

# Моделирование развивающихся систем

В.М. ГЛУШКОВ

В.В. ИВАНОВ

В.М. ЯНЕНКО



В. М. ГЛУШКОВ

В. В. ИВАНОВ

В. М. ЯНЕНКО

# Моделирование развивающихся систем



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1983

**Моделирование развивающихся систем.** Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.

В книге рассмотрены свойства развивающихся систем, формализованное отображение и изучение которых требует развития существующих моделей динамических систем. Вводится новый класс динамических моделей, основанный на нелинейных интегро-функциональных уравнениях с предысторией. Доказаны теоремы о существовании и единственности решений, проведены качественные и численные исследования свойств решений, решены различные оптимизационные задачи, исследованы задачи моделирования распределения ресурсов между отраслями макроэкономики групп А и Б, задачи моделирования некоторых механизмов регуляции перераспределения клеток в иммунокомпетентной и кроветворной тканях, моделирование процесса сахаронакопления в сахарной свекле и ряд других задач. Рассмотрены различные средства моделирования развивающихся систем.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие Г. И. Марчука . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Математическая теория динамики развивающихся систем . . . . .	9
§ 2. Динамические модели в экономике . . . . .	24
§ 3. Динамические модели в некоторых других областях . . . . .	29
<b>Глава 2. О новом классе динамических моделей . . . . .</b>	<b>40</b>
§ 1. Двухпродуктовые модели . . . . .	40
§ 2. $n$ -продуктовые модели . . . . .	50
§ 3. Континуальные модели . . . . .	53
§ 4. Некоторые видоизменения и уточнения моделей . . . . .	54
§ 5. Сравнение новых моделей с известными . . . . .	59
§ 6. Способы экспериментального определения исходных элементов моделей . . . . .	62
§ 7. Математические постановки некоторых задач моделирования . . . . .	64
§ 8. О границах применимости моделей . . . . .	66
<b>Глава 3. Аналитическое исследование нового класса моделей . . . . .</b>	<b>70</b>
§ 1. Примеры аналитического решения систем уравнений . . . . .	70
§ 2. Вопросы существования и единственности решений . . . . .	79
§ 3. Об устойчивости решений . . . . .	96
§ 4. Исследование границ изменения функций, связанных моделью . . . . .	102
§ 5. Выявление колебательных и волновых процессов . . . . .	112
§ 6. Выявление особых точек . . . . .	122
§ 7. Асимптотические свойства моделей . . . . .	126
<b>Глава 4. Аналитическое исследование задач оптимизации для нового класса моделей . . . . .</b>	<b>139</b>
§ 1. Примеры аналитического решения . . . . .	139
§ 2. Вопросы существования и единственности решений . . . . .	157
§ 3. Об устойчивости решений . . . . .	164
§ 4. О структуре решений оптимизационной задачи 1 для специального случая двухпродуктовой модели . . . . .	166
§ 5. Пример неединственности решения задачи 1 . . . . .	168

§ 6. Достаточные условия единственности решений оптимизационной задачи 1 . . . . .	174
§ 7. Некоторые обобщения и замечания . . . . .	183
§ 8. Асимптотические свойства решений . . . . .	184
<b>Глава 5. Численные методы для нового класса моделей . . . . .</b>	<b>189</b>
§ 1. Численные методы для идентификации моделей . . . . .	189
§ 2. Численные методы решения систем уравнений типа Вольтерра . . . . .	206
§ 3. Численные методы решения задач оптимизации . . . . .	214
§ 4. Об оптимизации численных методов . . . . .	221
§ 5. О распараллеливании алгоритмов . . . . .	234
<b>Глава 6. Общая схема и средства моделирования развивающихся систем . . . . .</b>	<b>240</b>
§ 1. О некоторых тенденциях развития средств математического моделирования . . . . .	240
§ 2. Методологическое обеспечение . . . . .	241
§ 3. Программно-алгоритмическое обеспечение . . . . .	258
§ 4. Комплекс технических средств системы моделирования . . . . .	268
<b>Глава 7. Приложения . . . . .</b>	<b>270</b>
§ 1. Моделирование оптимизации распределения рабочих мест между отраслями производства групп А и Б . . . . .	270
§ 2. Моделирование вычислительного процесса . . . . .	281
§ 3. Моделирование развития растений . . . . .	286
§ 4. Моделирование развития организма животных . . . . .	299
§ 5. Моделирование взаимодействия организма с антигеном . . . . .	302
§ 6. О применении моделей . . . . .	312
§ 7. Некоторые дополнения и теоретические обобщения . . . . .	315
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>334</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>337</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ Г. И. МАРЧУКА

*В настоящее время в связи с интенсивным развитием вычислительной техники и соответствующего математического обеспечения метод моделирования трудных задач при помощи ЭВМ стал одним из главных приемов теоретических и прикладных исследований. Различные проблемы для развивающихся систем — важный класс таких задач. К числу развивающихся систем относятся экономические системы в целом, отдельные отрасли и предприятия, научные организации, вычислительные центры, экологические системы, популяции, отдельные виды животных и растений, организм человека, различные органы и подсистемы организма, клетки животных и растений и т. д.*

*Существующие способы моделирования таких систем получили значительное распространение в нашей стране и за рубежом и привели к значительным результатам. Достаточно сказать, что без методов моделирования не обходится ни одна крупная государственная программа: планирование народного хозяйства, исследование космоса, энергетическая программа и др.*

*Тем не менее в связи с постоянным усложнением возникающих задач существующий аппарат моделирования нуждается в дальнейшем совершенствовании и обновлении. В данной монографии наряду с анализом современного аппарата предложен и обоснован новый класс динамических моделей, являющийся средством моделирования в наиболее трудных случаях. Основ-*

ной особенностью этого класса является возможность описания процессов воспроизводства в развивающейся системе, динамики сворачивания и ликвидации устаревших технологий, динамики распределения ресурсов на внутренние и внешние функции системы и т. д. Авторы не ограничиваются чисто теоретическими исследованиями. Отдельная глава книги посвящена приложениям теории к ряду конкретных задач экономики, биологии и некоторым другим областям.

В целом книга является определенным достижением в проблеме моделирования трудных задач с применением ЭВМ. Она может быть полезна широкому кругу специалистов.

Следует подчеркнуть, что трудами академика В. М. Глушкова был внесен большой вклад в науку и практику нашей страны. Данная книга подводит определенный итог важному разделу научного наследия В. М. Глушкова.

Г. И. МАРЧУК

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Известно, что метод математического моделирования с применением ЭВМ становится мощным и в то же время экономичным средством исследования самых разных и в первую очередь наиболее перспективных и трудных задач из различных областей деятельности человека. В течение примерно 30-летнего периода интенсивного развития технического, алгоритмического и программного обеспечения систем моделирования возможности таких систем многократно возросли. Если в начале указанного периода, например, общие линейные алгебраические системы могли успешно решаться примерно до 100-го порядка, то теперь — до  $10^4$ . Еще большие изменения произошли в отношении качественных возможностей. Языки программирования, операционные и диалоговые системы, банки данных, пакеты прикладных программ, средства оргтехники и многое другое поставлены на службу эффективного решения актуальных проблем науки и народного хозяйства страны.

Однако рост запросов, все возрастающий поток и усложнение задач опережают возможности систем моделирования. К числу задач, находящихся на пределе возможности современных ЭВМ, относятся многие важные задачи в технике, экономике и биологии. Системный подход к исследованию этих задач естественно приводит к необходимости моделирования различных объектов природы и общества как развивающихся систем (РС). Любой объект исследования, дополненный, если необходимо, определенными связями с другими развивающимися объектами, в частности с субъектами исследования, можно интерпретировать в виде РС. Конкретным примерам РС, а также их моделированию и посвящена настоящая монография.

Наряду с хорошо известным математическим аппаратом в книге рассматривается новый класс динамических моделей, специально приспособленный для описания РС. Суть и отличие этих моделей можно пояснить следующим сравнением. Широко известен метод «черного ящика», в котором структура исследуемого объекта никак не детализируется, а изучается лишь зависимость между входными воздействиями  $x(t)$  и соответствующими реакциями объекта  $y(t)$ , где  $t$  — время. В отличие от этого метода, для РС важно детализировать структуру, положив  $x(t) = z(t) + y(t)$ ,  $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$ , где  $z_1(t)$  является источником развития РС; ее значения  $z_1(u)$  для  $u \leq t$  определяют значения  $z(t)$ , т. е. служат средством воспроизводства внутреннего ресурса РС, а  $z_2(u)$  ( $u \leq t$ ) служат средством для выполнения внешней функции  $y(t)$ .

Первоначально новый класс динамических моделей возник при моделировании макроэкономических задач. Однако затем он был

существенно развит и применен для широкого класса РС с приложениями в экономике и биологии. Важной особенностью этого класса, по мнению авторов, является содержательная интерпретация всех элементов моделей, которая легко детализируется в применении к каждой конкретной РС. Вместе с тем в общем случае рассматриваемый класс моделей представляет собой сложную систему интегро-дифференциально-разностных уравнений с предысторией и рядом дополнительных ограничений на решения. В математическом плане дело усложняется постановкой и исследованием различных оптимизационных задач, а в прикладном — экспериментальным определением прогнозных значений исходных элементов моделей.

Комплексный характер исследования привел к необходимости взаимодействия со специалистами в области экономики, биологии и медицины. Авторы выражают признательность Асаченкову А. Л., Беляеву В. И., Воеводину В. В., Гойде Е. А., Голубкову Е. П., Гранатурову В. М., Гюллингу Э. В., Давыдову А. С., Добру И. Д., Дородницыну А. А., Евтушенко Ю. Г., Журавлеву Ю. И., Зуеву С. М., Коваленко И. Н., Канторовичу Л. В., Королюку В. С., Костюку П. Г., Красносельскому М. А., Кухтенко А. И., Лебедеву В. И., Лищуку В. А., Мазуренко В. А., Макарову О. М., Михалевичу В. С., Молчанову А. М., Немченко О. А., Нестеренко В. Г., Пацалюк С. С., Петрову А. А., Романовскому Ю. М., Савченко Р. Г., Сергиенко И. В., Скурихину В. И., Степаненко Р. Н., Степановой Н. В., Суслову Р. М., Фонталину Л. Н., Фуксу Б. Б., Чернавскому Д. С., Шарковскому А. Н., Шевченко В. Г. и Яненко Н. Н. Особую признательность авторы выражают Г. И. Марчуку, проявившему интерес к книге, Л. Н. Белых, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд существенных замечаний. Большую благодарность авторы выражают Н. Н. Моисееву и И. Г. Пospelову, замечания которых позволили избежать ряд нечетких и спорных мест в монографии и способствовали повышению ее качества.

Авторы благодарят также сотрудников отдела теории вычислений за полезное сотрудничество при написании соответствующих разделов, ссылки на результаты которых имеются в соответствующих местах монографии: Ю. П. Яценко — за активнейшее участие в исследованиях структурных свойств решений оптимизационных задач, за участие в создании численных методов и программных средств моделирования вычислительного и макродинамических процессов, М. Ф. Бейко — за участие в создании градиентного метода и программных средств, А. И. Березовского — за участие в создании численных методов и алгоритмов распараллеливания для задач аппроксимации и идентификации, П. Н. Бесараб и В. А. Людвиченко — за участие в создании численных методов решений уравнений и оптимизационных задач, соответствующих алгоритмов распараллеливания и выполнения большого вычислительного эксперимента для макроэкономических задач. При написании гл. 1, 2; гл. 3, п. 4, 5; гл. 5, пп. 1.2, 1.3, 2.1, 3.3; гл. 6, 7, пп. 3—6, 7.3, 7.7 использованы материалы докторской диссертации В. М. Яненко.

Цель настоящего введения — рассмотреть основные характеристики и свойства РС, дать краткое изложение широко распространенного в настоящее время математического аппарата описания динамических систем в теоретическом аспекте и в ряде приложений, обратить внимание на недостаточные адекватность и эффективность этого аппарата для описания РС. Главное внимание в этом изложении уделяется новейшим достижениям, причем приоритетные вопросы не рассматриваются.

Вначале излагаются общие математические методы описания обобщенных динамических систем, затем указывается ряд специальных методов описания, возникших в экономике, биологии и других областях.

В итоге приводится качественное обоснование необходимости введения нового формализованного аппарата для описания РС, которому посвящены последующие главы.

### **§ 1. Математическая теория динамики развивающихся систем**

#### **1.1. Основные понятия.**

**1.1.1. Некоторые свойства развивающихся систем.** Понятие развивающихся систем [75, 80, 103, 201, 224, 226, 227, 228, 297] приобретает все большее значение в различных отраслях науки. Важными примерами таких систем могут служить эколого-экономические системы в целом [66, 67, 176]; различные отрасли экономики и их конгломераты [67, 224]; отдельные предприятия, производственно-технические объединения и их конгломераты [246]; вычислительные центры и их сети [79]; научно-технический прогресс в целом, научные центры и др. [176, 243]; организм человека или животного в целом [3, 4, 42]; клетки, ткани, органы и системы организма [75, 80, 103, 226, 228, 297]; популяции различных видов животных и растений, биогеоценозы [176].

*Основные свойства развивающихся* (как искусственных, так и природных) *систем* могут быть, по-видимому, сформулированы следующим образом. В момент начала развития должно быть наличие определенных первоначальных ресурсов. В динамическую систему

должны поступать вещество, энергия и информация [75, 80, 103, 201, 224, 226, 227, 228, 297]. В РС должна быть подсистема воспроизводства и совершенствования РС, в том числе совершенствования самой этой подсистемы. Должен быть учтен характер условий внешней среды, во взаимодействии с которой РС создает и потребляет продукты, а также выделяет устаревшие ненужные продукты в «отвал». Должны выполняться некоторые балансовые соотношения между субстратами, поступающими в динамическую систему, и продуктами динамической системы, причем должна быть функциональная связь между ресурсами, затрачиваемыми на внутреннее развитие и на выполнение внешних функций динамической системы, между скоростью воспроизводства ресурсов, интенсивностью их использования и результатами функционирования системы [66, 75]. В частности, должны соблюдаться условия кооперативного и конкурентного поведения, обеспечивающие неравновесные состояния системы (системы, являясь неравновесными, могут переходить из одного квазиустойчивого (гомеостазисного) состояния в другое [79, 228, 297]); должны быть выделены автокаталитическая и демпфирующая переменные (диссипативные структуры); должны быть выделены идиотип-положительные и антиидиотипические, негативные переменные; должен быть учтен износ технологий воспроизводства и производства продуктов РС.

Рассмотрим два характерных примера: один — из области экономики, другой — биологии, на которых продемонстрируем наличие отмеченных свойств.

В качестве экономического примера рассмотрим макроэкономическую систему в рамках одной страны. Для этой системы могут быть решены задачи оптимизации распределения национального дохода между потреблением и накоплением (инвестициями) в условиях научно-технического прогресса. С этой целью разделим экономику, как это принято в политэкономии, на группу А (производство средств производства — подсистема совершенствования всей системы) и группу Б (производство предметов потребления — внешняя функция системы). В такую систему поступают обобщенный ресурс (сырье, энергия, информация) и трудовые ресурсы.

Одна часть отраслей группы А обеспечивает воспроизводство средств производства, а другая ее часть — производство предметов потребления. Подчеркнем сразу, что в группу А включается не вся тяжелая промышленность (как это нередко делается) и даже не все машиностроение. Например, производство легковых автомобилей, идущих в личное потребление, вместе со всем его обеспечением (металл, пластмассы, лаки и т. п.) должно быть включено в группу Б. Сюда же включается и вся продукция оборонной промышленности, идущая по ее прямому назначению (разумеется, также со всем обеспечением). Аналогично обстоит дело со строительством. Непроизводственное строительство (жилые дома, культурно-бытовые объекты, больницы и т. п.) относится к группе Б, а производственное (независимо от вида строящихся объектов) — к группе А. Кроме того, при вводе в строй новых производственных объектов их

необходимо снабжать оборотными фондами, которые могут быть предметами потребления, но выступают в данном случае в качестве средств производства.

Имея в виду все эти обстоятельства, на самом высоком уровне агрегации экономика может быть (с определенными допущениями) сведена фактически к одной обобщенной отрасли, одна часть которой работает в режиме группы А (производит средства производства, т. е. основные и оборотные фонды новых производственных объектов), а другая — в режиме группы Б (производит предметы текущего потребления). Допущения, о которых идет речь, состоят в том, что предполагается возможность беспрепятственного (мгновенного и без дополнительных затрат) переключения действующих технологий (прежде всего в строительстве и машиностроении) с производства средств производства (например, тракторов) на производство предметов потребления (например, танков) и наоборот. Разумеется, подобное допущение в полной мере никогда не имеет места на практике. Однако, имея в виду высокую степень агрегации модели, ее направленность на качественные исследования, а также относительную малость затрат на переориентацию существующих производственных мощностей по сравнению с затратами на их начальное создание, можно считать сделанное допущение достаточно приемлемым. Его приемлемость становится еще более обоснованной, если учесть, что обеспечивающие отрасли (например, топливная промышленность или электроэнергетика) в большинстве случаев вообще не требуют никаких переделок при переключении их продукции с режима А на режим Б и наоборот.

При более детальном рассмотрении отраслей групп А и Б могут быть получены такие режимы поведения, которые соответствуют кооперативному, конкурентному и другим режимам, связанные с процессами развития. Ликвидированные, устаревшие технологии и рабочие места естественно отнести к «отвалу» системы.

В качестве биологического примера выберем иммунную систему целостного организма. Иммунная система является одной из тех систем в организме, которые в процессе онтогенеза совершенствуют самих себя и обеспечивают эффективное развитие организма. При этом роль иммунной системы по-видимому состоит: 1) в обеспечении генетической индивидуальности организма (генетический гомеостазис) с помощью элиминации или деструкции появляющихся в результате мутаций чуждых организму клеток, попадающих в организм антигенов (Ag) вирусной или молекулярно-дисперсной природы, возникающих любых других поврежденных клеток, генетически отличающихся от клеток, свойственных данному организму; 2) в обеспечении продолжения рода с помощью механизма толерантности организма матери к плоду; 3) в обеспечении жизнестойкости вида за счет гибели организма.

Стволовая кроветворная клетка является родоначальницей клеток иммунокомпетентной и кроветворной тканей организма. Она обеспечивает воспроизводство и дает начало всем росткам кроветворной и иммунокомпетентной тканей организма.

При анализе имеющихся работ по математическому и экспериментальному исследованию иммунных систем прежде всего рассматривались те интегральные механизмы регуляции иммунной системы (сопряженной с другими системами организма), во взаимодействии которых собраны основные кооперативные и конкурирующие свойства. Эти свойства связаны с механизмами: а) регенерации тканей; б) различной интенсивности утилизации тех или иных веществ (ресурсов); в) различной скорости роста соответствующих клонов клеток иммунокомпетентной ткани; г) перераспределения ресурсов между «внутренними» и «внешними» функциями целостного организма и иммунной системой.

К кооперативным свойствам, по-видимому, следует отнести совместное действие различных клеток как иммунокомпетентной, так и неиммунокомпетентной (например, кроветворной) тканей в иммунном ответе. По-видимому, объединение клонов в кооперацию (состоящую из «позитивного» или «негативного» клонов, каждый из которых в свою очередь состоит из сложно взаимодействующих идиотип-антиидиотипических субпопуляций) осуществляется с целью обеспечения повышенной «производительности» (удельной скорости) воспроизводства клонов иммунной системы, а также обеспечения «кинетического совершенства» [275, с. 19] клона.

К конкурирующим свойствам, по-видимому, следует отнести: а) подавление антигенов при иммунном ответе, когда в организм попадает целый ряд антигенов; б) лидерство «негативного» клона над «позитивным» при иммунологической толерантности [200, 262]; в) последовательное включение идиотип-антиидиотипического взаимодействия в иммунном ответе [200] и др. По-видимому, конкурентное взаимодействие клонов, а также узкоспециализированное взаимодействие клона с Аг следует отнести к целенаправленному изменению характеристик всякой развивающейся системы, к выделению в ее структуре двух подсистем, одна из которых отслеживает быстрые, а другая — медленные изменения среды, что связано с необходимостью повышения эффективности взаимодействия организма со средой.

Рассмотрение различных свойств и примеров развивающихся систем показывает, что давать строгое математическое определение РС, по-видимому, не представляется целесообразным. В настоящее время существуют различные определения систем, которые в той или иной степени подробно описывают поведение отдельных свойств РС. Так, например, в [187, с. 147] приведено определение *кибернетических систем* в виде «...систем, которые являются обобщением управляемых систем... с кибернетической системой будет уже ассоциирована целая группа субъектов, обладающих собственными целями». Однако определение «кибернетической системы» отличается от описания РС тем, что в описание последней вводятся сами субъекты не только с их целями, но и с их динамическими и эволюционными характеристиками.

Пожалуй, наиболее близкими к необходимым для описания РС динамическими моделями являются модели систем с участием людей.

**1.1.2. Понятие математической модели.** *Математическая модель* в общем смысле является множеством символических математических объектов и отношений между ними. Математическая модель будет воспроизводить выбранные стороны развивающейся системы, если будут установлены правила соответствия, связывающие специфические объекты и отношения системы с определенными математическими объектами и отношениями. Модель — это система, отражающая другую систему [3].

Одно из более детальных определений математических моделей, удобных для описания многих объектов и характеристик качества самих моделей, дано в работе [75]. Пусть нас интересует вектор состояний  $R$  некоторого объекта  $O$ , причем известны такие функция  $R = R(I)$  и множество  $M$ , что

$$\|R(I) - \bar{R}\|_1 \leq \delta(\varepsilon), \quad \|I - \bar{I}\|_2 \leq \varepsilon, \quad I \in M, \quad (1.1)$$

с вероятностью  $p$ , где  $\bar{R}$ ,  $\bar{I}$  — идеальные значения соответственно состояний  $R$  и признаков  $I$ , от которых зависит  $R$  (но  $R$  зависит не только от  $I$ ),  $\varepsilon$ ,  $\delta(\varepsilon)$  — известные положительные числа,  $\|\dots\|_{1,2}$  — меры близости в пространстве состояний и признаков. Тогда будем говорить, что имеется строгая математическая модель объекта  $O$  по отношению к состоянию  $R$ . Пусть размерность вектора  $I$  есть  $n$ . Если указан способ выбора  $n = n(\varepsilon, p)$  и соответствующих признаков  $I$ , которые обеспечивают соотношение (1) с любыми наперед заданными значениями  $\varepsilon$ ,  $p$  ( $\varepsilon > 0$ ,  $0 < p < 1$ ), причем  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то будем говорить, что имеется *достаточно точная стохастическая модель* по отношению к состоянию  $R$ . При  $p = 1$  имеем достаточно точную детерминированную модель.

Для динамических моделей в число признаков  $I$  обычно входит время  $t$ .

В настоящее время для многих объектов (в первую очередь биологических) еще нет строгих и достаточно точных математических моделей.

Новые цели исследований приводят к появлению новых классов динамических моделей, таких как логико-дифференциальные, использующие (например, для описания биосинтеза белка [228, 236]) аппарат математической логики, теории вероятностей и дифференциальных уравнений [25, 157, 158, 217]; детерминированно-стохастические [57, 148], использующие аппарат общей алгебры, теории вероятностей; метод фазового укрупнения сложных систем; интегральные [67], использующие интегральные уравнения и функциональный анализ;  $L$ -модели [303], основанные на теории языков, и др.

В связи с наметившимся направлением появления новых классов динамических моделей здесь целесообразно привести высказывание А. Г. Куроша [57, с. 6]: «В соответствии с общими тенденциями современной науки (например, физики) новые объекты изучения, новые теории будут появляться здесь (в общей алгебре) не с перерывами в десятилетия, а все чаще и чаще. Остановить этот процесс не-

возможно, пытаться это делать — неразумно. Можно лишь направлять этот процесс. Именно в такой аксиоматической науке, как общая алгебра, не нужно большого ума для того, чтобы создать новые объекты изучения. Труднее их оправдать».

Появление нового класса интегро-функциональных моделей [67], традиционно связанного с интегральными уравнениями вольтерровского типа, было обусловлено необходимостью учета процесса ликвидации устаревших технологий, рассмотрения подсистем самовоспроизводства и производства внешнего продукта в РС, а также необходимостью описания разнообразных специальных свойств развивающихся систем, часть из которых была приведена выше. Таким образом, появилась практическая необходимость создания модели, в рамках которой не только можно было бы получить каждое из свойств в отдельности, но и вне рамок которой нельзя было бы их объяснить и понять в совокупности. Этот класс моделей естественным образом требует доказательства достаточной для практики адекватности модельных функций соответствующим экспериментальным данным, требует указания ограничений на область их применимости.

Многие исследования, проводимые в настоящее время, необходимо связаны с такими основными этапами, как формулировка постулатов и гипотез — разработка математической модели объекта управления — постановка задач — определение измеримых параметров объекта — разработка плана экспериментальных работ — определение методов, алгоритмов, программно-технических средств моделирования — оценка принципиальной возможности достижения цели за требуемый период — определение цены моделирования при фиксированном объеме предварительной алгоритмизации — определение адекватности модели и др. Основным этапом является не столько создание модели объекта, сколько доказательство достаточной ее адекватности. В конечном счете это дает возможность открывать новые свойства и закономерности изучаемого объекта с помощью созданной модели. В связи с этим последующий материал настоящей главы будет состоять из описания некоторых классических динамических моделей (§§ 1, 2), явившихся отправным пунктом в развитии разрабатываемого в настоящей монографии аппарата интегро-функциональных моделей. Также будет проведен сравнительный анализ с другими способами описания динамических систем (п. 1.2.3), будут рассмотрены некоторые подходы к созданию простейших (базовых) и усложненных моделей, наделенных свойствами развивающихся систем (п. 1.3). Кроме того, будут проведены сопоставительные анализы предлагаемого класса моделей с известными подходами в экономической (§ 2) и биологической (§ 3) кибернетике.

**1.2. Классические методы описания динамических систем.** В зависимости от целей исследования могут быть использованы различные классические методы описания и исследования динамики систем. Один из таких методов основан на том, что широкий класс динамических систем в линейном и конечномерном приближении

может быть представлен в виде

$$R(t) = \int_{-\infty}^t K(\tau, t) I(\tau) d\tau, \quad (1.2)$$

где  $I$  — вектор входных воздействий,  $R$  — вектор реакций системы,  $K$  — матрица импульсных переходных функций системы,  $t$  — время. В нелинейном случае  $K$  еще зависит от  $I$ .

Другие, более распространенные формы записи динамики системы предполагают использование дифференциальных уравнений. Прежде чем сравнивать два указанных подхода, изложим основные результаты метода дифференциальных уравнений.

**1.2.1. Качественная теория динамических систем.** Пусть поведение динамической системы описывается совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{r}_i = f_i(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.3)$$

где  $R = (r_1, \dots, r_n)$  — состояние (точка) системы,  $\alpha_i$  — параметры системы. Тогда стационарное состояние находится из уравнения

$$f_i(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.4)$$

Если  $r_i = a_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) — особая точка — решение системы конечных уравнений (4), то вопрос об устойчивости полученного стационарного состояния решается вычислением корней характеристического уравнения

$$P(\lambda) = \det \{A_{ik} - \lambda \delta_{ik}\} = 0, \quad A_{ik} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial r_k} \right)_{r_s = a_s},$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad (1.5)$$

Стационарное состояние устойчиво, если  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), где  $\lambda_i$  — корни уравнения (5). Точки, в которых нарушаются условия устойчивости, называются *критическими* или *экстремальными*.

Наиболее разработана теория динамических систем второго порядка [6, 9, 199, 222]. Различные фазовые портреты, соответствующие простым и сложным типам движений динамических систем, см. в [9, 29, 41].

**1.2.2. Редукция сложных моделей.** Пусть (3) является автономной системой дифференциальных уравнений, в которой одна часть уравнений

$$\dot{r}_{i1} = f_{i1}(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad i_1 = \overline{1, i_1^0}, \quad (1.6)$$

относится к системе медленных движений, а вторая часть

$$\varepsilon \dot{r}_{i2} = \tilde{f}_{i2}(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad i_2 = \overline{i_1^0 + 1, n}, \quad \varepsilon^{-1} \tilde{f}_{i2} = f_{i2}, \quad (1.7)$$

относится к системе быстрых движений.

При  $\varepsilon = 0$  системы (6), (7) переходят в систему

$$\begin{aligned} \dot{r}_{i_1} &= f_{i_1}(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k), \\ 0 &= \tilde{f}_{i_2}(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k), \end{aligned} \quad (1.8)$$

которая называется *вырожденной*. Система (7) называется *присоединенной*. При этом имеет место следующая [253]

**Теорема Тихонова.** *Решение полной системы (6), (7) стремится к решению вырожденной системы (8) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , если*

а) решение  $\bar{r}_{i_1+1}, \dots, \bar{r}_n$  системы  $\tilde{f}_{i_2}(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$  ( $i_2 = \overline{i_1^0 + 1, n}$ ) — *устойчивая изолированная точка системы (7) при всех значениях  $r_1, \dots, r_{i_1^0}$ ;*

б) *начальные условия  $r_{i_1+1}^0, \dots, r_n^0$  для системы (7) попадают в область влияния устойчивой особой точки;*

в) *решение полной системы и присоединенной системы (7) единственно и правые части этих систем непрерывны.*

Эта теорема позволяет понизить порядок системы (3) и предоставляет возможность для практического ее исследования. Общая схема редукции систем дифференциальных уравнений с многочисленными примерами дана в [103, 110, 228]. Суть ее заключается в следующем:

1) для исследуемой системы необходимо составить блок-схему структурно-функциональной организации;

2) затем составить математическую модель системы (с учетом целесообразного объема и уровня алгоритмизации), выделить системы быстрых и медленных движений, провести обезразмеривание параметров, понизить порядок системы уравнений;

3) исследовать устойчивость движений системы, определить стационарные точки, исследовать характер особых критических точек;

4) на основании качественного исследования выбрать параметры для численного исследования модели, получить численные решения и верифицировать их по экспериментальным данным;

5) оценить область применимости модели, возможный социально-экономический эффект от ее использования в фундаментальных и прикладных исследованиях.

**1.2.3. Сравнительный анализ методов интегральных и дифференциальных представлений.** Рассмотрим прежде всего вопрос о том, каким образом результаты по устойчивости систем (п. 1.2.1) могут быть получены на основе интегрального представления вида (2). Функцию  $K(t_0, t, R_0)$  нужно выбрать так, чтобы каждой интегральной кривой системы вида (3) с начальным вектором  $R_0 = R(t_0)$  соответствовала в (2) вектор-функция

$$R^0(t) = K(t_0, t, R_0) R^0, \quad K(t_0, t_0, R_0) R^0 = R_0, \quad (1.9)$$

которая получается, если положить  $I(\tau) = R^0 \delta(\tau - t_0)$ , где  $\delta(\cdot)$  —

функция Дирака. Исключая  $t$  из соотношений (9), получаем уравнение интегральной кривой в фазовых переменных.

Особым точкам автономной системы (3), т. е. системы, не содержащей в правых частях в явном виде  $t$ , соответствуют такие  $\bar{R}$  в пространстве фазовых переменных, для которых

$$\bar{R}'(t) = K_t'(\bar{t}, t) K^{-1}(\bar{t}, \bar{t}) \bar{R} \equiv 0, \quad -\infty \leq t \leq \infty. \quad (1.10)$$

Особая точка  $\bar{R}$  будет устойчивой, если для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что

$$\|R_0 - \bar{R}\| < \delta \Rightarrow \|R^0(t) - \bar{R}\| \leq \varepsilon, \quad (1.11)$$

где  $\|\cdot\|$  — знак нормы в пространстве векторов. Во всех остальных случаях особая точка будет неустойчивой.

Указанное в п. 1.2.1 исследование не относится к вопросам устойчивости  $R(t)$  при малых возмущениях  $\delta I$  входных данных  $I$ , т. е. к исследованию

$$\delta R = \int_{-\infty}^t K_{I+\delta I}(\tau, t) (I + \delta I)(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^t K_I(\tau, t) I(\tau) d\tau, \quad (1.12)$$

так как малому возмущению  $\delta R_0$  соответствует возмущение  $\delta y = \delta R_0 \delta(\tau - t_0)$ , которое при  $\tau = t_0$  принимает неограниченное значение. Случай малых  $\delta y$  относится к вопросам устойчивости собственных изменений системы при возмущении ее начальных состояний, а случай малых  $\delta R$  — к вопросам устойчивости вынужденных изменений системы.

Рассмотрим теперь вопрос об интерпретации теоремы Тихонова в случае представления (2). В силу условий теоремы соотношение (11) принимает вид

$$\|\{r_{0i_2}\}_{i_0+1}^n - \{\bar{r}_{i_2}\}_{i_0+1}^n\| \leq \delta \Rightarrow \|\{r_{i_2}^0(t)\}_{i_0+1}^n - \{r_{i_2}\}_{i_0+1}^n\| \leq \varepsilon, \quad (1.13)$$

которое выполняется равномерно относительно  $\{r_{i_1}\}_1^{i_0}$ . Кроме того, с ростом  $t$  второе неравенство в (13) из-за увеличения  $r_{i_2}^0(t)$  выполняется все быстрее и при все больших  $\delta$ . Это последнее обстоятельство и означает, что в пределе достаточно рассматривать лишь решение вырожденной системы.

Как видно, аппарат дифференциальных и интегральных представлений позволяет получать по существу одинаковые результаты. Поэтому в пользу того или иного аппарата при их сравнении в основном говорит лишь удобство и привычка его применения, трудность получения исходных функций  $f_i$  в (3) или  $K_i(\tau, t)$  в (2) и т. д.

Все же отметим определенные, на наш взгляд, теоретические и прикладные преимущества интегральных представлений в силу

большой компактности записи (2) и устойчивости операции интегрирования по сравнению с операцией дифференцирования. Это позволяет, в частности, без особых осложнений рассматривать выражение (2), в котором  $K(\tau, t)$  является произвольной кусочно-непрерывной функцией, что в случае дифференциальных представлений означает необходимость рассмотрения дифференциальных уравнений неограниченного порядка и с разрывными правыми частями. Некоторые другие преимущества интегральных представлений будут указаны при изложении других глав, которые, в сущности, и посвящены развитию представления (2).

**1.3. Новые подходы в исследованиях динамических систем.** Появление в связи с кибернетикой новых формальных систем, таких как теория автоматов, теория моделей, а также переход от частных аналитических к более общим алгоритмическим методам значительно увеличили познавательную силу математических методов, расширили сферу их применения.

Наряду с этим кибернетические методы вскрыли качественно новые аспекты в традиционных, хорошо исследованных областях, где имелись важные и интересные результаты, полученные другими методами [158].

**1.3.1. Алгоритмически-автоматное описание.** Данный подход был использован при моделировании процессов самовоспроизводства, роста и развития на основе теории автоматов, начало которому положено в работах [65, 312]. В последующем на их основе были получены интересные результаты, связанные с моделированием роста и образованием новых структур для кольца из 60 клеток в одно- и двумерном случаях [228, 312].

Дальнейшее развитие этого направления связано с разработкой нейронных сетей, в частности, с созданием динамических перцептронов [8, 65, 209], которые предназначены для моделирования основных свойств интеллектуальных развивающихся систем — механизмов долговременной памяти и механизмов воспоминаний событий из прошлого. Другим классом задач, решаемых нейронными сетями, являются задачи распознавания существенных признаков зрительных образов с помощью однорядных многослойных детерминированных и стохастических, необучаемых и обучаемых нейронных сетей [60, 291]. В этих работах были решены принципиально новые задачи, например, восприятие числа образов с помощью нейронных сетей на основе аксиоматически построенного аппарата алгебры нейронных матриц.

Еще одним важным свойством развивающихся систем является способность к движению, мышечной подвижности. Некоторые результаты в этой области представлены в новом аспекте самоорганизации и управления в возбудимых средах [37].

**1.3.2. Квазистохастическое поведение простейших детерминированных моделей (странные аттракторы).** Определенным этапом в исследовании поведения динамических систем явились работы [6, 9, 305], начало которым было положено работами [170, 222] и [6]. В настоящее время результаты этих исследований повлияли прак-

тически на развитие всех направлений, связанных с моделированием сложных, в том числе и развивающихся, динамических систем.

Ранее широко распространенные представления о динамике сложных систем в фазовом пространстве ныне существенно обогатились представлением о квазистохастическом движении как об одной из разновидностей сложного поведения детерминированных систем.

