_2}(t) &= \\ &= 2\lambda_n P_{S_1}(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{S_3}(s)}{dt} + (\mu_2 + \lambda_n + \lambda) P_{S_3}(t) &= \\ &= 2\lambda P_{S_1}(t); \end{aligned}$$

$$\frac{dP_{S_4}(t)}{dt} = \lambda_n P_{S_2}(t) + \lambda_n P'_{S_2}(t);$$

$$\frac{dP_{S_5}(t)}{dt} = \lambda [P_{S_2}(t) + P_{S_3}(t)];$$

$$\frac{dP_{S_6}(t)}{dt} = \lambda_c P_{S_1}(t),$$

где $P_{S_1}(0) = 1$, $P_{S_i}(0) = 0$, $i = 2, 3, \dots, 6$ — начальные условия системы.

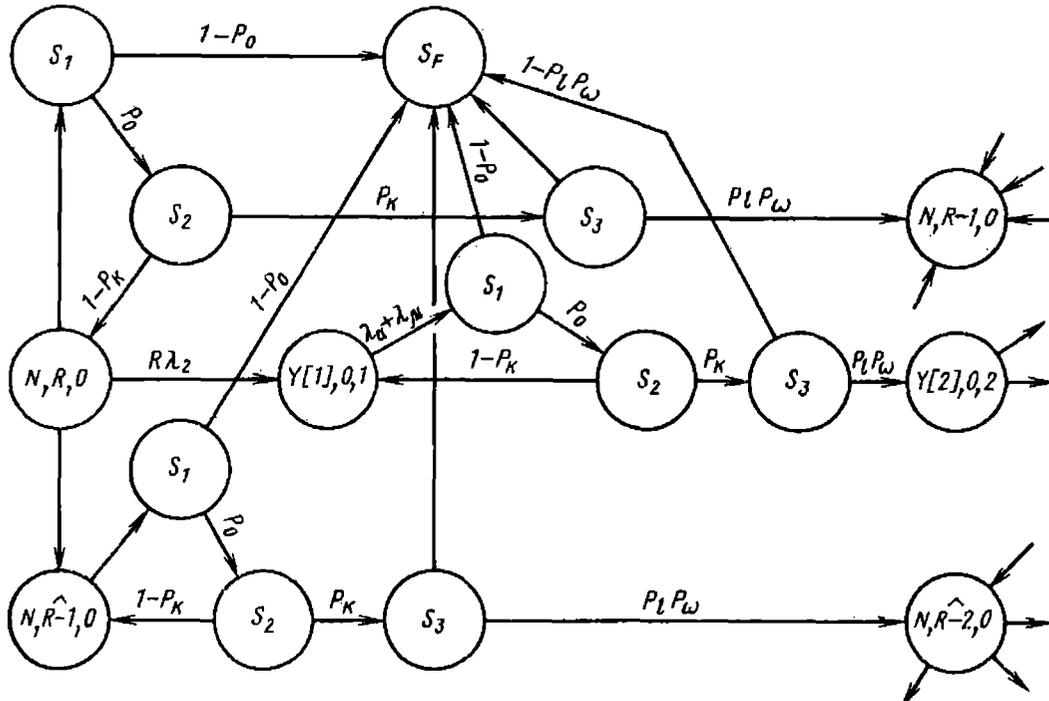


Рис. 5. Диаграмма переходов между элементами основных подмножеств состояний

Решение полученной системы дифференциальных уравнений получим преобразованием Лапласа:

$$P_{S_1}(S) = \frac{EF}{EFG - 2\mu_1\lambda_n F - 2\mu_2\lambda E},$$

где

$$E = (S + \lambda + \lambda_n + \mu_1);$$

$$F = (S + \lambda + \lambda_n + \mu_2);$$

$$G = (S + 2\lambda_n + 2\lambda + \lambda_c);$$

$$P_{S_2}(S) = \frac{2\lambda_n P_{S_1}(S)}{E};$$

$$P_{S_3}(S) = \frac{2\lambda}{F} P_{S_1}(S);$$

$$P_{S_4}(S) = \frac{1}{S} \left[\frac{2\lambda_n^2}{E} + \frac{2\lambda\lambda_n}{F} \right] P_{S_1}(S);$$

$$P_{S_5}(S) = \frac{1}{S} \left[\frac{2\lambda\lambda_n}{E} + \frac{2\lambda^2}{F} \right] P_{S_1}(S);$$

$$P_{S_6}(S) = \lambda_c P_{S_1} \frac{1}{S}.$$

Тогда надежность системы $P(S) = P_{S_1}(S) + P_{S_2}(S) + P_{S_3}(S)$. Для

средней наработки на отказ, используя последнее выражение, получим

$$T_0 = \frac{HI}{JHI + 2\mu_1\lambda_n I - 2\mu_2\lambda H} \times \left[1 + \frac{2\lambda_n}{H} + \frac{2\lambda}{I} \right],$$

где $H = \lambda + \lambda_n + \mu_1$; $I = \lambda + \lambda_n + \mu_2$; $J = 2\lambda_n + 2\lambda + \lambda_c$. Однако при использовании ЭВМ более удобными являются численные методы решения марковских уравнений.

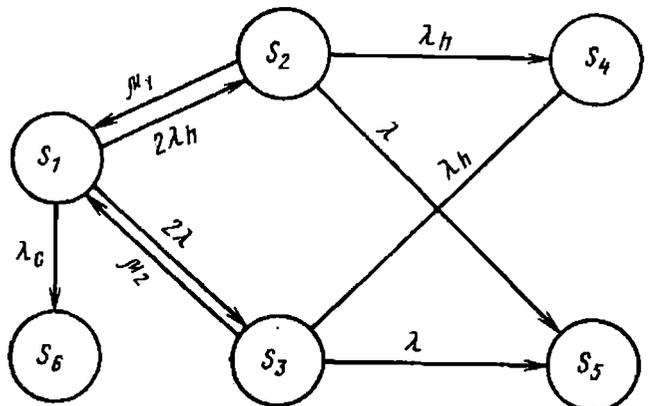


Рис. 6. Диаграмма состояний дублированной системы с восстановлением

Рассмотрим решение следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_{S_0}(t)}{dt} &= \\ &= -(\lambda_{01} + \lambda_{02}) P_{S_0}(t) + \rho_{10} P_{S_1}(t); \\ \frac{dP_{S_1}(t)}{dt} &= \\ &= -\rho_{10} P_{S_1}(t) \lambda_{01} P_{S_0}(t) + \\ &+ \rho_{21} P_{S_2}(t); \\ \frac{dP_{S_2}(t)}{dt} &= -\rho_{21} P_{S_2}(t) + \\ &+ \lambda_{02} P_{S_0}(t). \end{aligned} \right\}$$

В операторной форме получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} P_{S_0}(P)(P + \lambda_{01} + \lambda_{02}) - \\ - P_{S_1}(P) \rho_{10} &= P_{S_0}(0); \\ P_{S_1}(P)(P + \rho_{10}) - P_{S_0}(P) \lambda_{01} - \\ - P_{S_2}(P) \rho_{21} &= P_{S_1}(0); \\ P_{S_2}(P)(P + \rho_{21}) - P_{S_0}(P) \lambda_{02} &= \\ = P_{S_2}(0). \end{aligned} \right\}$$

Характеристическая матрица последней системы

$$|T| = \begin{vmatrix} P + \lambda_{01} + \lambda_{02} & -\rho_{10} & 0 \\ -\lambda_{01} & P + \rho_{10} & -\rho_{21} \\ -\lambda_{02} & 0 & P + \rho_{21} \end{vmatrix}.$$

Система уравнений в матричной форме

$$T ||P_S(P)'\| = |P_S(0)|.$$

Надежность системы получим обратным преобразованием выражения

$$P_{S_0}(P) = \frac{(P + \rho_{10})(P + \rho_{21})}{P(P + a)(P + b)},$$

где

$$a, b = \frac{(\rho_{10} + \rho_{21} + \lambda_{01} + \lambda_{02})}{2} \times$$

$$\times \left\{ -1 \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{1 - \left[\frac{4(\rho_{10}\rho_{21} + \rho_{21}\lambda_{01} + \rho_{10}\lambda_{02} + \rho_{21}\lambda_{02})}{(\rho_{10} + \rho_{21} + \lambda_{01} + \lambda_{02})^2} \right]} \right\}.$$

Метод алгоритмизации синтеза аналитической модели надежности резервированной системы. Метод заключается в описании произвольной структурной схемы надежности (ССН) системы с различными видами резервирования рекурсивно вычисляемым операторным выражением вида

$$\begin{aligned} F &= \{F_\alpha \{\alpha_{i_1}, i_1 \in I_1\} \times \\ &\times \{F_\beta \{\beta_{i_2}, i_2 \in I_2\} \times \\ &\times \{F_\gamma \{\gamma_{i_3}, i_3 \in I_3\} \{ \dots \} \dots \} \{F_\nu \times \\ &\times \{v_{i_k}, i_k \in I_k\} \dots \}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma, \dots, F_\nu$ — операторное описание элементарных типовых (ССН) резервированных структур (например, последовательная, параллельная, мажоритарная и т. д.); $\alpha_{i_1}, \beta_{i_2}, \gamma_{i_3}, \dots, v_{i_k}$ — совокупность параметров, необходимых для описания типовых структурных схем надежности.

Операторное выражение (11) фактически представляет собой обобщенный алгоритм формирования математической модели надежности системы на основе ее структурной схемы надежности с учетом действий операторов типовых ССН. Под действием операторов $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma, \dots, F_\nu$ понимается формирование однозначной типовой математической модели конкретной надежностной схемы. Процедура формирования математической модели исследуемой ССН состоит в последовательном раскрытии скобок ее операторного выражения и реализации действий элементарных операторов $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma, \dots, F_\nu$.

Рассмотрим операторы типовых ССН. Выражение вида

$$F_i = A_1 A_2 \dots A_{N_1} = F_1 \{A_i N_i\} = F_1 \{N, A_i\}, \quad i = 1, \dots, N_1 \quad (12)$$

называется оператором F_1 ССН последовательного типа, где A_i , $i = 1, N_i$ — число элементов ССН, структура которых при анализе надежности не подлежит декомпозиции.

Оператор F_1 реализует алгоритм вычисления вероятности безотказной работы в соответствии с выражением

$$P(F_1) = P(F_1 \{N_1, A_i\}) = \prod_{i=1}^{N_1} P(A_i), \quad (13)$$

где $P(A_i)$ — элементарный оператор, используемый для расчета надежности элемента A_i .

Выражение вида

$$F_2 = (A_1 (A_2 \dots (A_{N-1} A_N)) \dots) = F_2 \{A_i N_2\}$$

называется оператором F_2 ССН параллельного типа (рис. 7, а). Оператор $P(F_2)$ определим в соответствии с выражением

$$P(F_2) = P(F_2 \{N_2, A_i\}) = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - P(A_i)), \quad (14)$$

где $P(A_i)$ — элементарный оператор, используемый для расчета надежности элемента A_i .

В выражениях (12) и (13) в качестве элементов A_i , в свою очередь, могут быть операторы типа F_1, F_2 .

Например, для ССН, приведенной на рис. 7, б, операторное выражение имеет следующий вид:

$$F = F_2 \{N_2 F_1\} = F_2 \{N_2 F_1 \{N_1 A_i\}\}.$$

Введенные операторы F_1 и F_2 позволяют просто описывать произвольные ССН параллельно-последовательного типа. Для примера рассмотрим процедуру описания ССН для расчета надежности системы, показанной на рис. 7.

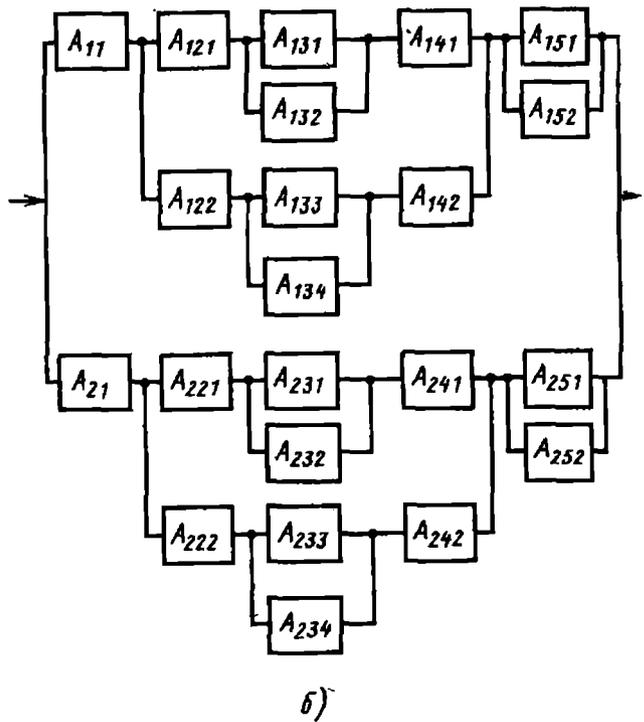
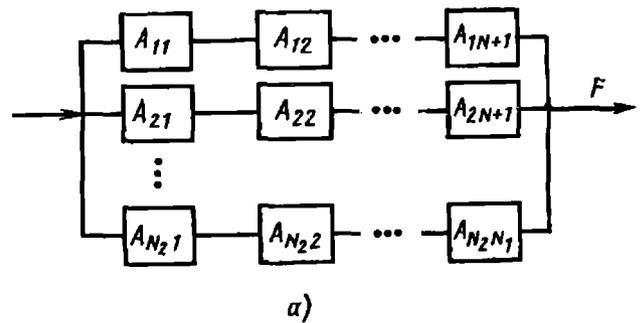


Рис. 7. Структурная схема надежности:

а — система с последовательно-параллельным соединением; б — смешанная структура

Аналитическое выражение оператора имеет вид:

$$F = F_2 \{2F_1\} = F_2 \{2F_1 \{1 A_i\}, (F_2), (F_2)\} = F_2 \{2F_1 \{(A_i), (F_2 \{2F_1\}), (F_2 \{2A_i\})\}\} = F_2 \{2F_1 \{(A_i), (F_2 \{2F_1 (A_i), (F_2), (A_i)\})\}\} = F_2 \{2F_1 \{(A_i), (F_2 (2A_i))\}\} = F_2 \{2F_1 \{(A_i), (F_2 \{2F_1 \{(A_i), (F_2 \{2A_1\}), (A_i)\})\}\}\} = F_2 \{2A_i\}\}. \quad (15)$$

Последовательным раскрытием операторных скобок в соответствии с (15) получим следующее выражение:

$$P(F) = P(F_2 \{2F_1\}) = P(F_2 \{P2F_1\}) = P(F_2 \{P2F_1 \{A_i\}, PF_2 \{P2F_1 \{A_i\}, PF_2 \{2A_i\}, A_i\}\}, PF_2 \{2A_i\}).$$

Воспользуясь выражениями (13) и (14) для элементарных операторов $P(F_1)$ и $P(F_2)$, окончательно получим

$$\begin{aligned}
 P(F) &= 1 - \prod_{i=1}^2 (1 - PF_1) = \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^2 (1 - PA_0 PF_2 PF_2) = \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^2 \left(1 - PA_0 \left[1 - \prod_{i=1}^2 (1 - PF_1) \right] \right) \times \\
 &\times \left[1 - \prod_{i=1}^2 \left(1 - \prod_{i=1}^2 (1 - PA_0) \right) \right] = \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^2 \left(1 - PA_0 \times \right. \\
 &\times \left[1 - \prod_{i=1}^2 (1 - PA_0 PF_2 PA_0) \right] \times \\
 &\times \left[1 - \prod_{i=1}^2 (1 - PA_0) \right] \left. \right) = \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^2 \left(1 - PA_0 \left[1 - \prod_{i=1}^2 (1 - PA_0) \right] \times \right. \\
 &\times \left. \left[1 - \prod_{i=1}^2 (1 - PA_0) \right] \right).
 \end{aligned}$$

Выражение вида

$$F_3 = F_3 \{ \theta = \{w\} NA_i^j \} = F_3 \{ \theta = \{w\} A_i^j N \}$$

называют оператором ССН с мажоритарной структурой, где $\theta = \{w\}$ — условия, отражающие особенности таких структур. В зависимости от значения $\theta = \{w_i\}$ операторное выражение F_3 однозначно отображается в соответствии с заданным алгоритмом $A(\theta_i)$ в оператор $P(F_3(\theta_i \in \theta))$ вычисления надежности мажоритарной структуры.

При $\theta_0 = 00 \dots 0$ для $F_3 \{ NA_i^j \}$ имеем следующее отображение $P(F)$:

$$\begin{aligned}
 P(F_3 \{ \theta_0 \in \theta \}) &= P(F_3 \{ NA_i^j \}) = \\
 &= \frac{1}{2} (N-1) \\
 &= P_M \sum_{k=0}^N C_N^k P^{N-k} (A_i^j) \times \\
 &\times [1 - P(A_i^j)]^k,
 \end{aligned}$$

где P_M — вероятность безотказной работы мажоритарного элемента.

Аналогично, для каждого значения θ_i введем соответствующие отображения $P(F/\theta_i)$ при $\theta = 00 \dots 1$:

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{F_3}{\theta_1}\right) &= P(F_3 \{ NA_i^j \}) = \\
 &= \frac{1}{2} (N-1) \\
 &= \sum_{k=0}^N C_N^k [P(A_i^j) P_M]^{N-k} \times \\
 &\times [1 - P(A_i^j) P_M]^k;
 \end{aligned}$$

при $\theta_i = \theta_2 = 00 \dots 10$

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{F_3}{\theta_2}\right) &= P(F_3 \{ NA_i^j \}) = \\
 &= \frac{1}{2} (N-1) \\
 &= \sum_{k_1=0}^N C_{N_1}^{k_1} P^{N-k_1} (A_i^j) \times \\
 &\times [1 - P(A_i^j)]^{k_1} \times \\
 &\times \frac{1}{2} (N-1) \\
 &\times \sum_{k_2=0}^N C_{N_2}^{k_2} P_M^{N-k_2} (1 - P_M)^{k_2}.
 \end{aligned}$$

Для мажоритарных структур с параллельными входами и выходами операторное выражение F_4 представим в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 F_4 &= F_{4\theta} \{ (B_i, NA_i^j) \} = \\
 &= F_{4\theta} \{ (NA_i^j, B_i) \}.
 \end{aligned}$$

Отображение $P(F_4)$ можно получить на основе анализа возможных состояний мажоритарных структур следующим образом:

из множества работоспособных состояний M структур типа F_4 выделим такое подмножество $M_0 \in M$, которое определяется исправными состояниями всех элементов типа B_i , $i = 1, \dots, 3$ при всевозможных состояниях элементов типа A_i^j , $i = 1, 3$; $j = 1, \dots, n$, где элементы A_i^j по индексу $j = 1, \dots, n$ объединены в структуру $F_3(\theta_2)$ или $F_3(\theta_3)$;

из множества M выделим такие подмножества $M_i \in M$, $i = 1, \dots, 3$, которые определяются отказом любого одного элемента B_i , $i = 1, \dots, 3$ при работоспособных состояниях элементов A_i^j , объединенных выражением типа F_1 с числом элементов $N_i = 2n$ (т. е. каждое выражение F_1 не содержит такие элементы, которые имеют одинаковые с элементом B_i значения индекса $i = 1, 2, 3$).

Учитывая, что подмножества $M_i \in M$, $i = 0, \dots, 3$ удовлетворяют условию $\cup M_i = M$, где M — множество всех работоспособных состояний структур с параллельными входами и выходами, выражение типа F_4 можно преобразовать в эквивалентное выражение, построенное из операторов F_1 и $F_3(\theta_2)$ или $F_3(\theta_1)$. Считая, что F_4 состоит из одинаковых элементов каждого типа, т. е. $A_i^j = A$ и $B_i = B$, из (12) получим операторное выражение F_i каждой структуры эквивалентной совокупности:

$$F_1 = F_1 \left\{ (3B) (nF_3 \{ 3A \}) \right\};$$

$$F_i = F_1 \left\{ (\bar{B}) (2B) (nA) \right\}, \quad i = 2, 3, 4,$$

где $\bar{B} = 1 - B$ (B в своем составе содержит и мажоритарный элемент $M\Theta$).

Тогда оператор $P(F_4)$ вычисления надежности при $F_3 = F_3(\theta_2)$ определяется выражением

$$P(F_4) = \sum_{i=1}^4 P(F(i)) =$$

$$= P(F_1 \{ (3B) (nF_3 \{ 3A \}) \}) +$$

$$+ \sum_{i=2}^4 P_i(F_1 \{ (\bar{B}) (2B) (nA) \}).$$

4*

Используя (12) и (13) для выражений $P(F_3)$ и $P(P_3(\theta_2))$, соответственно получим

$$P(F_4) = \prod_{i=1}^3 P_i(B) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^1 C_3^k P_i^{3-k}(A) \times \right.$$

$$\times [1 - P_i(A)]^k \left. \right) \sum_{k=0}^4 C_3^k P_i^{3-k}(M\Theta) \times$$

$$\times [1 - P_i(M\Theta)]^k \sum_{j=2}^4 P_j(\bar{B}) P_j(B) \times$$

$$\times P_j(B) \sum_{i=1}^n P_{ij}(A) P_{ij}(M\Theta),$$

где $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$.

Выражение вида

$$F_5 = F_5 \left\{ \frac{A}{NA_i} \right\}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\theta = \{w\}$$

называют оператором ССН с ненагруженным резервированием и аппаратно-программным средством восстановления (АПСВ).

В общем случае оператор F_5 в качестве A и A_i (A и A_i — соответственно основной и резервный элементы системы) может иметь введенные операторы $F_i = 1, \dots, 5$. Например, структура, приведенная на рис. 8, а, имеет следующее операторное выражение, полученное в соответствии с приведенными выше определениями операторов F_1, F_5 :

$$F = F_1 \{ A_i, F_5, F_5 \} =$$

$$= F_1 \left\{ A_1, F_5 \left\{ \frac{F_1}{1F_1} \right\}, F_5 \left\{ \frac{A_{51}}{A_{52}} \right\} \right\} =$$

$$= F_1 \left\{ A_1 F_5 \left\{ F_1 \left\{ A_{21}, A_{41}, F_2 \right\} \frac{1}{F_1} \right\}, \right.$$

$$F_5 \left\{ \frac{A_{51}}{A_{52}} \right\} \left. \right\} = F_1 \left\{ A_1 F_5 \left\{ F_1 \left\{ A_{21}, A_{41}, \right. \right. \right.$$

$$F_2 \{ A_{31}, A_{32} \} \frac{1}{F_1} \left. \right\}, F_5 \left\{ \frac{A_{51}}{A_{52}} \right\} \left. \right\}.$$

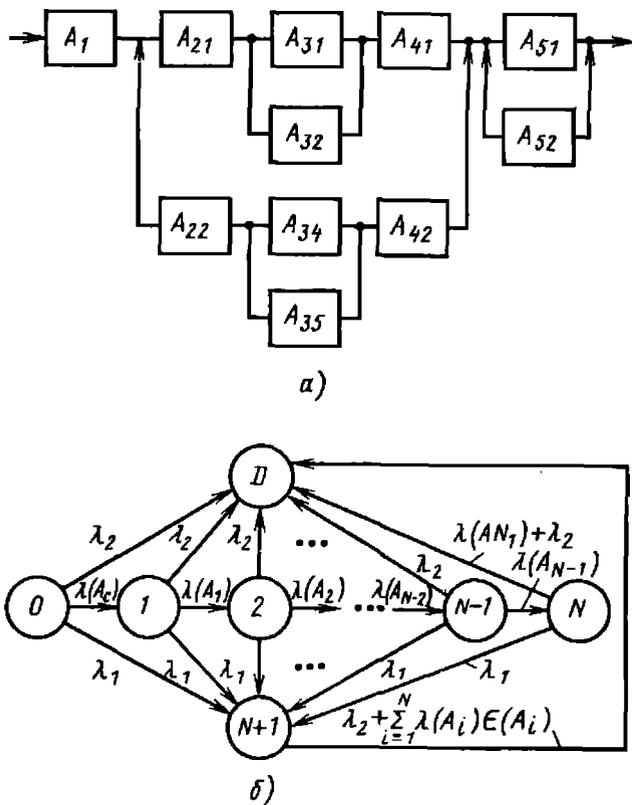


Рис. 8. Структурная схема надежности (а) и диаграмма состояний системы (б), описанная оператором F_5

Диаграмма состояний системы, описанная оператором F_5 , приведена на рис. 8, б. Состояния с номерами $i = 0, 1, \dots, N$ соответствуют работающей системе с исправным АПСВ после отказов элементов $A_i, i = 1, \dots, N$. Переход из состояний $i = 0, 1, \dots, N$ в состояние D (отказ системы) возможен при отказе АПСВ с интенсивностью λ_2 . В состоянии $N + 1$ работает один из элементов $A_i, i = 0, \dots, N$, но ранее произошел отказ АПСВ с интенсивностью λ_1 . Переход из каждого i -го состояния в состояние $N + 1$ возможен при отказе АПСВ с интенсивностью λ_1 после i -й замены элементов A_i . Переход из состояния $N + 1$ в состояние D возможен при отказе АПСВ с интенсивностью λ_2 (запрет функционирования системы) и с интенсивностью

$$\sum_{i=0}^N \lambda(A_i) \varepsilon(A_i),$$

где $\lambda(A_i)$ — интенсивность отказов соответствующего элемента A_i ; $\varepsilon(A_i)$ — вероятность того, что до отказа АПСВ

с интенсивностью λ_1 была i -я замена, т. е. A_i -й элемент в состоянии $N + 1$ работает с вероятностью $\varepsilon(A_i)$.

В соответствии с этой диаграммой вероятности вышеуказанных состояний можно определить из системы уравнений:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\alpha_0 P_0(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\alpha_1 P_1(t) + \beta_1 P_0(t);$$

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -\alpha_i P_i(t) + \beta_i P_{i-1}(t),$$

$$i = 1, \dots, N;$$

$$\frac{dP_{N+1}(t)}{dt} = -\alpha_{N+1} P_{N+1}(t) =$$

$$= \beta_{N+1} \sum_{i=0}^N P_i(t),$$

где

$$P_0(0) = 1; P_i(0) = 0; i = 1,$$

$$N + 1;$$

$$\alpha_0 = + [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda(A_0)]; \alpha_i = + [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda(A_i)];$$

$$\beta_1 = \lambda(A_{i-1}); i = 1, \dots, N;$$

$$\alpha_{N+1} = + \left[\lambda_2 + \sum_{i=0}^N \lambda(A_j) \varepsilon(A_{ij}) \right];$$

$$\beta_{N+1} = \lambda_2; j = 0, \dots, N.$$

Отображение $P(F_5)$ можно получить в результате решения системы уравнений:

$$P(F_5) = P \left(F_5 \left\{ \frac{A}{NA_i} \right\}, i = 1, \dots, N \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} P_i(t),$$

где $P_i(t)$ — вероятности i -го состояния исследуемой системы, определяемые множеством состояний элементов $A, A_i (i = 1, \dots, N)$ и АПСВ.

Выражение

$$F_6 = F_6 \left\{ \frac{nA_i}{NA_j} \right\}; \quad i = 1, \dots, n;$$

$$\theta = \{\omega\}$$

$$j = 1, \dots, N$$

называют оператором ССН с ненагруженным скользящим N -кратным резервированием с ненадежным переключателем. Оператор F_6 отличается от оператора F_5 только параметром n , и отображение $P(F_6)$ можно получить аналогично:

$$\lambda(A_i) = n\lambda(A_i).$$

Выражение

$$F_7 = F_7 \left\{ \frac{3A_i}{NA_j} \right\}; \quad i = 1, \dots, 3;$$

$$\theta = \{\omega\}$$

$$j = 1, \dots, N$$

называют оператором ССН системы с мажоритарной структурой с заменой отказавших элементов (смешанное резервирование). Диаграмма состояний такой структуры приведена на рис. 9, б. Отображение оператора $P(F_7)$ можно получить численным решением системы уравнений (16), отличающихся значениями коэффициентов $\alpha_i, \alpha_{N+1}, \beta_i, \beta_{N+1}$.

Для операторов F_5, \dots, F_7 соответствующие системы уравнений можно представить в общем виде:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\alpha_0 P_0(t);$$

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \beta_i P_{i-1}(t) - \alpha_i P_i(t),$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\frac{dP_{N+1}(t)}{dt} =$$

$$= \beta_{N+1} \sum_{i=0}^N P_i(t) - \alpha_{N+1} P_{N+1}(t);$$

$$\frac{dP_{N+2}(t)}{dt} = \beta_{N+2} P_N(t) -$$

$$- \alpha_{N+2} P_{N+2}(t);$$

$$\frac{dP_{N+3}(t)}{dt} = \beta_{N+3} P_{N+2}(t) +$$

$$+ \gamma_{N+3} P_{N+1}(t) - \alpha_{N+3} P_{N+3}(t);$$

$$P_0(0) = 1; P_i(0) = 0;$$

$$i = 1, 2, \dots, N + 3,$$

где значения коэффициентов для оператора $F_i, i = 5, 6, 7$ определены множеством параметров $\theta = \{\omega_i\}$.

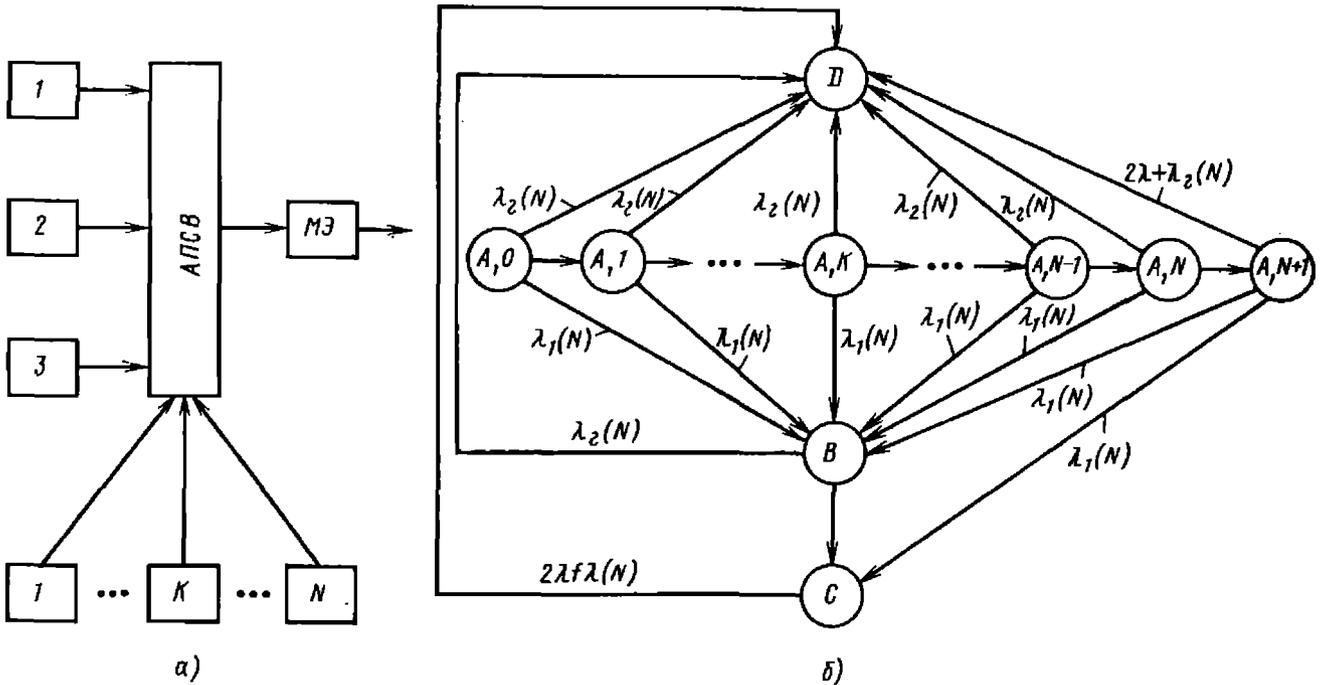


Рис. 9. Структурная схема надежности (а) и диаграмма состояний системы (б) с мажоритарным резервированием и заменой отказавших элементов;

1-3 — основные элементы; $K = 1, \dots, N$ — резервные элементы

Операторы F_i типовых ССН позволяют формально описать произвольные структурные схемы надежности систем с различными видами резервирования.

Данный подход к алгоритмизации синтеза и моделирования надежности с использованием математического аппарата марковских процессов и языка операторных выражений надежных структур является удобной теоретической основой для автоматизации расчета надежности и оптимизации их структуры.

3. АНАЛИЗ И РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ РЭА С УЧЕТОМ АНАЛОГОВОСТИ И РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ РЕЗЕРВИРОВАНИЯ

В теоретическую оценку надежности отказоустойчивых РЭА с различными видами резервирования входит расчет надежности структурно-функциональных единиц. Такие структурно-функциональные единицы РЭА представляют собой или конструктивно законченную сборочную единицу (например, микросборку, модуль, ячейку и т. д.), или часть сборочной единицы, или совокупность частей сборочных единиц.

Основными нормируемыми показателями надежности сборочных единиц нулевого и первого уровня иерархии РЭА являются: интенсивность отказов λ (в нормальных условиях при номинальных электрических режимах λ_0 , в условиях испытаний $\lambda_{и}$, в условиях эксплуатации и применения λ_p , в условиях хранения $\lambda_{хр}$); средняя наработка на отказ T_0 ; гамма-процентный ресурс t_γ ; минимальная наработка t_{\min} .

Эти показатели используются как исходные данные при оценке и расчете надежности резервированной аппаратуры.

Методы расчета надежности ИС и микросборок базируются на вероятностно-статистическом (далее статистическом) и физико-статистическом подходах. Первый подход базируется на статистической обработке информации по отказам и наработкам; второй — на изучении физики и механизмов отка-

зов, физическом или имитационном моделировании отказов и количественном прогнозировании надежности интегральных схем на основе данных о свойствах материалов и процессах, происходящих в них.

Для описания общих закономерностей, связанных с развитием деградиационных физико-химических процессов под воздействием температуры, используется показательный закон Арениуса $K = Ae^{-\epsilon/RT}$, где K — константа скорости химической реакции; T — абсолютная температура; A , ϵ — постоянные для данного вида реакции.

В первоначальной форме закон справедлив для процессов определенного вида (диффузии, адсорбции, распада твердых растворов, химических реакций, происходящих в структуре однородного тела и т. д.). Однако для сложных процессов и неоднородных структур закономерности и правила расчетов коэффициентов ускорения оказываются более сложными. Только в том случае, когда скорость старения определяется каким-либо одним процессом, а относительным влиянием остальных процессов можно пренебречь, закон ускорения старения изделия от температуры сравнительно прост. Например, при увеличении окружающей температуры от 20 до 30 °С скорость многих химических реакций, вызывающих эффект старения, возрастает примерно в 2 раза.

Кроме того, повышению надежности способствует также и энергетическая разгрузка. В этом случае для количественной оценки эффективности повышения надежности используются статистические данные (в табличной, графической или аналитической форме) зависимости относительной интенсивности отказов различных типов ЭРИ $K_{pi} = \bar{\lambda}_i/\lambda_{i_0}$ (λ_{i_0} — интенсивность отказов при нормальной температуре и коэффициенте электрической нагрузки $K_H = 1$) от температуры окружающей среды $T_{окр}$ и коэффициента электрической нагрузки $K_H = P_i/P_i$ (P_i — определяющий параметр режима). При этом относительная интенсивность отказов, соответствующая номинальной (максимально допустимой по ТУ) элек-

трической нагрузке элементов данного вида при температуре окружающей среды $T^{\circ}\text{C} = +20^{\circ}\text{C}$, принята за единицу.

На рис. 10 приведены зависимости относительной интенсивности отказов K_{p_i} для нескольких типов электро-радиоизделий (ЭРИ) (K_{p_i} — коэффициент режима ЭРИ).

На основе экспериментальных данных для вычисления значений K_{p_i} для различных типов ЭРИ обычно строят математические модели в аналитической форме.

Математическая модель для расчета коэффициента режима при различных электрических нагрузках и температуре окружающей среды для полупроводниковых приборов (кроме светодиодов и индикаторов) имеет вид:

$$K_p = Ae^{\left(\frac{1}{t + \alpha \left(\frac{P_0}{P_{0 \max}} \right) + 273} \right)}$$

$$K_p = Ae^{\left(\frac{1}{t + \alpha \left(\frac{I_0}{I_{0 \max}} \right) + 273} \right)}$$

где t — температура по шкале Цельсия; A , B , α — постоянные коэффициенты (например, для кремниевых транзисторов $A = 95\,405$, $B = -4823$, $\alpha = 1227$).

Приведенная модель верна в диапазоне изменения отношений $I_0/I_{0 \max}$, $P_0/P_{0 \max}$ от 0,1 до 1,0 и температуры окружающей среды от 25°C до максимальной для каждой группы изделий. Мощность рассеяния (рабочий ток) не должна превышать предельно допустимых значений, оговоренных в ТУ. Аналогичные модели строятся и для других видов ЭРИ. Значения K_p приведены в табл. 2 для кремниевых полупроводниковых приборов.

Понижение или стабилизация температуры внутри сборочных единиц целесообразны до тех пор, пока существенно уменьшается интенсивность отказов элементов.

В табл. 3 приведены данные по увеличению относительной интенсивности отказов ЭРИ при повышении температуры окружающей среды на каждые

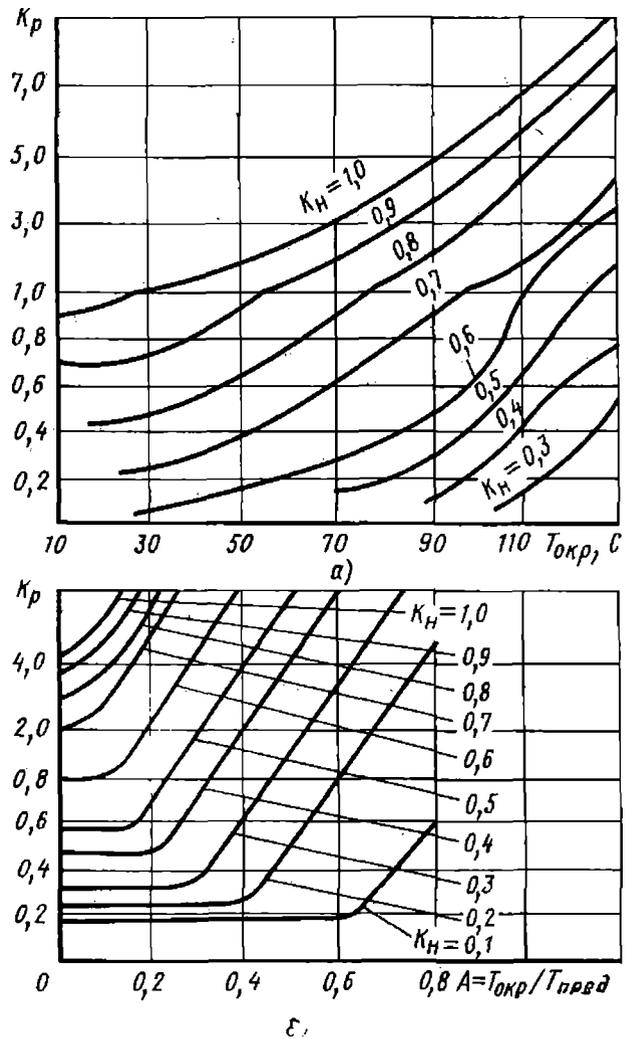


Рис. 10. Зависимость относительной интенсивности отказов K_p :

а — от температуры окружающей среды $T_{окр}$ для конденсаторов с бумажной изоляцией при различных K_N по напряжению; б — от отношения $T_{окр}/T_{пред}$ для транзисторов при различных K_N по мощности рассеяния на переходах (предельная температура $T_{пред}$ равна 85°C для германиевых транзисторов и 150°C для кремниевых)

10°C при номинальной электрической нагрузке, т. е. при $K_N = 1$, $\gamma_{10} = a_2/a_1$, где a_1 — относительная интенсивность отказов при T_1 ; a_2 — относительная интенсивность отказов при $T_1 = +10^{\circ}\text{C}$.

Проанализировав данные табл. 3, можно сделать следующие выводы:

любое снижение температуры среды, окружающей элементы, уменьшает интенсивность отказов, при этом в диапазоне $20-60^{\circ}\text{C}$ темп роста интенсивности отказов практически постоянен;

относительное изменение средней интенсивности отказов на каждые 10°C приращення температуры окружающей

2. Значения коэффициентов режимов K_p

T, °C	K_p при $\frac{P_0}{P_{0 \min}}$ и $\frac{I_0}{I_{0 \min}}$									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
25	0,02	0,03	0,05	0,08	0,13	0,20	0,32	0,47	0,73	1,0
30	0,02	0,04	0,07	0,09	0,16	0,24	0,39	0,57	0,80	
35	0,03	0,05	0,08	0,11	0,18	0,28	0,45	0,67	0,87	
40	0,03	0,06	0,10	0,14	0,22	0,34	0,53	0,77		
45	0,04	0,07	0,11	0,17	0,26	0,40	0,60	0,87		
50	0,05	0,09	0,12	0,20	0,32	0,49	0,74	1,00		
55	0,06	0,11	0,17	0,23	0,37	0,57	0,87			
60	0,08	0,13	0,21	0,30	0,44	0,69	0,93			
65	0,10	0,15	0,25	0,36	0,50	0,80				
70	0,12	0,19	0,33	0,43	0,62	0,90				
75	0,15	0,23	0,40	0,50	0,77	1,0				
80	0,18	0,23	0,47	0,59	0,83					
85	0,21	0,30	0,55	0,67	0,93					
90	0,25	0,35	0,63	0,77						
95	0,27	0,40	0,75	0,87						
100	0,32	0,50	0,87	1,00						
105	0,37	0,60	0,93							
110	0,45	0,70								
115	0,53	0,80								
120	0,63	0,90								
125	0,73	1,00								

3. Зависимость роста относительной интенсивности γ_{10} отказов ЭРИ от температуры

ЭРИ	γ_{10} при интервале температур, °C				
	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70
Резисторы пленочные	1,25	1,35	1,45	1,6	2,5
Конденсаторы слюдяные:					
с обкладками из фольги	1,2	1,25	1,25	1,25	1,4
посеребренные	1,1	1,3	1,5	1,5	1,5
керамические	1,1	1,1	1,15	1,2	1,4
бумажные	1,3	1,5	1,3	1,25	1,3
Диоды:					
германиевые	1,15	1,2	1,1	1,2	1,4
кремниевые	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1

среды постоянно в диапазоне 30—50°C и равно 1,5 для резисторов и 1,1 — для кремниевых диодов, следовательно, изменение λ_i от T близко к показательному закону. Это несомненно повышает достоверность полученных зависимостей, так как они согласуются с более общими физико-химическими представлениями и закономерностями;

повышение окружающей температуры выше 60 °C заметно увеличивает темп роста интенсивности катастрофических отказов большинства ЭРИ; это объясняется тем, что указанные ограничения скорости протекания процессов старения справедливы до тех пор, пока температура элементов не достигает некоторого критического значения.

Однако интенсивность отказов элементов схемы зависит и от вещества элемента, на которое влияет не только температура окружающей среды, но и энергетический режим элемента. Так, для пленочного резистора — это температура на его поверхности, для конденсатора — температура изоляции, для полупроводникового диода или транзистора — температура перехода, для реле или трансформатора — распределение температуры внутри обмоток. В общем случае относительная интенсивность отказов большинства ЭРИ является нелинейной функцией окружающей температуры и коэффициента нагрузки K_H , т. е. $K_p = f(T_{окр}, K_H)$. Поэтому регламентированный предельный коэффициент нагрузки целесообразно устанавливать в той области, где кривая относительной интенсивности отказов K_p при максимально возможной для данной РЭА окружающей температуре начинает круто возрастать. Эта область соответствует условию

$$\left(\frac{d^2 K_{p_i}}{dK_H^2} \right)_{\max}; \quad \frac{d^3 K_{p_i}}{dK_H^3} \rightarrow 0$$

при $T_{окр. \max}$.

Принцип регламентации $K_{H \max}$ пленочных резисторов осуществляется на основе опытных статистических зависимостей (рис. 11). Указанный диапазон средних температур внутри блоков РЭА типичен для многих видов

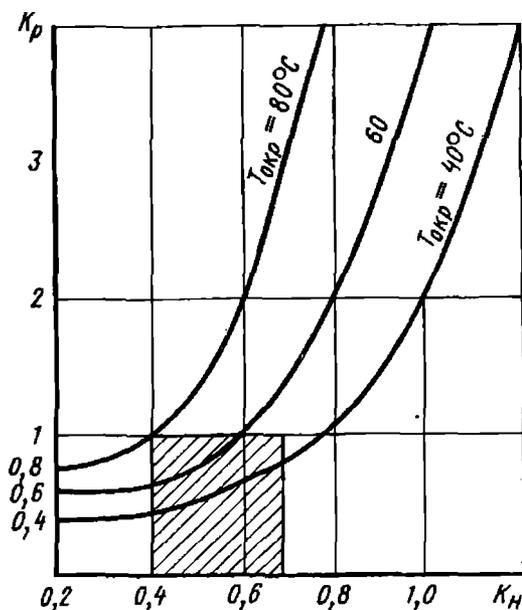


Рис. 11. Зависимость относительной интенсивности отказов K_p пленочных резисторов от коэффициента нагрузки по мощности K_H и $T_{окр}$

аппаратуры, предназначенной для работы в различных климатических условиях. Для резисторов $K_H = P_{\max}/P_{доп}$, где P_{\max} — максимальная мощность, рассеиваемая на резисторе в режиме активной эксплуатации РЭА; $P_{доп}$ — допустимая (максимальная) мощность рассеяния для резисторов данного типа, указанная в соответствующих ТУ или стандартах. На графике рис. 11 видно, что при средней температуре внутри блока РЭА порядка 50—70 °C наблюдается резкое увеличение вероятности отказа резистора при $K_H \cong 0,4 \div 0,6$. Описанный принцип выбора предельных нагрузок применяется для всех элементов РЭА, по которым имеются соответствующие статистические данные. Для проверки выполнения ограничительных требований и прогнозирования показателей безотказности РЭА на этапах эскизного и технического проектирования оформляется разработчиком сводный документ по электрическим (температурным) параметрам в виде карт рабочих режимов для всех элементов проектируемой РЭА.

Максимальный коэффициент нагрузки элемента по выбранному параметру определяется из условия наименее выгодной комбинации возможных (допустимых) отклонений от номинала параметра элементов и источников

питания блока (узла), т. е. в экстремальных режимах работы элемента. В сложных случаях для определения $K_{н\max}$ используется ЭВМ. Контролируемые параметры режимов основных типов комплектующих изделий и рекомендуемые значения (облегченные) коэффициентов облегчения режимов для проектируемой РЭА приведены в табл. 4.

Для защиты от влаги и других агрессивных сред должна быть предусмотрена герметизация сборочных единиц на уровне блока или устройства.

На этапах эскизного и технического проектирования проводится расчет суммарной интенсивности отказов Λ_{Σ} сборочной единицы (СЕ) — микросборок, ячеек, блоков и т. д. При этом определяется перспективность принятых схемно-конструктивных решений с точки зрения выполнения требований к надежности соответствующих устройств.

При ориентировочной (предварительной) оценке надежности предполагается, что отказы элементов СЕ подчиняются экспоненциальному закону, физические параметры структуры элементов устройства, влияющие на их надежность, не коррелированы. Так как отказы элементов независимы, то отказы СЕ наступают в момент отказа слабейшего элемента в схеме. Вероятность одновременного отказа нескольких элементов практически равна нулю. Вероятность безотказной работы СЕ за время t

$$P_{\Sigma}(t) = \prod_{i=1}^N P_i(t) = \exp \left\{ -t \sum_{i=1}^N \lambda_i \right\} = \exp \{-t\Lambda_{\Sigma}\}, \quad (16)$$

где

$$\Lambda_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N n_i \lambda_i.$$

Интенсивности отказов λ_p элементов СЕ при различных видах расчета надежности (на ранних стадиях проектирования, окончательный расчет надежности на этапе технического проектирования) определяются по следующим выражениям:

ориентировочный расчет:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_p &= \lambda_{ос.г} K_{\mathcal{E}}; \\ \lambda_p &= \lambda_{нс.г} K_{\mathcal{E}}; \\ \Lambda_p &= \sum_i n_i \lambda_{p_i}; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

если известна номенклатура изделий:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_p &= \lambda_0 K_{\mathcal{E}}; \\ \lambda_p &= \lambda_{н} K_{\mathcal{E}}; \\ \Lambda_p &= \sum_i n_i \lambda_{p_i}; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

окончательный расчет надежности:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_p &= \lambda_0 K_p K_{\mathcal{E}}; \\ \lambda_p &= \lambda_{н} K_p K_{\mathcal{E}}; \\ \lambda_{p.тэт} &= \lambda_p K_{тэт}; \\ \lambda_{p.ос} &= \lambda_p K_{о.с}; \\ \Lambda_p &= \sum_i n_i \lambda_{p_i}; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где $\lambda_{н}$ — интенсивности отказов отдельных типов ЭРИ при испытании в режиме номинальной электрической нагрузки и нормальной или повышенной температуры соответственно; $\lambda_{нс.г}$ — средние значения интенсивности отказов групп ЭРИ; Λ_p — суммарная интенсивность отказа всего анализируемого изделия; n_i — количество ЭРИ i -го типа; K_p — коэффициент электрического режима; $K_{\mathcal{E}}$ — коэффициент эксплуатации; $K_{тэт}$ — коэффициент улучшения показателей надежности ЭРИ после проведения электротермотренировки; $K_{о.с}$ — коэффициент улучшения показателей надежности при применении ЭРИ определенной серии.

Если не уточнены электрические режимы работы ЭРИ, то применяются формулы (18), если нет данных о надежности отдельных типов ЭРИ, то показатели надежности рассчитываются по формулам (17).

Для случая сеансной работы изделия, а также при определении ЗИП

4. Рекомендуемые значения коэффициентов облегчения режимов для различных типов комплектующих изделий

Комплектующие изделия	Контролируемый параметр	Коэффициент облегчения режима
Цифровые функциональные устройства:		
КМОП БИС	Разброс номинального напряжения питания	$K_{\Pi} = \frac{\pm \Delta U_{\text{п. ф}}}{\pm \Delta U_{\text{п. д}}} = 0,7$
	Емкость нагрузки	$K_{\text{с}} = \frac{C_{\text{н. ф}}}{C_{\text{н. д}}} = 0,8$
ТТЛ БИС	Ток нагрузки	$K_I = \frac{I_{\text{н. ф}}}{I_{\text{н. д}}} = 0,7$
	Емкость нагрузки	$K_{\text{с}} = \frac{C_{\text{н. ф}}}{C_{\text{н. д}}} = 0,8$
		при $T_{\text{ср}} = 25^{\circ} \pm 15^{\circ} \text{C}$
Входные устройства	Амплитуда входного сигнала	$K_a = \frac{U_{\text{вх. ф}}}{U_{\text{вх. д}}} = 0,9 \div 1$
	Длительность фронта сигнала	$K_{\tau} = \frac{\Delta \tau_{\text{ф}}}{\Delta \tau_{\text{д}}} = 0,9 \div 1$
Выходные устройства	Емкость нагрузки	$K_{\text{с}} = \frac{C_{\text{н. ф}}}{C_{\text{н. д}}} = 0,8$
Вторичные источники питания	Ток нагрузки	$K_I = \frac{I_{\text{н. ф}}}{I_{\text{н. д}}} = 0,9$
	Температура среды в блоке	$K_T = \frac{T_{\text{ф}}}{T_{\text{д}}} = 0,8$
Лентопротяжные механизмы	Разброс номинального напряжения питания	$K_{\Pi} = \frac{\pm \Delta U_{\text{п. ф}}}{\pm \Delta U_{\text{п. д}}} = 0,7$ при $T_{\text{ср}} = 25^{\circ} \pm 15^{\circ} \text{C}$
Транзисторы НЧ, УВЧ	Рассеиваемая мощность	$K_p = \frac{P_{\text{р. ф}}}{P_{\text{р. д}}}$ $\left. \begin{array}{l} \leq 0,5 \\ 0,9 \div 1 \\ \leq 0,5 \\ \leq 0,5 \\ \leq 0,9 \\ \leq 0,5 \\ 0,9 \div 1 \end{array} \right\}$
Транзисторы СВЧ	То же	
Тиристоры	»	
Резисторы	»	
Фоторезисторы, болометры	»	
Стабилитроны, туннельные диоды	»	
СВЧ-диоды, фотодиоды	»	

Продолжение табл. 4

Комплектующие изделия	Контролируемый параметр	Коэффициент облегчения режима
Кварцевые резонаторы, пьезоэлектрические фильтры	Разброс номинального напряжения питания	$K_{\Pi} = \frac{\pm \Delta U_{\Pi. \Phi}}{\pm \Delta U_{\Pi. Д}} \leq 0,7$
Фазовращатели, аттенюаторы, ферритовые циркуляторы и т. п.	Мощность на входе	$K_{P} = \frac{P_{\text{вх. } \Phi}}{P_{\text{вх. Д}}} \leq 0,8$
Автоматические выключатели	Ток главной цепи	$K_I = \frac{I_{\Phi}}{I_{Д}} \leq 0,8$
Реле	Количество переключений	$K_{\text{пер}} = \frac{\Pi_{\Phi}}{\Pi_{Д}} \leq 0,8$
Кнопки, переключатели	Ток коммутации	$K_{K} = \frac{I_{\Phi}}{I_{Д}} \leq 0,7$
Соединители, провода, кабели	Передаваемая мощность	$K_{P} = \frac{P_{\Phi}}{P_{Д}} \leq 0,8$
Предохранители	Ток нагрузки	$K_{H} = \frac{I_{\text{ном. } \Phi}}{I_{\text{ном. Д}}} \leq 0,5 \div 0,6$
Силовые, импульсные трансформаторы, дроссели	Ток обмотки	$K_{\text{об}} = \frac{I_{H. \Phi}}{I_{H. Д}} \leq 0,8 \div 1$ при $T_{\text{ср}} \leq \pm 70^{\circ}\text{C}$
Оптопары	Средний ток входа	$K_0 = \frac{I_{\text{ср}}}{I_{Д}} \leq 0,9 \div 1$

Примечание. Принятые в индексах сокращения: н — нагрузка, ф — фактическое, д — допустимое.

интенсивность отказов при хранении в составе аппаратуры

$$\Lambda_{\text{х}} = \sum_i n_i \lambda_{\text{х}i}$$

Для восстанавливаемой аппаратуры интенсивность замен:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\text{з}} &= \lambda_0 K_{\text{з}} K_{\text{э}}; \\ \lambda_{\text{з}} &= \lambda_{\text{н}} K_{\text{з}} K_{\text{э}}; \\ \Lambda_{\text{з}} &= \sum_i n_i \lambda_{\text{з}i}, \end{aligned} \right\}$$

где $K_{\text{з}}$ — коэффициент замен.

Используя полученные значения интенсивностей отказов, рассчитывают другие показатели надежности:

вероятность безотказной работы за время эксплуатации

$$P(T) = e^{-\Lambda_{\text{р}} T}$$

вероятность безотказной работы с учетом хранения в составе аппаратуры

$$P(T \times T_{\text{х}}) = e^{-(\Lambda_{\text{р}} T + \Lambda_{\text{х}} T_{\text{х}})}$$

гамма-процентный ресурс

$$t_{\gamma} = \frac{\ln \gamma}{\Lambda_{\text{р}}}$$

среднюю наработку до отказа

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{\Lambda_p}.$$

Результаты расчета сводятся в таблицы определенной формы, удобной для анализа и использования в процессе разработки РЭА. При этом практически одинаково нагруженные однотипные элементы схемы устройства объединяются в группы, так как имеют одинаковую расчетную интенсивность отказов.

Данные о номинальной интенсивности отказов λ_{0i} (при $T_{\text{окр}} = 20^\circ\text{C}$ и $K_H = 1$) могут быть взяты из ТУ на элементы или литературных источников.

При достаточном объеме статистической выборки в расчетах следует отдавать предпочтение данным (λ_{0i} , $T_{\text{окр}}$ и т. д.), получаемым на основании опыта проектирования, производства и эксплуатации аналогичной аппаратуры, разработанной ранее. Такие данные отражают конкретные условия разработки и производства, характерные для проектирующей организации, и поэтому сохраняют относительно высокую достоверность при их использовании для прогнозирования надежности РЭА, вновь проектируемой. В этом случае одним из основных видов исходной информации являются экспериментальные оценки показателей надежности составных частей изделия, полученные на этапе производства, при автономных испытаниях или при испытаниях в составе изделия, а также результаты предшествующих испытаний и данные эксплуатации изделия и изделий-аналогов. Оценка показателей надежности осуществляется на основе объединения рассмотренной исходной информации.

В качестве составных частей изделия, для которых делается экспериментальная оценка показателя, выбираются элементы нулевого и первого уровня иерархии РЭА (транзисторы, диоды, микросхемы, конденсаторы, резисторы, трансформаторы и др.). В качестве изделий-аналогов выбираются изделия, единые по элементной базе и конструктивно-технологическим принципам построения.

Результаты испытаний и эксплуатации основного изделия и изделий-аналогов представляют собой разнородную статистическую информацию о наработке и отказах однотипных элементов, работающих в разных частях (блоках) изделий и на разных этапах. Оценка интенсивности отказов элементов на основе объединения разнородной статистической информации о наработке и отказах однотипных элементов осуществляется с использованием теоретико-экспериментальных зависимостей интенсивности отказов элементов от режимов и условий их использования в РЭА. Оценка надежности РЭА (например, вероятности безотказной работы $P(t)$) в течение наработки t осуществляется на основе полученных значений интенсивностей отказов элементов и математической модели надежности отказоустойчивой РЭА, выражаемой аналитической или алгоритмической зависимостью $P(t)$ от интенсивностей отказов элементов и реальных наработок элементов.

Для РЭА может быть использована методика оценки интенсивности отказов элементов на основе объединения разнородной информации. С этой целью выбирают набор типов РЭА, единых по элементной базе и конструктивно-технологическим принципам построения (I_1, I_2, \dots, I_N). Для каждого изделия I_i ($1 \leq i \leq N$) выбирается набор идентичных комплектов ($K_{i,1}; K_{i,2}; \dots; K_{i,M}$) этого изделия и совокупность последовательных этапов ($\mathcal{E}_{i,1}; \mathcal{E}_{i,2}; \dots; \mathcal{E}_{i,S}$) жизненного цикла изделия, с которых будет собираться информация о наработке и отказах всех блоков каждого комплекта изделия.

Для каждого $1 \leq i \leq N$ и каждого $1 \leq S \leq S_i$ задается число $U_{i,S}$ — тип условий использования изделия I_i на этапе $\mathcal{E}_{i,S}$. Тип условий использования изделия может принимать одно из значений $1 \leq U_{i,S} \leq k$. Пусть $B = \{B_1, B_2, \dots, B_R\}$ — множество типов блоков, из которых построены все изделия набора (I_1, I_2, \dots, I_N), тогда каждое изделие I_i ($1 \leq i \leq N$) задается функцией количества $\Phi^{(i)}: B \rightarrow \Lambda V \{0, 1, 2, \dots\}$,

где $\Phi^{(i)}(B_j)$ — количество блоков типа B_j в изделии I_i (в частности, может быть $\Phi^{(i)}(B_j) = 0$).

Если $\Phi^{(i)}(B_j) \neq 0$, то пронумеруем от 1 до $\Phi^{(i)}(B_j)$ все блоки типа B_j , входящие в изделие I_i , единым образом для всех комплектов изделия I_i . Множество

$$H = \{(j, i, l, m): 1 \leq j \leq R; 1 \leq i \leq N; \Phi^{(i)}(B_j) \neq 0; 1 \leq l \leq \Phi^{(i)}(B_j); 1 \leq m \leq M_i\}$$

называют множеством экземпляров, т. е. экземпляр $h(j, i, l, m) \in H$ соответствует l -му блоку типа B_j в комплекте $K_{i,m}$ изделия I_j и называют l -м экземпляром блока типа B_j в комплекте $K_{i,m}$ изделия I_i .

Для удобства множество $B = \{(h, S): h = (j, i, l, m) \in H, 1 \leq S \leq S_i\}$

называют множеством экземпляр-этапов, т. е. экземпляр-этап $\beta = (h, S)$ соответствует нахождению экземпляра h на этапе $\mathcal{E}_{i,s}$.

Рабочей температурой экземпляр-этапа $\beta(h, S) \in B$ называется любая зарегистрированная с определенной дискретностью средняя температура внутри экземпляра $h = (j, i, l, m)$ на этапе $\mathcal{E}_{i,s}$.

Спектром рабочих температур экземпляр-этапа называется набор

$$A_\beta = ((T_\beta^{(1)}, \alpha_\beta^{(1)}), (T_\beta^{(2)}, \alpha_\beta^{(2)}), \dots, (T_\beta^{(a_\beta)}, \alpha_\beta^{(a_\beta)})),$$

где $T_\beta^{(1,2)}$ — рабочая температура β ($1 \leq b \leq a$); α_β — доля времени нахождения экземпляра $h = (j, i, l, m)$ на этапе $\mathcal{E}_{i,s}$ при рабочей температуре $T_\beta^{(b)}$ ($1 \leq b \leq a$);

$$a_\beta \leq 0; 0 \leq \alpha_\beta^{(b)} \leq 1; \sum_{b=1}^a \alpha_\beta^{(b)} = 1;$$

$$T_\beta^{(b_1)} \neq T_\beta^{(b_2)} \quad (\text{при } b_1 \neq b_2).$$

Наработкой t_β экземпляр-этапа $\beta = (h, S) \in B$ называют зарегистрированную длительность нахождения экземпляра $h(j, i, l, m)$ на этапе $\mathcal{E}_{i,s}$.

Рассмотрим множество

$$\bar{T} = \{T_\beta^{(b)}: \beta \in B, 1 \leq b \leq a_\beta\}$$

всех зарегистрированных рабочих температур для всех экземпляр-этапов.

Через

$$D(j, U, T) = \{\beta = (h, S); h = (j, i, l, m); u = u_i, s; (\exists_b)_{(1 \leq b \leq a_\beta)} T_\beta^{(b)} = T\}$$

обозначим множество всех экземпляр-этапов $\beta = (h, S)$, у которых $h = (j, i, l, m)$ является экземпляром блока типа B_j ; тип условий использования изделия I_i на этапе $\mathcal{E}_{i,m}$ совпадает с U (T была зарегистрирована в качестве рабочей температуры).

Из определения спектра рабочих температур и определения $D(j, U, T)$ следует, что для любого $\beta \in D_j, U(T)$ однозначно определяется:

$$\begin{cases} 1 \leq b_\beta^*, T \leq a_\beta; \\ T_\beta^{(b^*, \beta, T)} = T \end{cases}$$

Суммарная наработка $t_j, U(T)$ всех экземпляров блоков типа B_j при рабочей температуре в условиях использования типа U определяется следующим образом:

$$\begin{cases} t_j, U(T) \leq \sum_{\beta \in D_j, U(T)} a_\beta^{(b^*, \beta, T)} t_\beta; \\ (i \leq j \leq R; 1 \leq U \leq 6, T \in T). \end{cases}$$

Пусть $E = \{E_1, E_2, \dots, E_D\}$ — множество типов элементов для всех типов блоков из множества B . Пусть K_N — дискретное множество коэффициентов нагрузок, охватывающее все возможные значения коэффициентов нагрузок для всех элементов во всех типах блоков из B .

Если $k_{Ni} \in K_N$, то $0 \leq K_N \leq 1$; $K_N = 0$ означает неопределенное значение коэффициента нагрузки.

Состав блока типа B_j задается функцией состава:

$$C^{(j)}: E \times K_N \rightarrow N = \{0, 1, 2, \dots\};$$

$$C^{(j)}(E_d, K_N) \text{ для } 1 \leq d \leq D \text{ и } k_N \in K_N,$$

где $C^{(i)}(E_d, K_H)$ — число элементов типа E_d с коэффициентом нагрузок K_H в блоке типа B_j (допускается $C^{(i)}(E_d, K_H) = 0$). Для удобства множество $G = E \times K_H = \{(E_d K_H), 1 \leq d \leq D, K_{Hi} \in K_H\}$ называют множеством типов элементов с нагрузкой.

Для $g = (E_d, K_H) \in G$ и $\beta = (h, S) \in B$ отказом типа (g, β) назван отказ элемента типа E_d с коэффициентом нагрузки K_H в экземпляре h (j, i, l, m) на этапе $\mathcal{E}_{i, S}$. Число отказов типа (g, β) обозначим через r_{β}^g . Отказом типа $g \in G$ назовем отказ типа (g, β) для некоторого $\beta \in B$. Число отказов типа g

$$r^g = \sum_{\beta \in B} r_{\beta}^g.$$

Суммарная наработка $t_U^g(T)$ всех элементов с нагрузкой типа g при температуре T и при условиях использования типа U вычисляется следующим образом:

$$t_U^g(T) = \sum_{j=1}^R t_j, U(T) C^{(i)}(g).$$

Значения $t_U^{(E_d, K_H)}(T)$ для различных $K_{Hi} \in K_H, U \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, T \in \bar{T}$ и значения $r^{(E_d, K_H)}$ для различных $K_{Hi} \in K_H$ составляют разнородную статистическую информацию о наработке и отказах элементов типа E_d .

Суммирование всех наработок $t^{E_d}(U, K_H, T)$ для нахождения $t^{(E_d)} = \sum_{U, K_H, T} t^{E_d}(U, K_H, T)$ и всех отказов $r(E_d, K_H)$ для определения $r(E_d) = \sum_{K_H} r(E_d, K_H)$ приведет к получению средней эксплуатационной интенсивности отказов элементов типа E_d .

Для оценки интенсивности отказов при нормальных условиях $T = 25^\circ\text{C}, K_H = 1, K_{\mathcal{E}}(E_d, U^0) = 1$ [$K_{\mathcal{E}}(E_d, U^0)$ — коэффициент эксплуатации] вместо суммарной наработки $t(E_d)$ берется

нормализованная суммарная наработка

$$t_H(E_d) = \sum_{U=1}^6 K_{\mathcal{E}}(E_d, U) \sum_{K_H \in K_H} t^{E_d} \times (U, K_H, T) K_P(E_d, T, K_H),$$

где $K_P(E_d, T, K_H)$ — коэффициент режима элемента типа E_d с коэффициентом нагрузки K_H при температуре T ; $K_{\mathcal{E}}(E_d, U)$ — коэффициент эксплуатации элемента типа E_d при условиях использования типа U .

Формула получена из условия, что среднее число отказов элементов типа E_d при нормальных условиях с суммарной наработкой $t_H(E_d)$ равно среднему числу отказов элементов типа E_d при распределении наработок:

$$U \in \{1, \dots, 6\};$$

$$\{t^{E_d}(U, K_H, T)\} T \in T;$$

$$K_H \in K_H.$$

Проверка гипотезы о совпадении среднего количества отказов элементов типа E_d за время $t^{E_d}(U, K_H, T)$ при условиях (T, K_H, U) со средним количеством отказов элементов этого же типа за время $t^{E_d}(U, K_H, T) K_{\mathcal{E}} \times (E_d, U) K_P(E_d, T, K_H)$ при нормальных условиях осуществляется с применением критерия Колмогорова—Смирнова.

Интенсивность отказов $\lambda_0^{E_d}$ при нормальных условиях определяется выражениями

$$0 \leq \lambda_0^E \leq \frac{\chi_{1-\gamma}^2(2)}{2t_H(E_d)} = \lambda_0^{E_d(b)}$$

при $r(E_d) = 0;$ (20)

$$\lambda_0^{E_d(H)} = \frac{\chi_{1+\gamma}^2(2r(E_d))}{2t_H(E_d)} \leq \lambda_0^{E_d} \leq \frac{\chi_{1-\gamma}^2(2r(E_d) + 2)}{2t_H(E_d)} = \lambda_0^{E_d(b)},$$
 (21)

где γ — достоверность результата.

Если нормализованная суммарная наработка $t_H(E_d)$ для элементов типа E_d мала, то $t_H(E_d)$ дополняем суммарной нормализованной наработкой для элементов типа E_d ; тогда и количество отказов $r(E_d)$ дополняется количеством отказов элементов типа E_d .

В формулах (20) и (21) $\chi_p^2 = (2m)$ уровень значимости хи-квадрат распределения для вероятности $P < 2m$ со степенями свободы $\gamma = 1 - (\alpha + \beta)$, где α — риск изготовителя ($\alpha \leq 0,5$); β — риск заказчика ($\beta \leq 0,5$).

Для значений $P^{(в)} = \frac{1}{2}(1 - \gamma)$ и

$$P^{(н)} = \frac{1}{2}(1 + \gamma) \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} P \{ \lambda_0^{E_d(в)} \geq \lambda_0^{E_d} \geq \lambda_0^{E_d(н)} \} &= \\ = P \{ \lambda_0^{E_d(в)} \geq \lambda_0^{E_d} \} P \{ \lambda_0^{E_d} \geq \lambda_0^{E_d(н)} \} &= \\ = (1 - P^{(в)}) P^{(н)} &= \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \gamma \text{ для } r(E_d) = 0; \\ \left(1 - \frac{1}{2}(1 - \gamma) \right) \frac{1}{2}(1 + \gamma) = \\ = \left(1 - \frac{1}{2}(1 - \gamma) \right)^2 = \\ = 1(1 - \gamma) + \frac{1}{4}(1 - \gamma)^2 = \\ = \gamma + \left(\frac{1 - \gamma}{2} \right)^2 \approx \gamma \\ \text{для } r(E_d) > 0, \quad \frac{1 - \gamma}{2} \leq 0, 1. \end{cases}$$

Для случая $\gamma = 0,8$ [т. е. $\alpha = \beta = 0,1$ при $rE_d > 0$ и $\alpha = 0,2$ и $\beta = 0$ при $r(E_d) = 0$] вероятность

$$P \{ \lambda_0^{E_d(в)} \geq \lambda_0^{E_d} \geq \lambda_0^{E_d(н)} \} = 0, 8.$$

Величина наработок $t_H^{E_d}$ считается малой, если $\lambda_0^{E_d(в)} > \lambda_0^{E_d(с)}$ при $r(E_d) = 0$ ($\lambda_0^{E_d(с)}$ — значение интенсивности отказов элементов типа $E_d(с)$ при нормальных условиях).

Для сборочных единиц нулевого и первого уровня (ИС, БИС, ГБИС и микросборки) иерархии современной РЭА характерным является наличие достаточно высокой степени коррелированности физических параметров структуры компонентов (элементов), т. е. допущение о независимости отказов не выполняется, и математическая модель надежности РЭА при независимости отказов элементов становится слишком упрощенной (приближенной) и не обеспечивает достоверную оценку показателей надежности сборочных единиц (ИМС, БГИС, МКСБ и т. д.). В этом случае любая сборочная единица представляет собой некоторую совокупность элементов, состоящую из полностью некоррелированных групп элементов, где элементы внутри каждой группы являются коррелированными в той или иной степени. Структура такой сборочной единицы может быть представлена как последовательная цепочка из некоторого числа некоррелированных групп элементов с вероятностями безотказной работы P_{gi} , $g = 1, \dots, k$ (P_{gi} — вероятность безотказной работы i -й группы с коррелированными элементами).

Если коррелированная группа состоит из n элементов с вероятностями безотказной работы

$$P_i(t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda_i(t) dt \right),$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

и представляет последовательную цепочку элементов, то согласно теореме умножения событий вероятность безотказной работы последовательной схемы

$$P(g, t) = P(l_1; t) P(l_2/l_1; t) \times$$

$$\times P(l_3/l_1l_2; t) P(l_k/l_1l_2 \dots l_{k-1}; t),$$

где $P(l_1; t)$ — безусловная вероятность безотказной работы элемента l_1 группы g ; $P(l_2/l_1; t)$, $P(l_3/l_1l_2; t)$, ..., $P(l_k/l_1l_2 \dots l_{k-1}; t)$ — условные вероятности безотказной работы элементов l_2, l_3, \dots, l_k группы g .

При идентичности всех элементов l_k , $k = 1, \dots, k$ и наличии полной коррелированности их отказов

$$\begin{cases} P(l_1; t) = P(l_2; t) = \dots \\ = P(l_k; t); \\ P(l_2/l_1; t) = P(l_3/l_1 l_2; t) = \dots = \\ = P(l_k/l_1 l_2 \dots l_{k-1}; t). \end{cases} \quad (22)$$

Из (22) следует, что при абсолютно стабильном технологическом процессе производства элементов g сборочной единицы вероятность безотказной работы $P_g(t)$ любой коррелированной группы элементов определяется надежностью (безотказностью) одного элемента, т. е.

$$\begin{cases} P(g, t) = P(l_1, t) = \\ = P(l_i, i = 1, \dots, k; t); \\ \lambda_g = \lambda_i, i = 1, K, \end{cases}$$

где λ — интенсивность отказов.

Тогда для сборочной единицы

$$\lambda_{с. е} = \sum_{g=1}^k \lambda_g;$$

$$P_{с. е}(t) = \exp \left\{ -t \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} \right\},$$

где λ_{ij} — составляющая интенсивности отказов, определяемая отказами j -го типа компонентов i -го элемента сборочной единицы; m_i — номенклатура компонентов в составе сборочной единицы, которые характеризуются коррелированностью физических параметров; k — номенклатура компонентов в составе сборочной единицы, отказы которых являются независимыми (практически полная некоррелированность параметров различных элементов). Например, если в качестве сборочной единицы рассматривается микросборка, то отказы таких элементов микросборки, как МППИМ (многослойная плата) и ИС (БИС), можно считать практически независимыми, так как технологические процессы их изготовления полностью разделены и самостоятельны.

Так как в структуре сборочной единицы имеются полностью или частично коррелированные элементы и полно-

стью некоррелированные элементы, интенсивность отказов сборочной единицы удобнее представить в виде

$$\begin{aligned} \Lambda_{с. е} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} = \\ &= \sum_{l=1}^{m_k} N_{l_k} \lambda_{l_k} + \sum_{j=1}^{m_l} \lambda_{jl} = \\ &= \sum_{l=1}^{m_k} N_{l_k} \lambda_{l_k} + \\ &+ \sum_{j=1}^{m_l} \left\{ \lambda_{j\emptyset} + \sum_{i=1}^{K_{i_l}} \lambda_{j\emptyset} [1 - \varphi_i(r_i)] \right\}, \end{aligned}$$

где m_k, m_i — число элементов k -го и i -го типа; $\lambda_{l_k}, \lambda_{j_l}$ — интенсивность отказов элементов (компонентов) l -го и j -го типа; N_{l_k} — число элементов (компонентов) l -го типа; K_{i_l} — число элементов j -го типа; m_l — количество типов элементов; $\varphi_i(r_i)$ — функция степени коррелированности определяющих параметров элементов i -го типа.

Рассмотрим примеры анализа надежности типовых устройств РЭА. На рис. 12 показана структура микропроцессорной ЭВМ на БИС с трехкратным мажоритарным резервированием, состоящей из магистрали данных 1; магистрали адреса и управления 2; микропроцессора МП; запоминающего устройства ЗУ и восстанавливающего устройства ВУ.

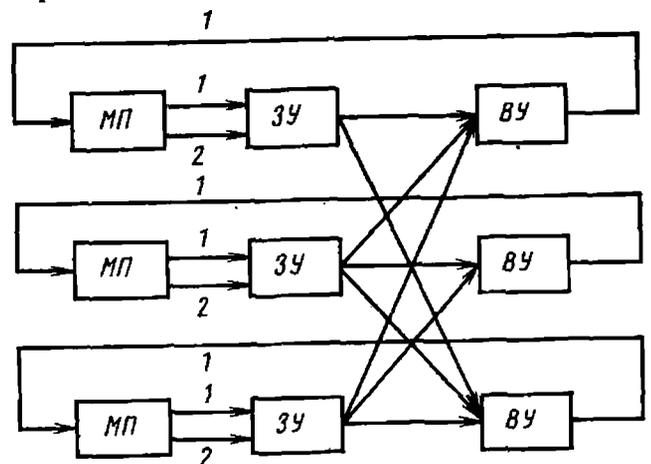


Рис. 12. Структура микропроцессорной ЭВМ на БИС с трехкратным мажоритарным резервированием

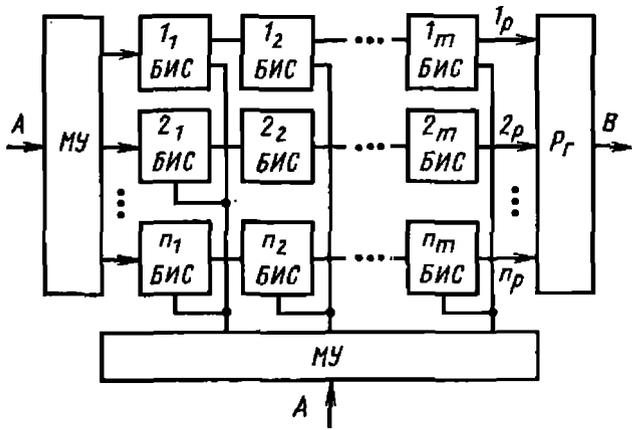


Рис. 13. Структурная схема матрицы памяти

При анализе надежности данной системы рассмотрим два случая:

1) модули МП и ЗУ являются одновыходными устройствами, т. е. $L = 1$;

2) модули МП и ЗУ являются многовыходными устройствами, т. е. $L = K$.

Второй случай более реален для систем с мажоритарным резервированием. Модули с параметром $L = K$ при мажоритарном резервировании выходят из строя только тогда, когда неисправности имеются в каждом модуле и они воздействуют на одни и те же выходные функции $f_i \in F_i$ каждого модуля.

Надежность микропроцессорной ЭВМ будем оценивать вероятностью безотказной работы в течение времени $(0, t)$.

В случае 1)

$$P(t) = \sum_{i=0}^R C_k^i (P_M P_{ВУ})^{k-i} \times \\ \times (1 - P_M P_{ВУ})^i,$$

где P_M — вероятность безотказной работы модуля МП—ЗУ; $P_{ВУ}$ — вероятность безотказной работы ВУ; k , R — параметры систем с мажоритарным резервированием (k — число каналов; R — порог голосования восстанавливающего устройства).

В случае 2) на каждом поразрядном выходе модуля памяти ЗУ имеется ВУ, обеспечивающее правильное функционирование модуля, за исключением случая, когда ошибка возникает одновременно в одном одинаковом разряде разных модулей.

Пусть модуль памяти представляет матрицу размером $n \times m$, где n — число разрядов модуля памяти; m — число кристаллов (БИС), принадлежащих на один разряд, которое определяется информационной емкостью ЗУ при заданной степени интеграции БИС. Структурная схема матрицы памяти, состоящей из цепи модуля управления МУ, кристаллов памяти БИС, шин управления и входных данных A , шин выходных данных B и выходного регистра P_r , приведена на рис. 13.

Если надежность кристалла памяти $P_{БИС}$, а надежность цепей модуля управления $P_{МУ}$, то надежность модуля ЗУ с трехкратным мажоритарным резервированием (без учета надежности ВУ)

$$P_{ЗУ}(t) = P_{МУ}^3 [P_{БИС}^3 + \\ + 3P_{БИС}^2 (1 - P_{БИС})]^{nm} + \\ + 3P_{МУ} (1 - P_{МУ}) P_{БИС}^{2nm}.$$

С учетом надежности ВУ на каждом поразрядном выходе модуля памяти

$$P_{ЗУ}(t) = P_M^3 [P_{ВУ}^3 [P_{БИС}^3 + \\ + 3P_{БИС}^2 (1 - P_{БИС})]^m + \\ + 3P_{ВУ}^2 (1 - P_{ВУ}) P_{БИС}^{2m}]^n + \\ + 3P_M^2 (1 - P_M) (P_{ВУ} P_{БИС})^{2n}.$$

Рассмотрим общую методику построения ССН сложных систем со многими выходами с мажоритарным резервированием.

Пусть задана некоторая система S , характеризуемая структурным параметром $L = K$, где K — число выходов S , на каждом из которых расположен мажоритарный элемент. При анализе работоспособности системы с учетом состояний каждого из выходов (выходных функций $f_i \in F$) обнаруживается, что мощность множества работоспособных состояний $\{l_i\} \in E_+$ значительно больше, чем для системы с одним обобщенным выходом (первый случай). Следовательно, и ССН системы должна быть значительно сложнее ССН системы

с одним выходом (рис. 14). Такая модель более точно отражает влияние отказа каждого элемента a_i системы на выходную функцию $\{f_i\} \in F$.

Рассмотрим модуль памяти микропроцессорной системы (см. рис. 13). Отказ одного кристалла БИС не приводит к искажению всей выходной информации, в то же время отказ элементов общих цепей памяти искажает всю выходную информацию для всех $m \times K$ слов, где K — информационная емкость одной БИС. Из этого примера следует, что множество элементов A системы S с точки зрения влияния отказов элементов $a_i \in A$ на выходную функцию $f_i \in F$ может быть разбито на ряд подмножеств $A_i \{a_i^j\}$, удовлетворяющих условию:

$$\bigcup_{i=1}^N A_i \{a_i^j\} = A,$$

где N — число подмножеств A_i .

Мощность $|A_i|$ каждого подмножества $A_i \{a_i^j\}$ и число N подмножеств $A_i \in A$ определяются конкретной структурой исследуемой системы S .

На первом этапе построения ЭНС проводится предварительный анализ структурно-функциональной и принципиальной электрических схем и минимального (нерезервированного) варианта системы. Целью анализа является установление четкого уровня детализации структуры и определение элементного состава $A_i = \{\tilde{a}_i^j\}$ системы. Уровень детализации и состав элементов $\{\tilde{a}_i^j\}$ определяются этапом проектирования. Наименьшим уровнем детализации при определении состава $\tilde{A} \{\tilde{a}_i^j\}$ является уровень элементной базы (дискретных компонентов ИС, БИС), для которой существуют (или могут быть определены) статистические данные показателей надежности. В общем случае в качестве элементов \tilde{a}_i^j могут быть рассмотрены типовые функциональные или конструктивно законченные узлы, устройства и подсистемы.

Результатом выполнения данного этапа являются составление четкого

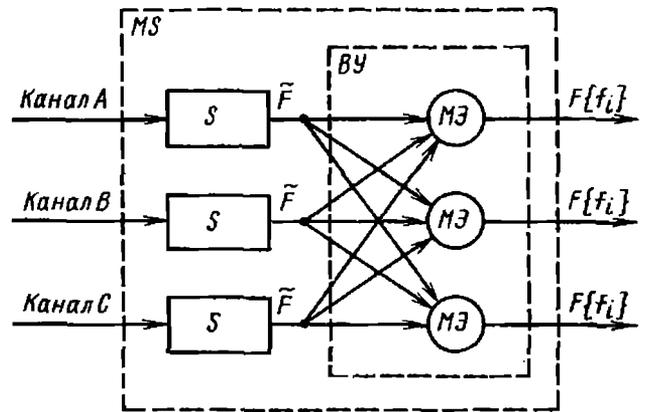


Рис. 14. СН модуля памяти на БИС

списка элементов множества $\tilde{A} \{\tilde{a}_i^j\}$ и определение надежности (интенсивности отказов $A \{\tilde{a}_i^j\}$ каждого элемента $\tilde{a}_i^j \in A_i$) системы. В любом случае в качестве элементов $A \{\tilde{a}_i^j\}$ системы желательно рассматривать элементы одного порядка сложности.

На втором этапе проводится подробный анализ структурно-функциональной схемы и алгоритмов функционирования исследуемой системы. Цель анализа:

1) установление множества выходных функций $\{f_i\} \in F$ системы, относительно которых формируются условия сохранения работоспособности;

2) определение подмножества $A_i \in A$ элементов системы, отказ которых приводит к отказу всех функций $\{f_i\} \in F$, некоторой части функций из F и т. д. и, наконец, отдельно взятой функции f_i ;

3) установление связей между элементами подмножеств $\{A_i\}$, определяющих подчиненность элементов a_i , т. е. отказ a_i проявляется на выходе элемента a_j .

построение ЭНС по результатам пп. 1—3.

Для системы (см. рис. 13) в качестве выходных функций f_i можно рассматривать выходную функцию i -го разряда всех K слов, приходящихся на один кристалл (БИС). Тогда для модуля памяти с размером $n \times m$ имеем

$n \times m$ функций f_i^j , где $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$, т. е.

$$f_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й разряд из } i\text{-й БИС} \\ & \text{исправен;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Подмножества A_i элементов системы определяются по формулам:

1) $A_0 = \{a_i^0\}$, где $\{a_i^0\}$ — множество элементов микропроцессора и общих цепей модуля памяти, так как отказ любого элемента a_i микропроцессора или общих цепей ЗУ приводит к отказу всех функций $\{f_i^j\}$;

2) $A_1 = \{a_i^1\}$, где $\{a_i^1\}$ — множество элементов восстанавливающего устройства, приходящихся на один разряд m кристаллов, т. е. влияющих сразу на m выходных функций f_i^j , $i = 1, \dots, m$, для каждого j ;

3) $A_2 = \{a_i^2\}$, где $\{a_i^2\}$ — множество элементов, состоящее из одного кристалла (БИС), т. е. влияющих на одну выходную функцию f_i^j .

Для описания связей между элементами подмножеств A_i воспользуемся отношением связности τ следующего вида:

$$(\forall a_i a_k \in A_i) \{(a_i \tau a_k) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (f(a_i) \vee (a_k) \neq 0)\},$$

где

$$f(a_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i > a_k; \\ 0, & \text{если } \overline{a_i} > \overline{a_k}; \end{cases}$$

$a_i \in A_i$, $a_k \in A_k$, $i, k \in I, I$ — множество индексов A_i .

Отношение $a_i > a_k$ означает, что выходная функция $f(a_k)$ подчинена элементу a_i , т. е. отказ a_i проявляется на выходе элемента a_k .

Для рассматриваемой системы можно записать следующие отношения

связности между элементами подмножеств A_0 и A_1 , A_1 и A_2 :

$$(\{a_i^0 \in A_0, \forall a_i^1 \in A_1\} \{a_i^0 \tau a_i^1\} \leftrightarrow \leftrightarrow f(a_i^0) \vee f(a_i^1) = 1)\}; \quad (23)$$

$$(\forall a_i^1 \in A_1 \forall a_{ij}^2 \in A_2, j = 1, \dots, m) \times \times \{(a_i^1 \tau a_{ij}^2) \leftrightarrow (f(a_i^1) \vee f(a_{ij}^2) = 1)\}.$$

Соотношения (23) характеризуют взаимосвязь элементов в ССН.

Произвольная ССН может быть со сложным подчинением элементов. Такая структура характеризуется следующим условием:

$$(\{a_i a_k \in A\} \{a_i \tau a_k \leftrightarrow \leftrightarrow [I(f(a_i)) \setminus I(f(a_k)) \neq \emptyset]\},$$

где $|I(f(a_i))|$ — мощность множества выходных функций f элементов системы, поражаемых при отказе элемента a_i .

Взаимосвязь элементов подмножеств A_i и A_j , заданная соотношением (23), может быть более наглядно описана булевой матрицей инциденций:

$$M = \|m_{ij}\|,$$

где i — число элементов подмножеств A_i и A_j , определенных отношением связности τ ; j — число выходных функций элементов $a_i \in A_i$ и $a_j \in A_j$ с отношением связности τ .

Из соотношения (23) для элементов подмножеств A_0 и A_1 имеем следующую булеву матрицу инциденций:

$$M = \begin{matrix} & a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_k^1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} f(a_1^0) \\ f(a_1^1) \\ f(a_1^2) \\ \vdots \\ f(a_k^1) \end{matrix} \end{matrix} \quad (24)$$

Аналогичные матрицы инциденций можно написать для остальных элементов системы.

На основе матрицы (24) строим ССН следующим образом:

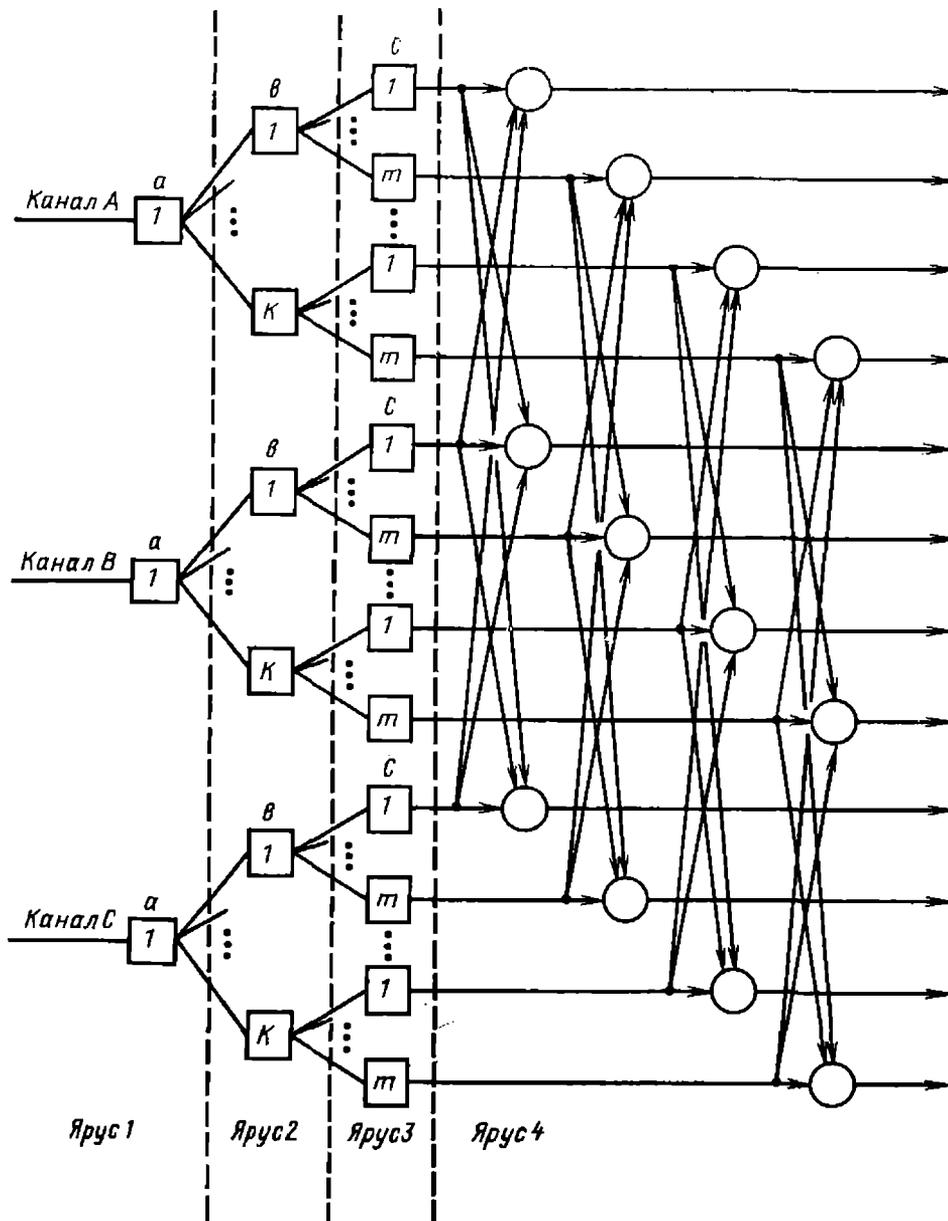


Рис. 15. ССН системы с восстановлением выходной информации

1) последовательно выбираем элементы матрицы M такие, что $m_{ij} = 1$;
 2) для всех $m_{ij} = 1$ последовательно соединяем a_i -й элемент с a_j -м элементом;
 3) операцию соединения элементов выполняем последовательно для каждой матрицы $M_i, i = 1, \dots, N$ системы.
 На рис. 15 приведена ССН системы, где на четвертом ярусе ветвящейся структуры показаны элементы восстановления выходной информации на выходе мажорированной системы. Элементы четвертого яруса являются идеальными элементами восстановления, так как физически они учтены в подмножестве элементов A_2 второго яруса.

На основе ССН построим математическую модель надежности любой системы с мажоритарным резервированием. Задачу построения математической модели [в данном случае аналитического выражения, описывающего $P(t)$ системы] сформулируем следующим образом. Пусть заданы параметры N, R мажоритарного резервирования, где N — кратность резервирования, R — порог нечувствительности элементов восстановления; ССН минимального варианта системы S ; показатели надежности P_i элементов $a_i \in A$, полученные на этапе построения ССН. Необходимо определить функцию $P(t)$ системы, считая критерием отказа си-

стемы отказ хотя бы одного из ее выходов.

Выберем в ССН (обозначим ССН для краткости H) произвольный элемент A_i из множества элементов A_1 первого яруса. Разделим все работоспособные состояния системы на группы, отличающиеся состоянием элементов $a_1 \in A_i$; элемент a исправен во всех N каналах, в $N-1$ каналах и т. д., до R каналов. Тогда по формуле полной вероятности получим функцию надежности $P(H)$ системы, определяемой на основе ССН:

$$P(H) = \sum_{\alpha=0}^{R-1} P^{N-\alpha} q^\alpha \times \left[P\left(\underbrace{\tilde{H}/a, a, \dots, a}_\alpha\right) \right], \quad (25)$$

где $P\left(\underbrace{\tilde{H}/a, a, \dots, a}_\alpha\right)$ — функция на-

дежности в пределах ССН при условии наличия отказов элементов a в α каналах.

Выделим некоторый элемент следующего яруса в H и, используя формулу (25) для функций $P\left(\underbrace{\tilde{H}/a, a, \dots, a}_\alpha\right)$

и последующих функций, придем к рекуррентной процедуре разложения структуры H , причем каждая функция надежности на любом первом шаге получается как условная в зависимости от определенной комбинации отказов элементов, исключенных на предыдущих шагах.

Если в каком-либо канале отказами элементов поражены все выходные функции $\{f_i\} \in F$, то параметры мажоритарного резервирования N/R изменяются от N/R до $(N-1)/(R-1)$. В общем случае необходимо рассматривать следующий ряд изменений параметров: $N/R, (N-1)/(R-1), \dots, (N-\alpha)/(R-\alpha), \dots, (N-R+1)/1$.

Получающаяся на первом шаге разложения структура $N_l = N_{l-1}/a$ при последовательном исключении элементов a из рассмотрения в α каналах распадается на не связанные между

собой структуры $H_l^k, k = 1, 2$. Когда структура H_l^k сводится к одному элементу,

$$P(H = a_i) = \sum_{\alpha=0}^{R-1} C_N^\alpha P_i^{N-\alpha}, q_i^\alpha.$$

С учетом распада структуры H_l на не связанные между собой k структур $H_l^k, k = 1, 2$, и эквивалентности ССН при отказе элементов в различных каналах на основе (25) можно написать рекуррентное выражение, связывающее функции надежности на $(l-1)$ и l шагах:

$$P(H_{l-1})^{N/R} = \sum_{\alpha=0}^{R-1} C_N^\alpha P_l^{N-\alpha} \times q_l^\alpha \prod_{H_l^k \in H_l} [P(H_l^k)]^{(N-\alpha)/(R-\alpha)},$$

где параметры N/R в виде степеней у выражений $P(H_l)^{N/R}$ указывают на их изменение при каждом шаге рекуррентности.

Для системы в случае $N = 3, R = 2, l = 1$

$$P(H_0)^{3/2} = P_1^3 \prod_{H_1^k \in H_1} [P(H_1^k)^{3/2} + 3P_1^2(1-P_1)] \prod_{H_1^k \in H_1} P(H_1^k)^{2/1},$$

где

$$P(H_1^k)^{2/1} = P_2^2 \prod_{H_2^k \in H_2} P(H_2^k)^{2/1}.$$

Исключим из рассмотрения второй элемент, т. е. b . Тогда структура H_1^k разлагается на m независимых структур H_2^k с вероятностью

$$P(H_1^k)^{2/1} = P_2^2 \prod_{H_2^k \in H_2} P(H_2^k)^{2/1},$$

где число разложения структуры $H_1^k \in H_1$ равно k , т. е. $|H_1^k| = k$.

1. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ПОДОБИЯ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКЕ

Для решения вопросов планирования отработки разработчик обращается к накопленному опыту создания и применения аналогичных изделий.

При экспериментальной отработке осуществляются:

изучение процессов, протекающих в изделиях, и прогнозирование их поведения в эксплуатации для разработки защитных и предупредительных мер по предотвращению снижения технических характеристик и показателей надежности ниже требуемого уровня;

приближение объекта отработки по его свойствам к создаваемому изделию с требуемыми характеристиками;

подтверждение заданных на конец отработочных испытаний технических характеристик и показателей надежности в заданные сроки.

Сложность и многофакторность задачи планирования отработки определяют необходимость разделения процесса отработки на частные задачи, к которым следует отнести:

выбор аналога из ранее созданных и лучших зарубежных образцов и обоснование основных параметров изделия на основе анализа его подобия базовому образцу с целью оптимизации стратегий отработки;

оптимизацию стратегий отработки в зависимости от уровня сложности обрабатываемых составных частей и характеристик существующей или потребной экспериментальной базы;

определение объемов отработочных испытаний с учетом анализа подобия

динамики роста уровня отработанности ранее созданных систем;

обоснование запасов работоспособности исходя из подтверждения требуемой надежности при испытаниях на внешние воздействия;

планирование многофакторных испытаний с оценкой подобия реальным условиям применения систем, в том числе испытаний для подтверждения показателя надежности.

В программах испытаний, регламентирующих порядок проведения испытаний, объемы, режимы испытаний, устанавливают требования к точности результатов испытаний, правила сопоставления полученных оценок с результатами эксплуатации этих же систем.

Рассмотрим в общем виде упрощенную математическую модель объекта испытаний:

$$z = \varphi(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m), \quad (1)$$

где z — техническая характеристика изделия, которая оценивается в процессе испытаний; x_1, \dots, x_n — функциональные и конструктивно-технологические параметры изделия, влияющие на характеристику z ; y_1, \dots, y_m — параметры режима работы изделия и параметры его нагружения.

Так как параметры x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_m являются случайными величинами, то и характеристика z также случайная величина. В процессе испытаний реализуются конкретные значения параметров x_1^*, \dots, x_n^* и y_1^*, \dots, y_m^* , соответствующие значению характеристики z^* . Чем точнее воспроизводятся в процессе испытаний параметры этой модели, тем точнее будет результат испытаний.

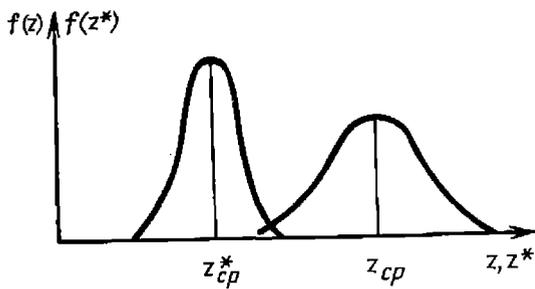


Рис. 1. Плотности распределения $f(z)$ и $f(z^*)$ характеристик z и z^* системы в различных условиях испытаний

При организации испытаний в практике разработки и производстве изделий возникает ряд факторов, которые существенно влияют на результат испытаний. В процессе проведения испытаний, как правило, не представляется возможным моделировать весь спектр нагрузок и режимов во всем диапазоне. Например, автомобиль должен обеспечить эффективное торможение на дорогах со всеми возможными покрытиями, на наклонах дороги различных углов, встречном и попутном ветре различной силы, при различных условиях погоды, при различных аэродинамических характеристиках автомобиля, наконец, торможение должно быть эффективно независимо от того, какой водитель сидит за рулем. Естественно, оценить тормозной путь автомобиля во всех возможных условиях не представляется возможным. Эта трудность может быть преодолена, если предложить такой метод испытаний, который бы позволял, испытывая автомобиль в одном режиме, делать выводы относительно его поведения во всем диапазоне режимов и условий.

Таким образом, в практике испытаний, как правило, воспроизводится более узкий спектр нагрузок, поэтому естественно при равных других условиях разброс результатов испытаний будет существенно меньше разброса этого же параметра в условиях реальной эксплуатации.

Кроме того, экспериментальная оценка исследуемого параметра, полученная по результатам испытаний, является смещенной по физической природе, поскольку в процессе испытаний воспроизводится не весь спектр нагрузок, а те нагрузки, которые зада-

ются и имеют ту или иную степень приближенности. Это объясняется тем, что точное моделирование всего спектра нагрузок практически неосуществимо, да и экономически нецелесообразно.

Возникает проблема сравнения разных методов испытаний и пересчета их результатов.

С учетом особенностей процесса испытаний результат испытания объекта может быть выражен с помощью математической модели самого объекта:

$$z^* = \varphi(x_1^*, \dots, x_n^*; y_1^*, \dots, y_{m-k}^*) + \varepsilon, \quad (2)$$

где z^* — реализация технической характеристики системы, полученная в результате испытаний; x_1^*, \dots, x_n^* — функциональные и конструктивно-технологические параметры испытываемого изделия или выборки; y_1^*, \dots, y_{m-k}^* — моделируемые параметры режима работы испытываемых изделий и параметры нагружений (n — число немоделируемых параметров); ε — суммарная погрешность измерения параметров.

На рис. 1 представлены плотности распределения характеристик z^* и z .

Анализ математических моделей (1) и (2), а также методических особенностей процесса испытаний показывает, что отличие законов распределения характеристик z^* и z в основном зависит от техники воспроизведения параметров y_1, \dots, y_{m-k} в процессе испытаний. Случайность параметров x_1, \dots, x_n влияет на характеристику z в меньшей степени, так как испытываются непосредственно сами изделия, а разброс самих параметров сравнительно незначителен, ибо точность изготовления изделий в современном производстве достаточно высокая.

Отличие же моделируемых параметров y_1^*, \dots, y_{m-k}^* от фактических y_1, \dots, y_{m-k} может быть существенным как по числу параметров, так и по точности моделирования уровня параметров и диапазонов разброса. Следовательно, одним из основных факторов, определяющих эффективность методов испытаний, следует считать воспроизводимость испытаний. Харак-

характеристика воспроизводимости методов испытаний является интегральным понятием, включающим в себя характеристику самого метода испытаний, которую можно формализовать метрологическим подходом (определение повторяемости — ошибки) результата испытаний z^* и z , а также характеристику сопоставимости, обеспечивающую пересчет результатов испытаний к условиям реальной эксплуатации.

Учитывая, что смещенность результатов испытаний (отличие в диапазоне случайных отклонений) z^* и z имеет физическую природу, зависящую от выбранных методов обработки, наиболее целесообразно для разработки алгоритмов сопоставления и пересчета использовать методы теории подобия, которые позволяют на основе анализа подобия физических процессов, происходящих в испытываемой и эксплуатируемой системе, пересчитывать результаты испытаний с одних условий на другие по соответствующим разработанным критериям подобия. Кроме того, методы теории подобия позволяют сравнивать результаты испытаний систем.

Таким образом, обеспечение воспроизводимости методов испытаний состоит из двух этапов.

1-й этап. Оценка повторяемости результатов испытаний, заключающаяся в определении среднего значения и диапазона случайных отклонений результатов испытаний.

Пусть испытаниям были подвергнуты N изделий; при этом получены следующие значения характеристики:

$$z_1^*, z_2^*, \dots, z_i^*, \dots, z_N^*.$$

Тогда оценить среднее значение z^* и погрешность метода испытаний можно по формулам:

$$z_{\text{ср}}^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i^*;$$

$$\sigma_{z^*} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (z_i^* - z_{\text{ср}}^*)^2}. \quad (3)$$

Так как характеристика z^* есть функция от ряда аргументов, значения $z_{\text{ср}}^*$ и σ_{z^*} соответственно зависят от этих аргументов. Используя выражение (2), запишем результаты испытаний в векторной форме:

$$\bar{z}^* = \begin{vmatrix} z_1^* \\ \vdots \\ z_i^* \\ \vdots \\ z_N^* \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1^*, \dots, x_{n1}^*; & y_1^*, \dots, y_{m-k}^* \\ x_{1i}^*, \dots, x_{ni}^*; & y_{1i}^*, \dots, y_{m-ki}^* \\ x_{1N}^*, \dots, x_{nN}^*; & y_{1N}^*, \dots, y_{m-kN}^* \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Из выражения (4) видно, что результаты испытаний зависят от качественного состояния испытываемых систем, которое определяется функциональными и конструкторско-технологическими параметрами x_1, \dots, x_n , а также от точности моделирования режимов и нагрузок y_1, \dots, y_m в процессе испытаний. При этом влияние первой группы параметров (x_1^*, \dots, x_n^*) на характеристику $z_{\text{ср}}^*$ зависит от объема выборки, а характеристика $\sigma_{z_{\text{ср}}^*}$ зависит от уровня производства изготовления изделий.

Влияние второй группы параметров (y_1^*, \dots, y_{m-k}^*) на характеристики $z_{\text{ср}}^*$ и σ_{z^*} обуславливается научно-техническим уровнем системы испытаний, т. е. обоснованностью выбора моделируемых режимов и нагрузок, уровнем испытательного оборудования, квалификацией и интеллектом специалистов-испытателей.

Повторяемость результатов испытаний, которую можно характеризовать разбросом отдельных реализаций, зависит от случайных отклонений обеих групп характеристик, от их номиналь-

ных значений, а ее оценка может быть представлена следующим образом:

$$\hat{\sigma}_{z^*} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{x_j^*}^2 + \sum_{j=1}^{m-k} \sigma_{y_j^*}^2}; \quad (5)$$

$$\hat{\sigma}_{x_j^*}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_{ji}^* - \bar{x}_j^*)^2; \quad (6)$$

$$\hat{\sigma}_{y_j^*}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_{qi}^* - \bar{y}_q)^2; \quad (7)$$

$$\bar{x}_j^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ji}^*; \quad \bar{y}_q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_{qi}^*. \quad (8)$$

Таким образом, повторяемость результатов испытаний характеризует внутреннюю погрешность всей системы испытаний.

2-й этап. Кроме того, существует еще и внешняя погрешность, которая заложена в программу испытаний и которая обуславливает смещенность результатов испытаний по отношению к фактическому состоянию исследуемых систем.

В общем виде выражение критерия подобия имеет вид

$$\pi = z^\alpha \prod_{j=1}^n x_j^{\beta_j} \prod_{q=1}^{m-k} y_q^{\gamma_q}.$$

Так как параметры, входящие в состав критерия подобия, являются случайными величинами, то для их оценки можно использовать средние значения этих параметров.

Для условий испытаний

$$\hat{\pi}^* = z_{\text{ср}}^{\alpha} \prod_{j=1}^n \bar{x}_j^{\beta_j} \prod_{q=1}^{m-k} \bar{y}_q^{\gamma_q}. \quad (9)$$

Для условий эксплуатации

$$\hat{\pi} = z_{\text{ср}}^{\alpha} \prod_{j=1}^n \bar{x}_j^{\beta_j} \prod_{q=1}^m \bar{y}_q^{\gamma_q}. \quad (10)$$

Значения показателей α , β_j , γ_q определяются, например, методом анализа размерностей. Оценки средних значений аргументов для условий испы-

таний определяются по формулам (3), (8), а в качестве оценок средних значений параметров для условий эксплуатации можно в первом приближении использовать номинальные значения параметров, взятых из конструкторской документации, технических заданий на изделия, в том числе и по условиям эксплуатации.

Для подобных процессов $\hat{\pi}^* = \hat{\pi}$; приравняв выражение (9) и (10) и выделив оставшийся неизвестный параметр $z_{\text{ср}}$, получим

$$z_{\text{ср}} = z_{\text{ср}}^* \left[\frac{\prod_{j=1}^n \bar{x}_j^{\beta_j} \prod_{q=1}^{m-k} \bar{y}_q^{\gamma_q}}{\prod_{j=1}^n \bar{x}_j^{\beta_j} \prod_{q=1}^m \bar{y}_q^{\gamma_q}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (11)$$

Выражение (11) используется для пересчета смещенной оценки $z_{\text{ср}}^*$ к оценке $z_{\text{ср}}$, которая характеризует фактические состояния создаваемого и испытываемого изделия.

2. ОПТИМИЗАЦИЯ СТРАТЕГИЙ ОТРАБОТКИ С УСТАНОВЛЕНИЕМ ИНВАРИАНТОВ ПОДОБИЯ БАЗОВОМУ ОБРАЗЦУ

При формировании критерия эффективности отработки целесообразно исходить из необходимости учета следующих основных факторов, влияющих на уровень отработанности изделия:

параметров изделия, условий и режимов испытаний;

числа отказов, последствий их проявления на различных этапах отработки, прогноза надежности в виде вероятности выявления и устранения источников отказов, запасов работоспособности;

характеристик экспериментальной базы.

Поскольку существуют противоречивые тенденции влияния названных факторов на эффективность отработки, пользуются для обоснования стратегий процесса испытаний технико-экономическим критерием в виде суммарных

затрат на обработку и потерь из-за снижения технических характеристик и показателей надежности изделий:

$$C_{\Sigma}(n) = C_{отр}(n) + C_{п}(n), \quad (12)$$

где $n = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ — вектор объемов испытаний, включая число выделенных образцов, продолжительность и число циклов испытаний.

Наряду с обобщенным критерием эффективности испытаний $C_{\Sigma}(n)$ могут быть использованы самостоятельно или учтены в (12) частные критерии эффективности, например, достоверность оценки технических параметров и показателей надежности изделия.

Составляющие в (12) определяются по следующим формулам.

Прогнозируемые потери из-за снижения качества и надежности изделий

$$C_{п}(n) = [1 - P(n)] C_{пр}, \quad (13)$$

где $P(n)$ — достигнутый уровень отработанности изделия в процессе экспериментальной обработки объемом n ; $C_{пр}$ — затраты на испытание в натурных условиях и на применение системы в эксплуатации.

Затраты на экспериментальную обработку изделия:

$$C_{отр}(n) = C_{отк}(n) + C_{обр}(n) + C_3(n) + C_{эб}(n), \quad (14)$$

где $C_{отк}(n)$ — средние потери из-за отказов изделий в процессе обработки; $C_{обр}(n)$ — стоимость образцов изделий, выделенных на экспериментальную обработку;

$C_3(n)$ — стоимость доработки годового задела;

$C_{эб}(n)$ — суммарные затраты на амортизацию экспериментальной базы по всем видам испытаний.

Составляющая $C_{отк}$ рассчитывается по формуле:

$$C_{отк}(n) = C'_{отк}(n) + C''_{отк}(n),$$

где

$$C'_{отк}(n) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (1 - P_j) C_{отр i}^j$$

— средние потери из-за отказов изделия без восстановления его работоспособности;

$$C''_{отк}(n) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (1 - P_j) C_{отр i}^{дi}$$

— средние потери из-за отказов изделия с восстановлением его работоспособности.

Здесь n_i — число испытаний i -го вида; N — число видов испытаний; P_j — достигнутый уровень отработанности после j -го испытания; $C_{отр i}^j$ — стоимость образца, выделенного для j -го испытания i -го вида; $C_{отр i}^{дi}$ — стоимость доработки образца после j -го испытания i -го вида.

Стоимость образцов изделий, выделенных на экспериментальную обработку:

$$C_{отр}(n) = \sum_{i=1}^N C_{отр i} n_i,$$

где $C_{отр i}$ — стоимость образца, выделенного на испытания i -го вида:

$$C_3(n) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (1 - P_j) N_3^{ij} \delta^{ij} C_{дор}^{ij}.$$

Здесь N_3^{ij} — объем задела; δ^{ij} — коэффициент весомости отказа; $C_{дор}^{ij}$ — средние затраты на доработку задела.

Оптимальному варианту экспериментальной обработки соответствует точка экстремума $n^* = (n_1^*, n_2^*, \dots, n_N^*)$, которой является минимум функции (12); она определяется из уравнения

$$\frac{\partial C_{\Sigma}}{\partial C_{n_i}} = 0; \quad i = \overline{1, N}. \quad (15)$$

В процессе обработки выявляются источники отказов и производятся доработки, применяются новые конструктивные и технологические решения, появляются новые материалы. Все это приводит к изменениям характеристик изделия и параметров процесса обработки. Дополнительно возникают трудности с применением тех-

нико-экономического критерия (12) из-за колебаний экономических величин, входящих в составляющие экономических затрат и потерь.

В связи с этим целесообразно использовать критериальную запись целевой функции (12). Это позволяет учесть опыт создания аналогичных образцов изделий данного класса для формирования базовой программы экспериментальной обработки и проводить оптимизацию плана отработочных испытаний относительно этой базовой программы с установлением при помощи критериев подобия инвариантных условий сохранения устойчивости оптимальных решений в течение процесса обработки. Можно осуществить включение параметров изделий и процесса обработки n_1, n_2, \dots, n_N , на множестве которых ищется оптимальное решение, в π -критерии подобия реального и базового процессов обработки. Тогда при изменении по тем или иным причинам величин, входящих в критерии подобия, сохраняются оптимальными ранее найденные варианты построения изделия и связанной с ними обработки, если будет выполняться условие $\pi_v = \text{idem}$; $v = \overline{1, n_\pi}$.

Для установления оптимальных решений при планировании обработки можно воспользоваться методом базовой точки.

Целевой функционал (12), соответствующий оптимальной программе обработки для базового изделия, можно записать в виде

$$C^B = \sum_{i=1}^m C_i^B,$$

где C_i^B — составляющие затрат и потерь при обработке и применении базового образца.

Для создаваемого изделия целевой функционал будет иметь вид

$$C = \sum_{i=1}^m C_i.$$

Составляющие C_i^B и C_i зависят от параметров $x_1^B, x_2^B, \dots, x_k^B$ и x_1, x_2, \dots, x_k изделий и процесса их обработки.

В эти параметры входят и характеристики объемов испытаний n_1, n_2, \dots, n_N , а также экономических величин a_1, a_2, \dots, a_l . В зависимости от постановки конкретной задачи в подмножество величин a_1, a_2, \dots, a_l могут включаться также и технические параметры изделия и процесса обработки, наиболее подверженные колебаниям с течением времени.

Затраты на обработку и потери из-за снижения надежности можно связать с соответствующими затратами и потерями при обработке и применении базового образца с помощью зависимости

$$\begin{aligned} \delta C &= \frac{C - C^B}{C^B} = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{C_i - C_i^B}{C_i^B} \frac{C_i^B}{C^B}. \end{aligned} \quad (16)$$

Запишем (16) в виде:

$$\delta C = \sum_{i=1}^m \delta C_i \bar{C}_i^B, \quad (17)$$

где $\delta C_i = \frac{C_i - C_i^B}{C_i^B}$ — относительное отклонение i -го показателя от базового значения C_i^B ; \bar{C}_i^B — относительная доля вклада i -й составляющей затрат или потерь в обобщенный выходной эффект C^B .

Выбор оптимальных стратегий будет состоять в определении оптимальных значений параметров $x_1^{\text{опт}}, x_2^{\text{опт}}, \dots, x_k^{\text{опт}}$ при известных базовых величинах $x_1^B, x_2^B, \dots, x_k^B$ с целью достижения минимума относительного отклонения δC по отношению к базовому образцу:

$$\min_{x \in X} \delta C = \min_{x \in X} \sum_{i=1}^m \delta C_i \bar{C}_i^B.$$

В рассматриваемом случае необходимо предварительно провести преобразование исходных зависимостей для разделения параметров x_1, x_2, \dots, x_k и величин a_1, a_2, \dots, a_l .

Относительные отклонения $\delta C_i, i = \overline{1, m}$ составляющих экономических затрат с достаточной степенью точности аппроксимируются функциями вида

$$\delta C_i = z_i^B s_i,$$

где $z_i^B = z_i^B(x_1^B, x_2^B, \dots, x_k^B; a_1, a_2, \dots, a_l)$ — функция базовых значений параметров $x_1^B, x_2^B, \dots, x_k^B$ и экономических величин a_1, a_2, \dots, a_l ;

$$s_i = s_i\left(\frac{x_1}{x_1^B}, \frac{x_2}{x_2^B}, \dots, \frac{x_k}{x_k^B}\right) — \text{функ-}$$

ция коэффициентов подобия $\frac{x_1}{x_1^B}$,

$\frac{x_2}{x_2^B}, \frac{x_k}{x_k^B}$, характеризующая соотношение параметров отработанного изделия и базового образца.

Для одномерного случая, когда определяется оптимальное значение одного параметра x_1 и соответственно $z_1^B = z_1^B(x_1^B; a_1, a_2, \dots, a_l)$ и $s_i = s_i\left(\frac{x_1}{x_1^B}\right)$, можно записать

$$\delta C^{(1)} = \sum_{i=1}^m (z_i^B \bar{C}_i^B) s_i. \quad (18)$$

Выбрав в качестве наиболее характерного произведение $z_i^B \bar{C}_i^B$, нормализуем зависимость. Получим

$$G^{(1)} = \frac{\delta C^{(1)}}{z_1^B \bar{C}_1^B} = \sum_{i=1}^m \pi_i s_i,$$

где

$$\pi_1 = 1, \pi_2 = \frac{z_2^B \bar{C}_2^B}{z_1^B \bar{C}_1^B},$$

$$\pi_m = \frac{z_m^B \bar{C}_m^B}{z_1^B \bar{C}_1^B}$$

— критерии подобия, содержащие базовое значение параметра z_1^B и показатели a_1, a_2, \dots, a_l .

Искомое значение оптимального параметра $x_1^{\text{опт}}$ найдем из условия

$$\frac{dG^{(1)}}{dx_1} = \pi_1 \frac{ds_1}{dx_1} + \pi_2 \frac{ds_2}{dx_1} + \dots + \pi_m \frac{ds_m}{dx_1} = 0. \quad (19)$$

Решив уравнение (19), получим

$$x_1^{\text{опт}} = F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m).$$

В случае, когда обобщенный показатель является функцией ряда независимых параметров x_1, x_2, \dots, x_k , оптимизируется совместно система безразмерных целевых функций:

$$\frac{\partial G^{(1)}}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial G^{(2)}}{\partial x_2} = 0, \dots;$$

$$\frac{\partial G^{(k)}}{\partial x_k} = 0.$$

В результате последовательных циклов расчетов оптимальные значения параметров определяются, например, пошагово-градиентным методом. Вначале отыскивается $x_1^{\text{опт}}$ при задании x_2, x_3, \dots, x_k в виде базовых значений $x_2^B, x_3^B, \dots, x_k^B$. Затем находится $x_2^{\text{опт}}$ при $x_1^{\text{опт}}$ и задании $x_3^B, x_4^B, \dots, x_k^B$ и так далее до определения $x_k^{\text{опт}}$ включительно.

Использование предварительных преобразований для последующего выражения зависимости (12) в критериальной форме оправдано в тех случаях, когда не требуется точно аппроксимировать с помощью сложных уравнений зависимости между техническими и экономическими характеристиками изделия и процесса его отработки.

Для сравнения и отбора стратегий, характеризуемых параметрами $x_1^{\text{опт}}, x_2^{\text{опт}}, \dots, x_k^{\text{опт}}$, в процессе управления отработкой может быть введена мера предпочтения в виде абсолютных значений безразмерных критериев подобия $\pi_i, i = \overline{1, k}$. В этом случае величина π -критерия рассматривается как показатель влияния составляющих его параметров на аддитивный функционал

связи выходного эффекта и параметров изделия и процесса отработки.

Чем меньше по абсолютной величине π -критерий, тем с меньшей точностью может вычисляться функция связи $\pi_i = \pi_i(\delta x_i)$.

В стохастической постановке задачи обоснования стратегий отработки, когда π -критерии рассматриваются как случайные величины, можно воспользоваться регрессионной зависимостью выходного эффекта от частных составляющих с выражением факторов в критериальной форме. Анализ факторов, влияющих на целевую функцию, при выборе оптимальных уровней параметров с использованием критериев подобия, устанавливающих меру приближения к базовому образцу, осуществляется с помощью известных методов факторного анализа.

Таким образом, при условии $\pi = \text{idem}$, $i = \overline{1, m}$ найденные оптимальные решения в виде $x_1^{\text{опт}}$, $x_2^{\text{опт}}$,

$x_k^{\text{опт}}$ будут инвариантными при изменении величин a_1, a_2, \dots, a_l , что позволяет использовать π_i , $i = \overline{1, m}$ для контроля хода процесса отработки. В стохастической постановке задачи подобие оценивается с учетом вероятности пребывания π -критерия как случайной величины в установленных пределах.

3. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ПО ЗАПАСАМ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СЛУЧАЙНОЙ НАГРУЗКИ

Для планирования испытаний на случайную нагрузку возникает необходимость установления взаимосвязи показателей надежности через критерии стохастического подобия по запасам работоспособности экспериментального образца и натурального изделия с их физическими, детерминированно определенными параметрами, характеризующими функциональное назначение, конструктивные свойства и действующие факторы в условиях экспериментальной отработки и в реальных условиях применения изделия.

Выражение для расчета показателей надежности при испытаниях на нагрузку может быть получено при рассмотрении двух идентичных случаев, когда характеристика нагрузки y_H остается меньше характеристики работоспособности y_{Π} и когда характеристика работоспособности y_{Π} превышает нагрузку y_H .

На рис. 2 изображены графики плотностей распределения $f_{\Pi}(y)$ и $f_H(y)$ соответственно для характеристики работоспособности y_{Π} и нагрузки y_H . Область пересечения Δf этих распределений соответствует превышению нагрузкой работоспособности и характеризуется определенной вероятностью отказа q .

Вероятность безотказной работы P , исходя из того, что характеристика нагрузки y_H остается меньше характеристики работоспособности y_{Π} , находится следующим образом.

Вероятность того, что характеристика работоспособности y_{Π} находится в малом интервале dy :

$$P \left(y_0 - \frac{dy}{2} \leq y_{\Pi} \leq y_0 + \frac{dy}{2} \right) = f_{\Pi}(y_0) dy.$$

Вероятность того, что нагрузка меньше y_0

$$P(y_H \leq y_0) = \int_{-\infty}^{y_0} f_H(y) dy.$$

Полагаем, что характеристики нагрузки и работоспособности являются независимыми случайными величинами. Вероятность того, что значение характеристики работоспособности находится в малом интервале dy , а значение нагрузки не превышает y_0 ,

$$f_{\Pi}(y_0) dy \int_{-\infty}^{y_0} f_H(y) dy.$$

Тогда вероятность безотказной работы изделия при всех возможных значениях характеристики работоспособности y_{Π} :

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Pi}(y) \left[\int_{-\infty}^{y_{\Pi}} f_H(y) dy \right] dy. \quad (20)$$

Таким же образом, можно получить выражение для вероятности безотказной работы P , исходя из того, что характеристика (работоспособность) y_{Π} превышает нагрузку y_{H} .

Аналогично выражению (20) получается формула

$$P = \int_0^{\infty} f_{\text{H}}(y) \left[\int_{y_{\text{H}}}^{\infty} f_{\Pi}(y) dy \right] dy. \quad (21)$$

Для вероятности отказа из (20) имеем выражение

$$\begin{aligned} q &= 1 - P = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Pi}(y) \times \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{y_{\Pi}} f_{\text{H}}(y) dy \right] dy = \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Pi}(y) [1 - F_{\text{H}}(y)] dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{H}}(y) f_{\Pi}(y) dy. \end{aligned}$$

Из (21) определим вероятность отказа

$$\begin{aligned} q &= 1 - P = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{H}}(y) \times \\ &\times \left[\int_{y_{\text{H}}}^{\infty} f_{\Pi}(y) dy \right] dy = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{H}}(y) \times \\ &\times [1 - F_{\Pi}(y)] dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{\Pi}(y) f_{\text{H}}(y) dy. \end{aligned}$$

Выражения для определения вероятности безотказной работы (20) и (21) можно записать, используя функции распределения $F_{\text{H}}(y)$ и $F_{\Pi}(y)$:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{H}}(y) dF_{\Pi}(y) \quad (22)$$

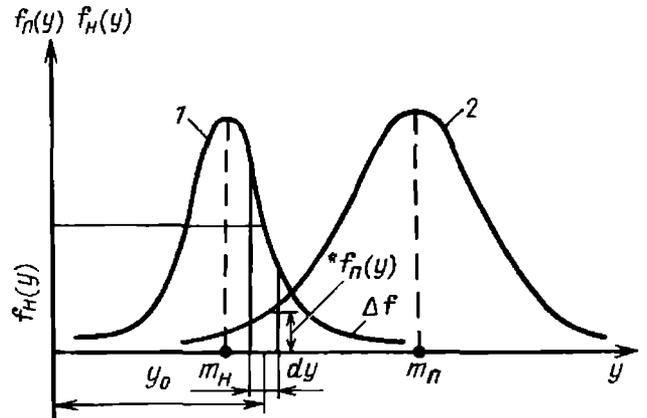


Рис. 2. Графики плотностей распределений характеристик работоспособности $f_{\Pi}(y)$ (1) и нагрузки $f_{\text{H}}(y)$ (2) при построении критериев стохастического подобия по запасам работоспособности

или

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\Pi}(y) dF_{\text{H}}(y). \quad (23)$$

В случае нормального закона распределения характеристик работоспособности $F_{\Pi}(y)$ и нагрузки $F_{\text{H}}(y)$ с математическими ожиданиями m_{Π} , m_{H} и средними квадратическими отклонениями σ_{Π} , σ_{H} вероятность безотказной работы согласно (23)

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{\Pi} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(y - m_{\Pi})^2}{2\sigma_{\Pi}^2} \right] \times \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{y_{\Pi}} \frac{1}{\sigma_{\text{H}} \sqrt{2\pi}} \times \right. \\ &\times \left. \exp \left[-\frac{(y - m_{\text{H}})^2}{2\sigma_{\text{H}}^2} \right] dy \right] dy = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} (\sigma_{\Pi}^2 + \sigma_{\text{H}}^2)} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{(y - (m_{\Pi} - m_{\text{H}}))^2}{2(\sigma_{\Pi}^2 + \sigma_{\text{H}}^2)} \right] dy = \\ &= 1 - \Phi \left(-\frac{m_{\Pi} - m_{\text{H}}}{\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 + \sigma_{\text{H}}^2}} \right) = \\ &= 1 - \Phi(u), \end{aligned}$$

1. Критерии стохастического подобия по запасам работоспособности

Закон распределения	Критерий подобия
Нормальный $F(y) = \Phi\left(\frac{y - m_y}{\sigma_y}\right)$, где Φ — табулированная функция Лапласа	$\frac{D - m_y}{\sigma_y} = \text{idem}$
Показательный $F(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{m_y}\right)$	$\frac{D}{m_y} = \text{idem}$
Вейбулла $F(y) = 1 - \exp(-\lambda y^\delta)$	$\lambda D^\delta = \text{idem}$

где

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx -$$

табулированная функция Лапласа.

В случае нормального распределения характеристик работоспособности и нагрузки критерий стохастического подобия имеет вид

$$\pi_\delta = \frac{m_\Pi - m_H}{\sqrt{\sigma_\Pi^2 + \sigma_H^2}} = \text{idem.} \quad (24)$$

Как видно из выражения (24), критерий π_δ определяет подобие по запасу работоспособности, характеризуемой параметрами m_Π , σ_Π , при действующей нагрузке с параметрами m_H , σ_H .

В случае закона распределения Вейбулла характеристик работоспособности $F_\Pi(y)$ и нагрузки $F_H(y)$ с параметрами m_Π , k и m_H , k , соответственно,

преобразованное выражение (20) будет иметь вид

$$P = \int_0^\infty \frac{k}{m_\Pi} \left(\frac{y}{m_\Pi}\right)^{k-1} \exp\left[-\frac{y}{m_\Pi}\right]^k \times \\ \times \int_0^y \frac{k}{m_H} \left(\frac{u}{m_H}\right)^{k-1} \exp\left[-\frac{u}{m_H}\right]^k \times \\ \times du dy = \frac{(m_\Pi/m_H)^k}{(m_\Pi/m_H)^k + 1}.$$

Отсюда критерий стохастического подобия запишется в виде

$$\pi_\delta = \left(\frac{m_\Pi}{m_H}\right)^k = \text{idem.} \quad (25)$$

Частными случаями полученного выражения (25) являются показательный закон распределения ($k=1$) и закон распределения Рэлея ($k=2$) характеристик работоспособности $F_\Pi(y)$ и нагрузки $F_H(y)$.

В табл. 1 приведены выражения для критериев стохастического подобия для некоторых законов распределения характеристик работоспособности и нагрузки.

Анализируя полученные критерии стохастического подобия, можно отметить, что при одном и том же значении параметра k в выражении (25) существует стохастическое подобие:

$$\frac{m_\Pi}{m_H} = \text{idem.} \quad (26)$$

Отношение

$$\frac{m_\Pi}{m_H} = k_\delta \quad (27)$$

есть среднее значение коэффициента безопасности, используемого для исследования прочности конструкций.

В детерминированной постановке испытаний на прочность коэффициент безопасности определяется как отношение

$$k_\delta = \frac{y_{\max}}{y_{\text{ном}}}, \quad (28)$$

где y_{\max} — значение характеристики y , при котором нарушается работоспособность изделия; $y_{\text{ном}}$ — номинальное значение характеристики y .

Значение коэффициента безопасности используется при назначении норм прочности.

Для нормального распределения критерий стохастического подобия по запасам работоспособности будет иной, и условия (26) недостаточно для обеспечения подобия модели и натуры.

В практике обеспечения надежности изделий встречаются случаи, когда характеристики работоспособности y_{Π} и нагрузки $y_{\text{Н}}$ имеют отличающиеся друг от друга законы распределения. Метод построения критериев стохастического подобия остается неизменным и в этих случаях. При различных распределениях характеристик работоспособности и нагрузки затруднено получение аналитических выражений для критериев стохастического подобия и целесообразно применение численных методов расчета.

4. ПЛАНИРОВАНИЕ ИСПЫТАНИЙ НА НАГРУЗКУ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Критерий стохастического подобия по запасам работоспособности является безразмерной величиной, однозначно определяющей связь запаса работоспособности по параметрам и действующим случайным факторам с вероятностью безотказной работы.

Взаимосвязь критерия стохастического подобия по запасам работоспособности с физическими параметрами, характеризующими функциональное назначение, конструкционные особенности изделия и действующие на него факторы, определяется следующим образом. Запас работоспособности при детерминированно измеряемых характеристиках работоспособности и нагрузки

$$\Delta = y_{\text{тах}} - y_{\text{ном}}. \quad (29)$$

Величины $y_{\text{тах}}$ и $y_{\text{ном}}$ соответствуют математическому ожиданию m_{Π} характеристики работоспособности y_{Π} и математическому ожиданию $m_{\text{Н}}$ характеристики нагрузки $y_{\text{Н}}$ в статистических моделях исследования надежности.

Зависимости критериев стохастического подобия с учетом (24) и (25) и детерминированно определенного запаса работоспособности имеют вид: для нормального распределения

$$\Delta = \pi_{\delta} \sqrt{\sigma_{\Pi}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2}; \quad (30)$$

для распределения Вейбулла (распределения Рэлея при $k=2$, показательного распределения при $k=1$)

$$\Delta = m_{\text{Н}} \left(\sqrt[k]{\pi_{\delta}} - 1 \right). \quad (31)$$

Используя соотношения (30) и (31), можно установить связь между вероятностью безотказной работы P изделия и физическими параметрами изделия.

Так, для случая распределения Вейбулла

$$P = \frac{(\pi_{\delta})^k}{(\pi_{\delta})^k + 1}.$$

Отсюда

$$\pi_{\delta} = \sqrt[k]{\frac{P}{1-P}}. \quad (32)$$

Исходя из требуемого значения надежности $P_{\text{тр}}$, можно определить необходимое значение стохастического запаса работоспособности $\pi_{\delta \text{ тр}}$ и от него перейти к конкретным физическим параметрам, характеризующим детерминированно определенный запас работоспособности Δ .

Так, при $k=1$ из (32) для показательного распределения

$$\frac{m_{\Pi}}{m_{\text{Н}}} = \frac{P_{\text{тр}}}{1-P_{\text{тр}}}$$

или, что то же самое,

$$\frac{y_{\text{тах}}}{y_{\text{ном}}} = \frac{P_{\text{тр}}}{1-P_{\text{тр}}}.$$

Таким образом, зная требуемый уровень надежности, можно осуществить планирование испытаний в виде выбора запаса работоспособности по параметрам или действующим факторам, измеряемого в физических величинах.

Критерий стохастического подобия $\pi_{\delta} = \text{idem}$ можно использовать при планировании испытаний для установления условий подобия вначале по стохастическим запасам работоспособности, а затем по запасам, выра-

женным в детерминированном виде для испытуемого изделия и натурального образца.

Для исследования влияния на надежность изделия различных факторов схемного и конструктивного характера, внешних возмущений и режимов работы проводят планирование испытаний с использованием зависимостей, устанавливающих связь детерминированно определенного запаса работоспособности Δ и параметров $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$, характеризующих действующие факторы.

При исследовании конкретного физического явления (механического, теплового и т. п.) можно использовать исходную аналитическую зависимость

$$\Delta = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

С помощью известных методов теории подобия эта зависимость преобразуется в критериальный вид. В случае отсутствия исходной аналитической зависимости можно применить анализ размерностей для получения критериального выражения, описывающего зависимость запаса Δ от учитываемых факторов.

Отыскав физические критерии подобия $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n\pi}$, можно обосновать требования к параметрам и режимам работы изделия, величинам воспроизводимых при испытаниях факторов, а также к запасам работоспособности по параметрам и действующим факторам, обеспечивающим заданный уровень надежности.

Рассмотрим случай, когда целевое назначение, конструктивные особенности изделия и действующие нагрузки определяются несколькими характеристиками y_1, y_2, \dots, y_m .

Для каждой i -й характеристики соответствующие законы распределения работоспособности и действующей нагрузки имеют вид $F_{\Pi i}(y_i)$ и $F_{Ni}(y_i)$, $i = \overline{1, m}$ соответственно.

Вероятность безотказной работы P изделия по i -й характеристике y_i , $i = \overline{1, m}$ оценивается согласно выражениям (22) или (23).

Величины y_i , $i = \overline{1, m}$ являются стохастически независимыми. Вероят-

ность безотказной работы P изделия при сохранении его работоспособности по каждой i -й характеристике

$$P = \prod_{i=1}^m P_i. \quad (33)$$

Вероятность P_i , $i = \overline{1, m}$ может быть представлена для соответствующих законов распределения характеристик работоспособности и нагрузки как функция стохастического критерия подобия по запасам работоспособности π_{δ_i} . Вероятность безотказной работы P будет функцией m переменных, являющихся стохастическими критериями подобия по запасам работоспособности.

Условие стохастического подобия имеет вид

$$P(\pi_{\delta_1}, \pi_{\delta_2}, \dots, \pi_{\delta_m}) = \text{idem.}$$

Метод подобия можно использовать для обоснования требований к испытаниям в виде детерминированно определенных запасов работоспособности, обеспечивающих заданный уровень надежности.

Пусть в результате анализа подобия ранее созданных изделий базовый вариант с известными стохастически определенными запасами работоспособности $\pi_{\delta_i}^B$, $i = \overline{1, m}$. Стохастическое подобие изделий будет иметь место при выполнении условия

$$P(\pi_{\delta_1}, \pi_{\delta_2}, \dots, \pi_{\delta_m}) = P(\pi_{\delta_1}^B, \pi_{\delta_2}^B, \dots, \pi_{\delta_m}^B). \quad (34)$$

Так как на практике целесообразно рассматривать приближенное подобие, примем в качестве меры неподобия величину разности $|\pi_{\delta_i} - \pi_{\delta_i}^B|$ критериев подобия ($i = \overline{1, m}$), характеризующих стохастически определенные запасы работоспособности сравниваемых изделий.

При небольших значениях $|\pi_{\delta_i} - \pi_{\delta_i}^B|$ для (34) можно записать приближенное аналитическое выражение.

Обозначим $P_i = P_i(\pi_{\delta_i})$ и $\frac{dP_i}{d\pi_i} = g_i(\pi_{\delta_i})$.

С учетом (33) запишем

$$\prod_{i=1}^m [P_i(\pi_{\delta_i}^B) + g_i(\pi_{\delta_i}^B)(\pi_{\delta_i} - \pi_{\delta_i}^B)] = \prod_{i=1}^m P_i(\pi_{\delta_i}^B).$$

Раскрывая произведение, получим

$$\sum_{j=1}^m \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \frac{P_i(\pi_{\delta_i}^B)}{g_i(\pi_{\delta_i}^B)} (\pi_{\delta_i} - \pi_{\delta_i}^B) + \sum_{k=1}^m \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, k}}^m \frac{P_i(\pi_{\delta_i}^B)}{g_i(\pi_{\delta_i}^B)} (\pi_{\delta_j} - \pi_{\delta_j}^B) \times (\pi_{\delta_s} - \pi_{\delta_s}^B) + \dots \right] + (\pi_{\delta_1} - \pi_{\delta_1}^B) (\pi_{\delta_2} - \pi_{\delta_2}^B) \dots (\pi_{\delta_s} - \pi_{\delta_s}^B) \right] = 0. \quad (35)$$

Используя уравнения связи стохастически и детерминированно определенных запасов работоспособности, от разностей $(\pi_{\delta_i} - \pi_{\delta_i}^B)$ можно перейти к $(\Delta_i - \Delta_i^B)$.

Если изделие определяется двумя характеристиками ($m = 2$), выражение (35) имеет вид:

$$\pi_{\delta_1} - \pi_{\delta_1}^B = \frac{\frac{P_1(\pi_{\delta_1}^B)}{g_1(\pi_{\delta_1}^B)} (\pi_{\delta_2} - \pi_{\delta_2}^B)}{(\pi_{\delta_2} - \pi_{\delta_2}^B) + \frac{P_2(\pi_{\delta_2}^B)}{g_2(\pi_{\delta_2}^B)}}.$$

При нормальном распределении характеристик изделий переход к детерминированно определенным запасам

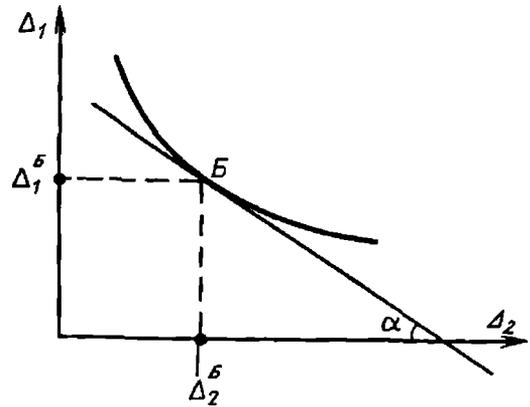


Рис. 3. Вид зависимости при выборе детерминированных запасов работоспособности относительно базовой точки B

работоспособности осуществляется с помощью выражения

$$\Delta_1 - \Delta_1^B = - \frac{A (\Delta_2 - \Delta_2^B)}{(\Delta_2 - \Delta_2^B) + B}, \quad (36)$$

где

$$A = \frac{P_1(\pi_{\delta_1}^B)}{g_1(\pi_{\delta_1}^B)} \sqrt{\sigma_{п1}^2 + \sigma_{н1}^2};$$

$$B = \frac{P_2(\pi_{\delta_2}^B)}{g_2(\pi_{\delta_2}^B)} \sqrt{\sigma_{п2}^2 + \sigma_{н2}^2}.$$

Вид зависимости Δ_1 от Δ_2 в (36) представлен на рис. 3.

Зависимость (35) может быть использована в окрестностях некоторой базовой точки, в частном случае зависимость $\Delta_1(\Delta_2)$ в окрестностях точки (Δ_1^B, Δ_2^B) .

Задание требований к запасам работоспособности по параметрам изделий и действующим нагрузкам с учетом использования накопленного опыта по созданию изделий позволяет обоснованно сократить объемы экспериментальных работ.

5. ПЛАНИРОВАНИЕ МНОГОФАКТОРНЫХ ИСПЫТАНИЙ В КРИТЕРИАЛЬНОЙ ФОРМЕ ПОДОБИЯ

Методы теории планирования эксперимента при исследовании сложных многофакторных явлений позволяют:

уменьшить число испытаний при обеспечении заданной точности эксперимента; установить взаимосвязь между факторами; исследовать влияние отдельных факторов на изменение определяющей характеристики (отклика) и отсеять второстепенные факторы; получить функциональную математическую зависимость между факторами, используемую для прогнозирования развития исследуемого процесса и оптимального планирования эксперимента.

Методы теории подобия для планирования и анализа многофакторных испытаний позволяют полнее использовать преимущества теории планирования эксперимента.

Цели применения методов подобия в многофакторных испытаниях следующие:

уменьшить число исследуемых факторов в планах испытаний путем построения обобщенных критериальных моделей;

получить зависимости для пересчета и анализа результатов испытаний, полученных в различных точках факторного пространства;

построить меру приближенного подобия многофакторных моделей и планов эксперимента.

Пусть по результатам испытаний N образцов изделий предыдущих разработок, аналогичных по конструктивным и функциональным свойствам, близких по условиям испытаний, получена зависимость

$$\hat{y}^A(x^A) = \eta(\hat{\beta}, x^A). \quad (37)$$

Используя построенную зависимость (37) с полученными оценками параметров $\hat{\beta} = \{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n\}$, можно решать задачу планирования испытаний создаваемого изделия, исходя из критерия

$$\min_{x_l \in \Omega_x} D[\hat{y}(x)]; \quad l = \overline{1, N}. \quad (38)$$

Результатом оптимального планирования в данном случае будет совокупность параметров $x_l \in \Omega_x$, $l = \overline{1, N}$ испытуемых объектов в условиях обработки. Определенная, исходя из критерия (38), совокупность параметров, определяющих конструктивные, тех-

нологические, временные факторы и действующие возмущения, должна обеспечить качество обработки, характеризуемое минимумом дисперсии определяющей характеристики.

Рассмотрим случай установления меры и сравнения подобия плана X многофакторных испытаний при лабораторных испытаниях и плана X^H при натуральных испытаниях.

Пусть при испытаниях может быть построена модель

$$y = \eta(\hat{\beta}, x).$$

Зависимость определяющей характеристики y^H от действующих факторов X при натуральных испытаниях имеет вид

$$y^H(x^H) = \eta(\beta, x^H).$$

Мера подобия планов и результатов испытаний в лабораторных и натуральных условиях

$$\Delta(x) = \eta^H(\hat{\beta}^H, x) - \eta(\hat{\beta}, x)$$

при $x \in \Omega_x$.

Поиск точек эксперимента X осуществляется путем анализа функции $\Delta(x)$, исходя из критерия

$$\sup_{x \in \Omega} \Delta(x).$$

Для анализа функции $\Delta(x)$ можно построить зависимость $\Delta(x) \approx \approx \Delta(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — некоторые параметры, получаемые по результатам испытаний.

6. ПОСТРОЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ ИСПЫТАНИЙ

Испытания изделий обычно проводят на ограниченном числе образцов при различном сочетании действующих факторов. В случае ограниченных объемов испытаний и большом числе исследуемых факторов можно использовать метод оценки критериев стохастического подобия на основе рекуррентной процедуры с оценкой точности построения критериев.

Вероятностные характеристики случайных явлений и процессов, исследуемых в экспериментальной отработке изделий, показатели надежности, количество дефектов и отказов, объемы испытаний не имеют размерностей, что исключает в таких случаях возможность использования анализа размерностей для получения π -критериев.

При оценке критерия стохастического подобия желательным является получение достаточно стабильного π -критерия, который целесообразно использовать как инвариант подобия для обоснования принимаемых решений с использованием устойчивых результатов.

Одним из эффективных методов, который позволяет учесть отмеченные особенности оценки критериев стохастического подобия, является метод группового учета аргументов (МГУА).

МГУА позволяет, например, в отличие от регрессионного анализа с помощью метода наименьших квадратов находить оценки π -критериев в случаях, когда число факторов превышает число экспериментальных точек, например, число аналогов изделия.

МГУА можно использовать одновременно для построения π -критериев путем подбора состава параметров в критериальном комплексе, вид которого устанавливает π -теорема, а также оценки величины π -критерия по результатам измерений величин, характеризующих исследуемое явление.

При этом наряду с построением и оценкой π -критериев осуществляется отбор инвариантов подобия по критерию их стабильности на предыдущих анализируемых результатах испытаний.

МГУА основан на принципе самоорганизации, когда осуществляется поиск глобального минимума установленных критериев, обладающих свойствами «внешнего дополнения» согласно теореме Геделя. В результате путем постепенного усложнения модели отыскивается единственная модель оптимальной сложности.

При описании явления путем обработки информации полная модель $y = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ заменяется набором более простых урав-

нений — частных описаний. С увеличением номера этапа построения оптимальной модели увеличивается сложность частных описаний, учитывающих входные переменные.

Сопоставим частные описания совокупности критериальных комплексов, описывающих сложное многофакторное явление.

На первом этапе используются C_n^2 уравнений, каждое из которых является функцией двух входных переменных:

$$y_{i,j} = \varphi(x_i, x_j), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n}; \\ i \neq j.$$

Величины C_n^2 определяются числом сочетаний из n по 2.

Точность каждого частного описания оценивается величиной выбранного критерия отбора.

На следующий этап пропускается только m частных описаний, удовлетворяющих критерию отбора. Второй и следующий этапы отличаются от первого тем, что в качестве аргументов используются частные описания предыдущего этапа.

В результате обеспечивается последовательное приближение сложности промежуточных частных описаний к сложности исследуемого явления по сформулированному критерию адекватности.

В соответствии с π -теоремой критерии подобия представляют собой безразмерные комплексы, в знаменателях которых стоят произведения k независимых переменных в соответствующих степенях, являющихся коэффициентами размерности, а в числителе — зависимая переменная в первой степени:

$$\pi_1 = \frac{x_{k+1}}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k}};$$

$$\pi_2 = \frac{x_{k+2}}{x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_k^{\beta_k}};$$

$$\pi_{n-k} = \frac{x_n}{x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_k^{\mu_k}},$$

где k — число независимых переменных (факторов); n — общее число переменных.

В процессе построения и оценки π -критериев с помощью МГУА решается задача выбора наиболее характерных факторов, подбора состава факторов в критериальных комплексах, отбора π -критериев, обеспечивающих приближенное подобие сравниваемых явлений.

С учетом того, что из частных моделей исключаются зависимые и слабо влияющие величины, процедуру построения π -критериев целесообразно организовывать, установив вначале максимально возможное число критериев (в дальнейшем число π -критериев будет сокращаться при объединении переменных в критериальные комплексы). Минимальное число π -критериев определяется π -теоремой.

Вначале возможное число критериев подобия расширяется до n . В каждый критерий входит $n - 1$ независимых переменных. После логарифмирования и несложных преобразований исходную систему зависимостей, определяющих вид критериальных комплексов, можно записать в виде

$$\ln x_{k+1} = \ln \pi_1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1}}^n \alpha_i \ln x_i;$$

$$\ln x_{k+2} = \ln \pi_2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+2}}^n \beta_i \ln x_i;$$

$$\ln x_n = \ln \pi_{n-k} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \ln x_i;$$

$$\ln x_j = \ln \pi_{j-c} + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \ln x_i.$$

Данная система уравнения включает n критериальных комплексов, каждый из которых состоит из $n - 1$ переменных. Логарифмы π -критериев в данных уравнениях являются свободными числами.

В качестве критерия отбора π -комплексов (внешнего дополнения) выбирается условие минимума дисперсии

S_{π_v} критерия, которая находится из выражения:

$$S_{\pi_v} = \frac{\sum_{j=1}^N (\pi_{vj} - \hat{m}_{\pi_v})^2}{N - 1},$$

где π_{vj} — j -е значение v -го критерия, полученное в результате подстановки значений параметров в j -й реализации процесса построения критериев; \hat{m}_{π_v} — оценка математического ожидания v -го критерия, полученная на проверочной последовательности; N — число реализаций процесса, включенных в проверочную последовательность.

Первый ряд селекции включает уравнения вида:

$$\begin{aligned} y_1 &= a'_0 + a'_1 z_1 + a'_2 z_2; \\ y_2 &= a''_0 + a_1 z_2 + a_2 z_3; \end{aligned} \quad (39)$$

$$y_m = a_0 + a_1 z_{m-1} + a_2 z_m,$$

где $y_{k+1} = \ln x_{k+1}$, $k + 1 = \overline{1, m}$; $z_i = \ln x_i$, $i = \overline{1, n}$; m — число сочетаний C_n^2 из n по 2.

Из выражения (39) выбираются n функций, имеющих минимальные значения дисперсий π -критериев. Из этих функций составляется второй ряд селекции:

$$P_1 = b'_0 + b'_1 y_1 + b'_2 y_2;$$

$$P_2 = b''_0 + b''_1 y_1 + b''_2 y_3;$$

$$P_3 = b_0 + b_1 y_{m-1} + b_2 y_m.$$

Процесс усложнения выражений для π -критериев путем включения в них новых факторов продолжается до тех пор, пока дисперсия S_{π_v} , $v = \overline{1, n}$ критериев падает. Полученное в результате этих операций уравнение, описывающее явление, будет иметь оптимальную сложность.

Полученные выражения будут иметь вид π -критериев, состоящих из совокупности независимых и значимых переменных, что удовлетворяет π -тео-

реме. При построении π -критериев необходимо, как ограничение для поиска оптимальной сложности выражений критериальных комплексов по минимуму дисперсии, учитывать, что вторая теорема подобия устанавливает минимальное число критериев. Таким образом, условие построения π -критериев следует записать в виде

$$\min_X S_{\pi_v} \text{ при } n_{\pi} \leq n^*,$$

где X — вектор переменных, характеризующих явление, описываемое совокупностью критериальных комплексов; $n^* = n - k$ — минимальное число π -комплексов, установленное согласно π -теореме.

В результате могут быть получены n_{π} критериев подобия, каждый из которых состоит из одного вторичного (зависимого) и нескольких первичных (независимых) факторов в степенях, обеспечивающих постоянство критерия на имеющемся множестве реализаций подобных явлений.

Пример 1. Процесс экспериментальной отработки сравниваемых изделий описывается уравнением роста вероятности выявления и устранения источников отказов:

$$P(t) = P_{\infty} (1 - q)^N (1 - q)^t \quad (40)$$

где P_{∞} — предельно достигаемый уровень отработанности изделия в данных условиях; q — вероятность возникновения отказа вследствие проявления

одной из потенциальных причин; t — длительность отработки.

После анализа и преобразования данного уравнения получим следующую систему критериев подобия процессов отработки:

$$\pi_1(t) = \frac{P(t)}{P_{\infty}};$$

$$\pi_2(t) = \frac{P(0)}{P_{\infty}};$$

$$\pi_3(t) = \frac{t}{N}.$$

Результаты расчетов параметров десяти подобных процессов отработки вида (40) при значениях критериев подобия $\pi_2 = 0,5$, $\pi_3(t_1) = 2$, $\pi_3(t_2) = 5$ сведены в табл. 2.

Используя данные табл. 2 в качестве исходных в программе, реализующей изложенную процедуру получения критериев подобия, получим следующие π -комплексы:

$$\pi_1(t_1) = \frac{P(t_1)}{P_{\infty}^{0,9981}} = 0,8406;$$

$$\pi_1(t_2) = \frac{P(t_2)}{P_{\infty}^{1,0001}} = 0,9786;$$

$$\pi_2 = \frac{P_0}{P_{\infty}^{0,9988}} = 0,5004;$$

$$\pi_3(t_1) = \frac{t_1}{N} = 1,9999;$$

$$\pi_3(t_2) = \frac{t_2}{N} = 4,9993.$$

2. Результаты экспериментальных исследований подобных изделий

№ исследуемого процесса	Параметры								
	P_{∞}	N	q	t_0	t_1	t_2	P_0	P_1	P_2
1	0,80	28	0,0244	0	56	140	0,40	0,373	0,783
2	0,82	26	0,0263	0	52	130	0,41	0,689	0,802
3	0,84	24	0,0285	0	48	120	0,42	0,706	0,822
4	0,86	22	0,0310	0	44	110	0,43	0,723	0,842
5	0,88	20	0,0341	0	40	100	0,44	0,740	0,861
6	0,90	18	0,0378	0	36	90	0,45	0,757	0,881
7	0,92	16	0,0424	0	32	80	0,46	0,773	0,900
8	0,94	14	0,0483	0	28	70	0,47	0,790	0,920
9	0,96	12	0,0561	0	24	60	0,48	0,807	0,939
10	0,98	10	0,0670	0	20	50	0,49	0,824	0,959

Анализ полученных результатов показывает, что в систему критериев подобия, рассчитанных по экспериментальным данным небольшого множества подобных процессов, вошли критерии, структурно полностью совпадающие с теоретическими, выведенными на основе анализа уравнения процесса, а также, что значения критериев подобия и степеней при независимых переменных близки к теоретическим (ошибка менее 1%).

Данный метод может быть использован для построения и оценки критериев стохастического подобия сложных процессов, изучаемых при экспериментальной обработке и испытаниях изделий.

Полученные критерии целесообразно применять при выборе аналога создаваемого изделия, планировании испытаний и оценке завершенности экспериментальной обработки на основе сравнения изделий и процессов их испытаний по критериям подобия.

7. ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ ПРИ РЕСУРСНЫХ ИСПЫТАНИЯХ

При планировании испытаний на ресурс (долговечность) используют модели, описывающие закономерности процессов отказов изделий, которые характеризуются постепенными изменениями параметров вследствие изнашивания, разрегулирования и старения.

Использование методов теории подобия для физического моделирования при испытаниях на ресурс заключается в установлении типовых признаков отказов, исследовании закономерностей их возникновения.

Стохастический подход к моделированию процессов отказов учитывает многообразие случайных факторов, действующих на изделие в эксплуатации.

Для построения критериев подобия параметрических отказов целесообразно учитывать динамику процессов изменения во времени характеристик работоспособности и действующих факторов.

Критерии подобия детерминированных процессов отказов. Наиболее про-

стым для построения критериев подобия является случай линейных детерминированных зависимостей, описывающих процесс изменения определяющего параметра $y(t)$.

Пусть процесс описывается линейной детерминированной зависимостью

$$y = y_0 + Bt, \quad (41)$$

где y_0 — начальное значение определяющего параметра $y(t)$.

Скорость B процесса изнашивания, если нагрузка детерминированная, можно представить в виде

$$B = b_0 + ux,$$

где u — чувствительность скорости к нагрузке x , характеризующая величину изменения B на единицу изменения x ; b_0 — начальное значение скорости изменения определяющего параметра при отсутствии нагрузки.

Тогда критерий подобия для рассматриваемого класса линейных исходных зависимостей имеет вид

$$\pi_1(t) = \left(1 + \frac{ux}{b_0}\right) \frac{b_0}{y_0} t.$$

В соответствии с третьей теоремой подобия условия однозначности линейного процесса изнашивания имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad \pi_1(0) = 0;$$

$$\text{при } t = T$$

$$\pi_1(T) = \pi_{\max} = \frac{y_{\max}}{y_0} - 1. \quad (42)$$

Критерии подобия параметрических отказов могут использоваться для планирования отработочных испытаний на ресурс следующим образом. Пусть требуется подтвердить требуемый ресурс T изделия за время испытаний T_{Φ} . Параметры, характеризующие процесс параметрического отказа, равны y_0, y_{\max}, b_0 .

Индикатор подобия испытаний изделия в реальных условиях и в форсированном режиме

$$\left(1 + \frac{ux}{b_0}\right) \frac{b_0}{y_0} T = \left(1 + \frac{ux_{\Phi}}{b_0}\right) \frac{b_0}{y_0} T_{\Phi}. \quad (43)$$

Обозначим через $C_T = T/T_\phi$ коэффициент форсирования испытаний по времени и через C_x коэффициент форсирования испытаний по нагрузке. С учетом (42) и (43) получим

$$C_x = \frac{\pi_{\max} - \frac{b_0 T}{y_0}}{C_T \left(\pi_{\max} - \frac{b_0 T}{C_T y_0} \right)} \text{ и } x_\phi = \frac{x}{C_x}.$$

В случае, когда испытаниям на ресурс подвергается конструктивно-подобная модель и коэффициенты подобия равны:

$$\frac{b_0}{b_0^M} = C_{b_0}; \quad \frac{u}{u^M} = C_u; \quad \frac{y_0}{y_0^M} = C_{y_0};$$

$$\frac{x}{x^M} = C_x; \quad \frac{T}{T^M} = C_T,$$

индикатор подобия имеет вид

$$\frac{\pi_{\max} - \frac{b_0 T}{y_0}}{C_{y_0} \frac{b_0 T}{y_0}} \frac{C_{y_0} C_u}{C_T C_x} = 1.$$

При выбранных C_{b_0} , C_u , C_{y_0} , C_T из условия подобия определяется необходимый коэффициент форсирования нагрузки C_x и из него нагрузка x .

В приведенных случаях расчета масштабного фактора форсирования нагрузки необходимо устанавливать предельную нагрузку x^M , при которой сохраняется подобие физических явлений при функционировании изделий в нормальном и форсированном режимах.

Метод построения и применения критериев подобия на основе преобразования исходных зависимостей, описывающих исследуемые явления параметрических отказов, идентичен и для других случаев детерминированных процессов отказов. Для нелинейных процессов критерии подобия определяются на основании первой и второй теорем подобия с использованием правила установления подобия процессов, содержащих неоднородные функции.

Критерии подобия для наиболее аспространенных нелинейных детер-

минированных процессов постепенных отказов приведены в табл. 3.

Задача построения и применения критериев подобия параметрических отказов разбивается на следующие этапы: выбор наиболее информативных параметров, характеризующих процесс отказов; формирование требований к объектам и условиям испытаний при планировании и применении критериальных комплексов для оценки завершенности обработки.