Как установлено [305], некоторые динамические системы при определенных условиях (значениях параметров) могут порождать движения, которые можно рассматривать и интерпретировать как случайные квазистохастические. Так, например, наиболее изученным является уравнение Лоренца, описывающее тепловую конвекцию между двумя плоскостями с разной температурой, вида [305]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{1.14}$$

где  $x$  — интенсивность конвективного движения,  $y$  — разность температур между нисходящими и восходящими потоками жидкости,  $z$  — отклонение вертикального распределения температуры от равновесного линейного профиля,  $\sigma$  — число Прандтля,  $r$  — число Рэлея,  $b$  — константа, характеризующая размеры системы.

При  $b = 8/3$ ,  $\sigma = 10$  и изменениях  $r$  в диапазоне  $14 \div 48,5$ , как показано в [11], система (14) имеет весьма разнообразные осциллирующие решения, в том числе странные аттракторы (СА) [305] и другие решения. При  $r = 28$  траектории из одного полупространства переходят в другое нерегулярным образом.

Считалось, что движения, более сложные, чем предельные циклы, седла, фокусы и т.д., появляются в многомерных системах с большим числом степеней свободы, например, при турбулентном движении неньютоновой жидкости, описываемом с помощью уравнения Навье — Стокса.

Однако уже в трехмерном случае для нелинейных дифференциальных уравнений [305], а также в разностных уравнениях в двумерном [216] и одномерном [270] случаях возможны решения типа квазистохастических. Установлено, что таким сложным стохастическим поведением обладают при определенных условиях многие физические, химические, биологические, экологические, экономические и другие системы.

Большое внимание уделяется нахождению новых СА в дву- и одномерных уравнениях в конечных разностях. Так, например, в [216] рассмотрено уравнение вида

$$\begin{aligned}N(t+1) &= f(N(t)), \\ f(N) &= N[1 + r(1 - N)/k].\end{aligned}\tag{1.15}$$

Это уравнение, как показано в [216, 270], имеет решение типа странных аттракторов. Более подробное рассмотрение различных видов разностных уравнений см. в [216, 299].

Как было исследовано в [9, 27], с возникновением странных аттракторов в динамической системе связаны такие ее свойства, как эргодичность, перемешивание, гиперболичность системы. Нахождение этих свойств динамической системы и является доказательством необходимых и достаточных условий существования квазистохастических решений динамической системы. Под эргодичностью понимается совпадение средних по времени со средними по фазовому пространству.

Область фазового пространства называется *областью с перемешиванием*, если в произвольной подобласти данной области существуют точки фазовой траектории, проходящей через любую другую подобласть данной области.

Гиперболичность системы состоит в том, что все фазовые траектории динамической системы являются седловыми, а устойчивая и неустойчивая сепаратрисы непрерывно зависят от траекторий. В [239] было доказано существование гиперболических странных аттракторов, но пока не удалось их обнаружить.

В силу сложности аналитического отыскания СА для большинства динамических систем в настоящее время признаны полноправными способы доказательства существования СА в фазовых портретах динамических систем при помощи ЭВМ [9, 239]. Развитие этих исследований идет в направлении создания алгоритмов и программного обеспечения, позволяющих определять существование и находить СА в фазовом портрете динамической системы. Однако созданные алгоритмы и программы, анализирующие существование СА в фазовом портрете динамической системы и отличающие их от белого шума, от колебательных решений, все же требуют указания областей в фазовом пространстве, где могут существовать СА. Кроме того, эффективность этих алгоритмов естественным образом ограничивается погрешностью округления на ЭВМ. Следует заметить, что от этих алгоритмов выгодно отличаются созданные алгоритмы для исследования некоторых сложных стационарных точек [29, 266] и, возможно, идеи, лежащие в основе последних, могут способствовать разработке более эффективных алгоритмов для численного исследования СА.

Было замечено [300, 306], что такое явление в фазовом пространстве динамической системы, как возникновение СА, находится в «параметрической» близости с возникновением так называемых катастроф в фазовом портрете той же динамической системы.

**1.3.3. Теория особенностей гладких функций (теория катастроф).** Теория катастроф возникла на стыке алгебры, анализа, топологии; она представляет собой часть теории динамических систем [5, 9, 170].

Теория катастроф получила дальнейшее развитие и сформировалась в том виде, в каком она сейчас широко известна, в работе [217].

В данной теории рассматривается поведение решений системы

$$\dot{q}_i = - \frac{\partial v(\{q_i\}, \mu)}{\partial q_i}$$

при медленном изменении параметров  $\mu$ . Теория катастроф дает [40] определенную классификацию решений. При этом под *катастрофой* понимается поведение решений динамической системы в окрестности бифуркационных точек ее пространства параметров, т. е. точек возможных потерь структурной устойчивости и ветвлений решений.

В настоящее время существуют и разрабатываются новые программные средства построения элементарных катастроф для довольно широкого класса динамических моделей. Подробнее о программных средствах и вычислительных аспектах в теории катастроф см. в [217], а также в многочисленных ссылках, которые там имеются. Результаты теории катастроф нашли свое применение в решении разнообразных задач многих наук.

**1.3.4. Автоволновые процессы.** Перспективными в разработках моделей развивающихся систем являются подходы, основанные на моделях автоволновых (АВ) процессов. По определению из [227] АВ процессы возникают и распространяются в активных кинетических средах в результате потери устойчивости однородного состояния. Каждый элемент такой среды [103, 110, 227, 228] является источником энергии; может последовательно переходить от возбужденного, далее заторможенного, а затем к рефрактерному состоянию; является термодинамически открытой системой; взаимодействует с соседними элементами за счет процессов переноса. Под АВ процессами также понимаются самоподдерживающиеся волны в активных средах, сохраняющие свои характеристики постоянными за счет распределенного в среде источника энергии. Эти характеристики — период, длина волны, амплитуда и форма — в установившемся режиме зависят только от локальных свойств среды и не зависят от начальных условий, а достаточно далеко от границ среды не зависят и от краевых условий и линейных размеров системы [154, с. 6]. Математическая модель активной кинетической системы описывается уравнением вида [217, 226—228]

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = f_i(\{q_i\}) + D_i \nabla^2 q_i, \quad (1.16)$$

где  $f_i(q_i)$  — нелинейные функции, описывающие взаимодействие  $q_i$  компонент. Различные фазовые портреты функций  $f_i(q_i)$  ( $i = 1, 2$ ), содержащих неустойчивые особые точки, представлены на рис. 1.1, где  $\varphi(q_1, q_2)$  — нуль-изоклины для случаев ждущего (1), триггерного (2) и автоколебательного (3) режимов.

В рамках представленной модели возможно описать следующие типы АВ процессов [227]: 1) распространяющиеся возмущения в виде бегущего импульса (БИ); 2) генерация волн автономными источниками импульсной активности — режим «эхо» и стабильного

ведущего центра (ВЦ); 3) стоячие волны (СВ); 4) синхронные автоволны во всем пространстве (САВ); 5) квазистохастические волны (КСВ); 6) диссипативные структуры (ДС) — стационарные неоднородные распределения переменных в пространстве. На основе данной классификации в [227] были обобщены характеристики некоторых АВ процессов. Данные типы волн определяются в основном свойствами параболических уравнений; эти волны распространяются

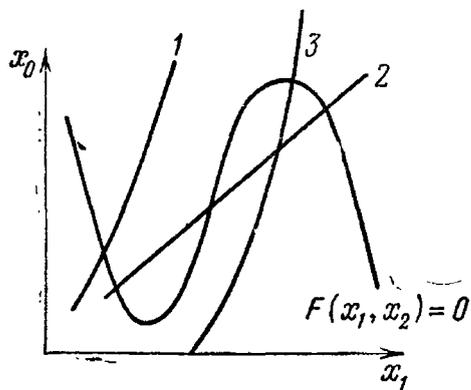


Рис. 1.1.

в активных (неконсервативных) системах. Они отличаются от волн солитонного типа [92, 242], которые в свою очередь определяются в основном свойствами гиперболических волн. Распространение последних возможно в консервативных средах, при взаимодействии между ними амплитуда и частота не изменяются, а после взаимодействия наблюдается сдвиг фазы. Связь между эллиптическими и гиперболическими волнами изучена в [288].

Здесь вкратце следует заметить о большой роли применения упомянутых выше моделей волновых процессов в познании целого ряда явлений в биологии. В частности, изучение волновых процессов и создание адекватных математических моделей в биохимических средах, возбудимых средах типа сердечной мышцы [103, 110, 226—228, 251a] и др. позволили более глубоко понять условия распространения возбуждений в норме и при патологии, выработать рекомендации по управлению процессом передачи возбуждения по возбудимой среде. Так, например, при возникновении фибрилляции желудочков миокарда может быть определен оптимальный режим воздействий, при которых происходит срыв фибрилляции.

Однако, несмотря на достигнутые успехи в области математического моделирования, многие из известных моделей еще предстоит усовершенствовать, а также доказать их адекватность. Это также относится и к возможности использования солитонов в биологии. Пока проблема передачи энергии «без потерь» в биологических системах остается открытой, главная же проблема состоит во введении затухания и подкачки энергии в моделях солитонного типа. Вместе с тем эти работы играют стимулирующую роль, и возможно, что в ближайшем будущем будем иметь обобщенную картину как в случае описания механизмов передачи возбуждения (информационный канал), так и передачи энергии (энергетический канал).

**1.3.5. Теория групп и инвариантов.** Перспективным подходом в разработке теоретических основ развивающихся систем является теоретико-групповой подход. Понятия и методы теории групп по определению [1, с. 5] «приобретают в настоящее время все большее господство над самыми различными разделами математики и ее приложений и наряду с понятиями функции относятся к самым фундаментальным понятиям всей математики». Такое применение тео-

рии групп обусловлено тем, что в исследовании многих объектов необходимо учитывать информацию о свойствах симметрии этих объектов и др. Важным этапом в теоретико-групповом подходе принято считать *эрлангенскую программу Клейна*. Она сыграла существенную методологическую роль, позволив определить с единых позиций структуру и способ построения некоторого класса геометрий. Основные положения этой программы формулируются следующим образом: «Дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразования группы... Это — общая задача, заключающая в себе не только обыкновенную геометрию, но и новейшие геометрические методы ... и различные приемы исследований многообразий любого числа измерений» [137, с. 402].

Дальнейшее развитие этого направления привело к исследованию разнообразных задач в рамках теории групп (например, симметрии), а также в теории инвариантов [158, 258].

Особый интерес у исследователей вызывает изучение неравномерных (аллометрических) изменений отдельных частей развивающейся системы. Обычно экспериментальные данные по относительному изменению (росту) этих частей хорошо аппроксимируются степенной функцией вида [99, 126, 149]

$$y = \beta x^\alpha, \quad (1.17)$$

где  $x, y$  — значения исследуемых величин,  $\alpha, \beta$  — параметры.

Универсальное использование зависимости (17) породило так называемый *парадокс Холдейна*, который состоит в том [149], что если рост отдельных частей описывается степенной функцией (17) с различными показателями степени  $\alpha$ , то их сумма для различных  $\alpha$  не описывается функцией того же вида для целостного органа или системы. Этот парадокс некорректно сформулирован, что следует из теории размерностей [149, 136, 235]. Использование аппарата теории групп к обоснованию аллометрических зависимостей предложено в работах [99, 149, 294], а развитие этого аппарата см. в [149, 203]. При выводе уравнения аллометрического роста эффективно используется связь дифференциального уравнения аллометрического роста с II-теоремой [41, 294]. При этом показано, что морфологическое подобие изменений пропорций отдельных частей означает аффинную эквивалентность анализируемых форм. Здесь также изучена взаимосвязь аллометрических зависимостей с принципом оптимальности [225], дан биологический смысл коэффициентов  $\beta$ . Систематическое изучение биологического смысла аллометрических закономерностей см. в [34, 50, 98, 106, 149, 294].

Существенное развитие методов теории алгебраических инвариантов дано в работе [158]. Эти методы нашли широкое применение в задачах автоматического управления. С их помощью получены условия разрешимости задач инвариантности, чувствительности и автономности при внешних и параметрических действиях. Эти условия выражены через алгебраические инварианты группы линейных преобразований уравнений динамической системы.

**1.3.6. Метод КБМ.** Дальнейшее изучение поведения сложных динамических систем нашло отражение в работе [38], связанной с разработкой метода малого параметра, вылившейся в новое направление асимптотических методов теории нелинейных колебаний.

В окрестности критических точек динамическая система (8) нередко может быть записана в виде

$$\dot{R} = \varepsilon f_1(R, t), \quad (1.18)$$

где  $\varepsilon$  — достаточно малый параметр. Поэтому весьма эффективными оказываются асимптотические методы, сущность которых состоит в построении приближенных решений, удовлетворяющих (18) с ошибкой  $\varepsilon^{m+1}$ , где  $m$  — порядок приближения, на достаточно большом временном интервале. Уравнение первого приближения имеет вид

$$\dot{\xi} = \varepsilon f_0(\xi), \quad f_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(R, t) dt. \quad (1.19)$$

При весьма общих условиях

$$|R(t) - \xi(t)| \ll \delta, \quad 0 < t < L/\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

где  $R$ ,  $\xi$  — решения соответственно систем (18), (19),  $\delta$  — сколь угодно малое положительное число,  $L$  — сколь угодно большое число,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta, L)$ .

Построение 2-го и последующих приближений с необходимыми обоснованиями и многочисленными приложениями можно найти в [38].

В последнее время асимптотические методы получили дальнейшее обобщение и развитие под названием методов решения так называемых жестких систем, широко представленных в математической экономике и биологии [244].

## § 2. Динамические модели в экономике \*)

Применение математических методов в исследованиях экономической динамики прошло период взаимного непонимания специалистов разных областей и дало ряд положительных результатов [17, 130, 152, 157, 159, 185—187, 210, 259].

**2.1. О классификации моделей.** Известны различные детальные и обобщенные классификации моделей экономических систем (МЭС) [152, 210, 259], в той или иной мере удовлетворяющие практическим целям. Представляется удобной классификация динамических экономических моделей, предложенная в [210]. В частности, там подчеркивается, что модели социалистического производства базируются на принципе народнохозяйственного оптимума, а капиталистические — на принципе максимизации прибыли.

\*) При написании данного параграфа существенную помощь авторам оказали У. Е. Галиев, Л. А. Яненко, Ю. П. Яценко.

тического — на микро- и макроэкономической теории рыночной экономики. Приведем здесь эту классификацию [210, с. 28, 29].

**2.1.1. Макромодели экономического роста.** *Макромодели экономического роста*, одно- или многосекторные, содержат более или менее детальное описание производственно-технологических возможностей и связей в хозяйстве и их изменений во времени. Непроизводственная сфера экономики и регулирующие хозяйство экономические механизмы схематизированы в этих моделях. Как правило, считаются заданными потребности общества в конечном продукте — в одних случаях в явном виде, в других — через функцию общественных предпочтений потребления (критерий оптимальности). Модели роста дают возможность построить технологически допустимый план функционирования и развития хозяйства, который наилучшим образом обеспечивает удовлетворение общественных потребностей. При этом предполагается, что экономические механизмы таковы, что автоматически обеспечивают реализацию полученного плана. Такого рода модели распространены у нас в стране и за рубежом.

**2.1.2. Микромоделю равновесия.** *Микромоделю равновесия* содержат описание производственно-технологических возможностей хозяйства, описание непроизводственной сферы потребления произведенных продуктов и описание механизмов, регулирующих обмена и распределение произведенной продукции. В зарубежной литературе эти механизмы интерпретируются как рыночные механизмы в условиях свободной конкуренции, в отечественной — как механизмы товарообмена в централизованном социалистическом хозяйстве. При определенных ограничениях в моделях такого рода может наблюдаться равновесие состояния хозяйства. Однако в данных моделях отсутствуют описания развития хозяйства и механизмов, определяющих развитие.

**2.1.3. Макромодели равновесия.** *Макромодели равновесия* рассматривают равновесие хозяйства в целом. Такого рода модели содержат описание капиталистической экономики. В рамках моделей рассматриваются механизмы разделения национального дохода, с одной стороны, на потребление и сбережение, а с другой стороны, на потребление и инвестиции, и устанавливается факт существования равновесия при разных уровнях занятости. Эти модели не содержат описания процесса расширения производства и регулирующих его экономических механизмов.

К этому классу моделей можно отнести и модели циклов, в которых рассматриваются колебания распределения национального дохода и связанные с ними колебания самого дохода около положения равновесия. Процессы расширения производства не учтены и здесь.

**2.1.4. Модели глобальной динамики.** В так называемых *моделях глобальной динамики* делается попытка изобразить процесс расширения производства, взаимодействие этого процесса с процессами в непроизводственной сфере: изменения потребления и уровня жизни, рождаемости и смертности населения и влияние его на ок-

ружающую среду. Эти взаимодействия и определяют механизмы регулирования хозяйства. Однако в моделях глобальной динамики недостаточно четко разделены чисто технологические и экономические процессы, не выделены собственно механизмы регулирования, поэтому очень многие связи в моделях не поддаются удовлетворительной интерпретации. Критика данного класса моделей содержится в [251a].

## 2.2. Некоторые примеры моделей.

Рассмотрим некоторые типичные представители моделей экономических систем.

### 2.2.1. Классические модели.

1°. Модели по В. Леонтьеву. Этот класс моделей относится к моделям типа «затраты — выпуск», где уровень выпуска каждого продукта пропорционален его суммарным затратам во всех других отраслях. Рост производства зависит от уровня выпуска. Основными элементами и параметрами модели являются матрица нормативов прямых затрат, полный (валовый) выпуск продуктов за единицу времени, запас продуктов (т. е. основные и оборотные фонды) и чистый выпуск продуктов за единицу времени (ассортиментный набор продуктов). Более подробно о моделях данного класса см. в [66, 210].

2°. Модели неймановского типа. В этом классе моделей учитывается возможность совместных выпусков продуктов некоторыми производственными процессами, а каждый производственный процесс использует некоторое сырье, ресурсы и т. п. В модель входят матрицы выпуска и затрат, вектор интенсивностей производственных процессов, уровень запаса продуктов и ассортиментного набора продуктов (последний подразделяется на фонды накопления и потребления). Различные особенности этого класса моделей см. в [66, 210].

3°. Модели по Р. Харроду. Модели данного класса описывают динамику макроэкономики. Накопление и потребление составляют постоянную долю в национальном доходе, а рост производственных фондов зависит от темпа роста капиталовложений. В моделях учитываются национальный доход, объем потребления, объем накопления, инвестиции (капиталовложения), капитал (производственные фонды). В [130] рассмотрены некоторые оптимизационные задачи, возникающие в рамках данной модели.

4°. Модели по Н. Н. Моисееву. Данный класс моделей описывает расширенное воспроизводство по К. Марксу [186, 187], выделены две основные группы производств — производство средств производства и производство предметов потребления. Модель учитывает (в денежном выражении) следующее: совокупный общественный продукт, вырабатываемый за год; фонд размещения; стоимость затрат на производство предметов труда и амортизацию оборудования; стоимость рабочей силы, затрачиваемой на производство соответствующего продукта; прибавочную стоимость. При этом совокупный общественный продукт состоит из затрат на фонд размещения, на стоимость рабочей силы и прибавочной стоимости, и

делаются следующие предположения: все средства, произведенные в данном году, будут использованы в следующем; структура капиталовложений остается неизменной от года к году; органическое строение материальных затрат в первом подразделении и норма прибавочных продуктов постоянны; зарплата полностью тратится на продукты потребления. Следует отметить, что данная модель наглядно показывает структуру расширенного воспроизводства и позволяет качественно оценить динамику функций, связанных моделью.

**2.2.2. ПИ-модели.** Дальнейшим развитием леонтьевской модели является *ПИ-модель* развития производства, предложенная в [21, 210]. Эта модель предназначена для решения ряда экономических задач в условиях расширения производства и перестройки его структуры; она обладает существенно большими возможностями оптимизации экономической системы по сравнению с другими моделями. Другими словами, ПИ-модель хорошо приспособлена для описания макроэкономики как развивающейся системы и в силу этого представляет особый интерес для данной работы. В частности, многие из особенностей ПИ-модели могут быть использованы и могут оказать существенную помощь при решении экономических задач в рамках динамических моделей, предлагаемых в настоящей работе.

В ПИ-модели на экономическую систему не накладываются требования полной загрузки производственных мощностей, полной занятости, полного использования свободного продукта и заданного уровня потребления, обычно имеющие место в других моделях. Вместо них вводятся следующие более слабые гипотезы:

- 1) выпуск совокупного продукта ограничен имеющимися мощностями и трудовыми ресурсами;
- 2) свободный продукт используется на инвестиции, перестройку мощностей и на создание запасов;
- 3) потребление не может быть меньше некоторого заданного уровня.

За счет ослабления системы гипотез в ПИ-модели появляются новые способы управления: изменение выпуска совокупного продукта, изменение уровня потребления, недогрузка и перестройка мощностей, создание новых мощностей, создание запасов и маневр ими и др.

Существует ряд вариантов ПИ-модели, связанных с учетом промышленных лагов, детализацией процесса создания новых мощностей и т. д. Первоначально ПИ-модель была описана конечно-разностными соотношениями, для которых в дальнейшем были предложены непрерывные аналоги. Поскольку в данной книге в основном используется непрерывная форма записи динамических систем, то ниже приведена простейшая, непрерывная ПИ-модель [21, 210], описываемая следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} X(t) &= A(t)x(t) + y(t), \\ y(t) &= B(t)\dot{v}(t) + \dot{\xi}(t) + c(t), \end{aligned} \tag{1.20}$$

где  $X$  — вектор валовых выпусков в единицу времени,  $A$  — технологическая матрица,  $Y$  — вектор спроса в единицу времени,  $v$  — вектор производственных мощностей,  $B$  — матрица фондоемкости,  $\xi$  — вектор запасов продуктов,  $c$  — потребление в единицу времени. Функции  $v$ ,  $\xi$ ,  $c$  можно рассматривать как управление. Приведенные выше гипотезы накладывают следующие ограничения на функции модели:

$$\begin{aligned} 0 \leq x(t) \leq v(t), \quad \dot{v}(t) \geq 0, \\ \gamma \pi(t) \leq a_0(t) x(t) \leq \pi(t), \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \\ c_0(t) \leq c(t), \end{aligned} \tag{1.21}$$

где  $\pi(t)$  — количество трудовых ресурсов,  $a_0(t)$  характеризует прямые затраты труда,  $c_0(t)$  — гарантированный уровень потребления. При  $t = 0$  задана структура производственных мощностей:

$$v(0) = v_0.$$

В рамках этой модели можно ставить различные оптимизационные задачи, например задачу перестройки структуры экономики на заданном отрезке времени  $[0, T]$  при одновременной максимизации уровня потребления:

$$\begin{aligned} v(T) = v_T, \\ I = \int_0^T c(t) dt = \max. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Постановки, близкие к этой задаче, возникают и в рамках предлагаемого класса динамических моделей, некоторые результаты их исследования приведены ниже.

В заключение отметим, что по сравнению с ПИ-моделями в рассматриваемых в данной работе динамических моделях введена одна важная модификация, а именно, структура производственных мощностей детализирована по времени их создания, что позволяет проводить более глубокую оптимизацию функционирования мощностей с учетом их амортизации и роста производительностей вследствие научно-технического прогресса. Это приводит к существенному усложнению привлекаемого математического аппарата.

**2.2.3. Некоторые модели научно-технического прогресса.** Как известно [176, 187, 220], научно-технический прогресс (НТП) затрагивает различные стороны материальной и духовной жизни общества, среди которых определяющей является производительность труда. В. И. Ленин указывал [161, с. 21], что «...производительность труда, это в последнем счете, самое важное, самое главное для победы нового общественного строя». Представляется целесообразным

определить НТП как комплекс мероприятий, направленных на максимизацию технического уровня производства и уровня организации труда, которые приводят к росту производительности труда и к максимизации количества выпускаемой продукции при следующих ограничениях: относительный минимальный рост объемов потребляемых ресурсов (трудовые ресурсы, сырье, энергия, финансы и др.); максимальное удовлетворение постоянно растущих материальных, духовных и рекреационных потребностей членов современного социалистического общества и др.

Разнообразие математических моделей НТП может быть объединено в четыре класса [110a]. Первый класс называется *моделями автономного (экзогенного) технического прогресса*, которому присуще описание динамики параметров, характеризующих развитие экономики, независимо от изменения технологии. Параметры модели описываются как заданное извне повышение эффективности использования основных фондов или повышение квалификации рабочей силы.

Второй класс объединяет *модели овеществленного (материализованного) технического прогресса*. Эффективность определяется внедрением более новых технологий.

Третий класс включает *модели индуцированного технического прогресса*. В рамках этого класса моделей прогресс зависит от объемов капиталовложений. Повышение эффективности использования трудовых ресурсов зависит от объемов капиталовложений.

В моделях четвертого класса НТП выделяется в особую отрасль народного хозяйства [120, 187] как производство научно-технического прогресса.

### § 3. Динамические модели в некоторых других областях

**3.1. О динамических моделях в биологии.** Взгляды многих математиков на их возможную роль в решении задач теоретической биологии Ю. А. Митропольский [179] выражает следующим образом. Проблемы, возникающие в теоретической биологии, можно грубо разделить на две части: молекулярно-биологическую и математическую. Первая часть заключается в изучении и расшифровке с точки зрения физико-химических наук процессов жизнедеятельности, среди которых выделяются элементарные. Вторая — изучает строение и функционирование сложных систем. Следовательно, возникает необходимость описания поведения во времени биологической или физической системы. Здесь появляются проблемы, подобные встречающимся в математической физике, — определение переменных, описывающих состояние системы, выявление локальных и глобальных зависимостей между причинными явлениями и явлениями последствий. В этих задачах возникают принципиальные затруднения, связанные с нелинейностью характеристик объектов и наличием многих степеней свободы.

Естественно возникают обратные задачи определения степени достоверности различных гипотез в результате сравнения теорети-

ческих и экспериментальных результатов. Указанные задачи — задачи описания функционирования системы. Следующая важная задача — регулирование биологических и физиологических процессов. Основная проблема здесь заключается в выяснении степени управляемости и устойчивости тех или иных ситуаций. Эта интересная математическая задача усложняется из-за недостатка знаний многих биологических процессов. Например, насущная проблема, относящаяся к задачам управления, — лечение рака. Сюда же входят проблемы медицинской диагностики и лечения, суть которых заключается в ликвидации отклонения от нормы в сложной системе. Оптимизационные задачи естественно возникают во многих областях биологии. Они обычно возникают в системе, существенные параметры которой могут нами регулироваться, например, задача оптимального сбора урожая, важная как для земной, так и для космической биологии. Изучение тонкой структуры механизма передачи наследственности — основная задача на уровне биологических микропроцессов. Это пока единственная область биологии, использующая самый тонкий алгебраический и топологический аппарат современной математики. Задачи кодирования, передачи информации, теории автоматов возникают при изучении поведения центральной нервной системы и мозга. Современный математический аппарат также широко используется в направлении бионики, посвященной моделированию биовзаимодействий различными техническими средствами.

Один из трудных вопросов эмпирической биологии состоит в том, какие и сколько факторов необходимо наблюдать для достаточно полного описания биологического объекта или достаточно эффективного управления им. Удовлетворительный ответ нередко может быть получен, исходя из определенных концепций современной биологии с применением математических методов постановки и проверки гипотез, методов построения формализованных теорий, анализа и синтеза иерархических структур, методов агрегации и дезагрегации и т. д.

Важнейшими концепциями теоретической биологии являются теория эволюции, теория размножения и развития, иерархия структур и уровней организации, принципы оптимальности концепции биологической кибернетики, теория Вернадского о динамических закономерностях биосферы и др.

В работе [61] особо выделяется роль корректной концепции как необходимой предпосылки для применения математического аппарата, где считается, что и теоретическая, и математическая физика являются науками весьма и весьма различными.

Многие биологи предполагают, что разрыв между нахождением корректной концепции и созданием точной математической теории в биологии будет еще большим. Поэтому, утверждается в [62], в теоретической биологии необходимо сосредоточить усилия на поиске концептуальных, качественных решений. Существенный вклад математиков мог бы заключаться не только, и даже не столько, в доведении концепции до точной математической теории, а в разработ-

ке нового адекватного языка для описания на качественном уровне самих концепций.

Определенный итог работам по биологической кибернетике подведен в [31]. Биологическая кибернетика изучает живые системы главным образом с точки зрения: 1) самоорганизации системы; 2) информационных процессов; 3) процессов управления.

При этом рассматриваются следующие уровни явлений жизни:

1) субклеточный уровень (на базе биохимии и биофизики);

2) клеточный уровень (на базе цитологии и физиологии клетки);

3) тканевый уровень (на базе эмбриологии, гистологии, гистофизиологии);

4) уровень органов и систем (на базе нормальной и патологической физиологии растений и животных);

5) организм как целое (на базе физиологии высшей нервной деятельности и экологической физиологии);

6) видовой уровень (на базе эволюции и экологической физиологии, зоологии и ботаники);

7) биосферный уровень (на базе биогеоценологии, общей биологии и социологии).

Остановимся на рассмотрении динамики взаимодействия биосистем на некоторых из указанных уровней. В некоторых случаях будет проведено качественное сравнение параметров моделей с параметрами интегро-функциональных моделей (2.8)—(2.11).

**3.2. Динамика роста организмов.** Рассмотрим модель роста дерева в течение одного вегетационного периода [233], основанную на форрестовской диаграмме, где выделены такие основные потоки: образование в процессе фотосинтеза новой биомассы, которая перераспределяется между листьями, стволом и корнями. Динамика перераспределения новой биомассы описывается следующим функциональным уравнением:

$$y^*(t + \tau) = \max_{e_j} y \{ (x(t) + e_j(t) y [x(t), \lambda_k(t)] \tau, \lambda(t) \},$$
$$j = \overline{1, 3}, \quad k = \overline{1, 4}, \quad \sum_{j=1}^3 e_j = 1, \quad (1.23)$$

где  $y$  — скорость прироста новой биомассы,  $x$  — фазовая переменная,  $\lambda$  — параметр модели, описывающий окружающую среду,  $e_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) — доля ресурсов, поступающих на фотосинтез новой биомассы, на производство структур ствола и т. п., на создание корней.

В случае, когда  $e_j$  неизвестна, определение этой доли ресурсов предлагается находить из решения оптимизационной задачи. В связи с этим сформулирован экстремальный принцип для биосистем, не обладающих достаточно долгой памятью и способностью прогнозирования, в соответствии с которым биосистема взаимодействует [233, с. 72] «...со средой таким образом, чтобы обеспечить максимальный прирост своей биомассы или оставить как можно более многочисленное потомство». Сравнение функций данной модели с моделью

(2.8) — (2.11) показывает, что эти модели эквивалентны с точностью до обозначений. При этом скорость воспроизводства новой биомассы  $m(y)$ , идущая частично на создание листьев, ствола и корней, а  $y_j(e_j)$  — соответствующие относительные доли этой биомассы, причем  $\sum_{j=1}^3 y_j = 1$ . Однако, как будет показано в гл. 7, сформулиро-

ванный экстремальный принцип может быть существенно расширен за счет рассмотрения интервала, превышающего один вегетационный период.

В искусственно культивируемых биосистемах обычно рассматриваются задачи о повышении эффективности управляемого биосинтеза. Укажем на некоторые результаты в данной области, связанные с исследованием колебательных процессов.

Близкой к явлению запаздывания является биологическая инерционность, предложенная в [228] для объяснения колебаний численности микроорганизмов в культиваторе при резком изменении условий выращивания. Предполагается, что скорость роста клеток изменяется не сразу после изменения внешних условий, а спустя некоторое конечное время, и предполагается наиболее вероятный биологический механизм такого запаздывания. При присоединении к системе уравнений, описывающих процесс культивирования и не допускающих колебательных решений, и уравнения изменения скорости роста полученная система уравнений в некоторой области значений своих параметров имеет особую точку типа устойчивого фокуса, т. е. имеются затухающие колебания численности относительно стационарного состояния.

Более сложные модели появляются при необходимости учета пространственной структуры биосистемы. Обзоры по этому вопросу см. в [30, 36, 55, 226—228]. Дальнейшее усложнение моделей для решения задачи моделирования активных распределенных кинетических систем дано в [226—228, 251a].

Введение в модели диффузионного члена дало возможность многим исследователям описать те явления, которые ранее не поддавались учету в рамках традиционных подходов. Это относится прежде всего к задачам моделирования самоорганизации в неравновесных средах с учетом случайных факторов [101, 201, 226—228], нашедших свое применение в биологии развития для объяснения различных стадий морфогенеза, для объяснения основных этапов абиотической и биологической эволюции [55, 228, 297, 304]. Развитие моделей данного класса, как отмечено в [251a], состоит во введении интегральных членов, что связано с учетом возрастной структуры и характера связей взаимодействующих индивидуумов.

Дальнейшим развитием данного направления явились работы [216, 270, 271]. Широко известные модели в виде разностных уравнений первого [270, 271] и второго порядков [216] позволяют качественно характеризовать динамику популяций; получены решения типа квазистохастических. Из-за необходимости учета возрастного распределения популяций исследователи в данной работе вынужде-

ны были прийти к развитию моделей в виде интегро-разностных уравнений.

**3.3. Динамика взаимодействия иммунной системы организма с антигеном.** Покажем основные цели математического моделирования взаимодействия иммунной системы (ИС) с антигеном (Аг), вытекающие из общих целей применения математических методов в биологии.

а) Создание теоретической иммунологии, позволяющей корректно сопоставлять экспериментальные данные и теоретические модели, непротиворечиво объединять существующие и выдвигать новые иммунологические концепции, предсказывать ранее неизученные свойства иммунной системы.

б) Создание моделей отдельных звеньев и целостной иммунной системы организма, в частности моделей взаимодействия различных звеньев ИС с Аг, моделей регуляции численности и перераспределения в организме различных субпопуляций лимфоидных клеток в процессе их Аг-независимой (пре-, внутри- и посттимической) и Аг-зависимой дифференцировок в условиях нормы при иммунодефицитных состояниях. Это позволит количественно обосновать выбор оптимальных схем иммунотерапии инфекционных, аллергических и опухолевых заболеваний, врожденных и приобретенных иммунодефицитных состояний организма и т. п.

в) Создание высокоэффективных средств моделирования иммунных (как составной части развивающихся) систем, что повысит эффективность научных исследований ИС.

Остановимся на рассмотрении некоторых результатов моделирования, связанных с детальными или (и) интегральными представлениями звеньев регуляции ИС. Рассмотрим лишь те результаты, которые будут использоваться при анализе взаимосвязей разрабатываемой в гл. 7 минимальной (базовой) модели с соответствующими моделями [175, 247]. Другие результаты содержатся в [2, 55, 75 — 78, 89, 95, 120, 123, 125, 156, 189, 201, 228, 308].

1°. Рассмотрим основные свойства модели, предложенной Н. В. Степановой и Д. С. Чернавским [247]:

$$\dot{x} = \mu_x x - \gamma xy, \quad (1.24)$$

$$\dot{y} = \mu_y y - k_y y - \beta yz.$$

Здесь  $\mu_x x$ ,  $\mu_y y$  — соответственно темпы размножения опухолевых и лимфоидных клеток, зависящие от концентрации глюкозы  $S$  в организме (по закону Моно),  $\gamma xy$  — скорость деструкции опухоли лимфоидными клетками,  $k_y y$  — скорость естественной гибели лимфоцитов,  $\beta yz$  — скорость подавления ИС глюкокортикоидами. Для замыкания модели разработано уравнение глюкозного баланса.

В рамках модели (24) получены значения параметров, при которых 1) опухоль уничтожается, если ее концентрация  $y$  мыши  $10^{-2}$  г/л; в противном случае опухоль неограниченно растет, а иммунная система истощается, организм гибнет; 2) если при росте

опухоли предварительно иммунная система находится в напряженном состоянии, то вначале опухоль уменьшается, а затем неограниченно растет; 3) опухоль полностью не исчезает вблизи устойчивого стационарного состояния, ИС не может подавить малые концентрации опухоли (эти концентрации уничтожаются другими системами организма).

Возможен даже колебательный режим вблизи стационарного состояния, причем указаны четыре фазы, в течение первых двух наиболее эффективно поражается опухоль противоопухолевыми средствами, затем наиболее эффективно поддерживается ИС. В четвертой фазе эффективность иммунной системы высока, и дополнительные воздействия не следует оказывать. Все результаты носят сугубо качественный характер. Как указано в [247], несмотря на то, что в работе даны усредненные оценки многим параметрам модели (24), «...количественные предсказания сейчас невозможны, поскольку неизвестны численные значения многих, входящих в модель параметров» [247, с. 43]. Несмотря на это, работа имеет определенную эвристическую ценность; она позволяет целенаправленно проводить экспериментальные исследования.