Критерии подобия линейных полуслучайных процессов отказов. В ряде случаев процессы отказов могут быть представлены в виде линейной полуслучайной функции изменения определяющего параметра

$$y = y_0 + Vt, \tag{44}$$

где y_0 — начальное значение определяющего параметра y ; V — скорость изменения определяющего параметра, являющаяся случайной величиной.

Скорость V обычно является функцией параметров изделия и действующей на него в процессе испытания (эксплуатации) нагрузки.

Для практики важен случай, когда справедлива зависимость

$$V = b_0 + ux, \tag{45}$$

где b_0 — начальная скорость изменения определяющего параметра; u — чувствительность скорости V к нагрузке; x — величина нагрузки.

Считаем, что для испытываемого изделия b_0 и u — неслучайные величины, являющиеся параметрами данного изделия, а нагрузка x — случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с параметрами m_x и σ_x . Скорость V будет также иметь нормальное распределение. С учетом (45) параметры распределения величины V будут иметь вид:

$$m_b = b_0 + um_x;$$

$$\sigma_b = u\sigma_x.$$

В момент отказов, когда определяющий параметр y достигает предельного значения y_{\max} , выражение (44) принимает вид:

$$y_{\max} = y_0 + VT,$$

где T — наработка изделия до отказа.

Плотность распределения наработки

$T = \frac{y_{\max} - y_0}{B}$, являющейся функ-

цией случайной величины B , опреде-

ляется по известной плотности $f(B)$:

$$f(t) = f[\psi(t) | \psi'(t) |], \quad (46)$$

где $\psi(t) = (y_{\max} - y_0)/t = \Delta y/t = B$;

$\psi'(t) = -\Delta y/t^2$.

В результате подстановки в (46)

выражений для $\psi(t)$ и $\psi'(t)$ полу-

чается плотность распределения $f(t)$,

называемая α -распределением:

$$f(t) = \frac{m_t c}{\delta \sqrt{2\pi}} \frac{1}{t^2} \exp \left[-\frac{(m_t - t)^2}{2\delta^2 t^2} \right],$$

где $m_t = \frac{\Delta y}{m_b}$ — средняя наработка

до отказа; $\delta = \frac{\sigma_b}{m_b}$ — коэффициент

вариации; c — нормирующий множи-

тель.

При построении критериев подобия,

используемых с целью задания тре-

бований к испытаниям, отыскивается

взаимосвязь физических, детермини-

рованно-определенных параметров

объекта испытаний с показателем на-

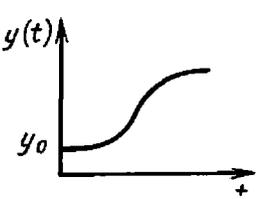
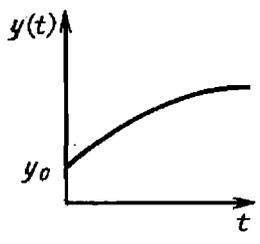
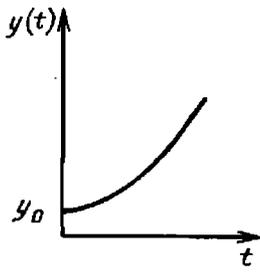
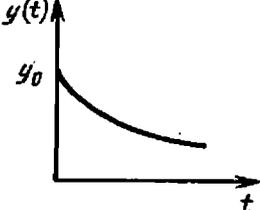
дежности, задаваемым в виде вероят-

ности безотказной работы.

Введем безразмерную величину $T_1 =$

$= T/m_t$.

3. Критерии подобия нелинейных процессов изнашивания

График изменения	Уравнения процесса изнашивания	Критерии подобия	Примеры процессов
	$y(t) = y_0 + \int_0^t a t e^{-bt} dt$	$\pi_1 = bt;$ $\pi_2 = \frac{at^2}{y_0}$	Коррозия, коробление
	$y(t) = y_0 + bt^n$ $n > 1$	$\pi_1 = \frac{bt^n}{y_0}$	Изнашивание при засорении поверхностей
	$y(t) = y_0 + A(e^{bt} - 1)$	$\pi_1 = \frac{A}{y_0};$ $\pi_2 = bt$	
	$y(t) = y_0 + bt^n$ $n < 1$	$\pi_1 = \frac{bt^n}{y_0}$	Изнашивание в период приработки
	$y(t) = y_0 + A(1 - e^{-bt})$	$\pi_1 = \frac{A}{y_0};$ $\pi_2 = bt$	
	$y(t) = y_0 e^{-bt}$	$\pi_1 = bt$	Изнашивание

Плотность распределения случайной величины T_1 имеет вид

$$f(\tau) = \frac{c}{\delta \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\tau^2} \exp \left[-\frac{(1-\tau)^2}{2\delta^2\tau^2} \right].$$

Функции плотности распределения $f(t)$ и $f(\tau)$ связаны соотношением $f(\tau) = m_f f(t)$.

Вероятность отказа изделия определяется по формуле

$$q(t) = F(t) = \int_0^t f(t) dt = \int_0^\tau f(\tau) d\tau = F(\tau).$$

Обозначим $z = \frac{1-\tau}{\delta\tau}$.

Тогда вероятность безотказной работы изделия

$$P(t) = 1 - F(\tau) = 1 - \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau = F_0(z), \quad (47)$$

где $F_0(z)$ — интегральная функция Лапласа.

Исходя из принципа установления стохастического подобия на основе равнонадежности сравниваемых объектов (в данном случае по параметрическим отказам), с учетом (47) критерий подобия будет иметь вид

$$\pi = \frac{1-\tau}{\delta\tau} = \frac{\Delta y - T(b_0 + um_x)}{u\sigma_x T} = \text{ibem.} \quad (48)$$

В выражении для критериального комплекса (48) взаимосвязаны физические параметры изделия и вероятностные характеристики нагрузки.

Если требования к надежности изделия заданы в виде требуемой вероятности безотказной работы $P_{тр}$, условие подобия для сравниваемых изделий имеет вид

$$P(t) = P_{тр}.$$

Зависимость, устанавливающая взаимосвязь надежности, параметров испытываемого объекта и действующей нагрузки, записывается в виде

$$\frac{\Delta y - T(b_0 + um_x)}{u\sigma_x T} = z_{p_{тр}}, \quad (49)$$

где $z_{p_{тр}}$ — квантиль нормального распределения уровня $p_{тр}$.

Используя выражение (49), имеется возможность формировать требования к испытаниям при планировании отработки и проводить оценку завершенности испытаний.

Критерии подобия нелинейных случайных процессов отказов. Если случайная нагрузка не может считаться постоянной в течение времени функционирования изделия, линейная полуслучайная модель процессов отказов становится неадекватной. В этом случае нагрузка должна рассматриваться как случайная функция времени.

Процесс изнашивания при рассмотрении нагрузки как случайной функции времени может быть представлен в виде

$$y(t) = y_0 + \int_0^t [b_0 + ux(t)] dt. \quad (50)$$

Процесс параметрических отказов можно описать с помощью схемы изнашивания с накоплением повреждений. Согласно этой схеме в случайные моменты времени возникают единичные повреждения равной величины. При накоплении r повреждений наступает отказ изделия. Повреждение состоит в том, что в результате изнашивания скачкообразно увеличивается определяющий параметр на некоторую постоянную величину Δy .

Описанная схема изнашивания справедлива при соблюдении следующих условий:

вероятность γ возникновения скачка изнашивания за время от t до $t + \Delta t$ приближенно пропорциональна длительности:

$$\gamma = \lambda \Delta t + 0(\Delta t),$$

где $0(\Delta t)$ — бесконечно малая высшего порядка относительно Δt ; это условие определяет свойство постоян-

ства средней скорости изнашивания; вероятность более одного скачка в промежутке $(t, t + \Delta t)$ пренебрежимо мала при малых Δt ; это условие определяет свойство ординарности потока накопления повреждений.

Вероятность каждого следующего скачка не зависит от числа ранее произошедших скачков, что справедливо для зоны установившегося (нормального) изнашивания. В зоне нормального изнашивания параметр приобретает стабильные свойства.

При выполнении перечисленных условий время безотказной работы изделия имеет гамма-распределение. Для целых r функция распределения времени τ имеет вид

$$F(t) = P\{\tau \leq T, k = r\} = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda T)^k}{k!} \exp[-\lambda T],$$

где $\frac{(\lambda T)^k}{k!} \exp[-\lambda T] = P_k(T)$ — вероятность того, что к моменту T произошло k скачков (повреждений).

Параметры λ и r гамма-распределения времени безотказной работы изделия, подверженного изнашиванию, определяются следующим образом. Параметр $y(t)$ измеряется через фиксированные постоянные промежутки времени Δt . Математическое ожидание и дисперсия величины изменения определяющего параметра за интервал времени Δt для гамма-распределения соответственно равны:

$$\begin{aligned} M\{\Delta y k(\Delta)\} &= \Delta y \lambda \Delta t; \\ D\{\Delta y k(\Delta)\} &= \Delta y^2 \lambda \Delta t, \end{aligned} \tag{51}$$

где Δy — величина износа, приходящаяся на одно повреждение (скачок); $k(\Delta)$ — случайная величина, равная числу скачков за интервал времени Δt .

В то же время для процесса (51) можно записать:

$$\begin{aligned} M[y(t + \Delta t) - y(t)] &= \\ &= M\left[\int_0^{\Delta t} [b_0 + ux(t)] dt\right] = \\ &= [b_0 + um_x] \Delta t; \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} D[y(t + \Delta t) - y(t)] &= \\ &= D\left[\int_0^{\Delta t} [b_0 + ux(t)] dt\right] = \\ &= u^2 \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} k_x(t, t') dt dt', \end{aligned}$$

где $m_x = M\{x(t)\}$ — математическое ожидание случайного процесса воздействия нагрузки; $k_x(t, t')$ — корреляционная функция случайного процесса воздействия нагрузки.

Для гамма-закона $F(T)$ должно удовлетворяться требование $m_x = \text{const}$.

Подставив (51) в (52), получим

$$\Delta y = \frac{u^2 \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} k_x(t, t') dt dt'}{(b_0 + um_x) \Delta t}; \tag{53}$$

$$\lambda = \frac{b_0 + um_x}{\Delta y}; \quad r = \frac{y_{кр} - y_0}{\Delta y}.$$

Вероятность безотказной работы изделия, подверженного изнашиванию, определяется в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} P(T) &= 1 - F(T) = P\{\tau > T, k = r\} = \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda T)^k}{k!} \exp[-\lambda T]. \end{aligned}$$

Критерий стохастического подобия процессов изнашивания с накоплением повреждений с учетом (51) будет иметь вид

$$\pi = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda T)^k}{k!} \exp[-\lambda T] = \text{idem}. \tag{54}$$

Величины λ и r , входящие в критерий подобия (54), определяются из (53).

Выбор параметров объекта испытаний (y_{\max} , y_0 , b_0 , u), определяющих процесс изнашивания при заданных характеристиках случайной нагрузки, а также параметров λ и r , должен осуществляться таким образом, чтобы

обеспечить при планировании испытаний требование $\pi = idem$. Величина π устанавливается с учетом требований к надежности $P_{тр}$.

Из условия стохастического подобия (54) могут быть также определены величины y_{max} , y_0 , b_0 , u , используемые для контроля хода и оценки завершенности отработки.

Необходимо отметить, что величина Δy должна быть достаточно малой для обеспечения точной аппроксимации процесса $y(t)$ ступенчатой функцией.

Для снижения влияния ошибки измерения на аппроксимацию кривой изнашивания интервал Δt между измерениями следует выбирать так, чтобы ошибка измерения была мала по сравнению с приращением Δy за этот интервал времени.

При описании процесса с независимыми приращениями скорости изнашивания время функционирования изделия разбивается на фиксированные постоянные интервалы времени Δt . Предполагается, что скорости процесса на каждом интервале являются случайными независимыми величинами, неизменными на протяжении интервала Δt . Закон распределения скорости на каждом интервале времени известен и остается неизменным для всех временных интервалов.

Процесс изнашивания для данной схемы представляется в виде

$$y(t_i) = y(i\Delta t) = y_0 + \Delta t \sum_{j=1}^i (b_0 + ux_j), \quad (55)$$

где $i = 1, 2, \dots$ — номер точки, в которой рассматривается процесс.

В (55) обозначена через x_j случайная величина нагрузки на j -м интервале времени.

Плотность распределения $f(x_j)$ нагрузки x_j постоянна независимо от номера интервала.

Критическое значение определяющего параметра $y_{кр}$, соответствующее отказовому состоянию изделия, достигается в некотором случайном промежутке времени $(t - s\Delta t)$.

Выражение (55) для критического случая имеет вид:

$$y_{max}(T) = y_0 + \Delta t \sum_{j=1}^{s-1} (b_0 + ux_j) + (T - s\Delta t)(b_0 + ux_s). \quad (56)$$

Вероятность безотказной работы изделия по параметру на отрезке времени $(0, i \cdot \Delta t)$ определяется следующим образом.

Отказ в результате достижения параметром y значения y_{max} на первом временном интервале $\Delta = t_1 - t_0 = t_1$ функционирования изделия наступит, когда будет

$$y_{max} \leq y_0 + \Delta t (b_0 + ux_1)$$

или

$$x_1 \geq \frac{y_{max} - y_0 - b_0}{\Delta t} = s_1.$$

Вероятность отказа изделия соответствует вероятности события, когда $x_1 \geq s$, и определяется формулой

$$q(0, t_1) = P(x_1 \geq s_1) = \int_{s_1}^{\infty} f(x_1) dx_1 = \int_{s_1}^{\infty} f(x) dx.$$

Соответственно вероятность безотказной работы

$$P(0, t_1) = 1 - q(0, t_1) =$$

$$= 1 - \int_{s_1}^{\infty} f(x) dx.$$

Отказ на втором временном участке $\Delta t = t_2 - t_1$ произойдет при выполнении следующих двух условий:

1) $y_0 + \Delta t (b_0 + ux_1) < y_{max}$ — на интервале времени $(0, t_1)$ отказа не произошло;

2) $y_0 + \Delta t [2b_0 + u(x_1 + x_2)] \geq y_{max}$ — на интервале (t_1, t_2) произошел отказ.

Условия 1) и 2) могут быть выражены через случайную величину нагрузки в следующем виде:

$$1) x_1 \leq s_1;$$

$$2) x_1 + x_2 \geq \frac{y_{\max} - y_0}{\Delta t} - 2b_0 = s_2.$$

Вероятность отказа на участке (t_1, t_2) представляет собой вероятность одновременного выполнения условий 1) и 2) и определяется по формуле

$$\begin{aligned} q(t_1, t_2) &= \\ &= \int_{-\infty}^{s_1} f(x_1) dx_1 \int_{s_2 - x_1}^{\infty} f(x_2) dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{s_1} f(x) dx \int_{s_2 - x}^{\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

Вероятность безотказной работы на интервале (t_1, t_2) определяется как $P(t_1, t_2) = 1 - [q(0, t_1) +$

$$\begin{aligned} &+ q(t_1, t_2)] = 1 - \left[\int_{s_1}^{\infty} f(x) dx + \right. \\ &\left. + \int_{-\infty}^{s_1} f(x) dx \int_{s_2 - x}^{\infty} f(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Для произвольного i -го участка времени (t_{i-1}, t_i) условием отказа является совместное выполнение следующих событий, записанных с помощью величин нагрузок на каждом интервале:

$x_1 < s_1$ — отсутствует отказ на интервале $(0, t_1)$;

$x_2 < s_2 - x_1$ — отсутствует отказ на интервале (t_1, t_2) ;

$x_3 < s_3 - (x_1 + x_2)$ — отсутствует отказ на интервале (t_2, t_3) ;

$x_i \geq s_i - \sum_{j=1}^{i-1} x_j$ — произошел отказ на интервале (t_{i-1}, t_i) , где

$$s_i = \frac{y_{\text{кр}} - y_0}{\Delta t} - ib_0.$$

Вероятность отказа на i -м интервале времени (t_{i-1}, t_i)

$$\begin{aligned} q(t_{i-1}, t_i) &= \\ &= \int_{-\infty}^{s_1} f(x) dx \int_{-\infty}^{s_2 - x_1} f(x) dx \times \\ &\times \int_{-\infty}^{s_3 - (x_1 + x_2)} f(x) dx \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \end{aligned} \quad (57)$$

Соответственно вероятность безотказной работы на интервале времени $(0, t_i)$

$$P(0, t_i) = 1 - \sum_{j=1}^i q(t_{j-1}, t_j).$$

Число i интервалов Δt , на которые разбивается процесс при вычислении вероятности $P(0, t_i)$, оценивается при выбранном Δt и заданном времени $t_{\text{ТР}}$ функционирования изделия как $i = t_{\text{ТР}} / \Delta t$.

Критерий стохастического подобия процессов изнашивания при их аппроксимации ступенчатым процессом с независимыми приращениями скорости изнашивания

$$\pi = \sum_{j=1}^i q(t_{j-1}, t_j) = \text{idem}. \quad (58)$$

Критерий подобия (58) с помощью выражений (56) и (57) устанавливает взаимосвязь физических параметров и вероятностных характеристик процесса изнашивания. Эти выражения позволяют определить выбор параметров для обеспечения подобия процессов изнашивания с учетом требований к надежности изделия.

Поскольку многомерный интеграл вида (57) по достаточно сложной области аналитически не вычисляется, в данном случае явную зависимость между параметрами изнашивания и требованиями по надежности следует искать путем применения численных методов на ЭВМ.

8. КОНТРОЛЬ ИСПЫТАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Для планирования и контроля ресурсных испытаний изделий длительного функционирования используют данные о результатах испытаний и эксплуатации аналогичных изделий. Это позволяет более обоснованно подойти к определению объемов испытаний и повысить точность оценки результатов испытаний.

Для описания процесса изменения $y(t)$ по наблюдаемым значениям в моменты времени t_1, t_2, \dots используют аналитическую зависимость

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i(t) + \epsilon, \quad (59)$$

где $f_i(t)$ — некоторые известные функции времени t ; β_i — неизвестные коэффициенты; ϵ — ошибка моделирования наблюдаемого процесса.

Для отыскания оценок коэффициентов β_i используют метод наименьших квадратов.

Соответственно критерий имеет вид

$$\min_{\beta} \sum_{j=1}^N \left[y_j - \sum_{i=1}^n \beta_i f_i(t_j) \right]^2 = \min D(\hat{\beta}). \quad (60)$$

В матричном виде можно записать

$$\hat{\beta} = (F^T F)^{-1} F^T Y,$$

где

$$F = \begin{pmatrix} f_0(t_1), f_1(t_1), \dots, f_n(t_1) \\ f_0(t_2), f_1(t_2), \dots, f_n(t_2) \\ \dots \\ f_0(t_N), f_1(t_N), \dots, f_n(t_N) \end{pmatrix}$$

— матрица значений функции $f_i(t_j)$;

$$Y = \begin{pmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \dots \\ y(t_N) \end{pmatrix} \text{ — вектор наблюдаемых значений определяющего параметра; } N \text{ — число точек наблюдения.}$$

Точность модели (59) характеризуется остаточной дисперсией аппроксимации:

$$D_{\text{ост}}^2 = \frac{D(\hat{\beta})}{N - (n + 1)}$$

и дисперсиями оценок отдельных коэффициентов:

$$\text{cov}(\hat{\beta}) = (F^T F)^{-1} \sigma_{\epsilon}^2,$$

где дисперсия ошибки наблюдения σ_{ϵ}^2 равна остаточной дисперсии.

Построив модель изменения $y(t)$, оптимальную по критерию (60) в некотором заданном наборе функций, например, $y = at$, $y = t^2$, $y = \exp[-t]$ и др., используют эту модель для прогнозирования процесса изменения, определяющего параметра на некоторый текущий момент времени t_j .

Соответственно значение прогнозируемого параметра в момент времени t_j

$$g(t_j) = \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i f_i(t_j) = (f^j)^T \hat{\beta}.$$

Дисперсия ошибки прогнозирования по данной модели

$$\sigma_g^2(t_j) = (f^j)^T (F^T F)^{-1} f^j \sigma_{\epsilon}^2.$$

Значение $\sigma_g^2(t_j)$ зависит от точки прогнозирования t_j и набора функций f_j , определяемых матрицей F .

Построив несколько моделей, отвечающих критерию (60), выбирают из полученных моделей зависимость, обладающую наименьшей дисперсией прогноза.

Имея модель изменения определяющего параметра аналога, для создаваемого изделия контроль ресурса в эксплуатации или в процессе испытаний целесообразно проводить следующим образом.

Для аналога строится выборка наблюдений:

$$\Delta y_i^A = y_i^A - y_i^A = \epsilon^A; \quad i = \overline{1, N^A},$$

где N^A — число точек наблюдения за аналогом. В этом случае рассматривается выборка ошибок наблюде-

ния, которые являются независимыми и, следовательно,

$$M \{ \varepsilon^j \varepsilon^\eta \} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq \eta \\ \sigma_\varepsilon^2 & \text{при } j = \eta \end{cases}.$$

Для объекта испытания строится такая же выборка наблюдений с использованием данных об изделии-аналоге:

$$\Delta y_i = y_i - \hat{y}_i^A = \varepsilon_i; \quad i = \overline{1, N},$$

где N — число точек наблюдения за объектами испытания.

Предположение, что объект испытания и аналог подобны в части изменения параметров, характеризующих их ресурс, будут справедливо в статистическом смысле, если выборки $\{\varepsilon_i^A\}$ и $\{\varepsilon_i\}$ будут принадлежать к одной генеральной совокупности. Для установления этого факта используются методы проверки статистических гипотез.

В критериальной форме зависимость (59) можно записать так:

$$\pi = \frac{y}{\hat{\beta}_1 f_1(t)} = 1 + \frac{\hat{\beta}_2 f_2(t)}{\hat{\beta}_1 f_1(t)} + \frac{\hat{\beta}_3 f_3(t)}{\hat{\beta}_1 f_1(t)} + \frac{\hat{\beta}_n f_n(t)}{\hat{\beta}_1 f_1(t)} + \frac{\varepsilon(t)}{\hat{\beta}_1 f_1(t)}.$$

Для аналога соответственно имеем

$$\pi^A = \frac{y^A}{\hat{\beta}_1^A f_1(t)} = 1 + \frac{\hat{\beta}_2^A f_2(t)}{\hat{\beta}_1^A f_1(t)} + \frac{\hat{\beta}_3^A f_3(t)}{\hat{\beta}_1^A f_1(t)} + \frac{\hat{\beta}_n^A f_n(t)}{\hat{\beta}_1^A f_1(t)} + \frac{\varepsilon^A(t)}{\hat{\beta}_1^A f_1(t)}.$$

Мера неподобия $\Delta\pi = \pi - \pi^A$ для сравниваемых изделий будет

$$\Delta\pi = \frac{f_2(t)}{f_1(t)} (\hat{\beta}_{02}^A - \hat{\beta}_{02}) + \frac{f_3(t)}{f_1(t)} (\hat{\beta}_{03}^A - \hat{\beta}_{03}) + \frac{f_n(t)}{f_1(t)} (\hat{\beta}_{0n}^A - \hat{\beta}_{0n}) + \frac{1}{f_1(t)} \left(\frac{\varepsilon(t)}{\hat{\beta}_1} - \frac{\varepsilon^A(t)}{\hat{\beta}_1^A} \right),$$

где $\hat{\beta}_{0i}^A = \hat{\beta}_i^A / \hat{\beta}_1^A$, $\hat{\beta}_{0i} = \hat{\beta}_i / \hat{\beta}_1$ — относительные значения оценок коэффициентов моделей для аналога и объекта испытания соответственно.

В рассматриваемом случае мера неподобия $\Delta\pi$ является случайной величиной. Поскольку ε и ε^A имеют нормальное распределение, величина $\Delta\pi$ также имеет нормальное распределение с параметрами:

$$m_{\Delta\pi} = \sum_{\eta=2}^n \frac{f_\eta(t)}{f_1(t)} (\hat{\beta}_{0\eta} - \hat{\beta}_{0\eta}^A);$$

$$\sigma_{\Delta\pi} = \frac{1}{f_1(t)} \left(\frac{\sigma_\varepsilon}{\hat{\beta}_1} - \frac{\sigma_\varepsilon^A}{\hat{\beta}_1^A} \right).$$

Условие подобия сравниваемых изделий по обобщенной характеристике, определяющей ресурс, будет иметь вид

$$P \{ \Delta\pi \geq \Delta\pi_{\text{гр}} \} \leq P_{\text{тр}},$$

где $\Delta\pi_{\text{гр}}$ — допустимый уровень неподобия; $P_{\text{тр}}$ — заданный критический уровень вероятности, с которой мера неподобия $\Delta\pi$ не должна превышать $\Delta\pi_{\text{гр}}$.

По результатам испытаний аналогов определяются параметры $m_{\Delta\pi}$ и $\sigma_{\Delta\pi}$, а также при заданном $P_{\text{тр}}$ значение $\Delta\pi_{\text{гр}}$ из выражения

$$P_{\text{тр}} = \Phi \left(\frac{\Delta\pi_{\text{гр}} - m_{\Delta\pi}}{\sigma_{\Delta\pi}} \right) = \Phi(u),$$

где $\Phi(u)$ — нормированная функция Лапласа.

Вычислив по результатам испытаний оценку $\Delta\pi$, определяют подобие процессов изменения сравниваемых ресурсных характеристик путем проверки выполнения условия $\Delta\pi \leq \Delta\pi_{\text{гр}}$. Проводить оценку подобия параметрических отказов при планировании, оценке и контроле ресурса целесообразно при построении обобщенной модели из некоторого семейства моделей, описывающих изменение определяющих параметров группы аналогичных изделий.

9. ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для исследования надежности уникальных объектов представляется целесообразным применить метод физического моделирования, который дает возможность заменить натурные испытания на надежность испытаниями физических моделей объекта. Подход к решению такой задачи изложен в [10].

Главным процессом, подобие которого необходимо обеспечить при исследовании надежности методом физического моделирования, является процесс возникновения отказа. В качестве такого процесса можно рассматривать процесс изнашивания, протекающий под влиянием внешних факторов.

Для множества однотипных моделей процесс изнашивания будет случайным, представленным совокупностью реализаций. Время до пересечения случайным процессом изнашивания границы рабочей области (допуска) — случайная величина, распределение которой характеризует надежность технического объекта.

В качестве модели процесса изнашивания может быть принят линейный процесс, описываемый уравнением: $y(t) = y_0 + Bt$, где y_0 — начальное значение параметра, B — случайная скорость изнашивания.

Для такого процесса детерминированной является функциональная (линейная) зависимость параметра y от времени, а как случайные рассматриваются величины y_0 и B .

Условия, обеспечивающие подобие линейного случайного процесса изнашивания модели и натурального изделия, формулируются следующим образом. Каждой реализации процесса изнашивания в модели соответствует реализация рассматриваемого процесса в оригинале, описываемая уравнением: $y(t) = y_0 + bt$.

Согласно третьей теореме подобия необходимыми и достаточными условиями подобия являются равенство

критериев подобия и пропорциональность сходственных параметров, входящих в условие однозначности. Из последнего уравнения получается один независимый критерий подобия:

$$\pi_1 = y_0/bt = \text{idem.}$$

Условия однозначности:

$$\text{начальное } y(t) = y_0 \text{ при } t = 0;$$

$$\text{граничное } y(t) = y_{\text{гр}} \text{ при } t = t_{\text{гр}},$$

где $t_{\text{гр}}$ — время безотказной работы данной модели.

При граничных условиях критерий подобия имеет вид

$$\pi_1 = y_0/bt_{\text{гр}} = \text{idem.}$$

Масштабные коэффициенты величин y и b устанавливаются при моделировании. При этом используются известные зависимости рабочего параметра от других параметров изделия: $y = \varphi(x)$; $b = \psi(x, y)$.

Приняв масштаб параметра x равным $k_x = x^{\text{оп}}/x^{\text{м}}$, получаем

$$y^{\text{м}} = \varphi[x^{\text{м}}] = \varphi^{\text{оп}}[x^{\text{оп}}/k_x] \text{ и}$$

$$k_y = \frac{y^{\text{оп}}}{y^{\text{м}}} = \frac{\varphi[x^{\text{оп}}]}{\varphi[x^{\text{оп}}/k_x]}.$$

Аналогично при известном $k_z = z^{\text{оп}}/z^{\text{м}}$ имеют

$$k_b = \frac{b^{\text{оп}}}{b^{\text{м}}} = \frac{\psi[x^{\text{оп}}z^{\text{оп}}]}{\psi[x^{\text{оп}}/k_x, z^{\text{оп}}/k_z]}.$$

Испытав N моделей в заданном режиме, получают N реализаций процесса изнашивания и соответственно N реализаций случайной величины $t_{\text{гр}}$ времени безотказной работы модели. При соблюдении подобия процесса возникновения отказа выполняется равенство

$$\pi_1 = \left(\frac{y}{bt_{\text{гр}}} \right)^{\text{м}} = \left(\frac{y_0}{bt_{\text{гр}}} \right)^{\text{оп}} = \frac{k_y}{t_{\text{гр}}k_b} \left(\frac{y_0}{b} \right)^{\text{м}}$$

Из этого уравнения получают коэффициент пересчета времени безотказной работы с модели на оригинал:

$$k_i = t_{\text{гр}}^{\text{оп}}/t_{\text{гр}}^{\text{м}} = k_y/k_b.$$

Время безотказной работы, полученное при испытаниях моделей, может быть пересчитано на оригинал

с помощью справедливого для каждой реализации процесса изнашивания коэффициента k_i .

При большом объеме статистического материала о коэффициенте k_i может быть построена гистограмма и подобрана теоретическая кривая распределения, наилучшим образом аппроксимирующая полученное статистическое распределение времени безотказной работы оригинала.

10. УСКОРЕННЫЕ ИСПЫТАНИЯ ПРИ КОНТРОЛЕ НАДЕЖНОСТИ ПО АЛЬТЕРНАТИВНОМУ ПРИЗНАКУ

Задачи планирования ускоренных испытаний состоят в том, чтобы определить коэффициенты ужесточения режимов и объем выборки (число изделий, которые необходимо поставить на испытания и продолжительность испытаний), а также установить определенное правило принятия решений по результатам испытаний.

Решение этих задач основывается на использовании эмпирического распределения критерия подобия, в выражении для которого входит наработка до предельного состояния. Распределение строится путем обработки результатов контроля и испытаний изделий-аналогов.

Отклонение значения критерия подобия в момент достижения предельного состояния от номинального значения обусловлено нарушением полного подобия вследствие случайного характера технологического процесса изготовления изделия и внешних воздействий при эксплуатации.

В процессе проведения ускоренных испытаний контроль может осуществляться по альтернативному признаку, т. е. по числу отказавших изделий. В этом случае можно принять приемочный уровень q_0 равным вероятности того, что критерий подобия может принимать любые значения, соответствующие наработке на отказ до исчерпания технического ресурса изделия. При превышении максимального значения этого критерия π_{\max}

нарушается подобие процессов, приводящих к отказу. Таким образом,

$$q_0 = 1 - F(\pi_{\text{пр}}), \quad (61)$$

где $F(\pi)$ — интегральная функция распределения критерия подобия π .

Оперативная характеристика плана ускоренных испытаний при альтернативном контроле имеет вид гипергеометрического распределения. Однако из-за того, что испытания в момент их завершения моделируют исчерпание технического ресурса, вероятность выживания изделия до конца испытаний мала и оперативную характеристику можно приближенно описать биномиальным распределением. Ограничиваясь планом контроля с приемочным числом, равным нулю, можно записать

$$L(q) = (1 - q)^{n_{\text{к. а}}}, \quad (62)$$

где L_q — оперативная характеристика; $n_{\text{к. а}}$ — число изделий, которые необходимо поставить на испытание при контроле по альтернативному признаку; q — вероятность того, что изделие проработает до конца испытаний.

Учитывая, что $L(q_0) = \alpha$ (α — риск поставщика), из выражения (62) получают

$$n_{\text{к. а}} = \frac{\ln \alpha}{\ln(1 - q_0)}, \quad (63)$$

причем риск заказчика

$$\beta = 1 - (1 - q_m)^{n_{\text{к. а}}}, \quad (64)$$

где q_m — браковочный уровень, устанавливаемый по согласованию между поставщиком и заказчиком.

Объем выборки (63) можно существенно сократить, если проводить контроль по количественному признаку благодаря тому, что в этом случае выборка характеризуется числом контролируемых параметров, равным общему числу испытываемых изделий, а не только количеством отказавших изделий, как при контроле по альтернативному признаку.

В качестве контролируемого параметра целесообразно принять критерий подобия π , так как его распределение универсально для всех изделий-аналогов, а не меняется в зависимости

от конструктивных, технологических и эксплуатационных характеристик, как у размерных параметров.

Для величин, описываемых логарифмически нормальным законом, при условии, что принятие решений по результатам испытаний проводится по критерию Неймана—Пирсона, справедливы следующие формулы:

$$n_{\text{к.к}} = \left[\frac{s(u_{1-\alpha} + u_{1-\beta})}{\lg \pi_0 - \lg \pi_{\text{max}}} \right] \quad (65)$$

$$\lg \pi = \lg \pi_0 + \frac{u_{1-\alpha} (\lg \pi_0 - \lg \pi_{\text{max}})}{u_{1-\alpha} + u_{1-\beta}} \quad (66)$$

где $n_{\text{к.к}}$ — число изделий, которые необходимо поставить на испытания; s — среднее квадратическое отклонение значений логарифма критерия подобия π в момент достижения предельного состояния; u — квантиль нормального распределения; π_0 и π_{max} — соответственно нижняя и верхняя границы допуска значений критерия π . Обозначим через π^* пороговое значение критерия π (партия бракуется, если среднее арифметическое полученных в результате ускоренных испытаний значений $\lg \pi$ будет больше либо равно $\lg \pi^*$).

Благодаря тому, что величина среднего квадратического отклонения s может быть уменьшена за счет увеличения количества обработанных результатов контроля и испытаний изделий-аналогов, можно, используя информацию, накопленную в процессе производства и эксплуатации этих изделий, довести число испытываемых изделий $n_{\text{к.к}}$ до желательного уровня, если, конечно, это позволяют ограничения на затраты по сбору и обработке информации.

Ниже рассмотрен принцип, согласно которому достижению предельного состояния при ускоренных и обычных испытаниях однотипных изделий соответствует одно и то же значение критерия π . Выражение для этого критерия имеет вид

$$\pi = T_j \prod_{i=1}^m x_{ij}^{l_i}, \quad j = 1, 2, \quad (67)$$

где T_j — наработка до предельного состояния; x_{ij} — параметры режима

работы изделия; l_i — показатели степени, индекс $j = 1$ обозначает условия эксплуатации, индекс $j = 2$ — условия ускоренных испытаний.

Подставляя в формулу (67) значения параметров x_{i1} и x_{i2} , отвечающие нормальному и ужесточенному режимам работ соответственно, и приравняв друг другу полученные таким путем выражения критерия π , находим

$$T_1 = k(x_1) T_2, \quad (68)$$

где $k = \prod_{i=1}^m k_i$ — коэффициент ускорения; $k_i = x_{i2}/x_{i1}$ — коэффициенты ужесточения режима.

Коэффициенты ужесточения режима должны выбираться с учетом предельных возможностей изделия и испытательного стенда. Однако всегда необходимо выполнять проверочные расчеты, подставляя величины параметров в выражение для критерия подобия и сопоставляя вычисленные значения этих критериев с их критическими величинами. Если значения критериев выйдут за границы области, соответствующей нормальной работе изделия, то подобие между режимами ускоренных испытаний и эксплуатации нарушается, значения критериев в предельном состоянии не будут равны между собой и уравнение перестанет выполняться.

Тогда необходимо изменить коэффициенты ужесточения таким образом, чтобы величины критериев подобия не выходили за пределы их критических значений, хотя при этом возможности форсирования работы изделия могут быть исчерпаны не полностью.

Пример 2. В силу того, что контролируемым параметром при испытаниях пневмоприводов является расход газа через уплотнение штока, признаком предельного состояния обычно служит превышение расхода некоторого наперед заданного значения.

Оценочные расчеты показывают, что истечение сжатого газа через зазоры между уплотнительным кольцом и штоком пневмоцилиндра происходит в ламинарном режиме. Движение

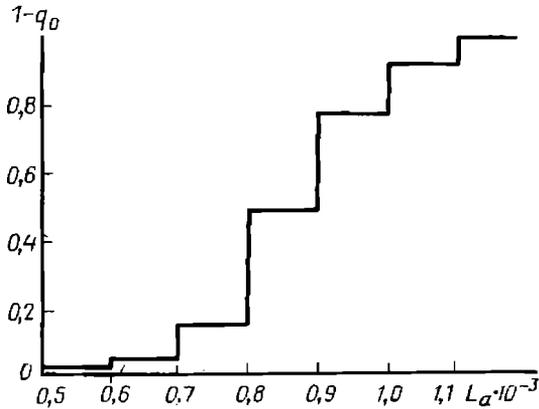


Рис. 4. Эмпирическая функция распределения критерия L_a

среды в этом режиме автомодельно по числу Лагранжа L_a . Введя в критерий L_a в качестве геометрического размера высоту изношенного слоя уплотнительного кольца, получим

$$L_a = \frac{(P^2 - P_a^2) DR_{\max}^3 N \Delta h^{1+t\beta}}{RT_a Q \eta d^{2+t\beta}} \times \left(\frac{fF}{\sigma_0} \right)^t \quad (69)$$

где P — давление воздуха во внутренней полости пневмоцилиндра; P_a — атмосферное давление; D — диаметр штока; R_{\max} — наибольшая высота микронеровностей уплотнительной поверхности штока; R , T_a — соответственно газовая постоянная и абсолютная температура воздуха; Q — массовый расход воздуха через уплотнение; η — динамический коэффициент вязкости воздуха; d — диаметр уплотнительного кольца; N — число циклов наработки пневмоцилиндра до отказа; Δh — предварительный натяг уплотнительного кольца; f — коэффициент трения материала кольца по металлу; F , σ_0 , t — соответственно модуль упругости, предел прочности и показатель кривой усталости материала кольца; $\beta = 2\nu + 1$ (ν — параметр опорной кривой уплотнительной поверхности штока).

Эмпирическая функция распределения значений критерия Лагранжа L_a в момент достижения предельного состояния, полученная путем обработки результатов ресурсных испытаний pne-

вмоцилиндров с различными диаметрами штока и ходами поршня, работавших при разных давлениях сжатого воздуха, приведена на рис. 4.

Значение критерия Лагранжа, соответствующее исчерпыванию технического ресурса пневмоцилиндра, было принято равным $0,79 \cdot 10^{-3}$. Из распределения, приведенного на рис. 4, находим, что этой величине критерия L_a соответствует вероятность $q_0 = 0,22$. Задаваясь риском поставщика $\alpha = 0,1$, из выражения (63) получим $n_{к.а} = 9$.

Для определения продолжительности испытаний необходимо задать коэффициенты ужесточения. Положим, что предварительный натяг уплотнительного кольца Δh увеличивается в 1,5 раза, а все остальные параметры, входящие в выражение (69), не меняются.

Продолжительность ускоренных испытаний, рассчитанная по формуле (68), составляет 43,5 % от наработки до предельного состояния.

Таким образом, на ускоренные испытания при контроле по альтернативному признаку надо поставить девять пневмоцилиндров, испытывать их в течение времени, равного 43,5 % их срока службы. Испытания прекращаются и партия бракуется, если хотя бы в одном пневмоциindre расход воздуха превысит заданную величину. Если же заданная величина утечки за все время испытаний не достигается, партия считается принятой.

При контроле по количественному признаку были заданы следующие допуски на величину критерия Лагранжа: $L_{a_0} = 0,72 \cdot 10^{-3}$ и $L_{a_m} = 0,89 \cdot 10^{-3}$, риски поставщика и заказчика равны $\alpha = \beta = 0,1$. Из распределения, приведенного на рис. 4, находим, что дисперсия логарифмов критерия Лагранжа равна 0,084.

Подставив эти значения в формулу (65), получим $n_{к.к} = 3$, т. е. объем выборки в 3 раза меньше, чем при контроле по альтернативному признаку.

При разработке и изготовлении сложных технических систем, содержащих достаточное количество разнообраз-

ных и дорогих агрегатов, особенно важно обеспечить оптимальное планирование испытаний. Рассмотрим некоторые задачи оптимального планирования испытаний технических систем на надежность.

Пусть в результате испытаний технической системы в форсированном режиме получена оценка математического ожидания времени безотказной работы $T(x)$. Тогда согласно (68) в качестве оценки, соответствующей нормальному режиму, принимается величина

$$T_H = T(x) k(x).$$

Количественно эффективность оценки определяется ее дисперсией. При этом коэффициент ускорения $k(x)$ — случайная величина, имеющая определенный закон распределения. Введение $k(x)$ как случайной величины является необходимым при анализе погрешности любого метода испытаний в форсированном режиме. Это связано с тем, что всякое изменение условий работы приводит не только к ускорению процессов, приводящих к отказам объекта, но и к новым непредсказуемым эффектам. Невозможность предсказать все нежелательные результаты обуславливает необходимость введения кажущейся случайности.

Считая, что отклонения $T(x)$ и $k(x)$ от соответствующих средних $T_0(x)$ и $k_0(x)$ достаточно малы, и полагая, что $T(x)$ и $k(x)$ независимы,

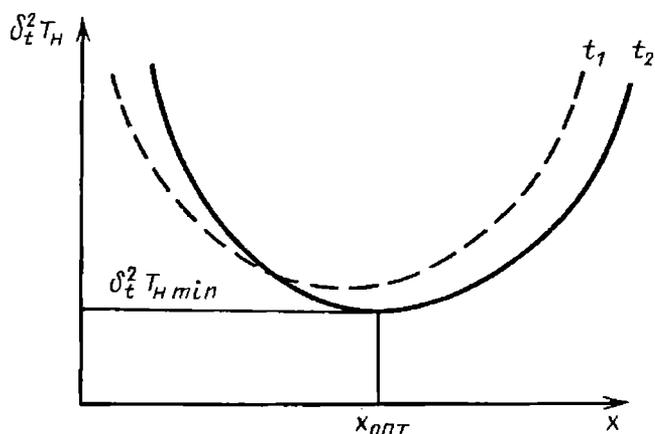


Рис. 5. Зависимость дисперсии оценки T_H от режима испытаний для разного объема испытаний $t_2 > t_1$

определим относительную величину дисперсии оценки T_H :

$$\delta_t^2 T_H = \delta^2 T(x) + \delta^2 k(x). \quad (70)$$

Если в результате нормальных испытаний в течение такого же времени t получена оценка с относительной дисперсией $\delta_t^2 T_H$, дисперсия оценки (70) будет равна

$$\delta_t^2 T_H = \frac{\delta^2 T}{k^2(x)} + \delta^2 k(x). \quad (71)$$

Данная функция при определенном x имеет минимум (рис. 5). Действительно, при x , соответствующем облегченным режимам, уменьшается $k^2(x)$, т. е. увеличивается первое слагаемое. При ужесточении режимов в связи с появлением новых независимых процессов резко возрастает $\delta^2 k(x)$. При достаточно большом объеме испытаний, обеспечивающем определение T в нормальном режиме с достаточной точностью, минимум рассматриваемой функции будет соответствовать режимам, близким к нормальным.

Данная оценка не является состоятельной. При бесконечном увеличении полного времени испытаний дисперсия ее стремится к $\delta^2 k(x)$. Вместе с тем при сокращении времени данная оценка может иметь меньшую дисперсию, чем при нормальных испытаниях (рис. 6).

Таким образом, рассмотренный алгоритм оптимизации планов ускорен-

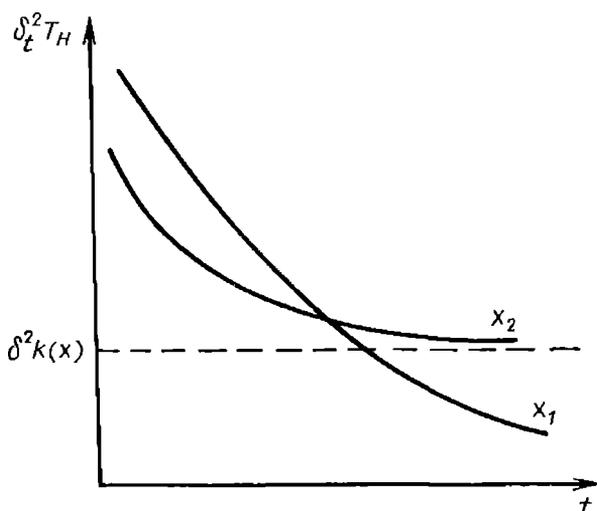


Рис. 6. Зависимость дисперсии оценки T_H от времени испытаний для нормального x_1 и форсированного x_2 режимов

ных испытаний позволяет выбрать оптимальные параметры форсированного режима $\chi_{\text{опт}}$, обеспечивающие минимум относительной дисперсии оценки среднего времени безотказной работы T_H .

При оценке надежности сложных систем при их проектировании или производстве широкое применение находят стендовые испытания отдельных элементов, по которым оценивается надежность системы в целом. Достоверность оценки показателей надежности сложной системы зависит от достоверности оценок показателей надежности отдельных элементов. Так как входящие в систему составные элементы характеризуются разной степенью надежности, сложности, стоимости, то при проведении изолированных испытаний этих элементов возникает задача оптимального планирования: выбрать номенклатуру элементов и объемы их выборок, чтобы обеспечить требуемую достоверность оценки надежности системы в целом при минимуме материальных затрат и времени.

В предположении, что поток отказов элементов технической системы простейший, параметр Λ выражается через интенсивности отказов элементов λ_i :

$$\Lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i,$$

где N — количество элементов в изделии.

Далее предполагается, что испытания проводятся с n_i элементами i -го типа в течение одинакового времени τ .

Тогда, если количество испытываемых изделий определенного типа достаточно большое, значение λ_i для каждого элемента можно найти по формуле:

$$\lambda_i = \frac{R_i}{n_i \tau},$$

где R_i — количество отказов i -го элемента.

Доверительный интервал для показателя Λ может быть оценен простым способом, если учесть, что точная

оценка $\hat{\Lambda}$ в этом случае имеет распределение, близкое к нормальному.

Ориентировочно значение половины ширины доверительного интервала

$$\varepsilon_\beta = t_\beta \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{n_i \tau}}, \quad (72)$$

где $t_\beta = \arg \Phi\left(\frac{1+\beta}{2}\right) = \arg \Phi(x)$ — табличная функция;

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

β — доверительная вероятность.

С учетом указанных обозначений доверительный интервал можно выразить следующим образом:

$$J_\beta = \left(\sum_{i=1}^N \frac{R_i}{n_i \tau} - \varepsilon_\beta; \sum_{i=1}^N \frac{R_i}{n_i \tau} + \varepsilon_\beta \right).$$

Для формулирования оптимальной задачи необходимо ввести дополнительно показатель C_i , характеризующий затраты на проведение испытаний i -го элемента. Тогда суммарные затраты на их проведение

$$C = \sum_{i=1}^N C_i n_i. \quad (73)$$

Определяется n_i , обеспечивающее минимум функционала (73) при условии:

$$\varepsilon_\beta \leq \bar{\varepsilon}_\beta, \quad (74)$$

где $\bar{\varepsilon}_\beta$ — величина, характеризующая заданные требования к точности интервальной оценки.

Из выражения (72) следует, что ширина доверительного интервала есть функция суммы

$$\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{n_i \tau}. \quad (75)$$

Поэтому ограничение (74) может быть заменено ограничением на функцию (75):

$$\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{n_i \tau} \leq \left(\frac{\bar{\epsilon}_\beta}{t_\beta} \right)^2 \quad (76)$$

Тогда при оптимизации плана испытаний определяется n_i , обеспечивающее минимум функционала (73) при условии (76). В такой постановке задача относится к классу нелинейных задач целочисленного программирования.

Если учесть, что количество элементов, подлежащих испытаниям, достаточно велико, например $n_i > 10$, то методом неопределенных множителей Лагранжа можно получить приближенное решение поставленной задачи. В силу монотонности функционала и ограничений минимум (73) имеет место на границе и определяется решением следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 - \gamma \left(\frac{\lambda_1}{n_1^2 \tau} \right) &= 0; \\ C_2 - \gamma \left(\frac{\lambda_2}{n_2^2 \tau} \right) &= 0; \\ &\vdots \\ C_n - \gamma \left(\frac{\lambda_n}{n_n^2 \tau} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (77)$$

$$C_n - \gamma \left(\frac{\lambda_n}{n_n^2 \tau} \right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{n_i \tau} = \left(\frac{\bar{\epsilon}_\beta}{t_\beta} \right)^2$$

Решая эту систему уравнений, получим n_i , обеспечивающее минимальное значение функционала (73) при заданном ограничении:

$$n_i = \frac{t_\beta^2}{(\bar{\epsilon}_\beta)^2 \tau} \sqrt{\frac{\lambda_i}{C_i}} \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i C_i}; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (78)$$

Полученные значения n_i могут быть дробными числами. Поэтому решением целочисленной задачи является

$$n_i^* = E \{ n_i \},$$

где $E \{ n_i \}$ — целая часть аргумента n_i .

Полученные таким образом решения могут не обеспечивать точного минимума в целочисленной задаче. Когда же испытания проходят большее количество элементов, то решения n_i^* близки к оптимальным.

Пример 3. Пусть изделие содержит пять агрегатов, данные о расчете надежности и стоимости которых приведены в табл. 4.

Требуется спланировать испытания отдельных агрегатов в течение $\tau = 1000$ ч, чтобы половина ширины доверительного интервала показателя Λ , отвечающего доверительной вероятности $\beta = 0,9$, не превышала 20% от расчетного значения, т. е.

$$\bar{\epsilon}_\beta = 2 \cdot 10^{-6} \text{ ч}^{-1}.$$

По таблицам найдем квантиль нормального распределения

$$t_\beta = t_{0,9} = 1,65.$$

Количество агрегатов, подлежащих испытаниям для обеспечения заданной точности, вычисленное по формуле (78):

$$\begin{aligned} n_1^* &= 6; \quad n_2^* = 11; \quad n_3^* = 3; \quad n_4^* = 2; \\ n_5^* &= 11. \end{aligned}$$

Общие затраты на проведение таких испытаний

$$C = \sum_{i=1}^N C_i n_i = 220 \text{ усл. ед.}$$

Полученные результаты обеспечивают близкое к оптимальному распределение подлежащих испытаниям агрегатов.

4. Показатели надежности и стоимости испытываемых агрегатов

Показатель	Номер агрегата				
	1	2	3	4	5
$\lambda_i \cdot 10^{-3}, \text{ ч}^{-1}$	2	4	0,7	0,3	3
$C_i, \text{ усл. ед.}$	10	6	10	10	4

Чтобы оценить эффект от оптимизации планирования испытаний, определяют затраты на их проведение, которые бы потребовались при равномерном планировании объемов для обеспечения той же достоверности оценки.

Из выражения (75) при условии $n = \text{const}$ находим, что

$$n = \left(\frac{t_{\beta}}{\varepsilon_{\beta}} \right)^2 \frac{\Lambda}{\tau}. \quad (79)$$

Подставляя численные значения в выражение (79), получим $n = 7$. Тогда общие затраты на проведение таких испытаний равны 280 усл. ед.

Следовательно, оптимальное планирование испытаний в приведенном примере ведет к уменьшению затрат на 30 %.

11. УСКОРЕННЫЕ ИСПЫТАНИЯ ПРИ ИНДИВИДУАЛЬНОМ КОНТРОЛЕ НАДЕЖНОСТИ

Аппарат теории подобия используется для решения двух основных проблем ускоренных испытаний в форсированном режиме [9]:

определения коэффициента пересчета показателя надежности, полученного при испытаниях в форсированном режиме ε^* , на нормальный режим ε_0 ;

установления величины $\varepsilon_{\text{max}}^*$ — максимально допустимой жесткости форсирования, превышение которой приводит к нарушению закономерностей протекания процессов изнашивания в нормальном режиме.

При ускоренных испытаниях необходимо обеспечить подобие процесса возникновения отказа в нормальном и форсированном режимах. Если реализации случайного процесса изнашивания — линейные функции времени, то моделью процесса изнашивания является полуслучайный линейный процесс, описываемый уравнением:

$$Y(t) = Y_0 + Bt,$$

где Y_0 — начальное значение параметра, характеризующего работоспособность изделия; B — случайная скорость изменения параметра.

Если «жесткость» форсированного режима $\varepsilon^* = \varepsilon_{\text{max}}^*$, то справедливо подобие процесса возникновения отказа в нормальном и форсированном режимах. Каждой реализации $y^*(t)$ процесса изнашивания в форсированном режиме ε^* можно сопоставить подобную ей реализацию $y(t)$ случайного процесса $Y(t)$ в нормальном режиме ε_0 .

При граничных условиях уравнения реализаций полуслучайного процесса изнашивания в нормальном и форсированном режимах для одного и того же изделия имеют вид:

$$y_{\text{гр}} = y_0 + bt_{\text{гр}}, \quad (80)$$

$$y_{\text{гр}} = y_0 + b^*t_{\text{гр}}^*,$$

где $y_{\text{гр}}$ — граница рабочей области; $t_{\text{гр}}$ и $t_{\text{гр}}^*$ — возможные значения времени безотказной работы изделия в нормальном и форсированном режимах; b и b^* — возможные значения скорости изнашивания в нормальном и форсированном режимах.

Если процессы (80) подобны, то должно соблюдаться равенство

$$bt_{\text{гр}} = b^*t_{\text{гр}}^*. \quad (81)$$

Из (81) следует, что время безотказной работы каждого изделия может быть пересчитано с форсированного режима на нормальный с помощью соотношения

$$t_{\text{гр}} = t_{\text{гр}}^* \frac{b^*}{b} = t_{\text{гр}}^* k_{\Phi}, \quad (82)$$

где k_{Φ} — коэффициент пересчета (ускорения, форсирования) испытаний.

При известной зависимости $b = \psi(y)$ скорости изнашивания от нагрузки коэффициент форсирования находится из соотношения

$$k_{\Phi} = \frac{\psi(y^*)}{\psi(y)},$$

где y и y^* — параметры нагрузки при испытаниях соответственно в нормальном и форсированном режимах.

Для случая, когда реализации полуслучайного процесса изнашивания являются нелинейными функциями

времени, может быть использован способ кусочно-линейной аппроксимации, позволяющий свести нелинейный полуслучайный процесс к кусочно-линейной случайной функции времени вида

$$Y(t) = Y_0 + \sum_i B_i \Delta t_i. \quad (83)$$

Для перехода от нелинейной полуслучайной функции к функции (83) каждая реализация этой функции заменяется на i -м участке линейаризации секущей прямой, в результате чего реализация заменяется функцией $y(t)$:

$$y(t) = y_0 + \sum_{i \leq N} b_i \Delta t_i, \quad (84)$$

где y_0 — начальное значение параметра y некоторой реализации полуслучайного процесса $H(t)$; b_i — угловой коэффициент секущей прямой, соответствующей i -му участку линейаризации; $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ — время от начала i -го участка линейаризации; N — число участков линейаризации.

При граничных условиях (84) записывается:

$$y_{гр} = y_0 + \sum_{i=1}^N b_i \Delta t_i, \quad (85)$$

где $y_{гр}$ — граница рабочей области (допуск).

Разделив почленно (85) на $y_{гр}$, получим N определяющих критериев подобия кусочно-линейной функции (85):

$$\pi_1 = \frac{b_1 \Delta t_1}{y_{гр}}; \quad \pi_2 = \frac{b_2 \Delta t_2}{y_{гр}},$$

$$\pi_N = \frac{b_N \Delta t_N}{y_{гр}}. \quad (86)$$

Таким образом, задача отыскания критериев подобия нелинейного полуслучайного процесса сводится к задаче нахождения критериев подобия совокупности линейных случайных процессов, для каждого из которых сходственными моментами времени, соответствующими начальному и граничному условиям, являются моменты t_{i-1} и t_i начала и конца i -го участка линейаризации.

Из (82), (83) и (86) следует, что при нелинейном процессе возникновения отказа времени безотказной работы каждого конкретного изделия

$$t_{гр} = \sum_{i=1}^N \Delta t_i^* \frac{b_i^*}{b_i},$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ — длина i -го участка линейаризации процесса изнашивания при испытаниях в форсированном режиме; b_i и b_i^* — угловые коэффициенты секущих прямых, характеризующие скорость изменения параметра на i -м участке линейаризации, соответствующие нормальному и форсированному режимам испытаний.

Соответственно теория подобия может быть использована для определения предельно допустимого «ужесточения» режима испытаний.

Условием подобия исходного процесса в нормальном и форсированном режимах является соблюдение равенства (80). На практике проверить справедливость соотношений (80) можно, испытав в каждом из режимов ϵ_0 и ϵ^* некоторые совокупности однотипных изделий.

Измерив для i -го изделия, испытанного в режиме ϵ_0 , значения параметров b и $t_{гр}$, можно получить значение критерия подобия:

$$\pi_{1i} = b_i t_{гр}.$$

Аналогично для j -го изделия, испытанного в режиме ϵ^* , имеем

$$\pi_{1j}^* = b_j^* t_{гр}^*.$$

Для m однотипных изделий, испытанных в режиме ϵ_0 , получим m возможных значений критерия π_1 :

$$\pi_{11} = b_1 t_{гр1}; \quad \pi_{12} = b_2 t_{гр2};$$

$$\pi_{1m} = b_m t_{гр m}.$$

Испытав в форсированном режиме n однотипных изделий, получим n возможных значений критерия π_1 :

$$\pi_{11}^* = b_1^* t_{гр 1}^*; \quad \pi_{12}^* = b_2^* t_{гр 2}^*,$$

$$\pi_{1n}^* = b_n^* t_{гр n}^*.$$

Для соблюдения подобия случайного процесса возникновения отказа

в нормальном и форсированном режимах необходимо и достаточно, чтобы случайные величины π_1 и π_2 были подчинены одному и тому же закону распределения, т. е. для соблюдения подобия в рассматриваемом случае необходимо и достаточно, чтобы для любого $c = \pi_1 = \pi_2^*$ были равны значения соответствующих функций распределения:

$$F_{\pi_1}(c) = F_{\pi_1^*}(c).$$

Таким образом, использование аппарата теории подобия позволяет установить аналитическую зависимость между временем безотказной работы в нормальном и форсированном режимах без проведения специальных испытаний и определить условия, при соблюдении которых форсированный режим данной «жесткости» может считаться приемлемым для испытаний на надежность.

12. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ БАЗОВОГО ПРОЦЕССА ОТРАБОТКИ

Модели роста надежности изделий используются для описания зависимости параметров θ_s , $s = \overline{1, k_\theta}$, характеризующих процесс обработки, от характеристик изделия x_j , $j = \overline{1, n}$, характеристик типа доработок d_μ , $\mu = \overline{1, r}$ и характеристик стандов V_ν , $\nu = \overline{1, m}$. При этом условия испытаний в явном виде учитываются в характеристиках стандов и в неявном виде в параметрах модели. Результаты испытаний проявляются в значениях параметров модели, описывающих процесс отработочных испытаний.

Пусть для l аналогов изделия по данным отработочных испытаний получены оценки вектора параметров $\hat{\theta}^{(\alpha)}$, $\alpha = \overline{1, l}$ моделей обработки.

Между вектором параметров θ модели обработки и характеристиками x , характеристиками типа доработок d и характеристиками вида стандов V существует связь

$$\theta_s^{(\alpha)} = f_s(x^{(\alpha)}, d^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}) + e_s^{(\alpha)}, \quad s = \overline{1, k_\theta}, \quad \alpha = \overline{1, l}, \quad (87)$$

где $f_s(\cdot)$ — функция заданного вида с неизвестными параметрами; $e_s^{(\alpha)}$ — ошибка модели.

Вид функции $f_s(\cdot)$ назначим таким образом, чтобы удовлетворить требованиям $0 \leq \theta_s \leq 1$, $s = \overline{1, g}$ и $\theta_j \geq 1$, $j = \overline{g+1, k_\theta}$. Здесь g — число вероятностных параметров модели роста.

Примем, что $\forall s = \overline{1, g}$:

$$f_s(x, d, V) = 1 - \exp \left[\eta_0^s + \sum_{\beta=1}^{M_1} \eta_\beta^s (x_\beta - \bar{x}_\beta) + \sum_{b=M_1+1}^{M_1+M_2} \eta_b^s (d_{b-M_1} - \bar{d}_{b-M_1}) + \sum_{c=M_1+M_2+1}^{M_1+M_2+M_3} \eta_c^s (V_{c-M_1-M_2} - \bar{V}_{c-M_1-M_2}) \right] \quad (88)$$

и $\forall j = \overline{g+1, k_\theta}$:

$$f_j(x, d, V) = 1 - \exp \left[\eta_0^j + \sum_{\beta=1}^{M_1} \eta_\beta^j (x_\beta - \bar{x}_\beta) + \sum_{b=M_1+1}^{M_1+M_2} \eta_b^j (d_{b-M_1} - \bar{d}_{b-M_1}) + \sum_{c=M_1+M_2+1}^{M_1+M_2+M_3} \eta_c^j (V_{c-M_1-M_2} - \bar{V}_{c-M_1-M_2}) \right], \quad (89)$$

где M_1 — число технических характеристик; M_2 — число характеристик вида стандов; M_3 — число характеристик типа доработок; \bar{x}_β , \bar{d}_b , \bar{V}_c — средние значения характеристик, соответственно технических типа доработок, вида стандов для отработанных аналогов.

Оценивание параметров $\eta_j^s, s = \overline{1, k_\theta}, j = \overline{1, M_1 + M_2 + M_3}$ целесообразно провести в два этапа.

На первом этапе используем линейную модель

$$z_s^{(\alpha)} = \eta_0^s + \sum_{\beta=1}^{M_1} \eta_\beta^s (x_\beta - \bar{x}_\beta) + \sum_{b=M_1+1}^{M_1+M_2} \eta_b^s (d_{b-M_1} - \bar{d}_{b-M_1}) + \sum_{c=M_1+M_2+1}^{M_1+M_2+M_3} \eta_c^s (V_{c-M_1-M_2} - \bar{V}_{c-M_1-M_2}), \quad (90)$$

где z_s связаны с $\theta_s^{(\alpha)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} z_s^{(\alpha)} &= \ln(1 - \theta_s^{(\alpha)}); \\ s &= \overline{1, g}; \quad \alpha = \overline{1, l}; \\ z_j^{(\alpha)} &= \ln(\theta_j^{(\alpha)} - 1); \\ j &= \overline{g+1, k_\theta}; \quad \alpha = \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (91)$$

Параметры η_j^s в первом приближении оцениваются с помощью метода наименьших квадратов. Для уточнения оценок на втором этапе целесообразно использовать метод Гаусса.

Применение зависимости (87) позволяет не только проводить анализ влияния характеристик изделия, условий и результатов испытаний на динамику роста уровня отработанности изделий, но и дает возможность следующим образом использовать априорную информацию при формировании модели базового процесса обработки.

После того, как по данным об аналогах с использованием (88)—(91) найден вид зависимости (87) для данного класса изделий, с учетом характеристик создаваемого изделия $x_j^B (j = \overline{1, n})$, характеристик типа доработок $d_\mu^B, (\mu = \overline{1, r})$ и характеристик вида стенов $V_v^B, (v = \overline{1, m})$ строится базовая зависимость

$$\theta_s^B = f_s(x^B, d^B, V^B). \quad (92)$$

По мере проведения испытаний изделия параметры модели (92) уточняются, а по данным об отклонениях оценок $\hat{\theta}_s, s = \overline{1, k_\theta}$ от базовых значений $\theta_s^B, s = \overline{1, k_\theta}$ осуществляется контроль и управление процессом обработки.

Учет заимствования ранее обработанных технических решений при построении модели базового процесса обработки проводится исходя из того, что сложность обрабатываемого изделия наращивается последовательно по этапам, и часть элементов, заимствованных из ранее созданных изделий, не участвует на ранних этапах обработки, например, автономных испытаниях. Таким образом, отдельные источники отказов отсутствуют на начальных этапах обработки.

Учет меры влияния каждого элемента и степени заимствования обработанных решений на динамику процесса обработки осуществляют следующим образом.

Вводится вектор

$$\gamma(j) = [\gamma_1(j), \gamma_{N_1}(j)], \quad j = \overline{1, l}, \quad (93)$$

где

$$\gamma_k(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й источник отказов может привести к отказу в испытаниях на данном этапе обработки;} \\ 0, & \text{если влияние } j\text{-го источника отказов на исход испытаний пренебрежимо мало.} \end{cases} \quad k = \overline{1, N_1}$$

Тогда матрица Γ размером $N_1 \times l$, образованная столбцами векторов, определяет влияние, которое оказывает каждый из устраняемых источников отказов на результаты испытаний в ходе обработки:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1(1), & \gamma_{N_1}(1) \\ \gamma_2(1), & \gamma_{N_1}(1) \\ \dots & \dots \\ \gamma_{N_1}(1), & \gamma_{N_1}(1) \end{bmatrix}.$$

Учет влияния составных элементов изделия на исходы испытаний позволяет уточнить модели обработки и охватить ряд новых практически важных сторон процесса обработки.

Выбирая тот или иной конкретный план обработки, можно фиксировать вид матрицы (93). В итоге определяется траектория роста значения вероятности безотказной работы или вероятности выявления и устранения источников отказов в конце экспериментальной обработки. Следовательно, вектор $\gamma(j)$ является набором управляющих величин, которые отражают выбранный разработчиками план испытаний.

Задача оптимизации процесса экспериментальной обработки состоит в определении такой матрицы Γ , чтобы уровень отработанности изделия в конце испытаний принимал максимальное значение.

13. АНАЛИЗ ПОДОБИЯ ПРОЦЕССОВ ОТРАБОТКИ

При планировании, контроле и оценке завершенности экспериментальной обработки возникает необходимость в сравнении параметров, характеризующих процессы экспериментальной обработки создаваемого изделия и базового образца. Базовый процесс обработки формируется с учетом опыта обработки аналогов и новых требований к изделию. Сравнение процессов целесообразно проводить по критериям подобия, обобщающим параметры процессов испытаний и определяющим закономерности в ходе обработки.

Для построения π -критериев процессов обработки используют тождественно-подобные преобразования исходных зависимостей.

Для построения критериев подобия процессов обработки используются преобразования исходных зависимостей, описывающих рост надежности и уровня отработанности изделий.

Вероятность $P(t)$ выявления и устранения источников отказов (ИО) в условиях обработки может быть оценена с помощью зависимости, имеющей вид кривой Гомперца:

$$P(t) = P_{\infty} (1 - q)^{N(1-q)t} \quad (94)$$

где P_{∞} — предельно достижимый уровень отработанности изделия в данных условиях; q — вероятность возникно-

вения отказа вследствие проявления одного из N потенциальных источников отказов.

Нормализуем зависимость (94). Разделив левую и правую части на принятую в качестве базовой величину P_{∞} , получим первый критерий подобия:

$$\pi_1(t) = \frac{P(t)}{P_{\infty}} = (1 - q)^{N(1-q)t} \quad (95)$$

Согласно третьей теореме подобия при установлении достаточных условий подобия процессов в критериях должны быть учтены граничные условия, входящие в условия однозначности. При $t=0$ получим второй критерий подобия:

$$\pi_2 = \frac{P(0)}{P_{\infty}} = (1 - q)^N.$$

Подставив $(1 - q) = \pi^{1/N}$ в (95), получим преобразованную исходную зависимость в критериальной форме подобия:

$$\pi_1(t) = \pi_2^{\pi_3(t)}$$

где $\pi_3(t) = \frac{t}{N}$ — третий критерий подобия.

Для сравнения в дополнение к зависимости типа кривой Гомперца рассмотрим ряд уравнений, используемых при моделировании процессов выявления и устранения источников отказов.

Для описания процесса обработки изделия с конечным числом источников отказов и вероятностным характером их устранения путем доработок известно уравнение роста вероятности безотказной работы:

$$P(t) = \frac{P_{\infty}(a + bP_0) - a(P_{\infty} - P_0) \times \exp[-\theta_1 P_{\infty}(t-1)]}{a + bP_0 + b(P_{\infty} - P_0) \times \exp[-\theta_2 P_{\infty}(t-1)]}, \quad (96)$$

где P_0, P_∞ — соответственно начальный и предельно достижимый в данных условиях уровни надежности; θ_1 — вероятность устранения источника отказов при наличии отказов, вызванных данным источником; θ_2 — вероятность устранения источника отказов при отсутствии отказов, вызываемых данным источником.

Процесс обработки изделия с N источниками отказов и проведением доработок как повышающих, так и понижающих надежность, описывается уравнением

$$P(t) = (1 - h - f)^t P_0 + [1 - (1 - h - f)^t] P_\infty, \quad (97)$$

где P_0, P_∞ — соответственно начальный и предельно достижимый в данных условиях уровни надежности; f — доля вероятности отказа, преобразуемая доработкой в вероятность успешного испытания; h — доля уменьшения надежности в результате проведения доработки.

Процесс обработки изделия, имеющего N резервных блоков в нагруженном режиме, может быть описан уравнением

$$P(t) = 1 - (1 - P_0)(1 - q)^{Nt}, \quad (98)$$

где P_0 — начальный уровень надежности изделия; q — доля вероятности отказа одного блока, переводимая одной доработкой в вероятность успеха.

После приведения (96)–(98) к нормализованному виду и тождественно-подобных преобразований получим критериальные модели, сведенные в табл. 5, описывающие динамику процесса обработки с помощью критериев подобия.

При малом числе параметров в исходных зависимостях, например, для случая двухпараметрической модели оценки роста вероятности выявления и устранения источников отказов за j испытаний ($j = 1, 2, \dots$)

$$P_j = [1 - (1 - q)^j]^N$$

5. Критерии подобия в динамике процесса обработки

Критериальная модель	Критерии подобия			
	$\pi_1(t)$	π_2	$\pi_3(t)$	π_4
$\pi_1(t) = \pi_2^{\pi_3(t)}$	$\frac{P(t)}{P_\infty}$	$\frac{P_0}{P_\infty}$	$\frac{t}{N}$	—
$\pi_1(t) = \frac{1 - (1 - \pi_4) \pi_2 - (1 - \pi_2) \exp[\pi_3(t)]}{1 - (1 - \pi_4) \pi_2 - (1 - \pi_2)(1 - \pi_4) \exp[\pi_3(t)]}$	$\frac{P(t)}{P_\infty}$	$\frac{P_0}{P_\infty}$	$P_\infty \theta_2 t$	$N \frac{\theta_2}{\theta_1}$
$\pi_1(t) = 1 - (1 - \pi_2)(1 - \pi_4)^{\pi_3(t)}$	$\frac{P(t)}{P_\infty}$	$\frac{P_0}{P_\infty}$	t	$\frac{f}{P_\infty}$
$\pi_1(t) = 1 - (1 - \pi_2)(1 - \pi_4)^{\pi_3(t)}$	$\frac{P(t)}{P_\infty}$	$\frac{P_0}{P_\infty}$	t	$\frac{q}{P_\infty}$

где q — вероятность проявления одного из N потенциальных источников отказов в одном испытании.

В этом случае подобные преобразования нецелесообразны. Для обеспечения подобия процессов отработки требуются тождественность исходных уравнений и пропорциональность всех параметров.

Из данных табл. 5 видно, что несмотря на различные исходные формы зависимостей, описывающих рост уровня отработанности изделий в виде вероятностей выявления и устранения ИО или вероятностей безотказной работы критерии подобия, $\pi_1(t)$ и π_2 имеют одинаковое содержание. Критерии $\pi_1(t)$ и π_2 ($\pi_2 = \pi_1(0)$) позволяют рассматривать величину $P(t)$ в едином масштабе для различных моделей роста $P(t)$. Поскольку $\pi_1(t)$ стоит в левой части уравнений, подобные процессы отработки в критериальном выражении имеют в масштабе $\frac{1}{P_\infty}$ совпадающие кривые роста и подобие процессов отработки по критерию $\pi_1(t)$ равносильно подобию по критериям π_v , $v = \overline{2, n_\pi}$.

Таким образом, критерий $\pi_1(t)$ отражает подобие динамики роста $P(t)$ в обобщенной форме, а более информативными критериями, определяющими подобие процессов отработки, являются критерии π_2 , $\pi_3(t)$, π_4 , π_{n_π} .

Критерий $\pi_3(t)$ позволяет установить подобие процессов при различных темпах отработки, которое определяется выражением:

$$\pi_3 = Bt,$$

где B — степенной комплекс параметров.

Критерий π_4 определяет форму траектории процесса отработки.

Уравнения отработки в критериальной форме для рассматриваемых зависимостей (97) и (98) полностью идентичны. Совпадают в этих критериальных моделях по смыслу также критерии π_4 , так как исходные зависимости получены при сходных по физическому смыслу предположениях при описании процесса отработки.

Одним из результатов выражения уравнения отработки в критериальной форме является сужение класса используемых моделей процесса испытаний.

14. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА ЗАВЕРШЕННОСТИ ПРОЦЕССА ОТРАБОТКИ

Критерии подобия, характеризующие накопленное число выявленных и устраненных источников отказов, а также подобие в динамике процессов отработки целесообразно использовать путем сравнения с расчетными базовыми критериями для контроля и оценки завершенности процесса испытаний.

Стохастические модели процесса отработки в критериальной форме подобия применяются для решения следующих задач:

установления с помощью комплекса критериев подобия закономерностей в динамике процесса экспериментальной отработки с учетом вероятностного характера выявления и устранения источников отказов, а также технических характеристик изделия и условий испытаний;

построения базовых зависимостей для процессов отработки определенного класса изделий;

планирования и контроля хода процесса испытаний по базовому образцу.

Схематически процедура построения и применения критериев подобия, характеризующих процесс выявления и устранения источников отказов, представлена на рис. 7.

Поскольку один и тот же процесс отработки может быть смоделирован с помощью ряда уравнений или системы уравнений, каждое из которых характеризует определенные аспекты отработки, выбор вида модели из возможных вариантов целесообразно проводить на основе сравнительного анализа точности зависимостей. Анализ осуществляется по результатам отработочных испытаний аналогов, установленных с учетом оценки подобия ранее созданных изделий и отработываемого образца.

После выбора модели процесса отработки могут быть определены объем отработки в виде числа испытаний n^*

и требуемый уровень отработанности P^B

Так, если принять модель типа (94), планируемое число испытаний

$$n^* = \frac{1}{\ln(1-q)} \ln \frac{\ln P_{тр}}{N \ln(1-q)}, \quad (99)$$

где $P_{тр}$ — требуемый уровень надежности.

Располагая оценками числа \hat{N} возможных ИО и вероятности отказа \hat{q} , определенными по результатам испытаний аналога и анализа создаваемого изделия, по формуле (99) определяют потребное число испытаний n^* .

Для контроля и оценки завершенности обработки недостаточно иметь только запланированное число испытаний n^* . Целесообразно расширить информацию путем контроля параметров процесса обработки, входящих в модель испытаний, связанных с числом n^* и оцениваемых и прогнозируемых по результатам испытаний. Очевидно, что при этом следует выбирать параметры обработки, наиболее устойчивые к изменению количества проведенных испытаний. Такими показателями могут быть критерии подобия, получаемые путем преобразования исходной зависимости.

Процедура обоснования объемов испытаний и контроля хода процесса испытаний на базе анализа подобия в динамике роста уровня отработанности изделий состоит в следующем:

выбирается аналог изделия, подобный обрабатываемому образцу по принципу функционирования, конструктивным и технологическим решениям, материалам, методам, средствам и условиям испытаний;

по результатам анализа точности оценок параметров модели, описывающей рост вероятности выявления и устранения источников отказов, с использованием результатов испытаний аналога выбирается вид исходной модели процесса обработки;

оценивается необходимое число испытаний n^* для подтверждения требуемого значения $P_{т.з}$;

строится критериальная модель подобия путем преобразования исходной зависимости роста вероятности выявления и устранения ИО;

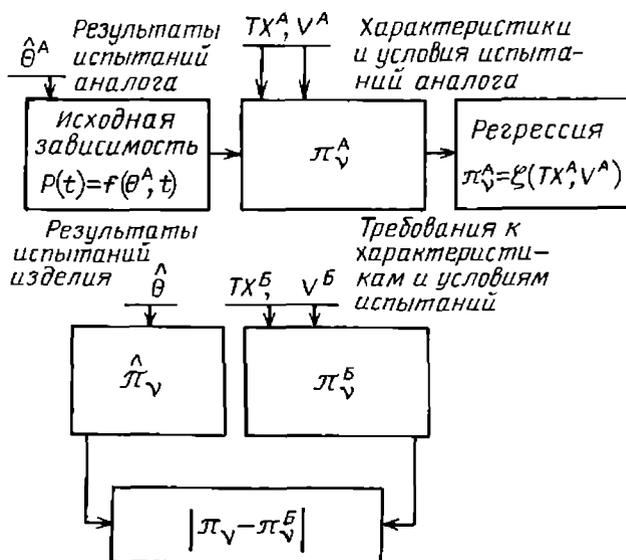


Рис. 7. Схема определения критериев подобия процессов обработки аналога (π_v^A), базового образца (π_v^B) и создаваемого изделия ($\hat{\pi}_v$)

устанавливаются связи между значениями π -критериев, характеристиками изделия и условиями отработочных испытаний;

формируются базовые значения π -критериев с учетом технических характеристик, заданных на изделие, и условий его обработки;

значения базовых критериев подобия π_v^B , $v = 1, \dots, n_{\pi}$, устанавливающих закономерности в динамике процесса обработки данного класса изделий, используются как параметры контроля хода обработки.

Контроль и управление качеством процесса обработки по критериям подобия более наглядным может быть при переходе от вероятностей событий к физическим параметрам процесса испытаний.

Чем больше производная роста вероятности выявления и устранения источников отказов в начале обработки, тем более эффективной является обработка в смысле ее завершенности.

На рис. 8 иллюстративно изображена геометрическая интерпретация оценки завершенности обработки по числу выявленных и устраненных источников отказов при испытаниях в данных условиях обработки.

Предпочтительным является процесс обработки, которому соответствует вероятность $P_1(t)$ выявления и устра-

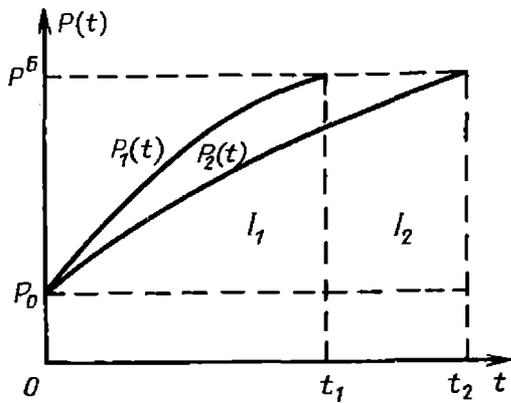


Рис. 8. Геометрическая интерпретация интегрального подобия процессов выявления и устранения источников отказов

нения источников отказов, когда обеспечивается более быстрый рост и достижение вероятности запланированного базового значения P^B уровня отработанности.

Моментам времени t_1 и t_2 сравниваемых процессов, когда можно считать обработку завершенной, соответствуют $P_1(t) = P^B$ и $P_2(t) = P^B$:

Интегральные характеристики сравниваемых процессов обработки:

$$I_1 = \int_0^{t_1} P_1(t) dt; \quad I_2 = \int_0^{t_2} P_2(t) dt.$$

Тогда интегральное подобие процессов обработки можно определить критерием, характеризующим число выявленных и устраненных источников отказов:

$$I_i = \int_0^{t_i} P(t) dt = idem, \quad (100)$$

где $P(t)$ — вероятность выявления и устранения ИО, определяющая уровень отработанности изделия в данных условиях испытаний.

На основе критерия (100) для конкретных зависимостей роста уровня отработанности можно найти инварианты подобия по числу выявленных и устраненных источников отказов. В некоторых случаях целесообразно перейти от записи критерия (100) в интегральной форме к записи суммы всех выявленных отказов.

Пусть в изделии имеется N источников отказов, причем каждый из них проявляется с вероятностью q . Считается, что если источник проявился, то он устраняется достоверно. Тогда среднее число отказов, которое будет выявлено после первого испытания, $\bar{r}_1 = Nq$, после второго испытания, $\bar{r}_2 = N(1-q)q$, после j -го испытания $\bar{r}_j = N(1-q)^{j-1}q$

Таким образом, среднее число отказов, которое будет выявлено и устранено за k испытаний:

$$\begin{aligned} \bar{R}_k &= \sum_{j=1}^k N(1-q)^{j-1}q = \\ &= N[1 - (1-q)^k]. \end{aligned} \quad (101)$$

С другой стороны, вероятность выявления и устранения всех имеющихся в изделии отказов за k испытаний

$$P_k = [1 - (1-q)^k]^N.$$

Отсюда получим

$$P_k = \left[\frac{\bar{R}_k}{N} \right]^N$$

Записав согласно (101) условие стохастического подобия как $P_k = idem$, перейдем к критерию подобия по числу выявленных и устраненных источников отказов в виде физической величины:

$$\left[\frac{\bar{R}_k}{N} \right]^N = idem. \quad (102)$$

Прогнозируя для k испытаний (этапов обработки) базовые значения критериев подобия π_v^B , $v = \bar{1}, n, \pi$, характеризующих динамику процесса обработки, или определив интегральное подобие процессов обработки в виде (100), (102), можно решать задачу контроля хода процесса обработки для подготовки решения о завершенности отработочных испытаний.

Анализ подобия реального и базового процессов расширяет информацию о состоянии обработки. В то же время критерии, учитывающие число выявленных и устраненных источников отказов, являются дополнительными по отношению к основным критериям, учитывающим параметрический подход к описанию процессов планирования, контроля и оценки завершенности обработки.

1. МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНЫХ ВЫБОРОК И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ ПО НЕОДНОРОДНЫМ ДАННЫМ

Подобными изделиями могут являться однотипные изделия, выпускаемые различными заводами; конструктивно-подобные изделия, характеризующиеся различными типоразмерами; однотипные изделия, выпускаемые одним и тем же заводом в различные интервалы времени; одинаковые изделия, эксплуатирующиеся в различных условиях; однотипные изделия до и после модернизации или доработки.

Результаты испытаний подобных изделий образуют k групп выборочных значений, однородных внутри одной группы. Каждая группа представляет результаты испытаний одного типа изделий.

Группы данных, относящихся к различным изделиям, даже если эти изделия подобны между собой, в общем случае являются неоднородными. Характер этой неоднородности может быть различным в зависимости от физического содержания подобия.

Неоднородная выборка, состоящая из k однородных выборок, записывается в виде:

$$\begin{matrix} x_{11}, & \dots, & x_{1i}, & \dots, & x_{1n_1}; \\ x_{j1}, & \dots, & x_{ji}, & \dots, & x_{jn_j}; \\ x_{k1}, & \dots, & x_{ki}, & \dots, & x_{kn_k}; \end{matrix} \quad (1)$$

$$x_{k1}, \dots, x_{ki}, \dots, x_{kn_k};$$

$$\sum_{j=1}^k n_j = n.$$

Каждая j -выборка $x_{j1}, \dots, x_{ji}, \dots, x_{jn_j}$ представляет собой подпоследовательность реализаций независимых одинаково распределенных случайных величин (н. о. р. с. в.), общее распределение которых $f_j(x_j, \theta_j)$. Генеральные совокупности, из которых взяты соответствующие однородные выборки, обычно называют слоями.

Неоднородную выборку типа (1), содержащую все j -выборки ($j = \overline{1, k}$), называют k -расслоенной выборкой.

Каждый слой характеризуется своими параметрами θ_j , а каждая соответствующая слою выборка может характеризоваться своими статистиками (функциями от выборочных значений, принадлежащих j -й совокупности). Одной из таких статистик

$$x_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ji} \quad (2)$$

является j — выборочное среднее.

Задача оценивания показателей надежности по неоднородным данным формулируется следующим образом: используя расслоенную выборку (1) в качестве исходных данных, оценить параметр (или функцию от параметров) j -й совокупности (для конкретности θ_1), т. е. найти оценочную функцию:

$$z = z(x_{11}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{k1}, \dots, x_{kn_k}),$$

которая была бы наилучшей (в соответствии с принятым критерием) объединенной оценкой параметра θ_1 .

В зависимости от того, известен ли вид закона распределения, модели де-

лятся на два класса: модели, свободные от распределений, и модели с известным видом распределения. Модели, свободные от распределений, и задачи, с ними связанные, обычно являются непараметрическими. Модели же с известным видом распределения и задачи, связанные с этими моделями, являются параметрическими.

Соотношения между параметрами надежности подобных изделий называют моделями переноса информации (МПИ).

Модели переноса информации делятся на три класса.

1) Модели, содержащие функциональные связи между параметрами, которые могут быть записаны в виде:

$$\theta_j = \varphi(\theta_1), \quad j = \overline{2, k}. \quad (3)$$

Эти модели характеризуются наибольшим уровнем информированности исследователя о физике процессов. В этом случае может быть осуществлено приведение j -й выборки к первой. При этом неоднородность не имеет принципиального значения и совместную выборку можно считать неоднородной, приводимой к однородной. Особенностью этой ситуации является то, что при этом полностью используется вся информация, содержащаяся во второй выборке. Ее преобразование не сопровождается потерями информации. Поэтому существуют методы получения состоятельной оценки не только по первой, но и по любой j -выборке, т. е. при бесконечном увеличении объема j -выборки оценки стремятся к θ_1 . Эффективность методов в этом случае достигается за счет высокого уровня априорной информированности.

2) Второй класс моделей связан с наличием априорной информации ограничительного характера. Он может использоваться в ситуациях, когда из априорных соображений могут быть установлены лишь ограничения на степень различия между неизвестными параметрами. Примерами таких ограничений могут быть соотношения типа

$$\theta_j = \varphi(\theta_1) + \xi_j, \quad \xi_j \in (C_{j1}, C_{j2}), \\ j = \overline{2, k}. \quad (4)$$

Такой информации недостаточно, чтобы осуществить полное преобразо-

вание одной выборки к другой без потери информации. В этом случае не существует оценки, состоятельной по j -выборке ($j = \overline{2, k}$), т. е. оценки, значение которой сходится к θ_1 при увеличении j -выборки до бесконечности (при $n_j \rightarrow \infty$). Выборки, описываемые этими моделями, уже не являются приводимыми к однородным.

3) Третий класс моделей может быть использован в ситуациях минимальной информированности в случаях, когда можно предположить, что j -выборка принадлежит тому же распределению, что и первая выборка, или, по крайней мере, близкому (по параметру θ_j) распределению. Однако полной уверенности в этом нет.

Поэтому процедура оценивания осуществляется в два этапа. На основе критериев согласия проверяется гипотеза об однородности расслоенной выборки. В случае положительного решения j -выборка объединяется с первой, а в случае отрицательного — она исключается из обработки. Положительное решение в большинстве случаев будет только в случае малых ξ_j . Такой подход может быть осуществлен с осторожностью и с подключением к процедуре анализа инженерного содержания подобия.

Особенностью рассматриваемых задач является оценивание в условиях малой выборки. Поэтому асимптотические свойства оценок при этом решающего значения не имеют. Важно, чтобы оценка z , построенная по конечной выборке, была «близка» к оцениваемому параметру θ_1 . Поэтому качество оценки следует характеризовать средним квадратом ошибки этой оценки относительно параметра θ_1 (с. к. о.)

$$W(\theta_1) = E\{(z - \theta_1)^2\} = \\ = E\{(z - E\{z\})^2\} + (E\{z\} - \theta_1)^2.$$

Если z — несмещенная оценка, то с. к. о. совпадает с дисперсией оценки.

При использовании моделей второго и третьего класса с. к. о. оценки будет зависеть от неизвестных ξ_j . Поэтому качество оценки следует характеризовать максимальным по ξ_j с. к. о.;

$$W^*(\theta_1) = \max_{\xi_j} W(\theta_1, \xi_j).$$

2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Традиционная задача параметрического оценивания показателей надежности решается в предположении, что известно с точностью до неизвестного параметра θ ($\theta \in \Theta$) распределение случайной величины, являющейся результатом испытаний (эксплуатации). Это могут быть, например, продолжительности работы x_1, \dots, x_n однотипных изделий до достижения ими предельного состояния. Значения x_1, \dots, x_n — н. о. р. с. в., общая плотность распределения которых $f(x, \theta)$. Задача состоит в оценивании неизвестного параметра θ с использованием выборочных значений x_1, \dots, x_n в качестве исходных данных.

Важную роль в задачах оценивания играет метод максимального правдоподобия. Суть метода заключается в том, что в качестве оценки $t = t(x_1, \dots, x_n)$ неизвестного параметра принимается значение, максимизирующее функцию правдоподобия,

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \\ = A \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta), \theta \in \Theta$$

по неизвестному параметру. Другими словами, оценкой максимального правдоподобия (ОМП) называют функцию $t = t(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющую соотношению:

$$L(x_1, \dots, x_n, t) = \\ = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta).$$

Переходя от функции правдоподобия к ее логарифму, запишем ОМП в виде

$$t = \arg \max_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^n \log f(x_i, \theta).$$

Метод максимального правдоподобия нашел широкое применение (в частности, в задачах оценивания показателей надежности) благодаря простоте и свойствам, присущим ОМП.

При выполнении достаточно широких условий ОМП состоятельны, асимптотически нормальны и эффективны.

Статистикой называют любую функцию $T = T(x_1, \dots, x_n)$, зависящую только от выборочных данных, поскольку x_1, \dots, x_n — случайные величины, то и любая функция $T(x_1, \dots, x_n)$ также является случайной. Первая проблема, которая связана с техникой обработки многочисленных данных, содержащихся в результатах эксплуатации и испытаний изделий на надежность, — это нахождение такой статистики $T(x_1, \dots, x_n)$, которая бы содержала всю информацию об оцениваемом параметре. Такую статистику называют достаточной.

Всякая несмещенная оценка t параметра θ при выполнении условий регулярности удовлетворяет неравенству Рао-Крамера:

$$E\{(t - \theta)^2\} \geq \frac{1}{I(x)},$$

где

$$I(x) = E \left\{ \left(\frac{d \log L}{d\theta} \right)^2 \right\}$$

— количество информации, содержащейся в выборке.

Несмещенную оценку t , с. к. о. которой при всех θ ($\theta \in \Theta$) равен минимальной границе $\frac{1}{I(x)}$, называют МГД-оценкой (МГД — минимальная граница дисперсии).

Из теории оценивания следует, что если несмещенная МГД-оценка существует, то она может быть найдена методом максимального правдоподобия. Например, для нормального распределения ОМП, равная выборочному среднему, является МГД-оценкой. Это утверждение касается оценок, полученных в классе несмещенных оценок. Если это ограничение снять, то можно показать, что существуют оценки, которые имеют не только дисперсию, меньшую, чем МГД-оценки, но и с. к. о., меньший, чем нижняя граница дисперсий, даваемая неравенством Рао-Крамера.

В задачах оценивания показателей надежности по данным нескольких

групп наблюдений (1), принадлежащих различным генеральным совокупностям, ОМП $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$ неизвестного вектора параметров $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ называют функции $t_j = t_j(x_{11}, \dots, x_{nk_n})$, $j = \overline{1, k}$, удовлетворяющие соотношению:

$$L(x_{11}, \dots, x_{nk_n}, t_1, \dots, t_k) = \\ = \max_{\theta_1, \dots, \theta_k} L(x_{11}, \dots, x_{nk_n}, \theta_1, \dots, \theta_k).$$

Максимум функции правдоподобия ищется в области определения $\bar{\theta} \in \Theta$. Эта область может быть некоторой пространственной кривой или поверхностью, задаваемой системой уравнений:

$$\Phi_l(\theta_1, \dots, \theta_k) = 0,$$

$$l = \overline{1, l}, \quad l < k$$

или некоторым ограниченным пространством.

При обработке методом максимального правдоподобия неоднородных данных следует учитывать, что при оценивании параметров по данным, принадлежащим различным законам распределения, ОМП могут оказаться несостоятельными. Кроме того, метод максимального правдоподобия является неустойчивым по отношению к отклонениям распределения от предполагаемого.

3. ЛИНЕЙНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ОЦЕНОК ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ПОДОБНЫХ ИЗДЕЛИЙ ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ДИСПЕРСИЯХ

Обобщение результатов испытаний подобных изделий может быть осуществлено путем объединения оценок, если имеется возможность получить несмещенные оценки с известными свойствами. В качестве таких оценок обычно используются выборочные средние (2).

В этом случае задача объединения оценок x_1, x_2, \dots, x_n статистического параметра a состоит в нахождении функции

$$z = z(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

которая была бы наилучшей (в соответствии с принятым критерием) объединенной оценкой параметра a .

В зависимости от имеющейся информации о дисперсии оценок возможны различные методы объединения оценок.

Рассмотрим метод, относящийся к ситуации, когда оценки x_1, x_2, \dots, x_n являются несмещенными. Дисперсии их известны и равны соответственно $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$. В качестве оценочной функции примем линейную комбинацию

$$z = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

Тогда, если коэффициенты α_i удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

объединенная оценка z будет не смещенная.

Значения коэффициентов α_i , обеспечивающие минимум дисперсии оценки:

$$D = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2,$$

равны

$$\alpha_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (5)$$

Окончательная формула для объединения оценок показателей надежности подобных изделий имеет вид

$$z = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (6)$$

Дисперсия оценки (6), характеризующая ее точность, определяется формулой

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (7)$$

В случае объединения двух оценок x и y формулы (6) и (7) имеют вид:

$$z = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} x + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} y; \quad (8)$$

$$D = \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (9)$$

Тогда, если x и σ_x^2 соответственно экспериментальная оценка и ее дисперсия, то эффективность объединенной оценки Z

$$e(z) = \frac{\sigma_x^2}{D} \quad (10)$$

характеризуется соотношением

$$e(z) = 1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \quad (11)$$

Объединение оценок с помощью выражений (6) возможно в том случае, если известны точные значения дисперсий этих оценок.

Такие ситуации в практических задачах оценки надежности встречаются весьма редко.

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКИ, ПОЛУЧЕННОЙ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ИЗДЕЛИЙ-АНАЛОГОВ ИЗВЕСТНОГО ОБЪЕМА

Рассмотрим часто применяющиеся на практике планы испытаний.

I. Испытывается N_1 восстанавливаемых изделий в течение времени t_i каждое.

Поток отказов изделий простейший с неизвестным параметром λ_1 . Оценочное значение этого параметра

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{R_1}{S_1}$$

где R_1 — полное число отказов всех изделий за время испытаний;

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N_1} t_i \text{ — полная наработка изделий.}$$

Дисперсия этой оценки выражается через неизвестный параметр

$$\sigma_1^2 = \frac{\lambda_1}{S_1}$$

и поэтому в процессе испытаний не бывает известной.

Тогда для объединения $\hat{\lambda}_1$ с оценкой $\hat{\lambda}_2$, полученной аналогичным образом по материалам предшествующих испытаний подобного изделия с общей наработкой S_2 , формулу (8) преобразуем следующим образом:

$$\lambda_0 = \frac{S_1}{S_1 + S_2} \hat{\lambda}_2 + \frac{S_2}{S_1 + S_2} \hat{\lambda}_1 \quad (12)$$

В полученной форме неизвестный показатель λ отсутствует. Эффективность улучшенной оценки λ_0

$$e(\lambda_0) = 1 + \frac{S_2}{S_1}$$

Пример 1. По результатам испытаний двигателей с общей наработкой $S_1 = 3000$ ч получена оценка интенсивности отказов $\hat{\lambda}_1 = 10^{-3}$ 1/ч. По данным предшествующей подконтрольной эксплуатации подобных двигателей

$$\hat{\lambda}_2 = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч при } S_2 = 5000 \text{ ч.}$$

Объединенная оценка

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{3000}{3000 + 5000} \cdot 0,6 \cdot 10^{-3} + \\ &+ \frac{5000}{3000 + 5000} \cdot 10^{-3} = \\ &= 0,85 \cdot 10^{-3} \text{ (1/ч).} \end{aligned}$$

Эффективность объединенной оценки λ_0 будет равна

$$e(\lambda_0) = 1 + \frac{5000}{3000} = 2,6.$$

II. Испытывается N_1 невосстанавливаемых изделий, фиксируются моменты отказов каждого из них t_1, t_2, \dots, t_{N_1} . Испытания проводятся до отказа всех изделий. Оценочное значение среднего времени безотказной работы

$$T_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} t_i}{N_1}.$$

Ситуация относится к случаю, когда априорная оценка \hat{T}_2 получена в процессе предшествующих испытаний подобных изделий в количестве N_2 шт.

Поскольку дисперсия оценок \hat{T}_1 и \hat{T}_2 определяется соответственно выражениями:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{N_1} \text{ и } \sigma_2^2 = \frac{\sigma^2}{N_2}$$

(σ^2 — неизвестная дисперсия величины t_i), формула для объединения оценок \hat{T}_1 и \hat{T}_2 принимает вид

$$T_0 = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \hat{T}_1 + \frac{N_2}{N_1 + N_2} \hat{T}_2. \quad (13)$$

Эффективность оценки

$$e(T_0) = 1 + \frac{N_2}{N_1}.$$

Пример 2. В результате испытаний на износ десяти переключателей получено $\hat{T}_1 = 75\,000$ циклов. Предварительные испытания 5 шт. подобных переключателей дали $\hat{T}_2 = 110\,000$ циклов. Требуется определить T_0 .

По формуле (13)

$$T_0 = \frac{10}{10 + 5} 75\,000 + \frac{5}{10 + 5} 110\,000 = 85\,000 \text{ циклов.}$$

Эффективность использования данных предварительных испытаний

$$e = 1 + \frac{5}{10} = 1,5.$$

III. Испытывается N_1 изделий в течение времени t . Оценочное значение вероятности безотказной работы изделий за время t определяется формулой

$$\hat{P}_1 = \frac{N_1 - R_1}{N_1},$$

где R_1 — число отказавших изделий.

Рассматриваемая ситуация относится к случаю, когда априорная оценка \hat{P}_2 получена в результате испытаний N_2 шт. изделий.

Поскольку дисперсии оценок \hat{P}_1 и \hat{P}_2 определяются выражениями:

$$\sigma_1^2 = \frac{P(1-P)}{N_1}; \quad \sigma_2^2 = \frac{P(1-P)}{N_2}$$

(P — неизвестная вероятность отсутствия отказов изделия), формула для объединения оценок принимает вид

$$P_0 = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \hat{P}_1 + \frac{N_2}{N_1 + N_2} \hat{P}_2. \quad (14)$$

Эффективность объединенной оценки $e(P_0)$:

$$e(P_0) = 1 + \frac{N_2}{N_1}.$$

Пример 3. При испытаниях семи изделий в течение заданного времени получена оценка вероятности безотказной работы $P_1 = 0,9$. Из предшествующих испытаний изделий-аналогов имеем $N_2 = 5$ и $P_2 = 0,7$.

Объединенная оценка:

$$P = \frac{7}{5 + 7} \cdot 0,9 + \frac{5}{5 + 7} \cdot 0,7 = 0,82.$$

Эффективность оценки P_0

$$e = 1 + \frac{5}{7} = 1,7.$$

Во всех приведенных случаях можно использовать линейное объединение оценок, если известен объем предвари-

тельных испытаний изделий, подобных исследуемому.

IV. Испытываются восстанавливаемые изделия с общей наработкой, равной S .

В результате испытаний имеем оценку $\hat{\lambda}$ параметра потока отказов.

Дисперсия оценки

$$D\{\hat{\lambda}\} = \frac{\lambda}{S}$$

неизвестна.

Кроме этого, имеется расчетная оценка $\bar{\lambda}$ с дисперсией $\sigma_{\bar{\lambda}}^2$.

В случае известной дисперсии априорной оценки линейное объединение оценок может быть осуществлено по следующим формулам:

$$\lambda_0' = \frac{\frac{\bar{\lambda}}{S}}{\sigma_{\bar{\lambda}}^2 + \frac{\bar{\lambda}}{S}} \bar{\lambda} + \frac{\frac{\sigma_{\bar{\lambda}}^2}{\bar{\lambda}}}{\sigma_{\bar{\lambda}}^2 + \frac{\bar{\lambda}}{S}} \hat{\lambda};$$

$$\lambda_0'' = \frac{\frac{\hat{\lambda}}{S}}{\sigma_{\bar{\lambda}}^2 + \frac{\hat{\lambda}}{S}} \bar{\lambda} + \frac{\frac{\sigma_{\bar{\lambda}}^2}{\hat{\lambda}}}{\sigma_{\bar{\lambda}}^2 + \frac{\hat{\lambda}}{S}} \hat{\lambda}.$$

Более точная формула может быть получена, если значения неизвестного параметра выразить непосредственно через объединенную оценку:

$$\lambda_0 = \frac{\bar{\lambda} - \sigma_{\bar{\lambda}}^2 S}{2} + \sqrt{\left(\frac{\bar{\lambda} - \sigma_{\bar{\lambda}}^2 S}{2}\right)^2 + \sigma_{\bar{\lambda}}^2 S \hat{\lambda}}. \quad (15)$$

Ориентировочно эффективность объединенной оценки определяется выражением

$$e(\lambda_0) = 1 + \frac{\lambda_0}{S \sigma_{\bar{\lambda}}^2}.$$

Полученная формула совпадает с байесовской оценкой показателя надежности (см. гл. 9).

Пример 4. В результате испытаний трех образцов в течение 700 ч зафиксировано 11 отказов. Известна априор-

ная оценка и ее дисперсия $\bar{\lambda} = 3 \times 10^{-3}$ 1/ч и $\sigma_{\bar{\lambda}}^2 = 1 \cdot 10^{-6}$ 1/ч.

В этом случае объединенная оценка

$$\lambda_0 = \frac{3 \cdot 10^{-3} - 10^{-6} \cdot 2100}{2} + \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{-3} - 10^{-6} \cdot 2100}{2} + 10^{-6} \cdot 2100 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} \approx 3,85 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч.}$$

Эффективность использования расчетного значения надежности приближенно оценивается по формуле

$$e = 1 + \frac{3,85 \cdot 10^{-3}}{2100 \cdot 10^{-6}} \approx 2,8.$$

5. ОБЪЕДИНЕНИЕ ОЦЕНОК ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ПОДОБНЫХ ИЗДЕЛИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Рассмотрим ситуацию, когда по результатам сокращенных испытаний изделий получена оценка показателя надежности. Имеется априорная оценка этого показателя, полученная в результате испытаний подобных изделий на предшествующем этапе или путем расчета по существующей методике. Допустим, имеется достаточный опыт эксплуатации, в процессе которого накоплены данные, позволяющие установить статистическую связь между такими же оценками и соответствующими эксплуатационными показателями надежности по изделиям, подобным испытываемому. Такие данные могут быть использованы для выработки правила, на основании которого можно прогнозировать эксплуатационную надежность разрабатываемого изделия посредством объединения экспериментальной и априорной оценок. Процесс выработки такого правила по имеющимся статистическим данным называется обучением.

Уточним задачу. Априорные данные задаются в виде значений показателей

надежности и их оценок для k типов изделий:

$$(x_1, y_1, a_1), (x_2, y_2, a_2),$$

$$(x_i, y_i, a_i),$$

$$(x_k, y_k, a_k),$$

где x_i и y_i — оценки показателей надежности a_i i -го типа изделия.

Требуется на основании этих данных выработать правило, позволяющее объединить оценки x_{k+1} и y_{k+1} неизвестного показателя надежности a_{k+1} ($k+1$)-го типа изделия, аналогичного k изделиям.

Класс оценочных функций можно ограничить линейным:

$$z(x, y, \alpha, \beta) = \alpha\varphi(x) + \beta f(y),$$

где $\varphi(x)$ и $f(y)$ — известные функции; α и β — неизвестные коэффициенты. Тогда выбор правила сводится к определению коэффициентов α и β .

Для оценки качества обучения следует выбрать критерий, в соответствии с которым выбирается правило. Наиболее подходящими будут следующие критерии.

1. Максимум вероятности того, что отклонение оценки $z(x, y, \alpha, \beta)$, вычисленной в соответствии с данным правилом, от эксплуатационного показателя надежности не превышает заданной величины γ :

$$P \left\{ \left| \frac{z-a}{a} \right| \leq \gamma \right\} = \max.$$

2. Минимум коэффициента вариации δ^2 оценки $z(x, y, \alpha, \beta)$:

$$\delta^2 = E \left\{ \left(\frac{z-a}{a} \right)^2 \right\} = \min.$$

При этом следует использовать оценки показателей P^* и δ^2 , которые могут быть получены из статистических данных. Рассмотрим пример получения оценки показателей качества обучения \hat{P} и практического применения процедуры обучения для получения оценочной формулы.

Пример 5. Предположим, что из опыта эксплуатации изделий получены статистические данные для k изделий. По каждому изделию известны три значения:

T_i — значение среднего времени до отказа i -го типа изделий, полученное по данным эксплуатации большого количества таких изделий; $i = 1, 2, \dots, k$;

\bar{T}_i — априорное значение среднего времени до отказа i -го типа изделий; порядок расчета и исходные данные установлены методикой и одинаковы для всех типов изделий; величина $\left(\frac{\bar{T}_i - T_i}{T_i} \right)$ имеет одинаковое распределение для всех типов изделий;

\hat{T}_i — экспериментальное значение среднего времени до отказа i -го типа изделий, полученное в результате сокращенных испытаний; количество испытываемых изделий и режимы испытаний установлены методикой и одинаковы для всех типов изделий, поэтому предполагается, что величина $\left(\frac{\hat{T}_i - T_i}{T_i} \right)$ имеет одинаковое распределение для всех типов изделий.

Статистические данные для примера 5 представлены в табл. 1.

Требуется по этим данным получить формулу, позволяющую оценить надежность $(k+1)$ -го типа изделий по результатам сокращенных испытаний \hat{T}_{k+1} и расчетной величине \bar{T}_{k+1} .

Оценочную формулу будем искать в виде

$$z = \alpha \hat{T} + (1 - \alpha) \bar{T}.$$

1. Статистические данные к примеру 5

T_i	\bar{T}_i	\hat{T}_i	T_i	\bar{T}_i	\hat{T}_i
994	288	552	911	1047	627
1230	1460	1674	531	1024	688
1287	1670	519	781	678	275
1102	640	279	789	1156	651
1257	646	485	1448	1615	157
1483	1251	6810	688	763	564
674	644	1211	1000	430	364
824	1017	336	1034	1942	957
1169	1373	1034	1215	1457	793
751	4821	656	1189	670	636
539	395	487	940	1014	1139
1167	1037	1894	1162	820	1340
883	779	391			

В качестве критерия оптимальности оценочного правила примем максимум вероятности того, что объединенная оценка отличается от параметра не более чем на 30%. Процесс обучения в данном случае состоит в выборе значения α , которое обеспечивает максимум оценки вероятности:

$$P^* \left\{ \left| \frac{z - T}{T} \right| < 0,3 \right\} = \max_{\alpha}$$

В данном случае $\alpha = 0,6$ и формула для объединения оценок \hat{T}_{k+1} и \bar{T}_{k+1} принимает вид

$$z = 0,4\bar{T} + 0,6\hat{T}$$

Метод простого перебора возможных правил и выбор среди них наилучшего становится громоздким, когда число неизвестных параметров больше единицы. При практических расчетах в таких случаях необходимо использовать численные методы поиска минимума с помощью ЭВМ.

6. ПРИМЕНЕНИЕ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ ОЦЕНОК

Определение правила для объединения оценок показателей надежности подобных изделий существенно упрощается, если искомое правило ограничить классом линейных функций, а в качестве критерия принять минимум статистического значения коэффициента вариации объединенной оценки:

$$\delta_z^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\alpha \varphi(x_i) + \beta f(y_i) - a_i}{a_i} \right)^2$$

Определение коэффициентов α и β , обеспечивающих минимум квадратичной формы, есть задача регрессионного анализа.

Значения α и β определяются из следующей системы уравнений:

$$\alpha A + \beta B = C;$$

$$\alpha B + \beta D = E,$$

где

$$A = \sum_{i=1}^k \frac{\varphi^2(x_i)}{a_i^2};$$

$$B = \sum_{i=1}^k \frac{f(y_i) \varphi(x_i)}{a_i^2};$$

$$C = \sum_{i=1}^k \frac{\varphi(x_i)}{a_i};$$

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{f^2(y_i)}{a_i^2};$$

$$E = \sum_{i=1}^k \frac{f(y_i)}{a_i}.$$

Используя введенные обозначения, выражения для коэффициентов α и β представим в виде:

$$\alpha = \frac{BE - CD}{B^2 - AD};$$

$$\beta = \frac{BC - AE}{B^2 - AD}.$$

Эффективность использования априорной оценки y при ее объединении с текущей x в этом случае целесообразно оценивать уменьшением статистического значения коэффициента вариации:

$$e^*(z) = \frac{\delta_x^2}{\delta_z^2},$$

где

$$\delta_x^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - a_i}{a_i} \right)^2$$

При объединении несмещенных оценок x и y , соответствующих случаю полного подобия, решение задачи регрессии значительно упрощается

В этом случае класс оценочных функций ограничивается

$$z = \eta x + (1 - \eta) y.$$

Значение η , обеспечивающее минимум квадратичной формы:

$$\delta^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\eta x_i + (1 - \eta) y_i - a_i}{a_i} \right)^2$$

можно найти по формуле

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i^2} (a_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - y_i}{a_i} \right)^2} \quad (16)$$

Пример 6. Используя статистические данные табл. 1, можно с помощью (16) получить формулу для объединения оценок.

Подставив данные табл. 1 в формулу (16), получим

$$\eta \approx 0,35.$$

Тогда

$$z = 0,35 \hat{T} + 0,65 \bar{T}.$$

Процедуры обучения для выработки правила объединения оценок показателей надежности могут быть эффективны только в результате детального инженерного анализа статистических материалов. Успех обучения прежде всего зависит от того, насколько устойчива статистическая зависимость между показателями надежности изделий и аналогов.

Для этого необходимо подобие изделий, данные по которым используются для обучения.

Очевидно, понятие подобия изделий условно. Для обучения можно использовать более широкие классы изделий. Однако в этом случае статистическая зависимость между показателями надежности и их оценками становится менее устойчивой и эффективность обучения уменьшается. Для повышения эффекта обучения рекомендуется по возможности ограничивать класс изделий, используемых для обу-

чения, более узкими признаками. Однако этот класс должен быть таким, чтобы применяемая для обучения выборка содержала данные не менее чем по 20—30 изделиям.

Необходимо помнить, что общие свойства изделий и их оценок, обеспечивающих их подобие и в связи с этим возможность обучения, должны распространяться на изделия, для оценки надежности которых выводятся расчетные формулы. Без выполнения этого условия прогнозирование полученных выводов в область неизвестных показателей надежности было бы неправомерным.

7. УНИФИЦИРОВАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЗАДАЧАХ НАДЕЖНОСТИ, В ВИДЕ СЕМЕЙСТВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Семейство распределений экспоненциального типа в однопараметрическом случае имеет вид

$$f(x, \theta) = h(x) \exp \{A(\theta) U(x) + V(\theta)\}. \quad (17)$$

Возможность представления плотности распределения случайной величины в виде (17) является достаточным условием того, чтобы распределение обладало достаточной статистикой.

Если x_1, \dots, x_n — н. о. р. с. в., имеющие плотность распределения (17), то достаточной статистикой будет

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n U(x_i).$$

Таким образом, если выполняется (17), то существует достаточная статистика для параметра θ , с помощью которой может быть построена единственная функция от этой статистики, являющаяся МГД-оценкой.

Семейству (17) принадлежат все основные распределения, встречающиеся в теории и практике надежности.

Нормальный закон $N(\theta, \sigma^2)$ (σ^2 — известно):

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Плотность совместного распределения n случайных величин, взятых из нормального закона, имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n, \theta) = h(x_1, \dots, x_n) \times \exp\left\{\frac{\theta}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n\theta^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

В случае неизвестного σ^2 нормальное распределение принадлежит двухпараметрическому экспоненциальному типу.

Обычно нормальный закон используют для описания случайных величин, если плотность их распределения имеет одновершинный симметричный вид.

Логарифмически нормальный закон $\ln N(a, \sigma^2)$ (σ^2 — известно);

$$f(x, a) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}\right\} = h(x) \exp\left\{\frac{a}{\sigma^2} \ln x - \frac{a^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Плотность совместного распределения н. о. р. с. в., общее распределение которых логарифмически нормальное, имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n, a) = h(x_1, \dots, x_n) \times \exp\left\{\frac{a}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{na^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Экспоненциальный закон $e(T)$:

$$f(x, T) = \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}x} = \exp\left\{-\frac{1}{T}x - \ln T\right\}.$$

В случае, если x_1, \dots, x_n — н. о. р. с. в. из $e(T)$, то

$$f(x_1, \dots, x_n, T) = \exp\left\{-\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n x_i - n \ln T\right\}.$$

Экспоненциальный закон наиболее широко применяется в задачах надежности благодаря своей простоте. Он достаточно хорошо описывает реальные ситуации, например, такие, когда отказом является превышение случайной стационарной нагрузки некоторого допустимого уровня.

Другим примером случайной величины, имеющей экспоненциальный закон распределения, является время до первого отказа устройства, состоящего из большого числа элементов.

Гамма-распределение $\Gamma(T, p)$ (p — известно):

$$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^p x^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} \quad p > 0.$$

Более удобной является запись гамма-распределения с использованием иной параметризации:

$$f(x, T) = \frac{\left(\frac{1}{T}\right)^p x^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-\frac{1}{T}x} = h(x) \exp\left\{-\frac{1}{T}x - p \ln T\right\}.$$

В случае, когда x_1, \dots, x_n — н. о. р. с. в., имеющие гамма-распределение, совместная плотность

$$f(x_1, \dots, x_n, T) = h(x_1, \dots, x_n) \times \exp\left\{-\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n x_i - np \ln T\right\}.$$

Распределение Вейбулла $W(\alpha, \beta)$ (β — известно):

$$f(x, \alpha) = \frac{\beta}{\alpha} x^{\beta-1} \exp\left\{-\frac{x^\beta}{\alpha}\right\} = h(x) \exp\left\{-\frac{1}{\alpha} x^\beta + \ln \frac{1}{\alpha}\right\}.$$

2. Основные характеристики законов распределения

Распределение	Обозначение	Неизвестный параметр	$A(\theta)$	$U(x)$
Нормальное	$N(\theta, \sigma^2)$	θ	$\frac{\theta}{\sigma^2}$	x
Логарифмически нормальное	$\ln N(a, \sigma^2)$	a	$\frac{a}{\sigma^2}$	$\ln(x)$
Экспоненциальное	$e(T)$	T	$-\frac{1}{T}$	x
Гамма-распределение	$\Gamma(T, \rho)$	T	$-\frac{\rho}{T}$	$\frac{x}{\rho}$
Вейбулла	$W(\alpha, \beta)$	α	$-\frac{1}{\alpha}$	x^β
Пуассона	$P(\lambda)$	λ	$t \ln \lambda t$	$\frac{x}{t}$
Биномиальное	$Be(\rho, N)$	ρ	$N \ln \frac{\rho}{1-\rho}$	x/N
Распределение	$V(\theta)$	$E\{x\}$	$\frac{dA}{d\theta}$	$\frac{dV}{d\theta}$
Нормальное	$-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}$	θ	$\frac{1}{\sigma^2}$	$-\frac{\theta}{\sigma^2}$
Логарифмически нормальное	$-\frac{a}{2\sigma^2}$	$e\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right)$	$\frac{1}{\sigma^2}$	$-\frac{a}{\sigma^2}$
Экспоненциальное	$-\ln T$	T	$\frac{1}{T^2}$	$-\frac{1}{T}$
Гамма-распределение	$-\rho \ln T$	ρT	$\frac{\rho}{T^2}$	$-\frac{\rho}{T}$
Вейбулла	$\ln \frac{1}{\alpha}$	$\alpha^{1/\beta} \Gamma(1 + 1/\beta)$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$-\frac{1}{\alpha}$
Пуассона	$-\lambda t$	λt	t/λ	$-t$
Биномиальное	$N \ln(1-\rho)$	ρ^N	$N \frac{1}{\rho(1-\rho)}$	$-\frac{N}{1-\rho}$

Совместная плотность распределения n независимых случайных величин x_1, \dots, x_n :

$$f(x_1, \dots, x_n, \alpha) = h(x_1, \dots, x_n) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n x_i + n \ln \frac{1}{\alpha} \right\}.$$

Распределение Вейбулла и гамма-распределение получили широкое распространение в теории надежности для описания времени до разрушения изделия в ситуации с явно выраженным процессом накопления повреждений.

Рассмотрим еще два распределения дискретных случайных величин, которые также принадлежат экспоненциальному семейству.

Распределение Пуассона $P(\lambda)$:

$$f(x, \lambda) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} = \\ = h(x) \exp \{ x \ln \lambda t - \lambda t \}.$$

Распределение Пуассона хорошо описывает количество отказов, возникающих в течение заданного интервала времени, сложного технического устройства, содержащего много элементов, при условии, что эффекта старения всего устройства в целом не наблюдается.

Биномиальное распределение $Be(p)$:

$$f(x, p) = C_N^x p^x (1-p)^{N-x} = \\ = h(x) \exp \left\{ \left(\ln \frac{p}{p-1} \right) x + \right. \\ \left. + N \ln (1-p) \right\}.$$

Этим распределением пользуются для описания количества отказавших изделий за заданное время из поставленных на испытания N изделий.

Для объединения данных важен тот факт, что для рассмотренных распределений справедливо выполнение следующего условия:

$$\frac{dV}{d\theta} = -\theta \frac{dA}{d\theta}. \quad (18)$$

В табл. 2 представлены данные, подтверждающие выполнение этого условия. Выполнение этого условия позволяет получить ОМП по объединенным выборкам в общем виде и исследовать их общие свойства.

Приведенные распределения содержат по одному неизвестному параметру. В задачах объединения нескольких выборок существуют k -параметрические семейства экспоненциального типа:

$$f(x, \theta_1, \dots, \theta_k) = \\ = h(x) \exp \left\{ \sum_{j=1}^k \theta_j U_j(x) + \right. \\ \left. + V(\theta_1, \dots, \theta_k) \right\}.$$

В случае, если x_1, \dots, x_n ($n > k$) — н. о. р. с. в., имеющие k -параметрическую плотность, тогда совместное распределение выборки

$$f(x_1, \dots, x_n, \theta_1, \dots, \theta_k) = \\ = \prod_{i=1}^n h(x_i) \exp \left\{ \sum_{j=1}^k \theta_j U_j(x_i) + \right. \\ \left. + nV(\theta_1, \dots, \theta_k) \right\}.$$

В этом случае минимальной достаточной статистикой является вектор

$$T = \left(\sum_{i=1}^n U_1(x_i), \dots, \sum_{i=1}^n U_k(x_i) \right).$$

8. СБАЛАНСИРОВАННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НА ОСНОВЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ ДВУХ ВЫБОРОК

Рассмотрим ситуацию, когда имеются две выборки, являющиеся реализациями случайных величин, принадлежащих двум законам распределения:

$$x_1, \dots, x_n \sim f(x, \theta_1); \\ y_1, \dots, y_m \sim f(y, \theta_2).$$

Если две группы изделий не имеют общей основы, то между параметрами θ_1 и θ_2 отсутствует функциональная связь.

В этом случае логарифм функции правдоподобия

$$\ln L(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta_1) + \sum_{i=1}^m \ln f(y_i, \theta_2)$$

распадается на два слагаемых, каждый из которых зависит только от одного из параметров. Поэтому значения θ_1^* и θ_2^* , при которых имеет место максимум функции правдоподобия, совпадают со значениями параметров θ_1 и θ_2 , найденных из условия максимума каждой функции правдоподобия в отдельности. В этом случае перекачки информации от одной выборки к другой быть не может. Если изделия двух групп подобны, то параметры θ_1 и θ_2 связаны между собой функциональной зависимостью

$$\theta_2 = \varphi(\theta_1). \quad (19)$$

Логарифм функции правдоподобия в этом случае может быть представлен в виде функции одного параметра

$$\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2) = L(\theta_1, \varphi(\theta_1))$$

и задача оценивания параметра θ_1 по двум независимым выборкам сводится к оцениванию этого параметра по одной совместной выборке $x_1,$

$$x_n, y_1, \dots, y_m.$$

В соответствии с методом максимального правдоподобия значения θ_1 , максимизирующее $\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2)$, при условии, что отсутствует краевой максимум в граничных точках области изменения θ_1 , находится решением уравнения правдоподобия, имеющего вид:

$$\frac{1}{f(\theta_1)} \frac{df}{d\theta_1} + \frac{1}{f(\theta_1)} \frac{df}{d\theta_2} \frac{d\varphi}{d\theta_1} = 0.$$

ОМП, получаемая при наличии связи типа (19), называется сбалансированной. Такая оценка при выполнении достаточно общих условий обладает всеми достоинствами, присущими всем ОМП.

Более конструктивные результаты могут быть получены, если перейти к распределениям экспоненциального типа. Совместное распределение двух

выборок объемов n и m , взятых из распределений экспоненциального типа с разными θ_1 и θ_2 :

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \theta_1, \theta_2) = H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \times \exp \left\{ A_1(\theta_1) \sum_{i=1}^n U_1(x_i) + A_2(\theta_2) \sum_{i=1}^m U_2(y_i) + nV_1(\theta_1) + mV_2(\theta_2) \right\}$$

при замене θ_2 на θ_1 в общем случае уже не принадлежит семейству экспоненциального типа с одним параметром:

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \theta_1) = H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \times \exp \left\{ A_1(\theta_1) \sum_{i=1}^n U_1(x_i) + A_2(\varphi(\theta_1)) \sum_{i=1}^m U_2(y_i) + nV_1(\theta_1) + mV_2(\varphi(\theta_1)) \right\}.$$

ОМП в этом случае является решением уравнения

$$\frac{dA_1(\theta_1)}{d\theta_1} \sum_{i=1}^n U_1(x_i) + \frac{dA_2(\theta_2)}{d\theta_2} \frac{d\varphi}{d\theta_1} \sum_{i=1}^m U_2(y_i) + n \frac{dV_1(\theta_1)}{d\theta_1} + m \frac{dV_2(\theta_2)}{d\theta_2} \frac{d\varphi}{d\theta_1} = 0.$$

Для задач надежности интерес представляет случай, когда объединяемые выборки принадлежат распределениям экспоненциального типа, которые удовлетворяют условию (18).

3. Расчетные формулы для объединения двух выборок

Распределение	Отношение γ	Достаточная статистика	Количество информации	ОМП
$N(\theta, \sigma^2)$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\sum_{i=1}^n x_i + \mu \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sum_{i=1}^m y_i$	$\frac{n}{\sigma_1^2} + \mu^2 \frac{m}{\sigma_2^2}$	$\frac{\sigma_2^2 \sum_{i=1}^n x_i + \mu \sigma_1^2 \sum_{i=1}^m y_i}{n\sigma_2^2 + \mu^2 m\sigma_1^2}$
$\ln N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\sum_{i=1}^n \ln x_i + \mu \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sum_{i=1}^m \ln y_i$	$\frac{n}{\sigma_1^2} + \mu^2 \frac{m}{\sigma_2^2}$	$\frac{\sigma_2^2 \sum_{i=1}^n \ln x_i + \mu \sigma_1^2 \sum_{i=1}^m \ln y_i}{n\sigma_2^2 + \mu^2 m\sigma_1^2}$
$e(T)$	$\frac{1}{\mu^2}$	$\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^m y_i$	$\frac{n}{T_1^2} + \mu^2 \frac{m}{T_2^2}$	$\frac{\mu \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m y_i}{\mu(n+m)}$
$\Gamma(T, p)$	$\frac{1}{\mu^2} \frac{p_2}{p_1}$	$\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{\mu} \times \times \frac{p_2}{p_1} \sum_{i=1}^m y_i$	$\frac{n p_1}{T_1^2} + \mu^2 m \frac{p_2}{T_2^2}$	$\frac{p_1 \mu \sum_{i=1}^n x_i^{\beta} + \sum_{i=1}^m y_i^{\beta} p_2}{\mu(p_1 n + m p_2)}$
$\mathcal{W}(\alpha, \beta)$	$\frac{1}{\mu^2}$	$\sum_{i=1}^n x_i^{\beta} + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^m y_i^{\beta}$	$\frac{n}{\alpha_1^2} + \mu^2 \frac{m}{\alpha_2^2}$	$\frac{\mu \sum_{i=1}^n x_i^{\beta} + \sum_{i=1}^m y_i^{\beta}}{\mu(n+m)}$
$P(\lambda)$	$\frac{1}{\mu} \frac{t_2}{t_1}$	$\frac{x+y}{t_1}$	$\frac{t_1}{\lambda_1} + \frac{t_2}{\lambda_2} \mu^2$	$\frac{x+y}{t_1 + \mu t_2}$

Уравнение максимального правдоподобия принимает вид

$$\frac{dA_1(\theta_1)}{d\theta_1} \left(\sum_{i=1}^n U_1(x_i) - n\theta_1 \right) + \frac{dA_2(\theta_2)}{d\theta_2} \frac{d\varphi}{d\theta_1} \left(\sum_{i=1}^m U_2(y_i) - m\varphi(\theta_1) \right) = 0.$$

Обозначим

$$\gamma(\theta_1, \theta_2) = \frac{dA_2(\theta_2)}{d\theta_2} / \frac{dA_1(\theta_1)}{d\theta_1}.$$

Тогда уравнение максимального правдоподобия запишется в виде

$$\sum_{i=1}^n U_1(x_i) + \gamma(\theta_1, \varphi(\theta_1)) \frac{d\varphi}{d\theta_1} \times \sum_{i=1}^m U_2(y_i) - n\theta_1 - \frac{d\varphi}{d\theta_1} m\gamma(\theta_1, \varphi(\theta_1)) \varphi(\theta_1) = 0.$$

Для большого класса распределений, в том числе для распределений, используемых в задачах надежности, справедливо соотношение

$$\gamma(\theta_1, \theta_2) = \gamma\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right).$$

Аналитические выражения для оценки параметра θ_1 могут быть получены лишь для достаточно простых функций $\varphi(\cdot)$.

Пусть $\theta_2 = \mu\theta_1$. Тогда решение уравнения максимального правдоподобия, которое становится линейным относительно неизвестного параметра, имеет простой вид

$$\sum_{i=1}^n U_1(x_i) + \gamma(\mu) \mu \sum_{i=1}^m U_2(y_i) - (n + m\mu^2\gamma(\mu)) \theta_1 = 0.$$

Отсюда

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n U_1(x_i) + \gamma(\mu) \mu \sum_{i=1}^m U_2(y_i)}{n + m\mu^2\gamma(\mu)}. \quad (20)$$

Выражение

$$T(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^n U_1(x_i) + \mu\gamma(\mu) \sum_{i=1}^m U_2(y_i)$$

является достаточной статистикой для объединенной выборки. Полученная формула обобщает известные формулы объединения двух выборок для некоторых распределений, например для нормального. Действительно, в случае нормального закона в предположении, что $\theta_1 = \theta_2$ ($\mu = 1$), получим

$$\hat{\theta}_1 = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n + m},$$

где \bar{x} и \bar{y} — выборочные средние по каждой выборке; $\gamma = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ не зависит от μ .

Дисперсия оценки (20) равна минимальной границе, т. е. обратно пропорциональна количеству информации, содержащейся в обеих выборках относительно θ_1 . Расчетные формулы для оценивания показателей надежности по двум выборкам сведены в табл. 3.

9. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НА ОСНОВЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ ДВУХ ВЫБОРОК ПРИ НАЛИЧИИ МЕШАЮЩЕГО ПАРАМЕТРА

Рассмотрим типовую задачу объединения данных испытаний двух групп подобных изделий. В этом случае x_1, \dots, x_n — н. о. р. с. в. из распределения $f(x, \theta_1)$; y_1, \dots, y_m — н. о. р. с. в. из распределения $f(y, \theta_2)$.

При этом

$$\theta_2 = \varphi(\theta_1) + \xi, \quad (21)$$

где $\varphi(\cdot)$ — известная однозначная функция; ξ — неопределенный параметр, заданный областью существования:

$$\xi \in (C_1, C_2). \quad (22)$$

Такая модель имеет место, когда формула приведения является неточной, и ошибкой в соотношении между параметрами нельзя пренебречь.

Логарифм функции правдоподобия запишется в виде

$$L = \ln f(x_1, \dots, x_n, \theta_1) + \ln f(y_1, \dots, y_m, \theta_2). \quad (23)$$

Формулы (21) и (22) определяют область Ω на плоскости θ_1, θ_2 , которая в силу взаимной однозначности функции $\varphi(\cdot)$ является криволинейным коридором, ограниченным кривыми:

$$\theta_2 = \varphi(\theta_1) + C_1; \quad (24)$$

$$\theta_2 = \varphi(\theta_1) + C_2.$$

Плотности $f(x_1, \dots, x_n, \theta_1)$ и $f(y_1, \dots, y_m, \theta_2)$ являются унимодальными функциями по θ_1 и θ_2 соответственно.

В соответствии с методом максимального правдоподобия ОМП являются значения параметров, максимизирующие (23).

Максимальное значение функция принимает либо в точке, где первые производные $\frac{dL}{d\theta_1}$ и $\frac{dL}{d\theta_2}$ обращаются в нуль, либо на одной из границ области.

Значения θ_1 и θ_2 , являющиеся решением системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{d\theta_1} &= 0; \\ \frac{dL}{d\theta_2} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

совпадают с корнями отдельно решаемых уравнений:

$$\frac{d \ln f(x_1, \dots, x_n, \theta_1)}{d\theta_1} = 0;$$

$$\frac{d \ln f(y_1, \dots, y_m, \theta_2)}{d\theta_2} = 0,$$

т. е. являются ОМП соответственно параметров θ_1 и θ_2 , полученных по выборкам x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_m без ограничений на область существования θ_1 и θ_2 . Эти оценки называют пар-

циальными ОМП. Запишем ОМП в виде

$$z_1(x_1, \dots, x_n) = \arg \max_{\theta_1} \ln f(x_1, \dots, x_n, \theta_1);$$

$$z_2(y_1, \dots, y_m) = \arg \max_{\theta_2} \ln f(y_1, \dots, y_m, \theta_2).$$

Найдем значения θ_1, θ_2 , при которых (23) принимает условный максимум на границах, заданных уравнениями (24).

Сбалансированные с помощью (24) ОМП для параметра запишем в виде:

$$z(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, C_1) = \arg \max_{\theta_1} [\ln f(x_1, \dots, x_n, \theta_1) + \ln f(y_1, \dots, y_m, \varphi(\theta_1)) + C_1];$$

$$z(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, C_2) = \arg \max_{\theta_1} [\ln f(x_1, \dots, x_n, \theta_1) + \ln f(y_1, \dots, y_m, \varphi(\theta_1)) + C_2].$$

Ввиду того, что плотность распределения — унимодальная функция, значение θ , максимизирующее (23), находится из выражений:

$$\hat{\theta}_1 = \begin{cases} z_1(x_1, \dots, x_n), & \text{если } z_2(y_1, \dots, y_m) + C_1 \leq \\ & \leq \varphi(z_1(x_1, \dots, x_n)) \leq \\ & \leq z_2(y_1, \dots, y_m) + C_2; \\ z(x_1, \dots, x_n, \\ y_1, \dots, y_m, C_1), & \text{если } \varphi(z_1(x_1, \dots, x_n)) < \\ < z_2(y_1, \dots, y_m) + C_1; \\ z_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, C_2), & \text{если } \varphi(z_1(x_1, \dots, x_n)) > \\ > z_2(y_1, \dots, y_m) + C_2. \end{cases}$$

Качественный анализ выражения позволяет сделать некоторые общие выводы о поведении оценки $\hat{\theta}_1$ и ее с. к. о.:

$$W(\xi) = E\{(\hat{\theta}_1 - \theta_1)^2\}.$$

Прежде всего заметим, что при $C_2 - C_1 \rightarrow 0$ оценка стремится к θ_1^* :

$$\theta_1^* = z_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, 0) = \text{arg max} \{ \ln f(x_1, \dots, x_n, \theta_1) + \ln f(y_1, \dots, y_m, \varphi(\theta_1)) \}.$$

При этом с. к. о. принимает минимальное значение.

Увеличение разности $\Delta = C_2 - C_1$ симметрично относительно нуля приводит к увеличению с. к. о., которое монотонно возрастает, асимптотически приближаясь к значению с. к. о. $\frac{\sigma^2}{n}$.

Это является следствием потери информации, обусловленной наличием неопределенности. Даже в том случае, когда фактически $\xi = 0$, но исследователь об этом не знает, с. к. о. превышает значение с. к. о. сбалансированной оценки $z(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, 0)$.

Для практического применения интерес представляет случай, когда $\xi \geq 0$.

При этом оценочная формула принимает вид

$$\hat{\theta}_1 = \begin{cases} z_1(x_1, \dots, x_n), & \text{если } z_2(y_1, \dots, y_m) \geq \varphi(z_1(x_1, \dots, x_n)); \\ z(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), & \text{если } z_2(y_1, \dots, y_m) < \varphi(z_1(x_1, \dots, x_n)). \end{cases}$$

Конкретные формулы для инженерных расчетов в задачах объединения двух групп данных могут быть получены при наличии информации о виде функции $\varphi(\cdot)$ и семейства распределений $f(x, \theta)$.

Пусть

$$\theta_2 = \theta_1 + \xi, \quad |\xi| \leq \Delta.$$

Эта модель отвечает случаю квазиподобия. В этом случае существует приближенное подобие. Степень приближения характеризуется величиной Δ .

Уравнение максимального правдоподобия для получения ОМП по двум

выборкам может быть записано в виде

$$f_2(\theta_1 + \xi) \frac{df_1}{d\theta_1} + f_1(\theta_1) \frac{df_2}{d\theta_2} = 0.$$

Для семейств распределений экспоненциального типа уравнение максимального правдоподобия принимает вид

$$\sum_{i=1}^n U_1(x_i) + \gamma(\theta_1, \theta_2) \sum_{i=1}^m U_2(y_i) - n\theta_1 - m\gamma(\theta_1, \theta_2)(\theta_1 + \xi) = 0.$$

Ниже даны примеры применения изложенного подхода к задачам объединения разнородных данных при оценке надежности.

Пример 7. Имеются две группы данных, отвечающих результатам эксплуатации технических систем в двух различных зонах. Исходные данные включают суммарную наработку t_j и суммарное число отказов n_j ($j = 1; 2$) для каждой группы данных. Количество отказов описывается законом Пуассона:

$$P(n_j) = \frac{(\lambda_j t_j)^{n_j}}{n_j!} e^{-\lambda_j t_j}, \quad j = 1, 2.$$

Совместная функция правдоподобия в этом случае имеет вид

$$L(\lambda_1, \lambda_2) = A \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2}.$$

Поскольку данные получены в результате эксплуатации в различных климатических зонах, возможно небольшое отличие параметров надежности.

С помощью экспертов устанавливаются границы ξ .

Таким образом предполагается, что

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \xi, \quad \xi \in (C_1 C_2).$$

Парциальные ОМП в этом случае будут

$$\hat{\lambda}_{10} = \frac{n_1}{t_1}; \quad \hat{\lambda}_{20} = \frac{n_2}{t_2}.$$

Сбалансированные ОМП находятся из условия максимума условной функции правдоподобия

$$L(\lambda_1, \lambda_1 + \xi) = \\ = \lambda_1^{n_1} (\lambda_1 + \xi)^{n_2} e^{-\lambda_1 t_1 - (\lambda_1 + \xi) t_2}$$

и являются корнем квадратного уравнения

$$n_1 \lambda_1^{n_1 - 1} (\lambda_1 + \xi)^{n_2} e^{-\lambda_1 t_1 - (\lambda_1 + \xi) t_2} + \\ + \lambda_1^{n_1} n_2 (\lambda_2 + \xi)^{n_2 - 1} e^{-\lambda_1 t_1 - (\lambda_1 + \xi) t_2} - \\ - \lambda_1^{n_1} (\lambda_2 + \xi)^{n_2} (t_1 + t_2) \times \\ \times e^{-\lambda_1 t_1 - (\lambda_1 + \xi) t_2} = 0,$$

которое после очевидных преобразований принимает вид

$$n_1 (\lambda_1 + \xi) + n_2 \lambda_1 - \lambda_1 (\lambda_1 + \xi) (t_1 + t_2) = 0.$$

Отсюда $\hat{\lambda}_1$ есть положительный корень квадратного уравнения:

$$\lambda_1^2 (t_1 + t_2) - \lambda_1 [(n_1 + n_2) - \\ - \xi (t_1 + t_2)] - n_1 \xi = 0.$$

Обозначим положительный корень этого уравнения $\lambda^*(\xi)$.

Отметим, что

$$\lambda^*(0) = \frac{n_1 + n_2}{t_1 + t_2}.$$

Теперь оценочная формула для параметра λ_1 принимает вид

$$\hat{\lambda}_1 = \begin{cases} \frac{n_1}{t_1}, & \text{если } \frac{n_1}{t_1} + \\ + C_1 \leq \frac{n_2}{t_2} \leq \frac{n_1}{t_1} + C_2; \\ \lambda^*(C_1), & \text{если } \frac{n_2}{t_2} < \\ < \frac{n_1}{t_1} + C_1; \\ \lambda^*(C_2), & \text{если } \frac{n_2}{t_2} > \\ > \frac{n_1}{t_1} + C_2. \end{cases}$$

Пример 8. Ресурсные испытания опытных образцов и изделий устано-

вочной партии, выполненных по одинаковой конструкторской документации и близкой технологии, представлены двумя группами данных, которые, предполагается, принадлежат нормальному закону. Модель неоднородной выборки имеет вид

$$x_1, \quad x_n \sim N(\theta_1, \sigma_1^2);$$

$$y_1, \quad y_m \sim N(\theta_2, \sigma_2^2);$$

σ_1^2 и σ_2^2 — известны.

Общность конструкторской документации и близость технологии дают основание полагать, что параметры θ_1 и θ_2 , характеризующие средний ресурс каждой партии, мало различаются между собой. Путем анализа установлены возможные границы этого различия:

$$|\theta_2 - \theta_1| \leq C.$$

Запишем это ограничение в более удобном и общем виде

$$\theta_2 = \theta_1 + \xi,$$

где $\xi \in (C_1, C_2)$.

Парциальные ОМП равны выборочным средним соответствующих выборок:

$$\hat{\theta}_{10} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \hat{\theta}_{20} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i.$$

Сбалансированная ОМП находится из условия минимума квадратичной формы:

$$S = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\theta_1 \right)^2}{n\sigma_1^2} + \\ + \frac{\left[\sum_{i=1}^m y_i - m(\theta_1 + \xi) \right]^2}{m\sigma_2^2}$$

и является корнем уравнения

$$\frac{dS}{d\theta_1} = \frac{2 \left(\sum_{i=1}^n x_i - n\theta_1 \right)}{\sigma_1^2} - \frac{2 \left[\sum_{i=1}^m y_i - m(\theta_1 + \xi) \right]}{\sigma_2^2} = 0,$$

которое после очевидных преобразований принимает вид

$$\theta_1 [n\sigma_2^2 + m\sigma_1^2] - \sum_{i=1}^n x_i \sigma_2^2 - \sum_{i=1}^m y_i \sigma_1^2 + m\xi \sigma_1^2 = 0.$$

Отсюда сбалансированная ОМП

$$\theta_1^*(\xi) = \alpha \hat{\theta}_{11} + (1 - \alpha) \hat{\theta}_{20} - \xi(1 - \alpha),$$

где

$$\alpha = \frac{n\sigma_2^2}{m\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}.$$

Теперь оценочная формула для параметра θ_1 принимает вид

$$\hat{\theta}_1 = \begin{cases} \hat{\theta}_{10}, & \text{если } \hat{\theta}_{10} + C_1 \leq \hat{\theta}_{20} \leq \\ & \leq \hat{\theta}_{10} + C_2; \\ \theta_1^*(C_1), & \text{если } \hat{\theta}_{20} < \hat{\theta}_{20} + C_1; \\ \theta_1^*(C_2), & \text{если } \hat{\theta}_{20} > \hat{\theta}_{10} + C_2. \end{cases}$$

Пример 9. Испытываются на безотказность две группы изделий, изготовленных в разные интервалы времени. Небольшие изменения в технологии, которые произошли за период между этими интервалами, позволяют считать, что параметры безотказности могли претерпеть некоторые изменения. Однако экспертным анализом устанавливается, что такие изменения не могут сильно изменить надежность, по крайней мере, превысить некоторую величину.

В случае биномиальной схемы испытаний две группы данных, отвечаю-

щих испытаниям в различающихся условиях, будут N , n и M , m (N , M — число испытываемых изделий каждой группы, n , m — число положительных исходов).

В соответствии с биномиальной схемой

$$P(n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}.$$

Условие квазиподобия можно записать в виде

$$p_2 = p_1 + \xi, \quad \xi \in (C_1, C_2).$$

Для оценивания p_1 строится совместная функция правдоподобия

$$L(p_1, p_2) = A p_1^n (1-p_1)^{N-n} \times p_2^m (1-p_2)^{M-m}.$$

Парциальные ОМП

$$\hat{p}_{10} = \frac{n}{N}; \quad \hat{p}_{20} = \frac{m}{M}.$$

Сбалансированная оценка параметра p_1 находится из условия минимума функции правдоподобия с учетом связи p_2 и p_1 :

$$L(p_1) = A p_1^n (1-p_1)^{N-n} (p_1 + \xi)^m \times (1 - (p_1 + \xi))^{M-m}.$$

Значение p_1 , минимизирующее условную функцию правдоподобия, является корнем уравнения

$$\begin{aligned} & n p_1^{n-1} (1-p_1)^{N-n} (p_1 + \xi)^m \times \\ & \times (1 - (p_1 + \xi))^{M-m} - p_1^n (N-n) \times \\ & \times (1-p_1)^{N-n-1} (p_1 + \xi)^m \times \\ & \times (1 - (p_1 + \xi))^{M-m} + \\ & + p_1^n (1-p_1)^{N-n} m (p_1 + \xi)^{m-1} \times \\ & \times (1 - (p_1 + \xi))^{M-m} - \\ & - p_1^n (1-p_1)^{N-n} (p_1 + \xi)^m (M-m) \times \\ & \times [1 - (p_1 + \xi)]^{M-m-1} = 0. \end{aligned}$$

4. Расчетные формулы для объединения двух выборок при наличии информации о параметрах типа неравенств

Распределение	Информация о параметрах	Расчетная формула
$N(\theta, \sigma^2)$	$\theta_1 \geq \theta_2$	$\hat{\theta}_1 = \begin{cases} x, & \text{если } \bar{x} \geq \bar{y}; \\ \frac{\sigma_2^2 n \bar{x} + \sigma_1^2 m \bar{y}}{n \sigma_2^2 + m \sigma_1^2}, & \text{если } \bar{x} < \bar{y} \end{cases}$
$\ln N(\mu, \sigma^2)$	$\mu_1 \geq \mu_2$	$\hat{\mu}_1 = \begin{cases} \ln x, & \text{если } \bar{x} \geq \bar{y}; \\ \frac{\sigma_2^2 n \ln \bar{x} + \sigma_1^2 m \ln \bar{y}}{n \sigma_2^2 + m \sigma_1^2}, & \text{если } \bar{x} < \bar{y} \end{cases}$
$e(T)$	$T_1 \geq T_2$	$\hat{T}_1 = \begin{cases} \bar{x}, & \text{если } \bar{x} \geq \bar{y}; \\ \frac{n \bar{x} + m \bar{y}}{n + m}, & \text{если } \bar{x} < \bar{y} \end{cases}$
$\Gamma(T, \rho)$	$T_1 \geq T_2$	$\hat{T}_1 = \begin{cases} \frac{\bar{x}}{\rho_1}, & \text{если } \rho_2 \bar{x} \geq \rho_1 \bar{y}; \\ \frac{n \bar{x} + m \bar{y}}{n \rho_1 + m \rho_2}, & \text{если } \rho_2 \bar{x} < \rho_1 \bar{y} \end{cases}$
$W(\alpha, \beta)$	$\alpha_1 \geq \alpha_2$	$\hat{\alpha} = \begin{cases} \bar{x}^\beta, & \text{если } \bar{x}^{\beta_1} \geq \bar{y}^{\beta_2}; \\ \frac{n \bar{x}^{\beta_1} + m \bar{y}^{\beta_2}}{n + m}, & \text{если } x < y \end{cases}$
$P(\lambda)$	$\lambda_1 \geq \lambda_2$	$\hat{\lambda} = \begin{cases} x/t_1, & \text{если } x/t_1 \geq y/t_2; \\ \frac{x + y}{t_1 + t_2}, & \text{если } x/t_1 < y/t_2 \end{cases}$
$Be(P, N)$	$p_1 \geq p_2$	$\hat{p} = \begin{cases} \frac{x}{N_1}, & \text{если } x/N_1 \geq y/N_2; \\ \frac{x + y}{N_1 + N_2}, & \text{если } x/N_1 < y/N_2 \end{cases}$

Полученное уравнение можно упростить:

$$n(1 - p_1)(p_1 + \xi)(1 - (p_1 + \xi)) - p_1(N - n)(p_1 + \xi)(1 - (p_1 + \xi)) + p_1(1 - p_1)m[1 - (p_1 + \xi)] + p_1(1 - p_1)(p_1 + \xi)(M - m) = 0.$$

Положительный корень $p_1^*(\xi)$ этого кубического уравнения в аналитическом виде имеет весьма громоздкое представление. Поэтому здесь он не приводится. Приведем только его значение при $\xi = 0$:

$$p_1^*(0) = \frac{n + m}{N + M}.$$

Оценочная функция представляется в виде

$$p_1 = \begin{cases} \frac{n}{N}, & \text{если } \frac{n}{N} + C_1 \leq \frac{m}{M} \leq \\ & \leq \frac{n}{N} + C_2; \\ p_1^*(C_1), & \text{если } \frac{m}{M} < \frac{n}{N} + C_1; \\ p_1^*(C_2), & \text{если } \frac{m}{M} > \frac{n}{N} + C_2. \end{cases}$$

Аналогичным образом могут быть получены оценочные функции и для других ситуаций такого типа, встречающихся в задачах оценивания надежности.

В табл. 4 приведены основные расчетные формулы для объединения двух выборок при наличии информации о параметрах типа неравенств.

10. РЕКУРРЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ НА ОСНОВЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ k ВЫБОРОК

Практические ситуации обычно приводят к задачам объединения k выборок.

Пусть

$$\begin{aligned} x_1^{(1)}, & \quad x_{n_1}^{(1)} \sim f(x^{(1)}, \theta_1); \\ x_1^{(k)}, & \quad x_{n_k}^{(k)} \sim f(x^{(k)}, \theta_k). \end{aligned} \quad (25)$$

Задача состоит в оценивании параметра θ_1 с использованием всей расчлененной выборки (25) в качестве исходных данных.

Если выборки взяты из распределений экспоненциального типа с параметрами θ_j и θ_1 , связанными зависимостью

$$\theta_j = \mu_j \theta_1, \quad (26)$$

то уравнение максимального правдоподобия принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \gamma_j \mu_j \left[\sum_{i=1}^{n_j} U_i(x_i^{(j)}) \right] &= \\ &= \left[\left(\sum_{j=1}^k n_j \mu_j^2 \gamma_j \right) \right] \theta_1. \end{aligned}$$

Отсюда ОМП

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{j=1}^k \gamma_j \mu_j \left[\sum_{i=1}^{n_j} U_i(x_i^{(j)}) \right]}{\sum_{j=1}^k n_j \mu_j^2 \gamma_j},$$

или с использованием обозначения

$$\begin{aligned} \bar{U}_j(x) &= \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} U_i(x_i^{(j)}) \\ \hat{\theta}_1 &= \frac{\sum_{j=1}^k n_j \mu_j \gamma_j \bar{U}_j(x)}{\sum_{j=1}^k n_j \mu_j^2 \gamma_j}. \end{aligned}$$

Достаточной статистикой для неизвестного параметра в этом случае является

$$\begin{aligned} T(x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}, \dots, x_1^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}) &= \\ &= \sum_{j=1}^k \gamma_j \mu_j n_j \bar{U}_j(x). \end{aligned}$$

Нетрудно вычислить количество информации, содержащейся в объединенной выборке:

$$I(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) = \left(\sum_{j=1}^k n_j \mu_j^2 \gamma_j \right) \frac{dA_1}{d\theta_1}.$$

Приведенные результаты позволяют получить расчетные формулы для объединения данных, взятых из различных генеральных совокупностей, если существует линейная связь между неизвестными параметрами. Более удобным для проведения практических расчетов является рекуррентная форма поэтапного объединения данных.

С этой целью объединенная оценка $z[n]$ представляется как линейная комбинация парциальных оценок:

$$z[n] = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n x_n, \quad (27)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ удовлетворяют условию $\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 1$.

Тогда справедливо следующее соотношение:

$$z[n] = (1 - \alpha_n) \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_n} x_1 + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{1 - \alpha_n} x_{n-1} \right) + \alpha_n x_n.$$

Причем

$$\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_n} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{1 - \alpha_n} = 1.$$

Обозначив

$$z[n-1] = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_n} x_1 + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{1 - \alpha_n} x_n,$$

получим

$$z[n] = z[n-1] - \alpha_n [z[n-1] + x_n].$$

Используя приведенное преобразование, выражение (27) представляется в рекуррентном виде

$$\hat{\theta}_1[k] = \hat{\theta}_1[k-1] - \alpha_k [\hat{\theta}_1[k-1] - U_k(x)],$$

где

$$\alpha_k = \frac{n_k \mu_k \gamma_k}{\sum_{j=1}^k n_j \mu_j \gamma_j}.$$

В частном случае $n_j = n_1$; $\gamma_j = \gamma_1$; $\mu_j = 1$, коэффициенты

$$\alpha_k = \frac{1}{k},$$

и рекуррентное соотношение для поэтапного оценивания показателя надежности принимает вид

$$\hat{\theta}_1[k] = \hat{\theta}_1[k-1] - \frac{1}{k} \{ \hat{\theta}_1[k-1] - U_k(x) \}.$$

Объединение k групп данных в задачах с мешающим параметром, заданном областью существования, приводит к задачам нелинейного программирования.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В процессе оценивания надежности ряда технических объектов разработчик располагает информацией об исследуемом показателе надежности еще до начала испытаний вследствие того, что разработка объекта осуществлялась в условиях стабильного производства, обеспечивающего возможность достоверного прогнозирования поведения параметров объекта; существует большой накопленный опыт создания технических систем, являющихся для проектируемого объекта прототипами (аналогами); имеются теоретические модели прогнозирования характеристик надежности объекта исходя из надежности входящих в него элементов или математических моделей работоспособности.

Информацию, имеющуюся до начала испытаний, называют априорной. Эта информация может быть представлена укрупненно в виде совокупностей выборок результатов независимых испытаний изделий-аналогов или агрегированных показателей типа оценок числовых характеристик и априорных распределений.

Задача заключается в том, чтобы, объединяя априорную информацию I_0 и экспериментальные данные I_0 , получить оценки выбранного показателя надежности R . В качестве показателя в дальнейшем используются вероятность безотказной работы P , интенсивность отказа λ , средняя наработка на отказ T . Существуют две формы представления оценок надежности:

совокупность точечной оценки \hat{R} и среднего квадратического отклонения $\sigma_{\hat{R}}$;

доверительный интервал $[R, \bar{R}]_q$ при заданной доверительной вероятности q .

Для ряда показателей надежности принято ограничиваться односторонним доверительным интервалом. В частности, для вероятности безотказной работы P используется нижняя доверительная граница \underline{P}_q , а для постоянной интенсивности отказа — верхняя доверительная граница λ_q .

1. ОБЩАЯ СХЕМА И РАЗНОВИДНОСТИ ЗАДАЧ БАЙЕСОВСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ

Исходной информацией для байесовского оценивания являются: распределение вероятностей основной случайной величины, характеризующей надежность объекта (например, функция распределения наработки на отказ $F(t; \bar{\theta})$); априорное распределение $h(\bar{\theta})$ вектора параметров $\bar{\theta}$, однозначно определяющих показатель надежности R в виде функции $R = R(\bar{\theta})$; функция потерь $L(\hat{R}, R)$, которая символизирует потери, связанные с заменой истинного показателя надежности R его оценкой \hat{R} ; план испытаний Π , предписывающий способ получения экспериментальных данных I_0 .

На рис. 1 изображена общая схема получения байесовских оценок для случая непрерывных априорных распределений. Порядок получения оценок следующий:

Этап 1. Составление функции правдоподобия $l(\theta | I_0)$; для этого используются результаты испытаний I_0 ,

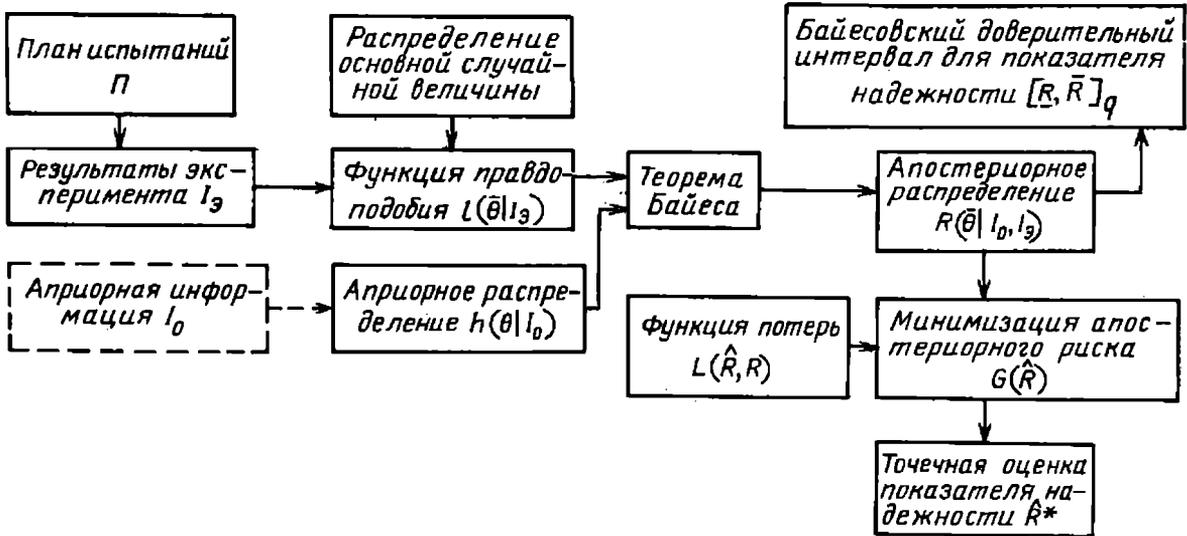


Рис. 1. Общая схема байесовского оценивания показателя надежности

полученные по определенному плану Π , и распределение основной случайной величины.

Этап 2. Построение апостериорного распределения $h(\bar{\theta} | I_0, I_3)$; для этого используется формула Байеса:

$$h(\bar{\theta} | I_0, I_3) = \frac{h(\bar{\theta} | I_0) l(\bar{\theta} | I_3)}{\int_{\Theta} h(\bar{\theta} | I_0) l(\bar{\theta} | I_3) d\bar{\theta}}, \quad (1)$$

где Θ — область изменения параметра $\bar{\theta}$.

Этап 3. Получение байесовских оценок; байесовский доверительный интервал определяется условием

$$P\{\underline{R} \leq R(\bar{\theta}) \leq \bar{R}\} = q$$

или

$$\int_{\underline{R} \leq R(\bar{\theta}) \leq \bar{R}} h(\bar{\theta} | I_0, I_3) d\bar{\theta} = q; \quad (2)$$

для нахождения точечной оценки \hat{R}^* записывают функцию апостериорного риска:

$$G(\hat{R}) = \int_{\Theta} L(\hat{R}, R(\bar{\theta})) h(\bar{\theta} | I_0, I_3) d\bar{\theta}, \quad (3)$$

и среди всех оценок \hat{R} выбирают ту, которая минимизирует функцию $G(\hat{R})$:

$$\hat{R}^* = \arg \min_{R \in [0, 1]} G(\hat{R}).$$

Если в качестве функции потерь выбрана квадратичная функция вида $L(\hat{R}, R(\bar{\theta})) = (\hat{R} - R(\bar{\theta}))^2$, то байесовская оценка \hat{R}^* определяется в виде апостериорного среднего:

$$\hat{R}^* = \frac{\int_{\Theta} R(\bar{\theta}) l(\bar{\theta} | I_3) h(\bar{\theta} | I_0) d\bar{\theta}}{\int_{\Theta} l(\bar{\theta} | I_3) h(\bar{\theta} | I_0) d\bar{\theta}}. \quad (4)$$

Для вероятности безотказной работы P в качестве оценки часто используется нижняя доверительная граница P_q , определяемая соотношением $P\{P(\bar{\theta}) \geq P_q\} = q$.

Пример 1. Нарботка объекта на отказ подчиняется экспоненциальному распределению с плотностью $f(t; \lambda) = \lambda \exp(-\lambda t)$, $\lambda \geq 0, t \geq 0$; в качестве априорного распределения выбрано гамма-распределение с плотностью

$$h(\lambda | I_0) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \rho^\delta \lambda^{\delta-1} e^{-\rho \lambda}, \quad \lambda \geq 0, \quad \delta \geq 0, \rho \geq 0. \quad (5)$$

Параметры δ и ρ считаются известными; функция потерь — квадратичная $L(\hat{R}, R) = (R - \hat{R})^2$; план испытаний — $[N, U, T]$. Необходимо найти оценки интенсивности отказов λ .