2°. Рассмотрим теперь основные свойства модели по Г. И. Марчуку [175]. Прежде всего следует заметить, что это, пожалуй, единственная базовая модель, для которой проведены полные качественные и численные исследования, доказаны теоремы об устойчивости, существовании и единственности решений, указано дальнейшее расширение с учетом различных экспериментальных данных [314], а также проведено сравнение качественных результатов с соответствующими клиническими формами заболеваний с помощью разработанных для этих целей биохимических индексов и биомедицинской автоматизированной технологии [177]. Базовая модель имеет следующий вид [175]:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (\beta - \gamma F) V, \\ \dot{C} &= \xi \left( \frac{M}{M_0}, V \right) Q(t - \tau) - \mu_c (C - C^*), \\ \dot{F} &= \rho C - (\mu_f + \eta \gamma V) F, \\ \dot{M} &= \sigma V - \mu_m M. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Здесь  $V$  — количество вирусов в организме,  $C$  — число плазматических клеток, производящих антитела  $F$ ,  $M$  — масса поврежденной вирусом ткани,  $\beta$  — коэффициент размножения вирусов,  $\gamma$  — коэффициент, связанный с вероятностью нейтрализации вируса антигеном при встрече с ним ( $\gamma = \text{const}$ ),  $Q(t - \tau)$  — скорость создания плазматических клеток,  $\tau$  — период организации каскада клеток и начала массового синтеза антител,  $\alpha$  — коэффициент, учитывающий вероятность, с которой один антиген способен возбудить реакцию организма по созданию каскада плазматических клеток,  $\rho = \text{const}$ ,

$C = C^*$  — иммунологический уровень плазменных клеток в организме,  $\mu_c$  — коэффициент, обратно пропорциональный времени жизни клеток,  $\rho$  — коэффициент воспроизводства антител в единицу времени (в расчете на одну клетку),  $\mu_f$  — коэффициент, обратно пропорциональный времени распада антител,  $\sigma$  — коэффициент, зависящий от степени поражения органа одним вирусом в единицу времени,  $\mu_m$  — коэффициент, являющийся обратной величиной времени восстановления пораженной части органа в  $e$  раз.

В рамках модели (25) и ее расширенных модификаций, учитывающих, например, температурную реакцию организма, взаимодействия  $T$ - и  $B$ -лимфоцитов и др., получены такие результаты: 1) любая фаза  $A_g$ , концентрация которой меньше иммунологического барьера, с течением времени элиминирует из организма; 2) при сколь угодно большой чувствительности ИС может присутствовать ненулевая концентрация  $A_g$ ; 3) при сколь угодно большой чувствительности ИС и малой удельной скорости воспроизводства вирусов ( $A_g$ ) возможны устойчивые хронические формы болезни; 4) при иммунодефицитных состояниях возможны хронические формы болезни; 5) переносчиками болезни являются прежде всего хронические больные; 6) лечение острых форм болезни предотвращает переход ее в хронические формы; 7) быстрый иммунный ответ на  $A_g$  с малой удельной скоростью воспроизводства невыгоден для организма, так как приводит к хроническим формам болезни; 8) искусственное понижение температуры организма может привести к возникновению хронических форм заболевания; 9) одна из биинфекций дает осложнения спустя длительный интервал времени после выздоровления от другой; 10) уровень «активных» антител соответствует форме тяжести хронического процесса, так как определенная часть антител связывается с  $A_g$ ; 11) уровень концентрации макрофагов также прямо пропорционален форме тяжести хронического процесса: чем более выражена форма хронического процесса, тем более выражена лейкопения; 12) эффективное лечение хронических форм болезни достигается методом обострения; 13) иммунодефицитные состояния уменьшают иммунологический барьер, причем ИС более чувствительна к дефициту по  $T$ -системе; 14) возникновение хронических форм заболеваний возможно из-за неэффективной (или из-за отсутствия) стимуляции выработки лимфопоэтика под действием  $A_t - A_g$ -комплекса; 15) отсутствие в организме колоние-стимулирующих факторов (кроме моноцитов и макрофагов) приводит к исчезновению соответствующего кроветворного ростка; 16) возникновение затяжного или хронического заболевания может быть связано с уменьшением количества макрофагов в организме; 17) при гематомах нарушается нормальный уровень макрофагов и наступает лейкопения, причем ее выраженность соответствует тяжести заболевания. Время рассасывания гематомы обратно пропорционально уровню  $T$ -эффекторов.

3°. Целостное представление взаимодействия ИС с  $A_g$ , средой и организмом с позиции разрабатываемого в настоящей работе одного класса динамических моделей будет дано в гл. 7. При этом поступ-

ление в организм субстратов, энергии и прочих параметров среды представлено в виде функции  $F_1(t)$ . Иммунная система представлена обобщенно клонами: предшественников, позитивным, негативным и отвалом (связан с элиминацией или деструкцией Аг). Взаимодействия этих клонов с другими системами представлены в виде соответствующих связей, а связи, замыкающиеся на себя, указывают на наличие механизма воспроизводства соответствующих клонов, например, механизмов пролиферации. Аналогично представлены прочие внутренние и внешние функции организма. Антиген, попав в организм, может быть представлен внутренней функцией организма. Он бывает двух типов — размножающийся или не размножающийся. В первом случае существует механизм воспроизводства Аг. Во втором случае различные дозы Аг могут изменять удельные скорости воспроизводства соответствующих клонов. Динамика целостного взаимодействия организма с Аг — вопрос малоизученный. Однако уже в таком кибернетическом представлении ИС возникает возможность корректной постановки эксперимента, оценки существования и типа тех или иных связей между соответствующими блоками модели, разработки задания на постановку новых экспериментов. Более подробное изучение некоторых звеньев ИС приведено в гл. 7.

В заключение данного пункта подчеркнем важную роль осциллирующих процессов, возникающих при взаимодействии Аг с ИС и другими системами организма. Эти осциллирующие режимы могут возникать из-за 1) различных характеристик клонов (возрастная структура, запаздывание в выработке антител, малые и большие удельные скорости роста, осциллирующие внешние условия, очень малые, малые и очень большие дозы Аг и др.); 2) различных типов конкурентных взаимодействий как с размножающимся, так и с не размножающимся Аг; 3) наличия идиотип-антиидиотипических взаимодействий между позитивным и негативным клонами.

Реализация этих свойств в реальных условиях приводит к различным типам нормальных и патологических процессов при взаимодействии ИС с Аг и средой.

**3.4. Моделирование в проблеме окружающей среды.** Как показано в [176], основными уравнениями в задачах математического моделирования окружающей среды являются уравнение переноса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u}\varphi) + \sigma\varphi = f \left( \operatorname{div}(\bar{u}\varphi) = \frac{\partial (u\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial (v\varphi)}{\partial y} + \frac{\partial (w\varphi)}{\partial z} \right), \quad (1.26)$$

где  $\varphi(x, y, z, t)$  — интенсивность аэрозольной субстанции, мигрирующей вместе с потоком воздуха в атмосфере,  $u = u_i + v_j + w_k$  ( $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  — орты вдоль осей  $x, y, z$  соответственно) — вектор скорости частиц воздуха как функция  $x, y, z, t$ ,  $\sigma$  — обратная величина к интервалу времени, за который интенсивность по сравнению с начальной интенсивностью  $\varphi_0$  уменьшается в  $e \approx 2,7$  раз,  $f = f(x, y, z, t)$  описывает источники рассматриваемой загрязняющей субстанции

$\varphi$ , и уравнение диффузии

$$f = \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \Delta \varphi + Q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$
$$\left( \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad r = ix + jy + kz \right), \quad (1.27)$$

где  $d\nu\varphi|_{z=0}$  — часть аэрозолей, связанная с турбулентным обменом в приграничной зоне около земной поверхности,  $\partial\varphi/\partial z = \alpha\varphi$  при  $z = 0$ ,  $\mu$  — коэффициент диффузии,  $Q$  — мощность источника, выбрасывающего в атмосферу аэрозоль,  $\vec{r}_0 = ix_0 + jy_0 + kz_0$  — радиус-вектор расположения источника.

На базе этих уравнений и их аналогов [176] рассмотрены задачи оптимального размещения промышленных предприятий, оптимизации выбросов действующих промышленных предприятий, размещения источников загрязнения в водоемах и прибрежных морях, расчета ветровых течений в окраинных морях и замкнутых водоемах и др.

Трудно переоценить своевременность и ценность предлагаемых моделей и решений. Однако, по-видимому, предложенные модели в перспективе необходимо дополнить общими закономерностями функционирования биосферы как развивающейся системы. Соответствующая попытка сделана в гл. 7, п. 7.4 (см. также следующий п. 3.5).

Математическому моделированию популяций и экосистем, их взаимодействию с окружающей средой в настоящее время уделяется большое внимание [76, 150, 187, 228, 234, 251a, 260]. Укажем на некоторые результаты в данной области.

В работах [25, 251a] рассматривается модель экосистемы северо-западного шельфа Черного моря, трофическая цепь представлена от биогенных элементов до рыб, а циркуляция ресурсов осуществляется течениями и турбулентностью. Параметрами управления являются: влияние человека на численность организмов, регулирование стока рек, погодные факторы. Численные эксперименты с агрегированной моделью позволили определить годовой ход параметров экосистемы, причем получено хорошее согласование с материалами наблюдений. Главное сходство состояло в наличии как в экспериментальных, так и в теоретических кривых биомассы фитопланктона трех максимумов: ранневесеннего (март — апрель), среднего (июль — август) и осеннего (октябрь). Биомасса зоопланктона откликается на эти максимумы с некоторым сдвигом по фазе. В итоге численных экспериментов получен вывод: основные особенности годового хода интегральных параметров экосистемы могут быть получены на основе решений уравнений агрегированных моделей.

В работе [251a] рассмотрена сопряженная модель агроэкосистемы, в рамках которой определяется рациональное использование естественных и искусственных энергоресурсов. Показано, что из-за уменьшения разнообразия трофических связей между составляющими компонентами агроэкосистемы снижается способность био-

геоценозов к поддержанию равновесия всей системы за счет саморегуляции. Проведен расчет энергетических затрат, компенсирующих разрушение естественных трофических связей и обеспечивающих урожайности сельскохозяйственных культур.

За рубежом данное направление известно под названием *глобального моделирования*, которое создано усилиями членов Римского клуба [160a]. Известно порядка десяти проектов, выполненных членами Римского клуба и направленных на оценку и прогнозирование хода глобальных показателей развития мировой социально-экономической структуры. Подробная библиография и детальная критика содержатся в [160a].

**3.5. О моделировании эволюции.** Основные результаты в этой области связаны с изучением эволюционных процессов как сети последовательно-параллельных процессов отбора молекул, компартаментализации, генерации информации и фазовых переходов. Начало этому направлению положено работой [204], в которой развита теория коацерватов, а в последующем работами [55, 226, 228, 251a, 261, 297] доказано, что в предбиологическую эпоху могли синтезироваться все необходимые элементы живой материи: нуклеотиды, аминокислоты, сахара и т. п. Могли синтезироваться также полимеры: полинуклеотиды и полипептиды со случайными последовательностями мономеров. Следующий этап эволюции заключается в выделении и размножении не случайных полимеров, а полимеров с определенными свойствами и определенными последовательностями мономеров, т. е. в создании биологической информации.

Первый вопрос — каков механизм первичного аппарата кодирования?

Второй вопрос — почему современный код универсален, т. е. почему из большого числа возможных вариантов кода сохранился и выжил только один?

Предлагаемые ответы на поставленные вопросы сводятся к следующему: первичный механизм кодирования заключается в том, что аминокислоты предварительно сорбировались на полинуклеотиде и затем образовывались полипептидные связи (процесс шел по принципу гетерогенного катализа). Взаимодействие комплексов, имеющих одинаково хорошие (равноправные) аппараты трансляции, но различные варианты кода, существенно антагонистично, устойчивы лишь состояния, в которых сохранился единственный вариант кода.

В настоящее время существуют различные физико-химические теории эволюции живых систем, детальный обзор некоторых из них содержится в [55, 167, 226—229, 269, 275]. Наиболее известными являются: теория эволюции на основе самовоспроизводящихся автоматов [65, 196, 312], на основе хемотона [297]; теория саморазвития открытых каталитических систем [229]; теория эволюции на основе информационных регуляторных механизмов [274]; теория молекулярной эволюции [128]; гипотезы о случайном образовании молекулы полинуклеотида, определяющей редупликацию и эволюцию биосистем [133]; теория эволюции белково-нуклеотидных ги-

перциклов [101]; теория детерминированности направлений эволюции биосферы физико-химическими факторами [275]; теория сайзеров [251a]; теория диссипативных структур, описывающая явления самоорганизации [226—228]; теория флуктуационной системологии, оценивающая вероятности образования исходных структур биосферы [71]; теория субликонов [127]; гипотеза о пороговом эффекте, вызывающем видообразование в любой модели ассортативного скрещивания [143] и др. Недостатками некоторых теорий являются: отсутствие их конструктивности; отсутствие формулировок положений теории в математической постановке; отсутствие системного подхода при моделировании структурно-функциональной организации биосистем. Один из перспективных подходов в данной области основан на разрабатываемой в настоящей работе трехпродуктовой конечно-континуальной модели (см. гл. 7, п. 7.4).

В заключение отметим, что создание теоретических основ развивающихся систем, базирующихся на соответствующих теоретических результатах физики, биофизики, биологии и других наук, — дело далекого будущего. Однако уже в настоящее время могут быть выделены работы, результаты которых вносят существенный вклад в это чрезвычайно сложное и актуальное научное направление [5, 8, 9, 31, 35, 36, 38, 40, 42, 45—49, 55, 56, 92, 101, 103, 110, 110a, 116, 128, 130, 133, 139, 148, 150, 152, 175—177, 180, 182, 187, 190, 201, 202, 216, 217, 228, 234, 235, 252—254, 265a, 275a, 297, 310, 316].

Новый класс динамических моделей первоначально возник [67] в виде динамических макроэкономических моделей, основанных на системах интегральных соотношений. Эти модели, в отличие от классических форм динамических макроэкономических моделей [162], основанных на системах обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяют описывать более точно реальные макроэкономические системы при помощи негладких и даже разрывных функций и оказываются хорошо приспособленными для описания динамики сворачивания и полного отказа от использования устаревших технологий.

Попытка применения этих моделей к моделированию биологических и ряда других задач для весьма широкого спектра естественных, созданных природой, и искусственных, созданных людьми, развивающихся систем привели к существенному обобщению и уточнению первоначальных моделей [73, 76, 77, 81].

В данной главе приводится формальное описание нового класса динамических моделей, проводится сравнение этого класса с известными и указываются границы его применимости.

### § 1. Двухпродуктовые модели

**1.1. Об одном классе динамических макроэкономических моделей.** Классическая форма динамических макроэкономических моделей [162] основана на использовании систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие модели в определенной степени неудобны, особенно потому, что реальные макроэкономические системы описываются негладкими и даже разрывными функциями. Кроме того, классические формы представления динамических макроэкономических моделей плохо приспособлены для описания динамики сворачивания и полного отказа от использования устаревших производственных мощностей.

В настоящей работе вводится описание динамических макроэкономических моделей с помощью систем интегральных уравнений, позволяющее устранить указанные недостатки. Для того чтобы лучше уяснить основные идеи такого представления, не отягощая их многими дополнительными техническими деталями, рассмотрим простейшую двухпродуктовую модель. При этом, как обычно, все производство делится на две группы: производство средств произ-

водства (группа А) и производство предметов потребления (группа Б). Здесь важно отметить два обстоятельства.

Во-первых, в группу Б зачисляем не только предметы личного потребления, но и все непроизводственное потребление в целом. Оно включает в себя, в частности, все виды вооружений, а также все виды массового обслуживания населения (пассажирский транспорт, системы радиовещания, телевидение и т. п.).

Во-вторых, относя производство какого-либо конечного продукта к одной из двух групп, относим к той же группе производство всех промежуточных продуктов, необходимых для изготовления данного конечного продукта.

Например, производство легковых автомобилей в соответствии с первым замечанием относим к группе Б. В соответствии же со вторым замечанием должны отнести к группе Б и ту часть металлургического производства, производства электроэнергии и др., которая обеспечивает (текущее) производство легковых автомобилей. В то же время производство оборудования для заводов, выпускающих легковые автомобили, естественно попадает в группу А\*).

Из сделанных замечаний следует важный вывод качественного характера, а именно, что средняя сложность производства в группах А и Б сегодня примерно одинакова. Этот вывод позволяет несколько упростить модель.

Отсчет времени в рассматриваемой модели ( $t = 0$ ) предлагается начать с того момента, когда была введена в эксплуатацию самая старая из используемых в начале планового периода  $T = [t, \bar{t}]$  производственных мощностей. Далее предполагаем, что в течение всего рассматриваемого промежутка времени (от 0 до  $\bar{t}$ ) происходит (непрерывно или скачкообразно) научно-технический прогресс. Смысл прогресса состоит в том, что появляются возможности вводить мощности со все более и более высокими производственными показателями.

В качестве такого показателя для группы Б естественно взять величину выпуска предметов потребления в единицу времени (например, за одни сутки) в расчете на единицу производственных мощностей в группе Б. В качестве единицы измерения мощностей мы примем одно рабочее место (усредненное). Обозначая этот показатель через  $\beta$ , легко заметить, что он зависит от вида мощности. Будем предполагать, что в каждый данный момент времени  $t$  имеется единственная новейшая технология  $m_t$ , которая может быть использована во вводимой в этот момент мощности. Предполагая, что именно эта технология применяется в мощности  $m_t$ , получаем возможность представить основной показатель  $\beta$ , характеризующий группу Б, как заданную функцию времени

$$\beta = \beta(t), \quad 0 < t \leq \bar{t}.$$

---

\*) Заметим, что принятое нами деление отличается от того деления, которое применяется сейчас в практике планирования.

При тех же предположениях основным показателем для группы А следует выбрать функцию двух переменных  $\alpha(\tau, t)$ . Она представляет собой количество рабочих мест в технологии  $m_t$ , создаваемых в единицу времени в расчете на одно рабочее место (усредненное) в технологии  $m_\tau$  (в группе А). В соответствии со сделанным выше качественным выводом можно считать, что  $m_t$  может принадлежать обеим группам А и Б. Итак, имеем еще одну заданную функцию

$$\alpha = \alpha(\tau, t), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq \bar{t}.$$

Заметим, что при построении функций  $\beta$  и  $\alpha$  мы предполагаем часть задач оптимизации уже решенной. Действительно, далеко не всякая новейшая технология будет в то же время и наиболее эффективной. Если же мы умеем оценивать появляющиеся новые технологии с точки зрения того или иного критерия эффективности, то можно по определению считать новейшей (применяемой) технологией ту из уже известных в настоящий момент, которая в то же время является и наиболее эффективной. О путях выбора эффективных технологий мы поговорим еще в конце данного пункта.

Введем еще две функции:

$$n = n(t), \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t},$$

$$r = r(t), \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}.$$

Первая функция задает количество работающих, которыми рассматриваемая экономическая система располагает в момент времени  $t$  (списочный состав). Вторая функция определяет величину среднего рабочего дня (с учетом выходных дней, отпусков, болезней и т. п.), измеряемого в долях суток.

Введем в рассмотрение еще четыре неизвестные функции. Это, во-первых, скорости роста (в момент времени  $t$ ) количества новых рабочих мест (по новейшим технологиям) в группах А и Б соответственно \*):

$$x = x(t), \quad 0 \leq t \leq \bar{t},$$

$$y = y(t), \quad 0 \leq t \leq \bar{t},$$

и, во-вторых, коэффициенты загрузки в момент времени  $t$  мощностей, созданных в момент времени  $\tau$ , в группах А и Б соответственно:

$$\lambda = \lambda(\tau, t), \quad 0 \leq \tau \leq t, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t},$$

$$\mu = \mu(\tau, t), \quad 0 \leq \tau \leq t, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}.$$

Наконец, для заданного планового промежутка  $T$  зададим еще функцию, которая определяет желательный объем потребления (на плановом промежутке  $T$ ):

$$c = c(t), \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}.$$

\*) На отрезке  $[0, \bar{t}]$  функции  $x(t)$  и  $y(t)$  предполагаются заданными.

С помощью введенных функций естественным образом строятся составляющие искомую модель интегральные уравнения. Это, во-первых, уравнение роста фондов

$$x(t) + y(t) = \int_0^t x(\tau) \lambda(\tau, t) \alpha(\tau, t) d\tau, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}; \quad (A')$$

во-вторых, уравнение потребления

$$c(t) = \int_0^t y(\tau) \mu(\tau, t) \beta(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}; \quad (A'')$$

в-третьих, уравнение баланса рабочей силы

$$n(t)r(t) = \int_0^t [x(\tau) \lambda(\tau, t) + y(\tau) \mu(\tau, t)] d\tau, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}. \quad (A''')$$

С помощью построенной системы интегральных уравнений можно ставить различного рода оптимизационные задачи. Одна из естественных постановок состоит в том, чтобы при заданном потреблении  $c(t)$  минимизировать затраты труда в течение заданного планового периода  $T$ . Иными словами, необходимо минимизировать интеграл

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \left( \int_0^t x(\tau) \lambda(\tau, t) + y(\tau) \mu(\tau, t) d\tau \right) dt$$

при условиях

$$x(t) + y(t) = \int_0^t x(\tau) \lambda(\tau, t) \alpha(\tau, t) d\tau,$$

$$c(t) = \int_0^t y(\tau) \mu(\tau, t) \beta(\tau) d\tau,$$

$$0 \leq \lambda(\tau, t) \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \bar{t}, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}, \quad (B')$$

$$0 \leq \mu(\tau, t) \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \bar{t}, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}, \quad (B'')$$

$$\int_0^t x(\tau) \lambda(\tau, t) + y(\tau) \mu(\tau, t) d\tau \leq n(t)r(t), \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}, \quad (B''')$$

$$x(t) > 0, \quad y(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}. \quad (B''')$$

Само собой разумеется, что заданные функции  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $n(t)$ ,  $r(t)$ ,  $c(t)$  неотрицательны в своих областях определения. В условиях (B) абсолютное значение имеет лишь неотрицательность функций  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $x$ ,  $y$ . Что же касается остальных неравенств, то их при первой попытке решения оптимизационной задачи можно опустить. При повторных попытках можно добиться выполнения условия (B''')

либо за счет уменьшения  $c(t)$ , либо за счет увеличения  $r(t)$ , либо за счет того и другого вместе. Заметим, что повторные решения оптимизационной задачи удобно выполнять в диалоговом (с ЭВМ) режиме [66].

Невыполнение условий  $\lambda \leq 1$ ,  $\mu \leq 1$ , как нетрудно понять из экономического смысла задачи, свидетельствует о том, что некоторые из выбранных нами новейших технологий на самом деле менее эффективны, чем уже существовавшие ранее более старые технологии. Поэтому необходимо перестраивать избранную нами техническую политику, что сводится к соответствующему изменению функций  $\beta(\tau)$  и  $\alpha(\tau, t)$ .

Заметим прежде всего, что ввиду конечности множества различных технологий обе эти функции кусочно-постоянны\*). Их значения могут изменяться только в моменты  $t_1, t_2, \dots, t_n$  появления новых технологий. Если новая технология  $m_{t_i}$ , появившаяся в момент  $t_i$ , неоптимальна, то в силу экономического смысла оптимизационной задачи на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  скорость создания новых рабочих мест по технологии  $m_{t_i}$  должна получиться нулевой. Но может оказаться и так, что для какой-то старой технологии  $m_{t_j}$  ( $t_j < t_i$ ) полученное решение предлагает использовать имеющиеся мощности более чем на 100%. В обычном (невыврожденном) случае эта последняя технология единственна. Ею и следует заменить на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  выбранную ранее (неоптимальную) технологию  $m_{t_i}$ .

Тем самым решается упомянутая выше задача выбора оптимальных технологий каждый раз, когда появление новых технологических возможностей вынуждает принимать соответствующие решения. То же самое будет, очевидно, иметь место и при других линейных критериях оптимизации, например, при максимизации (возможно, взвешенной по времени) функции  $c(t)$  производства предметов потребления за рассматриваемый плановый период.

Заметим также, что наряду с задачей оптимизации выбора технических решений при новом строительстве описанная модель решает также задачу оптимизации использования ранее построенных мощностей.

Чтобы представить себе сложность и необычность описанной модели, рассмотрим ее более простые частные случаи. Из экономических соображений достаточно естественным представляется сужение класса функций, в котором ищутся функции загрузки мощностей  $\lambda, \mu$ . А именно, ограничим выбор классом функций  $f(\tau, t)$  вида

$$f(\tau, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq a(t), \\ 1, & t > \tau > a(t), \end{cases}$$

где  $a(t)$  — некоторая неизвестная функция  $t$ , удовлетворяющая неравенству

$$0 \leq a(t) < t. \quad (C')$$

\* ) При малых скачках в точке разрыва эти функции можно аппроксимировать непрерывными функциями.

Этот выбор, очевидно, соответствует случаю, когда все мощности, созданные ранее какого-то временного порога  $a(t) < t$ , в момент  $t$  никогда не используются, а созданные после этого срока используются на 100 % (24 часа в сутки). Функцию  $a(t)$  можно считать убывающей (закрытые мощности вновь не открываются для использования).

Для дальнейшего удобно ввести также обозначения

$$x(t) + y(t) = m(t), \quad x(t) = \hat{y}(t) m(t), \quad y(t) = [1 - \hat{y}(t)] m(t),$$

где функция  $m(t)$  неотрицательна, а значения функции  $\hat{y}(t)$  заключены между нулем и единицей. После этого уравнения (A) можно переписать в виде

$$m(t) = \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) \hat{y}(\tau) m(\tau) d\tau, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t},$$

$$c(t) = \int_{a(t)}^t \beta(\tau) [1 - \hat{y}(\tau)] m(\tau) d\tau, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t},$$

$$n(t) r(t) = \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}.$$

Наконец, при дополнительных ограничениях  $\hat{y} = \text{const}$ ,  $n(t) r(t) = \text{const}$  полученные уравнения могут быть переписаны в виде

$$m(t) = \hat{y} \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) m(\tau) d\tau, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}, \quad (C'')$$

$$c(t) = (1 - \hat{y}) \int_{a(t)}^t \beta(\tau) m(\tau) d\tau, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}, \quad (C''')$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{m(t)}{m(a(t))}, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}. \quad (D)$$

Здесь  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau)$ ,  $c(t)$  — известные функции,  $m(t)$ ,  $a(t)$  — неизвестные функции,  $\hat{y}$  — неизвестная константа (значение ее заключено между нулем и единицей). Одна из возможных оптимизационных постановок этой упрощенной задачи для планового интервала  $T$ :

$$\max \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left( \int_{a(t)}^t \beta(\tau) m(\tau) d\tau \right) dt$$

при условиях (C) неотрицательности функции  $m(t)$  (все на интервале  $T$ ) и ограничений  $0 \leq \hat{y} \leq 1$  для величины константы  $\hat{y}$ .

Как видим, даже в упрощенной постановке задача приводит к системе условий, в которых наряду с интегральным уравнением необычного вида (с переменным нижним пределом) фигурирует диф-

ференциально-разностное уравнение (D). Разумеется, что последнее уравнение можно заменить интегральным соотношением

$$\int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau = nr = \text{const}, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}.$$

**1.2. Обобщение на класс развивающихся систем.** Допустим, что относительно рассматриваемого объекта моделирования (типа РС) нас интересуют только две его функции: первая (внутренняя), обеспечивающая его существование, и вторая (внешняя), являющаяся результатом его взаимодействия с внешней средой. Материальное, энергетическое и информационное обеспечение первой функции назовем продуктами первого рода (I), второй — продуктами второго рода (II). Примерами продуктов I и II рода могут служить соответственно рабочие места (РМ) и продукты потребления в экономике (объект — все производство), реакционные (активные) центры и внешние результаты взаимодействия обособленного объекта с внешней средой в биологии (см. также гл. 1).

Всю систему представим в виде двух подсистем А и Б. В примере с экономикой А — группа производства средств производства, Б — группа производства предметов потребления, каждая со своим РМ. Система А при помощи одной части ранее созданных продуктов I рода создает новые продукты I рода, система Б при помощи другой части ранее созданных продуктов I рода создает новые продукты II рода.

Пусть  $m_1(t)$ ,  $m_2(t)$  — скорости изменения (в момент  $t$ ) количества (числа единиц) новых продуктов соответственно в системах А, Б и  $p_1(t) = \int_0^t \lambda(\tau, t) m_1(\tau) d\tau$ ,  $p_2(t) = \int_0^t \mu(\tau, t) m_2(\tau) d\tau$  — те части продуктов I рода, которые функционируют соответственно в А и Б.

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты интенсивности использования в момент  $t$  продуктов I рода (в экономике — коэффициенты загрузки мощностей), созданных в момент  $\tau$  ( $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ ), отсчет времени начинаем с того момента ( $t = 0$ ), когда вводится в действие самый старый из используемых в последующие моменты  $t > t_0$  ( $t_0 > 0$ ) продуктов I рода,  $t_0$  — начало моделирования.

Далее предположим, что в течение всего рассматриваемого промежутка времени происходит (непрерывно или скачкообразно) процесс обновления технологий создания продуктов I и II рода. В качестве основных показателей эффективности этих технологий примем их производительности или удельные относительные скорости соответственно:  $\alpha(\tau, t)$  — скорость создания новых продуктов I рода момента  $t$  в расчете на единицу этих продуктов момента  $\tau$ , функционирующих в А,  $\beta(\tau, t)$  — скорость создания новых продуктов II рода момента  $t$  в расчете на единицу продуктов I рода момента  $\tau$ , функционирующих в Б.

Ясно, что по определению функции  $m_1, m_2, \alpha, \beta$  неотрицательны. Поэтому можно положить  $m_1 = ym, m_2 = (1 - y)m, m = m_1 + m_2$ . При этом распределительная функция  $y$  будет обладать свойством  $0 \leq y \leq 1$ .

С помощью введенных функций естественным образом строятся составляющие искомую модель интегральные уравнения. Это, во-первых, уравнение воссоздания основных продуктов I рода, обеспечивающих внутреннюю функцию объекта:

$$m(t) = \int_0^t \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) m_1(\tau) d\tau, \quad t > t_0 > 0, \quad 0 \leq \lambda(\tau, t) \leq 1; \quad (2.1)$$

во-вторых, уравнение создания продуктов II рода, обеспечивающих внешнюю функцию объекта:

$$c(t) = \int_0^t \beta(\tau, t) \mu(\tau, t) m_2(\tau) d\tau, \quad t > t_0, \quad 0 \leq \mu(\tau, t) \leq 1; \quad (2.2)$$

в-третьих, «балансовые» уравнения

$$P(t) = \int_0^t [\lambda(\tau, t) m_1(\tau) + \mu(\tau, t) m_2(\tau)] d\tau, \\ m_1(\tau) + m_2(\tau) = m(\tau), \quad M(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

где  $P(t)$  — общее количество функционирующих продуктов I рода в момент времени  $t$  (в экономике  $P(t)$  — общее число функционирующих РМ или число работников, в биологии — общая функционирующая биомасса).

На отрезке времени  $[0, t_0]$  функции  $m(t), m_1(t), m_2(t), c(t)$  предположим заданными. Таким образом, получаем динамическую модель (1)–(3) для  $t > t_0$  с заданной предысторией на отрезке  $[0, t_0]$ .

Как следствие, получаем величину

$$G(t) = \int_0^t [m(\tau) - \lambda(\tau, t) m_1(\tau) - \mu(\tau, t) m_2(\tau)] d\tau = M(t) - P(t), \quad (2.4)$$

где  $G(t)$  — общее количество неиспользуемых продуктов функционирования объекта (отвал системы) в момент времени  $t$ . Возможна, однако, интерпретация, когда часть  $G(t)$  будет играть роль запаса системы, который в дальнейшем может стать функционирующим продуктом.

Отметим три важных частных случая соотношений (1)–(4), когда  $\lambda(\tau, t)$  и  $\mu(\tau, t)$  имеют соответственно вид

$$\lambda(\tau, t) = \lambda(t - \tau), \quad \mu(\tau, t) = \mu(t - \tau), \quad (2.5)$$

$$\lambda(\tau, t), \quad \mu(\tau, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq a(t), \\ 1, & t \geq \tau > a(t), \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\lambda(\tau, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq a_1(t), \\ \lambda(t - \tau), & t \geq \tau > a_1(t), \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\mu(\tau, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq a_2(t), \\ \mu(t - \tau), & t \geq \tau > a_2(t). \end{cases}$$

Случай (5) соответствует стационарному коэффициенту интенсивности; случай (6) означает, что продукты, созданные не позже какого-то временного порога  $a(t) < t$ , в момент  $t$  иногда не используются, а созданные после этого срока используются на 100 %; случай (7) обобщает предыдущие.

Вместо соотношений (1)–(4), в частности, будем иметь

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_0^t \alpha(\tau, t) \lambda(t - \tau) m_1(\tau) d\tau, \\ c(t) &= \int_0^t \beta(\tau, t) \mu(t - \tau) m_2(\tau) d\tau, \quad 0 \leq \lambda, \quad \mu \leq 1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$P(t) = \int_0^t [\lambda(t - \tau) m_1(\tau) + \mu(t - \tau) m_2(\tau)] d\tau,$$

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t), \quad G(t) = M(t) - P(t), \quad t > t_0 > 0;$$

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) m_1(\tau) d\tau, \\ c(t) &= \int_{a(t)}^t \beta(\tau, t) m_2(\tau) d\tau, \quad m_1(t) + m_2(t) = m(t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$P(t) = \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau, \quad G(t) = \int_0^{a(t)} m(\tau) d\tau, \quad 0 \leq a(t) < t, \quad t > t_0 > 0;$$

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{a_1(t)}^t \alpha(\tau, t) \lambda(t - \tau) m_1(\tau) d\tau, \\ c(t) &= \int_{a_2(t)}^t \beta(\tau, t) \mu(t - \tau) [m(\tau) - m_1(\tau)] d\tau, \quad 0 \leq \lambda, \quad \mu \leq 1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$P(t) = \int_{a_1(t)}^t \lambda(t - \tau) m_1(\tau) d\tau + \int_{a_2(t)}^t \mu(t - \tau) [m(\tau) - m_1(\tau)] d\tau,$$

$$G(t) = M(t) - P(t), \quad 0 \leq a_1(t), \quad a_2(t) < t, \quad t > t_0 > 0.$$

Обозначив  $P'(t)$  через  $p(t)$ , преобразуем (9) к виду (допуская необходимую гладкость  $m$ , а и  $m(a) \neq 0$ )

$$m(t) = \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) m_1(\tau) d\tau,$$

$$c(t) = \int_{a(t)}^t \beta(\tau, t) [m(\tau) - m_1(\tau)] d\tau, \quad c(t) > 0, \quad 0 \leq a(t) < t, \quad (2.11)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{m(t) - p(t)}{m(a)}, \quad t \geq t_0 > 0.$$

Как видно, даже в упрощенной постановке модель приводит к системе условий, в которых наряду с нелинейными интегральными уравнениями необычного вида (с переменным нижним пределом, который может быть искомой неизвестной функцией) фигурирует нелинейное дифференциально-разностное (функциональное) уравнение.

В ряде уравнений могут быть более полезными дискретные аналоги соотношений (1)—(11):

$$\begin{aligned} m_k &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ik} \lambda_{ik} m_{1i} \Delta \tau_i, \\ c_k &= \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{ik} \mu_{ik} (m_i - m_{1i}) \Delta \tau_i, \quad 0 \leq \lambda_{ik}, \quad \mu_{ik} \leq 1, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$P_k = \sum_{i=0}^{k-1} [\lambda_{ik} m_{1i} + \mu_{ik} (m_i - m_{1i})] \Delta \tau_i,$$

$$G_k = M_k - P_k, \quad k > k_0 > 0;$$

$$m_k = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ik} \lambda_{k-i} m_{1i} \Delta \tau_i,$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{ik} \mu_{k-i} (m_i - m_{1i}) \Delta \tau_i, \quad 0 \leq \lambda_{k-i}, \quad \mu_{k-i} \leq 1,$$

(2.13)

$$P_k = \sum_{i=0}^{k-1} [\lambda_{k-i} m_{1i} + \mu_{k-i} (m_i - m_{1i})] \Delta \tau_i,$$

$$G_k = M_k - P_k, \quad k > k_0 \geq 0;$$

$$m_k = \sum_{i=a_k}^{k-1} \alpha_{ik} m_{1i} \Delta \tau_i, \quad c_k = \sum_{i=a_k}^{k-1} \beta_{ik} (m_i - m_{1i}) \Delta \tau_i, \quad (2.14)$$

$$P_k = \sum_{i=a_k}^{k-1} m_i \Delta \tau_i, \quad G_k = \sum_{i=0}^{a_k-1} m_i \Delta \tau_k,$$

$$0 \leq a_k < k, \quad k > k_0 > 0;$$

$$m_k = \sum_{i=a_k^{(1)}}^{k-1} \alpha_{ik} \lambda_{k-i} m_{1i} \Delta \tau_i,$$

$$c_k = \sum_{i=a_k^{(2)}}^{k-1} \beta_{ik} \mu_{k-i} (m_i - m_{1i}) \Delta \tau_i, \quad 0 \leq \lambda_{k-i}, \quad \mu_{k-i} \leq 1,$$

(2.15)

$$P_k = \sum_{i=a_k^{(1)}}^{k-1} \lambda_{k-i} m_{1i} \Delta \tau_i + \sum_{i=a_k^{(2)}}^{k-1} \mu_{k-i} (m_i - m_{1i}) \Delta \tau_i,$$

$$G_k = M_k - P_k, \quad M_k = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \Delta \tau_i, \quad k > k_0 > 0;$$

$$m_k = \sum_{i=a_k}^{k-1} \alpha_{ik} m_{1i} \Delta \tau_i,$$

$$c_k = \sum_{i=a_k}^{k-1} \beta_{ik} (m_i - m_{1i}) \Delta \tau_i, \quad (2.16)$$

$$a_{k+1} - a_k = \frac{m_k - p_k}{m_{a_k}} \Delta \tau_k, \quad 0 \leq a_k < k, \quad k > k_0 > 0.$$

При этом  $m_i$  и  $m_{1i}$  для  $i = \overline{0, k_0}$  предположим заданными.