Решение. 1) Запишем функцию правдоподобия:

$$l(\lambda | I_0) = \prod_{i=1}^d \lambda e^{-\lambda t_i^*} \prod_{j=1}^{N-d} e^{-\lambda T} = \lambda^d e^{-\lambda \kappa}, \quad (6)$$

где t_i^* — моменты отказов; d — число отказов; $\kappa = t_1^* + \dots + t_d^* + (N-d)T$

2) Подставив (5) и (6) в формулу Байеса (1), получим апостериорную плотность

$$h(\lambda | I_0, I_0) = \frac{(\rho + \kappa)^{\delta+d}}{\Gamma(\delta+d)} \times \lambda^{d+\delta-1} e^{-\lambda(\rho+\kappa)}. \quad (7)$$

Полученное выражение является гамма-плотностью.

3) Определим верхнюю q -доверительную границу интенсивности отказов $\bar{\lambda}_q$. По определению $P\{\lambda \leq \bar{\lambda}_q\} = q$. Так как апостериорное распределение является гамма-распределением, то преобразование $z = 2\lambda(\rho + \kappa)$ приводит к хи-квадрат распределению с $2(\delta + d)$ степенями свободы. Отсюда $P\{2\lambda(\rho + \kappa) \leq \chi_{q; 2(\delta+d)}^2\} = q$, где $\chi_{q; 2(\delta+d)}^2$ — квантиль указанного распределения хи-квадрат вероятности q . Окончательно

$$\bar{\lambda}_q = \frac{\chi_{q; 2(\delta+d)}^2}{2(\rho + \kappa)}.$$

Определим теперь точечную оценку $\hat{\lambda}^*$. Для квадратичной функции потерь минимум апостериорного риска G достигается в точке апостериорного среднего оцениваемого параметра, т. е.

$$\hat{\lambda}^* = \int_0^{\infty} \lambda h(\lambda | I_0, I_0) d\lambda = \frac{d + \delta}{\rho + \kappa};$$

апостериорное среднее квадратическое отклонение, которое может служить характеристикой точности оценки $\hat{\lambda}^*$,

определяется с помощью дисперсии гамма-распределенной случайной величины:

$$\hat{\sigma}_{\lambda^*} = \sqrt{d + \delta} / (\rho + \kappa).$$

Рассмотренный пример носит частный характер. Общая байесовская процедура имеет большое число разновидностей:

параметрическое байесовское оценивание, при котором задано параметрическое семейство для распределения основной случайной величины; *непараметрическое байесовское оценивание*, при котором распределение основной случайной величины считается неизвестным, в некоторых случаях можно считать, что оно принадлежит некоторому классу распределений;

полная априорная определенность, когда плотность априорного распределения $h(\theta)$ задана полностью;

частичная априорная определенность, когда задано лишь конечное количество ограничений, накладываемых на функционалы от априорной плотности;

эмпирическое байесовское оценивание, при котором априорное распределение полностью неизвестно.

Интерпретации априорных распределений. На практике наиболее распространены следующие три интерпретации априорных распределений: частотная, рациональные представления об априорных распределениях в условиях неопределенности и субъективная интерпретация априорных распределений.

Частотная интерпретация возможна лишь в том случае, когда значение параметра порождается устойчивым реальным случайным механизмом, свойства которого известны либо могут быть получены посредством анализа соответствующих данных. В том случае, когда количество ранее полученных данных велико, построенные на их основе априорные распределения достаточно достоверны. В противном случае следует учитывать ошибки, возникающие при оценке априорных распределений. Это снижает практическую ценность частотной интерпретации, так как далеко не всегда разработчик рас-

полагает многочисленными данными предшествующих наблюдений для надежной интерпретации априорного распределения.

Рациональная интерпретация априорных распределений используется в случаях полного отсутствия априорных данных и частичной (незначительной) информации о параметрах. В первом случае используются распределения, представляющие отсутствие информации и являющиеся инвариантными относительно алгебраических преобразований. В частности, если параметр θ может принимать значения из $(-\infty, \infty)$, то его априорное распределение полагается равномерным на $(-\infty, \infty)$. Если $\theta \in [0, \infty)$, то $h(\theta) \sim 1/\theta$. Такие априорные распределения называются несобственными (или неинформативными). Во втором случае может быть задан лишь промежуток априорной неопределенности $[\theta', \theta'']$, причем значениями θ' и θ'' ограничивается вся априорная информация. Тогда в качестве априорного используется равномерное распределение на указанном промежутке.

Субъективная интерпретация априорного распределения использует лишь неформальный опыт разработчика (или группы экспертов), в соответствии с которым назначаются вероятности определенных событий, являющиеся основой для построения априорного распределения. Например, пусть в качестве априорного распределения параметра θ используется однопараметрическая плотность $h(\theta; \alpha)$. Указав субъективную вероятность p_1 события $P\{\theta > d_1\}$ при фиксированном d_1 , получим уравнение для определения α .

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ

Процедуры получения параметрических байесовских оценок полностью следуют общей схеме. Отличия конкретных расчетных соотношений определяются используемыми параметрическими семействами. Для всех байесовских оценок выбрана квадратичная функция потерь, вследствие чего точечная оценка определяется как апостериорное среднее (математи-

ческое ожидание) показателя надежности \hat{R}^* . В качестве характеристики точности используется апостериорное среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\hat{R}^*}$.

В теории байесовского оценивания наибольшее применение находят сопряженные априорные распределения, плотность которых по виду совпадает с точностью до постоянного множителя с функцией правдоподобия. Ниже приводятся байесовские оценки показателей надежности для наиболее распространенных параметрических семейств. В качестве априорных распределений в основном используются сопряженные распределения либо равномерные на фиксированных промежутках априорной неопределенности. Для проведения расчетов на ЭВМ могут понадобиться численные методы интегрирования и решения трансцендентных уравнений.

Биномиальная схема. Пусть испытания технического объекта проводятся по схеме независимых испытаний, а результаты фиксируются в виде «успех—отказ»; всего проведено N испытаний и зафиксированы d отказов. В табл. 1 приведены выражения для оценок вероятности безотказной работы для случаев априорных бета- и обобщенного бета-распределения. При проведении расчетов на ЭВМ вместо конечного соотношения для P_q может быть рекомендовано численное решение уравнения:

$$\int_0^1 x^{\alpha+N-d-1} (1-x)^{\beta+d-1} dx =$$

$$= qB(\alpha + N - d, \beta + d) \frac{P_q - p_H}{p_B - p_H}.$$

Пример 2. В результате десяти независимых опытов зафиксирован отказ. По априорным соображениям вероятность безотказной работы распределена в промежутке $[0,75; 1]$ в соответствии с обобщенным бета-распределением с параметрами $\alpha = 8$ и $\beta = 1$. Необходимо найти оценки вероятности безотказной работы \hat{P}^* , $\sigma_{\hat{P}^*}$ и P_q при $q = 0,9$.

1. Байесовские оценки вероятности безотказной работы для биномиальной схемы

Априорная плотность $h(p)$	Расчетная формула для оценок
$h(p) = \frac{\rho^{\alpha-1} (1-\rho)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$ $0 \leq \rho \leq 1; \alpha \geq 0; \beta \geq 0$	$\hat{P}^* = \hat{p}^* = \frac{\alpha + N - d}{\alpha + \beta + N},$ $\sigma_{\hat{P}^*}^2 = \frac{(\alpha + N - d)(\beta + d)}{(\alpha + \beta + N)^2 (\alpha + \beta + N + 1)};$ $P_{-q} = \left[1 + \frac{\beta + d}{\alpha + N - d} \times \right. \\ \left. \times F_{1-q; 2(\beta + d); 2(\alpha + N - d)} \right]^{-1}$
$h(p) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)(\rho_B - \rho_H)} \times$ $\times \left(\frac{p - \rho_H}{\rho_B - \rho_H} \right)^{\alpha-1} \times$ $\times \left(1 - \frac{p - \rho_H}{\rho_B - \rho_H} \right)^{\beta-1}$ $0 \leq \rho_H \leq p \leq \rho_B \leq 1; \alpha \geq 0, \beta \geq 0$	$\hat{P}^* = \hat{p}^* = \rho_H + (\rho_B - \rho_H) \frac{\alpha + N - d}{\alpha + \beta + N};$ $\sigma_{\hat{P}^*}^2 = (\rho_B - \rho_H)^2 \times$ $\times \frac{(\alpha + N - d)(\beta + d)}{(\alpha + \beta + N)^2 (\alpha + \beta + N + 1)};$ $P_{-q} = \rho_H + (\rho_B - \rho_H) \left[1 + \frac{\beta + d}{\alpha + N - d} \times \right. \\ \left. \times F_{1-q; 2(\beta + d); 2(\alpha + N - d)} \right]^{-1}$

Примечание. $F_{\alpha; \nu_1, \nu_2}$ — 100 $\alpha\%$ -ная точка F -распределения с ν_1 и ν_2 степенями свободы.

Решение. При $N = 10$, $d = 1$, $\rho_H = 0,75$, $\rho_B = 1$, $\alpha = 8$, $\beta = 1$ по формулам табл. 1 найдем

$$\hat{P}^* = 0,75 + 0,25 \cdot \frac{17}{19} = 0,9737;$$

$$\sigma_{\hat{P}^*}^2 = \frac{0,25}{19} \sqrt{\frac{17 \cdot 2}{20}} =$$

$$= 1,716 \cdot 10^{-2}.$$

С помощью таблиц F -распределения [4] найдем $F_{0,1; 4; 34} = 2,12$, а затем

$$P_{0,9} = 0,75 + \frac{0,25}{1 + \frac{2}{17} \cdot 2,12} = 0,9501.$$

Способы получения параметров априорного бета-распределения. Если известны априорные значения вероятности безотказной работы P_0 и среднее квадратическое отклонение σ_0 , то параметры априорного распределения определяются по формулам:

$$\alpha = P_0 \left[\frac{P_0(1-P_0)}{\sigma_0^2} - 1 \right]; \beta =$$

$$= (1-P_0) \left[\frac{P_0(1-P_0)}{\sigma_0^2} - 1 \right]. \quad (8)$$

Если значения P_0 и σ_0 отсутствуют, то могут быть найдены их статистические оценки. Для этого следует проанализировать результаты испытаний

и эксплуатации объектов-аналогов при выполнении условия стабильности производства. Пусть имеется n типов объектов-аналогов и для i -го типа проведены N_i испытаний при d_i отказах. Тогда оценки \hat{P}_0 и $\hat{\sigma}_0$ могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} \hat{P}_0 &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{N_i}; \quad \hat{\sigma}_0^2 = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d_i}{N_i} + \hat{P}_0 - 1 \right)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Экспоненциальное распределение.

Случайная наработка на отказ подчиняется экспоненциальному распределению $F(t; \lambda) = 1 - \exp(-\lambda t)$. Единственным параметром этого распределения является неизменная во времени интенсивность отказов λ . В табл. 2 приведены расчетные формулы для оценок интенсивности отказов и вероятности безотказной работы $P(t)$ в течение заданного времени t . Рассмотрены два наиболее употребляемых случая распределения: сопряженного априорного λ с известными параметрами s и ϵ и равномерного априорного для $P(t)$. Статистика эксперимента x имеет смысл суммарной наработки при испытаниях, для различных планов вычисляется в соответствии с формулами табл. 3.

В формулах табл. 2 и в дальнейшем тексте $\bar{\tau} = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ — выборка наработок при испытаниях, $\bar{t} = \{t_1^*, \dots, t_d^*\}$ — выборка моментов отказов, $\bar{t} = \{t_1, \dots, t_h\}$ — выборка моментов приостановок (цензурирования).

Способы выбора параметров априорного распределения. Если известно априорное среднее значение интенсивности отказа λ_0 и характеристика его погрешности σ_{λ_0} , то параметры s и ϵ определяются по формулам:

$$\epsilon = \frac{\lambda_0}{\sigma_{\lambda_0}^2}; \quad s = \left(\frac{\lambda_0}{\sigma_{\lambda_0}} \right)^2 - 1. \quad (10)$$

В том случае, когда задано априорное значение вероятности безотказной

работы $P_0(t)$ в течение заданного времени t и характеристика погрешности $\sigma_{P_0(t)}$, следует воспользоваться приближенными формулами:

$$P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}; \quad \sigma_{P_0(t)}^2 \cong P_0^2(t) t^2 \sigma_{\lambda_0}^2, \quad (11)$$

с помощью которых можно определить λ_0 и σ_0 :

$$\lambda_0 = -\frac{1}{t} \ln P_0(t); \quad \sigma_{\lambda_0} = \frac{\sigma_{P_0}}{t P_0(t)} \quad (12)$$

и затем воспользоваться соотношениями (10).

Пример 3. В соответствии с планом $[N, U, T]$ ($T = 80$ с) проведено восемь опытов, в ходе которых зафиксировано два отказа при $t_1^* = 48$ с, $t_2^* = 64$ с. По априорным соображениям $\lambda_0 = 0,4 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $\sigma_{\lambda_0} = 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. Необходимо вычислить оценки интенсивности отказов и вероятности безотказной работы в течение $t = 70$ с с уровнем доверия $q = 0,9$.

Решение. С помощью формулы табл. 3 определим значение статистики x для плана $[N, U, T]$:

$$x = 48 + 64 + 6 \cdot 80 = 592 \text{ с.}$$

Используя соотношения (10), определим параметры сопряженного априорного распределения $\epsilon = 0,4 \cdot 10^6$, $s = 15$. С помощью соотношений табл. 2 определим оценки интенсивности отказов:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}^* &= \frac{2 + 15 + 1}{0,4 \cdot 10^6 + 592} = \\ &= 0,449 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{с}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda^*} &= \left[\frac{2 + 15 + 1}{(0,4 \cdot 10^6 + 592)^2} \right]^{1/2} = \\ &= 0,106 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{с}}. \end{aligned}$$

По таблицам хи-квадрат распределения [4] определим значение процентной точки распределения χ^2 вероятности $1 - q = 0,1$ с 2 ($d + s + 1$) = 36 степенями свободы: $\chi_{0,1; 36}^2 = 47,212$. Это позволяет

2. Байесовские оценки показателей надежности для экспоненциального распределения наработки на отказ

Априорная плотность	Расчетная формула для оценок показателей надежности
$h(\lambda) = h(\lambda; s, \varepsilon) =$ $= \frac{\varepsilon^{s+1}}{\Gamma(s+1)} \lambda^s e^{-\lambda \varepsilon};$ $s \geq 0; \lambda \geq 0; \varepsilon > 0$	$\hat{\lambda}^* = \frac{d+s+1}{\kappa + \varepsilon}; \quad \sigma_{\hat{\lambda}^*}^2 = \frac{d+s+1}{(\kappa + \varepsilon)^2};$ $\bar{\lambda}_q = \frac{\chi_{1-q}^2; 2(d+s+1)}{2(\kappa + \varepsilon)}$ <hr/> $\hat{P}^*(t) = \left(\frac{u}{u+1} \right)^{v+1},$ $\sigma_{\hat{P}^*(t)}^2 = \left(\frac{u}{u+2} \right)^{v+1} - \left(\frac{u}{u+1} \right)^{2(v+1)};$ $P_q = \exp \left[- \frac{\chi_{1-q}^2; 2(d+s+1)}{2u} \right];$ $u = \frac{\varepsilon}{t} + \frac{\kappa}{t}; \quad v = s + d$
$h(P(t)) =$ $= \begin{cases} 0, & P(t) < \rho_H; \\ \frac{1}{\rho_B - \rho_H}, & \rho_H \leq P(t) \leq \rho_B; \\ 0, & P(t) > \rho_B. \end{cases}$ $0 \leq \rho_H \leq \rho_B \leq 1$	$\hat{P}^*(t) = \frac{I_E(\rho_B, \omega + 1, d) - I_E(\rho_H, \omega + 1, d)}{I_E(\rho_B, \omega, d) - I_E(\rho_H, \omega, d)};$ $\sigma_{\hat{P}^*(t)}^2 = \frac{I_E(\rho_B, \omega + 2, d) - I_E(\rho_H, \omega + 2, d)}{I_E(\rho_B, \omega, d) - I_E(\rho_H, \omega, d)} - \hat{P}^{*2}(t),$ $I_E(P_q, \omega, d) = (1-q) I_E(\rho_B, \omega, d) + q I_E(\rho_H, \omega, d);$ $\omega = \frac{\kappa}{t};$ $I_E(x, a, n) =$ $= x^{a+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \frac{ \ln^{n-k} x }{(a+1)^{k+1}}$

вычислить верхнюю доверительную границу интенсивности отказов:

$$\bar{\lambda}_{0,9} = \frac{47,212}{2(0,4 \cdot 10^6 + 592)} = 0,589 \cdot 10^{-4} \frac{1}{c}.$$

Определим теперь оценки вероятности безотказной работы в течение 70 с. Найдем параметры u и v , используемые в формулах табл. 3: $u = 5722,7$, $v = 17$. По формулам табл. 2 рассчитаем:

$$\hat{P}(70) = \left(\frac{5722,7}{5722,7 + 1} \right)^{17+1} = 0,9969;$$

$$\sigma_{\hat{P}^*(70)}^2 = \left(\frac{5722,7}{5722,7 + 2} \right)^{17+1} - \left(\frac{5722,7}{5722,7 + 1} \right)^{2(17+1)} = 1,78 \cdot 10^{-6};$$

$$P_{0,9}(70) = \exp \left(- \frac{47,212}{2 \cdot 5722,7} \right) = 0,9959.$$

Пример 4. При восьми независимых испытаниях устройства, проводимых по плану с многократным цензурированием, зафиксированы следующие наработки: $\bar{\tau} = \{80,4; 92,5; 108,3; 78,4; 96,5; 112,0; 108,4; 89,3\}$. Седьмой опыт закончился отказом после 108,4 с нормальной работы. Все остальные испытания были прекращены до момента наступления отказа. По априорным соображениям вероятность безотказной работы устройства в течение 70 с находится в пределах $[0,8; 1]$. Необходимо определить оценки $P(70)$.

Решение. Расчеты проводим в соответствии с формулами табл. 2 для случая равномерного априорного распределения показателя надежности $P(t)$. Вычислим значение статистики ω : $\omega = \kappa/t = 10,94$. Найдем значения функции I_E , необходимые для определения оценок:

$$I_E(0,8; 10,94; 1) = 0,8^{11,94} \times \left(- \frac{\ln 0,8}{11,94} + \frac{1}{11,94^2} \right) = 1,790 \cdot 10^{-3}.$$

3. Формулы для расчета статистики испытаний

План испытаний	Расчетная формула для статистики κ
$[N, U, T]$	$\kappa = \sum_{i=1}^d t_i^* + (N - d)T$
$[N, U, r]$	$\kappa = \sum_{i=1}^r t_i^* + (N - r)t_r^*$
$[N, U, z]$	$\kappa = \sum_{i=1}^N \tau_i$

По аналогии $I_E(1; 10,94; 1) = 7,014 \cdot 10^{-3}$; $I_E(0,8; 11,94; 1) = 1,294 \cdot 10^{-3}$; $I_E(1; 11,94; 1) = 5,972 \cdot 10^{-3}$; $I_E(0,8; 12,94; 1) = 9,428 \cdot 10^{-4}$; $I_E(1; 12,94; 1) = 5,146 \cdot 10^{-3}$. С помощью формул табл. 2 получим

$$\hat{P}^*(70) = \frac{I_E(1; 11,94; 1) - I_E(0,8; 11,94; 1)}{I_E(1; 10,94; 1) - I_E(0,8; 10,94; 1)} = 0,8955;$$

$$\sigma_{\hat{P}^*(70)} = \left[\frac{I_E(1; 12,94; 1) - I_E(0,8; 12,94; 1)}{I_E(1; 10,94; 1) - I_E(0,8; 10,94; 1)} - 0,8955^2 \right]^{1/2} = 0,517 \cdot 10^{-1}.$$

Решив уравнение из табл. 3 в промежутке $[0,8; 1]$ при $q = 0,9$, получим с точностью 10^{-4} $P_{0,9}(70) = 0,8627$.

Распределение с линейной функцией интенсивности. Данное распределение обобщает экспоненциальное. Обобщение заключается в том, что интенсивность отказов $\lambda(t)$ является линейной функцией времени $\lambda(t) = 2\alpha t + \lambda_0$. Функции $\lambda(t)$ соответствует плот-

ность распределения наработки на отказ:

$$f(t) = f(t; \alpha, \lambda_0) = (2\alpha t + \lambda_0) \times \exp[-(\alpha t^2 + \lambda_0 t)] \quad (13)$$

и функция надежности:

$$P(t) = P(t; \alpha, \lambda_0) = \exp[-(\alpha t^2 + \lambda_0 t)]. \quad (14)$$

На практике неудобно назначать априорное распределение относительно параметров α и λ_0 . Гораздо удобнее в качестве параметров использовать непосредственно $P(t)$ и коэффициент деградации интенсивности отказов z за время t . По определению $z = \lambda(t)/\lambda_0$. Параметры α и λ_0 связаны с $P(t)$ и z с помощью соотношений

$$\alpha = -\frac{\ln P(t)}{t^2} \frac{z-1}{z+1}; \quad \lambda_0 = -\frac{2 \ln P(t)}{t(z+1)}. \quad (15)$$

В табл. 4 приведены расчетные соотношения для оценок вероятности безотказной работы $P(t)$ при равномерных априорных распределениях параметров z и $P(t)$. Для выполнения расчетов по формулам табл. 4 необходимо использовать численные методы, ориентированные на применение ЭВМ.

Пример 5. В процессе статистических испытаний зафиксированы следующие значения наработок (в секундах): $\bar{t}^* = \{130\}$, $\bar{t} = \{240, 310, 280, 160, 240, 340, 420, 180, 250, 300\}$, т. е. одно испытание закончилось отказом и десять приостановками. По априорным соображениям $P(100) \in [0,9; 1,0]$, а коэффициент деградации $z \in [1; 2]$. Расчеты оценок вероятности безотказной работы $P(100)$ проводились по формулам табл. 4 с помощью специально разработанной программы для ЭВМ ЕС-1033. В результате расчетов получены следующие оценки: $\hat{P}^*(100) = 0,9576$; $\sigma_{\hat{P}^*(100)} = 0,0242$; $\underline{P}_{0,9} = 0,9216$.

Пример 6. Исходные данные настоящего примера совпадают с данными примера 5. В отличие от предыдущего случая известно точное значение коэффициента деградации $z = 0,2$. В результате расчетов по формулам табл. 4

получены следующие значения оценок:

$$\hat{P}^*(100) = 0,9729, \quad \sigma_{\hat{P}^*(100)} = 0,0181, \\ \underline{P}_{0,9} = 0,9476.$$

Распределение Вейбулла. Случайная наработка на отказ подчиняется распределению Вейбулла с плотностью

$$f(t) = f(t; \theta, \alpha, \tau) = \frac{\alpha}{\theta} (t - \tau)^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\theta} (t-\tau)^\alpha} \quad (16)$$

В табл. 5 представлены расчетные формулы для оценок вероятности безотказной работы в случае, когда используют равномерное априорное распределение параметра θ и величины показателя надежности $P(t)$.

Пример 7. Результатами испытаний некоторого технического устройства являются следующие значения наработок (в секундах) $\bar{t}^* = \{270\}$, $\bar{t} = \{190, 350, 240, 310, 280, 160, 240, 340, 420, 180, 250, 300\}$. Случайная наработка объекта подчиняется распределению Вейбулла с параметром положения $\tau = 0$. Относительно параметра α задан промежуток априорной неопределенности $[1; 1,8]$. Известно также, что вероятность безотказной работы $P(100)$ находится в промежутке $[0,9; 1]$. Необходимо найти апостериорные байесовские оценки $P(100)$.

Решение. Расчет искомых оценок проводим по формулам табл. 5. Для выполнения расчетов необходимо использовать численные методы одномерного интегрирования и решения трансцендентного уравнения. Это предполагает обращение к ЭВМ. Окончательные значения оценок следующие: $\hat{P}^*(100) = 0,9666$, $\sigma_{\hat{P}^*(100)} = 0,0202$, $\underline{P}_{0,9} = 0,9291$.

Для случая фиксированного значения параметра α используются формулы табл. 5. При $\alpha = 1,8$ получены следующие значения оценок:

$$\hat{P}^*(100) = 0,9766; \quad \sigma_{\hat{P}^*(100)} = 0,0163; \\ \underline{P}_{0,9} = 0,9564.$$

В табл. 6 представлены выражения для байесовских оценок вероятности безотказной работы в случае, когда

4. Байесовские оценки вероятности безотказной работы для распределения с линейной функцией интенсивности

Априорная плотность	Расчетная формула для оценок
$h(P(t), z) = h_1(P(t)) h_2(z);$ $h_1(P(t)) = \begin{cases} 0, & P(t) < p_H; \\ \frac{1}{p_B - p_H}, & p_H \leq P(t) \leq p_B; \\ 0, & P(t) > p_B \end{cases}$ $h_2(z) = \begin{cases} 0, & z < z_1; \\ \frac{1}{z_2 - z_1}, & z_1 \leq z \leq z_2; \\ 0, & z > z_2 \end{cases}$	$\hat{P}^*(t) = \frac{1}{\beta} \int_{z_1}^{z_2} a(z) I(z, p_H, p_B, 1, d) dz;$ $\sigma_{\hat{P}^*}^2(t) = \frac{1}{\beta} \int_{z_1}^{z_2} a(z) I(z, p_H, p_B, 2, d) dz - [\hat{P}^*(t)]^2;$ $\int_{z_1}^{z_2} a(z) I(z, p_q, p_B, 0, d) dz = q\beta;$ $\beta = \int_{z_1}^{z_2} a(z) I(z, p_H, p_B, 0, d) dz$
$h(P(t)) = \begin{cases} 0; & P(t) < p_H; \\ \frac{1}{p_B - p_H}; & p_H \leq P(t) \leq p_B; \\ 0; & P(t) > p_B \end{cases}$ <p>Параметр z фиксирован</p>	$\hat{P}^*(t) = \frac{I(z, p_H, p_B, 1, d)}{I(z, p_H, p_B, 0, d)};$ $\sigma_{\hat{P}^*}^2(t) = \frac{I(z, p_H, p_B, 2, d)}{I(z, p_H, p_B, 0, d)} - [\hat{P}^*(t)]^2;$ $I(z, p_q, p_B, 0, d) = qI(z, p_H, p_B, 0, d)$

Примечание. $I(z, p_H, p_B, k, d) = I_E(p_B, b(z) + k, d) - I_E(p_H, b(z) + k, d);$

$$\omega = \sum_{i=1}^N \frac{\tau_i}{t}; \quad \varepsilon = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\tau_i}{t}\right)^2; \quad b(z) = \frac{1}{z+1} [(z-1)\varepsilon + 2\omega];$$

$$a(z) = \frac{1}{(z+1)^d} \prod_{i=1}^d \left[(z-1) \frac{t_i^*}{t} + 1 \right].$$

Выражение для $I_E(x, a, n)$ приведено в табл. 2.

5. Байесовские оценки вероятности безотказной работы для распределения Вейбулла при равномерном априорном распределении

Априорная плотность	Расчетная формула для оценок
$h(P(t), \alpha) = h_1(P(t)) h_2(\alpha);$ $h_1(P(t)) = \begin{cases} 0, & P(t) < p_H; \\ \frac{1}{p_B - p_H}, & p_H \leq P(t) \leq p_B; \\ 0, & P(t) > p_B; \end{cases}$ $h_2(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha < \alpha_1; \\ \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2; \\ 0, & \alpha > \alpha_2; \end{cases}$	$\hat{P}^*(t) = \frac{1}{\beta} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha^d \mu^{\alpha-1} \times \\ \times I_W(\alpha, p_H, p_B, 1, d) d\alpha;$ $\sigma_{\hat{P}^*}^2(t) = \frac{1}{\beta} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha^d \mu^{\alpha-1} \times \\ \times I_W(\alpha, p_H, p_B, 2, d) d\alpha - [\hat{P}^*(t)]^2;$ $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha^d \mu^{\alpha-1} I_W(\alpha, p_q, p_B, 0, d) d\alpha - \\ - \beta q = 0;$ $\beta = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha^d \mu^{\alpha-1} I_W(\alpha, p_H, p_B, 0, d) d\alpha$
$h(P(t)) = \begin{cases} 0; & P(t) < p_H; \\ \frac{1}{p_B - p_H}, & p_H \leq P(t) \leq p_B; \\ 0, & P(t) > p_B \end{cases}$ <p>Параметр α фиксирован</p>	$\hat{P}^*(t) = \frac{I_W(\alpha, p_H, p_B, 1, d)}{I_W(\alpha, p_H, p_B, 0, d)};$ $\sigma_{\hat{P}^*}^2(t) = \frac{I_W(\alpha, p_H, p_B, 2, d)}{I_W(\alpha, p_H, p_B, 0, d)} - \\ - [\hat{P}^*(t)]^2;$ $I_W(\alpha, p_q, p_B, 0, d) = \\ = q I_W(\alpha, p_H, p_B, 0, d)$

Примечание. $I_W(\alpha, p_H, p_B, k, d) = I_E(p_B, \varepsilon(\alpha) + k, d) - I_E(p_H, \varepsilon(\alpha) + k, d)$;

$$\mu = \prod_{i=1}^d \frac{t_i^* - \tau}{t}; \quad \varepsilon(\alpha) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\tau_i - \tau}{t} \right)^\alpha.$$

Выражение для $I_E(x, a, n)$ приведено в табл. 2.

6. Байесовские оценки вероятности безотказной работы для распределения Вейбулла при фиксированном параметре формы

Априорная плотность	Расчетная формула для оценок
$h(\theta) = h(\theta; \delta, a, b) =$ $= \frac{(\delta - 1)(ab)^{\delta-1}}{b^{\delta-1} - a^{\delta-1}} \frac{1}{\theta^{\delta}};$ <p>$\delta \geq 0; 0 \leq a \leq \theta \leq b$ (обобщенное равномерное распределение)</p>	$\hat{P}^*(t) = \frac{\gamma^*(d + \delta - 1, \kappa + (t - \tau)^\alpha)}{\gamma^*(d + \delta - 1, \kappa)} \times$ $\times \left[1 + \frac{(t - \tau)^\alpha}{\kappa} \right]^{1-d-\delta};$ $\sigma_{\hat{P}^*}^2(t) = \frac{1}{[\gamma^*(d + \delta - 1, \kappa)]^2} \times$ $\times \left\{ \frac{\gamma^*(d + \delta - 1, \kappa) \gamma^*(d + \delta - 1, \kappa + 2(t - \tau)^\alpha)}{\left[1 + \frac{2(t - \tau)^\alpha}{\kappa} \right]^{d+\delta-1}} - \frac{[\gamma^*(d + \delta - 1, \kappa + (t - \tau)^\alpha)]^2}{\left[1 + \frac{(t - \tau)^\alpha}{\kappa} \right]^{2(d+\delta-1)}} \right\};$ $\gamma^*(k, y) = \gamma\left(k, \frac{y}{a}\right) - \gamma\left(k, \frac{y}{b}\right);$ $\gamma(n, z) = \int_0^z e^{-t} t^{n-1} dt$
$h(\theta) = h(\theta; \mu, \nu) =$ $= \frac{e^{-\frac{\mu}{\theta}} \left(\frac{\mu}{\theta}\right)^{\nu+1}}{\mu \Gamma(\nu)};$ <p>$0 < \theta < \infty; \mu > 0, \nu > 0$ (обратное гамма-распределение)</p>	$\hat{P}^*(t) = \left[1 + \frac{(t - \tau)^\alpha}{\kappa + \mu} \right]^{-d-\nu};$ $\sigma_{\hat{P}^*}^2(t) = \left[1 + \frac{2(t - \tau)^\alpha}{\kappa + \mu} \right]^{-d-\nu} - \left[1 + \frac{(t - \tau)^\alpha}{\kappa + \mu} \right]^{-2(d+\nu)}$
$h(\theta) = h(\theta; \delta) = \frac{1}{\delta} e^{-\frac{\theta}{\delta}};$ <p>$0 \leq \theta < \infty; \delta > 0.$</p>	$\hat{P}^*(t) = \frac{K_{d-1} \left(2 \sqrt{\frac{\kappa + (t - \tau)^\alpha}{\delta}} \right)}{K_{d-1} \left(2 \sqrt{\frac{\kappa}{\delta}} \right)} \times$ $\times \frac{1}{\left[1 + \frac{(t - \tau)^\alpha}{\kappa} \right]^{\frac{d-1}{2}}};$

Продолжение табл. 6

Априорная плотность	Расчетная формула для оценок
$h(\theta) = h(\theta; \delta) = \frac{1}{\delta} e^{-\frac{\theta}{\delta}};$ $0 \leq \theta < \infty; \delta > 0.$	$\sigma_{\hat{P}^*}^2(t) = \frac{1}{K_{d-1} \left(2 \sqrt{\frac{\kappa}{\delta}} \right)} \times$ $\times \left\{ \frac{K_{d-1} \left(2 \sqrt{\frac{\kappa + 2(t-\tau)^\alpha}{\delta}} \right)}{\left[1 + \frac{2(t-\tau)^\alpha}{\delta} \right]^{\frac{d-1}{2}}} - \frac{K_{d-1}^2 \left(2 \sqrt{\frac{\kappa + (t-\tau)^\alpha}{\delta}} \right)}{K_{d-1} \left(2 \sqrt{\frac{\kappa}{d}} \right) \left[1 + \frac{(t-\tau)^\alpha}{\kappa} \right]^{d-1}} \right\};$ $K_\nu(az) = \frac{1}{2} a^\nu \int_0^\infty \exp \left[- \left(\frac{1}{2} zt + \frac{a^2 z}{2t} \right) \right] \frac{dt}{t^{\nu+1}}.$

Примечание. $\kappa = \sum_{i=1}^N (\tau_i - t)^2$.

параметр формы известен. Рассмотренные априорные распределения представляют обширное семейство разнообразных форм.

Пример 8. Случайная наработка на отказ подчиняется распределению Вейбулла с параметрами $\alpha = 2$ и $\tau = 0$. Параметр θ имеет априорное обратное гамма-распределение с параметрами $\mu = 0,5 \cdot 10^6$; $\nu = 1,3$. При испытаниях объекта зафиксирована выборка наработок, совпадающая с данными примера 7. Необходимо определить точечную оценку вероятности безотказной работы $P(100)$ и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Определим статистику испытаний:

$$d = 1; \kappa = \sum_{i=1}^{13} \tau_i^2 = 1,023 \cdot 10^6. \quad (17)$$

Расчет искомых оценок проводим по формулам табл. 6:

$$\hat{P}^*(100) =$$

$$= \left[1 + \frac{100^2}{(0,5 + 1,0237) 10^6} \right]^{-1-1,3} =$$

$$= 0,9851.$$

7. Байесовские оценки вероятности безотказной работы для логарифмически нормального распределения наработки на отказ

Априорная плотность	Расчетная формула для оценок
$h(a) = \begin{cases} 0; & a < a_1; \\ \frac{1}{a_2 - a_1}; & a_1 \leq a \leq a_2; \\ 0; & a > a_2 \end{cases}$ <p>Параметр σ фиксирован</p>	$\hat{P}^*(t) = \frac{1}{\beta} \int_{a_1}^{a_2} \Phi\left(\frac{x - \ln t}{\sigma}\right) \times e^{-\frac{x}{2\sigma^2}(xd - 2v_1)} K(x, \sigma) dx;$ $\sigma_{\hat{P}^*}^2(t) = \frac{1}{\beta} \int_{a_1}^{a_2} \Phi^2\left(\frac{x - \ln t}{\sigma}\right) \times e^{-\frac{x}{2\sigma^2}(xd - 2v_1)} K(x, \sigma) dx - [\hat{P}^*(t)]^2;$ $\beta = \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}(xd - 2v_1)} K(x, \sigma) dx;$ $\underline{P}_q = \Phi\left(\frac{z - \ln t}{\sigma}\right);$ $\int_{a_1}^z e^{-\frac{x}{2\sigma^2}(xd - 2v_1)} K(x, \sigma) dx = q\beta$
$h(a, \sigma) = h_1(a) h_2(\sigma);$ $h_1(a) = \begin{cases} 0; & a < a_1; \\ \frac{1}{a_2 - a_1}; & a_1 \leq a \leq a_2; \\ 0; & a > a_2; \end{cases}$ $h_2(\sigma) = \begin{cases} 0; & \sigma < \sigma_1; \\ \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1}; & \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2; \\ 0; & \sigma > \sigma_2. \end{cases}$	$\hat{P}^*(t) = \frac{I_L(0, 1)}{I_L(0, 0)};$ $\sigma_{\hat{P}^*}^2(t) = \frac{I_L(\hat{P}^*(t), z)}{I_L(0, 0)};$ $I_L(c, k) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left[\Phi\left(\frac{x - \ln t}{\sigma}\right) - c \right]^k \times \varepsilon(x, y) dx dy;$ $\varepsilon(x, y) = \frac{1}{y^d} \exp\left[-\frac{1}{2y^2}(v_2 - 2xv_1 + x^2n)\right] \times K(x, y);$ $\underline{P}_q = 1 - \Phi(u_q);$ $\int_{\ln t - x \leq u_q y} \int \varepsilon(x, y) dx dy - qI_L(0, 0) = 0$

Примечание. $v_1 = \sum_{i=1}^d \ln t_i^*$; $v_2 = \sum_{i=1}^d \ln^2 t_i^*$.

Вид функции $K(x, y)$ для различных планов испытаний приведен в табл. 8.

8. Выражение для функции $K(x, y)$ при различных планах испытаний

План испытания	Вид функции $K(x, y)$
$[N, U, T]$	$\left[\Phi \left(\frac{x - \ln T}{y} \right) \right]^{n-d}$
$[N, U, r]$	$\left[\Phi \left(\frac{x - \ln t_r}{y} \right) \right]^{n-r}$
$[N, U, z]$	$\prod_{i=1}^k \Phi \left(\frac{x - \ln t_i}{y} \right)$

$$\sigma_{\hat{P}^*(100)}^2 = \left[1 + \frac{2 \cdot 100^2}{(0,5 + 1,0237) 10^6} \right]^{-1-1,3} - 0,3014 \cdot 10^{-4};$$

$$\sigma_{\hat{P}^*(100)} = 0,549 \cdot 10^{-2}.$$

Логарифмически нормальное распределение. Случайная наработка объекта на отказ подчиняется распределению с плотностью

$$f(t; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} \times \exp \left[- \frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2} \right]; t \geq 0. (18)$$

Указанное распределение чаще всего используется при оценке надежности

по усталостной прочности и долговечности при многократных повторных нагружениях. В этом случае наработка t является числом циклов до разрушения. Функция надежности выражается формулой

$$P(t) = P(t; a, \sigma) = \Phi \left(\frac{a - \ln t}{\sigma} \right). (19)$$

В табл. 7 приведены расчеты формулы для байесовских оценок вероятности безотказной работы при равномерном априорном распределении параметров a и σ .

Пример 9. В результате проектных исследований надежности определены априорное значение среднего числа циклов до разрушения (2084) и априорное среднее квадратическое отклонение (573). Им соответствуют параметры функции (18): $a_0 = 7,606$, $\sigma_0 = 0,2700$. Примем 10%-ные интервалы неопределенности для каждого из указанных параметров. Рассмотрим две выборки результатов испытаний (в циклах):

- $\bar{t}^* = \{2050, 1960, 1880, 1920\}$, $\bar{t} = \{1680, 2030, 1890, 2020, 1740, 1880, 2100, 1860\}$;
- $\bar{t}^* = \{1750, 1990, 1680, 1850, 1860, 1970, 2040, 1820\}$; $\bar{t} = \{1870, 1950, 1580, 1830\}$.

Эти выборки соответствуют продукции двух предприятий, причем продукция второго, судя по выборкам, хуже. Расчеты оценок вероятности

9. Значения оценок вероятности безотказной работы при различных значениях требуемого ресурса для выборок примера 9

t , циклы	P_0	$\hat{P}^*(t)$	$\sigma_{\hat{P}^*}(t)$	$\underline{P}_{0,9}$	$\hat{P}^*(t)$	$\sigma_{\hat{P}^*}(t)$	$\underline{P}_{0,9}$
		Выборка 1			Выборка 2		
1422	0,9000	0,9650	0,0292	0,9080	0,8921	0,0580	0,7986
1289	0,9500	0,9844	0,0155	0,9503	0,9442	0,0364	0,8803
1023	0,9900	0,9984	0,0224	0,9908	0,9922	0,0079	0,9741
1003	0,9950	0,9987	0,0019	0,9921	0,9935	0,0068	0,9777
873	0,9990	0,9997	0,0005	0,9975	0,9985	0,0020	0,9926

безотказной работы проводим с помощью формул табл. 7 и 8. Результаты расчетов при различных значениях требуемого числа циклов t приведены в табл. 9. Данные этой таблицы позволяют учесть реальный уровень производства при оценке показателя надежности продукции.

3. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ

Непараметрические байесовские оценки охватывают более общий расчетный случай, когда параметрическое семейство для случайной наработки на отказ не задано. Существует ряд методов непараметрического байесовского оценивания, однако они весьма громоздки и могут быть использованы в инженерной практике с большим трудом. Ниже приведены основные положения и расчетные формулы, применение которых при проведении конкретных расчетов не вызывает затруднений. Рассматривается два типа оценок: общие непараметрические байесовские, которые справедливы для любых распределений случайной наработки на отказ $F(t)$, и непараметрические байесовские, справедливые для класса стареющих и стареющих в среднем распределений $F(t)$.

Общие непараметрические байесовские оценки. Рассматривается техническое устройство с произвольной функцией распределения наработки на отказ $F(t)$ при $t \in [0, \infty)$. Априорная информация задается в виде некоторой метрики α на промежутке $[0, \infty)$. Каждому промежутку $[a, b] \subset [0, \infty)$ метрика α ставит в соответствие некоторое число $\alpha([a, b])$. При проведении конкретных расчетов метрика α задается следующим образом. Пусть $F_0(t)$ — априорное представление неизвестной функции распределения, заданное в виде некоторой параметрической функции. Тогда для любых промежутков $[0, t] \subset [0, \infty)$ метрика α определяется с помощью выражения

$$F_0(t) = \frac{\alpha([0, t])}{\alpha([0, \infty))} = \frac{\alpha([0, t])}{\beta},$$

где $\beta = \alpha([0, \infty))$. Величина β имеет смысл показателя значимости априор-

ной информации, измеряемого эквивалентным числом испытаний. Значение показателя β назначается из субъективных соображений. Если, например, априорная информация имеет такую же значимость, что и результаты эксперимента, то β следует считать равным числу опытов N . Если же значимость априорной информации в 2 раза меньше, то $\beta = N/2$. Таким образом, для задания априорной метрики α необходимо иметь: априорную функцию распределения $F_0(t)$ и показатель значимости априорной информации β .

Используя $F_0(t)$ и β , выражение для априорной метрики окончательно представим следующим образом:

$$\alpha([0, t]) = \beta F_0(t). \quad (20)$$

Точечная апостериорная оценка функции распределения по полной выборке определяется следующим образом. Пусть испытания проводятся до отказа каждого опытного образца и $\bar{t}^* = \{t_1^*, \dots, t_N^*\}$ — выборка моментов отказов. Тогда апостериорная непараметрическая байесовская оценка функции распределения наработки на отказ определится следующим образом:

$$\hat{F}^*(t | \bar{t}^*) = p_N F_0(t) + (1 - p_N) F_N(t | \bar{t}^*), \quad (21)$$

где $p_N = \beta / (\beta + n)$, $F_N(t | \bar{t}^*)$ — эмпирическая функция распределения. С помощью формулы (21) оценивается вероятность безотказной работы $P(t)$:

$$\hat{P}^*(t) = p_N P_0(t) + (1 - p_N) \times \left[1 - \frac{d(t)}{N} \right], \quad (22)$$

где $P_0(t)$ — априорное значение вероятности безотказной работы в течение наработки t ; $d(t)$ — число отказов, наблюдаемых в промежутке $[0, t]$.

Пример 10. При испытаниях устройства зафиксированы следующие наработки (в часах): $\bar{t}^* = (124, 118, 148, 106, 92, 134)$. Априорное значение вероятности безотказной работы в течение 110 ч составляет 0,95. Априорное распределение наработки на отказ экспоненциальное: $F_0(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}$. Априорная информация и результаты

эксперимента имеют одинаковую значимость. Необходимо найти точечную оценку $\hat{P}^*(100)$.

Решение. Определим априорное значение интенсивности отказов λ_0 , используя тот факт, что $P_0(110) = 0,95$:

$$\lambda_0 = - \frac{\ln P_0(110)}{110} = 4,66 \cdot 10^{-4} \text{ 1/ч.}$$

Поскольку априорная информация имеет такую же значимость, что и экспериментальные данные, принимаем $\beta = N = 6$. Отсюда $p_N = 0,5$. Число наблюдаемых отказов к моменту $t = 100$ ч составляет $d(100) = 1$. Используя формулу (22), получим

$$\hat{P}^*(100) = 0,5 \exp(-4,66 \cdot 10^{-4} \cdot 100) + 0,5 \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 0,8939.$$

Апостериорные оценки вероятности безотказной работы по многократно цензурированной выборке. Пусть в процессе испытаний наблюдается выборка $\bar{t} = (\bar{t}^*, \bar{t})$, где $\bar{t}^* = \{t_1^*, t_2^*, \dots, t_d^*\}$ — выборка моментов отказа, $\bar{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ — выборка моментов приостановки испытаний. Вектор \bar{t} для

удобства дальнейших построений представим в виде возрастающей последовательности неповторяющихся значений $\bar{t}^{(m)} = (t_{(0)}, t_{(1)}, \dots, t_m, t_{(m+1)})$, причем $t_{(0)} = 0, t_{(m+1)} = \infty$, и обозначим с помощью l_j — количество моментов приостановок, равных $t_{(j)}$. Формулы для расчета апостериорных оценок $\hat{P}^*(t)$ и $\sigma_{\hat{P}^*(t)}^2$ приведены в табл. 10.

Пример 11. В процессе испытаний наблюдается выборка, включающая моменты отказов (в секундах) $\bar{t}^* = (36, 42, 46)$ и моменты приостановок $\bar{t} = (20, 34, 38, 20)$. По априорным соображениям $F_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$; известно также, что априорное значение $P_0(30) = 0,95$. Необходимо найти оценки вероятности безотказной работы $P(t)$ в течение времени t для заданного показателя значимости априорной информации β .

Решение. Запишем вектор $\bar{t}^{(3)} = (0, 20, 34, 38, \infty)$; проанализировав кратность цензурирования, найдем $l_1 = 2, l_2 = l_3 = 1$. В дальнейшем используем формулы табл. 10. Оценки вероятности безотказной работы $P(t)$ являются аналитическими. В табл. 11 приведены формулы для расчета иско-

10. Непараметрические байесовские оценки вероятности безотказной работы

Оценка	Расчетная формула для оценки
$\hat{P}^*(t)$	$\frac{\beta P_0(t) + M^+(t)}{\beta + N} \prod_{j=1}^i \frac{\beta P_0(t_{(j)}) + M(t_{(j)})}{\beta P_0(t_{(j)}) + M(t_{(j)}) - l_j};$ $t_{(i)} \leq t < t_{(i+1)}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$
$\sigma_{\hat{P}^*(t)}^2$	$\hat{P}^*(t) \left[\frac{\beta P_0(t) + M^+(t) + 1}{\beta + N + 1} \prod_{j=1}^i \frac{\beta P_0(t_{(j)}) + M(t_{(j)}) + 1}{\beta P_0(t_{(j)}) + M(t_{(j)}) - l_j + 1} - P^*(t) \right];$ $t_{(i)} \leq t < t_{(i+1)}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$

Примечание. $P_0(t) = 1 - F_0(t)$, $M(t)$ — количество элементов выборки больших или равных t ; $M^+(t)$ — количество элементов выборки строго больших t .

11. Непараметрические байесовские оценки вероятности безотказной работы для выборки примера 11

$[t(i), t(i+1)], c$	$\hat{P}^*(t)$	$\sigma_{\hat{P}^*}^2(t)$
[0, 20)	$\frac{\beta e^{-\lambda t} + 7}{\beta + 7}$	$\hat{P}^*(t) \left[\frac{\beta e^{-\lambda t} + 8}{\beta + 8} - \hat{P}^*(t) \right]$
[20, 34)	$\frac{\beta e^{-\lambda t} + 5}{\beta + 7} \frac{\beta e^{-20\lambda} + 7}{\beta e^{-20\lambda} + 5}$	$\hat{P}^*(t) \left[\frac{\beta e^{-\lambda t} + 6}{\beta + 8} \frac{\beta e^{-20\lambda} + 8}{\beta e^{-20\lambda} + 6} - \hat{P}^*(t) \right]$
[34, 36)	$\frac{\beta e^{-\lambda t} + 4}{\beta + 7} \frac{\beta e^{-20\lambda} + 7}{\beta e^{-20\lambda} + 5} \times \frac{\beta e^{-34\lambda} + 5}{\beta e^{-34\lambda} + 4}$	$\hat{P}^*(t) \left[\frac{\beta e^{-\lambda t} + 5}{\beta + 8} \frac{\beta e^{-20\lambda} + 8}{\beta e^{-20\lambda} + 6} \times \frac{\beta e^{-34\lambda} + 6}{\beta e^{-34\lambda} + 5} - \hat{P}^*(t) \right]$
[36, 38)	$\frac{\beta e^{-\lambda t} + 3}{\beta + 7} \frac{\beta e^{-20\lambda} + 7}{\beta e^{-20\lambda} + 5} \times \frac{\beta e^{-34\lambda} + 5}{\beta e^{-34\lambda} + 4}$	$\hat{P}^*(t) \left[\frac{\beta e^{-\lambda t} + 4}{\beta + 8} \frac{\beta e^{-20\lambda} + 8}{\beta e^{-20\lambda} + 6} \times \frac{\beta e^{-34\lambda} + 6}{\beta e^{-34\lambda} + 5} - \hat{P}^*(t) \right]$
[38, 42)	$\frac{\beta e^{-\lambda t} + 2}{\beta + 7} \frac{\beta e^{-20\lambda} + 7}{\beta e^{-20\lambda} + 5} \times \frac{\beta e^{-34\lambda} + 5}{\beta e^{-34\lambda} + 4} \cdot \frac{\beta e^{-38\lambda} + 3}{\beta e^{-38\lambda} + 2}$	$\hat{P}^*(t) \left[\frac{\beta e^{-\lambda t} + 3}{\beta + 8} \frac{\beta e^{-20\lambda} + 8}{\beta e^{-20\lambda} + 6} \times \frac{\beta e^{-34\lambda} + 6}{\beta e^{-34\lambda} + 5} \frac{\beta e^{-38\lambda} + 4}{\beta e^{-38\lambda} + 3} - \hat{P}^*(t) \right]$
[42, 46)	$\frac{\beta e^{-\lambda t} + 1}{\beta + 7} \frac{\beta e^{-20\lambda} + 7}{\beta e^{-20\lambda} + 5} \times \frac{\beta e^{-34\lambda} + 5}{\beta e^{-34\lambda} + 4} \frac{\beta e^{-38\lambda} + 3}{\beta e^{-38\lambda} + 2}$	$\hat{P}^*(t) \left[\frac{\beta e^{-\lambda t} + 2}{\beta + 8} \frac{\beta e^{-20\lambda} + 8}{\beta e^{-20\lambda} + 6} \times \frac{\beta e^{-34\lambda} + 6}{\beta e^{-34\lambda} + 5} \frac{\beta e^{-38\lambda} + 4}{\beta e^{-38\lambda} + 3} - \hat{P}^*(t) \right]$

Продолжение табл. 11

$[t_{(i)}, t_{(i+1)}], c$	$\hat{P}^*(t)$	$\sigma_{\hat{P}^*}^2(t)$
(46, ∞)	$\frac{\beta e^{-\lambda t}}{\beta + 7} \frac{\beta e^{-20\lambda} + 7}{\beta e^{-20\lambda} + 5} \times$ $\times \frac{\beta e^{-34\lambda} + 5}{\beta e^{-34\lambda} + 4} \frac{\beta e^{-38\lambda} + 3}{\beta e^{-38\lambda} + 2}$	$\hat{P}^*(t) \left[\frac{\beta e^{-\lambda t} + 1}{\beta + 8} \frac{\beta e^{-20\lambda} + 8}{\beta e^{-20\lambda} + 6} \times \right.$ $\times \frac{\beta e^{-34\lambda} + 6}{\beta e^{-34\lambda} + 5} \frac{\beta e^{-38\lambda} + 4}{\beta e^{-38\lambda} + 3} -$ $\left. \hat{P}^*(t) \right]$

мых оценок (при произвольных значениях λ и β), которые позволяют найти значения оценок для любого момента времени t . Пусть, в частности, $\beta = 7$, т. е. априорная информация имеет такую же значимость, что и результаты эксперимента. Поскольку $P_0(30) = 0,95$, определим $\lambda = -\ln 0,95/30 = 1,71 \cdot 10^{-3}$. Используя формулы табл. 11, найдем, например:

$$\hat{P}^*(30) = \frac{7 \exp(-1,71 \cdot 10^{-3} \cdot 30) + 5}{7 + 7} \times$$

$$\times \frac{7 \exp(-1,71 \cdot 10^{-3} \cdot 20) + 7}{7 \exp(-1,71 \cdot 10^{-3} \cdot 20) + 5} = 0,9736;$$

$$\sigma_{\hat{P}^*(30)}^2 =$$

$$= 0,9736 \left[\frac{7 \exp(-1,71 \cdot 10^{-3} \cdot 30) + 6}{7 + 8} \times \right.$$

$$\times \frac{7 \exp(-1,71 \cdot 10^{-3} \cdot 20) + 8}{7 \exp(-1,71 \cdot 10^{-3} \cdot 20) + 6} -$$

$$\left. - 0,9736 \right] = 1,820 \cdot 10^{-3} = 0,0427^2.$$

Приведенная в табл. 10 байесовская оценка обобщает хорошо известную оценку Каплана—Майера. Если считать $\beta = 0$, что означает игнорирование априорной информации, то формула для $\hat{P}^*(t)$ преобразуется в формулу Каплана—Майера.

Приближенные оценки для класса стареющих распределений наработки

на отказ. Класс F_{SS} стареющих в среднем распределений включает в себя все распределения, для которых отношение

$$\eta(x) = \frac{\Lambda(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x \lambda(\tau) d\tau, \quad x > 0,$$

является неубывающей функцией времени. Здесь

$$\lambda(x) = \frac{F'(x)}{1 - F(x)}; \quad \Lambda(x) = \int_0^x \lambda(\tau) \times$$

$$\times d\tau = -\ln[1 - F(x)]$$

соответственно функции интенсивности и ресурса. Класс F_{SS} включает в себя класс F_S , так называемых ВФИ-распределений (т. е. распределений с возрастающей функцией интенсивности). Распределения из класса F_S имеют неубывающую функцию интенсивности $\lambda(t)$. Существо излагаемой ниже процедуры состоит в приближенной аналитической замене неизвестной функции ресурса $\Lambda(x)$ с помощью двухпараметрической функции $\tilde{\Lambda}(x)$ вида (рис. 2):

$$\tilde{\Lambda}(x) = \chi(t - x) \lambda_0 t + \chi(x -$$

$$- t) [\lambda_1 x - (\lambda_1 - \lambda_0) t],$$

где t — момент времени, для которого оценивается неизвестная вероятность безотказной работы $P(t)$, а функция $\chi(\tau)$ определяется следующим образом:

$$\chi(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0; \\ 1, & \tau \geq 0. \end{cases}$$

Используемая априорная информация исчерпывается промежутком неопределенности $[P_1, P_2]$, внутри которого содержится оцениваемый показатель $P(t)$; предполагается, что $P(t)$ распределен в $[P_1, P_2]$ равномерно.

Оценка $P(t)$ проводится по цензурированной выборке $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_N) = (\bar{i}^*, \bar{i})$. Достаточную статистику образуют величины: d — число отказов, d_1 — число отказов после момента t ,

$\omega = \sum_{i=1}^N \tau_i/t$ — суммарная относительная наработка при испытаниях, $\omega_1 = \sum_{i=1}^N (\tau_i/t - 1) \chi(\tau_i/t - 1)$ — суммарная относительная наработка после момента t . Расчет байесовских оценок $P(t)$ проводится по формулам:

$$\hat{P}^*(t) = \frac{I_C(1)}{I_C(0)}; \quad \sigma_{\hat{P}^*(t)}^2 = \frac{I_C(2)}{I_C(0)} - [\hat{P}^*(t)]^2, \quad (23)$$

где

$$I_C(m) = \sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1^{(i)}}{(\omega_1 + 1)^{i+1}} \times \sum_{j=0}^{d-i} \frac{(d-i)^{(j)}}{(\omega + m + 1)^{j+1}} (P_2^{\omega+m+1} \times |\ln P_2|^{d-i-j} - P_1^{\omega+m+1} \times |\ln P_1|^{d-i-j}), \quad n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

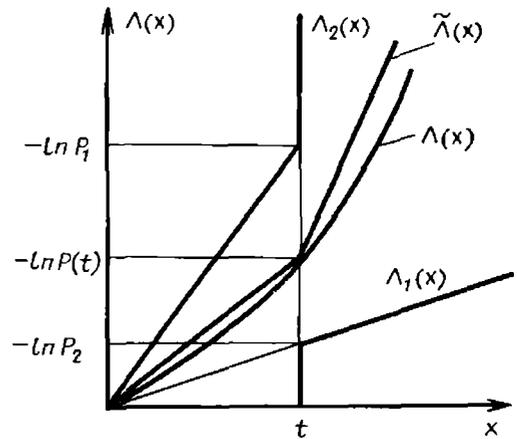


Рис. 2. Байесовская аппроксимация функции ресурса

Для определения байесовской нижней доверительной границы $\underline{P}_q(t)$ необходимо решить уравнение

$$\sum_{i=0}^{d_1} \frac{d_1^{(i)}}{(\omega_1 + 1)^{i+1}} \sum_{j=0}^{d-i} \frac{(d-i)^{(j)}}{(\omega + 1)^{j+1}} \times (P_2^{\omega+1} |\ln P_2|^{d-i-j} - \underline{P}_q^{\omega+1}(t) \times |\ln \underline{P}_q(t)|^{d-i-j}) - qI_C(0) = 0. \quad (24)$$

При проведении практических расчетов рекомендуется использовать ЭВМ.

Пример 12. В результате десяти испытаний технического устройства зафиксированы следующие наработки (в с.): $\bar{i}^* = (150, 160, 180)$, $\bar{i} = (120, 140, 90, 160, 95, 115, 105)$. Необходимо найти байесовские оценки вероятности безотказной работы $R(100)$. По априорным соображениям показатель надежности содержится в промежутке $[0,8; 1]$.

Решение. Определяем значение достаточных статистик: $d = 3$, $d_1 = 3$, $\omega = 13,15$, $\omega_1 = 3,30$. Расчет оценок надежности проводим по формулам (23)—(24) с помощью программы на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV для ЕС ЭВМ. В результате расчетов получены следующие значения оценок: $\hat{P}^*(100) = 0,9307$, $\sigma_{\hat{P}^*(100)}^2 = 0,0523$, $\underline{P}_{0,9}(100) = 0,8495$. Заметим, что если бы все отказы произошли до момента времени t , то при тех же значениях ω и ω_1 оценки на

дежности были бы хуже. Это подтверждается расчетами: при $d = 3$, $d_1 = 0$ имеем $\hat{P}^*(100) = 0,8579$, $\sigma_{\hat{P}^*(100)} = 0,0596$, $P_{0,9}(100) = 0,8099$.

4. БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ АПРИОРНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Данный тип оценок используется в тех ситуациях, когда априорное распределение не задано, а известны лишь некоторые ограничения, накладываемые на априорные числовые характеристики показателя надежности. Наиболее распространенным является случай, когда задано в виде конкретного числа априорное значение показателя надежности. Сущность способов получения апостериорных байесовских оценок заключается в использовании таких априорных распределений, которые максимизируют функцию апостериорного байесовского риска, т. е. в качестве априорного распределения выбирается наихудшее распределение, для которого выполняются упомянутые ограничения. Ниже приводятся байесовские оценки вероятности безотказной работы для биномиальной схемы и экспоненциального распределения при многократном цензурировании.

Биномиальная схема. Результаты испытаний представлены в виде двух чисел: общего количества испытаний N и количества отказов d . Известно априорное значение оцениваемой вероятности безотказной работы P_0 . Расчет оценок показателя надежности проводится по формулам:

$$\hat{P}^* = \frac{\alpha_* + N - d}{\alpha_* + \beta_* + N}; \quad \sigma_{\hat{P}^*}^2 = \frac{(\alpha_* + N - d)(\beta_* + d)}{(\alpha_* + \beta_* + N)^2 (\alpha_* + \beta_* + N + 1)}; \quad (25)$$

$$\underline{P}_q = \left[1 + \frac{\beta_* + d}{\alpha_* + N - d} \times \right. \\ \left. \times F_{1-q; 2(\beta_* + d); 2(\alpha_* + N - d)} \right]^{-1}. \quad (26)$$

Значения параметров α_* и β_* определяются с помощью следующей процедуры. Необходимо принять $\alpha_* = \beta_* = 0$ при выполнении условий:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 - P_0}{P_0} \leq g, \quad \text{если } d \leq \frac{N}{2}, \\ \text{или} \\ \frac{1 - P_0}{P_0} \geq g, \quad \text{если } d > \frac{N}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где

$$g = \frac{d}{N - d} \frac{(d + 1)(N - 2d) + 2(N - d)^2}{(N - d + 1) \times (N - 2d) - 2d^2}.$$

Если условия (27) не выполняются, то с помощью стандартных средств необходимо решить кубическое уравнение

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0, \quad (28)$$

где

$$A = -\frac{2s(2P_0 - 1)}{P_0(1 - P_0)}; \quad B = -\frac{s(3s + 2P_0 - 1)}{P_0(1 - P_0)};$$

$$C = -\frac{2s^2}{P_0(1 - P_0)}; \quad s = N(1 - P_0) - d.$$

Это уравнение имеет единственный корень z_* в области $z > N$. С помощью величины z_* найдем α_* и β_* :

$$\alpha_* = (z_* - N)R_0; \quad \beta_* = (z_* - N) \times (1 - P_0) \quad (29)$$

Для определения оценки \underline{P}_q кроме формулы (26) рекомендуется уравнение

$$\int_{\underline{P}_q}^1 x^{\alpha_* + N - d - 1} (1 - x)^{\alpha_* + d - 1} dx = qB(\alpha_* + N - d, \beta_* + d).$$

Для получения приближенной оценки \underline{P}_q может быть использована следующая приближенная формула:

$$\underline{P}_q \approx (1 - q)^c \left(c = \frac{1 - \hat{P}^*}{\hat{P}^*} \right). \quad (30)$$

Пример 13. Априорное значение вероятности безотказной работы P_0 составляет 0,98. В процессе экспериментальной отработки объект продемонстрировал десять успешных испытаний. Необходимо найти апостериорные оценки вероятности безотказной работы.

Решение. По условию $N = 10$, $d = 0$, откуда $g = 0$, тогда условия (27) не выполняются. Для определения α_* и β_* необходимо решить уравнение (28). Определим коэффициенты уравнения: $A = -19,59$, $B = -15,92$, $C = -4,082$. С помощью преобразования $z = x - A/3$ приведем уравнение (28) к следующему виду:

$$x^3 + px + r = 0,$$

где $p = -143,86$, $r = -665,08$. Решая уравнение с помощью стандартных средств, получим $x_* = 13,852$, откуда $z_* = 20,38$. Используя формулы (29), найдем $\alpha_* = 10,172$, $\beta_* = 0,2076$. Расчет \hat{P}^* и $\sigma_{\hat{P}^*}^2$ проводим по формулам (25):

$$\hat{P}^* = \frac{10,172 + 10}{10,172 + 0,2076 + 10} = 0,9898;$$

$$\sigma_{\hat{P}^*}^2 = \frac{(10,172 + 10) 0,2076}{(10,172 + 0,2076 + 10)^2 \times (10,172 + 0,2076 + 10 + 1)} = 4,716 \cdot 10^{-4}.$$

Нижнюю доверительную границу \underline{P}_q при $q = 0,9$ определим с помощью приближенной формулы (30):

$$c = \frac{1 - 0,9898}{0,9898} = 1,0305 \cdot 10^{-2};$$

$$\underline{P}_q = (1 - 0,9)^{1,0305 \cdot 10^{-2}} = 0,9766.$$

Экспоненциальное распределение. Случайная наработка на отказ подчиняется экспоненциальному распределению $F(t) = F(t; \lambda) = 1 - \exp(-\lambda t)$ с неизвестным параметром λ . Известно априорное значение λ_0 параметра λ или априорное значение вероятности безотказной работы $P_0 = P(t_0)$ в течение некоторого времени t_0 . Испытания объекта проводятся по цензурированным планам, сводящимся к достаточной статистике (d, κ) , где d — число отказов, а κ определяется с помощью табл. 3.

Расчет байесовских оценок интенсивности отказов λ проводится по формулам:

$$\hat{\lambda}^* = \frac{d + s_* + 1}{\kappa + \varepsilon_*}; \quad \sigma_{\hat{\lambda}^*}^2 = \frac{d + s_* + 1}{(\kappa + \varepsilon_*)^2}; \quad (31)$$

$$\bar{\lambda}_q = \frac{\chi_{1-q}^2; 2(d+s_*+1)}{2(\kappa + \varepsilon_*)}, \quad (32)$$

где параметры s_* и ε_* определяются следующим образом:

$$(s_*, \varepsilon_*) = \begin{cases} \left(0, \frac{1}{\lambda_0}\right), & \lambda_0 \leq \frac{2d+1}{\kappa}; \\ \left(\lambda_0 \kappa - 2d - 1; \kappa - \frac{2d}{\lambda_0}\right), & \lambda_0 > \frac{2d+1}{\kappa}. \end{cases} \quad (33)$$

Конечные аналитические выражения для оценок вероятности безотказной работы имеют вид

$$\hat{P}^*(t) = \left(\frac{u_*}{u_* + 1}\right)^{v_*+1}; \quad \sigma_{\hat{P}^*(t)}^2 = \left(\frac{u_*}{u_* + 2}\right)^{v_*+1} - \left(\frac{u_*}{u_* + 1}\right)^{2(v_*+1)}; \quad (34)$$

$$\underline{P}_q(t) = \exp\left[-\frac{\chi_{1-q}^2; 2(d+s_*+1)}{2u_*}\right]; \quad (35)$$

$$u_* = \frac{\varepsilon_*}{t} + \frac{\kappa}{t}; \quad v_* = s_* + d. \quad (36)$$

При выполнении условия $\lambda_0 \leq (2d + 1)/\kappa$ значение \underline{P}_q может быть найдено из уравнения

$$\underline{P}_q^{u_*}(t) \left[1 + \sum_{k=1}^d \frac{|\ln \underline{P}_q^{u_*}(t)|^k}{k!}\right] = 1 - q, \quad (37)$$

а при безотказных испытаниях ($d = 0$) и $\lambda_0 < \kappa^{-1}$

$$\underline{P}_q(t) = (1 - q)^{\frac{1}{u_*}}. \quad (38)$$

Пример 14. В процессе независимых испытаний объекта наблюдается следующая выборка (в с.): $t = (120, 128, 144, 130, 152, 104, 92)$. Все испытания заканчиваются успешно. Априорное значение вероятности безотказной работы в течение $t_0 = 80$ с составляет 0,94. Необходимо определить оценки вероятности безотказной работы в течение $t = 100$ с.

Решение. Исходя из приведенной в условии априорной информации, определим априорное значение интенсивности отказов:

$$0,94 = e^{-\lambda_0 80} \Rightarrow \lambda_0 = -\frac{\ln 0,94}{80} = 7,73 \cdot 10^{-4} \text{ 1/с.}$$

Найдем значение суммарной наработки при испытаниях:

$$x = \sum_1^7 t_i = 870 \text{ с.}$$

С помощью выражения (33) определим значения параметров s_* и ϵ_* . Поскольку в данном случае $\lambda_0 < (2d + 1)/x$, то $s_* = 0$, $\epsilon_* = 1292,92$. Используя формулы (36), получим

$$u_* = \frac{1292,92}{100} + \frac{870}{100} = 21,629;$$

$$v_* = 0.$$

Расчеты по формулам (34), (38) позволяют получить $\hat{P}^*(100) = 0,9558$, $\sigma_{\hat{P}^*(100)} = 0,04228$, $\underline{P}_{0,9}(100) = 0,8990$.

Пусть теперь при всех прочих равных условиях два испытания окончились отказами, т. е. $d = 2$. По-прежнему выполняется условие $\lambda_0 < (2d + 1)/x$. Но значение параметра $v_* = 2$. Расчет по формулам (34)–(35) приводит к следующим значениям оценок:

$$\hat{P}^*(100) = 0,8732, \sigma_{\hat{P}^*(100)} = 0,06697,$$

$$\underline{P}_{0,9}(100) = 0,7819.$$

Как видно, в этом случае значение оценок существенно ниже.

5. ЭМПИРИЧЕСКИЕ БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ

При эмпирическом байесовском подходе априорное распределение параметра θ является неизвестным. Основная идея этого подхода заключается в использовании в общей схеме байесовского оценивания вместо априорного распределения его аппроксимации, построенной на основании прежних наблюдений.

Пусть $\bar{\tau}^{(j)} = (\tau_k^{(j)})$ ($j = \overline{1, n}$) — результаты испытаний (например, в виде наработок на отказ), зафиксированные в j -й серии экспериментов. Объекты, испытанные в 1, 2, ..., $(n - 1)$ -й сериях, являются аналогами для объекта, который подвергается испытаниям в n -й серии. Задача заключается в нахождении байесовской оценки \hat{P}_3^* по результатам испытаний n -й серии экспериментов с учетом результатов испытаний предыдущих серий. Предполагается, что для каждой j -й серии может быть найдена оценка $\hat{\theta}_j$ ($j = \overline{1, n}$). В качестве $\hat{\theta}_j$ может быть использована, в частности, оценка максимального правдоподобия. В дальнейшем ограничимся случаем скалярного параметра θ и квадратичной функции потерь.

В практических приложениях наиболее распространены эмпирические байесовские процедуры, в которых аппроксимация априорной функции распределения проводится с помощью эмпирической функции распределения, построенной на основе совокупности оценок $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$. Выражение для эмпирической байесовской оценки показателя надежности $P(\theta)$ записывается в этом случае в виде

$$\hat{P}_3^* = \frac{\sum_{j=1}^n P(\hat{\theta}_j) l(\hat{\theta}_j | \bar{\tau}^{(n)})}{\sum_{j=1}^n l(\hat{\theta}_j | \bar{\tau}^{(n)})}, \quad (39)$$

где $l(\hat{\theta}_j | \bar{\tau}^{(n)})$ — значение функции правдоподобия для n -й серии опытов

в точке $\theta = \hat{\theta}_j$. Оценка погрешности расчета показателя надежности по формуле (39) проводится с помощью эмпирического апостериорного среднего квадратического отклонения

$$\sigma_{\hat{P}_3^*} = \left[\frac{\sum_{j=1}^n P^2(\hat{\theta}_j) l(\hat{\theta}_j | \bar{\tau}^{(n)})}{\sum_{j=1}^n l(\hat{\theta}_j | \bar{\tau}^{(n)})} - \hat{P}_3^{*2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

Пример 15. Нарботка объекта на отказ подчиняется экспоненциальному распределению с плотностью $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$, $\lambda \geq 0$, $t \geq 0$. Испытания объекта проводятся по плану $[N, U, T]$. Известны результаты $(n-1)$ -й серии испытаний объектов-аналогов. При испытании исследуемого объекта зафиксирована выборка $\bar{\tau}^{(n)} = (t_1^*(n), t_2^*(n), t_d^*(n), T_n, \dots, T_n)$, где $t_i^*(n)$ — момент отказа объекта $i = 1, 2, \dots, d$. Необходимо найти эмпирическую байесовскую оценку вероятности безотказной работы $P(t)$ в течение заданного времени t :

Решение. Будем считать, что проведены n серий испытаний. В каждой j -й серии независимым испытаниям подвергаются k_j объектов, причем испытания продолжаются до момента времени T_j . Функция правдоподобия для каждой j -й серии в соответствии с (6) имеет вид

$$l_j(\lambda | \bar{\tau}^{(j)}) = \lambda_j^{d_j} e^{-\lambda \kappa_j}; \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (41)$$

где d_j — число отказов в j -й серии; κ_j — суммарная продолжительность испытаний в j -й серии. Согласно выражению (41) оценка максимального правдоподобия $\hat{\lambda}_j$ записывается в виде

$$\hat{\lambda}_j = \frac{d_j}{\kappa_j}. \quad (42)$$

Воспользовавшись формулой (39), запишем расчетное соотношение:

$$\hat{P}_3^*(t) = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{d_j} \exp[-\hat{\lambda}_j(\kappa_n + t)]}{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{d_j} \exp(-\hat{\lambda}_j \kappa_n)}. \quad (43)$$

По аналогии с помощью формулы (40) запишем выражение для эмпирического апостериорного среднего квадратического отклонения:

$$\hat{\sigma}_{\hat{P}_3^*(t)}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{d_j} \exp[-\hat{\lambda}_j(\kappa_n + 2t)]}{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{d_j} \exp(-\hat{\lambda}_j \kappa_n)} - [\hat{P}_3^*(t)]^2. \quad (44)$$

Пример 16. Пусть даны следующие результаты пяти серий испытаний, проводимых по плану $[N, U, T]$ при различных N и T : 1) 180, 175, 210, 220, 220, 220; 2) 154, 168, 148, 195, 200, 200; 3) 166, 180, 170, 200; 4) 170, 210, 210, 210; 5) 180, 190, 205, 220, 220, 220, 220.

Подчеркнутые элементы выборки соответствуют отказу объекта. Необходимо найти эмпирическую байесовскую оценку вероятности безотказной работы в течение 75 с для экспоненциального распределения наработки на отказ.

Решение. Определим достаточные статистики для каждой серии (d_j, κ_j) ($j = 1, 2, 3, 4, 5$). Получим $(3, 1225)$, $(4, 1065)$, $(3, 746)$, $(1, 800)$, $(3, 1675)$. Им соответствуют следующие оценки максимального правдоподобия $\hat{\lambda}_j$ ($j = 1, \dots, 5$) параметра λ : $\hat{\lambda}_1 = 2,46 \cdot 10^{-3}$, $\hat{\lambda}_2 = 3,76 \cdot 10^{-3}$, $\hat{\lambda}_3 = 4,08 \cdot 10^{-3}$, $\hat{\lambda}_4 = 1,25 \cdot 10^{-3}$, $\hat{\lambda}_5 =$

12. Эмпирические байесовские оценки показателей надежности для различных распределений

Расчетный случай	Исходные данные — результаты n серий испытаний	Эмпирическая байесовская оценка	
		параметра	вероятности безотказной работы
<p>Биномиальная схема</p> $P_{N, d} = \binom{N}{d} \times p^{N-d} (1-p)^d$ <p>p — неизвестный параметр</p>	(N_1, d_1) (N_2, d_2) (N_n, d_n)	$\hat{p}_3^* = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{p}_j^N n^{-d_n+1} (1-\hat{p}_j)^{d_n}}{\sum_{j=1}^n \hat{p}_j^N n^{-d_n} (1-\hat{p}_j)^{d_n}};$ $\sigma_{\hat{p}_3^*}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{p}_j^N n^{-d_n+2} (1-\hat{p}_j)^{d_n}}{\sum_{j=1}^n \hat{p}_j^N n^{-d_n} (1-\hat{p}_j)^{d_n}} - \hat{p}_3^{*2};$ $\hat{p}_j = 1 - \frac{d_j}{N_j}; \quad j = 1, 2, \dots, n$	$\hat{P}_3(t) = \hat{P}_3^*;$ $\sigma_{\hat{P}_3^*}(t) = \sigma_{\hat{P}_3^*}$
<p>Экспоненциальное распределение</p> $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ <p>λ — неизвестный параметр</p>	$\bar{\tau}^{(1)}, \bar{\tau}^{(2)}, \dots, \bar{\tau}^{(n)};$ $x_j = \sum_{i=1}^{k_j} \tau_i^{(j)};$ $j = 1, 2, \dots, n$	$\hat{\lambda}_3^* = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{d_n+1} e^{-\hat{\lambda}_j x_n}}{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{d_n} e^{-\hat{\lambda}_j x_n}};$	$\hat{P}_3^*(t) = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{d_n} e^{-\hat{\lambda}_j (x_n+t)}}{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{d_n} e^{-\hat{\lambda}_j x_n}};$

	<p>d_j — число моментов отказов в выборке $\bar{\tau}^{(j)}$</p>	$\sigma_{\hat{\lambda}_3}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{d_n+2} e^{-\hat{\lambda}_j x_n}}{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{d_n} e^{-\hat{\lambda}_j x_n}} - \hat{\lambda}_3^{*2};$ $\hat{\lambda}_j = \frac{d_j}{x_j}; \quad j = 1, 2, \dots, n;$	$\sigma_{\hat{P}_3^*}^2(t) = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{d_n} e^{-\hat{\lambda}_j (x_n+2t)}}{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{d_n} e^{-\hat{\lambda}_j x_n}} - [\hat{P}_3^*(t)]^2;$
<p>Распределение Вейбулла</p> $f(t) = \frac{\alpha}{\theta} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t^\alpha}{\theta}}$ <p>α — известный параметр; θ — неизвестный параметр</p>	<p>$\bar{\tau}^{(1)}, \bar{\tau}^{(2)}, \dots, \bar{\tau}^{(n)}$;</p> $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{k_j} [\tau_i^{(j)}]^\alpha$ <p>d_j — число моментов отказов в выборке $\bar{\tau}^{(j)}$</p>	$\hat{\theta}_3^* = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{\theta}_j^{1-d_n} e^{-\frac{\varepsilon_n}{\hat{\theta}_j}}}{\sum_{j=1}^n \hat{\theta}_j^{-d_n} e^{-\frac{\varepsilon_n}{\hat{\theta}_j}}}$ $\sigma_{\hat{\theta}_3^*}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{\theta}_j^{2-d_n} e^{-\frac{\varepsilon_n}{\hat{\theta}_j}}}{\sum_{j=1}^n \hat{\theta}_j^{-d_n} e^{-\frac{\varepsilon_n}{\hat{\theta}_j}}} - [\hat{\theta}_3^*]^2;$ $\hat{\theta}_j = \frac{\varepsilon_j}{d_j}; \quad j = 1, 2, \dots, n$	$\hat{P}_3^*(t) = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{\theta}_j^{-d_n} e^{-\frac{1}{\hat{\theta}_j} (\varepsilon_n + t^\alpha)}}{\sum_{j=1}^n \hat{\theta}_j^{-d_n} e^{-\frac{\varepsilon_n}{\hat{\theta}_j}}};$ $\sigma_{\hat{P}_3^*}^2(t) = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{\theta}_j^{-d_n} e^{-\frac{1}{\hat{\theta}_j} (\varepsilon_n + 2t^\alpha)}}{\sum_{j=1}^n \hat{\theta}_j^{-d_n} e^{-\frac{\varepsilon_n}{\hat{\theta}_j}}} - [\hat{P}_3^*(t)]^2$

$= 1,79 \cdot 10^{-3}$. Расчеты по формулам (43) и (44) соответственно при $t = 75$ позволяют получить

$$\hat{P}_3^* (75) = 0,84935;$$

$$\sigma_{\hat{P}_3^* (75)} = 0,0563.$$

Сравним полученные оценки с оценками максимального правдоподобия. Если пользоваться только выборкой 5, отбросив предыдущие данные, то можно получить $\hat{P}_{МП} (75) = \exp(-\hat{\lambda}_5 \cdot 75) = 0,8743$. В то же время погрешность этой оценки, оцениваемая с помощью нижней границы для дисперсии (в соответствии с неравенством Крамера-Рао), составляет $\sigma_{\hat{P}_{МП} (75)} = \hat{\lambda}_5 \cdot 75 \exp(-\hat{\lambda}_5 \cdot 75) = 0,1174$, т. е. более чем в 2 раза выше. Объединив результаты всех пяти выборок (что приводит к достаточным статистикам $d = d_1 + \dots + d_5 = 14$, $x = x_1 + \dots + x_5 = 5501$), получим $\hat{\lambda} = 2,545 \times 10^{-3}$ и ей соответствующие оценки $\hat{P}_{МП} (75) = 0,8262$; $\sigma_{\hat{P}_{МП} (75)} = 0,1577$.

В табл. 12 приведены расчетные соотношения для эмпирических байесовских оценок в наиболее распространенных практических ситуациях. С помощью $\bar{\tau}^{(j)}$ в табл. 12 обозначена выборка для j -й серии экспериментов объема k_j многократно цензурированная справа, т. е. полагается, что в каждой выборке $\bar{\tau}^{(j)}$ содержится d_j моментов отказа и $k_j - d_j$ моментов приостановок.

Пример 17. Проведены пять серий испытаний по биномиальной схеме. Результаты этих испытаний имеют вид:

$$N_1 = 40, d_1 = 1; N_2 = 64, d_2 = 2;$$

$$N_3 = 50, d_3 = 1; N_4 = 104, d_4 = 3;$$

$$N_5 = 32, d_5 = 1. \text{ Необходимо найти}$$

эмпирическую байесовскую оценку для вероятности безотказной работы.

Решение. Воспользуемся формулами табл. 12. С помощью формулы $\hat{\rho}_j = 1 - d_j/N_j$ найдем оценки параметра ρ в каждой серии: $\hat{\rho}_1 = 0,975$, $\hat{\rho}_2 = 0,9675$, $\hat{\rho}_3 = 0,98$, $\hat{\rho}_4 = 0,9711$,

$\hat{\rho}_5 = 0,9687$. Определим оценки \hat{P}_3^* и $\sigma_{\hat{P}_3^*}$:

$$\hat{P}_3^* = \frac{\sum_{j=1}^5 \hat{\rho}_j^{32} (1 - \hat{\rho}_j)}{\sum_{j=1}^5 \hat{\rho}_j^{31} (1 - \hat{\rho}_j)} = 0,9723;$$

$$\sigma_{\hat{P}_3^*}^2 = \frac{\sum_{j=1}^5 \hat{\rho}_j^{33} (1 - \hat{\rho}_j)}{\sum_{j=1}^5 \hat{\rho}_j^{31} (1 - \hat{\rho}_j)} -$$

$$- \hat{\rho}_3^{*2} = 0,004978^2.$$

Заметим для сравнения, что если бы оценивали параметр ρ только по пятой выборке, то получили бы $\hat{\rho} = \hat{\rho}_5 = 0,9687$, $\sigma_{\hat{\rho}} = 0,0308$. В случае объединения всех экспериментальных данных в одну выборку получим следующие оценки: $\hat{\rho} = 0,9724$, $\sigma_{\hat{\rho}} = 0,00962$.

Приведенный выше способ эмпирического байесовского оценивания может быть уточнен путем использования следующей итерационной процедуры: вместо оценок $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ в формулах (39), (40) и табл. 12 используются эмпирические байесовские оценки $\hat{\theta}_j^*$ ($j = 1, n$), найденные по выборке $\bar{\tau}^{(j)}$ с учетом предыдущих ($j-1$)-й выборки. Процедура реализуется с помощью следующей двухэтапной последовательности расчетов.

Этап 1. Определение оценок $\hat{\theta}_j^*$:

$$\hat{\theta}_1^* = \hat{\theta}_1;$$

$$\hat{\theta}_j^* = \frac{\sum_{i=1}^j \hat{\theta}_i l (\hat{\theta}_i | \bar{\tau}^{(j)})}{\sum_{i=1}^j l (\hat{\theta}_i | \bar{\tau}^{(j)})}; \quad j = 2, \dots, n.$$

(45)

Этап 2. Определение эмпирических байесовских оценок второго приближения:

для параметра θ :

$$\hat{\theta}_3^{(2)} = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{\theta}_j^* l(\hat{\theta}_j^* | \bar{\tau}^{(n)})}{\sum_{j=1}^n l(\hat{\theta}_j^* | \bar{\tau}^{(n)})}; \quad (46)$$

$$\sigma_{\hat{\theta}_3^{(2)}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{\theta}_j^{*2} l(\hat{\theta}_j^* | \bar{\tau}^{(n)})}{\sum_{j=1}^n l(\hat{\theta}_j^* | \bar{\tau}^{(n)})} - [\hat{\theta}_3^{(2)}]^2; \quad (47)$$

для показателя надежности $R(\theta)$:

$$\hat{P}_3^{(2)}(t) = \frac{\sum_{j=1}^n R(\hat{\theta}_j^*) l(\hat{\theta}_j^* | \bar{\tau}^{(n)})}{\sum_{j=1}^n l(\hat{\theta}_j^* | \bar{\tau}^{(n)})} \quad (48)$$

$$\sigma_{\hat{P}_3^{(2)}(t)}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n R^2(\hat{\theta}_j^*) l(\hat{\theta}_j^* | \bar{\tau}^{(n)})}{\sum_{j=1}^n l(\hat{\theta}_j^* | \bar{\tau}^{(n)})} - [P_3^{(2)}(t)]^2. \quad (49)$$

Пример. 18. Используя исходные данные примера 17, найдем эмпирические байесовские оценки второго приближения.

Решение. Получим оценки первого приближения:

$$\hat{\rho}_1^* = 1 - \frac{d_1}{N_1} = 0,975;$$

$$\hat{\rho}_2^* = \frac{\hat{\rho}_1^{63} (1 - \hat{\rho}_1)^2 + \hat{\rho}_2^{63} (1 - \hat{\rho}_2)^2}{\hat{\rho}_1^{62} (1 - \hat{\rho}_1)^2 + \hat{\rho}_2^{62} (1 - \hat{\rho}_2)^2} = 0,9712;$$

$$\hat{\rho}_3^* = \frac{\sum_{j=1}^3 \hat{\rho}_j^{50} (1 - \hat{\rho}_j)}{\sum_{j=1}^3 \hat{\rho}_j^{49} (1 - \hat{\rho}_j)} = 0,9745;$$

$$\hat{\rho}_4^* = \frac{\sum_{j=1}^4 \hat{\rho}_j^{102} (1 - \hat{\rho}_j)^3}{\sum_{j=1}^4 \hat{\rho}_j^{101} (1 - \hat{\rho}_j)^3} = 0,9731;$$

$$\hat{\rho}^* = \hat{P}_3^* = 0,9723.$$

По формулам (48) и (49) найдем оценки второго приближения:

$$\hat{P}_3^{(2)} = \frac{\sum_{j=1}^5 (\hat{\rho}_j^*)^{32} (1 - \hat{\rho}_j^*)}{\sum_{j=1}^5 (\hat{\rho}_j^*)^{31} (1 - \hat{\rho}_j^*)} = 0,9732;$$

$$\sigma_{\hat{P}_3^{(2)}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^5 (\hat{\rho}_j^*)^{33} (1 - \hat{\rho}_j^*)}{\sum_{j=1}^5 (\hat{\rho}_j^*)^{31} (1 - \hat{\rho}_j^*)}$$

$$- [\hat{P}_3^{(2)}]^2 = 0,0014^2.$$

Как видно из результатов расчетов, полученная оценка имеет существенно меньшую погрешность по сравнению с оценкой \hat{P}_3^* .

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Методы учета дополнительной информации при обработке результатов испытаний восстанавливаемых изделий основываются на использовании теоремы Байеса, смысл которой поясняется ниже. Допустим, что имеется большое число партий изделий. Внутри каждой партии изделия однородны. Изделия разных партий между собой могут считаться подобными. Надежность изделий каждой партии характеризуется параметром a . Тогда показатель a можно рассматривать как случайный: в случайно взятой партии его значение заранее неизвестно. Распределение параметра a задается в виде априорной плотности вероятности $H(a)$. Результат испытаний Y является случайной величиной, распределенной по известному закону $\varphi(Y/a)$.

Оценка показателя надежности a с помощью теоремы Байеса состоит в следующем. По результатам испытаний Y определяется апостериорный закон распределения неизвестного параметра a , соответствующий данному результату эксперимента. Согласно теореме Байеса плотность апостериорного закона записывается в виде

$$\omega(a) = \frac{H(a) \varphi(Y/a)}{\int_0^{\infty} H(a) \varphi(Y/a) da}. \quad (1)$$

Далее в соответствии с принятым критерием неизвестный параметр a оценивается с помощью величины z_Y .

Ошибка данной оценки

$$\Delta = z_Y - a.$$

Поскольку результат испытаний Y — случайная величина, оценка z_Y — также случайная величина. Поэтому в качестве критерия точности оценки z_Y для каждого значения a принимается математическое ожидание квадрата ошибки:

$$M \{(z_Y - a)^2\} = \sum_{Y=0}^{\infty} (z_Y - a)^2 \varphi(Y/a).$$

Для определения точности такой оценки для произвольного значения a полученное выражение следует проинтегрировать по всем значениям a :

$$\delta^2 = \int_0^{\infty} \sum_{Y=0}^{\infty} (z_Y - a)^2 \varphi(Y/a) H(a) da.$$

Среднеквадратичная ошибка δ будет минимальна при значении

$$z_Y = \frac{\int_0^{\infty} Y \varphi(Y/a) H(a) da}{\int_0^{\infty} \varphi(Y/a) H(a) da}. \quad (2)$$

2. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ И ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПАРАМЕТРА ПОТОКА ОТКАЗОВ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ УСТРОЙСТВ

Восстанавливаемые изделия характеризуются возможностью устранения отказов, возникающих в процессе эксплуатации, после чего их использование продолжается. Так как восстанавливаемые устройства обычно состоят из значительного числа элементов, по-

ток отказов для установившегося процесса эксплуатации можно считать стационарным — пуассоновским. В этом случае надежность изделия обычно характеризуют параметром потока отказов λ .

Рассмотрим один из распространенных планов испытаний. Испытывается N изделий в течение заданного времени t . Фиксируется общее количество отказов R . Согласно эргодическому свойству закон распределения числа отказов зависит только от суммарного времени

$$S = Nt$$

испытаний всех изделий. В этом случае вероятность появления R отказов за время испытаний описывается законом Пуассона:

$$P(R) = \frac{(\lambda S)^R e^{-\lambda S}}{R!}.$$

В качестве априорного распределения параметра λ обычно принимается усеченное нормальное распределение

$$H(\lambda) = Ae^{-\frac{(\lambda-h)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{при } \lambda \geq 0; \quad (3)$$

$$H(\lambda) = 0 \quad \text{при } \lambda < 0.$$

В соответствии с формулой (1) апостериорная плотность распределения в этом случае принимает вид

$$\omega(\lambda) = A\lambda^R \exp\left\{-\frac{\lambda^2 + 2\lambda(\sigma_S^2 - h)}{2\sigma^2}\right\}, \quad (4)$$

где

$$A =$$

$$= \frac{1}{\int_0^\infty \lambda^R \exp\left\{-\frac{\lambda^2 + 2\lambda(\sigma_S^2 - h)}{2\sigma^2}\right\} d\lambda}$$

Введем следующие обозначения:

$$\beta = \sigma^2 S - h;$$

$$J_R = \int_0^\infty \lambda^R \exp\left\{-\frac{(\lambda + \beta)^2}{2\sigma^2}\right\} d\lambda.$$

Тогда выражение для апостериорного распределения показателя λ принимает вид

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{J_R} \lambda^R \exp\left\{-\frac{(\lambda + \beta)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (5)$$

Определение доверительных границ осуществляется следующим образом. Устанавливается доверительная вероятность γ . Далее вычисляется вероятность

$$\gamma' = \frac{1 - \gamma}{2}.$$

С использованием выражения (5) интегральная функция апостериорного распределения

$$F(\lambda) = \int_0^\lambda \omega(\lambda) d\lambda,$$

при принятых обозначениях может быть представлена в виде

$$F(\lambda) = \frac{J_R(\lambda)}{J_R}, \quad (6)$$

где

$$J_R(\lambda) = \int_0^\lambda \lambda^R \exp\left\{-\frac{(\lambda + \beta)^2}{2\sigma^2}\right\} d\lambda.$$

Доверительные границы λ_1 и λ_2 , отвечающие доверительной вероятности γ , определяются как значения λ , соответствующие значениям:

$$\left. \begin{aligned} F(\lambda) &= \gamma'; \\ F(\lambda) &= 1 - \gamma'. \end{aligned} \right\}$$

В инженерной практике необходимые расчеты могут быть проведены на ЭВМ.

Пример 1. Испытываются три технических устройства в течение 500 ч каждое. В процессе испытаний зафиксировано шесть отказов. Кроме того, считаются известными параметры априорного распределения параметра потока отказов:

$$h = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}; \quad \sigma = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}.$$

Требуется определить доверительный интервал показателя надежности λ ,

соответствующий доверительной вероятности $\gamma = 0,8$.

По имеющимся данным определим β и γ' :

$$\beta = 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 500 - 2,5 \cdot 10^{-3} = -1,75 \cdot 10^{-3};$$

$$\gamma' = \frac{1 - 0,8}{2} = 0,1.$$

В соответствии с изложенным методом значения нижней и верхней доверительных границ соответственно равны:

$$\lambda_1 = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}; \quad \lambda_2 = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}.$$

В качестве точечной оценки, объединяющей априорные данные с результатами испытаний, целесообразно принять математическое ожидание апостериорного распределения, которое может быть записано в виде

$$z_R = \frac{J_{R+1}}{J_R}; \quad (7)$$

Введя обозначения $\delta = hS$;

$$k = \frac{\sigma^2}{h^2}$$

и перейдя к безразмерному параметру

$$x = \frac{\lambda}{h \sqrt{k}},$$

получим следующее соотношение:

$$x_R = \frac{Q_{R+1}(x)}{Q_R(x)}, \quad (8)$$

где

$$Q_R = \int_0^{\infty} x^R \exp \left\{ -\frac{(x + \beta')^2}{2} \right\} dx;$$

$$\beta' = \frac{k\delta - 1}{\sqrt{k}}.$$

Значение x можно определить из следующего рекуррентного соотношения:

$$x_{R+1} = \frac{R+1}{x_R} - \beta'. \quad (9)$$

Определим x_0 , соответствующее случаю, когда в процессе испытаний не зафиксировано ни одного отказа:

$$x_0 = \frac{Q_1(x)}{Q_0(x)},$$

где $Q_0(x) = \sqrt{2\pi} [1 - \Phi(\beta')]$;

$$Q_1(x) = e^{-\frac{(\beta')^2}{2}} - \beta' Q_0;$$

$$\Phi(\beta') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta'} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

С помощью рекуррентного соотношения (9) по известному значению x_0 можно вычислить x_1, x_2, x_3 и т. д. Значение уточненной оценки z_R при этом определяется соотношением

$$z_R = x_R h \sqrt{k} = x_R \sigma. \quad (10)$$

Пример 2. С учетом условий примера 1 определим уточненную оценку показателя надежности.

Вычислим δ и k :

$$\delta = 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 500 = 3,75;$$

$$k = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{6,25 \cdot 10^{-6}} = 0,08.$$

Далее определим значения:

$$\beta' = \frac{3,75 \cdot 0,008 - 1}{\sqrt{0,008}} = -2,5;$$

$$\Phi(-2,5) = 0,012;$$

$$Q_0 = 0,012 \sqrt{6,28} = 0,03;$$

$$Q_1(x) = e^{-3,12} + 0,012 \sqrt{6,28} = 0,074;$$

$$x_0 = \frac{0,074}{0,03} = 2,5.$$

Затем найдем значение

$$x_1 = \frac{1}{2,5} + 2,5 = 2,9.$$

Аналогично рассчитываются:

$$x_2 = 3,18; \quad x_3 = 3,43;$$

$$x_4 = 3,65; \quad x_5 = 3,85; \quad x_6 = 4,05.$$

Значение уточненной оценки z_6 вычисляется по формуле (10):

$$z_6 = 2,5 \cdot 10^{-3} \sqrt{0,08} \cdot 4,05 = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}.$$

Рассмотрим еще один приближенный метод расчета, дающий при большом числе отказов R хорошие результаты.

Можно показать, что значение x_R удовлетворяет условию $\bar{x}_R < x_R < \bar{\bar{x}}_R$, где

$$\bar{x}_R = -\frac{\beta'}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta'}{2}\right)^2 + R}; \quad (11)$$

$$\bar{\bar{x}}_R = -\frac{\beta'}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta'}{2}\right)^2 + R + 1}. \quad (12)$$

Поэтому для $R > 5$ (когда точные вычисления становятся более трудоемкими) значение x_R может быть заменено одним из значений \bar{x}_R или $\bar{\bar{x}}_R$, или их средним арифметическим:

$$\bar{x}_R = \frac{\bar{x}_R + \bar{\bar{x}}_R}{2}.$$

Пример 3. С учетом условий примера 1 определим значение по приближенным формулам. Подставляя исходные данные в выражения (11), (12), получим следующие приближенные значения X_R :

$$\bar{x}_6 = \frac{2,5}{2} + \sqrt{\left(\frac{2,5}{2}\right)^2 + 6} = 4;$$

$$\bar{\bar{x}}_6 = \frac{2,5}{2} + \sqrt{\left(\frac{2,5}{2}\right)^2 + 7} = 4,3;$$

$$\bar{x}_6 = \frac{4 + 4,3}{2} = 4,15.$$

Отсюда приближенные оценки параметра потока отказов λ_6 :

$$\bar{z}_6 = 2,75 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}; \quad \bar{\bar{z}}_6 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч};$$

$$\bar{z}_6 = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}.$$

Точность байесовской оценки можно характеризовать дисперсией апостериорного распределения. В принятых обозначениях она может быть представлена соотношением

$$D_R = \frac{J_{R+2}(\lambda)}{J_R(\lambda)} - \left(\frac{J_{R+1}(\lambda)}{J_R(\lambda)}\right)^2$$

С использованием безразмерных параметров она принимает вид

$$D_R = kh^2 \epsilon_R,$$

где

$$\epsilon_R = \frac{Q_{R+2}(x)}{Q_R(x)} - \left(\frac{Q_{R+1}(x)}{Q_R(x)}\right)^2 \quad (13)$$

Выражение (13) можно представить в виде

$$\epsilon_R = x_{R+1} x_R - x_R^2.$$

Можно записать другое выражение для

$$\epsilon_R = R + 1 - \beta' x_R - x_R^2. \quad (14)$$

С помощью полученных формул легко определить дисперсию оценки z_R .

Пример 4. Априорные данные и результаты испытаний задаются условиями примера 1. Определим дисперсию байесовской оценки. По формуле (14)

$$\epsilon_6 = 7 + 1 + 2,5 \cdot 4,05 - (4,05)^2 = 0,9.$$

Далее определим дисперсию апостериорного распределения

$$D_6 = 0,08 \cdot 6,25 \cdot 10^{-6} \cdot 0,9 = 0,45 \cdot 10^{-6} (1/ч)^2.$$

Рассмотрим случай изделий, когда априорное распределение параметра λ является равномерным в интервале λ_1 и λ_2 :

$$H(\lambda) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \text{для } \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2;$$

$$H(\lambda) = 0 \quad \text{для } \lambda < \lambda_1; \lambda > \lambda_2.$$

При равномерном априорном распределении апостериорное распределение параметра потока

$$\omega(\lambda) =$$

$$= \begin{cases} A \frac{(\lambda S)^R}{R!} e^{-\lambda S} & \text{для } \lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_2; \\ 0 & \text{для } \lambda < \lambda_1, \lambda > \lambda_2. \end{cases}$$

где

$$A = \frac{1}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{(\lambda S)^R}{R!} e^{-\lambda S} d\lambda}.$$

Наиболее вероятное значение

$$\lambda^* = \frac{R}{S}.$$

Математическое ожидание

$$z = \frac{R + 1}{S}.$$

3. АПРИОРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМОГО УСТРОЙСТВА

Ниже рассматриваются возможные пути построения априорного распределения неизвестного показателя надежности при использовании различных дополнительных сведений в качестве исходных данных. В качестве показателя надежности рассматривается параметр потока отказов восстанавливаемого изделия. Полученные основные результаты и выводы могут быть отнесены к другим показателям надежности и математическим моделям, описывающим процессы возникновения отказов.

Допустим, что в состав испытываемого изделия входит элемент с известной величиной надежности. Тогда, если отсутствует резервирование этого элемента, естественно предположить, что параметр потока отказов изделия ограничен снизу значением надежности этого элемента. Аналогичная ситуация возможна, если сложное устройство состоит из блоков, часть из которых входила в ранее разработанные изделия и поэтому длительное время эксплуатировалась. На практике такие ситуации складываются весьма часто в связи с широким внедрением унифицированных блоков и узлов. В этих случаях до проведения испытаний изделия можно считать, что показатель надежности изделия λ удовлетворяет условию

$$\lambda > \lambda_1,$$

где λ_1 — параметр потока отказов той части изделия, надежность которого известна в результате предшествующих испытаний или длительной эксплуатации в составе других изделий.

В качестве верхней границы параметра λ_2 можно принять расчетное значение, вычисленное исходя из наиболее тяжелых условий эксплуатации. Кроме того, верхняя граница может быть установлена по данным испытаний и эксплуатации подобных устройств, если известно, что при разработке и изготовлении испытываемого изделия приняты специальные

меры по повышению надежности. Это может быть в случае, если оценивается надежность изделия, прошедшего модернизацию с целью повышения надежности. Тогда в качестве верхней границы интенсивности отказов можно принять значение надежности λ_2 этого изделия, которое оно имело до модернизации.

Второй метод построения априорного распределения применим в случае, когда до проведения испытаний данного типа изделий известна априорная оценка h_{k+1} его неизвестного показателя надежности λ_{k+1} и задан набор пар значений $(h_1, \lambda_1, h_2, \lambda_2, \dots, h_n, \lambda_n)$ показателей надежности и их априорных оценок для других типов изделий, подобных испытываемому (из предшествующего опыта проектирования и эксплуатации аналогичных устройств).

Поскольку надежность изделия можно характеризовать надежностью компонент, показатель λ_i любого изделия из всего класса, объединяющего подобные изделия, можно считать также случайным, принадлежащим некоторой генеральной совокупности. В этом случае целесообразно априорное распределение показателя λ_i , соответствующее каждому значению h_i , принять нормальным с параметрами, зависящими от значения h_i :

$$H(\lambda_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(h_i)} e^{-\frac{[\lambda_i - \eta(h_i)]^2}{2\sigma^2(h_i)}},$$

где

$$\eta(h_i) = M\{\lambda_i/h_i\};$$

$$\sigma(h_i) = \sqrt{D_{h_i}\{\lambda_i\}};$$

M — оператор математического ожидания.

Если априорная оценка не имеет систематической ошибки, то

$$M\{\lambda_i/h_i\} = h_i.$$

В этом случае регрессионный анализ используется только для определения дисперсии априорного распределения.

Для оценки дисперсии необходимо, чтобы был известен вид зависимости

дисперсии $\sigma^2(h)$ с точностью до неизвестного коэффициента G :

$$\sigma^2(h) = G\varphi(h).$$

Значение $S^2(h)$ для оценки дисперсии $\sigma^2(h)$ имеет следующий вид:

$$S^2(h) = \varphi(h) \frac{\sum_{i=1}^k (h_i - \lambda_i)^2}{\sum_{i=1}^k \varphi(h_i)}. \quad (15)$$

Дисперсия априорного распределения, вычисленная в точке h_{k+1} , приближенно равна

$$S^2(h_{k+1}) = \varphi(h_{k+1}) \frac{\sum_{i=1}^k (h_i - \lambda_i)^2}{\sum_{i=1}^k \varphi(h_i)}. \quad (16)$$

Обычно в практических задачах можно считать, что дисперсия возрастает пропорционально h или h^2 . В этих случаях формула (16) преобразуется в следующий вид:

$$S^2(h_{k+1}) = h_{k+1} \frac{\sum_{i=1}^k (h_i - \lambda_i)^2}{\sum_{i=1}^k h_i} \quad \text{для } \varphi(h) = \alpha h; \quad (17)$$

$$S^2(h_{k+1}) = h_{k+1}^2 \frac{\sum_{i=1}^k (h_i - \lambda_i)^2}{\sum_{i=1}^k h_i^2} \quad \text{для } \varphi(h) = \alpha h^2. \quad (18)$$

Таким образом, если априорная оценка показателя надежности является несмещенной, то в качестве априорного распределения следует принять нормальное распределение с математическим ожиданием, равным априорной оценке надежности испытываемого изделия, и дисперсией, вычисленной по имеющимся статистическим данным с

помощью расчетных формул (16), (17) (18):

$$H(\lambda_{k+1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} S(h_{k+1})} e^{-\frac{(\lambda_{k+1} - h_{k+1})^2}{2S^2(h_{k+1})}}$$

Третий метод построения априорного распределения относится к случаю, когда дополнительные сведения об испытываемом изделии ограничены заданием априорной оценки h показателя надежности и значением ее точности. Дисперсия оценки σ^2 , характеризующая ее разброс относительно параметра λ , служит мерой этой точности. Допустим, что априорная оценка не имеет систематической ошибки. В этом случае в качестве дисперсии априорного распределения может быть принята известная величина σ^2 . Таким образом, если известна априорная оценка и ее дисперсия, то в качестве априорной оценки неизвестного показателя следует принять нормальное распределение с математическим ожиданием h и дисперсией σ^2 .

Пример 5. Известна расчетная оценка параметра потока отказов $h = 200 \times 10^{-5}$ 1/ч и ее среднеквадратичная погрешность $\sigma = 40 \cdot 10^{-5}$ 1/ч. В этом случае в качестве априорного распределения принимается

$$H(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} 40 \cdot 10^{-5}} e^{-\frac{(\lambda - 200 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot 1600 \cdot 10^{-10}}}$$

4. ЭМПИРИЧЕСКИЙ БАЙЕСОВСКИЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРА ПОТОКА ОТКАЗОВ

Задание априорного распределения для применения теоремы Байеса во многих практических задачах затруднительно.

Эмпирический байесовский подход может быть использован в ситуации, когда для оценки надежности по результатам испытаний имеются статистические данные по большому числу изделий, подобных испытываемому. В этих случаях можно получить оценки, которые при увеличении априор-

ных данных стремятся к байесовским. При этом оценка надежности осуществляется без предварительного определения априорного распределения.

Для изложения существа метода рассматривается следующая типовая ситуация. В течение длительного периода заводом выпускаются однотипные изделия. В силу естественной нестабильности производственных процессов и исходных материалов надежность выпускаемых изделий может колебаться в значительных пределах. При этом изделия, принадлежащие разным партиям, могут считаться подобными. Для сложных восстанавливаемых изделий поток отказов можно считать простейшим с параметром λ , который в каждой партии считается постоянным, а от партии к партии в силу указанной нестабильности может изменяться, принимая различные значения λ_i (индекс i — номер партии). Для постоянного контроля уровня надежности изготавливаемой продукции систематически проводятся выборочные испытания из каждой выпускаемой партии, в процессе которых оцениваются показатели надежности λ_i . Размер выборки, т. е. количество испытываемых изделий N и время испытаний t , одинаков для всех партий. Поэтому общая наработка

$$S = Nt$$

во всех случаях остается постоянной.

Тогда, если отсутствуют какие-либо дополнительные данные, в качестве оценки параметра λ_i следует принять оценку максимального правдоподобия:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{R_i}{S};$$

где R_i — число отказов всех изделий, зафиксированных во время испытаний выборки из i -й партии.

Если ко времени испытаний изделий $(k-1)$ -й партии накоплены результаты выборочных испытаний изделий, предшествующих k -й партии, то они могут быть использованы при обработке результатов выборочных испытаний $(k+1)$ -й партии.

Количество отказов R_i в каждой выборке является случайной величи-

ной, безусловное распределение которой может быть представлено в виде

$$\psi(R) = \int_0^{\infty} \varphi(R/\lambda) H(\lambda) d\lambda,$$

где $H(\lambda)$ — априорная плотность распределения λ , характеризующая разброс параметра λ от партии к партии, которая по условиям задачи считается неизвестной; $\varphi(R/\lambda)$ — распределение вероятностей числа отказов, соответствующее каждому значению λ .

Для многокомпонентных изделий число отказов при установившихся условиях эксплуатации распределено по закону Пуассона:

$$\varphi(R/\lambda) = \frac{(\lambda S)^R}{R!} e^{-\lambda S}.$$

Тогда безусловное распределение $\psi(R)$ принимает вид

$$\psi(R) = \frac{1}{R!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda S} (\lambda S)^R H(\lambda) d\lambda. \quad (19)$$

Байесовская оценка z_R , минимизирующая среднеквадратичную ошибку, принимает вид

$$z_R = \frac{1}{S} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\lambda S} (\lambda S)^{R+1} H(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda S} (\lambda S)^R H(\lambda) d\lambda}. \quad (20)$$

В данном виде воспользоваться формулой (20) для практических расчетов нельзя, поскольку априорное распределение $f(\lambda)$ неизвестно.

Однако, сопоставляя выражения (19) и (20), можно записать следующее основное соотношение для байесовской оценки:

$$z_R = \frac{R+1}{S} \frac{\psi(R+1)}{\psi(R)},$$

из которого видно, что в случаях, когда имеющиеся статистические материалы позволяют определить $\psi(R)$, оценку z_R можно получить, не при-

бегая к предварительному построению априорного распределения.

В данном случае, используя имеющиеся ко времени испытаний $(k + 1)$ -й партии изделий материалы, выражение для эмпирической байесовской оценки z_R можно записать в виде

$$z(R_{k+1}) = \frac{R_{k+1} + 1}{S} \frac{\mu(R_{k+1} + 1)}{\mu(R_{k+1})}, \quad (21)$$

где $\mu(x)$ — число партий из испытанных ранее k партий, в процессе испытаний которых произошло x отказов.

Оценка $z(R_{k+1})$ при больших значениях k близка к байесовской, поскольку значения $\frac{\mu(R_{k+1} + 1)}{k}$ и

$\frac{\mu(R_{k+1})}{k}$ по мере увеличения k стремятся соответственно к вероятностям $\psi(R_{k+1} + 1)$ и $\psi(R_{k+1})$. Использование формулы (21) для оценки показателя надежности правомерно только при достаточно больших k . При этом эффект в повышении точности такой оценки зависит от степени нестабильности производственных процессов (разброса λ_i) и количества испытанных ранее партий изделий (k) и может быть значительным. Применение перечисленных методов возможно только в том случае, если анализ природы разброса показателей надежности подобных изделий допускает интерпретацию каждого показателя как случайной величины, заданной своим априорным распределением.

Глава 10. Триботехнические задачи надежности машин

1. ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ТРЕНИЯ И ИЗНАШИВАНИЯ

Основные положения теории внешнего трения и усталостного изнашивания разработаны с учетом механики контактного взаимодействия шероховатых твердых тел и физических представлений о разрушении контакта, основанных на фактах экспериментальной трибологии, важнейшие из которых следующие:

микронеоднородность физических свойств и геометрических очертаний поверхностей реальных тел, приводящая к дискретному характеру зоны фактического контакта;

наличие в процессе трения и изнашивания критических точек, т. е. таких сочетаний внешних и внутренних факторов, при которых в течение наблюдаемого процесса появляются качественные изменения;

усталостный характер процесса разрушения поверхностных слоев твердых тел при трении.

Положение об усталостной природе изнашивания, выдвинутое ранее в качестве гипотезы, к настоящему времени подтверждено результатами физических исследований и сформулировано в виде теории фрикционной усталости.

Повышение долговечности машин лимитируется главным образом долговечностью узлов и элементов трения. Создание узлов с минимальными потерями на трение равносильно высвобождению огромных ресурсов рабочей силы и различных материальных затрат, в том числе ремонтных предприятий.

Эта задача крайне усложнится, так как тенденции развития науки, техники и производства ведут к уже-

сточению и усложнению режима работы машин, а значит, и узлов трения по нагрузкам, скоростям, температурам, вибрации, условиям воздействия различных газовых и жидких сред, воздействию радиации и т. д. Эти же тенденции таковы, что габаритные размеры и масса узлов трения будут уменьшаться, что еще больше усложнит задачу. Возникают новые виды ускоренного изнашивания, например изнашивание деталей под влиянием водорода, не известное ранее. Принципиально различно должны решаться задачи трения и изнашивания при торможении реактивных самолетов, возвращаемых космических объектов, скоростного магистрального, монорельсового и трубоконтейнерного транспорта, при использовании линейных и реактивных двигателей с магнитным и газодинамическим подвесом. Чрезвычайно важно повысить срок службы узлов трения и инструментов при глубинном бурении и работе в морских глубинах. Также новым вопросом является повышение износоустойчивости элементов атомной энергетики. Исключительное значение приобретают вопросы трения и изнашивания для узлов трения автоматизированных и программируемых устройств, особенно для роботов и манипуляторов, а также для сельскохозяйственного машиностроения.

Наука о трении и изнашивании (трибология) устанавливает ряд фундаментальных экспериментально-теоретических закономерностей, решает прикладные инженерные (триботехнические) задачи в области трения без смазочного материала и со смазочным материалом (граничное, гидродинамическое, газодинамическое и контактно-гидродинамическое) абразивного и ус-

талостного изнашивания, которые реализуются в различных узлах машин при скольжении, качении или качении со скольжением.

Расчетные методы оценки износа поверхностей трения. За основную расчетную характеристику процесса изнашивания принята интенсивность линейного изнашивания I_h , определяемая одним из следующих безразмерных соотношений:

$$I_h = \frac{dh}{dL_T} = \frac{dV}{A_T dL_T} = \frac{\lambda}{\rho_T} \frac{dG}{dL_T} = \lambda \tau_a \frac{dV}{dW}, \quad (1)$$

где h , V , G — величины линейного, объемного и массового износа соответственно; L_T — путь трения; A_T — номинальная площадь трения; $\tau_a = F_T/A_a$ — удельная номинальная сила трения; A_a — номинальная площадь контакта; F_T — сила трения; $W = L_T F_T$ — работа силы трения; ρ_T — плотность истираемого материала; $\lambda = A_a/A_T$.

В некоторых случаях целесообразно использовать для расчета объемную I_V , массовую I_G или энергетическую I_W интенсивности изнашивания:

$$I_V = \frac{dV}{dL_T}; \quad I_G = \frac{dG}{dL_T}; \quad I_W = \frac{dV}{dW},$$

связь которых с линейной интенсивностью изнашивания следует из соотношений (1). Кроме того, используют характеристику, называемую скоростью изнашивания $\gamma_h = dh/dt_{ск}$, которая связана с интенсивностью соотношением $I_h = \gamma_h/v$, где v и $t_{ск}$ — соответственно скорость и время скольжения. Величина, обратная интенсивности (или скорости) изнашивания, называется износостойкостью.

В отличие от перечисленных характеристик изнашивания значение линейной интенсивности изнашивания не зависит от выбора системы единиц измерения определяющих величин. Поэтому эта характеристика используется как основная для расчетной оценки износа.

В стационарном (установившемся) режиме интенсивность изнашивания постоянна, и дифференциалы в соотношениях (1) могут быть заменены со-

ответствующими конечными приращениями. В случае скольжения твердого шероховатого тела по гладкому деформируемому интенсивность изнашивания последнего определяется следующими формулами:

при упругом взаимодействии контактирующих микронеровностей

$$I = C \left(\frac{q_a v^*}{K_v} \right)^{1+\beta t} \left(\frac{K_f^y}{\sigma_0 v^*} \right)^t \times \left(\frac{R_{max}}{b^{1/\nu} R} \right)^{t(1+\beta)/2} (\eta_c)^{-\beta t}; \quad (2)$$

при пластическом

$$I = C \sqrt{2} \left(\frac{q_a}{HB} \right)^{\frac{1+\beta t}{1-\beta t}} \left(\frac{K_f^{\pi}}{e_0} \right)^t \times \left(\frac{R_{max}}{b^{1/\nu} R} \right)^{(1+t)/2} (\eta_c)^{\frac{(1+t)\beta}{1-\beta}}, \quad (3)$$

где

$$C = \frac{\sqrt{\nu} \Gamma(\nu) \Gamma(1+t/2)}{4(\nu+1) \Gamma(\nu+t/2)}$$

$\beta = 1/(2\nu + 1)$; q_a — номинальное контактное давление; v^* — коэффициент эластичности истираемого материала; K_v — расчетный микрогеометрический коэффициент; R_{max} , R — соответственно наибольшая высота и средний радиус вершин неровностей поверхности; σ_0 , e_0 , t — параметры фрикционной усталости истираемого материала; η_c — относительная контактная площадь контакта; HB — твердость по Бринеллю; ν , b — параметры степенной аппроксимации опорной кривой шероховатой поверхности; K_f^y , K_f^{π} — расчетные коэффициенты, приводящие сложное деформированное состояние материала в зоне контакта к эквивалентному одноосному растяжению соответственно при упругом и пластическом взаимодействии; Γ — гамма-функция.

В случае, когда шероховатость истираемого тела такова, что сравнительно с твердым (в индексе 1) контртелом оно не может считаться гладким (в индексе 2), в зависимости (2) и (3) вводят

эквивалентные характеристики шестероховатости:

$$R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2);$$

$$R_{\max} = R_{\max 1} + R_{\max 2};$$

$$v = v_1 + v_2;$$

$$b = b_1 b_2 \frac{K_b R_{\max}}{R_{\max 1}^{v_1} R_{\max 2}^{v_2}};$$

$$K_b = \frac{\Gamma(v_1 + 1) \Gamma(v_2 + 1)}{\Gamma(v + 1)}.$$

Для учета упругих свойств контртела в формулы (2) и (3) вводят корректирующий множитель

$$\alpha = \left(1 + \frac{v_2^*}{v_1^*}\right) - (v+1) t / (2v+1)$$

Температурно-скоростной фактор учитывается как параметр, влияющий на изменение физико-механических свойств контактирующих тел вследствие их разогрева, так что эти свойства должны быть учтены в (2) и (3) в соответствии с результатами теплового расчета или эксперимента по определению температуры поверхностей трения.

На практике основные факторы, определяющие износ, часто подвержены случайным вариациям. Согласно формулам (2) и (3) зависимость интенсивности изнашивания от большинства факторов носит степенной характер:

$$I = K_{\theta} \theta^{m_{\theta}}, \quad (4)$$

где θ и m_{θ} — значения некоторого фактора и показателя степени при нем.

Среднее значение \bar{I} и коэффициент вариации V_I интенсивности изнашивания для ряда законов распределения θ могут быть выражены в виде

$$\bar{I} = K_{\theta} \bar{\theta}^{m_{\theta}} \xi_1; \quad V_I = \sqrt{\xi_2 - \xi_1} / \xi_3,$$

где $\bar{\theta}$ — среднее значение фактора; ξ_1, ξ_2, ξ_3 — коэффициенты, зависящие от типа закона распределения θ .

При расчете износа конкретных сопряжений, обладающих, как правило, неравномерно распределенной эпюрой давлений и скоростей скольжения, зависимости (2), (3) или (4) выступают как элементные законы

изнашивания. С учетом конструктивных особенностей их используют для вывода уравнений изнашивания сопряжений.

Так, ресурс сопряжения вал—втулка с обратной парой трения (неизнашивающаяся втулка с радиусом R) при постоянных нагрузке Q и угловой скорости $\bar{\omega}$ определяется выражением

$$T = T_0 \int_0^{u_t} \Psi^{m+1}(y) dy, \quad (5)$$

где

$$\Psi = \sqrt{\frac{1+y}{1+\varepsilon_0 y}}; \quad \varepsilon_0 = \Delta(0)/R_1;$$

R_1 — начальный радиус вала;

$$T_0 = \frac{2\pi \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right) \omega \Delta(0)} \times$$

$$\times K q_{\max}^m(0) b_k(0);$$

$$y = \frac{\Delta(t) - \Delta(0)}{\Delta(0)}$$

— нормированный износ.

Здесь $\Delta(0)$ — начальный радиальный зазор сопряжения; $q_{\max}(0)$ — максимальное контактное давление; $b_k(0)$ — полуширина площадки контакта по Герцу в неизношенном сопряжении.

Для практически важного случая $\varepsilon \ll 1$ из выражения (5)

$$T = \frac{2T_0}{3-m} \left[(1+y)^{\frac{3-m}{2}} - 1 \right] /$$

при $m \neq 3$; (6)

$$T = T_0 \ln(1+y) \quad \text{при } m = 3.$$

Ближайшей общей задачей развития расчетных методов оценки износа является разработка на основе теории фрикционной усталости комплекс методик для расчета долговечности и надежности по изнашиванию наиболее распространенных сопряжений деталей машин в характерных условиях эксплуатации. Актуальными являются

исследования так называемой динамической износостойкости при переменных режимах трения, характерных для реальных условий работы машин.

Практика инженерного применения методов показывает, что аналитические закономерности позволяют при проектировании машин эффективно оценивать возможные процессы изнашивания. Эти методы требуют дальнейшего развития как в теоретическом плане, так и в части накопления необходимого справочно-нормативного материала по механическим и усталостным свойствам поверхностей трения, по параметрам их микрогеометрии. Важнейшим условием дальнейшего совершенствования расчетов на изнашивание является также создание специализированного комплекса испытательно-измерительной аппаратуры для определения используемых в расчете параметров с применением ЭВМ.

Усталостное разрушение поверхностей трения. Усталостная теория изнашивания позволяет с единых позиций рассмотреть разрушение поверхностей трения, несмотря на все многообразие конструкций фрикционных пар, материалов, условий их работы и изменений, происходящих в процессе трения. Молекулярно-механическая теория трения получила широкое развитие. Одно из направлений дальнейшего совершенствования расчетной методики — накопление справочно-нормативного материала по механическим и усталостным свойствам поверхностей трения.

Исследования физической сущности процессов, происходящих на контакте, обусловлены не только поиском путей для уточнения существующих расчетных зависимостей, но и необходимостью выявления структурных критериев разрушения. Исследование структурных изменений поверхностей трения позволило выявить их периодический характер и тем самым обосновать представление об усталостной природе изнашивания.

В результате детального исследования на модели фрикционного контакта (скольжение цилиндра, моделирующего единичную неровность, по плоской поверхности) с помощью рентгеновского анализа, измерения электриче-

ского сопротивления, металлографического анализа была выявлена зависимость характеристик периодических кривых от условий трения (нагружения, смазывания, характера перемещения элементов пары трения).

Периодический характер структурных изменений (рис. 1) обусловлен периодическим ростом плотности дислокаций до критического значения (упрочнением) и последующим ее частичным уменьшением в результате нарушения сплошности материала путем образования микротрещин (разупрочнением поверхности). Таким образом, среднее для каждой периодической кривой расстояние между минимальными значениями исследуемого структурного параметра (ширины дифракционной линии, электрического сопротивления, микротвердости и т. д.) является числом циклов до разрушения N (см. рис. 1). С увеличением нагрузки q_m число циклов до разрушения уменьшается, при использовании смазочного материала — увеличивается. Изменяется и максимальное значение структурного параметра, например ширины дифракционной линии B (см. рис. 1). Поскольку между последней и остаточной деформацией существует линейная связь, использование градуировочных кривых позволяет определить остаточную деформацию в поверхностных слоях при трении и установить соотношение между нею и числом циклов до разрушения (рис. 2). Полученное на базе периодических кривых уравнение фрикционной усталости для стали 45

$$N^{0,4} \epsilon_T = 0,06 \quad (7)$$

оказалось аналогичным уравнению Коффина для малоциклового усталости

$$N^{0,5} \Delta_\epsilon = 0,29, \quad (8)$$

где N — число циклов до разрушения; ϵ_T — остаточные деформации при трении; Δ_ϵ — размах пластической деформации.

Проверка значимости отличия показателя степени 0,4 в уравнении (7) от 0,5 в уравнении (8) показала, что с доверительной вероятностью 90 % это отличие не является систематическим, а обусловлено действием слу-

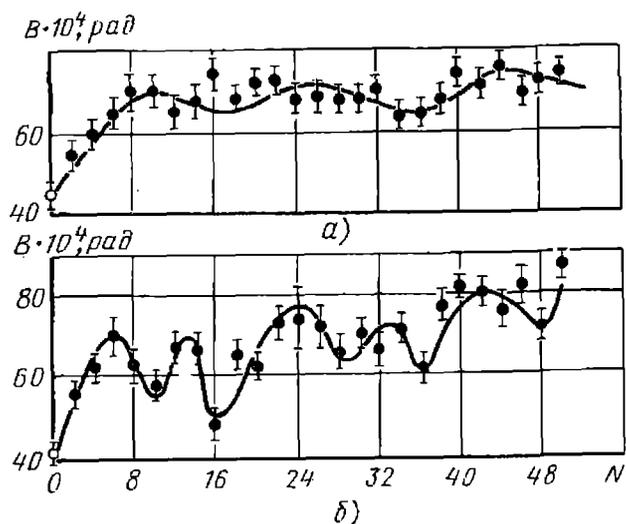


Рис. 1. Зависимость ширины дифракционных линий B (220)

α — Fe от числа воздействий накопчика:

$$a - q_m = 598,2 \text{ МПа}; \quad b - q_m = 1343,5 \text{ МПа}$$

чайных факторов. Общность характера структурных изменений и аналитических зависимостей, описывающих разрушение металлов и сплавов при обычных испытаниях на усталость и при испытаниях на фрикционную усталость, свидетельствует об общности механизма разрушения при обоих видах нагружения и обосновывает правомерность использования обычных уравнений усталости для процесса трения.

К вопросу об избирательном переносе при трении. В трении при граничной смазке контакт дискретен и составляет ничтожную долю от номинальной поверхности, что предопределяет взаимное внедрение неровностей, температурные всплески на них и высокие удельные нагрузки на смазочную пленку, обуславливающие изнашивание через эту пленку. В режиме избирательного переноса (ИП) контактирование происходит по площадям, на несколько порядков большим, чем при граничной смазке, поэтому трение носит непрерывный характер, происходит при низких давлениях, а смазочный материал не испытывает влияния температурных всплесков. Это оказывается возможным благодаря тому, что в начальной стадии трения возникает избирательное растворение поверхностного слоя медного сплава, в результате чего образуется защитная металлическая пленка, в которой локализуется трение.

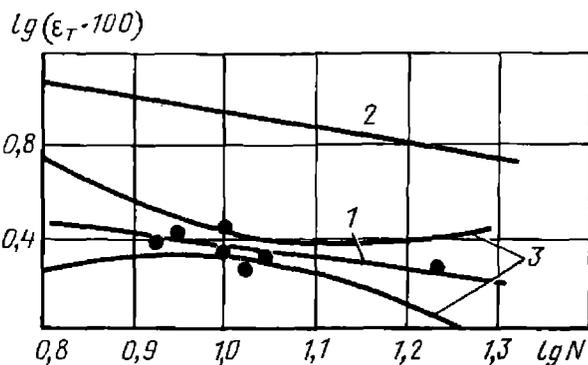


Рис. 2. Связь между числом циклов до разрушения и остаточной деформацией, трение без смазочного материала:

1 — расчет по формуле (7); 2 — расчет по формуле (8); 3 — область экспериментальных значений

Электрохимический процесс избирательного растворения вызывается активными продуктами трибодеструкции смазочного материала, вступающими в химическую реакцию с анодными компонентами сплава, в результате чего в сплаве на месте ушедших атомов остаются вакансии, а на поверхности и в порах — металлоорганическое соединение — трибопав. Кроме того, возникают полимерные образования и коллоиды, участвующие в уменьшении трения и изнашивания.

ИП апробирован в сопряжениях металлорежущих станков (направляющие, пара винт—гайка), прессового оборудования (подшипники скольжения), редукторов (червячная пара), автомобилей (узлы передней подвески), нефтепромышленного оборудования (узлы трения насосов, буровой инструмент).

ИП применяется особенно широко в таких узлах, где в условиях граничной смазки имеет место очень большой износ, например в тяжело нагруженных узлах трения самолетов (узлы поворота крыла, шасси и др.), в узлах трения, смазываемых морской водой, в забортных механизмах кораблей, в уплотнениях магистральных нефтепроводов, электробуров, водяных насосов, в станках текстильной промышленности.

Рядом производств накоплен материал по результатам эксплуатации узлов трения в режиме ИП, повышению надежности узлов трения и эф-

фективности применения, однако необходимо более полное использование описанных выше преимуществ при проектировании новых видов машин и конструкций.

Оценка качества обработки поверхности и износостойкости по параметрам, характеризующим структурное состояние металлов и сплавов. Установление закономерностей пластической деформации и целенаправленное управление процессами поведения материала в зоне контактирования лежат в основе достижения максимальной износостойкости узлов трения, надежности и долговечности изделий.

Для исследования процесса пластической деформации зоны контактного взаимодействия используют физические методы, основанные на дифракции электронов, которые несут информацию о слоях толщиной до 10^{-8} м. При использовании рентгеновских лучей оцениваются слои толщиной 10^{-6} — 10^{-4} м. Важный для процессов трения и изнашивания диапазон толщин 10^{-8} — 10^{-6} м оказался недоступным для исследования при обычном использовании рентгеновских лучей, так как особенности поверхностных превращений не допускают применения способов послойного травления.

На основе систематического исследования большого числа металлических материалов и смазочных сред разработаны структурные критерии высокой износостойкости, экспериментальной основой которых являются параметры субмикроструктуры тонких поверхностных слоев металлов и сплавов, деформированных трением.

Особое место в науке о трении и изнашивании занимает методология подбора и оценки эффективности смазочных сред. Для оценки смазочной способности используются абсолютные значения коэффициента трения и изнашивания, критическая нагрузка задирания, температура разрушения смазочного слоя. В основе метода оценки смазочной способности лежит высокая чувствительность параметров структурного состояния тончайших поверхностных слоев контактирующих материалов к свойствам смазочной среды.

На рис. 3 показана зависимость логарифма интенсивности изнашивания

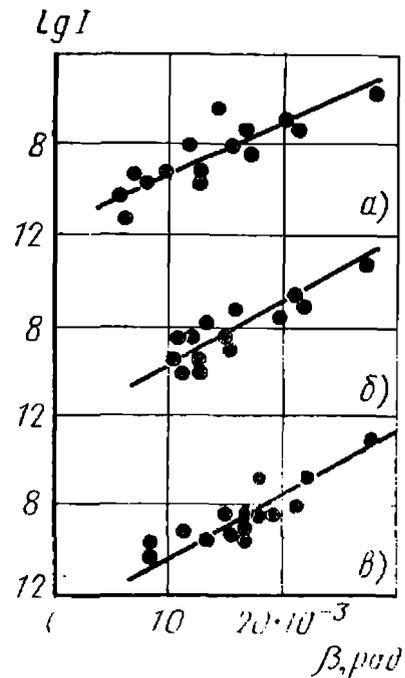


Рис. 3. Зависимость логарифма интенсивности изнашивания металлов от ширины рентгеновских линий тонких поверхностных слоев:

a — медь; б — железо; в — никель

основных промышленных металлов, испытанных при различных смазочных материалах, от структурного параметра β . Математическая обработка дает следующее выражение связи интенсивности изнашивания и параметра структуры:

$$I = \frac{\Delta G}{\rho A_c L_T} = 10^{-12} \exp 0,5\beta,$$

где ΔG — потеря массы образца на пути трения L_T с контурной площади A_c .

Высокая чувствительность параметра β к природе смазочного вещества и его корреляция с величиной износа — один из критериев оценки смазочного действия среды, при этом параметр β отражает комплекс механофизико-химических процессов узла трения в целом и, следовательно, может служить основой решения вопроса регулирования этих процессов в зоне контакта твердых тел.

В задачах улучшения качества металлов, сплавов и изделий из них особое место занимают средства и методы поверхностных технологических обработок, разработка которых тре-

бует контроля с точки зрения физических процессов, происходящих в кристаллической решетке обрабатываемого металла.

Анализ условий шлифования титановых сплавов с точки зрения субмикроструктурных изменений в слоях долей микрона показал, что формируется резко отличающийся от объема комплекс физических и механических свойств, характеристики которых положены в основу выбора режимов технологических обработок изделий и разработки условий их промышленной эксплуатации.

В процессе пластического деформирования при трении и изнашивании, различных технологических обработках определяющая роль принадлежит поверхностным слоям. Физические, химические и механические свойства поверхности в ряде случаев существенно отличаются от свойств внутри объемов и определяют поведение изделий в условиях эксплуатации.

Основы создания новых конструктивных самосмазывающихся материалов. Характер разрушения фрикционной связи и комплекс процессов, протекающих в поверхностных слоях и микрообъемах, в значительной степени зависят от ряда факторов: геометрических, механических, физических и химических. Основной задачей при создании материалов является максимальное увеличение числа циклов N до разрушения, т. е. максимальной стойкости поверхностей трения к повторному деформированию:

$$N = \left(\frac{\sigma_B}{Kfp_r} \right)^t,$$

где $t \rightarrow \max$ — параметр, характеризующий стойкость материала к повторным нагружениям; f — коэффициент трения; p_r — давление на фактическом пятне контакта.

Коэффициент пропорциональности K зависит от механизма разрушения материала и связан с коэффициентом Пуассона. Ориентировочно можно применять для хрупких материалов $K = 5$, для высокоэластичных $K = 3$, для металлов $K = 2,3 \sqrt{1 + 1/15p_r}$.

Необходимо снижение молекулярной составляющей силы трения

$$\tau_{\text{пол}} = \tau_0 + \frac{\beta}{p_r}; \quad \tau_0 \text{ и } \beta \rightarrow \min,$$

для чего важно обеспечить необходимую и достаточную дефектность структуры поверхностного слоя твердого тела (металла или твердого смазочного материала). В этом случае может вступить в действие вакансионный механизм течения поверхностного слоя, обеспечивающий минимальную прочность вакансионных связей.

Согласно молекулярно-механической теории трения для обеспечения малого трения и минимального изнашивания необходимо соблюдение правила положительного градиента механической прочности, по которому прочность возникающих молекулярных связей на поверхности должна быть меньше прочности нижележащих слоев. Положительный градиент сдвигового сопротивления по нормали к контакту $\partial\tau/\partial z > > 0$, когда на поверхности трения вводятся жидкие или пластичные смазочные материалы. Указанное положение всегда реализуется, так как прочность на сдвиг смазочного материала значительно ниже, чем металла, на который он нанесен. В паре трения такой градиент может быть достигнут нанесением пленки (металлической, неметаллической и др.), применением самосмазывающегося монолитного материала, который в процессе трения также обеспечивает положительный градиент механической прочности за счет активного наполнителя (дисульфиды и селениды переходных металлов V и VI группы и др.) или путем выдавливания смазочного материала (маслянит). Все эти явления активизируются с повышением температуры трения, которая, в свою очередь, приводит к возникновению ряда процессов, связанных со структурными превращениями в поверхностных слоях, явлениями избирательной диффузии, газовой выделением и, таким образом, к изменению значений коэффициентов трения и изнашивания.

Температура и температурный градиент оказывают решающее воздействие на фрикционное поведение материалов.

Самосмазывающиеся материалы прочно вошли в современную технику и широко применяются в узлах трения машиностроения и приборостроения. Это новый класс материалов для узлов трения, обладающих способностью создавать на поверхности контртела ориентировочные пленки, имеющие малую прочность на срез в поверхностном слое и выдерживающие большое число циклов без разрушения. В процессе трения эта пленка непрерывно создается и поддерживается, а возникающие деформации локализуются в тонком поверхностном слое.

Свойства самосмазывающихся материалов можно изменять в широких пределах, варьируя для полимерных материалов характер исходных химических молекул, состав и последовательность их чередования, вид наполнителя и степень наполнения, условия синтеза и последовательность обработки материалов, технологию изготовления основы и наполнителя для порошковых материалов, а также покрытий и способ их нанесения и др.

Выбор того или иного класса самосмазывающихся материалов зависит от назначения узла трения (тяжелонагруженный, высокотемпературный, вакуумный, теплостойкий и др.). Во всех случаях необходимо соблюдать правило положительного градиента механических свойств, приводящее к локализации сдвигового сопротивления в тонком поверхностном слое.

Разработка и применение твердых смазочных и самосмазывающихся конструкционных материалов в узлах трения без смазочного материала поставили много новых задач и потребовали новых нетрадиционных конструкторских и материаловедческих решений.

Вследствие повышенного трения в узлах с твердыми смазочными материалами возникают напряженные температурные условия. Во избежание этого в высокооборотных узлах трения наносят теплопроводящие металлические покрытия на контртело, разрабатывают теплостойкие материалы, улучшают также теплоотвод генерируемого при трении тепла.

Теплопроводность некоторых твердых смазочных материалов, в частности

такого распространенного, как дисульфид молибдена MoS_2 , мала, поэтому при разработке твердых смазочных и самосмазывающихся конструкционных материалов учитывают их фрикционную теплостойкость. При конструировании высокооборотных узлов трения выполняют проверочные расчеты температур с учетом ресурса узла трения.

К недостаткам самосмазывающихся материалов (особенно полимерных) следует отнести помимо низкой теплопроводности малую несущую способность, а также потерю эластичности и прочности вследствие утраты пластификатора.

Применение этих материалов позволило в ряде случаев отказаться от жидких и пластичных смазочных материалов, что существенно расширило температурный диапазон использования материалов в узлах трения. Термическая стабильность дисульфида молибдена позволяет сохранять полностью смазывающую способность от -180 до 300°C на воздухе и до 1100°C в вакууме. Исключительно высокая прочность на сжатие пленки дисульфида молибдена позволяет применять ее при давлении на контакте, приближающемся к пределу текучести многих металлов.

Селениды молибдена, вольфрама, ниобия и тантала успешно применяют в последнее время для узлов трения, работающих в ультравысоком вакууме, в качестве наполнителей самосмазывающихся материалов и покрытий. Одним из больших преимуществ самосмазывающихся материалов является их малая скорость газовыделения. Температурный режим работы этих материалов в зависимости от служебного назначения колеблется в пределах $-200 \div 1100^\circ\text{C}$.

Самосмазывающиеся материалы (табл. 1) широко применяют в качестве сепараторов подшипников качения, вкладышей в опорах скольжения, смазывающихся зубчатых колес, в редукторах трения без смазочного материала, в виде щеток или материалов для коллекторов двигателей постоянного тока, вкладышей муфт предельного момента, в резьбовых соединениях и др.

1. Рабочие характеристики самосмазывающихся материалов

Материал	Среда	Интенсивность изнашивания I	Коэффициент трения f	Предельная температура на поверхности трения, °C
АМАН	Вакуум	—	0,08	300
	Воздух	$1,10^{-9}$	0,2	300
Порошковый материал с рабочим слоем MoS_2	Вакуум	$5,10^{-11}$	0,06—0,08	600
	Воздух	$1,10^{-9}$	0,08—0,12	400
Жаропрочный с рабочим слоем $MoSe_2$	Вакуум	$1,10^{-10}$	0,08—0,1	900
	Воздух	$1,10^{-9}$	0,08—0,12	400

2. МЕХАНИКА КОНТАКТА И ОПОРЫ С ГАЗОВОЙ СМАЗКОЙ

Вопросы контактной прочности. Контактная прочность рабочих поверхностей деталей машин — одна из важнейших качественных характеристик ответственных узлов (шариковые и роликовые подшипники, направляющие качения, зубчатые и червячные передачи, шариковые вариаторы, пара колесо—рельс, кулачковые и многие другие механизмы), работоспособность и долговечность которых полностью определяют надежность и ресурс многих машин и приборов в целом.

При одном и том же значении контактного напряжения (по Герцу) долговечность может различаться в 8—10 раз в зависимости от формы площадки контакта. Наименьшую долговечность имеют детали с сильно изогнутой площадкой контакта, на которой вследствие интенсивного проскальзывания действуют значительные касательные силы.

В результате исследования закономерностей возникновения и накопления местных остаточных деформаций при контактном нагружении установлено, что уже при напряжении порядка 3 ГПа даже у закаленных на высокую твердость ($HRC\ 60-62$) деталей появляются нарушения исходной их формы, причем значения деформации растут пропорционально четвертой степени расчетного напряжения и при первом нагружении составляют 50—85 % такого ее уровня, которого она достигает при весьма большом (порядка 10^6) числе циклов

нагружения. Оценено влияние этих деформаций на напряженное состояние.

В широком диапазоне условий исследована контактная прочность ряда пластмасс и спецматериалов. Показаны принципиальная возможность и границы целесообразной применимости этих материалов для изготовления деталей, работающих в условиях контактного нагружения, а также их преимущества (легкость, способность работать в агрессивных средах и при ударных нагрузках, неэлектропроводность, малая шумность) и недостатки (малая грузоподъемность, плохой теплоотвод, нестабильность формы). Исследование упругих характеристик этих материалов показало, что при определенных ограничениях расчет пластмассовых деталей можно вести по общеизвестным методикам с использованием условного модуля упругости.

Известно, что затрачиваемая при качении энергия поглощается главным образом поверхностными слоями материала, вызывая в них интенсивное циклическое передеформирование, накопление усталостных повреждений, увеличение износа, нагрев, вибрацию и шум рабочих элементов узла. Кроме того, легкость хода опоры в ряде случаев определяет работоспособность устройства в целом (например, в гироскопах) или же габариты и мощность привода (тяжелонагруженные поворотные устройства). Созданы оригинальные экспериментальные установки, которые позволили провести исследования трения качения в диапазоне скоростей от нескольких сантиметров

в минуту до 89 м/с при нагрузках до 147 кН, различных формах рабочих поверхностей (в том числе шара по шару) и условиях смазывания.

Исследована зависимость сопротивления качению от значений нормальной и касательной нагрузок, скорости, вида смазки, твердости материала деталей и геометрии сопряженных поверхностей. Полученные результаты дали возможность установить ряд новых закономерностей и предложить конкретные рекомендации по снижению энергетических потерь при качении. Разработаны гиперболические, эллиптические и сложные профили качения с одноточечным и двухточечным начальным контактом. Проведенные исследования показали, что при использовании этих профилей можно существенно снизить контактные напряжения, уменьшить энергетические потери в опоре, повысить ее статическую грузоподъемность либо получить оптимальное соотношение этих характеристик для заданных условий работы и требований. Разработана методика определения напряжений на неэллиптических площадках контакта.

Исследование опор с газовой смазкой.

Комплексный подход к решению проблемы, связанной с внедрением опор с газовой смазкой в промышленность, заключается в создании инженерных методик расчета, разработки технологии изготовления и методов аттестации качества сборки, отработки методик стендовых и производственных испытаний, проведении экспериментального исследования статических и динамических характеристик узлов на опорах с газовой смазкой и, наконец, в создании опытно-промышленных образцов приборов, узлов металлорежущих станков и испытательных стендов. Объективный подход к оценке целесообразности применения того или иного типа опор является одним из основных факторов, не только определяющих современность разработок, но и в значительной мере способствующих перспективности их применения в машинах будущих поколений.

Основные свойства газовой смазки выгодно отличают ее от жидкостной. Минимальные потери на трение, обусловленные малой вязкостью газов,

позволяют достигать высокой частоты вращения (до 500 000 об/мин), а отсутствие скачков силы трения при относительном перемещении узлов, разделенных смазочным газовым слоем, — осуществлять перемещения с минимальной скоростью скольжения (до сотых долей мм/мин).

Подшипники с газовой смазкой, не теряя своих эксплуатационных качеств, могут работать при температуре до 1000 °С и выше и высоком давлении (вязкость газов практически не зависит от температуры и давления). Например, при 1000 °С вязкость воздуха по сравнению с нормальными условиями увеличивается всего в 2,5 раза, а при 20 °С и при изменении давления от 0,1 до 30 МПа вязкость возрастает менее чем в 2 раза. Отсутствие уплотнений и сборников существенно упрощает конструкцию опор, а повышенное давление на выходе из зазора предохраняет рабочие поверхности от загрязнений. Все это позволяет использовать их в навигационной, космической, ядерной или лазерной технике, где некоторые системы должны работать в разреженной газовой среде для снижения энергетических потерь, в целях повышения точности приборов или в случаях их работы в стратосфере и при частичной разгерметизации аппаратуры в космосе.

Завершено комплексное исследование работы опор с газовой смазкой в переходном режиме (пуск — остановка), в том числе в условиях разреженной среды, когда процесс формирования газового смазочного слоя особенно затруднен. Именно этот период работы в значительной мере определяет работоспособность подшипникового узла и диктует требования к материалам его рабочих поверхностей. Впервые экспериментально исследовано влияние разреженности и состава газовой среды, окружающей подшипники, динамики разгона, нагрузки, геометрических параметров и материалов на условие формирования газового смазочного слоя в подшипнике. Выявление закономерности формирования несущей газовой смазочной пленки в опоре позволило получить в аналитической форме зависимости для расчета характерных скоростей всплытия. Эти

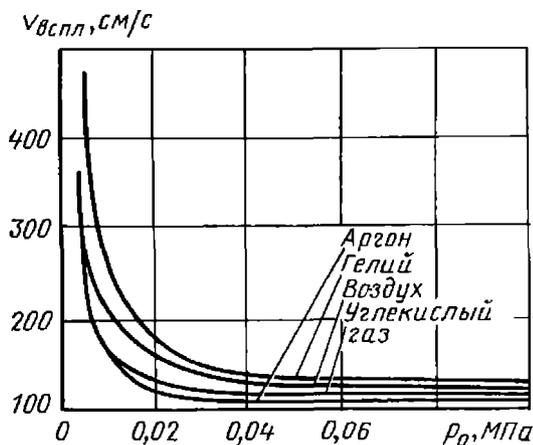


Рис. 4. Изменение скорости всплытия $v_{вспл}$ подшипников в зависимости от понижения давления для четырех газовых сред

зависимости могут быть использованы при проектировании и совершенствовании газодинамических подшипников с учетом их геометрических и нагрузочных параметров и разреженности газовой среды различного состава. Результаты экспериментальных исследований работы подшипников в переходных режимах показали, что и в диапазоне давлений от атмосферного до 0,04 МПа скорость всплытия $v_{вспл}$ газодинамических подшипников практически не зависит от давления окружающей среды. Дальнейшее уменьшение давления окружающей среды влечет за собой существенное увеличение скорости всплытия, необходимое для образования сплошного газового смазочного слоя (рис. 4).

Унифицированная методика расчета жесткости газостатических опор с различными системами поддува позволила проводить объективную оценку их эксплуатационных характеристик. В частности, установлено, что наибольшей жесткостью обладают опоры с дискретными источниками поддува. Однако такие опоры довольно сложны в изготовлении; при относительном изменении эксцентриситета (меньше единицы) рекомендуется применять опоры с питающими щелями. В таких опорах практическое отсутствие потерь на расширение газа при входе его в зазор позволяет применять радиальные подшипники с очень малым относительным удлинением (менее 0,5), приближая, таким образом, их размеры к размерам подшипников качения.

Результаты геометрического и экспериментального исследования статистических и динамических характеристик опор с питающими щелями использованы при создании типовых конструкций газовых опор, которыми оснащены рамки трехстепенного подвеса прибора инерциальной навигации, а также ряд прецизионных шпиндельных узлов шлифовальных станков.

Проведено обширное экспериментальное исследование газодинамических подшипников со спиральными канавками, для работы которых не требуется источника сжатого газа. Область, профилированная спиральными канавками, в таких опорах представляет собой как бы встроенный микрокомпрессор, который обеспечивает опоре повышенное давление в несущем смазочном слое и позволяет создавать направленный поток газа от одной границы подшипника к другой. Вопреки установившемуся мнению об абсолютной устойчивости такого типа опор при определенных скоростных режимах работы они теряют устойчивость. Причем физическая сущность этого явления сходна с аналогичным явлением в газостатических подшипниках, известным под названием «пневмомолот». На основании выполненных исследований оптимизированы геометрические параметры газодинамических подшипников со спиральными канавками не только из условия максимума статических характеристик, но и из условия обеспечения абсолютной устойчивости.

В настоящее время ведутся работы по теоретическому и экспериментальному исследованию комбинированной опоры, представляющей собой сочетание газодинамического подшипника со спиральными канавками и газостатического подшипника с питающими щелями. Такие опоры при переходных режимах, т. е. при запусках и остановках, не имеют непосредственного контакта рабочих поверхностей, а в условиях установившегося режима работы несущая способность смазочного слоя создается спиральными канавками. Таким образом, отпадает необходимость в источнике сжатого газа.

Технология формирования рабочих поверхностей газовых подшипников.

Одним из новых направлений является исследование вакуумных ионно-плазменных методов формирования рабочих поверхностей подшипников с газовой смазкой. В связи с возможностью возникновения трения без смазочного материала газодинамических подшипников в процессах пуска и остановки и при случайных касаниях вследствие перегрузок, потери устойчивости и т. п. (последнее относится к подшипникам и других типов) от материалов поверхностей трения требуется чрезвычайно высокая износостойкость, низкая повреждаемость и невысокие значения коэффициента трения. Объемные свойства материалов деталей газовых подшипников должны отвечать следующим требованиям: обладать достаточно высокой прочностью, стабильностью размеров, высокой теплопроводностью, равными для всех деталей и по возможности низкими значениями коэффициентов термического расширения и т. п.

Практически невозможно найти материалы, которые в полной мере удовлетворяли бы этим требованиям. Как правило, материалы, удовлетворяющие комплексу объемных свойств, имеют низкие противозадирные свойства, легко повреждаются при трении и не обеспечивают малых коэффициентов трения. Материалы же, обладающие достаточной износостойкостью, обычно хрупки, имеют низкую теплопроводность и с трудом поддаются механической обработке. Антифрикционные материалы в большинстве своем обладают недостаточной механической прочностью.

В связи с малыми нагрузками, действующими на подшипники с газовой смазкой, и высоким качеством поверхностей в процессах трения и изнашивания участвуют лишь очень тонкие поверхностные слои. Именно эта особенность предопределила выбор пути создания комбинированных материалов для подшипников с газовой смазкой — последовательное нанесение на рабочие поверхности деталей подшипников, изготовленных из конструкционных материалов, тонких слоев, обладающих высокой износостойкостью и антифрикционностью. Из известных методов нанесения тонких слоев перспектив-

ными для газовых подшипников являются методы покрытия на атомном или молекулярном уровне, т. е. очень тонкие равномерные по толщине покрытия, без заметного ухудшения геометрического качества поверхностей.

Наиболее подходящими для нанесения тонких комбинированных поверхностных слоев с заданным комплексом свойств на изготовленные из конструкционных материалов детали газовых подшипников являются вакуумно-ионно-плазменные методы нанесения покрытий. Ионные методы весьма эффективны для очистки поверхностей деталей перед нанесением покрытия (бомбардировка ионами инертного газа или наносимого вещества) и точной размерной обработки газодинамических канавок (ионное травление при бомбардировке ионами инертного газа). Разные методы ионного нанесения покрытий разрабатывались главным образом в электронной промышленности применительно к производству интегральных микросхем. В последние годы эти методы начинают интенсивно развиваться и применяться в машиностроении для нанесения покрытий различного назначения, в том числе износостойкости и антифрикционных.

Ионные методы нанесения покрытий можно разделить на три группы: методы, основанные на катодном распылении; ионное осаждение; ионное легирование или внедрение (имплантация). Используются также методы химико-термической обработки в тлеющем разряде (например, ионное азотирование).

В методах первой группы покрытие образуется главным образом конденсацией нейтральных атомов или молекул, выбиваемых из «мишени» быстрыми ионами инертного газа. Благодаря тому, что выбиваемые частицы имеют энергию по крайней мере на порядок выше, чем энергия частиц, участвующих в образовании покрытия при термовакуумных методах, адгезия покрытий к подложке существенно выше и, что самое главное, для ее реализации нет необходимости в нагреве детали до высоких температур. При нанесении покрытий из материалов с металлической проводимостью и полупроводников применяется распы-

ление на постоянном токе, из диэлектрических материалов — на высокочастотном разряде.

В методах второй группы в процессе образования покрытия на подложке конденсируются главным образом ионы, дополнительно ускоренные в электрическом поле. Энергия частиц еще выше, чем в методах, основанных на катодном распылении, благодаря чему условия для достижения высокой адгезии покрытия к подложке более благоприятны. Этому способствует также непрерывная «самоочистка» поверхности в процессе образования покрытия в результате бомбардировки ее ионами наносимого вещества.

В основе метода ионного легирования лежит бомбардировка обрабатываемой поверхности ионами очень высокой энергии. Такие ионы практически уже не вызывают явления катодного распыления. Они проникают в кристаллическую решетку на большую глубину, обеспечивая образование сплава или псевдосплава с сильно искаженной кристаллической решеткой.

Методы химико-термической обработки в тлеющем разряде заключаются в том, что ионы легирующего компонента конденсируются на поверхности деталей, находящихся под отрицательным потенциалом (до 1000 В). Благодаря нагреву деталей в результате бомбардировки ионами, а также активному состоянию прибывающих на поверхность частиц веществ диффузионные процессы существенно ускоряются.

Методы ионного легирования, а также методы химико-термической обработки в тлеющем разряде позволяют получать модифицированные поверхности со свойствами, недостижимыми при использовании традиционных способов химико-термической обработки и диффузионного насыщения поверхностных слоев.

Образование покрытий ионными методами может осуществляться в результате только физических или химических (плазмохимических) процессов. Последние методы носят название реактивных. Благодаря этому и другим упомянутым ранее особенностям ионные методы позволяют наносить высококачественные покрытия из самых разнообразных, часто даже нераство-

римых в материале основы, веществ: металлов, карбидов, нитридов, боридов, силицидов, окислов, халькогенидов и, наконец, полимеров. Этими методами можно наносить композиционные и многослойные покрытия (в том числе и с плавным переходом по составу от одного вещества к другому), а также сложные вещества, получение которых обычными способами затруднительно или невозможно. Ионные методы позволяют наносить даже алмазоподобные покрытия.

Таким образом, при применении ионных методов нанесения покрытий: обеспечивается высокая адгезия покрытия к подложке за счет хорошей очистки и высокой энергии конденсирующихся частиц (способствующей необходимой активации поверхностного слоя);

не требуется повышения температуры подложки до высоких значений, благодаря чему сохраняются структура и свойства основного материала и исключаются коробление деталей и потеря ими геометрической формы;

обеспечивается возможность нанесения очень тонких равномерных по толщине покрытий на окончательно обработанные поверхности деталей без ухудшения геометрического качества поверхности;

в процессе осаждения осуществляется «залечивание» поверхностных дефектов (микротрещин, зон предразрушения и т. п.), неизбежно образующихся при процессах механической обработки;

имеется возможность варьирования состава и свойств покрытий в широчайших пределах;

при ничтожном расходе материалов обеспечивается весьма существенное повышение износостойкости и надежности трущихся сопряжений.

Наиболее эффективным путем снижения трения, опасности повреждения и изнашивания рабочих поверхностей в периоды пуска и остановки газодинамических подшипников является применение твердых смазочных материалов в виде тонких покрытий, обладающих высокой прочностью и адгезией к износостойкой основе и обеспечивающих максимальную долговечность при низком трении.

В качестве твердых смазочных материалов могут применяться как неорганические твердые соединения (дисульфид молибдена), так и органические (фторопласт, предельные жирные кислоты, их соли и амиды). Испытания пленок фторопласта, напыленных на образцы из стали ШХ15, продемонстрировали значительное снижение трения по сравнению с трением стальных поверхностей. Значительно большую долговечность и низкий коэффициент трения показали пленки MoS_2 , напыленные на стальные образцы с подслоем из SiO_2 .

Высокие свойства отмечены у пленки предельных жирных кислот (бегеновой и стеариновой), полученной комбинированным методом, который представляет собой сочетание метода ионного распыления (получение подслоя из высокомолекулярного полимера) с методом термовакуумного испарения (нанесение граничной пленки смазочного материала). Полимерная пленка обеспечивает прочную адгезионную связь с твердой поверхностью и смазочной пленкой вследствие наличия большого числа ненасыщенных связей на поверхности полимерной пленки. При нанесении смазочного материала происходит своеобразная «прививка» молекул к полимеру. Все это обеспечивает комбинированному покрытию большую долговечность и низкий коэффициент трения.

Специфические условия работы газодинамических подшипников обуславливают очень высокие требования к геометрической точности и качеству обработки поверхностей трения. Это относится также и к обработке газодинамических канавок подшипников, существенно повышающих несущую способность газового слоя. Как показали исследования, ионная технология весьма перспективна и для точной размерной обработки поверхностей газовых подшипников — нарезания газовых канавок. Она имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционными способами механической обработки газообразными и электромеханическими методами. Ионная технология позволяет нарезать канавки на деталях из любых материалов с высокой точностью и любой формы. Качество по-

верхности при ионной обработке остается высоким.

Ионную технологию целесообразно применять при производстве газодинамических и газостатических подшипников для выполнения следующих важных операций: очистки поверхностей бомбардировкой ионами (перед нанесением износостойких и тончайших покрытий); нанесения износостойких покрытий; нанесения антифрикционных смазочных материалов; точной размерной обработки (нарезания канавок). Все эти операции можно проводить на одном и том же оборудовании (при небольших конструктивных изменениях). Однако в условиях серийного или тем более массового производства необходимо создание специализированного высокопроизводительного оборудования с автоматическим регулированием параметров технологических процессов.

3. ТЕПЛОВАЯ ДИНАМИКА И МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕНИЯ И ИЗНАШИВАНИЯ ФРИКЦИОННЫХ ПАР

Фрикционные динамические устройства предназначаются для изменения скорости за счет превращения кинетической энергии движущихся масс в тепловую при помощи сил трения и последующего рассеяния выделяющегося тепла. Фрикционные устройства используют для остановки и снижения скорости (тормоза), разгона и изменения направления движения (муфты сцепления) и регулирования скорости (вариаторы) транспортных средств, приводов технологического оборудования и т. д.