Следует заметить, что соотношения (1)—(10) будут включать в себя соотношения (12)—(15), если интеграл понимать в смысле Стильеса и подынтегральные функции брать из достаточно широкого класса.

## § 2. $n$ -продуктовые модели

По аналогии с предыдущим введем  $n$ -продуктовую модель

$$m_i(t) = \sum_{j=1}^r \int_0^t \alpha_{ij}(\tau, t) \lambda_{ij}(\tau, t) m_{1ij}(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, r},$$

$$c_s(t) = \sum_{j=1}^r \int_0^t \beta_{sj}(\tau, t) \mu_{sj}(\tau, t) m_{2sj}(\tau) d\tau, \quad s = \overline{1, p},$$

$$P_j(t) = \int_0^t \left[ \sum_{i=1}^r \lambda_{ij}(\tau, t) m_{1ij}(\tau) + \sum_{s=1}^p \mu_{sj}(\tau, t) m_{2sj}(\tau) \right] d\tau,$$

$$c_s(t) = \int_0^t c_s(\tau) d\tau > 0, \quad s = \overline{1, p},$$

$$G_j(t) = M_j(t) - P_j(t), \quad M_j(t) = \int_0^t m_j(\tau) d\tau, \quad (2.17)$$

$$\sum_{i=1}^r m_{1ij}(\tau) + \sum_{s=1}^p m_{2sj}(\tau) = m_j(\tau), \quad j = \overline{1, r}, \quad P(t) = \sum_{j=1}^r P_j(t),$$

$$G(t) = M(t) - P(t), \quad M(t) = \sum_{j=1}^r M_j(t),$$

$$0 \leq \lambda_{ij}, \quad \mu_{sj} \leq 1, \quad t > t_0 > 0, \quad n = r + p.$$

Здесь  $m_i$  — скорость воссоздания  $i$ -х новых продуктов I рода, идущих на выполнение внутренних функций, на развитие системы (объекта),  $c_s$  — скорость создания  $s$ -х новых продуктов II рода, идущих на выполнение внешних функций системы,  $m_{1ij}$ ,  $m_{2sj}$  — аддитивные доли скоростей  $j$ -х продуктов I рода, идущие на создание  $i$ -х продуктов I рода и  $s$ -х продуктов II рода соответственно,  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{sj}$  — производительности создания  $i$ -х продуктов I рода и  $s$ -х продуктов II рода с помощью соответствующих  $j$ -х продуктов I рода,  $\lambda_{ij}$ ,  $\mu_{sj}$  — коэффициенты интенсивности использования в момент  $t$  существующих продуктов I рода возраста  $t - \tau$ ,  $P_j(t)$  — объем функционирующих в момент  $t$   $j$ -х продуктов I рода,  $G_j(t)$  — отвал этих продуктов, на отрезке времени  $[0, t_0]$  функции  $m_i(\tau)$ ,  $m_{1ij}(\tau)$ ,  $m_{2ij}(\tau)$  считаются заданными.

Частными случаями (17) будут

$$m_i(t) = \sum_{j=1}^r \int_0^t \alpha_{ij}(\tau, t) \lambda_{ij}(t - \tau) m_{1ij}(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, r},$$

$$c_s(t) = \sum_{j=1}^r \int_0^t \beta_{sj}(\tau, t) \mu_{sj}(t - \tau) m_{2sj}(\tau) d\tau, \quad s = \overline{1, p},$$

$$P_j(t) = \int_0^t \left[ \sum_{i=1}^r \lambda_{ij}(t - \tau) m_{1ij}(\tau) + \sum_{s=1}^p \mu_{sj}(t - \tau) m_{2sj}(\tau) \right] d\tau, \quad (2.18)$$

$$G_j(t) = M_j(t) - P_j(t), \quad \sum_{i=1}^r m_{1ij}(\tau) + \sum_{s=1}^p m_{2sj}(\tau) = m_j(\tau),$$

$$j = \overline{1, r}, \quad t > t_0 > 0;$$

$$\beta_{sf}(\tau, t) = \sum_{k=1}^r \beta_{(1)k}^{sf}(\tau) \beta_{(2)k}^{sf}(t). \quad (2.23)$$

$$\alpha_{if}(\tau, t) = \sum_{k=1}^r \alpha_{(1)k}^{if}(\tau) \alpha_{(2)k}^{if}(t), \quad (2.22)$$

$$\alpha_{if}(\tau, t) = \alpha_{(1)}^{if}(\tau) \alpha_{(2)}^{if}(t), \quad \beta_{sf}(\tau, t) = \beta_{(1)}^{sf}(\tau) \beta_{(2)}^{sf}(t), \quad (2.21)$$

Важны также частные случаи, когда

$$0 \leq \alpha_{(1)}^{if}, \alpha_{(2)}^{if} > t, \quad 0 \leq \lambda_{if}, \mu_{sf} \leq 1, \quad t > t_0 > 0.$$

$$G_j(t) = M_j(t) - P_j(t), \quad \sum_r m_{1if}(\tau) + \sum_p m_{2sf}(\tau) = 1, \quad i = \underline{1, r}, \quad (2.20)$$

$$+ \sum_p \int_t^{a_{(2)}^{if}(t)} \mu_{sf}(\tau) m_{2sf}(\tau) d\tau,$$

$$P_j(t) = \sum_r \int_t^{a_{(1)}^{if}(t)} \lambda_{if}(\tau) m_{1if}(\tau) d\tau +$$

$$c_s(t) = \sum_r \int_t^{a_{(2)}^{sf}(t)} \beta_{sf}(\tau, t) \mu_{sf}(\tau) m_{2sf}(\tau) d\tau, \quad s = \underline{1, p},$$

$$m_i(t) = \sum_r \int_t^{a_{(1)}^{if}(t)} \alpha_{if}(\tau, t) \lambda_{if}(\tau) m_{1if}(\tau) d\tau, \quad i = \underline{1, r},$$

$$0 \leq a_j(t) > t, \quad i = \underline{1, r}, \quad t > t_0 > 0;$$

$$\sum_r m_{1if}(\tau) + \sum_p m_{2sf}(\tau) = m_j(\tau),$$

$$P_j(t) = \int_t^{a_j(t)} m_j(\tau) d\tau, \quad G_j(t) = \int_t^{a_j(t)} m_j(\tau) d\tau,$$

(2.19)

$$c_s(t) = \sum_r \int_t^{a_j(t)} \beta_{sf}(\tau, t) m_{2sf}(\tau) d\tau, \quad s = \underline{1, p},$$

$$m_i(t) = \sum_r \int_t^{a_j(t)} \alpha_{if}(\tau, t) m_{1if}(\tau) d\tau, \quad i = \underline{1, r},$$

Понимая интегралы в (17)—(20) в смысле Стильеса, получим соотношения, охватывающие одновременно и непрерывный, и дискретный случай  $n$ -продуктовых моделей.

### § 3. Континуальные модели

При больших  $p$  более удобной может оказаться смешанная конечно-континуальная модель

$$m_i(t) = \sum_{j=1}^r \int_0^t \alpha_{ij}(\tau, t) \lambda_{ij}(\tau, t) m_{1ij}(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, r},$$

$$c(t, v) = \sum_{j=1}^r \int_0^t \beta_j(\tau, t, v) \mu_j(\tau, t, v) m_{2j}(\tau, v) d\tau, \quad v \in [0, 1],$$

$$P_j(t) = \int_0^t \left[ \sum_{i=1}^r \lambda_{ij}(\tau, t) m_{1ij}(\tau) + \int_0^1 \mu_j(\tau, t, v) m_{2j}(\tau, v) dv \right] d\tau, \quad (2.24)$$

$$G_j(t) = M_j(t) - P_j(t), \quad M_j(t) = \int_0^t m_j(\tau) d\tau,$$

$$\sum_{i=1}^r m_{1ij}(\tau) + \int_0^1 m_{2j}(\tau, v) dv = m_j(\tau), \quad j = \overline{1, r}, \quad t > t_0 > 0,$$

где  $c(t, v)$  — скорость изменения (по  $v$ ) скорости (по  $t$ ) создания  $v$ -х продуктов второй группы, являющихся результатом выполнения внешних функций рассматриваемого объекта, остальные обозначения имеют смысл, аналогичный предыдущему. Заметим, что  $v = 0$  или  $v = 1$  соответствуют самым младшим или самым старшим номерам видов продуктов второй группы при заданном способе их упорядочения.

Подобным образом для достаточно больших  $r$  и  $p$  целесообразно рассматривать следующую континуальную модель:

$$m(t, v) = \int_0^1 \int_0^t \alpha(\tau, t, u, v) \lambda(\tau, t, u, v) m_1(\tau, u, v) d\tau du, \quad v \in [0, 1],$$

$$c(t, v) = \int_0^1 \int_0^t \beta(\tau, t, u, v) \mu(\tau, t, u, v) m_2(\tau, u, v) d\tau du, \quad v \in [0, 1],$$

$$P(t, u) = \int_0^t \int_0^1 [\lambda(\tau, t, u, v) m_1(\tau, u, v) + \mu(\tau, t, u, v) m_2(\tau, u, v)] dv d\tau > 0, \quad (2.25)$$

$$G(t, u) = M(t, u) - P(t, u), \quad M(t, u) = \int_0^t m(\tau, u) d\tau,$$

$$\int_0^1 [m_1(\tau, u, v) + m_2(\tau, u, v)] dv = m(\tau, u), \quad u \in [0, 1], \quad (2.26)$$

$$0 \leq \lambda, \quad \mu \leq 1, \quad t > t_0 > 0,$$

где  $m(\tau, u)$  — скорость изменения (по  $u$ ) скорости (по  $\tau$ ) воссоздания  $u$ -х продуктов первой группы, предназначенных для выполнения внутренних функций рассматриваемого объекта, остальные обозначения аналогичны прежним.

Заметим, что, разбив различные скопления индексов в  $n$ -продуктовой модели на различные независимые группы, можно аналогичным путем получить континуальные модели с интегралами любой кратности и с любым количеством функций типа  $m(t, v)$  и  $c(t, v)$ .

Важно заметить еще, что индексы  $v$  могут быть истолкованы как моменты первого появления нового  $v$ -го продукта при помощи всех ранее полученных продуктов с временами изготовления  $u \leq v$ .

В таком случае модель, например, (25), (26) может быть переписана в виде

$$m(t, v) = \int_0^v \int_0^t \alpha(\tau, t, u, v) \lambda(\tau, t, u, v) m_1(\tau, u, v) d\tau du, \quad (2.27)$$

$$c(t, v) = \int_0^v \int_0^t \beta(\tau, t, u, v) \mu(\tau, t, u, v) m_2(\tau, u, v) d\tau du,$$

$$P(t, u) =$$

$$= \int_0^t \int_0^t [\lambda(\tau, t, u, v) m_1(\tau, u, v) + \mu(\tau, t, u, v) m_2(\tau, u, v)] dv d\tau > 0, \quad (2.28)$$

$$G(t, u) = M(t, u) - P(t, u), \quad M(t, u) = \int_0^t m(\tau, u) d\tau,$$

$$\int_0^v [m_1(\tau, u, v) + m_2(\tau, u, v)] dv = m(\tau, u), \quad \tau, u \in [0, t], \quad (2.29)$$

$$0 \leq \lambda, \quad \mu \leq 1, \quad t > t_0 > 0, \quad v > v_0 > 0.$$

Запись вида (29) удобна для интерпретации исходных структур  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$  двухпродуктовой модели как продуктов континуальной модели. Нетрудно усложнить (29) таким образом, чтобы все производительности  $\alpha_{ij}(\tau, t)$  и  $\beta_{sj}(\tau, t)$   $n$ -продуктовой модели оказались в роли продуктов континуальной модели.

#### § 4. Некоторые видоизменения и уточнения моделей

Более сложные нелинейные и стохастические модели в случае необходимости могут быть представлены в том же виде (1)—(29), но с тем отличием, что динамические структуры типа  $\alpha, \beta$  будут

еще зависеть от продуктов и ряда случайных факторов. При этом  $\alpha$ ,  $\beta$  приобретают обобщенный смысл и любые знаки, если речь идет о создании новых или (и) уничтожении старых продуктов. В последнем случае к соотношениям (1) — (29) необходимо добавить условие неотрицательности количеств всех взаимодействующих продуктов. Функции  $\alpha$ ,  $\beta$  определенным образом могут также зависеть от других параметров внешней среды, не отмеченных ранее.

Кроме указанных выше соотношений, в основном виде равенств, в модели могут быть добавлены ограничения в виде неравенств [83].

Важным уточнением  $n$ -продуктовой модели является добавление внешних функций и соответствующих им продуктов по удалению «отходов» функционирования:

$$c_s(t) \equiv g_s(t) = G'_s(t) = \sum_{j=1}^r \int_0^t \beta_{sj}(\tau, t) \mu_{sj}(\tau, t) m_{2sj}(\tau) d\tau, \quad s = \overline{p+1, p}, \quad (2.30)$$

где  $\beta_{sj}$  — производительности,  $\mu_{sj}$  — интенсивности.

Другим уточнением может быть введение обобщенного субстрата  $\Delta F(t_0, t)$ , поступившего за время  $t - t_0$  извне в рассматриваемую систему (например, сырьё в экономике):

$$F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0, t) = \sum_{s=1}^p \int_{t_0}^t c_s(\tau) d\tau + \sum_{s=p+1}^p \int_{t_0}^t g_s(\tau) d\tau + \Delta p(t_0, t), \quad (2.31)$$

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

где  $\Delta P(t_0, t)$  — приращение массы системы на отрезке  $[t_0, t]$ ,  $\Delta P(t_0, t) = P(t) - P(t_0)$ ,  $F(t)$  — общий субстрат за время от 0 до  $t$ . В ряде случаев полезно субстрат детализировать, вводя каждую из его компонент в соответствующую подсистему.

Следующим дополнением будет введение распределительных функций  $x_{1ij}(t)$ ,  $x_{2sj}(t)$ ,  $\sum_{i=1}^r x_{1ij}(t)$ ,  $\sum_{i=1}^r x_{1ij}(t) + \sum_{s=1}^p x_{2sj}(t)$ , задание которых определяет соответствующие части  $m_{1ij}(\tau)$  и  $m_{2sj}(\tau)$  функций  $m_j(\tau)$  ( $j = \overline{1, r}$ ) (см. (17)). Положим

$$\int_0^t \lambda_{ij}(\tau, t) m_{1ij}(\tau) d\tau = x_{1ij}(t) P_j(t), \quad i, j = \overline{1, r}, \quad (2.32)$$

$$\int_0^t \mu_{sj}(\tau, t) m_{2sj}(\tau) d\tau = x_{2sj}(t) P_j(t),$$

$$s = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, r}, \quad r + p = n \geq 2.$$

Так как  $P_j(t)$  по условию не равно нулю, то при заданных  $\lambda_{ij}$ ,  $m_{1ij}$ ,  $\mu_{sj}$ ,  $m_{2sj}$  однозначно находим  $x_{1ij}$ ,  $x_{2sj}$  и, наоборот, при заданных  $x_{1ij}$ ,  $x_{2sj}$ ,  $P_j$ ,  $\lambda_{ij}$ ,  $\mu_{sj}$ , непрерывно дифференцируемых по  $t$ , причем  $\lambda_{ij}(t, t)$ ,  $\mu_{sj}(t, t) \neq 0$ , однозначно находим  $m_{1ij}$ ,  $m_{2sj}$ , решая уравнения Вольтерра 2-го рода

$$\lambda_{ij}(t, t) m_{1ij}(t) + \int_0^t \lambda'_{ijt}(\tau, t) m_{1ij}(\tau) d\tau = [x_{1ij}(t) P_j(t)]'_t,$$

$$\mu_{sj}(t, t) m_{2sj}(t) + \int_0^t \mu'_{sjt}(\tau, t) m_{2sj}(\tau) d\tau = [x_{2sj}(t), P_j(t)]'_t.$$

Если  $m_{1ij}(\tau)$ ,  $m_{2sj}(\tau) \geq 0$ , то, как уже отмечалось в частном случае двухпродуктовой модели, удобно ввести распределительные функции  $y_{1ij}(\tau)$ ,  $y_{2sj}(\tau)$  по правилу

$$m_{1ij}(\tau) = y_{1ij}(\tau) m_j(\tau), \quad m_{2sj}(\tau) = y_{2sj}(\tau) m_j(\tau),$$

$$i, j = \overline{1, r}, \quad s = \overline{1, p}. \quad (2.33)$$

Ясно, что тогда

$$\sum_{i=1}^r y_{1ij}(\tau) + \sum_{s=1}^p y_{2sj}(\tau) = 1, \quad j = \overline{1, r},$$

$$y_{1ij}(\tau) \geq 0, \quad y_{2sj}(\tau) \geq 0, \quad i, j = \overline{1, r}, \quad s = \overline{1, p}.$$

В общем случае, когда  $m_{1ij}(\tau)$  и  $m_{2sj}(\tau)$  могут иметь любой знак, но  $M_j(t) > 0$  ( $j = \overline{1, r}$ ), можно ввести распределительные функции  $z_{1ij}(\tau)$  и  $z_{2sj}(\tau)$  по правилу

$$M_{1ij}(t) = z_{1ij}(t) M_j(t),$$

$$M_{2sj}(t) = z_{2sj}(t) M_j(t), \quad i, j = \overline{1, r}, \quad s = \overline{1, p}, \quad (2.34)$$

$$\sum_{i=1}^r z_{1ij}(t) + \sum_{s=1}^p z_{2sj}(t) = 1, \quad j = \overline{1, r}.$$

Важно заметить, что на основании (34) интегрированием по частям и перестановкой интегралов нетрудно показать справедливость следующей формы записи  $n$ -продуктовой модели:

$$M_i(t) = M_i(t_0) - \sum_{j=1}^r \int_{t_0}^t \int_0^{t_0} [\alpha_{ij}(\tau, u) \lambda_{ij}(\tau, u)]'_\tau M_{1ij_0}(\tau) d\tau du +$$

$$+ \sum_{j=1}^r \int_{t_0}^t \omega_{ij}(\tau, t) z_{1ij}(\tau) M_j(\tau) d\tau > 0, \quad i = \overline{1, r}.$$

$$c_s(t) = c_s(t_0) - \sum_{j=1}^r \int_{t_0}^t \int_0^t [\beta_{sj}(\tau, u) \mu_{sj}(\tau, u)]'_\tau M_{2sj_0}(\tau) d\tau du + \\ + \sum_{j=1}^r \int_{t_0}^t \sigma_{sj}(\tau, t) z_{2sj}(\tau) M_j(\tau) d\tau > 0, \quad s = \overline{1, p}, \quad (2.35)$$

$$\sigma_{sj}(\tau, t) = \beta_{sj}(\tau, t) \mu_{sj}(\tau, t) - \int_0^t [\beta_{sj}(\tau, u) \mu_{sj}(\tau, u)]'_\tau du,$$

$$P_j(t) = \int_0^t \left[ \sum_{i=1}^r \lambda_{ij}(\tau, t) (z_{1ij} M_j)'_\tau + \sum_{s=1}^p \mu_{sj}(\tau, t) (z_{2sj} M_j)'_\tau \right] d\tau > 0,$$

$$G_j(t) = M_j(t) - P_j(t) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^r z_{1ij}(\tau) + \sum_{s=1}^p z_{2sj}(\tau) = 1, \quad j = \overline{1, r},$$

$$1 \leq \lambda_{ij}, \quad \mu_{sj} \leq 1, \quad t \geq t_0 > 0, \quad n = r + p.$$

Подобные формы могут быть выписаны также для всех ранее рассмотренных случаев.

Введем еще внутренние функции (и соответствующие им продукты) по освоению определенных долей  $w_s(t) \int_0^t c_s(\tau) d\tau$  ( $0 \leq w_s(t) \leq 1$ )

нешних продуктов  $G_s(t) = \int_0^t c_s(\tau) d\tau$  ( $G_s(t) > 0$ ) и субстрата  $F(t)$

( $t \geq t_0$ ):

$$\bar{m}_i(t) = \sum_{s=1}^p \int_0^t \gamma_{is}(\tau, t) v_{is}(\tau, t) c_{is}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t \gamma_i(\tau, t) v_i(\tau, t) f(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, q}, \quad q \leq r,$$

$$\int_0^t v_{is}(\tau, t) c_{is}(\tau) d\tau = \omega_{is}(t) \int_0^t c_s(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, q}, \quad s = \overline{1, p}, \quad (2.36)$$

$$\sum_{i=1}^q \omega_{is}(t) = \omega_s(t), \quad s = \overline{1, p},$$

где  $\gamma_{is}$ ,  $\gamma_i$  — производительности,  $v_{is}$ ,  $v_i$  — интенсивности. С учетом (36)

$$\hat{m}_i(t) = \sum_{j=1}^r \int_0^t \hat{\alpha}_{ij}(\tau, t) \hat{\lambda}_{ij}(\tau, t) m_{1ij}(\tau) d\tau,$$

$$\hat{m}_i = m_i - \bar{m}_i, \quad i = \overline{1, r}. \quad (2.37)$$

Введем, наконец, продукты III рода (Б) как специальную часть продуктов II рода. При этом к продуктам нового II рода (Б) отнесем  $c_s(t)$  ( $s = \overline{1, p'}$ ):

$$c_s(t) = \sum_{j=1}^r \int_0^t \beta_{sj}(\tau, t) \mu_{1sj}(\tau, t) m_{2sj}(\tau) d\tau, \quad s = \overline{1, p'}, \quad (2.38)$$

а к продуктам III рода  $c_s(t)$  ( $s = \overline{p' + 1, p}$ ):

$$c_s(t) \equiv \alpha_{ik}(t, t) = \sum_{j=1}^r \int_0^t \beta_{sj}(\tau, t) \mu_{sj}(\tau, t) m_{2sj}(\tau) d\tau, \\ s = p' + (k-1)r + i, \quad i, k = \overline{1, r}, \quad (2.39)$$

$$c_s(t) \equiv \int_0^t \mu_{su}(\tau, t) m_{2su}(\tau) d\tau \cdot \beta_{lu}(t, t) = \\ = \sum_{j=1}^r \int_0^t \beta_{lj}(\tau, t) \mu_{sj}(\tau, t) m_{2sj}(\tau) d\tau, \quad s = p' + r^2 + (u-1)(p' + r^2) + l, \\ l = \overline{1, p' + r^2}, \quad u = \overline{1, r}, \quad p = p' + r^2 + (p' + r^2)r.$$

Если к (39) добавить еще изменения исходных производительностей  $\alpha_{ik}(\tau, \tau)$ ,  $\beta_{lk}(\tau, \tau)$  во времени, например, добавить  $\alpha_{ik}(\tau, t) = \alpha_{ik}(\tau, \tau) e^{c_{ika}(\tau-t)}$ ,  $\beta_{lu}(\tau, t) = \beta_{lu}(\tau, \tau) e^{c_{lu\beta}(\tau,t)}$ , где  $c_{ika}$ ,  $c_{lu\beta}$  — константы, определяемые экспериментально, то получим замкнутую систему уравнений относительно искомым производительностей  $\alpha_{ik}(\tau, t)$  и  $\beta_{lu}(\tau, t)$ . Таким образом, вся система соотношений обобщенной  $n$ -продуктовой модели становится вполне определяемой открытой динамической системой.

Следует заметить, что не все виды продуктов I рода обязаны участвовать в производстве специальных продуктов  $c_s(t)$  ( $s > p'$ ). Поэтому может быть полезным изменить модель (39), считая, что  $m_{2sj}$  для  $s > p'$  являются частями лишь  $m_j$  ( $j = \overline{1, q'}$ ), например,  $g' = q$ . Формально этого можно добиться, полагая в (38)

$$\beta_{sj}, \beta_{lj} = 0, \quad j = \overline{q' + 1, r}, \quad u = \overline{1, q'}, \quad l = \overline{1, x}, \quad x \geq r^2 + (p/q')r.$$

До сих пор речь шла о моделях обособленных развивающихся систем. При рассмотрении двух взаимодействующих  $n$ -продуктовых систем можно формально свести дело к случаю одной обособленной системы, однако без дополнительного агрегирования число продуктов при этом удвоится, а число связей учетверится. При рассмотрении взаимодействия большего числа систем аппарат получится еще более сложный. Поэтому целесообразно в случае небольшого числа взаимодействующих систем идти по пути простого объединения моделей этих систем с добавлением в случае необходимости лишь про-

стейших связей, характеризующих эффекты взаимодействия. В случае большого числа взаимодействующих систем упрощение может быть достигнуто многими различными способами: дополнительным агрегированием, введением иерархической структуры и др. (см. гл. 1).

Заметим в заключение, что для успешного применения различных аналитических и численных методов необходимо перейти от указанных уравнений и других соотношений к их безразмерным эквивалентам, согласованным одновременным выбором масштаба  $t$  [11a].

## § 5. Сравнение новых моделей с известными

**5.1. Сравнение с макроэкономической ПП-моделью.** Приведем сопоставление модели, рассмотренной в п. 1.1, с новым подходом [210] к построению производственных функций на основе анализа технологической структуры отрасли (хозяйства). В результате этого анализа в [210] получено следующее выражение для обобщенного продукта хозяйства в единицу времени:

$$c(t) = \int_v^{\xi} m(t, \lambda) d\lambda,$$

где  $m(t, \lambda)$  — заданное распределение мощностей по производственным единицам,  $\lambda$  — трудоемкость,  $v$  — минимальная норма затрат труда на единицу продукта, которая может быть осуществлена в хозяйстве,  $\xi$  — граничная, максимальная трудоемкость (производственные единицы с трудоемкостью больше  $\xi$  не используются).

Сравнив выражения

$$\int_v^{\xi} m(t, \lambda) d\lambda = \int_{a(t)}^t \beta(\tau, t) m_2(\tau) d\tau,$$

легко получаем

$$a(t) \equiv \lambda^{-1}(\xi), \quad t \equiv \lambda^{-1}(v),$$

$$m(t, \lambda(\tau)) \left( -\frac{d\lambda(\tau)}{\tau} \right) \equiv \beta(\tau, t) m_2(\tau).$$

Из последнего равенства вытекает, что интерпретацию  $\beta$  (или  $m_2$ ) можно получить через принятые в [210] величины  $m(t, \lambda)$  и  $\lambda$  с помощью  $m_2$  (или  $\beta$ ).

Таким образом, принятый в ПП-моделях новый подход к построению производственных функций независимо приводит по существу к одному из соотношений п. 1.1. Еще одно соотношение может быть записано в виде

$$P_2(t) \equiv \int_{a(t)}^t m_2(\tau) d\tau \equiv \int_v^{\xi} \lambda m(t, \lambda) d\lambda \equiv R(t),$$

где  $P_2 \equiv R$  — количество используемых в хозяйстве трудовых ресурсов.

Следует заметить, что в работе [43] ПП-модель всесторонне сопоставлялась с макроэкономической моделью равновесия Кейнса, а структура производственных функций исследовалась в [269].

Близкими к рассматриваемым по отдельным характеристикам являются также однопродуктовая динамическая модель [130а] и модели [205а, 233].

5.2. Сравнение с классической моделью в интегральной форме. Известно, что широкий класс динамических систем в линейном и конечномерном приближении может быть представлен в виде

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t K(\tau, t) X(\tau) d\tau, \quad (2.40)$$

где  $X$  — вектор входных воздействия,  $Y$  — вектор реакции системы,  $K$  — матрица импульсных переходных функций системы,  $t$  — время. По существу, класс моделей (40) может быть представлен системой обыкновенных линейных дифференциально-разностных уравнений. Выбор одного из двух простейших, но весьма полезных аппаратов — дело вкуса и привычки. По нашему мнению, во многих случаях более удобной является компактная запись вида (40), тем более что в ней  $k_{ij}(u, t)$ ,  $K = \{k_{ij}\}$ , имеет простой практический смысл реакции системы на входные воздействия в виде дельта-функции Дирака  $\delta(\tau - u) \left( \int_u^t k_{ij}(\tau, t) d\tau \right)$  — реакция на возмущение в виде единичной ступенчатой в момент времени  $u$  функцией).

При численной реализации зависимостей (40) интегральная форма также предпочтительнее ввиду ее большей устойчивости (правда, при оценке  $K(\tau, t)$  по данным  $Y$  и  $X$  получается типичная некорректно поставленная задача [252]). Такая запись линейных динамических связей весьма распространена при моделировании непрерывных производственных процессов [117]; при этом на нижнем пределе интегрирования ставится обычно  $t - T$ , где  $T$  — оценка времени окончания переходных процессов по всем каналам.

В предлагаемых динамических моделях введены по крайней мере две принципиально новые модификации (40). Первая из них состоит в том, что функции  $k_{ij}(\tau, t)$  представлены в виде произведений:

$$k_{ij}(\tau, t) = \varphi_{ij}(\tau, t) \psi_{ij}(\tau, t), \quad (2.41)$$

в которых  $\varphi_{ij}$  играют роль заданных, исходных структур, а  $\psi_{ij}$  — роль неизвестных, искоемых или управляющих структур. В частном случае вместо (40) получаем

$$Y(t) = \int_{A(t)}^t K(\tau, t) X(\tau) d\tau$$

или

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^r \int_{a_j(t)}^t k_{ij}(\tau, t) x_j(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.42)$$

где  $A(t)$  — некоторая функция от  $t$ , которая в ряде приложений может быть или наперед неизвестной, или искомым управляющим воздействием. Функция  $A(t)$  и часть вектора  $x$ , которая может быть также управляющим воздействием, приводят к весьма сложному нелинейному аппарату управления, обладающему новыми большими возможностями.

Вторая модификация заключается в том, что часть всех выходов системы играет особую роль — они являются источником, или первопричиной, и самих себя, и всех прочих функций системы. Если эту часть назвать ресурсами системы, то тогда определенная часть ресурсов идет на воспроизводство ресурсов, а остальная часть — на выполнение прочих функций системы. В таком случае  $X = X(y)$ .

Таким образом, оставаясь в рамках простейших по виду динамических моделей (40)—(42), что важно с точки зрения простоты их определения, благодаря указанным модификациям можно рассчитывать на большие возможности моделей по охвату различных режимов функционирования рассматриваемых систем и на более глубокую оптимизацию этих режимов за счет выбора наилучших коэффициентов интенсивностей использования основных ресурсов и долей распределения этих ресурсов.

В случае существенно нелинейных систем необходимо (40) переписать в виде

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t K(\tau, t, X) X(\tau) d\tau, \quad K(\tau, t, X) = \{k_{ij}(\tau, t, X)\}, \quad (2.40')$$

где  $K(\tau, t, X)$  — в общем случае абстрактная вектор-функция от  $X$ , т. е. ее значения зависят не только от  $X(\tau)$ , но и от  $X(u)$  ( $u \leq \tau$ ). Следует подчеркнуть, что все указанные выше модификации (40) переносятся на нелинейный случай (40'). В частности, если за  $X$ ,  $Y$  в (40') приняты векторы скоростей образования количества новых продуктов, то функции  $k_{ij}(\tau, t, X)$  могут быть представлены в виде

$$k_{ij}(\tau, t, X) = \varphi_{ij}(\tau, t, x) \psi_{ij}(\tau, t, x), \quad (2.41')$$

где  $\varphi_{ij}$  — производительности,  $\psi_{ij}$  — коэффициенты интенсивности при создании новых продуктов.

Аналогично можно ввести соотношение

$$Y^-(t) = \int_{-\infty}^t K^-(\tau, t, x) X(\tau) d\tau, \quad K^-(\tau, t, X) = \{k_{ij}^-(\tau, t, X)\}, \quad (2.40'')$$

где  $Y^-$  — вектор скоростей потребления количества старых продуктов. Тогда (41') переписывается в виде

$$k_{ij}^-(\tau, t, x) = \varphi_{ij}^- \psi_{ij}^-(\tau, t, X), \quad (2.41'')$$

где  $\varphi_{ij}^-$ ,  $\psi_{ij}^-$  — производительности и коэффициенты интенсивности

соответственно при потреблении старых продуктов. Объединяя (40') и (40''), получим обычно применяемую интегральную запись

$$Z \equiv (Y - Y^-) = \int_{-\infty}^t R(\tau, t, X) X(\tau) d\tau, \quad R \equiv (K - K^-). \quad (2.40''')$$

Если в ней  $R(\tau, t, X) \equiv R(X(\tau))$ , то приходим к системе дифференциальных уравнений

$$Z' = R(X) X, \quad X = X(Z). \quad (2.40^{IV})$$

### § 6. Способы экспериментального определения исходных элементов моделей

Искомыми величинами, нередко подлежащими определению в результате экспериментальных работ и соответствующей обработки экспериментальных данных на ЭВМ, являются функции типа  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$ . Суть способов определения этих функций поясним на примере двухпродуктовой модели.

Из соотношений модели вытекает, что в случае линейных моделей для определения  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$  на будущий отрезок времени  $[t_0, T]$  ( $t_0 \leq \tau \leq t \leq T$ ) достаточно выполнить следующие операции.

Для  $\tau \leq t \leq t_0$ :

I. Найти  $\lambda(\tau, t)$ ,  $\mu(\tau, t)$ , исходя из смысла этих функций как коэффициентов интенсивности использования имеющихся ресурсов по соответствующим каналам. В частности, в случае модели (11)

достаточно найти  $a(t)$  из уравнения  $\int_0^{a(t)} m(\tau) d\tau = G(t)$ , где  $m(\tau)$  —

скорость воспроизводства продукта первого рода,  $G(t)$  — отвал, определяемые экспериментально (регистрацией фактических значений указанных величин, реализованных на  $[0, t_0]$ ).

II. 1-й вариант. Подать по каналу  $y(\tau) m(\tau) = m(t)$  вместо  $y(\tau) m(\tau)$  возмущение в виде «единичной» ступенчатой функции в момент  $\tau$ ,  $\lambda(\tau, t) \neq 0$ . На выходе будем иметь

$$A(\tau, t) = \int_{\tau}^t \alpha(u, t) \lambda(u, t) du. \quad (2.43)$$

Отсюда найдем

$$\alpha(\tau, t) = - \frac{1}{\lambda(\tau, t)} \cdot \frac{\partial A(\tau, t)}{\partial \tau}. \quad (2.44)$$

При этом необходимо привлечение аппарата решения некорректной задачи численного дифференцирования [116, 252]. Аналогично для определения  $\beta(\tau, t)$  по каналу  $[1 - y(\tau)] m(\tau) = c(t)$ . Напомним, что здесь  $ym = m_1$ ,  $(1 - y)m = m_2$ ,  $m_1 + m_2 = m$ .