Специфика работы устройств подобного типа связана с нестационарностью процесса трения и тепловыделения, значительными статистическими и динамическими нагрузками, высокими скоростями скольжения и температурами, развивающимися на фрикционном контакте и в объеме элементов пары трения. Эти факторы оказывают существенное влияние на рабочие характеристики пар трения, вызывая их значительное изменение в процессе эксплуатации.

Анализ имеющихся данных показывает, что применительно к нагруженным тормозам, опорам скольжения, муфтам, в процессе работы которых выделяется большое количество тепла, влияние конструктивных и режимных параметров на работоспособность фрикционного узла осуществляется главным образом через температурный режим.

Действительно, интенсивное тепловыделение при эксплуатации нагруженных узлов оказывает существенное влияние на механизм контактирования и рабочие характеристики пара за счет изменения структуры, механических и физических свойств материалов, активации физико-химических процессов и т. д. и часто способствует появлению отказов и преждевременному выходу из строя фрикционных устройств. В связи с этим расчеты по среднему коэффициенту трения в большинстве случаев оказываются несостоятельными. В этих условиях особую актуальность приобретают задачи, связанные с прогнозированием работоспособности пар трения для заданных эксплуатационных условий на стадии разработки конструкции тормоза, муфты и т. д. Решение этих задач возможно лишь на основе комплексного подхода к проблеме трения и изнашивания при разгоне и торможении с учетом взаимосвязи и взаимообусловленности процессов, протекающих при трении и изнашивании.

Метод тепловой динамики трения.

Метод математического моделирования процесса нестационарного трения, учитывающий преобладающее влияние температуры на фрикционно-износные характеристики, получил название метода тепловой динамики трения (ТДТ). Он рассматривает совместные системы интегрально-дифференциальных уравнений, которые описывают процесс трения с учетом взаимосвязи и взаимообусловленности его параметров, и в первую очередь тепловых.

Система уравнений ТДТ связывает изменение скорости, нагрузки, коэффициента (момента) трения и температуры в процессе торможения, разгона и буксования с силовыми и кинематическими параметрами, конструктивными размерами фрикционных элементов, механическими и теплофизи-

ческими свойствами материалов пары.

Использование систем уравнений ТДТ позволяет прогнозировать продолжительность торможения (время буксования), путь трения, изменение скорости скольжения, тормозного момента и интенсивности изнашивания элементов пары в процессе трения; объемную температуру и температуру поверхности трения фрикционных элементов и характер изменения их в процессе трения.

В общем виде система уравнений ТДТ может быть представлена следующим образом:

$$v_1 = v_1(f_t, p_t, t, C_1); \quad (9)$$

$$v_2 = v_2(f_t, p_t, t, C_2); \quad (10)$$

$$v_{от} = v_1 - v_2; \quad (11)$$

$$f_t = f(\vartheta_{max}, C_3); \quad (12)$$

$$p_t = p(t); \quad (13)$$

$$\vartheta_{max} = \vartheta(f_t, p_t, v_{от}, d_r, C_4); \quad (14)$$

$$d_r = d(\vartheta^*, E_t, C_5); \quad (15)$$

$$E_t = E(\vartheta_t^*, t, C_6); \quad (16)$$

$$I_t = I(\vartheta_{max}, f_t, C_7), \quad (17)$$

где v_1, v_2 — скорости соответственно ведущего и ведомого валов; $v_{от}$ — относительная скорость (проскальзывания); C_i ($i = 1 \div 7$) — коэффициенты, которые определяются по исходным данным, известным при проектировании.

В приведенной системе первые три уравнения задают изменение по времени ведущей (9) и ведомой (10) частей анализируемого узла трения и относительной скорости скольжения (11) в зависимости от текущих значений коэффициента трения f_t и давления p_t , моментов инерции и характеристики привода, т. е. уравнения динамики; уравнение (12) описывает изменение коэффициента трения от температуры на фрикционном контакте; уравнение (13) описывает характер изменения нормальной нагрузки в процессе трения; уравнение (14) связывает изменение максимальной температуры фрикционного контакта ϑ_{max} со скоростью скольжения, нагрузкой, коэффициентом трения, диаметром фактического пятна контакта d_r , теплофизическими

свойствами материалов и характером охлаждения; уравнение (15) представляет изменение диаметра пятна контакта d_r в функции механических свойств E , зависимость которых от средней поверхностной температуры ϑ^* выражается уравнением (16). Уравнение (17), входящее в состав системы ТДТ, описывает изменение изнашивания фрикционного элемента по времени в зависимости от температуры фрикционного контакта, коэффициента трения, скорости и нагрузки.

Система уравнений ТДТ для режима чистого торможения или разгона представляет частный случай системы при $v_2 = 0$. Системы уравнений ТДТ разработаны для случаев однократных и повторно-кратковременных режимов трения. Исходными для расчета данными служат полная работа торможения (буксования); начальная скорость торможения (буксования); номинальное давление и характер его изменения во времени, зависящий от системы создания нагрузки в узле трения; номинальная площадь трения и номинальная площадь контакта; толщины фрикционных элементов; механические и теплофизические свойства материалов в функции температуры; данные по фрикционной теплостойкости рассматриваемой пары трения (зависимость коэффициента трения и интенсивности изнашивания $f_t = f(\vartheta_{\max})$ и $I_t = I(\vartheta_{\max})$ от максимальной температуры поверхности трения), получаемые на серийных испытательных машинах трения типа УМТ-1, ИМ-58; параметры микрогеометрии поверхности трения (для более теплостойкого и твердого элемента пары) и параметры кривой опорной поверхности. Все эти данные, как правило, известны при проектировании.

Для установления возможности использования систем уравнений была доказана совместимость входящих в нее уравнений, а также единственность и действительность решений. Решение систем уравнений ТДТ осуществляется с помощью ЭВМ, для чего разработаны специальные программы на языках АЛГОЛ и ФОРТРАН. На основе системы уравнений ТДТ создана инженерная методика расчета рабочих характеристик тормозов и

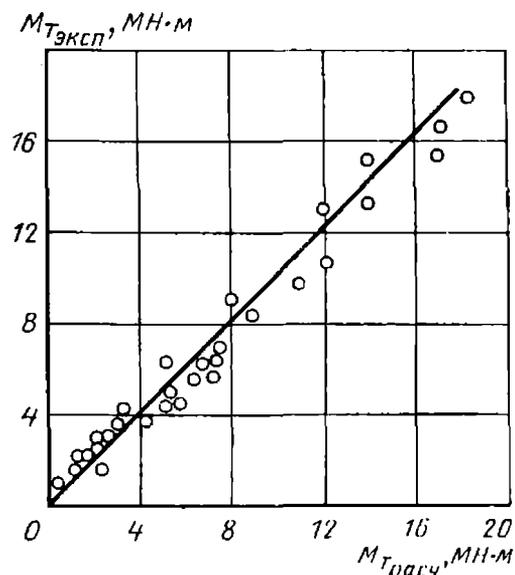


Рис. 5. Сравнение расчетных и экспериментальных данных для 36 многодисковых авиатормозов при однократном торможении

муфт для различных режимов работы. Эта методика была широко проверена на практике при определении рабочих характеристик тормозов и муфт различных конструкций (камерные, колдочные, дисковые) с различными фрикционными материалами (асбокаучуковые и асбосмоляные композиции, порошковые материалы на основе железа, изготовленные методами порошковой металлургии). Отклонение результатов расчета от эксперимента не превышало 15 %.

На рис. 5 показано сравнение расчетных данных с экспериментальными по тормозному моменту.

Температура при нестационарном режиме трения. Помимо использования в системах уравнений ТДТ для комплексной оценки работоспособности пар трения определение температуры на скользящем контакте представляет собой самостоятельную задачу, имеющую большое теоретическое и практическое значение.

Задача теоретического и экспериментального определения температуры поверхности трения тесно связана с условиями на фрикционном контакте, микро- и макрогеометрией контактирующих поверхностей. Анализ физических, химических, механических изменений на фрикционном контакте особенно важен, когда проводится определение температуры поверхности

трения, которая, как отмечалось выше, оказывает определяющее влияние на процесс нестационарного трения. Обеспечить идентичность температуры поверхности трения и физической модели контакта при теоретическом определении весьма трудно. Вследствие этого корреляция между результатами теоретического и экспериментального определения температуры часто оказывается неполной, и для оценки реальных температур в зоне контакта необходимо использование косвенных методов. В этих случаях полезным может оказаться анализ структурных изменений в поверхностных слоях контактирующих материалов, а также анализ продуктов изнашивания.

Для сталей и чугунов, работающих в тяжелых режимах трения, наблюдается существенная разница между поверхностными температурами, полученными экспериментально (поверхностные термодпары с головкой, динамические термодпары, инфракрасный метод), и результатами рентгеноструктурного и металлографического анализа поверхностных слоев. Измеренные температуры, как правило, недостаточны для фазового превращения $\alpha - \text{Fe} \rightarrow \gamma\text{Fe}$, в то время как в поверхностных слоях материалов фиксируются изменения, типичные для этого превращения. Структуру, которая наблюдается после прекращения трения, можно классифицировать как аустенито-мартенсито-карбидную, с высокой микротвердостью ($HV 1000-1400$) и большим количеством остаточного аустенита.

С учетом дискретности микроконтактирования элементов пары трения подъем температуры на фрикционном контакте представляется возможным рассматривать как двухстадийный процесс, включающий в себя общий подъем температуры поверхности, т. е. некоторую среднюю поверхностную (или подповерхностную) температуру ϑ^* и локализованные температурные вспышки на фактических пятнах контакта $\vartheta_{\text{всп}}$, которые накладываются на среднюю температуру и в сумме дают максимальную температуру поверхности трения $\vartheta_{\text{мах}}$.

С использованием гипотезы суммирования для однократного режима

трения максимальная температура поверхности трения

$$\vartheta_{\text{мах}} = \vartheta^* + \vartheta_{\text{всп}},$$

а для повторно-кратковременного режима

$$\vartheta_{\text{мах}} = \vartheta_V + \vartheta^* + \vartheta_{\text{всп}},$$

где ϑ_V — объемная температура фрикционного элемента перед n -м торможением.

Для вычисления ϑ^* , $\vartheta_{\text{всп}}$ и ϑ_V при стационарных и нестационарных режимах трения используют расчетные соотношения, при разработке которых серьезное внимание было уделено учету и правильному определению таких параметров, как коэффициент взаимного перекрытия $K_{\text{вз}}$; коэффициент распределения тепловых потоков между элементами пары трения $\alpha_{\text{т.п}}$, контурная A_c и фактическая A_f площади касания, временные факторы мощности τ_N и работы трения τ_W , коэффициент внешней теплоотдачи σ'

Существенную роль для задач трения без смазочного материала и трения в условиях граничной смазки сыграло введение понятий об эффективной глубине проникновения тепла $b_{\text{эф}}$ и эффективном теплопоглощающем объеме ψ_V :

$$b_{\text{эф}1,2 \text{ нест}} = \sqrt{3a_{1,2}t_T};$$

$$b_{\text{эф}1,2 \text{ стац}} = \sqrt{\frac{Aa_{1,2}\lambda_{1,2}}{\sigma'_{1,2}U_{1,2}}},$$

где $a_{1,2}$, $\lambda_{1,2}$, $Aa_{1,2}$, $\sigma'_{1,2}$ и $U_{1,2}$ — соответственно температуропроводность, теплопроводность, номинальная площадь трения, внешняя теплоотдача и периметр первого и второго элементов; t_T — продолжительность трения; для биметаллических конструкций и при наличии тонких пленок на поверхностях трения должны определяться приведенные значения $b_{\text{эф}1,2}$ и ψ_V с учетом продолжительности трения и контактирования.

Введение этих величин в расчетные соотношения значительно уточнило формулы для определения ϑ^* , $\vartheta_{\text{всп}}$ и ϑ_V .

В рамках гипотезы суммирования температуры на фрикционном контакте

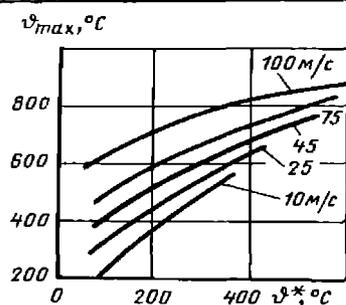


Рис. 6. Зависимости максимальной температуры ϑ_{\max} от средней ϑ^* температуры поверхности трения с учетом температурной вспышки $\vartheta_{\text{всп}}$ для различных режимов трения легированного чугуна ЧНМХ по легированной стали 30ХГСА [в соответствии с уравнением (19)]

значение температурной вспышки и соответственно максимальной температуры должно в значительной степени зависеть от средней температурной поверхности, поскольку именно эта температура определяет механические и теплофизические свойства микронеровностей, вступающих в контакт, и соответственно размер пятен контакта, фактическую площадь и распределение тепла на контакте, т. е. физику контактирования.

Исследование зависимости $\vartheta_{\text{всп}}$ от средней поверхностной температуры ϑ^* позволило впервые получить следующие фундаментальные зависимости:

$$\vartheta_{\text{всп}} = B \exp(-C\vartheta^*); \quad (18)$$

$$\vartheta_{\max} = \vartheta^* + B \exp(-C\vartheta^*), \quad (19)$$

где B и C — коэффициенты, зависящие от свойств материалов пары и микрогеометрии поверхности трения. Для определения их разработан ряд номограмм.

Получение зависимости $\vartheta_{\text{всп}} = \vartheta_{\text{всп}}(\vartheta^*)$ является новым принципиальным результатом, позволяющим существенно упростить задачу определения ϑ_{\max} и решение систем уравнений ТДТ за счет сокращения числа уравнений. На рис. 6 и 7 даны расчетно-экспериментальные значения $\vartheta_{\text{всп}}$, ϑ^* и ϑ_{\max} , а также коэффициенты B и C при различных режимах скоростного трения скольжения.

Доказана также однозначная зависимость коэффициента трения и интенсивности изнашивания от макси-

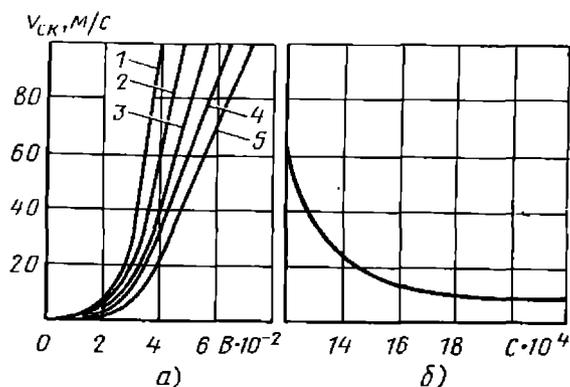


Рис. 7. Зависимости коэффициентов B (а) и C (б) в уравнениях (18) и (19) от скорости скольжения и давления (МПа) для легированного чугуна ЧНМХ при трении по легированной стали 30ХГСА:

1 — 0,25; 2 — 0,5; 3 — 0,75; 4 — 1,0; 5 — 1,25

мальной температуры поверхности трения (рис. 8), что обеспечило возможность использования характеристик фрикционной теплостойкости $f_t = f(\vartheta_{\max} C_3)$ и $I_t = I(\vartheta_{\max} f_t C_7)$ в системе уравнений ТДТ.

Суммирование температуры на фрикционном контакте возможно до тех пор, пока неровности под влиянием поверхностной температуры не начинают размягчаться. В этих условиях фактическая площадь касания может настолько возрасти, что температура контакта будет определяться только ϑ^* , и система уравнений ТДТ может быть упрощена.

Имеется еще один немаловажный, но малоизученный аспект воздействия фрикционного нагрева на элементы пары трения, который заключается

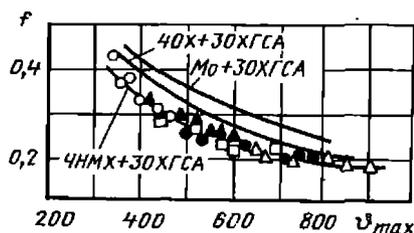


Рис. 8. Зависимость коэффициентов трения различных материалов по легированной стали 30ХГСА от ϑ_{\max} при различных давлениях (от 0,25 до 1,25 МПа) и скоростях скольжения, м/с:

0 — 10; ▲ — 25; □ — 45; ● — 75; △ — 100

в нарушении стабильности контакта (макроконтакта). Действительно, неравномерный по толщине разогрев может привести к тепловым деформациям фрикционных элементов — выпучиванию отдельных участков поверхности, в результате чего контакт поверхностей будет осуществляться по вершинам отдельных «термических» макронеровностей, даже если в исходном (приработанном) состоянии контактирующие поверхности были плоскими.

Проблема неравномерности макроконтактирования первоначально плоских приработанных фрикционных элементов, работающих в условиях трения со значительным тепловыделением, последнее время привлекает к себе большое внимание, так как ухудшение условий контактирования, концентрация нагрузки, тепловыделения в зонах контакта термически деформированных поверхностей приводят к увеличению напряжений и интенсивности изнашивания, дальнейшему росту температуры, т. е. к существенному ухудшению работоспособности фрикционных узлов. Наиболее заметно эффект термоупругой неустойчивости контакта проявляется при работе дисковых тормозов с жесткими фрикционными материалами и торцовых уплотнений (при $K_{вз} = 1$). Например, контурная площадь многодисковых тормозов в процессе эксплуатации из-за неустойчивости контакта уменьшается более чем в 2 раза.

Неустойчивость контакта начинается при некотором соотношении между несколькими параметрами: скоростью скольжения, коэффициентом теплового расширения, температуропроводностью, коэффициентом трения, модулем упругости и геометрическими размерами.

Задача расчетного определения максимальной температуры поверхности в условиях неустойчивости контакта требует уточнения модели контактирования. В рамках представлений о суммировании температуры, очевидно, максимальная температура будет представлять собой сумму средней поверхностной температуры, температурной вспышки на микроконтакте и температуры по вершинам термических неровностей, размер которых может су-

щественно превышать исходную волнистость поверхностей трения.

При высоких скоростях скольжения без смазки ($v_{ск} > 50$ м/с) даже при очень низких начальных коэффициентах трения могут постепенно создаваться такие предельные условия, когда изнашивание материалов становится чрезвычайно интенсивным и нормальная эксплуатация узла трения невозможна. Анализ исследований показывает, что существенную роль в регламентации предельного режима работы по скорости скольжения играют коэффициент взаимного перекрытия $K_{вз}$ и продолжительность процесса трения t_T . При определенных значениях $v_{ск} \geq v_{пред}$ максимальная температура поверхности трения ϑ_{max} достигает температуры плавления более легкоплавкого материала пары трения. Из соотношения $\vartheta_{max} = \vartheta^* + \vartheta_{всп}$ видно, что предельный режим может быть достигнут в трех случаях. Первый крайний случай связан с реализацией предельных значений ϑ^* , когда $\vartheta_{всп}$ пренебрежимо мала, второй — предельных значений $\vartheta_{всп}$, когда ϑ^* очень невелика. Третий случай является общим, здесь реализуются какие-то промежуточные значения ϑ^* и $\vartheta_{всп}$. Наиболее тяжелый предельный режим реализуется, когда $\vartheta_{max} = \vartheta^* = \vartheta_{пл}$.

Из этого условия вытекает требование отсутствия дискретности контактирования ($A_T = A_a$). Вся номинальная поверхность трения является источником тепла и имеет температуру, равную температуре плавления материала более легкоплавкого элемента пары трения. Такое условие не может реализоваться мгновенно, так как требуется определенное время для разогрева поверхностных слоев материала и перехода от дискретного контактирования к сплошному по номинальной поверхности трения. Это время будет различным в зависимости от $K_{вз}$ и коэффициента ψ_{Vi} , учитывающих эффективные объемы материалов пары трения, участвующие в теплопоглощении и теплопроводности. При $K_{вз} \rightarrow 0$ для определения предельных значений $\vartheta^* = \vartheta_{пл}$ имеет существенное значение, какой из элементов является более легкоплавким. В этом случае про-

исходит скольжение макротягнута (ограниченного тела) по поверхности направляющей бесконечной длины (полуограниченного тела) и наблюдается своеобразный температурный скачок. Эффективные объемы тел, участвующих в теплопоглощении и теплопроводности, проявляют себя по-разному. При числах Пекле $Pe \geq 20$ поверхность трения скользящего тела все время находится в контакте, причем оно накапливает в своем объеме и передает в окружающую среду тепло, а каждая точка поверхности трения контртела находится в контакте очень короткое время, при этом объем этого тела практически не меняет своей исходной температуры.

Если шероховатое полуограниченное тело является тугоплавким и не изменяет свои прочностные характеристики вплоть до температуры плавления скользящего по нему тела, то при увеличении ϑ^* поверхностные слои материала скользящего тела по определенному закону снижают свои прочностные характеристики. Эксперименты по замеру силы трения, линейного износа и в особенности ϑ^* контактными и бесконтактными методами, а также расчет показали, что еще задолго до достижения $\vartheta_{пл}$ несущая способность этих слоев при воздействии нормальных и касательных сил будет значительно снижена. Материал поверхностных слоев скользящего тела будет под влиянием нагрузки P и силы трения F_T выдавливаться в боковые стороны и сдвигаться к сбегающему краю скользящего тела. Таким образом, на скользящем теле не может образовываться и восстанавливаться сплошной расплавленный слой по всей номинальной поверхности трения. В результате будет происходить значительное изменение толщины скользящего тела, вызванное пластическим формоизменением его, и линейный износ тела будет в основном зависеть от этого процесса, а не от истирания и расплавления материала в фактических зонах касания.

Согласно экспериментальным данным при режимах работы, когда ϑ^* приближается к $\vartheta_{пл}$, возникает значительное рассогласование линейного и массового износа скользящего тела. Ли-

нейный размер тела из-за необратимого пластического формоизменения изменяется значительно, в то время как массовый износ его в начальной стадии весьма мал. Со временем дальнейшее пластическое формоизменение с выдавливанием материала в стороны в горизонтальной плоскости, перпендикулярно векторам скорости и силы трения, приводит к отламыванию образующихся усов со значительной потерей массы скользящего тела, которая не согласуется с потерей массы этого тела от износа, ни тем более с изменением линейного размера тела от износа. Металлографический и рентгеноструктурный анализ материала скользящего тела в области боковых усов показал, что эти объемы материала не достигали температуры плавления. Отдельные участки номинальной поверхности трения, особенно те, которые силой трения сдвинуты к сбегающему краю скользящего тела, достигали температуры плавления материала. Эксперименты при $K_{вз} \rightarrow 0$ с использованием скоростной киносъемки и улавливающего экрана, в который внедрялись частицы износа, вылетающие из-под сбегающего края тела, скользящего со скоростями более 100 м/с, также показали, что при достижении определенных критических скоростей или после определенной продолжительности трения некоторая часть вылетающих частиц износа (20—50 %) имеет вид расплавленных капель металла. Таким образом, режимы фрикционного разогрева при высокоскоростном скольжении, когда движущийся элемент сделан из пластического материала, сопровождаются изменением линейного размера, обусловленным на 80—95 % необратимым изменением формы образца и лишь на 5—20 % вследствие износа за счет истирания скользящего тела. Хрупкие материалы сильно изнашиваются и поверхностно разрушаются без заметного формоизменения.

Предельным условием, при котором не нарушается несущая способность трущегося тела и линейный износ от необратимого формоизменения имеет допустимое значение, является условие, когда пластический макроконттакт с увеличением ϑ не превышает

номинальную площадь трения скользящего тела $P/HB < A_a$. Отсюда следует, что давление на номинальной площади трения должно быть меньше текущей, зависящей от температуры твердости поверхностных слоев скользящего тела.

Это ограничение необходимо учитывать при проектировании высокоскоростных узлов трения при малых коэффициентах перекрытия, работающих как при стационарных, так и при нестационарных режимах.

Физическое моделирование процесса трения. Физическое моделирование процесса трения и изнашивания на образцах является весьма перспективным направлением, в особенности для случаев, когда не представляется возможным составить математическое описание рассматриваемой системы. Метод физического моделирования предусматривает совместное применение теории подобия и метода размерности. При этом вводится система допущений и ограничений, которые дают возможность достаточно строго получить единственное решение для масштабных коэффициентов перехода от модели к натуре вида $p' = pC_{\Gamma}^{\alpha}$.

Каждый из параметров исследуемого процесса, для которого по априорной информации составлена модель, рассматривается как множество. При этом два множества — модель и натура — конечные и равнозначные, т. е. имеют одинаковое число параметров. Множества будут подобными только при возможности их линейного упорядочения. Это означает, что между одноименными параметрами, характеризующими модель и натуру, должна существовать линейная математическая связь. Такой связью являются критерии подобия — безразмерные степенные комплексы, составленные из параметров процесса.

Физическое подобие осуществляется только при равенстве критериев модели и природы, т. е. когда отношение одноименных критериев в симплексной форме равно единице.

Все параметры процесса разделяют на три группы: основные, определяющие и вспомогательные. Определяющие параметры, например максималь-

ная температура или предельная нагрузка, оказывают наибольшее влияние на выходные характеристики процесса трения и изнашивания; вспомогательные параметры, например удельная теплоемкость, подъемная сила среды, обычно автомодельны по отношению к выходным характеристикам в большинстве задач.

Алгоритм расчета масштабных коэффициентов перехода от модели к натуре (МКП) содержит следующие узловые операции: получение обобщенных переменных (ОП) методом размерности; превращение ОП в критерии подобия и проверка их на физическую значимость; составление уравнения подобия и преобразование его в замкнутую систему линейных уравнений за счет введения дополнительных условий тождественности у модели и природы некоторых определяющих параметров; решение этой системы, т. е. получение для каждого параметра единственного значения МКП вида $p_{1м} = p_{1н} C_{\Gamma}^{\alpha}$; $p_{2м} = p_{2н} C_{\Gamma}^{\beta}$ и т. д.

В заключение проводят серию модельных экспериментов и контрольный натуральный эксперимент.

В общем виде критерии подобия представляют собой выражение вида

$$\pi_n = \frac{p_n}{p_1^{D_1/D_0} p_2^{D_2/D_0} p_3^{D_3/D_0}},$$

где $p_{1,2,3}$ — базисные параметры системы; p_n — один из параметров системы; D_0, D_1, D_2, D_3 — определители системы.

Критерии такого вида линеаризуются путем логарифмирования.

При решении триботехнических задач методом моделирования приходится учитывать несколько десятков параметров режима работы, материалов элементов пары трения, окружающей среды, микро- и макрогеометрии. Часть этих параметров одноименная, и получаемые на их основе критерии подобия также имеют одинаковый вид. Однако произвольно удалять из общего списка одноименные параметры нельзя, как нельзя сокращать одинаковые размерности двух величин разной физической природы. Следует отметить, что такие стадии процесса трения, как

приработка, эксплуатационный режим, заедание, необходимо описывать различными моделями.

Режим лабораторных испытаний исследуемого узла трения определяется путем пересчета параметров работы натурального узла с помощью расчетных масштабных коэффициентов перехода. При этом в ряде случаев достигается существенное ускорение испытаний, сокращение числа испытаний, необходимых для оценки фрикционных свойств различных пар трения, а также номенклатуры испытательных установок, что способствует унификации методов испытаний.

Для некоторых материалов особое внимание необходимо уделять влиянию окружающей среды, в частности воздуха, для чего в расчетных коэффициентах перехода должны быть учтены симплексы адсорбционного и щелевого эффекта проникновения среды в зону трения.

Лабораторные испытания с использованием масштабного фактора входят составной частью в рациональный цикл испытаний материалов пар трения (РЦИ), представляющий собой комплексную многоэтапную систему испытаний, которая позволяет определить работоспособность пары трения и влияние ее на фрикционно-износные характеристики и конструктивное оформление исследуемого фрикционного устройства.

В общем виде рациональный цикл испытаний включает следующие этапы:

установление зависимости фрикционно-износных характеристик материалов пары трения на образцах от определяющего параметра (например, от температуры или нагрузки) без учета конструкции узла трения (обычно это испытания на фрикционную теплоустойкость);

выявление влияния конструктивного оформления пары трения и режима работы на ее рабочие характеристики (модельные триботехнические испытания с учетом масштабного фактора на режимах, соответствующих эксплуатационным, обычно это испытания на теплоимпульсное трение);

проверку работоспособности на стенде в натурном узле пары трения, вы-

бранной на основании предыдущих этапов испытаний;

эксплуатационные контрольные испытания.

На основании рассмотренных выше методов физического моделирования и рационального цикла испытаний и подбора фрикционных материалов были прогнозированы сроки службы различных серийных и опытных фрикционных пар в тормозных и фрикционных устройствах разного класса и назначения, в том числе опор скольжения и токосъемных устройств железнодорожного подвижного состава и высокоскоростного наземного транспорта на магнитном подвесе с линейными электрическими двигателями, а также в различных уплотнениях быстровращающихся валов машин и агрегатов.

Применение методов прогнозирования, базирующихся на моделировании процессов трения и изнашивания, позволяет также значительно сократить время, необходимое для установления межремонтных сроков. Наибольший эффект достигается на малогабаритных моделях, имитирующих натурные узлы трения, характерный размер которых отличается от натуральных в десятки и сотни раз. В этом случае достигается 10—15-кратное уменьшение машинного времени, необходимого для получения такой же величины износа, что и в натурном узле. При этом обязательен контроль за сохранением на модели физики процесса контактирования и разрушения (тождественность вида контакта, например упругого или пластического; усталостный или абразивный вид изнашивания и т. п.). Вследствие малых габаритных размеров модели и удобства замены образцов фрикционных материалов экономия времени при подготовительно-заключительных и вспомогательных операциях во время испытаний весьма существенна, и общая продолжительность исследования сокращается в сотни раз.

Использование эффектов влияния окружающей среды на повышение износостойкости фрикционных асбодополимерных материалов. Весь парк выпускаемых и эксплуатируемых транспортных машин снабжен фрикционными устройствами разного назначения. Эти

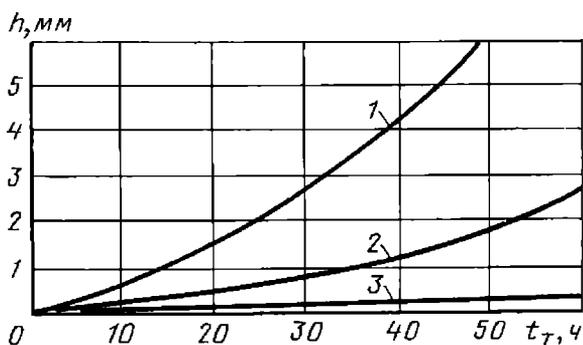


Рис. 9. Изнашивание фрикционного асбополимерного материала НСФ-1 в зависимости от продолжительности трения и газовой среды:

1 — воздух; 2 — азот; 3 — углекислый газ

устройства реализуют свои функции через различные фрикционные элементы. В отечественном автомобиле и тракторостроении, сельскохозяйственном машиностроении в качестве фрикционных элементов (накладок, колодок, дисков и т. д.) применяют фрикционные асбополимерные материалы. Эти материалы отличаются друг от друга составом связующего и наполнителя, а также типом применяемого асбеста.

Отечественная и зарубежная практика эксплуатации тормозов муфт вариаторов на транспортных и дорожных машинах, оборудованных фрикционными асбополимерными материалами, показывает, что они обладают весьма малым (по сравнению с другими агрегатами этих машин) ресурсом. Так, для отечественных тракторов при требуемом ресурсе 9 тыс. моточасов накладки тормозов и муфт полностью изнашиваются за 1,5—3 тыс. ч эксплуатации. В связи с этим асботехнические заводы вынуждены ежегодно изготавливать миллионы комплектов колодок и накладок для тормозов и сцеплений. Это обстоятельство заставляет материаловедов разрабатывать новые износостойкие фрикционные материалы. Однако, как показал анализ, в настоящее время увеличение износостойкости фрикционных асбополимерных материалов не превышает, как правило, 20—30 % при существенном удорожании материала и усложнении технологии его изготовления.

Опыт показывает, что принципиально новое связующее, позволяющее

повысить в несколько раз фрикционную теплостойкость, создается один раз в 15—20 лет (как это было, например, в конце 50-х гг. при разработке материала ретинакс). Поэтому при существующих типах серийных связующих (каучуковых и смоляных) невозможно значительно увеличить фрикционную теплостойкость и, как следствие, износостойкость асбополимерных материалов за счет технологий их изготовления.

Большой цикл экспериментальных исследований по изучению влияния окружающей газовой среды на трение и изнашивание асбополимерных материалов вследствие щелевых и адсорбционных эффектов (рис. 9) позволил изыскать новый способ увеличения износостойкости, не требующий дополнительных капиталовложений и удорожания материала. Этот способ может быть успешно применен как на вновь выпускаемых, так и на находящихся в эксплуатации машинах. Речь идет о введении в зону трения фрикционных асбополимерных материалов таких газов, как азот и углекислый газ.

Такой же эффект может быть получен при введении в зону трения отработавших газов двигателей внутреннего сгорания (ДВС), которые имеются на абсолютном большинстве автомобилей и тракторов, а также на многих экскаваторах, буровых лебедках, судах, автотриках и т. п. Суть способа состоит в том, что в зону трения фрикционного асбополимерного материала подается очень небольшая часть отработавших газов ДВС в количествах, обеспечивающих вытеснение воздуха из полости, в которой расположен фрикционный узел, и модификацию поверхностных слоев асбофрикционного материала. Как показали расчеты и экспериментальная проверка в лабораторных и полевых условиях, необходимое количество газа составляет $(3 \div 10) 10^{-6} \text{ м}^3$ при давлении $(1 \div 10) 10^2 \text{ Па}$.

4. ТРЕНИЕ И КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Развитие современной техники требует создания новых конструктивных материалов, способных работать при

высоких температурах и в различных средах. Знание закономерностей процессов трения и изнашивания новых тугоплавких и жаропрочных материалов при высоких температурах очень важно для обеспечения успешной работы подвижных и неподвижных разъемных сопряжений в машинах. Кроме того, взаимодействие различных материалов при высоких температурах определяет возможность получения композиционных материалов. Были проведены исследования трения и контактного взаимодействия в вакууме и газовых средах ряда материалов в широком диапазоне температур.

Трение металлов и тугоплавких соединений. Проведены исследования трения, адгезионного взаимодействия и эвтектического плавления материалов различных классов: металлов, металлоподобных соединений, окислов, графитных материалов, алмаза. Трение и изнашивание поверхностей при высоких температурах в значительной мере определяются термически активируемым адгезионным взаимодействием. При превышении температуры начала интенсивного термического активируемого адгезионного взаимодействия начинается резкое увеличение коэффициента трения. Адгезионное взаимодействие в экспериментах оценивалось коэффициентом адгезии $K_{ад}$, представляющим собой отношение силы, необходимой для разделения находящихся в контакте под нагрузкой при заданной температуре в течение 3 мин образцов, к значению приложенной нагрузки. Установлено, что интенсивная термически активируемая адгезия начинается для одноименных чистых металлов IV, V и VIA групп периодической системы элементов при температурах $(0,3-0,4) \vartheta_{пл}$, для разноименных при $(0,35-0,45) \vartheta_{пл}$ (более легкоплавкого элемента пары). Для тугоплавких металлоподобных соединений (карбидов, боридов) относительные температуры несколько выше. Еще более высокие температуры $(0,45-0,65) \vartheta_{пл}$ получены для одноименных и разноименных тугоплавких окислов. Адгезия одноименных образцов графитовых материалов не наблюдалась при температурах до 2000°C .

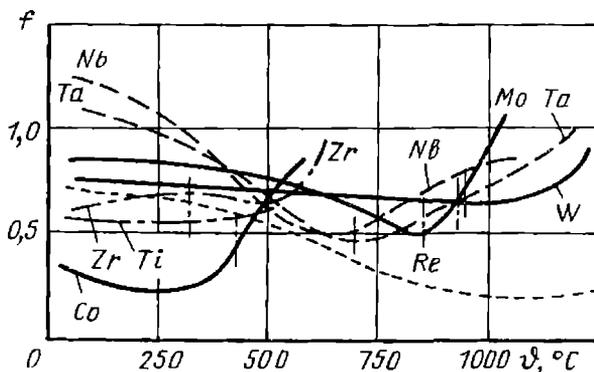


Рис. 10. Зависимость коэффициентов трения чистых металлов в вакууме при высоких температурах нагрева

Характер температурных зависимостей коэффициента трения чистых металлов определяется их положением в периодической системе элементов и кристаллическим строением (рис. 10). Наибольшее трение наблюдается у металлов с кубическими гранцентрированными (ГЦК) и кубическими объемно-центрированными (ОЦК) решетками, минимальное — у металлов с гексагональной плотноупакованной (ГПУ) решеткой, деформация которых может происходить лишь в результате скольжения по базисной плоскости. Наглядным примером влияния кристаллического строения металла на трение является кобальт, претерпевший при 400°C полиморфное превращение из ГПУ в ГЦК модификацию. Низкое для металлов трение при превышении этой температуры начинает интенсивно расти. Кроме кобальта низкое трение характерно для гексагонального рения, особенно при высоких температурах.

Для улучшения антифрикционных свойств металлов широко используется легирование. Проведены исследования по влиянию легирования кобальта рением. Такое легирование расширяет температурную область, в которой стабильна гексагональная кристаллическая структура кобальта, а сплавы с массовым содержанием рения более 25 % сохраняют ГПУ решетку вплоть до температуры начала плавления. Исследования показали, что имеется взаимосвязь между диаграммой состояния сплавов системы Co—Re и их поведением при трении в вакууме в изотермических условиях при раз-

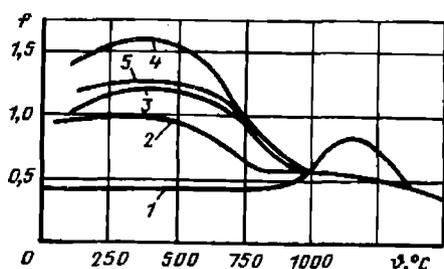


Рис. 11. Зависимость коэффициента трения корундового кермета, модифицированного добавками окиси магния, в вакууме и на воздухе при различных температурах нагрева:

1 — на воздухе; 2—5 — в вакууме с различным содержанием окиси магния

ных температурах. По-видимому, подобная связь будет существовать и для сплавов других систем. Это дает возможность управлять фрикционными характеристиками материалов путем их легирования.

Характеристики трения металлоподобных соединений (карбидов и боридов) в вакууме при высоких температурах близки к наблюдавшимся для металлов. Как и в случае металлов, превышение температуры начала термически активируемого адгезионного взаимодействия приводит к увеличению коэффициента трения либо к резкому возрастанию амплитуды фрикционных автоколебаний.

Температурные зависимости коэффициента трения твердых карбидовольфрамовых сплавов с кобальтовой связкой (ВК) определяются наличием в них карбида вольфрама и кобальта (связки) и зависят от содержания последнего. Температура начала термически активируемого адгезионного взаимодействия также зависит от содержания кобальта. Для сплавов с различным содержанием кобальта значение этой температуры находится в пределах между температурами адгезии для одноименных образцов карбида вольфрама и кобальта.

Широко применяется в качестве конструкционного материала кермет. Было исследовано трение корундового кермета, модифицированного различными добавками окиси магния (0,6—3,0) %, в вакууме и на воздухе при температурах до 1500 °С (рис. 11). В отличие от металлов и металлоподобных соединений при трении корундо-

вых керметов превышение температуры начала термически активируемого адгезионного взаимодействия (приблизительно 1200 °С) не приводит к увеличению коэффициента трения. На трение этих материалов существенное влияние оказывают шероховатость трущихся поверхностей и наличие между ними частиц износа.

При трении гладких неповрежденных поверхностей контакта между небольшими по высоте микронеровностями (не более 0,15 мкм) скольжение происходит по их сглаженным вершинам, имеющим большой радиус закругления. Деформация неровностей в этом случае имеет в основном упругий характер. Фактором, определяющим трение таких поверхностей в вакууме, является их адгезия (межмолекулярное взаимодействие). Появившиеся частицы износа изменяют характер взаимодействия поверхностей трения. Между ними скапливаются порошкообразные частицы износа, которые царапают поверхности, увеличивая повреждения и порождая новые частицы износа. В последующем скольжение поверхностей происходит с обязательным участием этой порошкообразной прослойки и в значительной мере определяется ее поведением. Происходит перемещение частиц относительно друг друга, их совместное деформирование и разрушение. Трение в этом случае определяется главным образом механическими свойствами материала, в частности твердостью. Коэффициент трения корундовых керметов в вакууме при температурах до 1000 °С в значительной мере определяется изменением твердости материалов в зависимости от температуры. Трение корундовых керметов на воздухе подобно описанному выше, оно отличается лишь более низкими значениями коэффициента трения.

Графитовые материалы на воздухе при комнатной температуре обладают высокими антифрикционными свойствами. Однако, как показали исследования, в вакууме для графитовых материалов характерны высокие коэффициенты трения и интенсивное изнашивание. При нагреве коэффициент трения снижается от 0,7—0,75 при комнатной температуре до 0,15 при тем-

пературах выше 1500 °С. Впуск воздуха при комнатной температуре после нагрева в вакууме приводит к резкому снижению коэффициента трения на целый порядок (с 0,75 до 0,08). При последующей откачке воздуха высокий коэффициент трения быстро восстанавливается. Это свидетельствует о решающей роли адсорбированных слоев газов и паров в снижении трения графитовых материалов. При высоких температурах в вакууме и инертных газах такая адсорбция невозможна, однако трение при этом не увеличивается, а уменьшается. По-видимому, это объясняется ослаблением при нагреве связей между слоями кристаллической решетки графита, наиболее плотно упакованными атомами углерода, что приводит к более благоприятной ориентации плоскостей кристаллов.

Значительный практический интерес представляет трение разноименных материалов. В вакууме и инертных средах возможны два основных вида взаимодействия поверхностей без смазочного материала:

перенос одного из материалов на сопряженную поверхность и переход вследствие этого к трению одноименных материалов, а также триботехническое взаимодействие материалов, изменяющее состав и химическую природу поверхностей трения, характер и механизм трения и изнашивания.

При трении разноименных металлов из-за высокой способности к схватыванию имеет место, как правило, первый вид взаимодействия. При трении графитовых материалов по тугоплавким металлам и их карбидам графит также намазывается на сопряженную поверхность, и температурные зависимости коэффициента трения получаются соответствующими трению одноименных образцов графитового материала.

При трении кермета по металлам происходит перенос металла на поверхность кермета. При этом, если сопряженный с керметом металл образует устойчивые окислы или соединения через «кислородные мостики», то трение будет определяться перенесенной пленкой металла. Зависимость коэффициента трения до определенной тем-

пературы (близкой к температуре начала интенсивного термически активируемого адгезионного взаимодействия) соответствует зависимости, характерной для одноименных образцов металла, а выше этой температуры — для одноименных образцов корундового кермета, что связано, по-видимому, с обратным переносом металла с поверхности окисного образца и вырывом частиц окисла. Для благородных металлов, обладающих малым сродством к кислороду и не образующих вследствие этого прочных адгезионных соединений с керметом, трение определяется процессами на границе металл—кермет. Трение серебра по корундовому кермету остается низким ($f \approx 0,3 \div 0,4$) вплоть до предельной температуры испытания (800 °С).

При трении корундового кермета по графиту в вакууме происходит перенос графита на сопряженную поверхность. Трение этого сочетания в интервале температур 600—1500 °С характеризуется очень низкими коэффициентами трения и малой величиной износа. Снижение трения по сравнению с трением одноименных материалов как корундовых, так и графитовых вызвано химическим взаимодействием находящихся в контакте материалов. Хотя при статическом контакте начало химического взаимодействия окиси алюминия с углеродом происходит при температуре 1400—1600 °С, при трении реакция начинается, по-видимому, при значительно более низких температурах. Активирующими химическое взаимодействие факторами являются температурные вспышки на поверхностях трения и механическая активация (нарушение химических связей в окисле и графите вследствие процессов деформирования и разрушения при трении).

Принцип смазывания графитовыми материалами при трении в вакууме и инертных средах, основанный на трибохимических реакциях, имеет более общий характер, и низкий коэффициент трения и небольшая величина износа могут обеспечиваться при поступлении в зону трения в результате реакций с сопряженной поверхностью или между отдельными фазами участвующих в трении материалов других

активных, снижающих трение графита веществ (газов, паров и т. д.).

Трение алмазов и эвтектическое плавление. В связи с разработкой методов получения синтетических алмазов и расширением добычи природных большой интерес представляет контактное взаимодействие алмаза с металлами при высоких температурах. Исследования этого взаимодействия необходимы для понимания процессов изнашивания алмаза при применении его в качестве инструментального и абразивного материала и в узлах трения, а также взаимодействия со связкой при изготовлении алмазного инструмента.

Одной из причин, вызывающей изнашивание алмазного инструмента, является адгезионное взаимодействие с металлами. Испытанные в контакте с алмазом металлы делятся на две группы: химически взаимодействующие с углеродом или заметно растворяющие его (Zn, Mo, Fe, Co, Ni) и проявляющие адгезию к алмазу при температурах порядка $(0,4 \div 0,5) \vartheta_{пл}$, а также не взаимодействующие с углеродом (Cu, Ag) и проявляющие адгезию к нему при температурах $(0,7 \div 0,8) \vartheta_{пл}$. Этим в значительной мере объясняются трудности, возникающие при обработке алмазным инструментом металлов первой группы и сплавов, полученных на их основе.

При высоких температурах возможно повреждение алмаза в результате контактного эвтектического плавления. Проведенными экспериментами установлено, что при контактировании с металлами, имеющими с углеродом диаграммы состояния эвтектического типа, алмаз и графит начинают плавиться совместно с металлами при температуре плавления эвтектики с образованием сплава эвтектического состава. Температура начала плавления не зависит от типа кристаллической решетки углерода и для алмаза и графита практически одинакова. Это позволяет при исследовании контактного эвтектического плавления алмаза в модельных опытах заменять его графитом.

Плавление алмаза с чистыми, наиболее широко применяемыми в технике металлами (Fe, Ni, Co) начинается практически при температурах плавления эвтектик на соответствующих

диаграммах состояния (1150°C для Fe, 1318°C для Ni и 1309°C для Co).

Установленный факт контактного эвтектического плавления алмаза и графита при температурах намного ниже температуры плавления находящегося с ними в контакте металла (не говоря уже о температуре плавления соответствующей кристаллической модификации углерода) позволил обосновать существование нового вида изнашивания, названного «эвтектическим изнашиванием». Он заключается в том, что при достижении на участках фактического контакта разноименных материалов, составляющих эвтектическую пару, температуры плавления соответствующей эвтектики начинается совместное плавление участвующих в трении материалов. Образующаяся жидкая фаза выдавливается действующей нагрузкой, в результате чего возобновляется непосредственный контакт твердых поверхностей, поддерживается непрерывный процесс контактного эвтектического плавления и происходит удаление материала трущихся поверхностей, т. е. их изнашивание. Необходимые для эвтектического изнашивания температуры могут достигаться объемным нагревом или же совместным действием объемного нагрева и температурных вспышек на участках фактического контакта.

Эвтектическое изнашивание встречается достаточно широко, и неуклонное повышение температур и рабочих скоростей должно расширить сферу его распространения. Его проявления можно ожидать при скоростном резании и шлифовании (в частности, алмазным инструментом); в тормозных устройствах, предназначенных для поглощения большого количества энергии; при процессах горячей обработки металлов давлением; при резании и обдирке горячих заготовок металлическими дисками и т. д. Оценка возможности проявления эвтектического изнашивания должна проводиться с учетом того, что оно может происходить не только между исходными материалами, но и с (или между) материалами, образующимися в результате взаимодействия с внешней средой (например, окислами) или термической деструкции (например, углеродом при

трении фрикционных материалов на органическом связующем).

Эвтектическое изнашивание моделировалось при трении с малой скоростью графитового материала по Армко-железу в вакууме. Повышение объемной температуры до температуры контактного эвтектического плавления (приблизительно 1150°C) приводило к резкому падению коэффициента трения до характерных для граничной или даже жидкостной смазок (менее 0,05). Выдавливание образующейся жидкой фазы из зоны трения вызывало изменение геометрии участвующих в трении поверхностей, т. е. к их изнашиванию.

Резкое снижение трения при контактом эвтектическом плавлении может быть использовано для кратковременного уменьшения потерь на трение. Задача сводится к выбору таких материалов или покрытий поверхностей трения (или их составляющих), которые бы обеспечивали контактное эвтектическое плавление при заданных режимах трения.

Новые методы упрочнения. Лазерная обработка. Современные тенденции развития новых методов упрочнения поверхностей основываются на стремлении повысить скорости нагрева, охлаждения и деформации. Использование оптических квантовых генераторов (лазеров) открыли возможность нагрева поверхностей материалов со скоростями, недопустимыми в традиционных технологических процессах обработки (объемная закалка, закалка ТВЧ и др.) В этих условиях тепловой механизм разрушения материалов при взаимодействии с лучом лазера является основным.

Быстрое развитие технологии лазерной обработки поверхностей обусловлено следующими ее преимуществами перед другими методами;

возможностью локализации нагрева, обработки сложных профилей, труднодоступных мест и отверстий и др.;

исключением коробления от нагрева в сравнении с методами термической и химико-термической обработки, связанными с объемным нагревом;

возможностью подвода тепла практически с любой скоростью вплоть до получения метастабильного термоди-

намически неравновесного состояния (могут быть зафиксированы металлические стекла);

получением при лазерном легировании поверхностей модифицированного слоя большой толщины;

легкостью управления лучом; при этом нужен вакуум, большая производительность (охватывание поверхности за секунду порядка $0,0001 \text{ м}^2/\text{с}$).

Лазерная закалка перспективна как финишная упрочняющая операция; наиболее интересной областью ее применения является термическая обработка поверхностей. Легкость управления лучом и его когерентность позволяют получить столь уникальные результаты, добиться которых другими методами нельзя.

Большие перспективы открываются в связи с созданием мощных технологических газовых лазеров непрерывного действия, так как в сравнении с импульсными лазерами значительно увеличивается производительность оборудования. Скорость обработки поверхности лазерами непрерывного действия достигает $0,083 \text{ м/с}$, что во многих случаях экономически оправдывает их установку в технологическую цепочку при серийном и массовом производстве.

В настоящее время наибольший опыт накоплен в направлении лазерной закалки. Общая тенденция такова, что значительный эффект проявляется при обработке малолегированных черных металлов, а именно углеродистых сталей, чугунов. Чистые металлы и стали, не испытывающие при нагреве фазовых превращений, упрочняются. В процессе лазерной закалки этих материалов образуются белые слои, имеющие тонкую кристаллическую структуру. В зоне лазерного оплавления отсутствуют включения графита, который растворяется в жидком металле. Микрорентгеноспектральный анализ показал заметное увеличение концентрации углерода (до 10 %). Микротвердость в зоне оплавления чугунов достигает $H_{50} = 10 \text{ ГПа}$, что в 3—5 раз превышает твердость исходного материала. В слое толщиной 1 мкм содержится примерно до 20 % аустенита и мартенсита и до 60 % цементита, а в слое толщиной 0,1 мкм наблюдаются,

кроме того, различные окислы железа — до 40 %.

Лучшие эксплуатационные (по изнашиванию) показатели поверхности достигаются при оптимальной плотности подводимой энергии лазерного излучения, превышение которой приводит к образованию слоя, ослабленного микротрещинами. Протяженность трещин и их глубина возрастают с увеличением энергии излучения. На ковком чугуна при импульсной обработке оптимальные характеристики достигаются в режиме свободной генерации при плотности энергии 2,7 Дж/см².

В процессе трения на упрочненных лазером поверхностях образуются микротрещины, характерные для усталостного разрушения. Формирование частиц износа происходит в результате многократных термомеханических воздействий на материал. При трении неупрочненных металлов на поверхностях трения имеются ярко выраженные борозды, характерные для абразивного изнашивания. В этом случае отделение частиц износа происходит в результате однократного процесса взаимодействия поверхностей (микрорезания) или малоциклового усталости.

На основе анализа выявленного механизма разрушения упрочненных поверхностей при трении оптимизация режимов лазерной обработки проводится по параметрам, характеризующим число циклов нагружения до отделения деформированного объема материала в зонах фактического контакта поверхностей (фрикционная усталость). Разработана методика определения этих параметров по результатам лабораторных испытаний на изнашивание и алгоритмы машинной обработки данных.

Локальный термический нагрев лазерным пучком приводит во многих случаях к образованию значительных растягивающих остаточных напряжений, достигающих, например, на стали 35 примерно 10 ГПа, которые оказывают влияние на сопротивление усталости деталей. Проведенные малоцикловые усталостные испытания упрочненных лазером образцов из стали 20 в диапазоне изменения пластической деформации за цикл в пределах 0,7—

1,6 % показали значительное снижение циклической прочности в сравнении с неупрочненными образцами. В области многоцелевой усталости предварительные эксперименты показали снижение пределов выносливости на 8—27 % для сталей 35 и 45 после 10⁷ циклов изгибного нагружения.

Следовательно, при применении лазерной обработки для упрочнения деталей, работающих при циклическом напряжении, необходимо учитывать возможное снижение сопротивления усталости деталей. Широкие перспективы в технологии упрочнения поверхностей открывает лазерное легирование и наплавление порошков твердых материалов. Одним из перспективных способов предварительного нанесения порошков является плазменное напыление. Регулируя подвод энергии лазерного пучка, можно получить различные структуры применительно к условиям эксплуатации узла трения.

В задачах борьбы с абразивным изнашиванием, когда требуется получение наибольшей твердости поверхностей, необходимо строго регламентировать подвод энергии, обеспечивающий оплавление поверхности без оплавления подложки. Материал основного металла в зоне термического воздействия закаливается. Другой тип структуры образуется при расплавлении поверхностного слоя основного металла и внедрения в него твердых частиц материала покрытия. С увеличением подводимой энергии расплавляются материалы покрытия и основы, происходит растворение материалов, т. е. собственно легирование поверхностей. В этом случае зона лазерного влияния наибольшая, соответственно уменьшаются градиенты температур и твердость. Такие структуры наиболее подходят для поверхностей трения, защищенных от абразива. Этим путем можно получить модифицированные слои, обладающие высокой сопротивляемостью к разрушениям от повторных деформаций, хорошей ударной вязкостью, пластичностью.

В целом проведенные исследования позволяют разрабатывать рекомендации по повышению износостойкости различных деталей, в частности, для тонкослойных подшипников жидкост-

ного трения, в которых искусственно формируется гидродинамический режим смазки. Для этих подшипников одним из важнейших является требование высокой износостойкости.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие эффективность лазерной обработки для повышения ресурса работы различных деталей.

Видную роль в деле повышения долговечности сельскохозяйственной техники могут обеспечить новые технологические процессы, в том числе лазерная обработка.

Бичи молотильного аппарата зерноуборочных комбайнов изготавливают из прокатной стали 50Г, имеют твердость *HRC* 20 и термическому упрочнению не подвергаются. Термическая обработка лазером увеличивает твердость поверхности до *HRC* 70 на оптимальных режимах, что позволяет повысить ресурс работы бичей в 2—3 раза.

Ступицы среднего диска вариатора хода изготавливают из стали 20 с последующей цементацией поверхности. По данным проведенных стендовых полигонных и полевых испытаний, применение лазерной обработки позволяет перейти на более дешевый ковкий чугун КЧ 45-7 и одновременно увеличить износостойкость ступиц в 3—4 раза.

5. СМАЗЫВАНИЕ ВОДОЙ

При повышении скорости скольжения в подшипниках интенсивно растут механические потери от трения и возникают серьезные затруднения для сохранения допустимого температурного уровня работы сопряженных пар трения.

Научные основы условий, обеспечивающих надежную и длительную работу пары трения подшипника, базируются на теории гидродинамической смазки. Основным уравнением, отражающим процессы, приводящие к развитию несущей способности слоя смазочного материала в условиях гидродинамики, является уравнение Рейнольдса:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6v \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (20)$$

где x и z — координаты поверхности; h — толщина слоя смазочного материала; p — давление в несущем слое смазочного материала; η — коэффициент динамической вязкости; v — скорость скольжения.

В соответствии с теорией гидродинамической смазки для обеспечения надежной работы пары трения следует выполнить два требования: 1) обеспечить наличие слоя смазочного материала, разделяющего сопряженные рабочие поверхности, имеющего достаточную толщину, превышающую суммарную высоту микронеровностей вала и вкладыша даже при самых тяжелых режимах эксплуатации; 2) не превышать температуру рабочей поверхности сверх заданного значения.

Процессы, возникающие в несущем слое смазочного материала опоры, весьма сложны. Они зависят от большого числа взаимодействующих факторов: конструктивных, технологических, монтажных и эксплуатационных (в последнем факторе необходимо учитывать неравномерность температурного поля с изменением скорости скольжения и нагрузки, а также возможность значительного загрязнения смазочного материала).

Точность и надежность расчета несущей способности смазочного материала в условиях гидродинамики зависят от учета комплекса указанных выше факторов, находящихся в сложной взаимосвязи. Теория гидродинамической смазки позволяет найти параметры, характеризующие развитие в подшипнике рабочего процесса, учитывающие несколько влияющих факторов, что очень важно для анализа этой многофункциональной зависимости.

Одним из таких параметров является коэффициент нагруженности подшипника

$$\varphi = \frac{P_a}{\omega \eta_{cp}} \left(\frac{\Delta}{d} \right)^2,$$

где P_a — средняя удельная нагрузка; ω — угловая скорость; η_{cp} — коэффициент динамической вязкости, взятый по средней температуре слоя; Δ — динамический зазор подшипника; d — диаметр подшипника.

С коэффициентом нагруженности необходимо связать эксцентриситет рас-

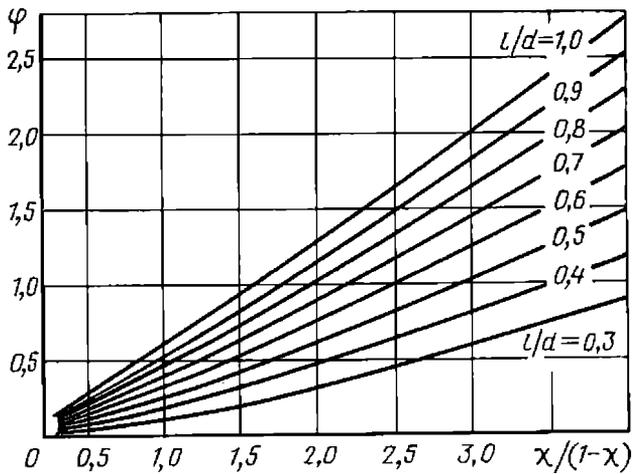


Рис. 12. Зависимость коэффициента нагруженности подшипника φ от функции $\chi(1 - \chi)$, характеризующей эксцентриситет расположения центра вращающегося элемента пары при различных соотношениях l/d (l — длина подшипника, d — диаметр)

положения центра вращающегося элемента пары в зазоре χ в виде функции $\chi/(1 - \chi)$ и дать графики (рис. 12), удобные для практического применения.

Решение уравнения Рейнольдса (20) выполнено применительно к неизотермическому рабочему процессу в подшипнике с нахождением расчетных коэффициентов, а также получены оптимальные соотношения конструктивных и эксплуатационных элементов и графики, полезные для конструктора.

При высокой скорости скольжения в подшипнике особенно важным является обеспечение интенсивного отведения тепла при трении и возможно малая сила трения как в нормальных, так и в тяжелых режимах работы. Отмеченные обстоятельства показали преимущества применения воды в качестве смазочного материала подшипников высокоскоростных валов, так как теплоемкость воды в 2,5 раза больше теплоемкости минерального масла. Очень высока скрытая теплота парообразования, что существенно облегчает задачу отведения выделяемого при трении тепла от подшипника.

Вязкость воды приблизительно в 50 раз меньше вязкости минерального масла, что в условиях гидродинамики значительно снижает трение. Однако малая вязкость воды затрудняет создание достаточной для всех условий экс-

плуатации толщины слоя смазочного материала, разделяющего рабочие поверхности, и требует разработки специальной конструкции подшипника, а также тщательности изготовления подшипников и применения антифрикционных пар трения.

Применение воды в качестве смазочного материала требует обеспечения устойчивости материалов к коррозии. При конструировании подшипников, смазываемых водой, следует учитывать вредное действие загрязнений, которые могут попасть в смазочный материал и ухудшить гидродинамический эффект трения.

Основная задача конструктора — обеспечение немедленной после пуска машин реализации гидродинамического трения в подшипниках, которое в дальнейшем должно существовать при всех возможных перегрузках и ужесточениях режима эксплуатации. Нельзя допускать наличия на рабочих поверхностях участков перегрева — горячих зон, которые показывают несовершенство гидродинамического процесса.

При соблюдении этих требований в подшипниках питательных конденсатных насосов, устанавливаемых на теплоэлектроцентралях, обеспечивается длительный срок службы подшипников: более 50 000 ч при смазывании водой. Такой срок службы может быть обеспечен при определенных значениях интенсивности линейного изнашивания неподвижной втулки, размещенной в картере ($I_h = 1,24 \times 10^{-13}$), и втулки (рубашки), посаженной на вращающийся вал ($I_h = 2,7 \cdot 10^{-13}$). Подобный высокий срок службы подшипников достигнут при соблюдении требований теории гидродинамической смазки и в других отраслях промышленности. Аналитические и экспериментальные исследования показали возможность: длительной работы подшипников при высоких удельных нагрузках при смазывании водой (пресной и морской) и минеральными маслами; обеспечения кратковременного температурного барьера ($\sim 340^\circ\text{C}$), для длительной работы рекомендуется предельная температура 260°C ; исключения схватывания пары трения со сталью даже при температуре около 400°C ; получения коэффициента

2. Допустимые удельные нагрузки (МПа) и скорости скольжения (м/с) для подшипников из материала С-1-У

Смазочный материал	Подшипник	
	радиальный	упорный
Вода	6/70	8/70
Минеральное масло	8/60	9/60

Примечание. В числителе приведены значения удельных нагрузок, в знаменателе — скоростей скольжения.

трения при трогании с места под высокой нагрузкой (начало движения) 0,05—0,06, что в 2,5 раза меньше, чем у баббита.

Рекомендации, основанные на комплексе исследований, подтвержденных проверкой в натуральных условиях, внедряются в промышленность в целях повышения качества работы, увеличения срока службы, экономии материалов и компактности изделий. Для кратковременной работы значения удельных нагрузок, приведенные в табл. 2, могут быть увеличены в 2 раза.

6. ПРОБЛЕМЫ ГРАНИЧНОЙ СМАЗКИ

Температурный критерий разрушения смазочных слоев. Предельная работоспособность смазочного материала определяется критической температурой, для оценки которой разработан температурный метод. На критическую температуру оказывают существенное влияние химический состав контактирующих материалов, скорость скольжения, а также контактные нагрузки. Для учета этих факторов и дальнейшего развития температурного метода оценки смазочных свойств масел были разработаны и применены различные схемы трения (рис. 13), которые позволяют изучать природу смазочных материалов и материалов поверхностей трения, а также исследовать трение не

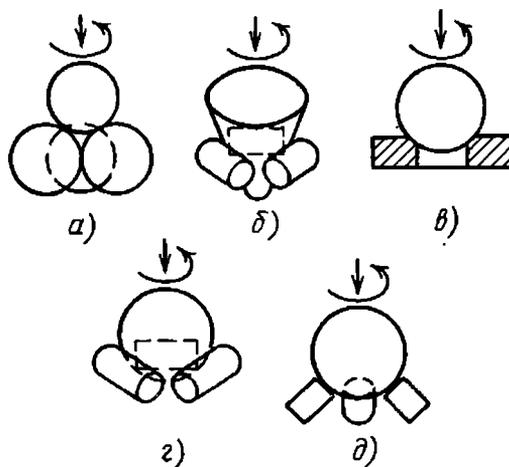


Рис. 13. Схемы трения, применяемые при испытаниях масел температурным методом

только при скольжении, но и при качении с проскальзыванием.

Четырехшариковая и четырехроликовая схемы (см. рис. 13, а, б) применяются для исследования трения одноименных материалов — обычно термически обработанных сталей. Схемы сфера—кольцо (в), сфера — три ролика (з), сфера — три плоскости (д) предназначены для исследования трения эталонного материала (шарика из стандартной подшипниковой стали) по исследуемым материалам (для схемы сфера—кольцо — по цветным металлам и пластмассам, для остальных схем — по сталям, чугунам и в некоторых случаях — по цветным металлам).

Используя смазочные материалы с высокими поверхностно-активными свойствами (в частности, с высокой теплотой адсорбции), можно повысить критическую температуру. Однако обычно она не превышает 150—200 °С, а во многих узлах трения генерируются более высокие температуры. В таких случаях в смазочный материал вводят так называемые химически активные присадки — соединения, включающие активные компоненты: Cl, P, S. При высоких температурах эти соединения разлагаются, активные элементы вступают в реакцию с металлом поверхностей трения и образуют тонкие модифицированные слои, обладающие пониженным сопротивлением сдвигу. Температура, при которой это происходит, называется температурой химической модификации $\vartheta_{\text{ХМ}}$, формальным при-

знаком ее достижения является резкое уменьшение коэффициента трения и замена адгезионного изнашивания более умеренным коррозионно-механическим.

Многочисленные исследования показывают, что критическая температура граничных смазочных слоев при одних и тех же материалах трущихся образцов определяется природой смазочного материала. Результаты такого рода испытаний смазочных материалов являются отправными данными для выбора оптимальной смазки, исходя из предельно допустимых в эксплуатации температур.

Температурный критерий получает все большее применение для определения предельных условий, при которых ожидается заедание тех или иных узлов машин. В связи с этим представляет большой практический интерес сопоставление результатов испытаний на стендах, имитирующих работу узлов трения машин, в которых заедание оценивается по предельно допустимой нагрузке или расчетной критической температуре, с результатами проводимых параллельно лабораторных испытаний по экспериментальному определению критической температуры.

Результаты проведенных испытаний указывают на хорошую корреляцию между нагрузкой заедания зубчатых колес и критическими температурами для соответствующих масел.

7. ТЕОРИЯ КОНТАКТНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СМАЗКИ

Несущая способность масляной пленки. Долговечность и надежность машин и механизмов существенным образом зависят от питтинго- и износостойкости, а также стойкости против задиоров смазанных поверхностей трения таких деталей машин, как, например, зубчатые и фрикционные передачи, зубчатые муфты, подшипники качения и скольжения и т. д. Поверхности ряда деталей машин работают в условиях качения со скольжением и подвержены воздействию высоких контактных давлений. Установление их несущей способности представляется сложной про-

блемой, так как для этого необходимо решать систему нелинейных интегрально-дифференциальных уравнений теории контактно-гидродинамической смазки, а также теплоотдачи в смазочном материале и в контактирующих телах.

Контактные деформации даже в случае плоской контактной задачи выражаются сложной зависимостью. Для определения их в ходе решения контактно-гидродинамических задач был разработан метод расчета контактных деформаций в плоской контактной задаче при произвольном законе распределения нагрузки поперек полосы контакта. В нем площадь нагрузки представляется в виде полосок, каждая из которых ограничена параболой. Разность контактных деформаций в каких-либо двух точках от нагрузки, распределенной по заданному закону, находится суммированием разности контактных деформаций на отдельных участках нагрузки. Для облегчения расчетов, необходимых при решении контактно-гидродинамических задач, составлены таблицы и построены графики, по которым могут быть определены значения параметров, входящих в окончательные расчетные зависимости для выбора ширины участков нагрузки, позволяющих наилучшим образом аппроксимировать кривые распределения нагрузки.

Исходной является следующая формула для определения контактной деформации цилиндра:

$$\epsilon_x = v \int f(x_a) [v' - \ln(x - x_a)^2] dx_a - \frac{q}{\pi R E} (1 - \mu - 2\mu^2) + C, \quad (21)$$

где $v = (1 - \mu^2)/\pi E$; $v' = (1 + \mu)/(1 - \mu) + 2 \ln y$; x — координата, для которой определяется деформация ϵ_x ; x_a — текущая координата; q — нагрузка, приходящаяся на единицу длины полосы контакта; R — радиус цилиндра, для которого определяется контактная деформация; E — модуль упругости материала цилиндра первого рода; μ — коэффициент Пуассона; C — постоянная интегрирования; y — расстояние вдоль оси орди-

нат, на котором определяется деформация.

На основании формулы (21) может быть получена следующая зависимость для расчета приращения контактной деформации:

$$\Delta \epsilon = \frac{4vb}{\lg e} \sum (\Delta p R + \Delta p' R'),$$

где Δp и $\Delta p'$ — приращения давления, обусловленные отклонением линии давления от прямой на данном участке (линия давления на участке аппроксимируется параболой); b — ширина участка нагрузки; R и R' — величины, которые берутся из таблиц.

При контакте стали по стали при $E = 215$ ГПа и $\mu = 0,3$ получим $\lg e/4v = 805\,000$.

Согласно теории контактно-гидродинамической смазки давление в зоне контакта цилиндрических поверхностей распределяется по отличным от эллиптического законам (рис. 14), для которых характерным является наличие пика давления на выходе поверхностей из зоны контакта. Именно в связи с этим контактное напряженное состояние претерпевает существенное изменение. Особенно сильно влияет пик давления на контактные напряжения при качении со скольжением и значительных силах трения.

Влияние на контактное напряженное состояние пика давления, а также различных параметров, определяющих толщину масляной пленки в контакте, устанавливается с помощью метода, который позволяет определить контактные напряжения при любом законе распределения контактных давлений

поперек полосы контакта. С увеличением нагрузки толщина масляной пленки будет уменьшаться до тех пор, пока на дискретных пятнах контакта не будут создаваться свои масляные пленки. Толщина масляной пленки на дискретных пятнах контакта имеет предельное минимальное значение, зависящее от шероховатости поверхностей, условий контакта, температуры и вида смазочного материала.

Таким образом, несущая способность масляной пленки в зоне контакта будет складываться из нагрузки, выдерживаемой масляной пленкой, образующейся на герцевском контакте, и нагрузки, выдерживаемой дискретными пятнами контакта. Вопрос о несущей способности масляной пленки, образующейся на дискретных пятнах контакта, следует рассматривать с позиций теории микроконтактно-гидродинамической смазки.

При вхождении в зону контакта дискретного пятна на нем образуется масляная пленка, толщина и несущая способность которой зависит от скорости dh/dt приближения пятна к противоположной поверхности, формы и размера l пятна.

Когда дискретное пятно имеет форму длинной полосы, для нахождения толщины h_g масляной пленки на пятне применимо гидродинамическое уравнение:

$$dp/dx = -\eta_{\text{дин}} a^2 u / dy^2, \tag{22}$$

где p — давление масла в точке x ; $\eta_{\text{дин}}$ — динамическая вязкость масла; u — скорость потока масла в точке с координатой y .

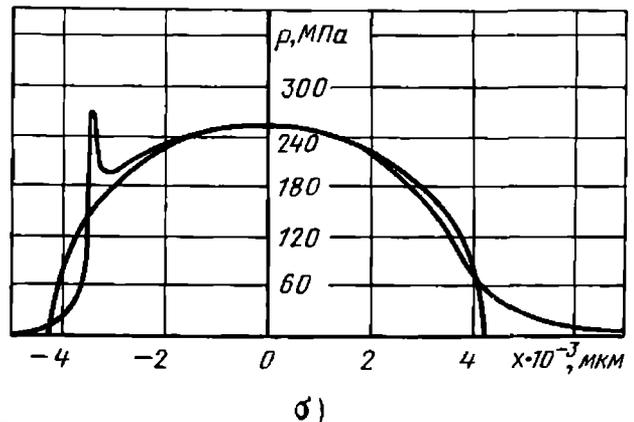
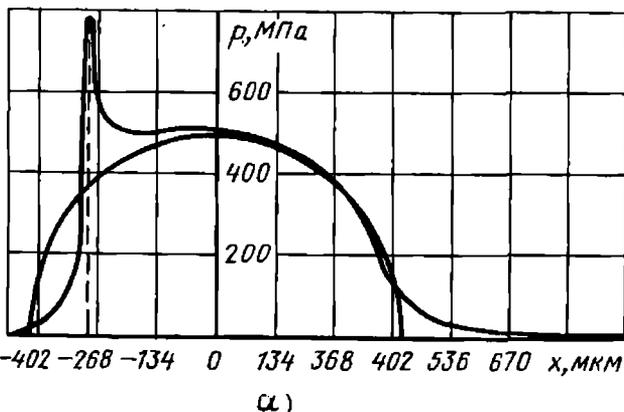


Рис. 14. Эпюра распределения давления:

а — $\sigma_r = 490,3$ МПа, $h_0 = 1$ мкм, $\rho_0 = 5$ см; б — $\sigma_r = 245,2$ МПа, $h_0 = 3$ мкм, $\rho_0 = 100$ см

Учитывая, что при $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$ скорости $u = 0$, и считая, что давление среды вокруг пятна равно $p_{ср}$ и толщина слоя $h_{ср}$, а пьезокоэффициент масла a не зависит от $p_{ср}$, интегрированием (22) можно получить следующую зависимость для расчета толщины h_g :

$$h_g = \frac{1}{20} \sqrt[3]{\frac{A_{вх} (h_3 l)^2}{a/250}} \times \dots \times e^{p_{ср}/a} \frac{dh}{dx} (1 \pm \eta_3), \quad (23)$$

где $\eta_3 = v_{ср}/v_{\Sigma}$; $A_{вх} = A = 6\eta_{дин 0} \times v_{\Sigma}/h_3^2$ во входной части зоны контакта; здесь h_3 — эффективная толщина масляной пленки; v_{Σ} — сумма скоростей качения.

Для дискретного пятна в виде круга решают осесимметричную гидродинамическую задачу, в результате зависимость для h_g имеет вид

$$h_g = \frac{1}{25,2} \sqrt[3]{\frac{A_{вх} (h_3 l)^2}{p_{ср}/100}} \times \dots \times e^{p_{ср}/a} \frac{dh}{dx} (1 \pm \eta_3). \quad (24)$$

Таким образом, для решения микроконтактно-гидродинамической задачи необходимо знать p_c и dh/dt , которые находят в результате решения контактно-гидродинамической задачи. Зависимости (22)—(24) справедливы в тех случаях, когда dh/dt определяет изменение зазора между поверхностями.

На основании выполненных исследований теоретически установлена несущая способность поверхностей. Основным критерием, определяющим значение предельной нагрузки, соответствующей безыносной работе зубьев зубчатых колес, является толщина масляной пленки в контакте зубьев. Превышение безыносной нагрузки приводит к разрушению масляной пленки в контакте и возникновению износа, а при достижении критической скорости изнашивания наступает заедание рабочих поверхностей зубьев. Расчет на износостойкость проводится по запасу $n_{\sigma_{и}}$ против нагрузки начала

изнашивания $q_{\sigma_{и}}$, определяемой по следующей зависимости:

$$q_{\sigma_{и}} = \varphi(u) \rho_p^{0,1} \left(\frac{v}{\eta_3 \eta} \right)^{0,25},$$

где ρ_p — приведенный радиус кривизны профилей зубьев в расчетной точке зацепления; v — кинематическая вязкость масла при нагреве зубьев на входе в зацепление; η — удельное скольжение в расчетной точке зацепления; $\eta_3 = |\eta|/2 + |\eta|$; $\varphi(u)$ — функция вязкостно-скоростного фактора u , который определяется из формулы:

$$u = v_{ср} \left(\frac{v}{100} \right)^{0,5} \left(\frac{\rho_p}{5} \right)^{0,25} \times (2 + |\eta|)^{1,6}.$$

Расчет зубчатых колес на износостойкость проводят для точек, соответствующих наибольшей скорости скольжения $v_{ср}$. Однако при значении u , большем, чем значение, соответствующее минимальному значению $\varphi(u)$, расчет следует проводить и при меньших $v_{ср}$, находя наименьшее значение $q_{\sigma_{и}}$. Запас $n_{\sigma_{и}}$ против нагрузки начала изнашивания определяется как отношение $q_{\sigma_{и}}$ к расчетной удельной нагрузке q_p .

При превышении $q_{\sigma_{и}}$ разрушается масляная пленка в контакте зубьев и возникает износ, переходящий в конечном счете к заеданию рабочих поверхностей зубьев. Минимально допустимые значения толщины масляной пленки и предельных нагрузок определяются степенью приработанности контактирующих поверхностей.

В настоящее время не получено достаточное количество расчетных данных для вывода обобщенной зависимости по определению толщины масляной пленки с учетом скольжения и шероховатости контактных поверхностей. Поэтому прямой метод расчета критической толщины масляной пленки, соответствующей заеданию, в настоящее время не может быть разработан.

Несущая способность смазочного слоя в случае реальных поверхностей не может быть установлена с позиций контактно-гидродинамической теории

смазки, не учитывающей температурных эффектов, вызываемых скольжением и шероховатостью контактирующих поверхностей. Таким образом, определение долговечности и надежности смазанных деталей машин требует проведения научно-исследовательских работ по совершенствованию методов решения контактно-гидродинамических задач, разработке теории термоконтактно-гидродинамической смазки в условиях качения со скольжением шероховатых поверхностей, а также развитию теории микроконтактно-гидродинамической смазки.

Решение этих проблем потребует проведения исследований по установлению приведенных теплофизических характеристик смазочных материалов и контактирующих тел, определяющих толщину масляной пленки при качении со скольжением, предельных напряжений сдвига в масляной пленке, влияния на несущую способность размеров и приработки контактирующих поверхностей, размера и формы дискретных пятен, температуры масла на них, числа пятен на контакте и т. д.

Установлено, что основным критерием несущей способности масляного слоя в зоне контакта при качении со значительными скоростями скольжения является толщина этого слоя, минимально допустимое значение которой определяется совокупностью наиболее влияющих параметров шероховатости поверхностей, достигнутой в процессе их приработки (как предварительной, так и при эксплуатации). Контактная прочность поверхностей значительно зависит от отношения суммы высот неровностей к толщине масляной пленки. При невысоком качестве поверхностей решающим фактором является напряженное состояние в зонах дискретного контакта. При высоком качестве поверхностей решающее значение приобретает напряженное состояние под пиком давления, которое необходимо определять с учетом сил трения в контакте, радиусов кривизны контактирующих поверхностей и их скоростей качения и скольжения. В обоих случаях необходимо учитывать влияние температурного фактора.

8. МАГНИТОПОРОШКОВЫЙ МЕТОД СМАЗЫВАНИЯ

Вакуум, различные инертные и агрессивные среды в сочетании с широким диапазоном температур (минус 100—1000°С), давлений (от 1,33 мкПа до 100 МПа) и облучения — вот лишь краткий перечень ситуаций, для обозначения которых часто используется термин «экстремальные условия». Внешняя среда является одним из основных факторов, влияющих на работоспособность механизма: она определяет направление и ход физико-химических процессов в контакте подвижных сочленений, обуславливает качественное состояние и свойства поверхностных слоев.