2-й вариант. Подать по каналу  $y(\tau) m(\tau) = m(t)$  возмущение  $z_a$  в виде прямоугольного «единичного» импульса с моментами начала и конца соответственно  $\tau_1$  и  $\tau$ ,  $\lambda(\tau, t) \neq 0$ . На выходе будет

$$A(\tau_1, \tau, t) = \int_{\tau_1}^{\tau} \alpha(u, t) \lambda(u, t) du, \quad (2.45)$$

откуда

$$\alpha(\tau, t) = \frac{1}{\lambda(\tau, t)} \cdot \frac{\partial A(t_1, \tau, t)}{\partial \tau}. \quad (2.46)$$

Следует отметить, что перед дифференцированием  $A$  еще необходимо произвести сглаживание экспериментальных данных. Аналогично для  $\beta(\tau, t)$ . Реализация указанных возмущений  $z_\alpha$  и  $z_\beta$  возможна путем скачкообразного изменения  $y(\tau)$  по закону

$$y(\tau) = \frac{z_\alpha}{z_\alpha + z_\beta}, \quad m(\tau) = z_\alpha + z_\beta.$$

3-й вариант. Зарегистрировать значения  $y(\tau)$ ,  $m(\tau)$ ,  $c(t)$  в режиме нормального функционирования объекта. После этого искомые  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$  найти из решения, например, одной из следующих задач:

$$M \left\{ \left[ \int_0^t \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau - m(t) \right]^2 + \left[ \int_0^t \beta(\tau, t) \mu(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau - c(t) \right]^2 \right\} = \min_{\alpha(\tau, t), \beta(\tau, t)}, \quad (2.47)$$

$$\max \max \left[ \left| m(t) - \int_0^t \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau \right|, \left| c(t) - \int_0^t \beta(\tau, t) \mu(\tau, t) (1 - y(\tau)) m(\tau) d\tau \right| \right] = \min_{\alpha(\tau, t), \beta(\tau, t)}, \quad (2.47')$$

где  $M$  — знак математического ожидания.

Для  $t_0 \leq t \leq T$ :

III. Экстраполировать найденные значения  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$  для  $\tau \leq t \leq t_0$  на отрезок  $[t_0, T]$ . При этом необходимо привлечение известного аппарата [39]. Для повышения точности экстраполяции может потребоваться не одна, а несколько предысторий функционирования объекта по отношению к моменту времени  $t_0$ . Интерпретация  $\alpha$  и  $\beta$  в виде производительностей по соответствующим каналам может оказаться удобной для привлечения к прогнозированию метода экспертных оценок [64]. Более подробно о необходимых при этом численных методах см. § 5 гл. 5.

В случае нелинейных моделей  $\alpha$  зависит от  $\delta$ ,  $t$ ,  $ym$ , а  $\beta$  — от  $\tau$ ,  $t$ ,  $(1 - y)m$ . Поэтому, решая задачу идентификации в режиме нормального функционирования объекта и применяя, например, (47) или (47'), необходимо строить аппроксимацию  $\alpha$  ( $\beta$ ) в общем случае как абстрактной функции от  $ym$  ( $(1 - y)m$ ), т. е. зависящей не только от  $y(\tau)m(\tau)$  ( $(1 - y(\tau))m(\tau)$ ), но и от  $y(u)m(u)$  ( $(1 - y(u))m(u)$ ) ( $t_0 \leq u \leq \tau$ ), практически от  $y(k\Delta t)m(k\Delta t)$  ( $1 - y(k\Delta t)m(k\Delta t)$ ) ( $k = k_0, r$ ),  $k_0\Delta t = t_0$ ,  $r\Delta t = \tau$ ,  $\Delta t$  — некоторый шаг

дискретизации. Алгоритмы такого подхода описаны в [117] (см. также § 5 гл. 5). Следует заметить, что весьма важной моделью  $\alpha$  ( $\beta$ ) является [77]

$$\alpha = \frac{\tilde{\alpha}(\tau, t) y(\tau) m(\tau)}{\int_0^{\tau} y(u) m(u) du} \quad \left( \beta = \frac{\tilde{\beta}(\tau, t) (1 - y(\tau)) m(\tau)}{\int_0^{\tau} (1 - y(u)) m(u) du} \right), \quad (2.48)$$

где  $\tilde{\alpha}$  ( $\tilde{\beta}$ ) зависит только от  $\tau, t$ .

## § 7. Математические постановки некоторых задач моделирования

В предлагаемых моделях возможны постановки различных задач в зависимости от того, какие функции модели заданы, а какие являются неизвестными. Пусть заданные функции таковы, что система уравнений полностью определена. Тогда мы получаем задачу определения динамики развивающейся системы, которая заключается в решении соответствующей системы интегральных уравнений с запаздыванием (как правило, нелинейных). Задачи такого типа являются самыми простыми в рассматриваемом классе моделей, однако уже они требуют специальных приближенных методов решения.

Важными и интересными для конкретных приложений являются оптимизационные задачи определения траектории процесса, удовлетворяющей соответствующей системе уравнений и максимизирующей при этом некоторый функционал качества. Моделирование развивающихся систем при помощи оптимизационных задач позволяет наиболее полно исследовать различные стороны их организации и функционирования. Задачи можно разделить по целям исследования.

I. Задачи оптимизации внешних функций системы. Найти экстремум взвешенной суммы \*):

$$I_1 = \sum_{s=1}^p \gamma_s \int_{t_0}^T c_s(t) dt = \text{extr}_{\nu_{ij}, z_{sj}, \lambda_{ij}, \mu_{sj}, F}, \quad 0 < \gamma_s < \infty, \quad (2.49)$$

или

$$I'_1 = \sum_{s=1}^p \gamma'_s \int_{t_0}^T |c_s(t) - c_s^*(t)| dt = \text{extr}_{\nu_{ij}, z_{sj}, \lambda_{ij}, \mu_{sj}}, \quad 0 \leq \gamma'_s < \infty, \quad (2.49')$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} m_i^-(t) &\leq m_i(t) \leq m_i^+(t), \\ c_s^-(t) &\leq c_s(t) \leq c_s^+(t), \quad t \in [t_0, T], \end{aligned}$$

\*) Формулировки приведем для  $n$ -продуктовых моделей. В случае других моделей формулировки аналогичны.

где  $m_i^\pm, c_s^\pm$  — заданные функции (границы норм функционирования системы),  $\gamma_s, \gamma'_s$  — заданные числа,  $c_s^*$  — желаемые значения  $c_s$ .

II. Адаптационные и гомеостазисные задачи (на быстроедействие или на долговременное существование). Найти экстремальное значение времени достижения заданной области:

$$I_2 = T - t_0 = \operatorname{extr}_{y_{ij}, z_{sj}, \lambda_{ij}, \mu_{sj}, F} \quad (2.50)$$

при условии

$$\int_{t_0}^T c_j(t) dt \in C_j^*, \quad \int_{t_0}^T m_i(t) dt \in M_i^*, \quad P \in P^*,$$

где  $M_i^*, C_j^*$  — заданные множества значений.

III. Задачи определения «лидера» в конкурентных взаимоотношениях. Найти экстремальную взвешенную разность:

$$I_3 = \int_{t_0}^T c_{i_0}(t) dt - \sum_{j=1, j \neq i_0}^p \gamma_j \int_0^T c_j(t) dt = \operatorname{extr}_{y_{ij}, z_{sj}, \lambda_{ij}, \mu_{sj}, F} \quad (2.51)$$

при ограничениях

$$m_i^-(t) \leq m_i(t) \leq m_i^+(t), \quad c_s^-(t) \leq c_s(t) \leq c_s^+(t), \quad t \in [t_0, T].$$

IV. Задачи на стабилизацию и слежение [117]. Минимизировать среднее отклонение от заданной траектории:

$$I_4 = \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^r [m_i(t) - m_i^*(t)]^2 dt = \min_{y_{ij}, z_{sj}, \lambda_{ij}, \mu_{sj}, F} \quad (2.52)$$

при ограничениях

$$c_j^-(t) \leq c_j(t) \leq c_j^+(t), \quad t \in [t_0, T].$$

V. Задачи максимизации «жизнестойкости». Максимизировать минимальное отклонение от границы области существования:

$$I_5 = \min_{i,j} \{ |m_i^+ - m_i|, |m_i - m_i^-|, |c_j^+ - c_j|, |c_j - c_j^-| \} = \max_{y_{ij}, z_{sj}, \lambda_{ij}, \mu_{sj}, F} \quad (2.53)$$

VI. Задачи оптимизации внутренних функций системы. Найти экстремальную взвешенную сумму:

$$I_6 = \sum_{j=1}^r \delta_j \int_0^T \int_0^t \left[ \sum_{i=1}^r \lambda_{ij}(\tau, t) y_{ij}(\tau) + \sum_{s=1}^p \mu_{sj}(\tau, t) z_{sj}(\tau) \right] m_j(\tau) d\tau dt = \operatorname{extr}_{y_{ij}, z_{sj}, \lambda_{ij}, \mu_{sj}, F} \quad (2.54)$$

при ограничениях IV, где  $\delta_j$  ( $0 \leq \delta_j < \infty$ ) — заданные числа, определяемые экспертами.

VII. Задачи оптимизации отвала системы. Найти экстремальную взвешенную сумму:

$$I_7 = \sum_{j=1}^r \delta_j \int_0^T \int_0^t \left[ 1 - \sum_{i=1}^r \lambda_{ij}(\tau, t) y_{ij}(\tau) - \sum_{s=1}^p \mu_{sj}(\tau, t) z_{sj}(\tau) \right] m_j(\tau) d\tau dt = \underset{y_{ij}, z_{sj}, \lambda_{ij}, \mu_{sj}, F}{\text{extr}} \quad (2.55)$$

при условиях и ограничениях VI.

Вопросы выбора периода  $T - t_0$ , фигурирующего во многих постановках как заданного, весьма нетривиален. Нередко этот период может лимитировать достоверный прогноз исходных структур типа  $\alpha, \beta$ . В противном случае в силу изменения ценности продуктов во времени (по отношению к  $t_0$ ) обычно существует оптимальное значение  $T^*$  такое, что с учетом этой ценности увеличение продукта на отрезке  $[t_0, T]$  ( $T > T^*$ ) не компенсирует его уменьшение на отрезке  $[t_0, T^*]$ . Тогда отрезок  $[t_0, T^*]$  может оказаться подходящим для выбора.

Следует еще отметить нетривиальность определения и учета различных ограничений на управляющие и искомые величины. При системном, комплексном подходе к задачам оптимизации [69] удастся нередко установить, что учет динамики изменения ограничений оказывается решающим для успешной реализации различных (целевых) программ.

В дальнейшем указанные задачи будут исследоваться различными методами достаточно подробно. Будут указаны также определенные приложения этих задач в экономике, биологии и некоторых других областях.

## § 8. О границах применимости моделей

Подводя определенный итог рассмотренным предложенного класса моделей, целесообразно сделать попытку описания сферы применимости этих моделей, трудностей и перспектив их реализации на ЭВМ, а также применения к ряду нерешенных проблем. Эту попытку следует рассматривать как прогноз из общих теоретических соображений, который в дальнейшем будет корректироваться опытом конкретных приложений.

Главным является то, что в совокупности уравнения моделей являются нелинейной открытой динамической системой, содержащей характерные черты всякой развивающейся реальной системы, в том числе всякой живой системы. Такими чертами являются: особая роль определенных продуктов, которые воспроизводят сами себя и другие продукты; наличие соответствующего указанным продуктам разбиения всех функций системы на ее внутренние и внешние функции, а также механизмы распределения всех ресурсов системы

на эти разные функции; гибкая динамическая структура, определяемая введением новых и удалением устаревших технологий; учет предыстории, субстрата, отвала системы и др.

Таким образом, предложенный класс моделей является чрезвычайно общим. Специфика его применений определяется соответствующей интерпретацией всех элементов моделей, конкретизацией исходных динамических структур типа  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$ , а также указанием требуемой оптимизационной задачи.

Для искусственных развивающихся систем характерна задача оптимизации внешней функции системы [73]. В случае биологических объектов на первый план выходит задача выполнения условия гомеостазиса при изменении внешних воздействий [77]. Если к живому биологическому объекту в целом применить двухпродуктовую модель, то наилучшее возможное соблюдение условия гомеостазиса определит распределение всех ресурсов объекта на его внутренние и внешние функции. В результате единственным управляющим воздействием на объект с целью достижения различных других режимов его поведения остается входное воздействие на объект или субстрат.

Существенно большими возможностями для решения оптимизационных задач обладают  $n$ -продуктовые модели при  $n > 2$ . В случае  $n = 3$  и двух внешних функций (продуктов) условие соблюдения гомеостазиса оставляет свободным механизм распределения оставшихся ресурсов между внешними функциями. В результате возможно решение задачи об оптимальном соотношении между этими функциями, например, лидирующем положении одной из функций [77]. Следует заметить, что в случае двух выделенных частных внешних функций необходимо еще рассматривать хотя бы в агрегированном виде прочие внешние функции. В результате получаем  $n \geq 4$ .

При моделировании отдельных подсистем объекта роль субстрата может выполнять промежуточный продукт функционирования объекта в целом и внешние продукты подсистемы могут оказывать влияние на этот субстрат. Таким образом, подсистему необходимо рассматривать вместе со всей системой. Как минимум, требуется введение одной внутренней и двух внешних функций (для подсистемы и системы в целом) или двух внутренних и одной внешней функций. Более естественно рассматривать случай двух внутренних функций и различное число внешних: двух ( $n = 4$ ), трех ( $n = 5$ ), четырех ( $n = 6$ ) и т. д. При этих условиях модель может быть применена к изучению функциональных взаимодействий различных подсистем с системой в целом, причем в принципе возможен случай, когда подсистема принадлежит другому уровню иерархии системы (например, отдельная клетка и весь организм). Ясно, что для моделирования взаимодействий между различными органами, подсистемами и объектом в целом необходимо вводить модели с еще большим  $n$  (ср. с. [4, 165]). При этом может оказаться необходимым вместо обобщенного субстрата  $F(t)$  рассматривать вектор-функцию его различных количественных и качественных показателей с детализацией подсистем их потребления.

Внутренние механизмы указанных взаимодействий, их технологии не охватываются простейшими  $n$ -продуктовыми моделями: формально они представлены в них в виде исходных структур — функций типа  $\alpha$  и  $\beta$ , которые должны быть определены экспериментально или при помощи других моделей. Однако предложенные континуальные модели в принципе позволяют рассматривать вопросы происхождения и образования указанных исходных структур. В рамках биосферы эти структуры могут рассматриваться как внешние продукты [76]; при этом для биосферы должна быть определена своя «исходная» структура. В свою очередь «исходные» структуры биосферы могут быть интерпретированы как продукты функционирования Солнечной системы и т. д. Имеются также другие возможности определения исходных структур (см. п. 2.4). В этом смысле предложенный класс моделей можно назвать универсальным.

В чем же главные трудности реализации моделей на ЭВМ и применения к конкретным объектам? Главная трудность реализации на ЭВМ — это необходимость рассчитывать траекторию модели на период, много больший характерного времени внутренних изменений в системе. Это свойство, особенно типичное для биологических объектов, назовем *жесткостью системы*. Количественно его можно измерить величиной типа

$$\max \{ \max |\alpha|, \max |\beta| \} (T - t_0), \quad (2.56)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  — производительности выполнения соответственно внутренних, внешних функций развивающейся системы,  $T - t_0$  — время ее существования. Длительный период эволюции привел к тому, что для существующих в настоящее время биологических объектов указанные производительности на 6—8 порядков выше, чем для современных искусственных, в том числе экономических, систем [73, 208, 297]. В то же время интересующие нас наибольшие для расчета периоды  $T - t_0$  в случае искусственных объектов и биосистем примерно одинаковы или отличаются на 1—2 порядка. Таким образом, жесткость модели в случае биосистем на 4—10 порядков выше весьма высокой жесткости искусственных систем. Последняя соответствует уровню современного научно-технического прогресса в области вычислительной техники; иначе говоря, она может быть успешно преодолена на наиболее совершенных в настоящее время ЭВМ. Для моделирования на ЭВМ трудных биологических задач необходимо существенное повышение качества и эффективности ЭВМ, что зависит от общего роста производительности экономической системы.

Трудности применения предложенных моделей к конкретным проблемам связаны не только с недостаточно совершенной вычислительной техникой, но еще в большей степени с несовершенством имеющихся данных, измерительной базы, систем автоматизации исследований и обработки данных, организационных форм и т. д. В свою очередь, степень совершенства всей совокупности указанных средств исследований существенно образом зависит от величины общей производительности экономической системы. Пред-

положив средний рост производительности в экономической системе равным примерно 2 % в течение ряда последующих лет, легко получаем возрастание производительности на 6—8 порядков примерно в  $10^3$  лет. Таким образом, казалось бы, даже незначительный прирост производительности экономических систем позволяет достичь в течение примерно тысячелетия того уровня, для которого в естественном процессе эволюции понадобилось несколько сотен млн. лет. С другой стороны, по-видимому, даже оптимальное по быстрдействию управление с целью сокращенного во времени повторения всего эволюционного пути требует значительных ресурсов и времени.

Исходя из системного принципа [33] о необходимом соответствии сложностей средств и объектов исследований, можно предположить, что (при благоприятном стечении обстоятельств) именно тогда, когда величина производительности экономической системы достигает уровня производительности биосистем, станет возможным решение практически любой биологической проблемы. Это, конечно, не означает, что в настоящее время не следует заниматься решением этих проблем. Решение трудных проблем в области моделирования развивающихся систем оттачивает доступные средства исследований и приближает достижения науки к их переднему краю, где уже сейчас можно получить много важных результатов.

В этой главе аналитическими, качественными методами исследуются системы соотношений §§ 1—4 предыдущей главы. Не все из этих соотношений исследуются в равной степени подробно. Более подробно исследуется случай двухпродуктовых моделей, результаты которого обобщаются на другие случаи, без описания всех деталей.

Сначала приводятся примеры аналитического решения частных случаев систем уравнений. Затем рассматриваются вопросы существования и единственности решений более общих систем, исследуются свойства решений, в том числе устойчивость, асимптотическое поведение, выявляются различные возможные режимы функционирования систем.

### § 1. Примеры аналитического решения систем уравнений

Возьмем сначала случай двухпродуктовой модели, подслучай (2.32). Известные значения на предыстории  $[0, t_0]$  будем обозначать теми же буквами, но с индексом «0».

1°. Пусть  $\alpha(\tau, t) = \alpha$ ,  $\beta(\tau, t) = \beta$ , где  $\alpha, \beta$  — заданные постоянные, отличные от нуля. Тогда

$$\begin{aligned} m(t) &= \alpha \int_0^t \lambda(\tau, t) m_1(\tau) d\tau, & \int_0^t \lambda(\tau, t) m_1(\tau) d\tau &= x(t) P(t), \\ c(t) &= \beta \int_0^t \mu(\tau, t) m_2(\tau) d\tau, & \int_0^t \mu(\tau, t) m_2(\tau) d\tau &= [1 - x(t)] P(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$P(t) = \int_0^t [\lambda(\tau, t) m_1(\tau) + \mu(\tau, t) m_2(\tau)] d\tau, \quad m(t) = m_1(t) + m_2(t),$$

$$C(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau > 0, \quad M(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau \geq P(t) > 0,$$

$$t \geq t_0 > 0.$$

Считая заданными  $C(t), P(t)$  ( $C(t), P(t) > 0$ ), легко находим

$$M(t) = M(t_0) + \alpha \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau - \frac{\alpha}{\beta} [C(t) - C(t_0)] x(t) = 1 - \frac{C'(t)}{\beta P(t)}, \quad t \geq t_0. \quad (3.2)$$

Так как  $M(t)$  должно быть не меньше  $P(t)$ , то заданные функции  $C(t)$ ,  $P(t)$  должны удовлетворять соотношению

$$M(t_0) + \alpha \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau - \frac{\alpha}{\beta} [C(t) - C(t_0)] \geq P(t), \quad t \geq t_0, \quad (3.3)$$

откуда в силу известного дифференциального неравенства Чаплыгина имеем

$$0 < P(t) \leq -\frac{\alpha}{\beta} C(t) - \frac{\alpha^2}{\beta} \int_{t_0}^t C(\tau) e^{\alpha(t-\tau)} d\tau + \left[ M(t_0) + \frac{\alpha}{\beta} C(t_0) \right] e^{\alpha(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (3.4)$$

По отношению к оставшимся четырем неизвестным  $\lambda, \mu, m_1, m_2$  ( $-1 \leq \lambda, \mu \leq 1$ ) имеем систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda(\tau, t) m_1(\tau) d\tau &= P(t) - \frac{C'(t)}{\beta}, \\ \int_0^t \mu(\tau, t) m_2(\tau) d\tau &= \frac{C'(t)}{\beta}, \quad m_1(t) + m_2(t) = m(t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

одно из решений которой имеет вид

$$0 < \lambda(\tau, t) = \mu(\tau, t) \equiv \frac{P(t)}{M(t)} \leq 1, \\ m_1(t) = M'(t) - \left( \frac{C(t)M(t)}{\beta P(t)} \right)', \quad m_2 = \left( \frac{cM}{\beta P} \right)'. \quad (3.6)$$

Будем теперь считать заданными (и достаточно гладкими)  $x(t)$ ,  $\lambda(\tau, t)$ ,  $\mu(\tau, t)$  ( $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ ). Подставляя в первые два уравнения в (1) вместо  $m(t)$  и  $P(t)$  их выражения через  $\lambda, \mu, m_1, m_2$  и дифференцируя, получим

$$\begin{aligned} \lambda(t, t) [1 - x(t)] m_1(t) - x(t) \mu(t, t) m_2(t) - \\ - \int_{t_0}^t [(x(t) \lambda(\tau, t))'_t - \lambda'_t(\tau, t)] m_1(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t [x(t) \mu(\tau, t)]'_t m_2(\tau) d\tau = \\ = \int_0^{t_0} [(x(t) \lambda(\tau, t))'_t - \lambda'_t(\tau, t)] m_{10}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t [x(t) \mu(\tau, t)]'_t m_{20}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$m_1(t) + m_2(t) - \alpha \int_{t_0}^t \lambda(\tau, t) m_1(\tau) d\tau = \alpha \int_0^{t_0} \lambda(\tau, t) m_{10}(\tau) d\tau.$$

Эта система будет вольтерровской 2-го рода, если

$$\begin{vmatrix} \lambda(t, t) & (1-x(t)) & -x(t)\mu(t, t) \\ 1 & & 1 \end{vmatrix} = \\ = \lambda(t, t)(1-x(t)) + \mu(t, t)x(t) \neq 0, \quad t \geq t_0. \quad (3.8)$$

При условии (8) система (7) имеет единственное решение относительно  $m_1(t)$  и  $m_2(t)$ . Далее легко находим  $m(t)$ ,  $c(t)$ ,  $P(t)$ . Остается, однако, открытым вопрос о выполнении условий  $C(t) > 0$ ,  $P(t) > 0$ ,  $M(t) \geq P(t)$ .

Заметим, что в частных случаях, когда  $\lambda(\tau, t)$ ,  $\mu(\tau, t)$  являются многочленами от  $t$ , система (7) дифференцированием по  $t$  сводится к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

2°. Пусть  $\lambda$ ,  $\mu$  зависят от  $t - \tau$ , и пусть  $t \in [t_0, 2t_0]$ . Тогда (2.8) с учетом (2.32) переписывается в виде

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{t-t_0}^{t_0} \alpha(\tau, t) \lambda_0(t-\tau) m_{10}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t \alpha(t-u, t) \lambda(u) m_{10}(t-u) du + \int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) \lambda_0(t-\tau) m_1(\tau) d\tau, \\ c(t) &= \int_{t-t_0}^{t_0} \beta(\tau, t) \mu_0(t-\tau) m_{20}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t \beta(t-u, t) \mu(u) m_{20}(t-u) du + \int_{t_0}^t \beta(\tau, t) \mu_0(t-\tau) m_2(\tau) d\tau, \\ P(t) &= \int_{t-t_0}^{t_0} [\lambda_0(t-\tau) m_{10}(\tau) + \mu_0(t-\tau) m_{20}(\tau)] d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t [\lambda(u) m_{10}(t-u) + \mu(u) m_{20}(t-u)] du + \int_{t_0}^t [\lambda_0(t-\tau) m_1(\tau) + \\ &+ \mu_0(t-\tau) m_2(\tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \int_{t-t_0}^{t_0} \lambda_0(t-\tau) m_{10}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \lambda(u) m_{10}(t-u) du + \\ + \int_{t_0}^t \lambda_0(t-\tau) m_1(\tau) d\tau = z(t) P(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t-t_0}^{t_0} \mu_0(t-\tau) m_{20}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \mu(u) m_{20}(t-u) du + \\ + \int_{t_0}^t \mu_0(t-\tau) m_2(\tau) d\tau = [1-z(t)] P(t), \end{aligned}$$

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t), \quad C(t) > 0,$$

$$M(t) \geq P(t) > 0, \quad 2t_0 \geq t \geq t_0 > 0.$$

Если заданы  $c$  и  $P$ , то, подставив в первое уравнение вместо  $m(t)$  его выражение  $m_1(t) + m_2(t)$ , получим линейную вольтерровскую систему из трех первых уравнений относительно четырех неизвестных  $\lambda, \mu, m_1, m_2$ . Эта система разрешима при естественных предположениях для произвольного  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ), которое следует выбирать так, чтобы  $0 \leq \mu \leq 1$ . После этого легко находим  $m(t)$  и  $z(t)$ .

Определив все функции на отрезке  $[t_0, 2t_0]$ , подобным способом найдем их значения на  $[2t_0, 4t_0]$  и т. д. Таким образом, можно получить все решения для любых  $t \geq t_0 > 0$ , однако вопрос выполнения требуемых ограничений остается открытым.

Рассмотрим теперь случай двухпродуктовой модели (2.9), (2.33).

3°. Пусть  $\alpha(\tau, t) = \alpha$ ,  $\beta(\tau, t) = \beta$ ,  $y(\tau) = y_0$ , где  $\alpha, \beta, y_0$  — заданные положительные постоянные,  $0 < y_0 \leq 1$ . Тогда

$$m(t) = \alpha y_0 \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau, \quad c(t) = \beta(1 - y_0) \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau, \quad (3.10)$$

$$0 \leq a(t) < t, \quad P(t) = \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 > 0,$$

откуда при заданном  $P(t) > 0$

$$m(t) = \alpha y_0 P(t), \quad c(t) = \beta(1 - y_0) P(t), \\ a(t) = M^{-1}(M(t) - P(t)), \quad (3.11)$$

$$M(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau = \int_0^{t_0} m_0(\tau) d\tau + \alpha y_0 \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau.$$

Из условия  $0 \leq a(t) < t$  вытекает, что  $0 \leq M(t) - P(t) < M(t)$  или

$$\int_0^{t_0} m_0(\tau) d\tau + \alpha y_0 \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \geq P(t) > 0. \quad (3.12)$$

Следовательно, при заданном  $P(t)$  должно соблюдаться условие (12).

4°. Пусть  $\alpha(\tau, t) = \alpha_1(\tau) \alpha_2(t)$ ,  $\beta(\tau, t) = \beta_1(\tau) \beta_2(t)$ . Тогда

$$m(t) = \alpha_2(t) \int_{a(t)}^t \alpha_1(\tau) y(\tau) m(\tau) d\tau, \\ c(t) = \beta_2(t) \int_{a(t)}^t \beta_1(\tau) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \quad (3.13) \\ P(t) = \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0.$$

Предположим, что  $P(t)$  — известная дифференцируемая функция,  $P'(t) = p(t)$ ,  $y(t)$  — также известная,  $m(t)$ ,  $c(t)$ ,  $a(t)$  — искомые дифференцируемые функции. Положим  $t \in [t_0, t_1]$ :  $a(t_1) = t_0$ ,  $a(t) \leq t_0$  ( $t \in [t_0, t_1]$ ). В таком случае (13) переписывается в виде

$$m(t) = \alpha_2(t) \int_{a(t)}^{t_0} \alpha_1(\tau) y_0(\tau) m_0(\tau) d\tau + \alpha_2(t) \int_{t_0}^t \alpha_1(\tau) y(\tau) m(\tau) d\tau,$$

$$c(t) = \beta_2(t) \int_{a(t)}^t \beta_1(\tau) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \quad (3.14)$$

$$p(t) = m(t) - m_0(a) \frac{da}{dt},$$

откуда

$$\frac{d(m/\alpha_2)}{dt} =$$

$$= -\alpha_1(a) y_0(a) \left[ \frac{m(t)}{\alpha_2(t)} - \frac{p(t)}{\alpha_1(t)} \right] \alpha_2(t) + \alpha_1(t) \alpha_2(t) y(t) \frac{m(t)}{\alpha_2(t)}, \quad (3.15)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{[m(t)/\alpha_2(t) - p(t)/\alpha_2(t)] \alpha_2(t)}{m_0(a)},$$

$$m/\alpha_2(t_0) = \int_0^{t_0} \alpha_1(\tau) y_0(\tau) m_0(\tau) d\tau, \quad a(t_0) = 0.$$

Решив эту задачу Коши для нелинейной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $m/\alpha_2$  и  $a$ , определим  $c(t)$  из (14). Положим  $M_0(a) = \int_0^a m_0(a) da$  и предположим, что  $M_0$  имеет обратную функцию  $M_0^{-1}$ . Тогда

$$a(t) = M_0^{-1} \left\{ \int_{t_0}^t [m(\tau) - p(\tau)] d\tau \right\} = M_0^{-1} [M(t) - M(t_0) + P(t_0) - P(t)], \quad (3.16)$$

$$M'(t) = m(t).$$

Подставив это выражение в (15), получим интегро-дифференциальное нелинейное уравнение относительно  $m/\alpha_2$ . Если  $\alpha_1(a) y_0(a) = \text{const}$ , то получим, в частности, линейное дифференциальное уравнение относительно  $m/\alpha_2$  (и относительно  $m$ , если  $\alpha_2$  дифференцируема, так как тогда  $\frac{d(m/\alpha_2)}{dt} = \frac{dm}{dt} \frac{1}{\alpha_2} + m \frac{d(1/\alpha_2)}{dt}$ ). После того как решение уравнения относительно  $m$  получено и при помощи (16) найдено  $a(t)$ , необходимо еще найти  $t_1$  — наименьший корень уравнения  $a(t) = t_0$  и проверить условие  $0 \leq a(t) \leq t$  ( $t \in [t_0, t_1]$ ).

Решив систему (14) для  $t \in [t_0, t_1]$ , подобным же образом получаем решение для отрезка  $[t_1, t_2]$ ,  $a(t_2) = t_1$ ,  $a(t) \leq t_1$  ( $t \in [t_1, t_2]$ ), затем для отрезка  $[t_2, t_3]$  и т. д., пока не получим решение на всем заданном отрезке  $[t_0, T]$ .

Если задано  $m(t)$ , то из второго уравнения в (15) находим  $a(t)$ , затем, из первого уравнения,  $y(\tau)$  и затем  $c(t)$ . Если задано  $c(t)$ , то  $y(t)$  находим через  $a$  и  $m$ , дифференцируя второе уравнение в (14). Подставляя это  $y$  в первое уравнение в (15), получаем систему относительно  $m$  и  $a$ . Однако вопрос о соблюдении всех необходимых ограничений остается здесь открытым.

Рассмотрим еще один случай двухпродуктовой модели (2.10), (2.33).

5°. Пусть  $\alpha, \beta$  — известные положительные константы. Тогда

$$\begin{aligned} m(t) &= \alpha \int_{a_1(t)}^t \lambda(t-\tau) y(\tau) m(\tau) d\tau, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ c(t) &= \beta \int_{a_2(t)}^t \mu(t-\tau) [1-y(\tau)] m(\tau) d\tau, \\ P(t) &= \int_{a_1(t)}^t \lambda(t-\tau) y(\tau) m(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{a_2(t)}^t \mu(t-\tau) [1-y(\tau)] m(\tau) d\tau = \frac{m(t)}{\alpha} + \frac{c(t)}{\beta}, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Если  $P, m$  или  $P, c$  заданы, то, определив соответственно  $c$  ( $c \geq 0$ ) или  $m$  ( $m \geq 0$ ) из последнего уравнения в (17) относительно пяти неизвестных функций  $y, \lambda, \mu, a_1, a_2$ , получаем всего два уравнения:

$$\int_{a_1(t)}^t \lambda(t-\tau) y(\tau) m(\tau) d\tau = \frac{m(t)}{\alpha}, \quad (3.18)$$

$$\int_{a_2(t)}^t \mu(t-\tau) [1-y(\tau)] m(\tau) d\tau = \frac{c(t)}{\beta}, \quad t \geq t_0 > 0.$$

Однако заранее неясно, имеется ли хотя бы одно решение этих уравнений, удовлетворяющее ограничениям  $0 \leq y, \lambda, \mu \leq 1, 0 \leq a_1(t), a_2(t) \leq t$ .

Найдем ограничения на  $m(t)$  и  $c(t)$ , при которых (18) будет иметь по крайней мере одну пятерку решений  $y, \lambda, \mu, a_1, a_2$  с указанными свойствами. Для этого необходимо и достаточно, чтобы правые части равенств в (18) были не меньше минимально возможных и не больше максимально возможных значений левых частей соответствующих равенств. Но минимальные значения левых частей — нули.

Максимальное значение левой части первого равенства:

$$\Delta_1 = \begin{cases} \int_0^{t-t_0} \lambda_0(u) m(t-u) du + \int_{t-t_0}^{t_0} \lambda_0(u) y_0(t-u) m_0(t-u) du + \\ \quad + \int_{t_0}^t y_0(t-u) m_0(t-u) du, & t-t_0 \leq t_0, \\ \int_0^{t_0} \lambda_0(u) m(t-u) du + \int_{t_0}^{t-t_0} m(t-u) du + \\ \quad + \int_{t-t_0}^t y_0(t-u) m_0(t-u) du, & t-t_0 > t_0; \end{cases}$$

максимальное значение левой части второго равенства:

$$\Delta_2 = \begin{cases} \int_0^{t-t_0} \mu_0(u) m(t-u) du + \\ \quad + \int_{t-t_0}^{t_0} \mu_0(u) [1-y_0(t-u)] m_0(t-u) du + \\ \quad + \int_{t_0}^t [1-y_0(t-u)] m_0(t-u) du, & t-t_0 \leq t_0, \\ \int_0^{t_0} \mu_0(u) m(t-u) du + \int_{t_0}^{t-t_0} m(t-u) du + \\ \quad + \int_{t-t_0}^t [1-y_0(t-u)] m_0(t-u) du, & t-t_0 > t_0. \end{cases}$$

Поэтому ограничения на  $m(t)$ ,  $c(t)$ :

$$0 \leq \frac{m(t)}{\alpha} \leq \Delta_1, \quad 0 \leq \frac{c(t)}{\beta} \leq \Delta_2 \quad (3.19)$$

будут искомыми. Ясно, что, решив вольтерровское уравнение  $\bar{m}(t) = \alpha \bar{\Delta}_1$ , где  $\bar{\Delta}_1$  означает  $\Delta_1$ , в котором  $m$  заменено на  $\bar{m}$ , получим ограничение  $m(t) \leq \bar{m}(t)$  в явном виде через исходные функции, после чего можем найти также явное ограничение на  $c(t)$ .

Рассмотрим, наконец, случай двухпродуктовой модели (2.34) (см. также (2.35)).

6°. Пусть  $\alpha, \beta$  — известные константы, отличные от нуля. Тогда

$$M(t) = M(t_0) - \alpha \int_0^{t_0} \int_{t_0}^t \lambda'_\tau(\tau, u) du M_{10}(\tau) d\tau + \\ + \alpha \int_{t_0}^t \left[ \lambda(\tau, \tau) - \int_\tau^t \lambda'_\tau(\tau, u) du \right] z(\tau) M(\tau) d\tau > 0,$$

$$C(t) = C(t_0) - \beta \int_0^{t_0} \int_{t_0}^t \mu'_\tau(\tau, u) du M_{20}(\tau) d\tau + \\ + \beta \int_{t_0}^t \left[ \mu(\tau, \tau) - \int_\tau^t \mu'_\tau(\tau, u) du \right] [1 - z(\tau)] M(\tau) d\tau > 0, \quad (3.20)$$

$$M(t) \geq P(t) = \frac{M'(t)}{\alpha} + \frac{C'(t)}{\beta} > 0, \quad t \geq t_0 > 0.$$

Покажем, что нетрудно найти по крайней мере одну тройку  $z, \lambda, \mu$  ( $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ ,  $z$  ограничено), для которой соответствующие  $M(t), C(t), P(t)$  будут удовлетворять указанным в (20) неравенствам. Действительно, имея в виду, что в силу известной предыстории  $M(t_0) \geq P(t_0) > 0, C(t_0) > 0$ , положим  $\lambda = \mu = \lambda(t), t > t_0$ . Тогда

$$P(t) = \lambda(t) M(t),$$

$$M(t) = M(t_0) + \alpha \int_{t_0}^t \lambda(\tau) z(\tau) M(\tau) d\tau,$$

$$C(t) = C(t_0) + \beta \int_{t_0}^t \lambda(\tau) [1 - z(\tau)] M(\tau) d\tau.$$

Ясно, что если  $0 < \lambda(t) \leq 1$  и  $\lambda$  достаточно мало, а  $z$  ограничено, то на любом временном отрезке  $[t_0, T]$  будем иметь

$$\left| \alpha \int_{t_0}^t \lambda(\tau) z(\tau) M(\tau) d\tau \right| < M(t_0), \quad (3.21)$$

$$\left| \beta \int_{t_0}^t \lambda(\tau) [1 - z(\tau)] M(\tau) d\tau \right| < C(t_0),$$

где  $M(t)$  — решение первого уравнения в (20). После этого очевидно, что указанные  $\lambda = \mu$  и  $z$  будут искомой тройкой.

Рассмотрим, в заключение, случай трехпродуктовой модели (2.20), (2.33),  $r = 1, p = 2$ :

$$m(t) = \int_{a^{(1)}(t)}^t \alpha(\tau, t) \lambda(t - \tau) y(\tau) m(\tau) d\tau,$$

$$C_1(t) = \int_{a_1^{(2)}(t)}^t \beta_1(\tau, t) \mu_1(t - \tau) z_1(\tau) m(\tau) d\tau,$$

$$C_2(t) = \int_{a_2^{(2)}(t)}^t \beta_2(\tau, t) \mu_2(t - \tau) z_2(\tau) m(\tau) d\tau, \quad (3.22)$$

$$P(t) = \int_{a_1^{(1)}(t)}^t \lambda(t-\tau) y(\tau) m(\tau) d\tau + \\ + \int_{a_1^{(2)}(t)}^t \mu_1(t-\tau) z_1(\tau) m(\tau) d\tau + \int_{a_2^{(2)}(t)}^t \mu_2(t-\tau) z_2(\tau) m(\tau) d\tau,$$

$$G(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau - P(t), \quad y(\tau) + z_1(\tau) + z_2(\tau) = 1,$$

$$0 \leq \lambda, \mu_1, \mu_2 \leq 1, \quad 0 \leq a^{(1)}(t), \\ a_1^{(2)}(t), a_2^{(2)}(t) \leq t, \quad t \geq t_0 > 0.$$

7°. Пусть  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  — известные положительные константы. Если заданы  $m, c_1, P; m, c_2, P$  или  $c_1, c_2, P$ , то соответственно  $c_2, c_1$  или  $m$  определяются из уравнения

$$P(t) = \frac{m(t)}{\alpha} + \frac{c_1(t)}{\beta_1} + \frac{c_2(t)}{\beta_2}. \quad (3.23)$$

При этом необходимо подчинять заданные функции ограничениям, при которых искомые функции будут неотрицательными. После этого для определения восьми неизвестных функций  $\lambda, \mu_1, \mu_2, z_1, z_2, a^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}$  имеем систему трех уравнений:

$$\int_{a^{(1)}(t)}^t \lambda(t-\tau) [1 - z_1(\tau) - z_2(\tau)] m(\tau) d\tau = \frac{m(t)}{\alpha}, \\ \int_{a_1^{(2)}(t)}^t \mu_1(t-\tau) z_1(\tau) m(\tau) d\tau = \frac{c_1(t)}{\beta_1}, \quad (3.24) \\ \int_{a_2^{(2)}(t)}^t \mu_2(t-\tau) z_2(\tau) m(\tau) d\tau = \frac{c_2(t)}{\beta_2}, \quad t \geq t_0,$$

и дополнительные условия

$$0 \leq \lambda, \mu_1, \mu_2 \leq 1, \quad 0 \leq a^{(1)}(t), a_1^{(2)}(t), a_2^{(2)}(t) \leq t. \quad (3.25)$$

Существование хотя бы одной восьмерки, удовлетворяющей соотношениям (24), (25), нетрудно доказать, обобщая соотношения (19) на случай трех уравнений. Это означает, что множество решений (24) с условиями (25) может быть непустым и его можно использовать при решении различных оптимизационных задач (см. § 7, гл. 2).

8°. Пусть  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  заданы, как в 7°; кроме того, заданы  $m, c_1$ , а  $c_2 = g \equiv G'$ , как в § 4 гл. 2. Тогда для определения  $P$  и  $g$  имеем

систему уравнений

$$P(t) = \frac{m(t)}{\alpha} + \frac{c_1(t)}{\beta_1} + \frac{g}{\beta_2}(t), \quad (3.26)$$

$$g(t) = m(t) - P'(t),$$

откуда для отыскания  $P$  имеем линейное дифференциальное уравнение

$$P'(t) + \beta_2 P(t) = \left(\frac{\beta_2}{\alpha} + 1\right) m(t) + \frac{\beta_2}{\beta_1} c_1(t),$$

$$P(t_0) = \frac{m(t_0)}{\alpha} + \frac{c_1(t_0)}{\beta_1} + \frac{g(t_0)}{\beta_2},$$

решение которого дает

$$P(t) = e^{-\beta_2(t-t_0)} \left[ P(t_0) + \int_{t_0}^t \left[ \left(\frac{\beta_2}{\alpha} + 1\right) m(\tau) + \frac{\beta_2}{\beta_1} c_1(\tau) \right] e^{\beta_2(\tau-t_0)} d\tau \right]. \quad (3.27)$$

После этого легко находим  $G(t) = M(t) - P(t)$ , затем для отыскания  $\lambda, \mu_1, \mu_2, z_1, z_2, a^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}$  поступаем как в 7°.

Если еще ввести (2.31), например, в виде

$$F'(t) = f(t) = c_1(t) + g(t), \quad P'(t) = m(t) + c_1(t), \quad (3.28)$$

где  $f(t)$  задано, то, задав  $m$  или  $c_1$ , из (28) и (26) получим простую систему для отыскания  $G, P$  и соответственно  $c_1$  или  $m$ .

## § 2. Вопросы существования и единственности решений

2.1. Общий случай двухпродуктовой модели. Рассмотрим (2.32):

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_0^t \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) m_1(\tau) d\tau, \quad \int_0^t \lambda(\tau, t) m_1(\tau) d\tau = x(t) P(t), \\ c(t) &= \int_0^t \beta(\tau, t) \mu(\tau, t) m_2(\tau) d\tau, \quad \int_0^t \mu(\tau, t) m_2(\tau) d\tau = [1 - x(t)] P(t), \\ m_1(t) + m_2(t) &= m(t), \quad 0 \leq \lambda(\tau, t), \mu(\tau, t) \leq 1, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$P(t) = \int_0^t [\lambda(\tau, t) m_1(\tau) + \mu(\tau, t) m_2(\tau)] d\tau > 0,$$

$$G(t) = M(t) - P(t) \geq 0, \quad C(t) > 0,$$

$$M(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau, \quad C(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 > 0,$$

где для  $0 \leq \tau \leq t \leq t_0$  все функции заданы. Как и раньше, их известные на предыстории значения будем обозначать теми же буквами с индексом «0».

Будем считать дополнительно заданными функции  $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ , т. е. функции, определяющие динамику системы. Найдем остальные функции, определяющие различные продукты функционирования системы. При этом  $\alpha, \beta, \lambda'_t, \mu'_t, x'$  будем считать интегрируемыми на любой конечной части области  $t_0 \leq \tau \leq t < \infty$

Для отыскания  $\bar{m}(t) = (m_1(t), m_2(t))$  имеем систему линейных уравнений Вольтерра

$$m_1(t) + m_2(t) = \int_0^t \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) m_1(\tau) d\tau, \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \lambda(t, t) [1 - x(t)] m_1(t) - \mu(t, t) x(t) m_2(t) = \\ = \int_0^t -\{\lambda(\tau, t) [1 - x(t)]\}'_t m_1(\tau) d\tau + \int_0^t [\mu(\tau, t) x(t)]'_t m_2(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

которую перепишем в матричном виде:

$$\begin{aligned} A(t) \bar{m}(t) = \int_{t_0}^t B(\tau, t) \bar{m}(\tau) d\tau + \int_0^{t_0} B_0(\tau, t) \bar{m}_0(\tau) d\tau, \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda(1-x) & -\mu x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha\lambda & 0 \\ -\{\lambda[1-x]\}'_t & [\mu x]'_t \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.30')$$

Будем предполагать, что

$$\Delta\Psi = \lambda(t, t) [1 - x(t)] + \mu(t, t) x(t) \neq 0, \quad t \geq t_0, \quad (3.31)$$

т. е. что матрица  $A$  не является вырожденной. Тогда (30') можно переписать в виде системы уравнений Вольтерра 2-го рода:

$$\bar{m}(t) = \int_{t_0}^t \bar{\delta}(\tau, t) \bar{m}(\tau) d\tau + \bar{\varphi}(t), \quad t \geq t_0,$$

$$\bar{\delta}(\tau, t) = A^{-1}(t) B(\tau, t), \quad \bar{\varphi}(t) = \int_0^{t_0} A^{-1}(t) B_0(\tau, t) \bar{m}_0(\tau) d\tau, \quad (3.30'')$$

$$A^{-1}(t) = \frac{1}{\mu x + \lambda(1-x)} \begin{pmatrix} \mu x & 1 \\ \lambda(1-x) & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}(t) B(\tau, t) = \frac{1}{\mu x + \lambda(1-x)} \begin{pmatrix} \mu x \alpha(\tau, t) \lambda & -\{\lambda[1-x]\}'_t [\mu x]'_t \\ \lambda(1-x) \alpha(\tau, t) \lambda & +\{\lambda[1-x]\}'_t - [\mu x]'_t \end{pmatrix},$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{m}(t) &= \bar{\varphi}(t) + \int_{t_0}^t \bar{\gamma}(\tau, t) \bar{\varphi}(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0, \\ \bar{\gamma}(\tau, t) &= \sum_{v=0}^{\infty} \bar{\delta}_{v+1}(\tau, t), \quad \bar{\delta}_1(\tau, t) = \bar{\delta}(\tau, t), \\ \bar{\delta}_{v+1}(\tau, t) &= \int_{\tau}^t \bar{\delta}(z, t) \bar{\delta}_v(\tau, z) dz, \quad v = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.32)$$

Подставляя найденные при помощи (30)—(32) значения  $m_1(t)$ , и  $m_2(t)$  в (29), находим искомые выражения для  $m(t)$ ,  $c(t)$ ,  $P(t)$ ,  $G(t)$ . Эти выражения, однако, не обязаны удовлетворять ограничениям  $M(t) \geq P(t) > 0$ ,  $c(t) > 0$ .

Покажем, что имеется по крайней мере одна тройка  $\lambda, \mu, x$  ( $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ ), для которой требуемые ограничения на  $M, P, C$  будут выполнены на любом заданном отрезке  $[t_0, T]$ , если они выполнены на  $[0, t_0]$ . Действительно, пусть  $\lambda = \mu = \lambda(t)$ ,  $x = \text{const}$ ,  $t > t_0$ . Тогда (29) перепишем в виде

$$\begin{aligned} m(t) &= \lambda(t) x \int_0^{t_0} \alpha(\tau, t) m_0(\tau) d\tau + \lambda(t) x \int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) m(\tau) d\tau, \quad t > t_0, \\ c(t) &= \lambda(t) (1-x) \int_0^t \beta(\tau, t) m(\tau) d\tau, \quad m_1 = xm, \quad m_2 = (1-x)m, \\ P(t) &= \lambda(t) M(t), \quad M(t) = M(t_0) + \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau, \\ C(t) &= C(t_0) + \int_{t_0}^t c(\tau) d\tau, \quad M(t_0), \quad C(t_0) > 0, \\ M_0(\tau) &\geq P_0(\tau) > 0, \quad c_0(\tau) > 0, \quad \tau \in [0, t_0]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

В силу (33) очевидно, что при достаточно малом по абсолютному значению  $\lambda(t)$  решение  $m(t)$  первого уравнения в (33) и соответствующее значение  $c(t)$  будут удовлетворять неравенствам

$$\left| \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau \right| < M(t_0), \quad \left| \int_0^t c(\tau) d\tau \right| < C(t_0), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

что означает  $M(t) > 0$ ,  $C(t) > 0$ . Если к тому же  $0 < \lambda(t) \leq 1$ , то  $P(t) \leq M(t)$ . Таким образом, искомая тройка  $\lambda, \mu, x$  построена.

Подведем итог изложенному в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** Если заданы функции  $\alpha, \beta, \lambda, \mu, x$  такие, что  $\alpha, \beta, \lambda, \mu, x$  интегрируемы в любой конечной части области  $t_0 \leq \tau \leq t < \infty$  и  $\lambda(1-x) + \mu x \neq 0$ , то относительно  $m_1, m_2, m,$

$c, P, G$  система уравнений в (29) всегда имеет единственное решение, причем вектор-функция  $\bar{m} = (m_1, m_2)$  имеет вид (32), где  $\bar{\delta}, \bar{\varphi}$  находятся из соотношения (30),  $m, c, P, G$  — путем соответствующих подстановок найденных  $m_1, m_2$ . Кроме того, пусть  $M(t_0) > 0, C(t_0) > 0$ , и пусть  $D_{\lambda, \mu, x}(T)$  — множество функций  $\lambda, \mu, x$ , для которых соответствующие решения  $M, C, P$  обладают свойством  $M(t) \geq P(t) > 0, C(t) > 0 (t_0 \leq t \leq T)$ . Тогда  $D_{\lambda, \mu, x}(T)$  непусто при любом конечном  $T > t_0$ .

Рассмотрим теперь общие соотношения двухпродуктовой модели (2.33):

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_0^t \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau, \\ c(t) &= \int_0^t \beta(\tau, t) \mu(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \\ P(t) &= \int_0^t \{\lambda(\tau, t) y(\tau) + \mu(\tau, t) [1 - y(\tau)]\} m(\tau) d\tau, \\ G(t) &= M(t) - P(t). \end{aligned} \tag{3.34}$$

По аналогии с предыдущим легко устанавливаем следующий результат.

**Теорема 2.** Если заданы интегрируемые функции  $\alpha, \beta, \lambda, \mu, y$ , то относительно  $m, c, P, G$  система уравнений (34) имеет единственное решение, причем  $m(t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} m(t) &= \varphi(t) + \int_{t_0}^t \gamma(\tau, t) \varphi(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0, \\ \gamma(\tau, t) &= \sum_{v=0}^{\infty} \delta_{v+1}(\tau, t), \quad \delta_1(\tau, t) = \delta(\tau, t), \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\delta_{v+1}(\tau, t) = \int_{\tau}^t \delta(z, t) \delta_v(\tau, z) dz, \quad v = 1, 2, \dots,$$

$$\delta(\tau, t) = \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) y(\tau),$$

$$\varphi(t) = \int_0^{t_0} \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) y_0(\tau) m_0(\tau) d\tau,$$

$c, P, G$  находятся путем соответствующих подстановок  $m(t)$ .

Если  $m_0, \alpha, \beta > 0$ , то не надо находить специальных значений  $\lambda, \mu, y$ , так как при условии  $0 \leq y, \lambda, \mu \leq 1$  всегда  $G \geq 0, m, c, M, C > 0$ . В противном случае такие значения  $\lambda, \mu, y$  нетрудно найти по аналогии с доказательством второй части теоремы 1.

Рассмотрим еще общие соотношения двухпродуктовой модели (2.34) (см. также (2.35)):

$$M(t) = M(t_0) - \int_0^{t_0} \int_{t_0}^t [\alpha(\tau, u) \lambda(\tau, u)]'_\tau du M_{10}(\tau) d\tau + \\ + \int_{t_0}^t \omega(\tau, t) z(\tau) M(\tau) d\tau,$$

$$\omega(\tau, t) = \alpha(\tau, \tau) \lambda(\tau, \tau) - \int_\tau^t [\alpha(\tau, u) \lambda(\tau, u)]'_\tau du,$$

$$C(t) = C(t_0) - \int_0^{t_0} \int_{t_0}^t [\beta(\tau, u) \mu(\tau, u)]'_\tau du M_{20}(\tau) d\tau + \\ + \int_{t_0}^t \sigma(\tau, t) [1 - z(\tau)] M(\tau) d\tau, \quad (3.36)$$

$$\sigma(\tau, t) = \beta(\tau, t) \mu(\tau, t) - \int_\tau^t [\beta(\tau, u) \mu(\tau, u)]'_\tau du,$$

$$P(t) = \int_0^t \{ \lambda(\tau, t) (z(\tau) M(\tau))' + \mu(\tau, t) [(1 - z(\tau)) M(\tau)]' \} d\tau = \\ = [\lambda(t, t) z(t) + \mu(t, t) [1 - z(t)] M(t) - \\ - \int_0^t [\lambda'_\tau(\tau, t) z(\tau) + \mu'_\tau(\tau, t) [1 - z(\tau)] M(\tau) d\tau,$$

$$G(t) = M(t) - P(t).$$

Теорема 3. Если заданы интегрируемые функции  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda'_\tau$ ,  $\mu'_\tau$ ,  $z$ , то относительно  $M$ ,  $C$ ,  $P$ ,  $G$  система уравнений в (36) всегда имеет единственное решение, причем  $M(t)$  имеет вид

$$M(t) = \hat{\varphi}(t) + \int_{t_0}^t \hat{\gamma}(\tau, t) \hat{\varphi}(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0, \\ \hat{\gamma}(\tau, t) = \sum_{v=0}^{\infty} \hat{\delta}_{v+1}(\tau, t), \quad \hat{\delta}_1(\tau, t) = \delta(\tau, t), \quad (3.37)$$

$$\hat{\delta}_{v+1}(\tau, t) = \int_\tau^t \hat{\delta}(z, t) \delta_v(\tau, t) dz, \quad v = 1, 2, \dots,$$

$$\hat{\delta}(\tau, t) = \omega(\tau, t) z(\tau),$$

$$\hat{\varphi}(t) = M(t_0) - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t [\alpha(\tau, u) \lambda(\tau, u)]'_\tau du M_{10}(\tau) d\tau,$$

$C, P, G$  находятся путем соответствующих подстановок  $M(t)$ . Кроме того, найдется по крайней мере одна тройка значений  $\lambda, \mu, z$  ( $0 \leq \lambda, \mu \leq 1, z$  ограничено), для которых соответствующие решения  $M, C, P, G$  будут удовлетворять системе требуемых неравенств в (36).

Доказательство аналогично доказательству теорем 1, 2 (см. также § 1, 6°).

Рассмотрим, наконец, общие соотношения двухпродуктовой модели (2.1)—(2.4) с учетом балансового соотношения (см. п. 2.4):

$$m(t) = \int_0^t \alpha \lambda m_1(\tau) d\tau, \quad c(t) = \int_0^t \beta(\tau, t) \mu(\tau, t) m_2(\tau) d\tau, \quad (3.38)$$

$$m_1(t) + m_2(t) = m(t),$$

$$P(t) = \int_0^t [\lambda(\tau, t) m_1(\tau) + \mu(\tau, t) m_2(\tau)] d\tau > 0, \quad (3.39)$$

$$G = M - P \geq 0, \quad M > 0,$$

$$f = m + c \equiv g + p + c, \quad t \geq t_0 > 0.$$

**Теорема 4.** Если заданы интегрируемые функции  $(\alpha\lambda)'_t, (\beta\mu)'_t, f'$ , причем  $-\beta(t, t) \mu(t, t) + \alpha(t, t) \lambda(t, t) \neq 0$ , то система уравнений в (38), (39) всегда имеет единственное решение, причем  $\bar{m} = (m_1, m_2)$  имеет вид

$$\bar{m}(t) = \bar{\Psi}(t) + \int_{t_0}^t \bar{\omega}(\tau, t) \bar{\Psi}(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0,$$

$$\bar{\omega}(\tau, t) = \sum_{v=0}^{\infty} \bar{\kappa}_{v+1}(\tau, t),$$

$$\bar{\kappa}_1(\tau, t) = \kappa(\tau, t) = \frac{1}{\alpha(t, t) \lambda(t, t) - \beta(t, t) \mu(t, t)} \begin{pmatrix} -\beta(t, t) \mu(t, t) & 1 \\ \alpha(t, t) \lambda(t, t) & -1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) & 0 \\ -[\alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t)]'_t - [\beta(\tau, t) \mu(\tau, t)]'_t \end{pmatrix},$$

$$\bar{\kappa}_{v+1}(\tau, t) = \int_{\tau}^t \bar{\kappa}_v(\tau, t) \bar{\kappa}(z, t) dz, \quad v = 1, 2, \dots, \quad (3.40)$$

$$\bar{\Psi}(t) = \frac{1}{\alpha(t, t) \lambda(t, t) - \beta(t, t) \mu(t, t)} \begin{pmatrix} -\beta(t, t) \mu(t, t) & 1 \\ \alpha(t, t) \lambda(t, t) & -1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \int_0^{t_0} \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) m_{10}(\tau) d\tau \\ f' - \int_0^{t_0} (\alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t))'_t m_{10}(\tau) d\tau - \int_0^{t_0} (\beta\mu)'_t m_{20} d\tau \end{pmatrix},$$

$m, C, P, G$  находятся путем соответствующих подстановок  $m_1, m_2$ . Кроме того, найдется по крайней мере одна тройка  $f, \lambda, \mu$  ( $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ ), для которой соответствующие решения  $M, C, P, G$  будут удовлетворять требуемым в (38) неравенствам (если  $M(t_0), C(t_0), P(t_0) > 0, G(t_0) \geq 0$ ).

Доказательство первой части теоремы аналогично предыдущим, а для доказательства второй части достаточно положить  $f'(t) = \lambda(\tau, t) = \mu(\tau, t) = 0, t > t_0$ .

2.2. Специальный случай двухпродуктовой модели. Рассмотрим более детально случай, когда в (34) функции  $\lambda, \mu$  подчинены условиям (2.6). Тогда (34) примет вид

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau, \\ c(t) &= \int_{a(t)}^t \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau, \\ t \geq t_0, \quad a(t) \leq t, \quad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

Положим еще

$$F(t) = \int_{t_0}^t [m(\tau) + c(\tau)] d\tau \quad (3.42)$$

и будем считать, что  $m(t) \in C_{[0, \infty]}$ ,  $a(t) \in C_{[t_0, \infty]}^{(1)}$ ,  $\alpha, \beta \in C_{[0, \infty] \times [t_0, \infty]}$ , где  $C, C^{(1)}$  — пространства соответственно непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций,  $y(t)$  кусочно-непрерывна на  $[-\infty, \infty]$ . Легко заметить, что тогда  $c(t) \in C_{[t_0, \infty]}$ ,  $P(t), G(t), F(t) \in C_{[t_0, \infty]}^{(1)}$ .

Будем считать заданными  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$ , а также функции  $m(t) = m_0(t)$  и  $y(t) = y_0(t)$  для  $t \in [0, t_0]$ . Если  $a(t)$  задана, то задача сводится к линейным интегральным уравнениям Вольтерра.

Рассмотрим несколько примеров нелинейных задач с неизвестными функциями  $a(t)$  и  $m(t)$ .

А. При заданных  $c(t), y(t)$  ( $0 \leq y(t) \leq 1$ ) из уравнений (41) найти  $m(t)$  и  $a(t)$ .

В. При заданных  $P(t), y(t)$  ( $0 \leq y(t) \leq 1$ ) из уравнений (41) найти  $m(t)$  и  $a(t)$ .

С. При заданных  $F(t), y(t)$  ( $0 \leq y(t) \leq 1$ ) из уравнений (41) и (42) найти  $m(t)$  и  $a(t)$ .

Задачи А, В, С являются вспомогательными задачами решения систем нелинейных уравнений для соответствующих задач  $A^i, B^i, C^i$  с ограничениями

$$0 \leq a(t) \leq t, \quad i = 1, \quad (3.43)$$

или

$$a(t_0) = 0, \quad da/dt \geq 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad i = 2, \quad (3.44)$$

а также для рассматриваемых в дальнейшем оптимизационных задач.

**Теорема 5.** Если: 1)  $\alpha(\tau, t)$  — знакопостоянная,  $\beta(\tau, t)$ ,  $c(t)$  — знакоопределенные функции, 2)  $m_0(t)$  — знакопостоянная на

$[a, t_0]$ ,  $\int_a^{t_0} |m_0(\tau)| d\tau > 0$ ,  $\underline{a} > -\infty$ , 3)  $y(t) \leq 1 - \eta$ ,  $\eta > 0$ , то за-

дача  $A$  имеет единственное решение на любом конечном отрезке  $[t_0, T]$ .

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что на отрезке  $[t_0, t_1]$   $a(t_1) = t_0$  (если такой момент  $t_1$  не существует, то на интервале  $[t_0, \infty)$ ) и задача  $A$  сводится к нелинейному уравнению относительно  $m(t)$ :

$$\begin{aligned} m(t) = Am(t) &\equiv \\ &\equiv \int_{t_0}^t \delta(\tau, t) \Phi \left\{ \psi^{-1} \left[ c(\tau) - \int_{t_0}^{\tau} \beta(u, \tau) [1 - y(u)] m(u) du, \tau \right], \tau \right\} d\tau + \\ &\quad + \Phi \left\{ \psi^{-1} \left[ c(t) - \int_{t_0}^t \beta(u, t) [1 - y(u)] m(u) du, t \right], t \right\}, \quad (3.45) \end{aligned}$$

где

$$\delta(\tau, t) = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_{v+1}(\tau, t), \quad \alpha_1(\tau, t) = y(\tau) \alpha(\tau, t), \quad (3.46)$$

$$\alpha_{v+1}(\tau, t) = \int_{\tau}^t \alpha(u, t) y(u) \alpha_v(\tau, u) du, \quad v = 1, 2, \dots,$$

$$\Phi(a, t) = \int_a^{t_0} \alpha(\tau, t) y_0(\tau) m_0(\tau) d\tau = m(t) - \int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned} \Psi(a, t) &= \int_a^{t_0} \beta(\tau, t) [1 - y_0(\tau)] m_0(\tau) d\tau = \\ &= c(t) - \int_{t_0}^t \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \quad (3.47) \end{aligned}$$

$$\Psi(a, t) = x(t), \quad a(t) = \Psi^{-1}(x(t), t), \quad (3.48)$$

$$x(t) = c(t) - \int_{t_0}^t \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau.$$

По условиям теоремы  $\Psi(a, t)$  монотонна по  $a$ ; следовательно,  $\Psi^{-1}(x, t)$  однозначна. Обозначим

$$\sigma(x, t) = \Phi[\Psi^{-1}(x, t), t] \quad (3.49)$$

и найдем

$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} = \frac{\alpha(a, t) y(a)}{\beta(a, t) [1 - y(a)]}.$$

Следовательно, функция  $\sigma(x, t)$  удовлетворяет условию Липшица с постоянной  $L = \|\alpha y\| / \min |\beta(1 - y)|$ .

Введем следующую норму:

$$\|x\|_{\mu} = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} |e^{-\mu(t-t_0)} x(t)|, \quad \mu > 0. \quad (3.50)$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} \|Ax_1 - Ax_2\|_{\mu} &\leq \\ &\leq \frac{\|\alpha y\| \|\beta(1 - y)\| e^{\|\alpha y\|(t_1-t_0)} (1 - e^{-\mu(t_1-t_0)})}{\mu \min |\beta(1 - y)|} \|x_2 - x_1\|_{\mu}. \end{aligned}$$

Таким образом (см., например, [151]), при

$$\mu > \frac{\|\alpha y\| \|\beta(1 - y)\| e^{\|\alpha y\|(t_1-t_0)}}{\min |\beta(1 - y)|}$$

оператор  $A$  в норме (50) является оператором сжатия и уравнение (45) (значит, и задача  $A$ ) имеет единственное решение на  $[t_0, t_1]$ . При этом из (45)—(47) в силу условий теоремы следует, что  $m(t)$  — знакпостоянная функция на  $[t_0, t_1]$ .

Момент  $t_1$  ( $a(t_1) = t_0$ ) заранее неизвестен и определяется в процессе решения. Если  $a(t) \leq t_0$  при  $t_0 \leq t < \infty$ , то построенное решение справедливо на  $[t_0, \infty)$ . Если  $T > t_1$ , то аналогично доказывается, что задача имеет единственное решение на  $[t_1, t_2]$  ( $a(t_2) = t_1$ ), затем на  $[t_2, t_3]$  ( $a(t_3) = t_2$ ) и т. д., пока не получим решение на всем отрезке  $[t_0, T]$ . Последнее возможно, так как в силу условий теоремы

$$\begin{aligned} t - a(t) &\geq \min_{t_0 \leq t \leq T} |c(t)| \left( \|\beta\| \|\alpha\| e^{\|\alpha\|(T-t_0)} \int_a^{t_0} |m_0(\tau)| d\tau \right)^{-1} > 0, \\ \underline{a} &= \min a(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

что является следствием очевидных оценок

$$|c(t)| \leq \|\beta\| \|m\| (t - a(t)), \quad |m(t)| \leq \|\alpha\| \int_a^t |m(\tau)| d\tau,$$

$$t \in [t_0, T].$$

Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 1.** Заданная функция  $c(t)$ , вообще говоря, не может быть произвольной. Действительно, из (41) легко следует, что

$$c(t) \leq \| \alpha \| \| \beta \| e^{|\alpha|t} \int_a^{t_0} |m_0(\tau)| d\tau, \quad t \in [t_0, T]. \quad (3.51)$$

Поэтому для произвольного выбора  $c(t)$  необходимо, чтобы  $\int_{-\infty}^{t_0} |m_0(\tau)| d\tau \rightarrow \infty$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Условие знакопостоянности функции  $\beta(\tau, t) m(\tau)[1 - y(\tau)]$  для  $(\tau, t) \in [0, t_0] \times [t_0, t_1]$  является необходимым для единственности решения задачи А на отрезке  $[t_0, t_1]$ ,  $a(t_1) = t_0$ , а условие знакопостоянности  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$  — необходимым для единственности решения на достаточно большом отрезке  $[t_0, T]$ .

Действительно, невыполнение первого условия нарушает монотонность функции  $\Psi(a, t)$ , поэтому функция  $\Psi^{-1}(x, t)$  (значит, и  $a(t)$ ) неоднозначна на  $[t_0, t_1]$ . При нарушении второго условия на каком-либо отрезке  $[t_{i-1}, t_i]$  нарушается знакопостоянность  $m(t)$ , а это влечет неоднозначность  $\psi^{-1}(x, t)$  на следующем отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$ .

**Теорема 6.** Если  $\alpha(\tau, t)$  — знакопостоянная функция, а  $P(t)$  — знакоопределенная,  $\int_a^{t_0} |m_0(\tau)| d\tau > 0$ , то задача В имеет решение на любом конечном интервале; если при этом  $m(t)$  знакоопределена на  $[a, t_0]$ , то это решение единственно.

Для случая  $\alpha(\tau, t) \geq 0$ ,  $m(t) \geq 0$  этот результат доказан в [73], для других возможных случаев доказательство аналогично (и аналогично доказательству теоремы 5).

**З а м е ч а н и е 3.** Условие знакопостоянности  $m(t)$  на  $[0, t_0]$  является необходимым для единственности решения на отрезке  $[t_0, t_1]$ ,  $a(t_1) = t_0$ , а для единственности решения на достаточно большом интервале, кроме этого, необходимо, чтобы  $\alpha(\tau, t)$  была знакопостоянна.

Задача С сводится к нелинейному уравнению, подобному уравнению (45), поэтому можно показать, что она имеет единственное решение при выполнении условий теоремы 5 и при выполнении замечания 1 к этой теореме.

Рассмотрим теперь задачи  $A^i, B^i, C^i$ . Напомним, что они заключаются в решении соответствующих задач А, В, С при дополнительном ограничении на искомую функцию  $a(t) \geq 0$ ,  $i = 1$  (или  $a(t_0) = 0$ ,  $a'(t) \geq 0$ ,  $t = 2$ ). Легко заметить, что заданные функции  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$ ,  $m_0(t)$  и другие в задачах  $A^i, B^i, C^i$  связаны некоторыми ограничениями. Действительно, рассмотрим задачу

$A^i$ . Из (41) и (43) следует, что

$$c(t) \leq \bar{c}(t) = \int_0^{t_0} |\beta(\tau, t) y_0(\tau) m_0(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t |\beta(\tau, t)| \bar{m}(\tau) d\tau, \quad (3.52)$$

$$\bar{m}(t) = \int_0^{t_0} |\alpha(\tau, t) [1 - y_0(\tau)] m_0(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t |\alpha(\tau, t)| \bar{m}(\tau) d\tau.$$

Таким образом, если  $c(t)$ ,  $y_0(t)$ ,  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$ ,  $m_0(t)$  не удовлетворяют (52), то задача  $A^i$  решения не имеет, т. е. условие (52) является необходимым для разрешимости задачи  $A^i$ . Подобные условия имеют место и для  $B^i$ ,  $C^i$ .

Очевидно, что совместное решение системы нелинейных уравнений и неравенств в  $A^i$ ,  $B^i$ ,  $C^i$  весьма сложно, поэтому важно использовать при решении этих задач известные свойства задач  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Полезным оказывается свойство монотонности, которым обладают соответствующие операторы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Рассмотрим задачу  $A^i$  при условиях теоремы 5. Можно показать, что оператор  $A$  в уравнении (44) является антитонным либо изотонным, в зависимости от знаков функций  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$ ,  $m_0(t)$ . Оператор, действующий на функцию  $a(t)$  в задаче  $A^i$ , оказывается также монотонным. Монотонность операторов позволяет строить двусторонние приближения к решению задачи [140], что особенно важно для проверки ограничения  $a(t) \geq 0$ .

Остановимся на задаче  $C^i$  в случае, когда  $F'(t) = m(t) + c(t) \equiv 0$  ( $t \in [t_0, \infty)$ ). Тогда из (41) получаем

$$\int_{a(t)}^{t_0} \{\alpha(\tau, t) y_0(\tau) + \beta(\tau, t) [1 - y_0(\tau)]\} m_0(\tau) d\tau - \\ - \int_{t_0}^t \{\alpha(\tau, t) y(\tau) + \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)]\} c(\tau) d\tau = 0.$$

Отсюда следует, что если  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$  — ограниченные знакоопределенные функции одного знака, а  $c(t) \geq 0$ , то  $c(t) = -m(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для любой функции  $y(t)$ .

Здесь уместно отметить, что дискретный аналог рассматриваемой модели (41) — (44) будет обладать принципиально отличным свойством в том смысле, что при  $f(t) = m(t) + c(t) = 0$  обращения в нуль  $c(t)$  и  $m(t)$  будут происходить в нем за конечное время. Это в большей мере соответствует действительному явлению стабилизации «жизни» системы за конечное время при условии, что субстрат остается неизменным.

**2.3. Применение основной теоремы теории линейных неравенств.** Для получения более общих условий относительно  $\lambda$ ,  $\mu$  ( $0 \leq \lambda$ ,  $\mu \leq 1$ ), при которых рассматриваемые системы будут иметь положительные решения, воспользуемся основной теоремой теории линейных неравенств в следующей операторной форме [159, 197].

Пусть  $A$  — линейный оператор в упорядоченном гильбертовом пространстве:

$$Ax = \int_a^b a(\tau, t) x(\tau) d\tau, \quad t \in [c, d], \quad (3.53)$$

$$yA = \int_c^d a(\tau, t) y(t) dt, \quad \tau \in [a, b].$$

Тогда либо уравнение  $Ax = g$  имеет решение  $x > 0$ , либо разрешима система неравенств  $yA > 0$ ,  $(y, g) = \int_c^d (y(t), g(t)) dt \leq 0$ . Заметим, что несовместность указанных двух систем легко следует из соотношения

$$(y, g) = \int_a^b \left( \int_c^d a(\tau, t) y(t) dt, x(\tau) \right) d\tau.$$

Заметим также, что теорема обобщается на случай, когда  $a(\tau, t)$  — матрица, а  $x, g, y$  — соответствующие вектор-функции.

Полагая, в частности,  $a(\tau, t) = 0$ ,  $\tau > t$ ,  $b = d$ , перепишем (53) в виде

$$Ax = \int_d^t a(\tau, t) x(\tau) d\tau, \quad t \in [c, d], \quad (3.54)$$

$$yA = \begin{cases} \int_\tau^c a(\tau, t) y(t) dt, & a \geq c, \\ \int_c^d a(\tau, t) y(t) dt, & \tau \leq c, \quad a < c, \\ \int_\tau^d a(\tau, t) y(t) dt, & c < \tau \leq d, \quad a < c. \end{cases}$$

Основная теорема теперь звучит точно так же, как и выше, но соответствует случаю вольтерровского оператора  $A$ .

В случае вольтерровского оператора с предысторией, положив  $a = c = t_0$ ,  $b = d = t_0 + T$ , вместо (54) получим

$$Ax = \int_{t_0}^t a(\tau, t) x(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, T], \quad t_0 > 0, \quad (3.55)$$

$$yA = \int_\tau^T a(\tau, t) y(t) dt, \quad t_0 \leq \tau \leq T.$$

Теперь либо уравнение

$$\int_{t_0}^t a(\tau, t) x(\tau) d\tau = g(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (3.56)$$

имеет решение  $x(\tau) > 0$  ( $\tau \in [t_0, T]$ ), либо система

$$\int_{\tau}^T a(\tau, t) y(t) dt > 0, \quad t_0 \leq \tau \leq T, \quad (3.57)$$

$$\int_{t_0}^T (y(t), g(t)) dt \leq 0$$

разрешима относительно  $y(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ).