Сравнительные испытания на трение различных материалов на воздухе и в вакууме (40 мПа) показали, что в вакууме по сравнению с воздушной средой коэффициенты трения скольжения в 1,5—2 раза выше и по времени стабилизируются дольше. Исследования работоспособности редукторов, работающих без смазочного материала при разрежении 1,33 мкПа, установили, что без специальных средств защиты они выходят из строя через 30—90 мин в результате большого износа зубьев зубчатых колес вследствие образования лавинных задиров и «холодной» сварки поверхностей трения.

Все эти факты свидетельствуют о том, что в вакууме по сравнению с воздушной средой тела теряют из-за испарения и разрушения покрывающие их окисные и адсорбированные пленки, в результате чего в контакте сопряженных поверхностей образуются прочные адгезионные связи. Также значительно ухудшаются условия теплоотдачи от механизма через стыки в окружающую среду, поскольку в вакууме практически отсутствует конвективная теплоотдача. Это влечет за собой увеличение поверхностных температур, ухудшение механических характеристик материалов и интенсификацию молекулярно-адгезионных процессов, сопровождающуюся развитием схватывания и задиров сопряженных тел. В таких условиях целесообразно использовать твердые смазочные материалы, к числу которых относятся сульфиды, хлориды,

йодиды и фториды металлов, соли, минералы, различные полимеры, жирные кислоты, мягкие металлы. Исключительно широкий температурный диапазон ($-100 \div +1000^\circ\text{C}$), способность выдерживать предельно высокие контактные нагрузки, стабильность в вакууме, инертных и агрессивных средах, стойкость при облучении и к химическим реагентам — вот основные преимущества этих материалов, определяющие их перспективность.

Ведутся работы по созданию новых и улучшению служебных свойств уже известных твердых смазочных материалов. Существенным резервом повышения эффективности ряда антифрикционных материалов является реализация эффекта аномально низкого трения, когда при облучении или нагреве в вакууме коэффициенты трения дисульфида молибдена, полиэтилена, графита снижаются на несколько порядков. Предпринимаются успешные попытки рационального использования трибохимических реакций между материалами, входящими в состав смазочных материалов, или между этими материалами и окружающей средой. Так, снижение трения графитовых смазочных материалов в вакууме и инертных газах может быть обеспечено путем подбора такого сопряженного тела или введением его в состав графита, которое бы непрерывно поставляло атомы или молекулы, способные адсорбироваться поверхностями трения.

Анализ принципов тяжело нагруженных механизмов на основе твердых

смазочных материалов и сравнение их с условиями работы машин показывает, что малый ресурс механизмов является следствием неудачных методов применения твердых смазочных материалов. Этим методам свойственны два дефекта: отсутствие циркуляции смазочного материала, т. е. принудительной многократной подачи его частиц на поверхности трения, и малые объемы смазочного материала в механизме.

Из известных методов применения твердых смазочных материалов наиболее перспективным является ротационный метод смазывания, заключающийся в постепенной подаче смазочного материала малыми дозами в зону трения. Перенос смазочного материала возможен уже при весьма малых нагрузках. В зубчатых передачах роль смазывающего элемента выполняет специальное колесо, находящееся в зацеплении с рабочим. Смазывающее колесо не воспринимает рабочей нагрузки и, изнашиваясь, обеспечивает перенос твердого смазочного материала на поверхность трения силовых зубчатых пар. Конструктивно поджатие ротационного колеса может быть выполнено двумя способами: когда колесо укрепляется на рычаге и пружиной прижимается к рабочему колесу (рис. 15, а) и когда смазывающее колесо выполнено из двух половин и его зубья с помощью пружин прижимаются к зубьям рабочего колеса (рис. 15, б).

Экспериментальное исследование редуктора с ротационным смазыванием

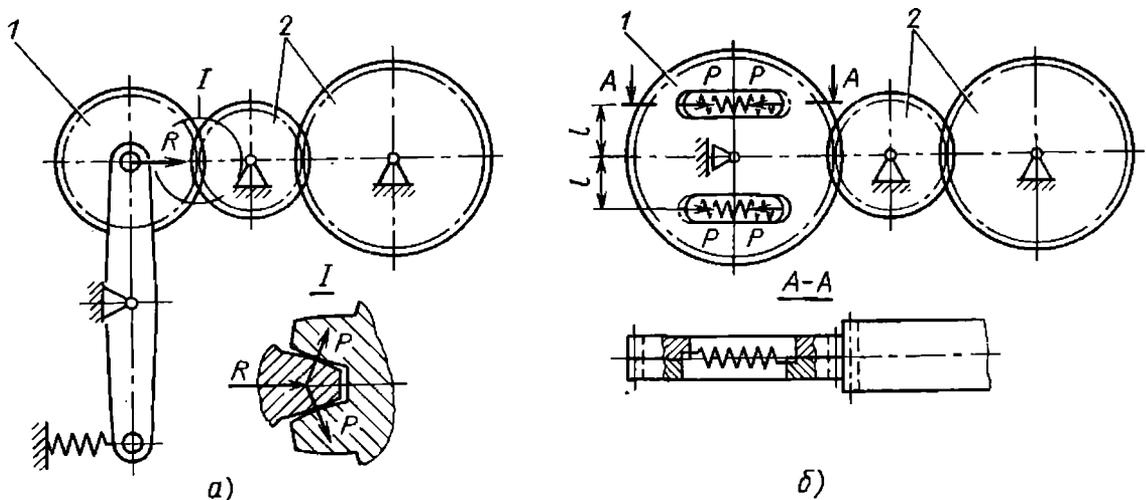


Рис. 15. Ротационный метод смазывания зубчатых колес:

1 — смазывающее колесо; 2 — рабочие колеса

проводили в вакууме, равном 133—13,3 нПа при температуре 20—250 °С. Четырехрядный редуктор, зубчатые колеса которого выполнены из стали 20Х13 твердостью *HRC* 48—51, с модулем 0,6 мм, углом профиля $\varphi = 20$, работал при окружных скоростях до 3,3 м/с, контактных напряжениях до 10 ГПа. В качестве материалов для смазывающих зубчатых колес были выбраны ВМК-1, ВМК-21, ВМК-22.

Ресурс работы зубчатого редуктора ограничивался главным образом долговечностью смазывающих колес и случайным попаданием частиц смазочного материала и продуктов изнашивания в подшипники качения. Экспериментально было показано, что в отсутствие смазки при указанных выше условиях выход из строя редуктора вследствие заедания колес из стали 20Х13 (*HRC* 50) наступает через 2—3 ч. В то же время редуктор с ротационным смазыванием мог работать более 100 ч. В зависимости от режима работы и материалов тел КПД редуктора мог изменяться в диапазоне 50—90 %. Для дальнейшего повышения работоспособности узлов трения с твердой смазкой был разработан магнитопорошковый метод смазывания. Основные условия создания узлов трения с магнитопорошковым методом смазывания заключаются в следующем:

детали трения изготавливаются из ферромагнитных материалов;

порошкообразному твердому смазочному материалу придаются удовлетворительные магнитные свойства, при этом основной его объем размещается вне зоны фрикционного контакта, но вблизи рабочих тел;

на механизм действует постоянное магнитное поле;

составные части узла трения компонуются так, что формируют единый магнитный контур.

Выполнить эти условия сравнительно просто. Большое число высокопрочных конструкционных материалов относится к ферромагнитному классу (стали 20, 45, 30ХГС, 20Х13, 20ХЗМВФ и т. д.), вследствие чего у конструктора имеется значительный выбор сталей.

Твердые смазочные материалы, как правило, диамагнитны и практически

не реагируют на магнитное поле. Однако введение в их состав некоторого количества ферромагнитных веществ придает им эти свойства, не ухудшая заметно смазочных характеристик. Сравнительно просто решается вопрос размещения смазочного материала. Применительно к зубчатым передачам детали располагаются в закрытом картере, на дне которого в пределах действия магнитного поля находится смазочный материал. Именно такой принцип расположения магнитоактивного смазочного материала (вне зоны контакта, но вблизи поверхности трения) позволяет использовать его значительные объемы.

Перспективность магнитного метода смазывания по сравнению с другими методами определяется прежде всего возможностью повысить ресурс работы механизмов за счет увеличения объема смазочного материала, циркулирующего в узле трения в процессе его работы; лучшим удержанием смазочного материала на поверхности трения за счет магнитного поля; возможностью многократной подачи одних и тех же частиц смазочного материала при их отрыве от поверхности трения; регулированием смазывания. Последнее осуществляют изменением напряженности налагаемого на узел трения магнитного поля — большей напряженности поля соответствует большая подача смазочного материала. Эффект может быть достигнут, по крайней мере, двумя путями: изменением силы тока в обмотке электромагнита, являющегося источником магнитной энергии, или перемещением магнита относительно контактирующих деталей.

Варианты решения узлов трения с магнитопорошковым методом смазывания показаны на примере зубчатых передач.

Зубчатые колеса могут быть намагничены внешним магнитом, расположенным вне картера со смазочным материалом (рис. 16, а), или магнитами, укрепленными на вращающихся колесах (рис. 16, б).

В обоих случаях смазочный материал находится внутри геометрического картера. Размещение магнитов на рабочих колесах или эквивалентное

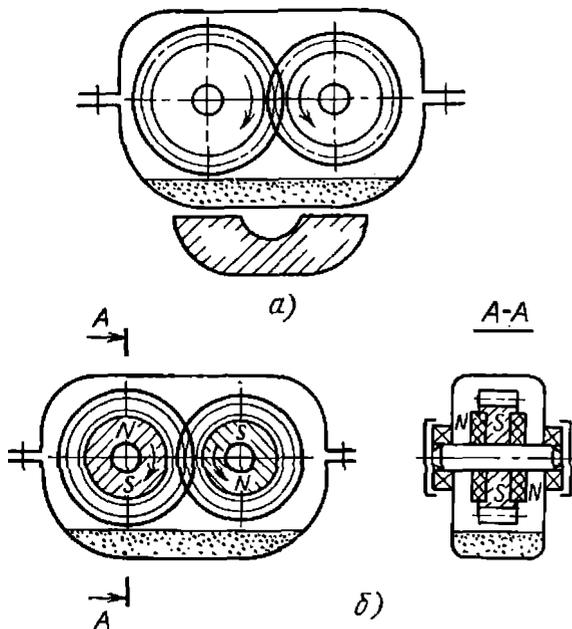


Рис. 16. Магнитопорошковый метод смазывания зубчатых колес:

а — расположение магнита внешнее; б — расположение магнита внутреннее

этому непосредственное намагничивание самих колес придает механизму большую компактность. В то же время при некотором изменении схемы (рис. 17) можно осуществить регулирование смазывания зубчатых колес.

Магнитопорошковый метод достаточно универсален и может быть применен к узлам трения различного типа: зубчатым колесам, подшипникам скольжения и качения, кулачкам и т. д.

Дальнейшие детальные исследования магнитопорошкового метода смазывания показали наличие еще одного важного фактора, благоприятно влияющего на долговечность механизмов. Подача на рабочие детали значительного количества пористого порошкового смазочного материала сопровождается формированием значительной по размеру зоны контакта. Экспериментальными исследованиями было установлено, что в сопряжении цилиндрических тел зона контакта достигает 20° и более. Это в десятки раз превышает размеры герцевского контакта для тех же поверхностей без смазочного материала. Так, для стальных роликов радиусом 20 мм, шириной 5 мм, при нагрузке 980 Н длина площадки контакта равна 14,8 мкм; угол зоны контакта при этом равен 25° . Возрастание угла зоны контакта, а

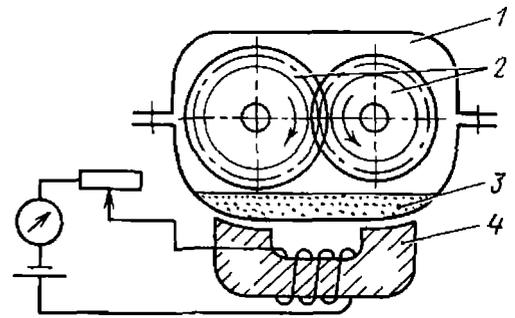


Рис. 17. Регулирование смазывания:

1 — картер; 2 — зубчатые колеса; 3 — смазочный материал; 4 — постоянный магнит

следовательно, и увеличение площади, через которую передается нагрузка, должно привести к снижению максимальных напряжений, что, в свою очередь, благоприятно отразится на ресурсах работы механизмов вследствие уменьшения изнашивания.

Расчеты показывают, что максимальные контактные напряжения в зубчатых передачах с магнитопорошковым смазыванием зависят от количества подаваемого смазочного материала и могут в 1,5—2 раза быть меньше по сравнению с напряженным состоянием зубчатых передач без смазочного материала, рассчитанным по формулам для герцевского контакта.

Магнитопорошковый метод смазывания был опробован и проверен в различных зубчатых механизмах. На рис. 18 представлен редуктор, зубчатые колеса которого изготовлены из стали 30ХГСА с $HRC\ 33-39$. Испытания редуктора проводили при температуре 300°C , максимальные контактные напряжения в полюсе зубчатых колес

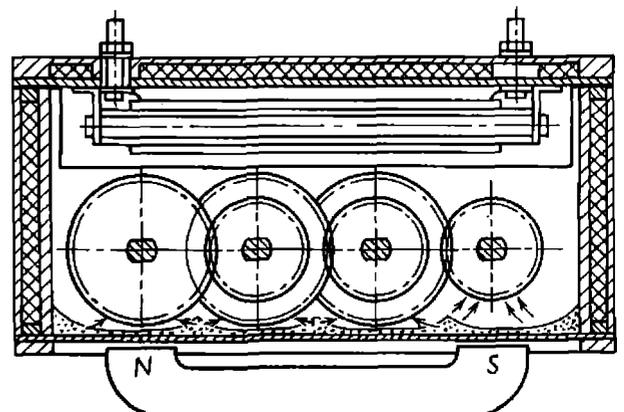


Рис. 18. Зубчатый редуктор с магнитопорошковым смазочным материалом в условиях повышенных температур

составляли 4,5—6,2 ГПа, скорости скольжения 20—46 см/с. Индукция магнитного поля в зоне смазывания равнялась 0,04—0,06 Тл. За время ресурсных испытаний КПД редуктора составлял 93 %. Через 300 ч работы механизма осмотр и обмер зубчатых колес показали, что на рабочих поверхностях зубьев образовалась пленка смазочного материала; незначительные следы изнашивания были видны лишь в области головок зубьев. Исследования показывают, что этот метод смазывания может быть успешно использован в различных условиях, когда невозможно применять жидкий пластичный смазочный материал.

9. ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ИЗНАШИВАНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОНТАКТОВ

В процессе работы скользящие, разрывные и даже неподвижные контакты подвержены изнашиванию. В зависимости от времени и числа коммутаций, т. е. интенсивности изнашивания I_h , контакты постепенно выходят из строя. Для электрических контактов характерны два основных вида изнашивания: механическое, обусловленное процессами трения, удара и вибрации; электрическое, обусловленное термохимическим и эмиссионным воздействием электрического тока на материалы.

В связи с очень большой разницей в условиях работы электрических контактов разного класса и назначения их надежность и долговечность различаются в широких пределах. Наибольшая интенсивность отказов наблюдается у скользящих электрических контактов, особенно у которых скорость скольжения и продолжительность процесса скольжения высокие. В этих контактах и механическое и электрическое изнашивание наиболее значительны. Механическое изнашивание проявляется в скользящих электрических контактах в тех же формах, что и в обычных парах трения, работающих без электрического тока, с той особенностью, что рабочие нагрузки таких контактов обычно невелики и в 10 раз меньше, чем у обычных несма-

занных пар трения, и в 100 раз меньше, чем у пар трения, работающих со смазочным материалом.

Электрическое изнашивание проявляется в таких контактах в следующих трех видах;

перенос ионов одного материала на другой;

фриттинг — электрический пробой, возникающий при достижении напряженного электростатического поля внутри окисной пленки примерно 10^8 В/м, приводящей к увеличению сил молекулярного сцепления между чистыми металлами, что вызывает нежелательный эффект — микросхватывание поверхности участков с глубинным вырыванием материала при сдвиге;

искрение и дугообразование, приводящие к выделению большой тепловой энергии в зазоре между контактами. При этом происходит изменение свойств поверхностных слоев материалов, возможно испарение металла или его разбрызгивание в контактном зазоре и близлежащих участках поверхности. Это обычно ухудшает качество поверхности и увеличивает переходное контактное сопротивление R_k . В результате сильно увеличивается механическое изнашивание. В ряде сильноточных контактов предусмотрено в связи с этим перемещение зоны контакта в процессе включения и выключения, а также магнитно-электрическое дугогашение.

Строгое деление на механическое и электрическое изнашивание невозможно, так как оба процесса взаимосвязаны и взаимообусловлены.

В табл. 3 приведена классификация электрических контактов по виду изнашивания при нормальной работе.

Двумя важнейшими видами сильноточных электрических скользящих контактов, применяемых на транспорте, являются контакты типа вставка пантографа — контактный провод и башмак — контактный рельс.

Первый тип контакта в различных конструктивных вариантах применяется для электрифицированных узлов токосъема (трамвая, троллейбуса и некоторых других специальных видов транспортных машин); второй тип токосъема в основном используется

3. Виды изнашивания электрических контактов

Контакты	Область применения	Вид изнашивания
Неподвижные Разрывные Скользящие	Штепсельный разъем Контакты магнитного пу- скателя Контакты слаботочного реле Щетка-кольцо Щетка-коллектор Ползун слаботочного рео- стата Токосъемный башмак по контактному рельсу или пластины пантографа по контактному проводу	Механическое Электрическое вследствие дугообразования Механическое Механическое и электриче- ское (первого и второго ви- дов) Механическое Электрическое (первого и второго видов) и механиче- ское

для линий метрополитена, в некоторых конструкциях скоростных подъемно-транспортных машин, например на скоростных лифтах высотных зданий и телевизионных башен. Предполагается использование этого типа токосъема в новых видах скоростного наземного транспорта, монорельсового, трубоконтейнерного, высокоскоростного наземного транспорта (ВСНТ) — на магнитном подвесе с линейными двигателями. Это связано с тем, что пантографная конструкция оказывается неработоспособной при высоких скоростях движения ($v_{ск} \geq 200-250$ км/ч).

Физическая картина трения и изнашивания для обоих типов токосъемных устройств в основном сходна. Различие обуславливается тем фактом, что в случае пары контактный провод—вставка пантографа один из ее элементов в макроразмерном понимании не является жестким, и нажатие на контакт сложным образом зависит от формы, которую принимает подвешенный провод между опорами, и динамики перемещения пластин пантографа. Кроме того, первый тип токосъема применяется в условиях действия различных климатических факторов (ветровых нагрузок, дождя, снега, обледенения и т. д.), второй — главным образом в тоннелях, шахтах, цехах и прилегаю-

щих к ним участках, в основном защищенных от действия указанных факторов.

Режим изнашивания для скользящих электрических контактов определяется электрическими и механическими факторами. Электрическое изнашивание является определяющим при искрении и дугообразовании, которые возникают при отрывах поверхности трущихся элементов в движении и на стоянке при запуске.

Механическое изнашивание пластин и контактного провода проявляется в виде абразивного, усталостного и окислительного. Действие электрического тока (при безыскровом контакте) на трение и изнашивание проявляется в основном в изменении теплофрикционных условий контакта. Влияние тока в токосъемных устройствах проявляется прежде всего в нагревании провода и скользящих пластин (контактных вставок).

Высокая температура в контактной зоне может приводить к нежелательным структурным изменениям в материале контактного провода. Из-за этого может значительно увеличиться величина износа провода и вставок, а в ряде случаев наступить разрушение и обрыв провода. Поэтому нельзя ограничиваться только учетом объемных температур, необходимо проводить

объективный расчет температуры в зоне скользящего контакта.

Температура контактного провода в зоне скольжения пластины пантографа будет равна сумме температур объемной ϑ_{V_1} , определяемой тепловыми потерями в проводнике, средней поверхностной ϑ_1^* , являющейся результатом трения и контактного сопротивления прохождению снимаемого с провода электрического тока, и температурной вспышки $\vartheta_{всп}$ от трения и сопротивления току в зонах фактического контакта.

Температура ϑ_{V_1} определяется из условия равенства тепла, выделяемого при прохождении тока в проводе, тепловому потоку от провода в окружающую среду. Последний в основном определяется условиями конвективного теплообмена.

В этих условиях для провода круглого сечения

$$\vartheta_{V_1} = \left[0,00887 \frac{I^2 \rho}{\lambda_{возд} d^3} \times \left(\frac{dT_0 v_{возд}^2}{g} \right)^{0,25} \right]^{0,8},$$

где I — сила тока, А; ρ — удельное электрическое сопротивление, Ом·м; $\lambda_{возд}$ — теплопроводность, Вт/(м·К); $v_{возд}$ — кинематическая вязкость воздуха, м²/с; d — диаметр контактного провода, м; T_0 — начальная температура, равная температуре окружающей среды; g — ускорение силы тяжести.

На рис. 19 приведена зависимость объемной избыточной температуры $\vartheta_{V_1} = T_1 - T_0$ от силы тока в проводе. При высокой плотности тока в проводе

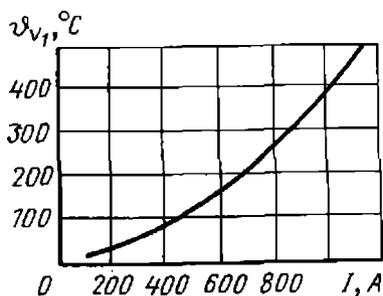


Рис. 19. Зависимость объемной температуры ϑ_{V_1} контактного провода от силы нагрузочного тока

температура его поверхности даже без учета действия токосъемника может быть значительна.

Определение средней поверхностной температуры ϑ^* при скольжении пластины пантографа по контактному проводу имеет свою специфику, так как в этом узле трения коэффициент взаимного перекрытия $K_{вз} \rightarrow 0$ (рис. 20). Для нахождения ϑ^* можно использовать теорию быстродвижущихся источников тепла по полупространству, считая движущимся пятном номинальную площадь трения пластины, а полупространством — контактный провод.

Расчетная формула для определения средней температуры скользящего номинального контакта

$$\vartheta^* = \frac{0,942 \alpha_{тпi} (N_T + N_{эл})}{\lambda_1 A} \times \sqrt{\frac{a_1 l_1}{\pi v_{ск}}},$$

где $\alpha_{тпi}$ — коэффициент распределения тепловых потоков между пластиной и проводом; λ — теплопроводность; a_1 — температуропроводность провода; $N_T, N_{эл}$ — мощность трения и мощность электрических потерь; A — номинальная площадь скользящего контакта; l_1 — ширина контактной пластины пантографа; $v_{ск}$ — скорость скольжения. Множитель 0,942 появляется в предположении, что нагрузка на движущемся макротягне распределена по закону треугольника, что соответствует реальным условиям работы пластины пантографа по проводу. Если считать, что нагрузка распределена равномерно, то тогда вместо 0,942 надо брать 1,064.

На рис. 21, а представлены расчетные данные для ϑ^* при скольжении

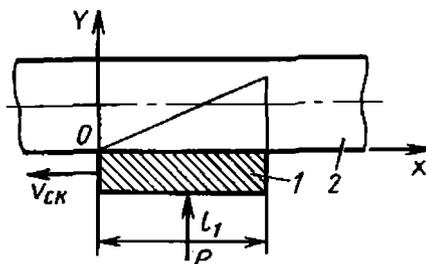


Рис. 20. Схема трения пластины пантографа по контактному проводу: 1 — пластина; 2 — провод контактный

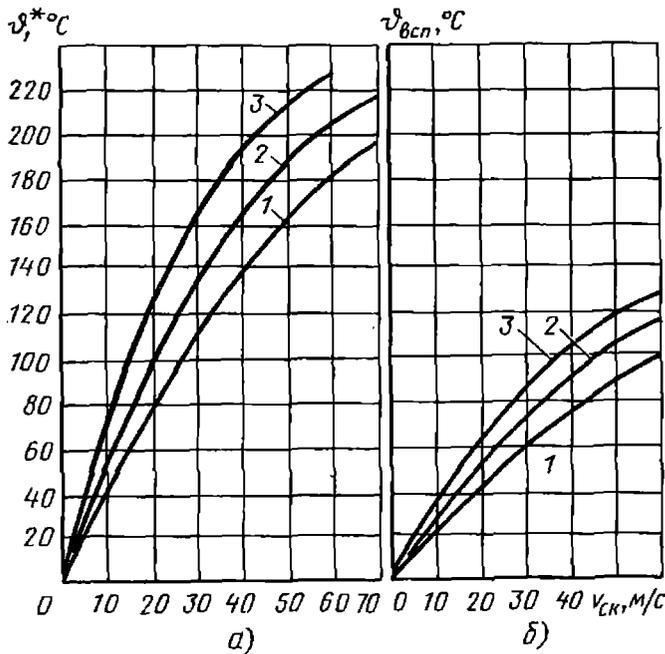


Рис. 21. Зависимость средней температуры номинальной поверхности трения скользящего макротягта ϑ^* на контактном проводе (а) и температурной вспышки на фактическом пятне касания пластины пантографа с контактном проводом $\vartheta_{всп}$ (б) от скорости скольжения при различных нагрузках (Н):

1 — 50; 2 — 100; 3 — 150

медной пластины пантографа по медному контактному проводу в зависимости от скорости скольжения при различных нагрузках. Температурная вспышка на фактическом пятне касания $\vartheta_{всп}$ определяется таким же образом, как и для обычных узлов трения без смазки и при граничной смазке. При этом рассматривается задача внедрения микронеровностей контактного провода в поверхность трения пластины. Для расчета температурной вспышки можно применять следующую формулу:

$$\vartheta_{всп} = \frac{1,707d_r a_2^{1/2} (N_T + N_{эл})}{A_r [4\lambda_1 a_2^{1/2} + \lambda_2 (\pi d_r v_{ск})^{1/2}]},$$

где d_r — диаметр среднего пятна касания; λ_1 — теплопроводность провода; λ_2 и a_2 — теплопроводность и температуропроводность материала пластины; A_r — суммарная фактическая площадь контакта.

Теоретически возможен такой случай, когда при касании или отрыве пантографа вся поверхность фактиче-

ского контакта сосредоточена в одном микровыступе. В этих условиях $\vartheta_{всп}$ при больших скоростях скольжения может составлять сотни градусов и значительно превысить обычные значения, которые приведены на рис. 21.

Основными материалами проводов являются медь, медно-кадмиевая и медно-магниева бронзы, для вставок — медь, угольные композиции и порошковые материалы. Наиболее перспективными по износостойкости являются угольные и порошковые композиции с графитом, пропитанные специальными легкоплавкими компонентами, которые постепенно вытесняют медные вставки на линиях постоянного и переменного тока. Эти вставки не требуют смазки и обеспечивают в ряде случаев значительно больший срок службы самой вставки и контактного провода.

Выбор материала провода обуславливается тем, что, например, бронза в условиях безыскровой работы обеспечивает в среднем в 2,5—3 раза большую износостойкость, чем медь, так как лучше работает на трение, но при этом повышает потери электроэнергии в контактной сети. Поэтому выбор оптимального материала — это не только техническая, но и экономическая проблема при оценке эксплуатационных затрат и стоимости того или иного материала.

Для приближенных расчетов параметров электрофрикционной теплоустойчивости пары трения МКВ-1 + Ст3 получены следующие уравнения регрессии при статической обработке модельных лабораторных экспериментов:

$$\begin{aligned} \vartheta_{тах} &= 9,947 + 533,3p_a + \\ &+ 10,51 \cdot 10^{-4}j + 0,022v_{ск} - \\ &- 80,89K_{вз} - 4,074 \cdot 10^{-3}p_a j; \\ f &= 0,882 - 0,45p_a + 0,3 \cdot 10^{-7}j - \\ &- 0,5 \cdot 10^{-4}v_{ск} - 0,268K_{вз} + \\ &+ 0,26 \cdot 10^5 p_a j - 0,007v_{ск} K_{вз}; \\ I_h &= 7,9 \cdot 10^{-5} + 0,12 \cdot 10^{-2}p_a - \\ &- 0,43 \cdot 10^{-7}j + 0,29 \cdot 10^{-6}v_{ск} - \\ &- 7,5 \cdot 10^{-5}K_{вз} + 0,2 \cdot 10^{-6}p_a j - \\ &- 0,6 \cdot 10^{-8}j K_{вз}, \end{aligned}$$

где p_a — давление, МПа; j — плотность тока, А/м²; $v_{ск}$ — скорость скольжения, м/с; $K_{вз}$ — коэффициент взаимного перекрытия.

Трение контактного башмака по контактному рельсу имеет другую специфику работы, при которой осуществляется более строгая фиксация трущихся элементов и при существующих скоростях движения практически отсутствуют отрывы башмака от рельса. Отсутствие жестких ограничений к массе контактного рельса сделало возможным применение в качестве основного материала мартеновской стали с удельной электропроводностью от $1/6$ до $1/8$ по отношению к меди. Материалом контактных башмаков является литая сталь, которая не полностью удовлетворяет требованиям.

Тепловая задача трения в случае движения башмака по рельсу решается так же, как и для скольжения вставки пантографа по контактному проводу.

Проблему трения и изнашивания для скользящих силовых контактов резко усложняются при высоких и сверхвысоких скоростях ($v_{ск} \geq 50$ м/с) в первую очередь вследствие чрезмерной тепловой напряженности трущегося контакта, приводящей к расплавлению материала на фактических зонах касания, пластическому необратимому формоизменению поверхностных слоев и вставок и башмаков и значительной поверхностной термоциклической усталости поверхностных слоев материалов контактных проводов и рельсов, которая может привести к их разрушению. Не менее сложной задачей является обеспечение необходимой динамики движения токосъемного устройства для ликвидации чрезмерных колебаний и возможности разрыва токосъема.

10. КОНСТРУИРОВАНИЕ ГЕРМЕТИЗИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ С УЧЕТОМ ТРИБОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ

Все герметизирующие устройства (ГУ) деталей машины можно подразделить на подвижные (П) и неподвижные (Н). По наличию внешнего трения

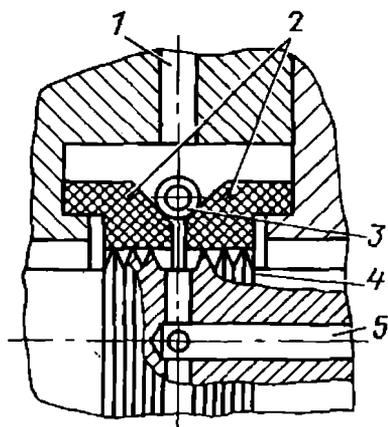


Рис. 22. Комбинированное ГУ:

1 — отверстие в корпусе для выхода охлаждающей жидкости (газа); 2 — кольца торцового ГУ; 3 — браслетная пружина; 4 — выступы лабиринта; 5 — выходное отверстие.

хотя бы на отдельных участках зоны сопряжения или в некоторые моменты процесса работы необходимо различать контактные (К) и бесконтактные (Б) герметизирующие устройства. Иногда подвижные герметизирующие устройства (ГУП) подразделяют также по характеру относительного движения. Кроме того, контактные герметизирующие (ГУК) оцениваются по стабильности геометрической формы. Она бывает стабильной (С), изменяющейся (И) и не имеющей собственной формы — заполнительной (З). Бесконтактные герметизирующие устройства подразделяются по физической природе разделяющей детали среды. Обычно это жидкости (Ж), газы (Г) или смешанные — гетерогенные среды (ГГ).

Таким образом, все ГУ разделены на 12 видов. Эти виды ГУ далее подразделяются по конструктивным признакам (например, манжетные или торцовые). Предлагаемая классификация проста и удобна для практического применения. Она позволяет быстро определить место и назначение любого известного ГУ. Имеется большое число комбинированных ГУ, обладающих признаками, характерными для нескольких видов. Так, на рис. 22 приведено устройство ГУП-К-ИЖ, которое имеет конструктивные признаки торцового ГУ двойного действия, лабиринтного, а также камерного с протоком жидкости через камеры, так форма контакта изменяется при изна-

шивании кольца 2 на гребнях лабиринтных выступов 4.

Такое комбинированное ГУ может быть с успехом применено в различных машинах. Однако имеющийся опыт убеждает в том, что необходима разработка ГУ для каждой новой машины, если ее конструкция, режим работы, условия эксплуатации или предъявляемые к ГУ требования по надежности и долговечности существенно отличаются от имеющихся ранее. Наибольшие трудности представляют расчет и конструирование контактных герметизаторов подвижных соединений. На работоспособность ГУП-К оказывают влияние многочисленные и разнообразные по своей природе факторы, которые часто взаимосвязаны. Так, например, для резиноармированных манжет необходимо учитывать 30 различных факторов. Далее приведены объединенные в семь групп факторы, которые должны быть учтены при разработке ГУ:

режим работы (ресурс, температура, нагрузка, скорость, условия хранения и транспортирования, вибрация конструкции и др.);

свойства герметизирующей среды (точки фазовых переходов, теплофизические свойства, химическая активность, вязкость и зависимость ее от температуры и давления и т. д.);

свойства материалов сопряженных деталей и их покрытий (прочностные, усталостные, релаксационные, теплофизические и др.);

конструкция участка машин, где должно быть установлено ГУ (конфигурация и масса деталей, условия охлаждения и смазывания и т. д.);

технологические особенности изготовления и сборки ГУ (соответствие технологических режимов обработки оптимальным, правильный порядок сборки, способ изготовления деталей и др.);

правильность эксплуатации (соответствие эксплуатационных параметров расчетным значениям, соблюдение сроков осмотров, замены смазочного материала и др.);

физико-химические процессы в зоне сопряжения (образование пленок, коррозия, изменение структуры и свойств материалов и т. д.).

Работоспособность ГУ характеризуется такими показателями, как степень герметичности, продолжительность работы до появления регистрируемых утечек, потери мощности и др. Работоспособность ГУ определяется также температурой (средней поверхностной и температурной вспышкой) и градиентом температуры, которые зависят от сочетаний указанных выше факторов. Фрикционные эффекты в зоне контакта ГУП-К в значительной степени зависят от теплового режима работы устройства. Утечка же вызывается снижением контактного (номинального) давления и (или) изменением геометрии контактирующих поверхностей (вследствие изнашивания, повышенных температурных деформаций и т. д.).

Наиболее важные проблемы, стоящие перед герметологией, можно представить в виде общей схемы (рис. 23). Для конкретных областей техники она может быть изменена и дополнена.

Для разработки расчетно-аналитических методов необходимо эффективно использовать достижения современной науки о контактном взаимодействии шероховатых поверхностей, трении и изнашивании для решения задач микрогидромеханики течения герметизируемой среды в узких зазорах ГУ различного класса и назначения.

В ГУП-К, у которых коэффициент взаимного перекрытия $K_{вз} = 1$ (манжеты и торцовые ГУ вращающихся валов), внешнее трение обычно наблюдается в течение всего времени работы по всей зоне контакта. При $K_{вз} < 1$ создаются благоприятные условия для подвода смазочного материала в зоне трения и ее охлаждения (манжеты, поршневые кольца и другие герметизаторы для соединений с возвратно-поступательным перемещением). При разработке узла машины с ГУП-К необходимо принимать во внимание следующие обстоятельства. Так как улучшение антифрикционных герметизирующих материалов для получения необходимой совокупности свойств осуществляется на практике медленными темпами, то наиболее перспективным направлением в решении этой задачи является совершенствование конструк-

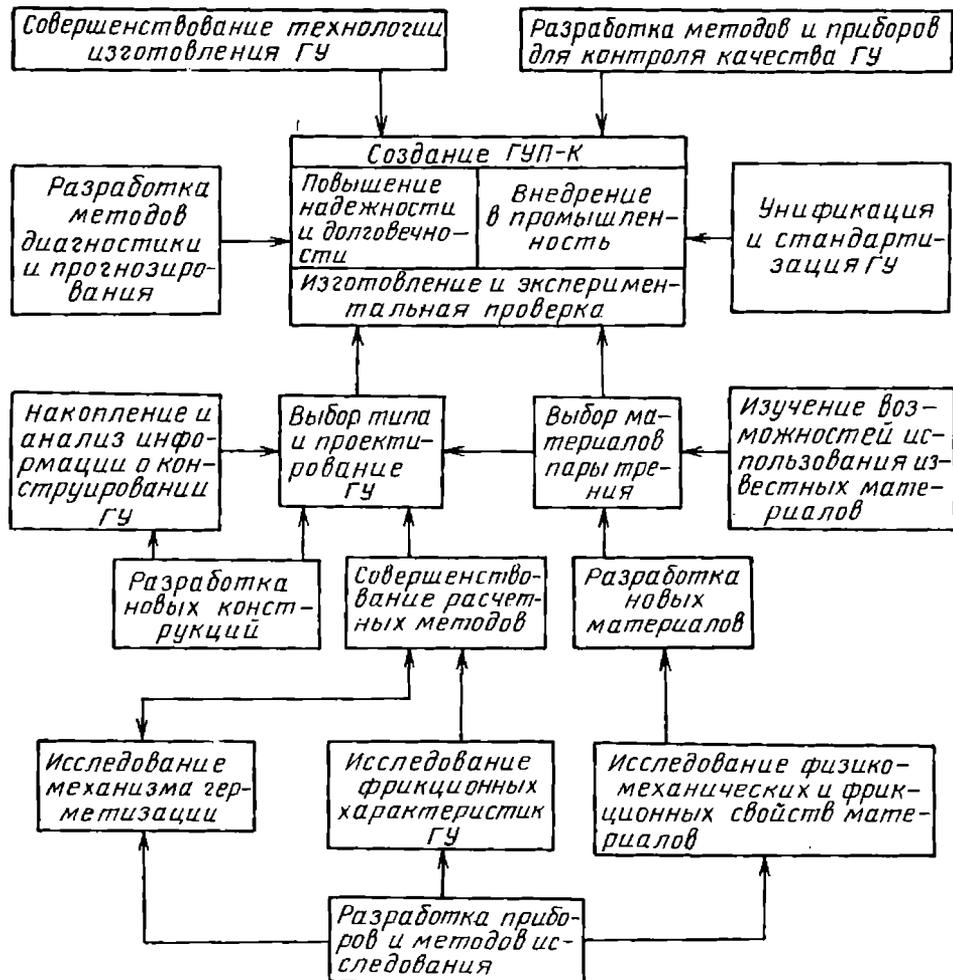


Рис. 23. Взаимосвязь проблем герметологии

ций ГУ Проектирование машины в целом не должно проводиться без оптимизации условий работы ГУ. В противном случае может потребоваться существенная переделка всей машины для обеспечения надежной работы ГУ. Требование высокой степени герметичности в итоге означает реализацию трения без смазочного материала и со смазочным материалом при граничной смазке или сочетании обоих видов трения в ГУП-К, что приводит к снижению долговечности.

На практике задача герметизации часто решается с использованием одновременно нескольких ГУ различных видов. При проектировании ГУП-К рекомендуется руководствоваться следующими принципами:

- разделения функций при использовании системы ГУ, каждое из которых выполняет определенные функции;
- исключения вредного влияния факторов;
- минимизации тепла трения;

использования гидродинамических эффектов, обеспечивающих в процессе работы существование жидкостной пленки между валом и герметизатором (рис. 24);

максимизации отвода тепла от зоны контакта наряду с осуществлением мероприятий по уменьшению тепловыделения.

Таким образом, рассмотрение трибологических аспектов герметологии позволяет определить следующие наиболее эффективные пути повышения работоспособности контактных подвижных герметизирующих устройств (ГУП-К):

создание материалов с более высокой теплостойкостью (для полимеров — с более высокой критической температурой, определяемой в опытах на фрикционную теплостойкость);

создание конструкций ГУ, в которых возрастающая при работе температура не превышала бы допустимого значения (для полимеров — критиче-

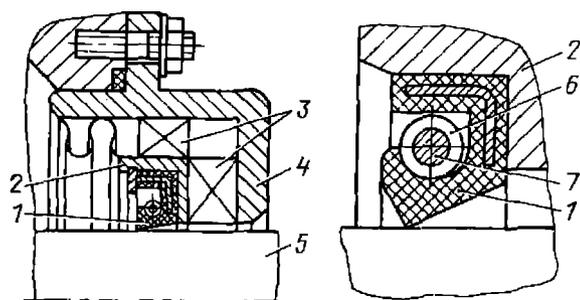


Рис. 24. Манжетное ГУ, допускающее оптимизацию режима трения:

1 — манжета; 2 — подвижной корпус манжеты; 3 — вибровозбудители; 4 — корпус ГУ; 5 — вал; 6 — корпус кольца; 7 — кольцо

ской температуры). Для выполнения этого условия необходимо снижение тепловыделения при трении и увеличении теплоотвода от контактной зоны.

11. МОДЕЛИРОВАНИЕ АБРАЗИВНОГО ИЗНАШИВАНИЯ

Основной причиной выхода из строя строительных и сельскохозяйственных машин, технологического оборудования является абразивное изнашивание.

Процесс абразивного изнашивания может быть представлен в виде многоступенчатой развивающейся сложной системы (рис. 25), подсистемы которой могут изменяться в зависимости от вида задачи. Для иллюстрации были рассмотрены три задачи:

изнашивание металла при скольжении в массе грунта влажностью до 10 % при скоростях скольжения, не превышающих 10 м/с (лопатки грунто-смесительных машин и ножи бульдозера);

скольжение металла по поверхности грунта со скоростью до 100 м/с;

вибрационное воздействие на поверхность грунта (виброуплотнительные машины, передвигающиеся поступательно со скоростью не более 0,6 м/с).

Общим для всех задач моделирования абразивного изнашивания является влияние на выходные характеристики системы фракционного и granulометрического состава, влажности, вида абразивного материала и качества поверхности контактирующих

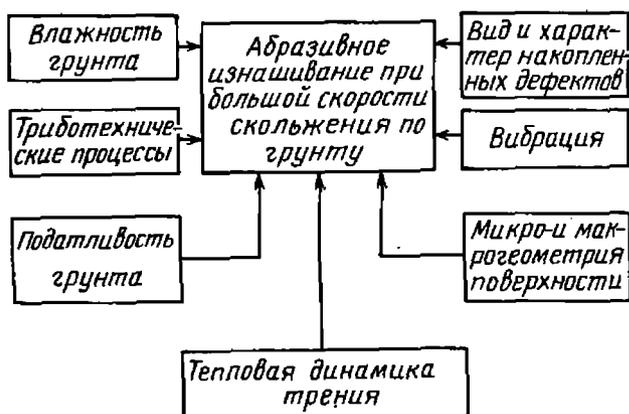


Рис. 25. Структурная модель абразивного изнашивания

с ним деталей. Активность процесса микрорезания определяется твердостью абразивного материала; оно занимает ведущее место наряду с процессами отделения частиц вследствие усталости материала и пластического отеснения.

При повышении скорости процесса модель усложняется. Вводятся подсистемы тепловой динамики трения, активизируются трибохимические процессы, происходят изменения структуры металла. Абразивную массу можно рассматривать как упруговязкую систему. Ее податливость (скорость деформируемости) есть функция времени приложения нагрузки. В экспериментах в качестве абразивной массы был использован карьерный песок и грунт различной влажности. Установлено, что незначительное количество влаги в грунте (до 10 %) практически не влияет на вид и характер изнашивания. Увеличение влажности до 25 % улучшает скольжение твердого тела по грунту. В этом случае процессы локализуются в поверхностных объемах грунта.

Капиллярная влага на поверхности трения усиливает связи отдельных частиц грунта, тем самым уменьшая внутреннее трение и рассеяние энергии при скольжении. В то же время свободная влага грунта служит смазочным материалом, уменьшающим почти вдвое силу трения. Свободная влага за счет ее теплоемкости рассеивает часть тепла. Однако этот процесс зависит от продолжительности контакт-

ного взаимодействия. При скольжении с большой скоростью рассеяние тепла за счет этого процесса минимально. Влажность абразива влияет на его податливость, обусловленную реологическими свойствами. Последние наиболее сильно проявляются при высоких скоростях скольжения (более 12 м/с).

Большинство сельскохозяйственных и дорожных машин работают на скоростях до 12 м/с, при которых реологические свойства грунта проявляются слабо. Быстроходные машины специального назначения, как правило, работают на скоростях, значительно превышающих 12 м/с. В связи с этим возникает необходимость введения ограничений. Так, при выборе лабораторных режимов испытаний учитывают реологические свойства моделей грунта.

Другое ограничение связано с воспроизведением на модели вида контактирования (параметра удельного износа i_h на контакте). Большинство грунтов (за исключением прочных скальных) дают возможность вследствие их сжимаемости выравнивать давление на поверхности контакта трущихся тел. В результате фактическая площадь касания приближается к контурной площади, создаются благоприятные условия для работы материала тела, скользящего по грунтовой поверхности. В табл. 4 приведены результаты анализа эксплуатации различных деталей машин. Реальный

грунт имеет частицы различных размеров и обладает упругими и пластичными (деформативными) свойствами. Эти свойства грунта, являющиеся определяющими, существенно влияют на коэффициент трения модели и натуры.

Используя рекомендации по разработке упругоабразивной поверхности, при испытаниях на изнашивание для моделирования конкретного вида грунта были учтены не только характеристики абразивной поверхности, но и суммарный деформативный параметр упругого элемента. Модельная опора в виде пластины, изготовленной из того же материала, что и натурная опора, перемещалась от периферии к центру с радиальной подачей, обеспечивающей скольжение по свежему следу на упругоабразивной поверхности, наклеенной на основание цилиндра большого диаметра.

Для моделирования работы виброплит выправочно-подбивочно-отделочных путевых машин была создана установка, позволяющая моделировать виброабразивное изнашивание и проводить сравнительные испытания различных материалов на износостойкость в абразивной среде при вибрации (рис. 26). На упругую ленту 7 транспортера подается абразивный материал 4 определенной фракции; к виброузлу 2 крепятся образцы 3, которым сообщается колебательное движение; образцы 3 контактируют с абразивным материалом, движущимся с заданной скоростью.

4. Удельный износ деталей машин при взаимодействии с реальными грунтами

Деталь	Материал	Условия работы	Вид деформации	Удельный износ i_h
Шарнир гусеничной цепи	Сталь 45	Супесчаное основание	Упругопластическая	10^{-8}
Цепь	30Г	Запыленность абразивом М10	То же	$7 \cdot 10^{-6}$
Рабочие органы землеройных машин	Наплавка КБх	Различные грунты	»	10^{-4}
Полоз быстроходной машины	30ХГСА	Супесчаное основание	Упругая	10^{-6}
Долото	—	Скальное основание	Микрорезание	10^{-2}

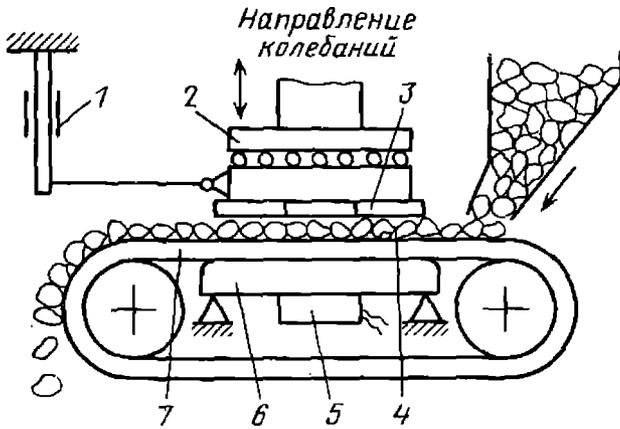


Рис. 26. Установка для исследования виброабразивного изнашивания:

1 — тензодинамометр для измерения трения; 2 — вибродвигатель; 3 — образцы; 4 — абразивный материал; 5 — индуктивный датчик нагрузки; 6 — опорная плита; 7 — упругая лента транспортера

Для каждой из трех задач были составлены уравнения подобия. Для случая скольжения по абразивному материалу уравнение подобия имело следующий вид:

$$I = \Psi_8 \left(\frac{L^2}{A_a}; \frac{L}{at^2}; \frac{m_{1,2}^{1/2} L}{Pt^2}; \frac{m_{1,2}^{1/2}}{Lt^2 E}; \frac{m_{1,2}}{L^2 t^4 HB_{1,2}}; \frac{m_{1,2}^{3/2}}{\rho_{1,2,3} L^9}; \frac{m_{1,2}^{3/2} L^3}{\lambda_{1,2,3} t^6 \Delta\vartheta_{1,2,3}}; \frac{L^6}{C_{1,2,3} t^6 \Delta\vartheta_{1,2,3}}; \frac{m_{1,2}^{1/2}}{\sigma_k t^3 \Delta\vartheta_1}; \frac{\Delta\vartheta_1}{L \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial n} \right)_1}; \frac{m_{1,2}^{1/2} L^2}{W_T t^2}; \frac{m_{1,2}^{3/2} L^6}{W_{p1,2,3} t^6}; \frac{L}{d}; \frac{1}{S_{1,2} L^2}; \frac{L^2}{A_\sigma}; \frac{m_{1,2}^{1/2}}{N_{уд} t^3}; \frac{L}{g\beta t^2 \Delta\vartheta_3} \right), \quad (25)$$

где L — путь трения; A_a — номинальная площадь трения; a — ускорение; t — время; $m_{1,2}$ — масса первого и второго элементов; P — нагрузка; E — упругость грунта; $HB_{1,2}$ — твердость металла и абразивной ча-

стицы; $\rho_{1,2,3}$, $\lambda_{1,2,3}$, $C_{1,2,3}$ и $\Delta\vartheta_{1,2,3}$ — плотность, теплопроводность, теплоемкость и температура металла, абразивной и окружающей среды; σ_k — коэффициент теплоотдачи; $\partial\vartheta/\partial n$ — градиент температуры в металле; W_T — работа трения; W_p — потенциальная энергия, накопленная элементом; $S_{1,2}$ — характерный размер металлического тела и абразивной среды; A_σ — теплоотдающая поверхность металлического элемента; $N_{уд}$ — удельная мощность трения; $g\beta$ — подъемная сила окружающей среды.

Уравнение подобия было решено при различных дополнительных условиях для случая большой скорости скольжения, когда на результаты эксперимента существенное влияние оказывает температура, и для случая небольших скоростей. При этом был достигнут эффект ускорения испытания.

В табл. 5 приведены результаты моделирования фрикционно-износных характеристик пары трения сплав Х4781+ суглинок при высоких скоростях начала торможения.

Аналогичные результаты были получены для пластин из сплавов ХН781 и ВТ14 (расхождение по контрольным параметрам не более 10%). По результатам лабораторных модельных испытаний наплавов, предназначенных для лопаток грунтосмесительных машин, была рассчитана относительная износостойкость $\epsilon_1 = I_H/I_\Delta$, где I_Δ — интенсивность изнашивания эталона из стали 40Х38Г2. Ее значения для различных наплавов приведены ниже:

	40Х38Г2	25Х25Р	25Х25	40Х38
Лабораторные испытания	1,0	0,74	1,19	0,73
Эксплуатационные испытания	1,0	0,79	1,05	0,83

Уравнение подобия для виброабразивного изнашивания

$$\frac{N_m L_T k n_p H_2}{\rho_c h_A \rho_2} = \Psi_9 \left(\frac{k_2 a}{P}, nT, f, \frac{h_A}{r_A}, \frac{H_A}{H_2}, \frac{v_x t_T}{L_T}, \frac{k n_p}{nT}, \frac{n k_2}{\rho_c v_g}, \frac{E_2}{G_2}, \frac{\sigma_2}{\rho_c}, k_\Phi, k_{ср} \right), \quad (26)$$

5. Сравнение натурального и модельного экспериментов

Параметр	Масштаб	Натура	Модель
Работа торможения W_T , кДж	$C_P^{3/2}$	$3,5 \cdot 10^4$	4,2
Номинальная площадь трения A_a , см ²	C_P	$2,2 \cdot 10^3$	5,5
Продолжительность t , с	$C_P^{1/4}$	30	7
Нагрузка P , кН	$C_P = 2,4 \cdot 10^{-6}$	$4,9 \cdot 10^4$	0,118
Путь торможения L , м	$C_P^{1/2}$	$1,8 \cdot 10^3$	90
Коэффициент трения f	—	0,31	0,35
Интенсивность линейного изнашивания I_h	—	$3,2 \cdot 10^8$	$3,0 \cdot 10^8$
Максимальная температура номинальной поверхности трения ϑ_{max} , °С	$C_P^{3/2}$	177	207

где I_m — массовый износ образцов; L_T — путь трения; k — количество повторений числа нагружения n_p , приводящее к разрушению; n_p — число нагружений, приводящее к разрушению материала; H_2 — твердость материала образцов; p_c — контурное давление; h_A — высота частицы абразива; ρ_2 — плотность материала образцов; k_2 — коэффициент жесткости материала; a — амплитуда колебаний; P — нагрузка; n — число колебаний в секунду; T — продолжительность колебания; f — коэффициент трения; r_A — радиус абразивной частицы; H_A — твердость абразива; v_x — скорость поступательного движения; t_T — продолжительность трения; v_g — виброскорость; E_2 — модуль упругости материала образца; G_2 — модуль сдвига образца; σ_2 — прочность материала образца; k_Φ — коэффициент формы; k_{cp} — характеристика среды.

Для упрощения задач и возможности проверки этого уравнения были приняты следующие условия: физико-механические параметры природы и модели одинаковы. Тогда симплексы этих параметров:

$$C_{H_A} = 1; C_{H_2} = 1; C_{\rho_2} = 1;$$

$$C_{E_2} = 1; C_{k_2} = 1; C_{k_\Phi} = 1;$$

$$C_k = 1; C_{n_p} = 1; C_{G_2} = 1;$$

$$C_{k_{cp}} = 1.$$

Масштабный коэффициент $C = \pi_H / \pi_M$, где π_H и π_M — обобщенные переменные для природы и модели.

Для получения одинакового вида контактирования у модели и природы необходимо соблюдать условия $C_{k_{cp}} = 1$. Учитывая техническую характеристику установки, примем за определяющие параметры геометрические размеры, частоту колебаний, скорость и жесткость ленты, моделируемые соответственно в масштабе: C_l, C_n, C_v, C_{k_2} .

Остальные масштабные коэффициенты получим из анализа уравнения:

$$C_{r_A} = C_l; C_{h_A} = C_l; C_p = C_l^2;$$

$$C_a = C_l^2 C_{k_2}^{-1}; C_t = C_n^{-1};$$

$$C_T = C_v^{-1}; C_k = C_n C_T;$$

$$C_{v_g} = C_n; C_U = C_l C_n^{-1}.$$

Эксплуатационные испытания виброплит были проведены при давлении 0,125; 0,184; 0,235 ГПа; частоте вибрации 25 Гц; скорости относительного перемещения виброплиты 0,555 м/с, среднем размере абразивного материала (щебня) $5 \cdot 10^{-2}$ м.

6. Сравнение изнашивания материалов в условиях вибрационного нагружения

Материал образца	Интенсивность изнашивания, мг/(м ² ·км)	Коэффициент трения	Микротвердость уплотненного слоя, МПа	Разница в результатах измерений на натуре и модели, %		
				износа	коэффициента трения	микротвердости
<i>Натура</i>						
Ст6	30,50	0,095	2750	—	—	—
Сталь 65Г	22,25	0,1035	4400	—	—	—
Сталь 65Г (закаленная)	8,00	0,0875	—	—	—	—
<i>Модель</i>						
Ст6	29,33	0,09	3200	3,84	5,26	16,4
Сталь 65Г	20,50	0,088	3500	7,87	14,98	20,5
Сталь 65Г (закаленная)	7,33	0,085	—	8,34	2,85	—

Исследования при $C_l = 18 \div 28$, $C_n = 0,56 \div 0,62$, $C_{вх} = 6$ показали, что при соблюдении условий физического подобия явления, происходящие при виброабразивном изнашивании, идентичны на натуре и модели,

а механизм изнашивания одинаков. Сравнение результатов испытаний (средних значений) натуре (при давлениях 0,235 МПа, $C_l = 28$) и модели показывает достаточное их совпадение (табл. 6).

Список литературы

1. **Апполонов И. В., Северцев Н. А.** Надежность невосстанавливаемых систем однократного применения. М.: Машиностроение, 1977. 211 с.
2. **Арсеньев Ю. Д.** Теория подобия в инженерных экономических расчетах. М.: Высшая школа, 1967. 267 с.
3. **Болотин В. В.** Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1971. 255 с.
4. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. 520 с.
5. **Браун Э. Д., Евдокимов Ю. А., Чичинадзе А. В.** Моделирование трения и изнашивания в машинах. М.: Машиностроение, 1982. 191 с.
6. **Веников В. А.** Теория подобия и моделирования. М.: Высшая школа, 1976. 480 с.
7. **Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.** Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524 с.
8. **Гухман А. А.** Введение в теорию подобия. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1973. 296 с.
9. **Дружинин Г. В., Воронова О. В.** Об ускоренных испытаниях элементов электроэнергетики на надежность// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1979. № 3. С. 168—172.
10. **Дружинин Г. В., Воронова О. В.** Об исследовании надежности методом физического моделирования//Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1976. № 5. С. 174—176.
11. **Ивахненко А. Г., Зайченко Ю. П., Димитров В. Д.** Принятие решений на основе самоорганизации. М.: Советское радио, 1976. 280 с.
12. **Карташов Г. Д., Козлов В. М.** Экспериментальное подтверждение принципа инвариантности в теории надежности//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 5. С. 103—107.
13. **Лейфер Л. А.** Методы оценки надежности по результатам испытаний по сокращенной программе. М.: Знание, 1971. 191 с.
14. **Лемберский В. Б., Шолкин В. Г.** О планировании ускоренных испытаний на основе физического моделирования//Надежность и контроль качества. 1978. № 8. С. 3—11.
15. **Налимов В. В.** Теория эксперимента. М.: Наука, 1971. 207 с.
16. **Северцев Н. А., Попов П. А., Прокудин С. Н., Ярыгин Г. А.** Оценка критериев стохастического подобия при ограниченном объеме испытаний изделий авиационной техники//Авиационная техника. 1984. № 4. С. 68—72.
17. **Савчук В. П.** Приближенное, байесовское оценивание вероятности безотказной работы для класса стареющих распределений//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1985. № 6. С. 32—38.
18. **Северцев Н. А.** Элементы статистической теории подобия для исследования надежности//Основные вопросы теории и практики надежности. М.: Советское радио, 1980. с. 57—67.
19. **Северцев Н. А., Шолкин В. Г., Ярыгин Г. А.** Статистическая теория подобия. Надежность технических систем. М.: Наука, 1986. 205 с.
20. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. 9-е изд., перераб. М.: Наука, 1981. 447 с.
21. **Теории подобия и размерностей. Моделирование/Алабужев П. М., Геронимус В. Б., Минкевич Л. М., Шеховцов Б. А. М.: Высшая школа, 1968. 206 с.**
22. **Фролов К. В.** Методы совершенствования машин и современные проблемы машиноведения. М.: Машиностроение, 1984. 223 с.
23. **Червоный А. А., Лукьященко В. И., Котин Л. В.** Надежность сложных систем. М.: Машиностроение, 1976. 286 с.

Предметный указатель

А

- Автомодельность 16
- Адекватность моделей планирования — Проверка 48
- Алгоритмы пересчета 121
 - сопоставления 121
- Анализ алгоритмов функционирования системы 115
 - возможных отказов 61
 - инженерного содержания подобия 162
 - корреляционно-регрессионный 67
- Анализ подобия приближенного 63
 - стохастического 52
 - физических процессов 121
- Анализ размерностей 130
 - регрессионный 216
 - структурно-функциональный схемы 115
 - факторный 67
 - экспертный 180
- Аналоги 13, 144, 146, 147, 154
- Аппроксимация процесса ступенчатой функцией 141

Б

- Бета-распределение априорное 187 — Способы получения его параметров 188, 189
 - обобщенное 187
- Блоки резервные 157
- Блок-схема алгоритма 74, 78, 79, 83
 - операторная 75, 78, 79

В

- Вейбула распределение 171, 192
- Вектор многомерный количественных признаков 7
 - состояния системы 90
- Величина граничная 43
- Величины случайные 32, 41
 - непрерывные 32

- Вероятность безотказной работы 53, 62, 138, 139, 141, 184
 - мажоритарного элемента 98
 - элемента безусловная 112
- Вероятность возникновения отказа 135
 - доверительная 33, 214
 - отказа изделий 139, 141
 - переходная 91
 - состояний 100
- Вид критериальный зависимости 130
 - отказа данный 73
- Восстановление работоспособности системы 90
- Время безотказной работы 140
- Выбор аналогов 17, 46, 49
 - оптимальных стратегий 124
 - характерных факторов 134
- Выборка расслоенная 161, 182
- Выражение операторное 96
 - аналитическое 97
 - структуры 99
- Выявление отказа 90

Г

- Гамма-распределение 171, 185
- Гомогенность функции условная 50
- Граница доверительная 213
 - верхняя 33
 - нижняя 33, 185
- Границы интервала 42
 - рабочей области 153
- Граф направленный 94
- Группа наблюдений 164
 - элементов коррелированная 112

Д

- Данные априорные 17, 214
 - исходные 168
 - экспериментальные 184
 - эксплуатационные 168
- Диаграмма состояний — Переход к направленному графу 94 — Составление марковской модели 93
 - системы 100

Диапазон разброса 120
Дисперсия 33
Доработки 157
Достоверность оценки 123, 150

Е

Единицы безразмерные относительные 57
 — измерения 22
 — измерения относительные 14
 — структурно-функциональные 102

З

Зависимость исходная — Неточности ее 42
 — регрессионная 126
 — функциональная между определяющими физический процесс характеристиками 35
Закономерность общая функционирования систем 50
Закон распределения вероятностей случайной величины 40
 — нормальный 171, 176
 — Пуассона 178, 213
Закон распределения характеристик на грузки 128, 130
 — работоспособности 128, 130
Законы распределения критериев подобия 35
Запас прочности условный 65
Запас работоспособности 17, 52, 130
 — детерминированно определенный 130
 — по действующим факторам 130
 — по параметрам 130
Затраты на отработку 124
Значения базовые π -критериев 159
Зоны установившегося изнашивания 140

И

Изделия-аналоги 64, 69, 70
 — восстанавливаемые 59, 167, 212, 218
 — многокомпонентные 218
 — невосстанавливаемые одноразового действия 59
 — подобные 161
Изнашивание электрических контактов — Физико-химические процессы 259—263
Износостойкость фрикционных асбополимерных материалов — Использование эффектов влияния окружающей среды 241, 242

Износ поверхностей трения — Расчетные методы 221—223
Изображение геометрическое надежной структуры 89
Инварианты подобия 14, 160
Индикатор подобия 19, 21, 137 — Переход к критериям подобия 19
Интенсивность отказов 53, 86, 100, 102, 150, 184
 — активного модуля 90
 — из-за ошибок программного обеспечения 90
 — относительная различных типов 102
 — относительная ЭРИ 103
Интервал доверительный 150, 151
 — для критериев подобия 33
Интерпретация априорных распределений — Виды — см. под их названиями, например, *Интерпретация частотная*
 — рациональная 187
 — субъективная 187
 — частотная 186
Информация альтернативная 67
Информация априорная 67, 184
 — ограничительного характера 162
Информация обобщенная статистическая 63
 — однородная 72
Информация статистическая неоднородная 64
 — однородная 72
 — разнородная о наработке и отказах 109
Испытания — Организация 120 — Планирование 49 — Повторяемость результатов 121, 122 — Результаты 120 — Сравнение методов 120
 — выборочные 218
 — многофакторные 132 — Планирование 119
 — на надежность 12, 154
 — натурные 145
 — на прочность 128
 — ресурсные 148
 — ускоренные 148, 152
 — физических моделей 145
Источники отказов 155, 157 — Выявление и устранение их 158

К

Квазиподобие 178
Квантиль нормального распределения 147
 — распределения Стьюдента 33, 42

Класс стареющих в среднем распределений 202

Количество ошибок прогнозируемое — Среднее значение 88

Колмогорова—Смирнова критерий 111

Комплексы безразмерные 20, 65 — функциональные 51 — Их нормировка для подобного преобразования 50

Комплексы критериальные 44 — Базовые значения 43

— Объединение переменных 134

— Подбор состава параметров 133

Константы подобия 14, 21

Контроль надежности 12

— по альтернативному признаку 146, 148

Коррелированность физических параметров 112

Коэффициент безопасности 128

— вариации 138 — Статические значения 138

— влияния отказов 56, 62

— готовности 61

— искажения 50, 51

— конкордации 76

— масштабный 145

— мощности 27

Коэффициент нагрузки 105

— элемента максимальный 105

Коэффициент пересчета 152

— времени безотказной работы с модели на оригинал 145

Коэффициент ужесточения режима 147

— ускорения 102, 147, 149

Коэффициент учета влияния разброса параметров 55

— неточности исходной модели 51

Коэффициент форсирования испытаний 137

Кривая распределения теоретическая 146

Критерии детерминированные 47

— статистические 64

Критерий достижения требуемого подобия экономический 44

— остановка процедуры построения модели состояний 62

— отбора λ -комплексов 134

Критерий подобия 16, 21, 26, 34, 36, 38, 40, 41, 46, 130, 137, 142 — Разброс значений 41

— из одноименной группы 81

— параметрических отказов 136

— статистически неоднородный 83

— стохастический 52

Критерий разрушения смазочных слоев

— температурный 251, 252

— сокращения пространства рассматриваемых состояний 57

— технико-экономический 62

— типа граничное условие 61

Критерий стохастического подобия по запасам работоспособности 126, 129

— процессов изнашивания 140, 142

— сложных процессов 136

λ -критерий стохастического подобия 72

Л

Локализация отказа 90

Лапласа преобразование 95

М

Максимум оценки вероятности 163

Материалы конструкционные самосмазывающиеся — Основы их создания 226, 227

— Рабочие характеристики 228

Матрица инцидентов булева 116

— связности 94

Матрица размерностей 24

МГД-оценка 163, 170

Мера приближения к базовому образцу 126

— относительная 43

Мера приближенного подобия многофакторных моделей 132

Метод анализа размерностей 122

— максимального правдоподобия 163

— нулевых размерностей 80

— проверки статистических гипотез 144

— распознавания непараметрический 73

— расчета детерминистический 70

— смазывания магнито-порошковый 255—259

— тепловой динамики трения 234, 235

Методы упрочнения 247—249

Метрика априорная 199

Минимизация неподобия 44

Модели надежности составных частей технических устройств 70

— оптимальной сложности 44

— отработки 155

— роста надежности 154

— состояний 55

Моделирование абразивного изнашивания 266—270

— математическое 11

— приближенное 25

— равновесия упругих конструкций 30, 31

Моделирование физическое — Понятие 11
 — при испытаниях на ресурс 133
 — процесса трения 240, 241
Модель 11, 43 — Постепенное ее усложнение 133
 — базового процесса отработки 155
 — конструктивно-подобная 137
 — критериальная 159
Модель математическая 96
 — для расчета коэффициента режима 103
Модель марковская 92, 93
 — надежности системы с мажоритарным резервированием 117
 — неоднородная 15
 — однородная 15
Модель отказа изделия 65
 — статистическая 39
 — типовая в критериальной форме 40
 — физическая 39, 40
 — функционально-статистическая 39
Модель переноса информации 162
 — процессов отказов 139
 — развития отказа 34
Модель физическая конструктивно-подобная 41
 — процесса функционирования 51
Моменты времени сходственные 153 — Соответствие начальным и граничным условиям 153
Моноваленты 21
Мощность подмножества 115

Н

Нагрузка разрушающая 70
 — случайная 139
Надежность 218
 — подобных изделий 219
 — программного обеспечения 84, 85
 — протекания физического процесса 80
Наработка минимальная 102
 — на отказ 138, 184
 — суммарная 110—112
 — экземпляра-этапа 110
Независимость отказов 112

О

Обеспечение надежности — Задачи 89
Обработка лазерная 247—249
Образец базовый 14, 44, 124, 156
Обучение — Понятие 167
 — Процедуры 168, 170
Объединение выборок 176, 182
 — информации разнородной 109, 178

Объединение оценок 165, 166
 — двух 165
 — линейное 164, 166, 167
Объект натуральный 43
Объем отработочных испытаний 119
Однотипность систем 49
Ожидание математическое критериев подобия 33, 42
 — случайного процесса воздействия нагрузки 140
ОМП парциальная 179, 180
 — сбалансированная 179, 180
Оператор ввода исходных данных 75
 — вычисления 73
 — параллельного типа 97
 — последовательного типа 97
 — присвоения 73
 — проверки условия 73
Оператор ССН системы с мажоритарной структурой 101
 — с ненагруженным резервированием и аппаратно-программным средством восстановления 99
 — с ненагруженным скользящим N -кратным резервированием с ненадежным переключателем 101
Оператор суммирования 76
 — счетчик 75
Операция финишная алгоритма 79
Описание параметрическое 72
 — промежуточное — Последовательное приближение сложности 133
Опоры с газовой смазкой — Исследования 229, 230
Определенность априорная полная 186
 — частичная 186
Оптимизация плана испытаний 151
 — стратегий отработки 119
 — структуры 56
Отклонение среднее квадратическое эмпирическое апостериорное 207
Отклонения случайные — от расчетных режимов функционирования 42
 — от расчетных условий эксплуатации 42
 — параметров испытуемого изделия 42
 — параметров модели 42
Отказ — Установление вида 90
 — независимый 113
 — программного обеспечения 84
 — рабочий 85
Отношения связности 116
Отработка экспериментальная 123
Оценка — Средний квадрат ошибки 162
 — априорная 166, 167, 217
 — завершенности отработки 159
 — запасов работоспособности 17

- износостойкости материала 255, 256
- интенсивности отказов 186
- качества обработки поверхности материала 255, 256
- максимального правдоподобия 163
- Оценка надежности** 39
- ориентирующая 106
- Оценка несмещенная** 163
- объединенная 165
- уточненная 214
- экспериментальная 120
- Оценки байесовские** в условиях частичной априорной определенности 204
- непараметрические общие 199
- эмпирические 206, 218
- Оценки критериев стохастического подобия на основе рекуррентной процедуры** 132, 133
- подобия при выборе аналогов 47

П

- Параметры** вектора состояний 93
- детерминированно определенные 126
- конструкторско-технологические 121
- моделируемые режима работы испытываемых изделий 120
- нагружения 119, 120
- неопределенные 176
- определяющие 72
- потока отказов 213
- режима работы изделия 119
- структурные 114
- форсированного режима 150
- функциональные 121
- Плавление эвтектическое** 246, 247
- Планирование испытаний** 130, 152
- оптимальное 149
- ускоренных 146
- Планирование обработки** 119, 124
- экспериментальной 17
- Планирование эксперимента** 131
- Плотность вероятности априорная** 212
- распределения случайной величины 139
- функции распределения ошибок 87
- Погрешности в определении параметров** 42
- измерения 25
- моделирования 25
- обработки результатов 42
- получения критериев подобия 42
- приближенного подобия 50
- проведения опытов 42
- систематические 69
- условий эксплуатации 42

- Подобие** — Определение 13
- геометрическое 13
- детерминированное 51
- динамическое 13
- кинематическое 13
- неполное — Виды 15
- плана многофакторных испытаний 132
- полное 15
- приближенное 33, 130, 178
- Подобие процессов** возникновения отказа 153
- изменения ресурсных характеристик 144
- изнашивания модели и натурального изделия 145
- обработки интегральное 160
- Подобие стохастически определенных физических систем** 32
- Подобие стохастическое** 51, 128 — Сравнение изделий по запасам структурной и функциональной избыточности 53
- технических устройств 73
- Подобие физических явлений** 137
- физическое 47
- функциональное 51
- Подшипники газовые** — Технология формирования их рабочих поверхностей 230—233
- Поиск глобального минимума** 133
- Показатели качества** 60
- надежности 60, 123, 214
- степеней размерностей 35
- Построение априорного распределения** 216
- Потери из-за снижения надежности** 124
- информации 162
- Поиск отказов** 150, 165
- Правило оценочное** 163
- Преобразование подобное** 19
- Признаки количественные** 73 — Различие существенности их влияния 76
- Принцип выбора предельных нагрузок** 105
- самоорганизации 133
- Проверка статической гипотезы** 33
- Прогнозирование** 119
- Прогон программы** 85, 86
- Программы испытаний** 119
- Пространство признаков** 72
- факторное — Точки 132
- Процедура разложения структуры** 118
- рекуррентная оценивания приближенного подобия модели исследуемого изделия 59

Процедуры стандартные дисперсионного анализа 79
— эвристические 67

Процессы базовой обработки 156
— выявления и устранения источников отказов 156
— деградационные физико-химические 102

— дискретные 86
— изнашивания 141, 145, 152, 153
— определяющие 76

— определяющие физические 72
— обработки — Их динамика 154 —

Управление качеством 159
— пуассоновские нестандартные 87
— технологические стабильные 113

Прочность контактная 228, 229

Пуассона распределение 173

Р

Работоспособность 152 — Сохранение ее при воздействии внешних случайных факторов, разбросе параметров, изменении внутренних свойств 47

Разброс реализаций 121

Различие статистически значимое в оценках дисперсий 78

— в средних значениях исследуемых признаков 79

Размерность 22

Разрушение усталостное поверхностей трения 223

Распределение апостериорное 185, 213
— априорное сопряженное 187

— биномиальное 173
— двухпараметрическое экспоненциальное 171

— логарифмически нормальное 171, 198

— наработки до отказа показательное 53

— с линейной функцией интенсивности 191, 192

— экспоненциального типа 174

Расчет надежности 12

— окончательный 106

Режимы испытаний 153

— нормальные 152

— трения нестационарные 235

— форсированные 152

— энергетические элементы 105

Резервирование общее 53

— раздельное 53

Ресурс гамма-процентный 102

— технический 146

Рио—Крамера неравенство 163

Риск заказчика 112

— изготовителя 112

С

Связь функциональная 173

Семейство распределений экспоненциального типа 170, 178

Система единиц абсолютная 14

— изотропная 21

— с резервированием 92

— техническая 39

Ситуации минимальной информации 162

— отказовые возможные 76

Скорость процесса 141

Случай одномерный 125

Смещенность результатов испытаний 121, 122

Совокупность критериев подобия генеральная 34, 64, 83

— одномерных групп критериев подобия 81

— состояния изделия 60

Соотношение операторное 78

Состояние неработоспособное 59

— работоспособное 55, 59

— элемента схемы — Варианты 54

Спектр нагрузок 120

Способность несущая — Абсолютные и относительные значения 64

— масляной пленки 252—255

— смазочного материала 249

Статистика — Понятие 163

— достаточная 163, 170, 182

Степень заимствования отработанных решений 155

Стратегии обработки 126

Структура ветвящаяся 117

— мажоритарная 98

Схема биномиальная 187

— нагрузка—прочность 63

— надежности структурная 96

— успех—отказ 63

Т

Температура рабочая экземпляр-этапа 110

Теорема подобия — Дополнительные положения к ней 18

— вторая 18

— первая 18

— третья — Условия однозначности линейного процесса изнашивания 136

Теория подобия 13, 43

— стохастического — Учет фактора случайности физических параметров

при определении критериев подобия 35
Теплота преобразования скрытая 250
Точность вычисления показателей 60
 — изготовления изделий 120
 — моделирования режимов и нагрузок 121
Трение алмазов 246, 247
 — металлов 243—246
 — тугоплавких соединений 243—246
π-теорема 20

У

Уравнение инвариантное 19
 — критериальное из критериев подобия 19, 40
 — максимального правдоподобия 176
 — связи однородное 18
Уровень браковочный 146
 — вероятности критический 144
 — информативности исследователя 162
Уровень надежности заданный 130
 — промежуточный 48
 — требуемый 129
Уровень неподобия допустимый 144
 — отработанности изделия 48, 122, 135 — Динамика роста 55
 — сложности модели 43, 52
Условие квазиподобия 180
 — минимума дисперсии 134
Условия граничные 22
 — инвариантные 124
 — неразрушения изделия 71
 — однозначности 20, 21, 156
 — однородности 19
Условия подобия 18
 — стохастического 50, 52
Условия работоспособности 22
 — эксплуатации 122
Устройства восстанавливаемые 116
 — технические однотипные — Определение класса 73

Ф

Факторы вторичные (зависимые) 135
 — второстепенные 132
 — определяющие 76
 — первичные (независимые) 135
 — трибологические — Их учет при конструировании 263—266
Формула оценочная 179, 180
 — приведенная 176

Функционал аддитивный 57, 125
Функция апостериорного риска 185, 204
 — готовности — Стационарные значения 54
 — оценочная 168, 182
 — плотностей распределения 32, 87
 — правдоподобия 177, 184
 — распределения наработки на отказ 184
 — стохастического критерия подобия по запасам работоспособности 130

Х

Характеристики вероятностные нагрузки 139
 — процесса изнашивания 142
Характеристики выходные 40
 — состояния изделия 56
 — технические изделия 55, 119

Ц

Цензурирование многократное 204

Ч

Число возможных состояний — Их ограничение с учетом коэффициента их значимости 55

Э

ЭВМ микропроцессорная — Оценка ее надежности 114
Эксперимент активный 13
 — пассивный 12
Элементы коррелированные полностью 113
 — частично 113
Этапы серийного производства 17
 — эксплуатации 17
 — эскизного и технического проектирования 106
Эффективность обучения 170
 — объединенной оценки 165, 166
 — отработки 122
 — улучшенной оценки 165
Эффект трения гидродинамический 125

Я

Явления подобные 18
 — физические механического типа 80

СПРАВОЧНИК СПЕЦИАЛИСТА

**Владимир Андреевич Мельников,
Константин Васильевич Фролов,
Геннадий Яковлевич Гуськов и др.**

**НАДЕЖНОСТЬ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ
В ТЕХНИКЕ**

ТОМ 4

**МЕТОДЫ ПОДОБИЯ
В НАДЕЖНОСТИ**

Редактор *Т. Д. Онегина*
Художественный редактор *С. С. Вод-
чиц*
Переплет художника *А. Я. Михайлова*
Технический редактор *Н. Н. Скотни-
кова*
Корректоры *А. А. Снастина* и
Л. Е. Сонюшкина

ИБ № 4675

Сдано в набор 15.09.86. Подписано в
печать 27.07.87. Т-04547. Фор-
мат 60×90^{1/16}. Бумага офсетная № 2.
Гарнитура литературная. Печать оф-
сетная. Усл. печ. л. 17,5. Усл.кр.-
отт. 17,5. Уч.-изд. л. 22,82. Тираж
12 712 экз. Заказ 216. Цена 1 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Машиностроение»,
107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Ленинградская типография № 6 ор-
дена Трудового Красного Знамени
Ленинградского объединения «Техни-
ческая книга» им. Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государ-
ственном комитете СССР по делам из-
дательств, полиграфии и книжной
торговли.
193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко,
10.