Рассуждая подобным образом, можно сформулировать основную теорему еще в следующем виде. Либо уравнение

$$x(t) - \int_{t_0}^t a_1(\tau, t) x(\tau) d\tau = g(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (3.58)$$

имеет решение  $x(t) > 0$  ( $t \in [t_0, T]$ ), либо система

$$y(\tau) - \int_{\tau}^T a_1(\tau, t) y(t) dt > 0, \quad t_0 \leq \tau \leq T, \quad (3.59)$$

$$\int_{t_0}^T (y(t), g(t)) dt \leq 0$$

разрешима относительно  $y(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ).

Для применения основной теоремы перепишем первое уравнение двухпродуктовой модели (36) в виде

$$\begin{aligned} M(t) - \int_{t_0}^t \omega(\tau, t) M(\tau) d\tau = \\ = M(t_0) - \int_0^{t_0} \int_{t_0}^t [\alpha(\tau, u) \lambda(\tau, u)]'_\tau du M_{10}(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t \omega(\tau, t) M_2(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\omega(\tau, t) = \alpha(\tau, \tau) \lambda(\tau, \tau) - \int_{\tau}^t [\alpha(\tau, u) \lambda(\tau, u)]'_\tau du.$$

**Теорема 7.** Уравнение (60) имеет положительное решение относительно  $M(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ) тогда и только тогда, когда система неравенств

$$N(\tau) - \int_{\tau}^T \omega(\tau, t) N(t) dt > 0, \quad \tau \in [t_0, T],$$

$$\int_{t_0}^T N(t) \left[ M(t_0) - \int_0^{t_0} \int_{t_0}^t [\alpha(\tau, u) \lambda(\tau, u)]'_\tau du M_{1_0}(\tau) d\tau \right] dt \leq \\ \leq \int_{t_0}^T N(t) \int_{t_0}^t \omega(\tau, t) M_2(\tau) d\tau dt \quad (3.61)$$

несовместна относительно  $N(t)$ .

Доказательство легко вытекает из соотношений (58)—(60).

С л е д с т в и е. Если

$$M_2(t) \leq M(t_0) - \int_0^{t_0} \int_{t_0}^t [\alpha(\tau, u) \lambda(\tau, u)]'_\tau du M_{1_0}(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, T], \quad (3.62)$$

то (60) имеет положительное решение при  $t \in [t_0, T]$ .

Действительно, из (62) вытекает, что левая часть второго из неравенств (61) не меньше  $\int_{t_0}^T N(t) M_2(t) dt$ . Но, с другой стороны,

$$\int_{t_0}^T N(t) \int_{t_0}^t \omega(\tau, t) M_2(\tau) d\tau dt = \\ = \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T N(t) \omega(\tau, t) dt M_2(\tau) d\tau < \int_{t_0}^T N(\tau) M_2(\tau) d\tau = \int_{t_0}^T N(t) M_2(t) dt.$$

Значит, система (61) несовместна и (60) имеет положительное решение.

Поскольку  $M_2(t) = \int_0^t m_2(\tau) d\tau$  определенным образом зависит от любой из распределительных функций  $x$ ,  $y$  или  $z$  (см. (2.32)—(2.34)), то условие (62) по существу означает ограничение на распределительную функцию и интенсивность. Более тривиальное условие, при котором  $M(t)$  будет положительным решением уравнения (60), непосредственно вытекает из самого вида этого уравнения. Если правая часть (60) и ядро  $\omega(\tau, t)$  положительны, то и решение  $M(t)$  будет положительным.

Перепишем  $C$  и  $P$  в виде

$$C(t) = C(t_0) - \int_0^{t_0} \int_{t_0}^t [\beta(\tau, u) \mu(\tau, u)]'_\tau du M_{2_0}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \sigma(\tau, t) M_2(\tau) d\tau, \\ P(t) = \int_0^t [\lambda(\tau, t) M_1'(\tau) + \mu(\tau, t) M_2'(\tau)] d\tau = \\ = \lambda(t, t) M(t) + [\mu(t, t) - \lambda(t, t)] M_2(t) - \\ - \int_0^t \{ \lambda'_\tau(\tau, t) M(\tau) + [\mu'_\tau(\tau, t) - \lambda'_\tau(\tau, t)] M_2(\tau) \} d\tau. \quad (3.63)$$

Теперь будем при положительном  $M(t)$  иметь дополнительно  $M(t) \geq P(t) > 0$ ,  $c(t) > 0$ , если выполнены, например, следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \lambda(t, t), \lambda'_\tau(\tau, t) > 0, \lambda(t, t) \leq 1, \\ -d(t) M(t) \leq [\bar{\mu}(t, t) - \lambda(t, t)] M_2(t) \leq 0, \quad 0 < d(t) < \lambda(t, t), \\ \lambda'_\tau(\tau, t) M(\tau) \geq [\bar{\mu}'_\tau(\tau, t) - \lambda'_\tau(\tau, t)] M_2(\tau) \geq -\lambda'_\tau(\tau, t) M(\tau), \\ P(t) \geq [\lambda(t, t) - d(t)] M(t) - 2 \max_{0 \leq \tau \leq t} [\lambda'_\tau(\tau, t)] \int_0^t M(\tau) d\tau > 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\int_{t_0}^t \sigma(\tau, t) M_2(\tau) d\tau > \int_0^{t_0} \int_{t_0}^t [\beta(\tau, u) \mu(\tau, u)]'_\tau du M_{2,0}(\tau) d\tau - C(t_0),$$

$$\sigma(\tau, t) = \beta(\tau, \tau) \mu(\tau, \tau) - \int_\tau^t [\beta(\tau, u) \mu(\tau, u)]'_\tau du.$$

**2. 4. Специальный случай трехпродуктовой модели.** Рассмотрим трехпродуктовую модель:

$$m(t) = \int_0^t \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) \tilde{m}(\tau) d\tau, \quad \tilde{m} = m - m_1 - m_2,$$

$$c_1(t) \equiv c = \int_0^t \beta_1(\tau, t) \mu_1(\tau, t) m_1(\tau) d\tau,$$

$$c_2(t) \equiv g(t) = \int_0^t \beta_2(\tau, t) \mu_2(\tau, t) m_2(\tau) d\tau = m(t) - p(t),$$

$$P(t) = \int_0^t [\lambda(\tau, t) \tilde{m}(\tau) + \mu_1(\tau, t) m_1(\tau) + \mu_2(\tau, t) m_2(\tau)] d\tau,$$

$$P'(t) = p(t), \quad f(t) = c_1(t) + g(t) + p(t) = c_1(t) + m(t),$$

$$F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^t f(u) du, \quad M(t) = M(t_0) + \int_{t_0}^t m(u) du,$$

(3.65)

$$C_1(t) = C_1(t_0) + \int_{t_0}^t c_1(u) du,$$

$$G(t) = M(t) - P(t) = G(t_0) + \int_{t_0}^t g(u) du, \quad M, C_1, P, F > 0, G \geq 0,$$

$$t \geq t_0 > 0,$$

где  $F$  — обобщенный субстрат (см. § 4 гл. 2).

Теорема 8. Пусть заданы интегрируемые функции  $\alpha_i, \beta_{1i}, \beta_{2i}, f', \lambda_i, \mu_{1i}, \mu_{2i}$ , причем

$$\beta_1(t, t) \mu_1(t, t) [\lambda(t, t) - \mu_2(t, t)] + \\ + \alpha(t, t) \lambda(t, t) [\mu_2(t, t) - \mu_1(t, t)] \neq 0. \quad (3.66)$$

Тогда система равенств в (65) имеет единственное решение относительно  $M, M_1, M_2, C, G, P$ . Кроме того, найдется по крайней мере одна четверка  $F, \lambda, \mu_1, \mu_2$  ( $F > 0, 0 \leq \lambda, \mu_1, \mu_2 \leq 1$ ), для которой соответствующие решения  $M, C_1, P, G$  будут положительными на любом отрезке  $[t_0, T]$ , если  $M(t_0), C_1(t_0), P(t_0), G(t_0)$  больше нуля.

Доказательство. В силу (65) относительно  $m, m_1, m_2$  имеем следующую систему уравнений:

$$m(t) = \int_0^{t_0} \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) \tilde{m}_0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) \tilde{m}(\tau) d\tau, \\ m(t) = f(t) - \int_0^{t_0} \beta_1(\tau, t) \mu_1(\tau, t) m_{10}(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t \beta_1(\tau, t) \mu_1(\tau, t) m_1(\tau) d\tau, \quad (3.67)$$

$$[1 - \lambda(t, t)] m(t) + \\ + [\lambda(t, t) - \mu_1(t, t)] m_1(t) + [\lambda(t, t) - \mu_2(t, t)] m_2(t) = \\ = - \int_0^t [\lambda'_i(\tau, t) \tilde{m}(\tau) + \mu_{1i}'(\tau, t) m_1(\tau) + \mu_{2i}'(\tau, t) m_2(\tau)] d\tau + \\ + \int_0^t \beta_2(\tau, t) \mu_2(\tau, t) m_2(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 > 0.$$

Дифференцируя первое и второе равенства в (67), получаем равносильную систему:

$$m(t) = \int_0^{t_0} \alpha \lambda \tilde{m}_0 d\tau + \int_{t_0}^t \alpha \lambda \tilde{m} d\tau, \\ \alpha \lambda m + (\beta_1 \mu_1 - \alpha \lambda) m_1 - \alpha \lambda m_2 = f' - \int_0^t [\alpha \lambda]_i' \tilde{m} d\tau - \int_0^t (\beta_1 \mu_1)_i' m_1 d\tau, \quad (3.68)$$

$$(1 - \lambda) m + (\lambda - \mu_1) m_1 + (\lambda - \mu_2) m_2 = \\ = - \int_0^t (\lambda'_i \tilde{m} + \mu_{1i}' m_1 + \mu_{2i}' m_2) d\tau + \int_0^t \beta_2 \mu_2 m_2 d\tau.$$

Определитель матрицы коэффициентов при  $m, m_1, m_2$  в левых частях (68) как раз и равен левой части соотношения (66). Поэтому при ус-

ловии (66) система (68) имеет единственное решение относительно  $m, m_1, m_2$ . Подставляя найденные значения  $m, m_1, m_2$  в выражения для  $M, M_1, M_2, C_1, G, P$ , находим все искомые величины. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части достаточно найти такие  $F > 0, \lambda, \mu_1, \mu_2$  ( $0 \leq \lambda, \mu_1, \mu_2 \leq 1$ ), для которых

$$\int_{t_0}^t |m(u)| du < M(t_0), \quad \int_{t_0}^t |c_1(u)| du < c_1(t_0), \quad \int_{t_0}^t |g(u)| du < G(t_0),$$

$$\int_{t_0}^t |\lambda(\tau, t) \tilde{m}(\tau) + \mu_1(\tau, t) m_1(\tau) + \mu_2(\tau, t) m_2(\tau)| d\tau < \rho(t_0), \quad t \in [t_0, T].$$

Возьмем в качестве  $F$  линейную функцию ( $F > 0$ ) так, чтобы  $f'(t) = 0$  ( $t \in [t_0, T]$ ), и примем  $\lambda(\tau, t) = \mu_1(\tau, t) = \mu_2(\tau, t) = 0$  ( $\tau \in [0, t_0], t > t_0$ ), продолжив далее  $\lambda, \mu_1, \mu_2$  так, чтобы функции  $\lambda, \mu_1, \mu_2$  были интегрируемы,  $0 \leq \lambda, \mu_1, \mu_2 \leq 1$ , и чтобы было выполнено условие (66). Тогда для  $t > t_0$  система (68) превращается в однородную, имеющую лишь тривиальное решение. Отсюда для выбранных  $F, \lambda, \mu_1, \mu_2$  вытекает выполнимость (69), так как левые части всех неравенств в (69) равны нулю.

**З а м е ч а н и е 1.** Если считать  $G(t_0) \geq 0$ , то можно подобным же образом доказать существование таких  $F > 0, \lambda, \mu_1, \mu_2$  ( $-1 \leq \lambda, \mu_1, \mu_2 \leq 1$ ), для которых  $M, C_1, P, F > 0, G \geq 0$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Теорема 8 не оставляет возможности варьирования распределительными функциями (типа  $x, y, z$ ), так как  $M, M_1, M_2$  условиями теоремы определяются однозначно. Другими словами, одновременно распоряжаться как управляющими воздействиями, так и интенсивностями и распределительными функциями в рамках модели (65) невозможно.

**2.5.  $n$ -продуктовые и континуальные модели.**  $n$ -продуктовую модель удобно в теоретическом плане рассматривать как частный случай континуальной модели (2.29), которая по виду напоминает двухпродуктовую модель (2.1)—(2.4). Это внешнее сходство позволяет нередко без особого труда обобщать на континуальный и тем самым на  $n$ -продуктовый случай многие полученные результаты относительно существования и единственности решений для двухпродуктовой модели.

Рассмотрим, к примеру, обобщение теоремы 3. Модели (2.29), (2.33) теперь соответствует система

$$m(t, v) = \int_0^v \int_0^t \alpha(\tau, t, u, v) \lambda(\tau, t, u, v) y(\tau, u, v) m(\tau, u) d\tau du,$$

$$c(t, v) = \int_0^v \int_0^t \beta(\tau, t, u, v) \mu(\tau, t, u, v) [1 - y(\tau, u, v)] m(\tau, u) d\tau du,$$

$$P(t, u) = \int_0^v \int_0^t \{ \lambda(\tau, t, u, v) y(\tau, u, v) + \mu(\tau, t, u, v) \times \quad (3.70)$$

$$\times [1 - y(\tau, u, v)] \} m(\tau, u) d\tau du,$$

$$G(t, u) = M(t, u) - P(t, u), \quad M(t, u) = \int_0^t m(\tau, u) d\tau,$$

$$t \geq t_0 > 0, \quad v \geq v_0 > 0.$$

**Теорема 9.** Если заданы интегрируемые функции  $\alpha, \beta, \lambda, \mu, y$ , то относительно  $m, c, P, G$  система уравнений (70) всегда имеет единственное решение, причем  $m(t, v)$  имеет вид

$$m(t, v) = \varphi(t, v) + \int_{v_0}^v \int_{t_0}^t \gamma(\tau, t, u, v) \varphi(\tau, u) d\tau du,$$

$$t \geq t_0 > 0, \quad v \geq v_0 > 0,$$

$$\gamma(\tau, t, u, v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{\nu+1}(\tau, t, u, v),$$

$$\delta_1 \equiv \delta = \alpha(\tau, t, u, v) \lambda(\tau, t, u, v) y(\tau, u, v), \quad (3.71)$$

$$\delta_{\nu+1} = \int_u^v \int_{\tau}^t \delta(z, t, w, v) \delta_{\nu}(\tau, z, u, w) dz dw,$$

$$\varphi(t, v) = \int_0^v \int_0^t \alpha(\tau, t, u, v) \lambda(\tau, t, u, v) y(\tau, u, v) m_0(\tau, u) d\tau du,$$

$c, P, G$  находятся путем соответствующих подстановок  $m(t, v)$ .

### § 3. Об устойчивости решений

**3.1. Общий случай двухпродуктовой модели.** Будем считать, что все элементы двухпродуктовой модели (2.1) — (2.4), включая заданные на предыстории, известны лишь приближенно. Обозначим через  $\delta x = x - \tilde{x}$  вариацию любой функции  $x$ ;  $\tilde{x}$  — приближенное значение  $x$ . Тогда с точностью до главных членов, т. е. с точностью до первых степеней всех вариаций, имеем

$$\delta m(t) = \int_0^t \delta \alpha(\tau, t) \tilde{\lambda}(\tau, t) \tilde{m}_1(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t \tilde{\alpha}(\tau, t) \delta \lambda(\tau, t) \tilde{m}_1(\tau) d\tau + \int_0^t \tilde{\alpha}(\tau, t) \tilde{\lambda}(\tau, t) \delta m_1(\tau) d\tau,$$

$$\delta c(t) = \int_0^t \delta \beta(\tau, t) \tilde{\mu}(\tau, t) \tilde{m}_2(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t \tilde{\beta}(\tau, t) \delta \mu(\tau, t) \tilde{m}_2(\tau) d\tau + \int_0^t \tilde{\beta}(\tau, t) \tilde{\mu}(\tau, t) \delta m_2(\tau) d\tau,$$

$$\delta P(t) = \int_0^t [\delta \lambda(\tau, t) \tilde{m}_1(\tau) + \tilde{\lambda}(\tau, t) \delta m_1(\tau) + \\ + \delta \mu(\tau, t) \tilde{m}_2(\tau) + \tilde{\mu}(\tau, t) \delta m_2(\tau)] d\tau, \quad (3.72)$$

$$\tilde{m} = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2, \quad \delta m = \delta m_1 + \delta m_2, \quad \delta G = \delta M - \delta P, \quad t \geq t_0 > 0.$$

Теорема 10. Пусть заданы интегрируемые значения  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$ ,  $\delta\lambda$ ,  $\delta\mu$ ,  $\delta m_2$ ,  $\delta m_0$ ,  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{m}_2$ . Тогда с точностью до главных членов имеем

$$\delta m(t) = \delta\psi(t) + \int_{t_0}^t \tilde{\gamma}(\tau, t) \delta\psi(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0,$$

$$\tilde{\gamma}(\tau, t) = \sum_{v=0}^{\infty} \tilde{\delta}_{v+1}(\tau, t), \quad \tilde{\delta}_1 \equiv \tilde{\delta} = \tilde{\alpha}(\tau, t) \tilde{\lambda}(\tau, t),$$

$$\tilde{\delta}_{v+1}(\tau, t) = \int_{\tau}^t \tilde{\delta}(z, t) \tilde{\delta}(\tau, z) dz, \quad v = 1, 2, \dots,$$

(3.73)

$$\delta\psi(t) = \int_0^{t_0} \tilde{\alpha}(\tau, t) \tilde{\lambda}(\tau, t) \delta m_0(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t (\delta\alpha(\tau, t) \tilde{\lambda}(\tau, t) \tilde{m}_1(\tau) - \tilde{\alpha}(\tau, t) \tilde{\lambda}(\tau, t) \delta m_2(\tau)) d\tau,$$

$$\tilde{m}(t) = \tilde{\varphi}(t) + \int_{t_0}^t \tilde{\gamma}(\tau, t) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0,$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_0^{t_0} \tilde{\alpha}(\tau, t) \tilde{\lambda}(\tau, t) \tilde{m}_0(\tau) d\tau - \int_0^t \tilde{\alpha}(\tau, t) \tilde{\lambda}(\tau, t) m_2(\tau) d\tau,$$

$\delta C$ ,  $\delta P$ ,  $\delta G$  находятся путем непосредственной подстановки в соответствующие им выражения в (72) найденных в (73) значений  $\delta m$ ,  $\tilde{m}$ .

Доказательство легко вытекает из формул типа (35) и (72).

Следствие 1. Если

$$\int_{t_0}^t |\tilde{\gamma}(\tau, t)| d\tau \leq C < \infty, \quad (3.74)$$

где константа  $C$  не зависит от  $t$ , то  $\delta m(t)$  асимптотически (по  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$ ,  $\delta\lambda$ ,  $\delta\mu$ ,  $\delta m_2$ ,  $\delta m_0$ ) равномерно (по  $t$ ) устойчива на любом интервале, причем с точностью до первых степеней всех вариаций

выполняется неравенство

$$|\delta m(t)| \leq |\delta \psi(t)| + C \max_{\tau \in [t_0, t]} |\delta \psi(\tau)|. \quad (3.75)$$

Если, в частности, рассматривать лишь возмущения на предыстории  $\delta m_2$  и  $\delta m_0$ , то (74) можно назвать условием обобщенной (на случай вольтерровских уравнений с предысторией) устойчивости решений по Ляпунову.

Следствие 2. Если

$$\delta \psi(t) \rightarrow 0, \quad \int_{t_0}^t |\tilde{\gamma}(\tau, t)| d\tau \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.76)$$

то

$$\delta m(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.77)$$

Достаточным условием для выполнения (74) и (76) будет достаточно быстрое, экспоненциальное стремление к нулю функций  $\alpha$ ,  $\delta \alpha$  или  $\alpha$ ,  $\lambda$  по переменной  $t$  и сравнительно медленный их рост по переменной  $\tau$ .

Аналогичные следствия нетрудно установить также для  $\delta C$ ,  $\delta P$ ,  $\delta G$ .

3.2. Специальный случай двухпродуктовой модели. Рассмотрим случай устойчивости решений задач  $A^i$ ,  $B^i$ ,  $C^i$  (см. п. 2.2) к малым возмущениям заданных функций и приведем оценки наследственной погрешности их решений. Для любой функции  $x$  через  $\delta'x$  обозначим наследственную относительную погрешность:

$$\delta'x = \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|},$$

где  $\|\cdot\|$  — норма в пространстве непрерывных функций  $C_{[0, \infty]}$ .

**Т е о р е м а 11.** Если в своих областях определения  $y(t) < 1$  —  $\eta$ ,  $\eta > 0$ ,  $\beta(\tau, t) \neq 0$ ,  $m(t) \neq 0$ , то задача  $A^i$  устойчива на конечном интервале относительно малых возмущений  $\delta \alpha(\tau, t)$ ,  $\delta \beta(\tau, t)$ ,  $\delta y(t)$ ,  $\delta c(t)$ ,  $\delta m_0(t)$  заданных функций, а относительные погрешности определения  $m(t)$  и  $a(t)$  удовлетворяют следующим оценкам:

$$\begin{aligned} \delta' m \leq \exp \left\{ \max_{\tau} M(\tau, t) (t - t_0) \right\} & \left[ \left( 1 + \frac{\|\beta/\alpha\|}{\min \omega} \right) \frac{\|y\|}{\min y} \delta' y + \right. \\ & + \frac{\|\alpha\|}{\min \alpha} \delta' \alpha + \left( 1 + \frac{\|\omega\|}{\min \omega} \right) \frac{\|m_0\|}{\min m_0} \delta' m_0 + \\ & \left. + \frac{\|\omega\|}{\min \omega} \left( \frac{\|\beta\|}{\min \beta} \delta' \beta + \delta' C \right) \right], \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\delta'a = \frac{\|C\| \|\omega\|}{\min C \min [\beta(1-y)] (t-1/\min \alpha y)} \times$$

$$\times \left[ \frac{\|C\| \|\omega\|}{\min C \min \omega} \delta'm + \frac{\|m_0\|}{\min m_0} \delta'm_0 + \frac{\|y\|}{1-\|y\|} \delta'y + \frac{\|\beta\|}{\min \beta} \delta'\beta + \delta'C \right],$$

*где*

$$M(\tau, t) = \alpha(\tau, t) + \frac{\alpha(a(t), t) y(a(t))}{\beta(a(t), t) [1-y(a(t))]} \beta(\tau, t) [1-y(\tau)],$$

$$\omega(\tau, t) = \frac{\beta(\tau, t) [1-y(\tau)]}{\alpha(\tau, t) y(\tau)}.$$

**Доказательство.** Пусть заданные функции  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$ ,  $y(t)$ ,  $c(t)$ ,  $m_0(t)$  возмущены малыми по норме возмущениями; тогда неизвестные  $a(t)$  и  $m(t)$  получают некоторые приращения  $\delta a(t)$  и  $\delta m(t)$ . Рассматривая возмущения всех функций как малые величины, из уравнений (46), (47) с точностью до главных членов получаем линейные уравнения относительно функций  $\delta a(t)$  и  $\delta m(t)$ . Решив их, получим

$$\delta m(t) = \int_{\tilde{a}(t)}^t R(\tau, t) \left\{ \int_{a(\tau)}^{\tau} N(u, \tau) m(u) \delta y(u) du + \right.$$

$$+ \int_{a(\tau)}^{\tau} y(u) m(u) \delta \alpha(u, \tau) du + \int_{\tilde{a}(\tau)}^{t_0} M(u, \tau) \delta m_0(u) du -$$

$$\left. - \frac{\alpha(a(\tau), \tau) y(a(\tau))}{\beta(a(\tau), \tau) [1-y(a(\tau))]} \left[ \int_{a(\tau)}^{\tau} [1-y(u)] m(u) \delta \beta(u, \tau) du - \delta c(\tau) \right] \right\} d\tau +$$

$$+ \int_{\tilde{a}(t)}^t N(u, t) m(u) \delta y(u) du + \int_{\tilde{a}(t)}^{t_0} M(u, t) \delta m_0(u) du -$$

$$- \frac{\alpha(a(t), t) y(a(t))}{\beta(a(t), t) [1-y(a(t))]} \left[ \int_{a(t)}^t [1-y(u)] m(u) \delta \beta(u, t) du - \delta c(t) \right],$$

(3.79)

$$\delta a(t) = \frac{1}{\beta(a(t), t) [1-y(a(t))]} \left\{ \int_{\tilde{a}(t)}^t \beta(\tau, t) [1-y(\tau)] \delta m(\tau) d\tau + \right.$$

$$+ \int_{\tilde{a}(t)}^t \beta(\tau, t) [1-y(\tau)] \delta m_0(\tau) d\tau - \int_{a(t)}^t \beta(\tau, t) m(\tau) \delta y(\tau) d\tau +$$

$$\left. + \int_{a(t)}^t \delta \beta(\tau, t) [1-y(\tau)] m(\tau) d\tau - \delta c(t) \right\},$$

где

$$N(\tau, t) = \alpha(\tau, t) + \frac{\alpha(a(t), t) y(a(t))}{\beta(a(t), t) [1 - y(a(t))]} \beta(\tau, t),$$

$$R(\tau, t) = \sum_{v=0}^{\infty} R_{v+1}(\tau, t),$$

$$R_1(\tau, t) = \begin{cases} M(\tau, t), & \tau \geq \tilde{a}(t), \\ 0, & t_0 \leq \tau \leq \tilde{a}(t), \end{cases} \quad (3.80)$$

$$R_{v+1}(\tau, t) = \int_{\tau}^t R_1(u, t) R_v(\tau, u) du, \quad v = 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{a}(t) = \begin{cases} a(t), & a(t) \geq t_0, \\ t_0, & 0 \leq a(t) \leq t_0, \end{cases} \quad (3.81)$$

$$\tilde{a}(t) = \begin{cases} t_0, & a(t) \geq t_0, \\ a(t), & 0 \leq a(t) \leq t_0. \end{cases}$$

Из формул (79), (80) видно, что при выполнении условий теоремы 11  $\delta a(t)$  и  $\delta m(t)$  будут для конечных  $t$  величинами того же порядка малости, что и возмущения заданных функций, т. е. задача устойчива на конечном интервале времени.

Неравенства (78) вытекают из оценки по норме формул (79) — (81). Например,

$$\int_{a(t)}^t \delta \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau \leq$$

$$\leq \|\delta \alpha\| \int_{a(t)}^t \frac{\alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau}{\min \alpha} \leq \frac{\|\delta \alpha\| \|m\|}{\min \alpha}.$$

Оценив подобным образом все слагаемые в (79), получим (78). Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 1.** Пусть 1) выполнены условия теоремы 11; 2)  $\alpha(\tau, t)$ ,  $y(\tau)$  неотрицательны и не возрастают по  $\tau$ ; 3)  $\beta(\tau, t)$  положительна и не убывает по  $\tau$ ; 4)  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$ ,  $m(t)$ ,  $t - a(t)$  конечны. Тогда задача  $A'$  устойчива на интервале  $[t_0, \infty)$ .

Действительно, тогда из (79), (80) следует, что  $M(\tau, t)$  отрицательна и  $R(\tau, t)$  убывает со скоростью 0 ( $\exp\{\max M(\tau, t)(t - t_0)\}$ ); следовательно,  $\Delta m(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , а  $\delta a(t)$  остается порядка  $\delta y$ ,  $\delta \beta$ ,  $\delta c$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Так как  $a(t_0) = 0$ , то оценка (78) для  $\delta'a$  имеет смысл только при  $t \gg t_0$  (во всяком случае при  $t > 1/\min \alpha y$ ). При  $t$ , близких к  $t_0$ , следует оценивать величину  $\|\delta a\|$ .

3.3. **Континуальные модели.** Континуальную и  $n$ -продуктовую модель удобно рассматривать в виде (2.29), устанавливая для нее результаты, аналогичные случаю двухпродуктовой модели (2.1)—(2.4).

Установим, например, аналог теоремы 10.

**Теорема 12.** Пусть заданы интегрируемые функции  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{m}_2$ ,  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$ ,  $\delta\lambda$ ,  $\delta\mu$ ,  $\delta m_2$ ,  $\delta m_0$ . Тогда с точностью до первых степеней заданных вариаций имеем

$$\delta m = \delta\psi(\tau, t) + \int_{v_0}^v \int_{t_0}^t \tilde{\gamma}(\tau, t, u, v) \delta\psi(\tau, u) d\tau du, \quad v_0 \leq v \leq t,$$

$$\tilde{\gamma} = \sum_{v=0}^{\infty} \tilde{\delta}_{v+1}(\tau, t, u, v), \quad \tilde{\delta}_1 \equiv \tilde{\delta} = \tilde{\alpha}\tilde{\lambda},$$

$$\tilde{\delta}_{v+1} = \int_{\tau}^v \int_{\tau}^t \tilde{\delta}(z, t, w, v) \tilde{\delta}_v(\tau, z, u, w) dz dw, \quad (3.82)$$

$$\delta\psi = \int_0^{v_0} \int_0^{t_0} \tilde{\alpha}\tilde{\lambda}\delta m_0 d\tau du + \int_0^v \int_0^t (\delta\alpha\tilde{\lambda}\tilde{m}_1 + \tilde{\alpha}\delta\lambda\tilde{m}_1 - \tilde{\alpha}\tilde{\lambda}\delta\tilde{m}_2) d\tau du,$$

$$\tilde{m}_1 = \tilde{m} - \tilde{m}_2, \quad \delta m_1 = \delta m - \delta m_2,$$

$$\tilde{m} = \tilde{\varphi}(t, v) + \int_{v_0}^v \int_{t_0}^t \tilde{\gamma}(\tau, t, u, v) \tilde{\varphi}(\tau, u) d\tau du, \quad v_0 \leq v \leq t,$$

$$\tilde{\varphi}(t, v) = \int_0^{v_0} \int_0^{t_0} \tilde{\alpha}\tilde{\lambda}\tilde{m}_0 d\tau - \int_0^v \int_0^t \tilde{\alpha}\tilde{\lambda}\tilde{m}_2 d\tau,$$

$\delta c$ ,  $\delta p$ ,  $\delta G$  находятся путем подстановки в соответствующие им выражения в (2.29)  $\delta m$ ,  $\tilde{m}$ .

**З а м е ч а н и е.** Если дополнительно к (2.29) задано соотношение (см. п. 2.4)

$$f = c + g + p = c + m, \quad (3.83)$$

что с учетом погрешностей запишем в виде

$$\tilde{f} = \tilde{c} + \tilde{g} + \tilde{p} = \tilde{c} + \tilde{m}, \quad (3.84)$$

$$\delta f = \delta c + \delta g + \delta p = \delta c + \delta m,$$

где  $\tilde{f}$ ,  $\delta f$  заданы, то можно доказать аналог теоремы 12 без условия задания  $\delta m_2$ .

## § 4. Исследование границ изменения функций, связанных моделью

4.1. Специальный случай двухпродуктовой модели. Рассмотрим модель (45)—(49) с точки зрения возможных граничных свойств  $c(t)$ , с помощью 1) выбора  $y(\tau)$  при заданных  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$ ,  $p(t)$ ; 2) выбора  $y(t)$  и  $F(t)$  при заданных  $\alpha$ ,  $\beta$ ; 3) выбора  $y(t)$  и  $a(t)$  при заданных  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Случай 1) подробно исследован в [73] (см. также § 2 гл. 4) для задачи максимизации  $I_1 = \int_{t_0}^t c(\tau) d\tau$  с дополнительным ограничением  $a'(t) \geq 0$ . При небольшом  $\Delta T$  максимум достигается при минимально допустимых  $y(\tau)$ , а при достаточно большом  $\Delta T$  и непостоянном  $\beta(\tau, t)$  максимизация  $I_1$  может потребовать больших значений  $y(\tau)$  в начале периода  $\Delta T$  и минимально допустимых  $y(\tau)$  в конце. Кроме того, в п. 2.2 показано, что система уравнений

$$P(t) = \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau, \quad (3.85)$$

$$m(t) = \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau$$

относительно  $m(\tau)$ ,  $a(\tau)$  при довольно широких предположениях разрешима единственным образом, а также указана структура зависимостей  $m(\tau)$  и  $a(\tau)$  от  $y(\tau)$ . Поэтому уравнение

$$c(t) = \int_{a(t)}^t \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau$$

можно рассматривать как нелинейное уравнение относительно  $y(\tau)$  при заданном  $c(t)$ . Это уравнение весьма сложно, тем не менее нетрудно видеть, что при  $m \geq 0$

$$|c(t)| \leq \max_{\tau \in [a, t]} |\beta(\tau, t)| [1 - y(\tau)] |p(t)| \leq \max_{\tau} |\beta(\tau, t)| |p(t)|, \quad (3.86)$$

откуда вытекает, что  $c(t)$  определенным образом ограничена по амплитуде. Аналогично, из (85) и соотношения

$$c'(t) = \int_{a(t)}^t \beta'_t(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau + \beta(t, t) [1 - y(t)] m(t) - \\ - \beta(a, t) [1 - y(a)] m(a) a'$$

следует, что

$$|c'(t)| \leq \max_{\tau} |\beta'_t| |p(t)| + 2 \max_{\tau} |\beta| \max_{\tau} |\alpha| |p(t)|, \quad (3.87)$$

т. е.  $c'(t)$  также определенным образом ограничена по амплитуде,

если  $|\beta'_t|$  существует и ограничена по  $\tau$ . Если  $\beta(\tau, t)$ ,  $m(\tau)$  — неотрицательные функции, то

$$|c(t)| \geq \min_{\tau} \{[\beta(\tau, t)][1 - y(\tau)]\} p(t). \quad (3.88)$$

Из (86) и (87) вытекает следующее ограничение по частоте на  $c(t)$ :

$$\left| \int_{\gamma}^{\delta} c(t) e^{i\omega t} dt \right| = \left| \frac{c(t) e^{i\omega t}}{i\omega} \right|_{\gamma}^{\delta} - \frac{1}{i\omega} \int_{\gamma}^{\delta} c'(t) e^{i\omega t} dt \leq \frac{d}{\omega}, \quad (3.89)$$

где  $d$  не зависит от  $\omega$ . Аналогичным образом могут быть установлены и многие другие свойства  $c(t)$ .

В случае 2) имеем

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t [m(\tau) + c(\tau)] d\tau, \\ m(t) &= \int_a^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau, \\ c(t) &= \int_{a(t)}^t \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.90)$$

что можно трактовать как систему относительно  $c$ ,  $m$ ,  $a$  при заданных  $y$ ,  $F$ .

Из (83) имеем

$$F'(t) = m(t) + c(t).$$

Подставив это значение  $m(t)$  в остальные уравнения (90), получим

$$\begin{aligned} F' - c &= \int_a^t \alpha y (F' - c) d\tau, \\ c &= \int_a^t \beta (1 - y) (F' - c) d\tau. \end{aligned}$$

При заданных  $F$  и  $y$  нетрудно отсюда получить уравнения для  $c$  и  $a$  и, наоборот, при наперед заданном  $c(t)$  эту систему можно рассматривать для отыскания  $F(t)$  и  $y(t)$  ( $0 \leq y \leq 1$ ).

Пусть  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $a(t_1) = t_0$ ,  $t_1 > t_0$ ,  $a(t) < t_0$ ,  $t < t_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} F' - c &= \int_{a(t)}^{t_0} \alpha y_0 (F'_0 - c_0) d\tau + \int_{t_0}^t \alpha y (F' - c) d\tau, \\ c &= \int_{a(t)}^{t_0} \beta (1 - y_0) (F'_0 - c_0) dt + \int_{t_0}^t \beta (1 - y) (F' - c) d\tau, \end{aligned} \quad (3.91)$$

где индексом «0» обозначены известные (в силу предыстории) функции. Обратив в первом уравнении (91) линейный оператор Вольтерра, найдем

$$F' - c = \int_{t_0}^t \delta(\tau, t) \int_{a(\tau)}^{t_0} \alpha(u, \tau) y_0(u) [F'_0(u) - c_0(u)] du d\tau + \\ + \int_{a(\tau)}^{t_0} \alpha y_0 (F'_0 - c_0) d\tau,$$

$$\delta(\tau, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu+1}(\tau, t), \quad \alpha_1(\tau, t) = \alpha(\tau, t) y(\tau),$$

$$\alpha_{\nu+1} = \int_{\tau}^t \alpha(z, t) y(z) \alpha_{\nu}(\tau, z) dz, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

В результате подстановки полученного значения  $F' - c$  во второе уравнение (91) будем иметь

$$F' - \int_{t_0}^t \delta(\tau, t) \int_{a(t)}^{t_0} \alpha y_0 (F'_0 - c_0) du d\tau - \int_{a(t)}^{t_0} \alpha y_0 (F'_0 - c_0) d\tau = \\ = \int_{a(t)}^{t_0} \beta (1 - y_0) [F'_0(\tau) - c_0(\tau)] d\tau + \\ + \int_{t_0}^t \beta (1 - y) \left\{ \int_{t_0}^t \delta(u, \tau) \int_{a(u)}^{t_0} \alpha(v, u) y_0(v) [F'_0(v) - c_0(v)] dv du + \right. \\ \left. + \int_{a(t)}^{t_0} \alpha y_0 (F'_0 - c_0) du \right\} d\tau$$

в качестве уравнения относительно искомого  $a(t)$ .

Пусть, в частности,

$$\alpha y_0 = \beta (1 - y_0).$$

Тогда из (91) имеем

$$c(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [\alpha y - \beta (1 - y)] c(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [\beta (1 - y) - \alpha y] F'(\tau) d\tau + \frac{1}{2} F'(t),$$

откуда

$$c(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \gamma(\tau, t) \left\{ F' + \int_{t_0}^{\tau} [\beta (1 - y) - \alpha y] F'(u) du \right\} d\tau + \\ + \frac{1}{2} \left( F' + \int_{t_0}^t [\beta (1 - y) - \alpha y] F'(\tau) d\tau \right),$$

$$\varphi(\tau, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu+1}(\tau, t), \quad \varphi_1(\tau, t) = \frac{1}{2}[\alpha y - \beta(1-y)],$$

$$\varphi_{\nu+1} = \frac{1}{2} \int_{\tau}^t [\alpha y - \beta(1-y)] \varphi_{\nu}(\tau, z) dz, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим теперь вопрос об отыскании  $F$  и  $y$  при наперед заданном  $c$ , предполагая, что  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $a(t_1) = t_0$ ,  $t_1 > t_0$ . Положим

$$\alpha y_0 m_0 = \varphi(\tau, t), \quad \int_a^{t_0} \varphi d\tau = \Phi(t_0, t) - \Phi(a, t),$$

$$m(t) = F'(t) - c(t), \quad \beta(1-y_0)m_0 = \psi(\tau, t),$$

$$\int_a^{t_0} \psi d\tau = \psi(t_0, t) - \psi(a, t), \quad \psi(a, t) = x(t), \quad a(t) = \psi^{-1}(x, t).$$

Тогда (91) перепишется в виде

$$a(t) = \psi^{-1} \left( -C + \int_{t_0}^t \beta(1-y)m(\tau) d\tau + \psi(t_0, t), t \right), \quad (3.92)$$

$$m(t) = \Phi(t_0, t) - \Phi \left[ \psi^{-1} \left( -C + \int_{t_0}^t \beta(1-y)m d\tau + \psi(t_0, t), t \right), t \right] + \int_{t_0}^t \alpha y m(\tau) d\tau.$$

Из последнего уравнения имеем

$$m(t) = \int_{t_0}^t \delta(\tau, t) \left\{ \Phi(t_0, \tau) - \Phi \left[ \psi^{-1}(-c(\tau) + \psi(t_0, \tau) + \int_{t_0}^{\tau} \beta(1-y)m du, \tau), \tau \right] \right\} d\tau + \Phi(t_0, t) - \Phi \left[ \psi^{-1} \left( \psi(t_0, t) - c(t) + \int_{t_0}^t \beta(1-y)m d\tau, t \right), t \right], \quad (3.93)$$

$$\delta(\tau, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu+1}(\tau, t), \quad \alpha_1(\tau, t) = \alpha(\tau, t) y(\tau),$$

$$\alpha_{\nu+1} = \int_{\tau}^t \alpha(z, t) y(z) \alpha_{\nu}(\tau, z) dz, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Нетрудно видеть, что при условии ограниченности по  $t$  функции

$$\Phi'_{\psi^{-1}} \left[ \psi_z^{-1'} \left( z = -c + \psi(t_0, t) + \int_{t_0}^t \beta(1-y)m d\tau \right), \int_{t_0}^t \beta(\tau, t) d\tau \right]$$

и достаточной малости  $\Delta = \max_t |1-y(t)|$  уравнение (93) будет иметь единственное относительно  $m(t)$ , а значит, и относительно  $F(t)$  решение, которое может быть найдено методом простой итерации. Так как

$$\Phi'_{\psi^{-1}} \equiv \Phi'_a = -\alpha(a, t) y_0(a) m_0(a),$$

то ограниченность  $\Phi'_{\psi^{-1}}$  вытекает из ограниченности  $\alpha, y_0, m_0$ . Функция  $\psi_z^{-1'}$  имеет вид

$$\psi_z^{-1'} = \frac{1}{\psi'_a} = \frac{1}{\beta(a, t) [1-y_0(a)] m_0(a)},$$

$$z = -c + \int_{t_0}^t \beta(1-y)m(\tau) d\tau + \psi(t_0, t).$$

Поэтому функция  $\psi_z^{-1'} \Phi'_{\psi^{-1}}$  будет ограниченной, если функции  $\beta, 1-y_0$  отделены от нуля равномерно по своим аргументам (точнее, если их произведение обладает этим свойством).

Таким образом, при указанных условиях при любом наперед заданном поведении  $c(t)$  могут быть найдены соответствующие реализующие это поведение управляющие воздействия  $y(t)$  и  $F(t)$  ( $0 \leq y \leq 1$ ). Однако на практике  $F(t)$  должно быть подчинено также определенным ограничениям, что в свою очередь наложит определенные ограничения на  $c(t)$ . В этом случае при помощи (91) можно будет определить свойства  $c(t)$ , аналогичные свойствам (72)–(89).

В случае 3) имеем систему

$$m(t) = \int_a^t \alpha(\tau, t) y m d\tau, \tag{3.94}$$

$$c(t) = \int_a^t \beta(\tau, t) (1-y) m d\tau,$$

из которой при любом наперед заданном  $c(t)$  можно найти искомые значения  $y$  и  $a(t)$ . Действительно, найдя  $m$ , как указано в предыдущем случае, искомое  $a$  найдем при помощи первого уравнения в (92).

Рассмотрим случай 3) при дополнительном ограничении

$$F^-(t) \leq F'(t) \leq F^+(t), \quad F'(t) = m(t) + c(t),$$

где  $F^\pm$  — заданные функции. Тогда вместо (94) имеем

$$c(t) = \int_a^t \beta(1-y)m(\tau) d\tau, \quad (3.95)$$

$$m(t) = \int_a^t \alpha y m(\tau) d\tau,$$

$$F^- \leq m + c \leq F^+.$$

Исследуем частный случай:  $\alpha, \beta, y = \text{const}$ . При этом

$$c' = -\beta(1-y_0)m_0(a) \frac{da}{dt} + \beta(1-y)m,$$

$$m' = -\alpha y_0 m_0(a) \frac{da}{dt} + \alpha y m, \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$c(t_0) = \int_{a(t_0)}^{t_0} \beta(1-y_0)m_0 d\tau, \quad m(t_0) = \int_{a(t_0)}^{t_0} \alpha y_0 m_0 d\tau,$$

откуда

$$m = \frac{c' + \beta(1-y_0)m_0(a)a'}{\beta(1-y)},$$

$$\begin{aligned} \frac{c'' + \beta(1-y_0)(m_0(a)a')'}{\beta(1-y)} &= \\ &= -\alpha y_0 m_0(a)a' + \frac{\alpha y}{\beta(1-y)}(c' + \beta(1-y_0)m_0(a)a'), \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$m_0(a)a' = \frac{\alpha y c - c'}{\beta(1-y)} - \frac{\alpha y c_0 - c'_0}{\beta(1-y)} + m_0(a_0)a'_0,$$

$$m = \frac{c'}{\beta(1-y)} + \frac{\alpha y c - c'}{\beta(1-y)} = \frac{\alpha y c}{\beta(1-y)},$$

$$\tilde{F}^- \leq \left[ \frac{\alpha y}{\beta(1-y)} + 1 \right] c \leq \tilde{F}^+.$$

Так как  $0 \leq y \leq 1$ , то из неравенства (94) вытекает ( $\alpha, \beta \geq 0$ ), что

$$0 \leq \frac{(\tilde{F}^- - c)\beta}{(\tilde{F}^- - c)\beta + \alpha c} \leq \frac{(\tilde{F}^+ - c)\beta}{(\tilde{F}^+ - c)\beta + \alpha c} \leq 1$$

или

$$\frac{\tilde{F}^- \beta(1-y)}{\alpha y + \beta(1-y)} \leq c \leq \frac{\tilde{F}^+ \beta(1-y)}{\alpha y + \beta(1-y)}. \quad (3.97)$$

**4.2. Общий случай двухпродуктовой модели.** Воспользуемся известной леммой (см., например, [199]), по существу вытекающей из

неравенства Чаплыгина. Неравенства

$$\int_{t_0}^t f(\tau) x(\tau) d\tau \leq \int_{t_0}^t p(\tau) f(\tau) \exp \left\{ \int_{\tau}^t g(u) f(u) du \right\} d\tau,$$

$$x(t) \leq p(t) + g(t) \int_{t_0}^t p(\tau) f(\tau) \exp \left\{ \int_{\tau}^t g(u) f(u) du \right\} d\tau, \quad (3.98)$$

$$\int_{t_0}^t q(\tau) x(\tau) d\tau \leq \int_{t_0}^t q(\tau) p(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^t g(\tau) q(\tau) \int_{t_0}^{\tau} p(v) f(v) \exp \left\{ \int_v^{\tau} g(u) f(u) du \right\} dv d\tau$$

являются следствиями неравенств

$$x(t) \leq p(t) + g(t) \int_{t_0}^t f(\tau) x(\tau) d\tau, \quad f(t) \geq 0. \quad (3.99)$$

В случае двухпродуктовой модели (2.1) — (2.4), считая  $\alpha$ ,  $\beta$  заданными и

$$|m_1(t)| \leq d(t) |m(t)|, \quad (3.100)$$

где  $d(t)$  — известная функция, легко находим

$$|m(t)| \leq \bar{\alpha}_0(t) \int_0^t d_0(\tau) |m_0(\tau)| d\tau + \bar{\alpha}(t) \int_{t_0}^t d(\tau) |m(\tau)| d\tau, \quad (3.101)$$

$$\bar{\alpha}_0(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t_0} |\alpha(\tau, t)|, \quad \bar{\alpha}(t) = \max_{t_0 \leq \tau \leq t} |\alpha(\tau, t)|.$$

Отсюда в силу (98) и (99)

$$\|m(t)\| \leq \left[ \bar{\alpha}_0(t) + \alpha(t) \int_0^t \bar{\alpha}_0(\tau) d(\tau) \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ \int_{\tau}^t \bar{\alpha}(u) d(u) du \right\} d\tau \right] \int_0^{t_0} d_0(\tau) |m_0(\tau)| d\tau. \quad (3.102)$$

Далее, из (2.1) — (2.4) следует, что

$$c(t) \leq \bar{\beta}_0(t) \int_0^{t_0} [1 + d_0(\tau)] |m_0(\tau)| d\tau + \bar{\beta}(t) \int_{t_0}^t [1 + d(\tau)] |m(\tau)| d\tau,$$

$$\bar{\beta}_0(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t_0} |\beta(\tau, t)|, \quad \bar{\beta}(t) = \max_{t_0 \leq \tau \leq t} |\beta(\tau, t)|,$$

$$|P(t)| \leq \int_0^{t_0} (2d_0(\tau) + 1) |m_0(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t [2d(\tau) + 1] |m(\tau)| d\tau.$$

Поэтому в силу (102)

$$\begin{aligned}
 |c(t)| \leq & \bar{\beta}_0(t) \int_0^{t_0} [1 + d_0(\tau)] |m_0(\tau)| d\tau + \left[ \bar{\beta}(t) \int_{t_0}^t [1 + d(\tau)] \bar{\alpha}_0(\tau) d\tau + \right. \\
 & \left. + \bar{\beta}(t) \int_{t_0}^t [1 + d(\tau)] \tilde{\alpha}(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \bar{\alpha}_0(v) |d(v)| \exp \left\{ \int_v^{\tau} \bar{\alpha}(u) d(u) du \right\} dv d\tau \right] \times \\
 & \times \int_0^{t_0} d_0(\tau) |m_0(\tau)| d\tau,
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
 |P(t)| \leq & \int_{t_0}^t [2d(\tau) + 1] \bar{\alpha}_0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t [2d(\tau) + 1] \bar{\alpha}(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \bar{\alpha}_0(v) d(v) \times \\
 & \times \exp \left\{ \int_v^{\tau} \bar{\alpha}(u) d(u) du \right\} dv d\tau \int_0^{t_0} d_0(\tau) |m_0(\tau)| d\tau.
 \end{aligned}$$

В частном случае, когда  $0 \leq d \leq 1$ , найдем более простые оценки:

$$\begin{aligned}
 |m(t)| \leq & \left[ \bar{\alpha}_0(t) + \alpha(t) \int_{t_0}^t \bar{\alpha}_0(\tau) \exp \left\{ \int_{\tau}^t \bar{\alpha}(u) du \right\} d\tau \right] \int_0^{t_0} |m_0(\tau)| d\tau \leq \\
 & \leq \left[ \bar{\alpha}_0(t) + \bar{\alpha}(t) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \bar{\alpha}(u) du \right\} \int_{t_0}^t \bar{\alpha}_0(\tau) d\tau \right] \int_0^{t_0} |m_0(\tau)| d\tau,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |c(t)| \leq & 2 \left[ \bar{\beta}_0(t) + \beta(t) \int_{t_0}^t \left[ \bar{\alpha}_0(\tau) + \alpha(\tau) \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \int_{t_0}^{\tau} \bar{\alpha}_0(v) \exp \left\{ \int_v^{\tau} \bar{\alpha}(u) du \right\} dv \right] d\tau \right] \int_0^{t_0} |m_0(\tau)| d\tau,
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

$$\begin{aligned}
 |P(t)| \leq & \left[ 1 + \int_{t_0}^t \left[ \bar{\alpha}_0(\tau) + \bar{\alpha}(\tau) \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \int_{t_0}^{\tau} \bar{\alpha}_0(v) \exp \left\{ \int_v^{\tau} \bar{\alpha}(u) du \right\} d\bar{v} \right] d\tau \right] \int_0^{t_0} |m_0(\tau)| d\tau.
 \end{aligned}$$

**4.3. Общий случай модели.** Установим неравенства, аналогичные (98), (99), в случае модели (2.29). Основную роль здесь играет следующее утверждение [260]. Неравенства

$$\int_{t_0}^v \int_{t_0}^t x(\tau, u) d\tau du \leq \int_{t_0}^v \int_{t_0}^t p(\tau, u) \exp \left\{ \int_u^v \int_{\tau}^t g(\tau_1, u_1) d\tau_1 du_1 \right\} d\tau du, \tag{3.105}$$

$$x(v, t) \leq p(v, t) + g(v, t) \int_{t_0}^v \int_{t_0}^t p(\tau, u) \exp \left\{ \int_u^v \int_\tau^t g(\tau_1, u_1) d\tau_1 du_1 \right\} d\tau du$$

являются следствиями неравенств

$$x(v, t) \leq p(v, t) + g(v, t) \int_{t_0}^v \int_{t_0}^t x(\tau, u) d\tau du, \quad p, g \geq 0. \quad (3.106)$$

Докажем это. Рассмотрим двумерное уравнение Вольтерра

$$x^+(v, t) = p(v, t) + g(v, t) \int_{t_0}^v \int_{t_0}^t x^+(\tau, u) d\tau du.$$

Ясно, что  $x(v, t) \leq x^+(v, t)$ . Но

$$x^+(v, t) = p(v, t) + \int_{t_0}^v \int_{t_0}^t q(\tau, t, u, v) p(\tau, u) d\tau du,$$

$$q(\tau, t, u, v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_{\nu+1}(\tau, t, u, v), \quad \Phi_1(\tau, t, u, v) = g(v, t),$$

$$\Phi_{\nu+1}(\tau, t, u, v) = \int_u^v \int_\tau^t g(v, t) \Phi_\nu(\tau, z, u, w) dz dw.$$

Поэтому

$$q(\tau, t, u, v) = g(v, t) \left[ 1 + \int_u^v \int_\tau^t g(w, z) dz dw + \right. \\ \left. + \int_u^v \int_\tau^t g(w, z) \int_u^w \int_\tau^z g(w_1, z_1) dz_1 dw_1 dz dw + \right. \\ \left. + \int_u^v \int_\tau^t g(w, z) \int_u^w \int_\tau^z g(w_1, z_1) \int_u^{w_1} \int_\tau^{z_1} g(w_2, z_2) dz_2 dw_2 dz_1 dw_1 dz dw + \dots \right].$$

Далее, положив  $f(v, t) = \int_u^v \int_\tau^t g(w, z) dz dw$ , найдем

$$\int_u^v \int_\tau^t g(w, z) \int_u^w \int_\tau^z g(w_1, z_1) dz_1 dw_1 dz dw = \int_u^v \int_\tau^t f(w, z) \frac{\partial^2 f(w, z)}{\partial w \partial z} dz dw = \\ = \int_u^v \left( \int_\tau^t f(w, z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f(w, z)}{\partial w} \right) dz \right) dw =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_u^v \left[ f(\omega, z) \frac{\partial f(\omega, z)}{\partial \omega} \Big|_{z=\tau}^{z=t} - \int_{\tau}^t \frac{\partial f(\omega, z)}{\partial \omega} \frac{\partial f(\omega, z)}{\partial z} dz \right] d\omega = \\
&= \frac{f^2(v, t)}{2} - \int_u^v \int_{\tau}^t \left( \int_u^{\omega} g(x, z) dx \right) \left( \int_{\tau}^z g(\omega, y) dy \right) dz d\omega \leq \frac{f^2(v, t)}{2}, \\
&\int_u^v \int_{\tau}^t g(\omega, z) \left( \int_u^{\omega} \int_{\tau}^z g(\omega_1, z_1) \int_u^{\omega_1} \int_{\tau}^{z_1} g(\omega_2, z_2) dz_2 d\omega_2 dz_1 d\omega_1 \right) dz d\omega \leq \\
&\leq \int_u^v \int_{\tau}^t g(\omega, z) \frac{f^2(\omega, z)}{2} dz d\omega = \int_u^v \int_{\tau}^t \frac{f^2(\omega, z)}{2} \frac{\partial^2 f(\omega, z)}{\partial \omega \partial z} dz d\omega = \\
&= \int_u^v \left[ \frac{f^2(\omega, t)}{2} \frac{\partial f(\omega, t)}{\partial \omega} - \int_{\tau}^t f(\omega, z) \frac{\partial f(\omega, t)}{\partial \omega} \frac{\partial f(\omega, z)}{\partial z} dz \right] d\omega \leq \frac{f^3(v, t)}{3!}.
\end{aligned}$$

Это значит, что

$$\begin{aligned}
g(v, t, u, v) &\leq g(v, t) \left[ 1 + f(v, t) + \frac{f^2(v, t)}{2} + \frac{f^3(v, t)}{3!} + \dots \right] = \\
&= g(v, t) \exp \left\{ \int_u^v \int_{\tau}^t g(\omega, z) dz d\omega \right\}, \\
x^+(v, t) &\leq p(v, t) + g(v, t) \int_{t_0}^v \int_{t_0}^t p(\tau, u) \exp \left\{ \int_u^v \int_{\tau}^t g(\omega, z) dz d\omega \right\} d\tau du.
\end{aligned}$$

В случае модели (2.29), считая  $\alpha, \beta$  заданными и

$$|m_1| \leq \bar{d} |m|, \quad (3.107)$$

где  $\bar{d}$  — известная константа, легко находим

$$|m(t, v)| \leq \bar{\alpha}_0(t, v) \bar{d} \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} m_0(\tau, u) d\tau du + \bar{\alpha}(t, v) \bar{d} \int_{t_0}^v \int_{t_0}^t |m(\tau, u)| d\tau du, \quad (3.108)$$

$$\bar{\alpha}_0(t, v) \geq \max_{0 \leq \tau, u \leq t_0} |\alpha(\tau, t, u, v)|,$$

$$\bar{\alpha}(t, v) \geq \max_{\substack{t_0 \leq \tau \leq t \\ t_0 \leq u \leq v}} |\alpha(\tau, t, u, v)|.$$

Отсюда в силу (105) и (106) аналогично (104) получаем следующий результат.

**Теорема 13.** При условиях (107), (108) справедливы следующие ограничения на  $m$ ,  $c$ ,  $P$ :

$$|m(t, v)| \leq \bar{d} \left[ \bar{\alpha}_0(t, v) + \bar{\alpha}(t, v) \int_{v_0}^v \int_{t_0}^t \bar{\alpha}_0(\tau, u) \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ \int_u^v \int_{\tau}^t \bar{\alpha}(\tau_1, u_1) d\tau_1 du_1 \right\} d\tau du \right] \int_0^{v_0} \int_0^{t_0} m_0(\tau) d\tau du, \\ |c(t, v)| \leq 2\bar{d} \left[ \bar{\beta}_0(t, v) \int_0^{v_0} \int_0^{t_0} m_0(\tau, u) d\tau du + \right. \\ \left. + \bar{\beta}(t, v) \int_{v_0}^v \int_{t_0}^t m(\tau, u) d\tau du \right], \quad (3.109)$$

$$\bar{\beta}_0(t, v) \geq \max_{\substack{0 \leq \tau \leq t_0 \\ 0 \leq u \leq v_0}} |\beta(\tau, t, u, v)|,$$

$$\bar{\beta}(t, v) \geq \max_{\substack{t_0 \leq \tau \leq t \\ v_0 \leq u \leq v}} |\beta(\tau, t, u, v)|,$$

$$P(t, v) \leq 3\bar{d} \left[ \int_0^{v_0} \int_0^{t_0} |m_0(\tau, u)| d\tau du + \int_{v_0}^v \int_{t_0}^t |m(\tau, u)| d\tau du \right].$$

## § 5. Выявление колебательных и волновых процессов

**5.1. Вынужденные колебания.** Положим  $\alpha(\tau, t) = \alpha$ ,  $\beta(\tau, t) = \beta$ ,  $y(t) = y_0$  ( $\alpha, \beta, y_0 = \text{const} \neq 0$ ). Тогда модель (41), (42) примет вид

$$m(t) = \frac{\alpha y_0}{\alpha y_0 + \beta(1 - y_0)} f(t), \quad c(t) = \frac{\beta(1 - y_0)}{\alpha y_0 + \beta(1 - y_0)} f(t), \quad (3.110)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{m(t) - p(t)}{m(a(t))}, \quad P(t) = \frac{f(t)}{\alpha y_0 + \beta(1 - y_0)},$$

$$p = m - g, \quad \dot{f} = c + m.$$

Вынужденные колебания здесь определяются поведением  $f(t)$ : если  $f(t)$  — периодическая функция, то  $m(t)$ ,  $c(t)$  и  $P(t)$  являются периодическими с тем же периодом. Другой причиной вынужденных колебаний  $m$ ,  $c$ ,  $P$  может быть колебательный характер интенсивностей  $\lambda$  и  $\mu$  по переменной  $t$ .

Остановимся более подробно на трехпродуктовой модели (65). Если внешние функции: субстрат  $F$  и нагрузка  $C_1$  будут колебательными, то колебательными будут и функции  $M = F - C_1$ ,  $m = M'$ ,  $P, G = M - P$ , а значит, и  $\lambda, \mu_1, \mu_2$  при монотонных  $\alpha, \beta_1, \beta_2$ . Если

все же необходимо, чтобы функция  $M$  была стабильной, то колебания функций  $F$ ,  $C_1$  должны погашать друг друга, так как  $M = F - C_1$ . В этом случае  $m = M'$ ,  $G$ ,  $P$ ,  $\lambda$ ,  $\mu_2$  могут быть стабильными. Если, наоборот, по некоторым причинам  $M$  стала колебательной функцией, а  $C_1$  — стабильной, то обязательно  $F$  — колебательная и  $G$  или  $P$  — колебательные.

5.2. Собственные детерминированные колебания.. Будем считать снова  $\alpha$ ,  $\beta = \text{const} \neq 0$ . Зададим функцию  $a(t)$  в виде

$$a(t) = t - a_1, \quad a_1 = \text{const} > 0. \quad (3.111)$$

Тогда из (41), (42) получим

$$\begin{aligned} m'(t) &= \alpha [ym|_t - ym|_{t-a_1}], \quad m + c = f, \\ c'(t) &= \beta [(1-y)m|_t - (1-y)m|_{t-a_1}], \end{aligned}$$

откуда

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)m' - \beta[m(t) - m(t - a_1)] = -f', \quad c = f + m. \quad (3.112)$$

Если  $\beta = \alpha$ , то

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^k f'(t - ia_1) + m_0[t - (k+1)a_1], \\ t &\in [t_0 + ka_1, t_0 + (k+1)a_1], \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.113)$$

Если  $\beta \neq \alpha$ , то

$$\begin{aligned} m(t) &\equiv m_{k+1}(t) = \\ &= \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} \int_{t_0 + ka_1}^t \exp\left\{-\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}(t - \tau)\right\} \left[\frac{1}{\beta} f'(\tau) + m_k(\tau - a_1)\right] d\tau + \\ &+ m_k(t_0 + ka_1) \exp\left\{-\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}(t - t_0) - ka_1\right\}, \\ t &\in [t_0 + ka_1, t_0 + (k+1)a_1], \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.114)$$

Полагая в (112) — (114)  $f' = 0$ , получим

$$m(t) = m_0[t - (k+1)a_1], \quad t \in [t_0 + ka_1, t_0 + (k+1)a_1], \quad (3.113')$$

$$\begin{aligned} m(t) &\equiv m_{k+1}(t) = \\ &= \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} \int_{t_0 + ka_1}^t \exp\left\{-\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}(t - \tau)\right\} m_k(\tau - a_1) d\tau + \\ &+ m_k(t_0 + ka_1) \exp\left\{-\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}(t - t_0) - ka_1\right\}, \\ t &\in [t_0 + ka_1, t_0 + (k+1)a_1], \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.114')$$

Следовательно, если  $m_0$  будет колебательной функцией, то и  $m(t)$  будет колебательной.

Положив

$$f(t) = d_1, \quad \left| \frac{\alpha - \beta}{\alpha \beta a_1} \right| \ll 1 \quad (3.115)$$

и отыскав решение уравнений (112) в виде  $d_1 e^{(\delta + i\omega)t}$ , где  $d_1$  — некоторая константа, увидим, что возможны слабо затухающие собственные колебания  $m(t)$  и  $c(t)$  со значениями  $\delta$  и  $\omega$  в первом приближении равными [228]

$$\delta_k = -2 \left( 2\pi k \frac{\alpha - \beta}{\alpha \beta a_1} \right)^2, \quad (3.116)$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{a_1} \left( 1 + \frac{1}{\alpha a_1} - \frac{1}{\beta a_1} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Если

$$\alpha(\tau, t) = \alpha e^{\delta_{k_1}(t-\tau)} \cos \omega_1(t - \tau), \quad (3.117)$$

$$\beta(\tau, t) = \beta e^{\delta_{k_2}(t-\tau)} \cos \omega_2(t - \tau),$$

$$F(t) = 0,$$

то  $m(t)$  и  $c(t)$  будут решениями дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом, среди которых имеются периодические функции [180].

Положим в (112)

$$f(t) = f_0 + \mu \sin \nu(t - t_0), \quad \nu \sim \omega_k. \quad (3.118)$$

Тогда при  $\left| \frac{\alpha - \beta}{\alpha \beta a_1} \right| \ll 1$

$$m(t) \sim \left( \frac{\alpha \beta a_1}{\beta - \alpha} \right)^2 \frac{\mu}{2\beta(\pi^2 k^2 + 1)} \left( \cos \nu t + \frac{1}{\pi k} \sin \nu t \right), \quad (3.119)$$

что указывает на наличие резонанса.

Положим еще в модели (65)  $c_1(t) = f(t) = 0$  ( $t \geq t_0$ ). Тогда  $m(t) = 0$  ( $t \geq t_0$ ) и

$$m(t) = \int_0^{t_0} \alpha \lambda (m_0 - m_{10} - m_{20}) d\tau, \quad 0 = \int_0^t \beta_1 \mu_1 m_{10} d\tau, \quad (3.120)$$

$$g(t) = \int_0^{t_0} \beta_2 \mu_2 m_{20} d\tau,$$

$$P(t) = \int_0^{t_0} [\lambda (m_0 - m_{10} - m_{20}) + \mu_1 m_{10} + \mu_2 m_{20}] d\tau,$$

$$p'(t) = p(t) = -g(t).$$

Одно из решений (120) будет  $\lambda = 0$ ,  $\mu_1 = 0$  и  $\mu_2$  — решение уравнения

$$\int_0^{t_0} \frac{\partial \mu_2(\tau, t)}{\partial t} m_{20}(\tau) d\tau = - \int_0^{t_0} \beta_2(\tau, t) \mu_2(\tau, t) m_{20}(\tau) d\tau. \quad (3.121)$$

Положим  $\mu_2(\tau, t) = \mu_2(t - \tau)$  ( $t \geq t_0$ ). В таком случае (121) перепишется в виде

$$\begin{aligned} -\mu_2(t - t_0) m_{20}(t_0) + \mu_2(t) m_{20}(0) = \\ = \int_0^{t_0} \hat{\beta}_2(\tau, t) \mu_2(t - \tau) d\tau = \int_{t-t_0}^t \hat{\beta}_2(t - \tau, t) \mu_2(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$\hat{\beta} = -\beta m_{20} - m'_{20}.$$

Если  $[\hat{\beta}_2(t - \tau, t)]_i^{(s)} = 0$ , то (122) сводится к однородному дифференциальному уравнению  $s$ -го порядка с запаздывающим аргументом, которое может иметь нетривиальные колебательные решения. В силу однородности этого уравнения всегда можно удовлетворить необходимому условию  $0 \leq \mu_2 \leq 1$ .

**5.3. Колебательные режимы в случае нелинейного вида функций  $\alpha$ ,  $\beta$ .** В данном пункте изучается влияние вида функций  $\alpha(m, c, M, C, \tau, t)$ ,  $\beta(m, c, M, C, \tau, t)$  на поведение решений модели (2.9). Рассмотрены случаи сведения модели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (о. д. у.). Показано, что при наличии даже «слабых» нелинейностей в функциях  $\alpha$ ,  $\beta$  возможны разнообразные режимы поведения модели.

1°. В случае трехпродуктовой модели  $(m_1, m_2, c)$ , положив

$$a(t) \equiv 0, \quad y_{ij} = \text{const},$$

$$\alpha_{11} = -1, \quad \alpha_{12} = 1, \quad \alpha_{21} = M_1 M_2, \quad \alpha_{22} = 1 - \frac{M_1}{M_2},$$

придем к следующему уравнению:

$$\dot{M}_1 = y_{21} M_1^2 \dot{M}_1 + y_{11} y_{21} M_1^3 + (y_{22} - y_{11}) \dot{M}_1 + y_{22} (y_{11} - y_{12}) M_1. \quad (3.123)$$

При  $y_{22} = y_{12} = y_{11}$  из (123) получается известное уравнение, возникающее при исследовании бифуркаций двухпараметрических семейств векторных полей на плоскости. При изменении  $y_{12}$  и  $y_{22}$  в зависимости от соотношения  $\frac{y_{11} - y_{12}}{y_{22} - y_{11}}$  на плоскости  $(M_1, \dot{M}_1)$  возникают различные типы фазовых портретов, содержащие, в частности, седловые точки, устойчивые и неустойчивые узлы, фокусы и предельные циклы. Перестройка фазовых портретов в указанных случаях приведена в [9].

2°. Положим в двухпродуктовой модели (2.9)

$$\begin{aligned} a(t) &\equiv 0, & y(t) &\equiv y \equiv \text{const}, \\ \beta(\tau, t, M, C) &= A_1 + A_2 M(t) + A_3 C(t), \\ \alpha(\tau, t, M, C) &= A_4 + A_5 M(t) + A_6 C(t). \end{aligned} \quad (3.124)$$

Из условия положительности  $\alpha$  и  $\beta$  вытекает, что константы  $A_1 > 0$ ,  $A_4 > 0$ . Константы  $A_2, A_3, A_5, A_6$  имеют в общем случае произвольные знаки и определяют вид зависимостей  $\alpha$  и  $\beta$  от  $M$  и  $C$ .

Выражения (124) для  $\alpha$  и  $\beta$  учитывают нелинейности в первом приближении, что во многих случаях является достаточным для исследования их влияния и упрощает математические выкладки. Выбор зависимостей функций  $\alpha$  и  $\beta$  от  $M(t)$  и  $C(t)$  (либо от  $m(\tau)$ ,  $c(\tau)$ ) в (124) позволяет оставаться в рамках о.д.у. на плоскости.

При выполнении условий (124) двухпродуктовая модель (2.9) сводится к следующей системе о.д.у. второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= y(A_4 + A_5 M + A_6 C) M, \\ \dot{C} &= (1 - y)(A_1 + A_2 M + A_3 C) M. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Найдем стационарные точки системы (125). Нетрудно видеть, что любая точка оси  $M = 0$  является стационарной. В содержательной постановке модели  $M > 0$ ,  $C \geq 0$ , поэтому эти точки соответствуют прекращению функционирования системы («смерти») и являются тривиальными. Система (125) также имеет нетривиальную стационарную точку:

$$\tilde{M} = \frac{A_1 A_6 - A_4 A_3}{A_3 A_5 - A_2 A_6}, \quad \tilde{C} = \frac{A_2 A_4 - A_1 A_5}{A_3 A_5 - A_2 A_6}. \quad (3.126)$$

Заметим, что если в модели не учитывать зависимости  $\alpha$  и  $\beta$  от  $M$  и  $C$ , то стационарная точка (126) отсутствует и система уравнений имеет лишь тривиальные стационарные точки ( $M = 0$ ).

3°. Рассмотрим случай, когда производительности  $\alpha(M, C)$ ,  $\beta(M, C)$  убывают по  $M$  и возрастают по  $C$  (такое поведение характерно для биологических систем [77, 89, 228]). Пусть

$$\alpha(M, C) = \alpha - \hat{A}_1 M + \hat{A}_2 C, \quad (3.127)$$

$$\beta(M, C) = \beta - \hat{B}_1 M + \hat{B}_2 C,$$

где  $\alpha, \beta, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_2$  — положительные константы. При этом система уравнений двухпродуктовой модели

$$\dot{M} = \alpha y M - \hat{A}_1 y M^2 + \hat{A}_2 y M C, \quad (3.128)$$

$$\dot{C} = \beta(1 - y) M + \hat{B}_1(1 - y) M^2 + \hat{B}_2(1 - y) M C$$

имеет нетривиальную особую точку:

$$\tilde{M} = \frac{\beta \hat{B}_2 - \alpha \hat{A}_2}{\hat{A}_2 \hat{B}_1 - \hat{A}_1 \hat{B}_2}, \quad \tilde{C} = \frac{\beta \hat{B}_1 - \alpha \hat{A}_1}{\hat{A}_2 \hat{B}_1 - \hat{A}_1 \hat{B}_2}, \quad (3.129)$$

которая в силу результатов 2° может иметь положительные координаты в плоскости  $(M, C)$ . Условия положительности  $\tilde{M}$  и  $\tilde{C}$  имеют вид

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\hat{A}_2}{\hat{B}_2} > \frac{\hat{A}_1}{\hat{B}_1} \quad (3.130)$$

или

$$\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\hat{A}_2}{\hat{B}_2} < \frac{\hat{A}_1}{\hat{B}_1}. \quad (3.131)$$

Используя методы качественной теории динамических систем на плоскости [6, 9], получим следующую картину качественного поведения решений системы (128) при  $\Delta > 0$  и различных значениях параметра  $y$ :

- 1)  $0 < y < y_1$ ,  $(\tilde{M}, \tilde{C})$  — неустойчивый узел;
- 2)  $y = y_1$ ,  $(\tilde{M}, \tilde{C})$  — неустойчивый вырожденный узел;
- 3)  $y_1 < y < y_{кр} = \frac{\hat{B}_2}{\hat{A}_1 + \hat{B}_2}$ ,  $(\tilde{M}, \tilde{C})$  — неустойчивый фокус внутри устойчивого предельного цикла;
- 4)  $y = y_{кр}$ ,  $(\tilde{M}, \tilde{C})$  — устойчивый сложный фокус кратности 2;
- 5)  $y_{кр} < y < y_2$ ,  $(\tilde{M}, \tilde{C})$  — устойчивый фокус (предельных циклов нет);
- 6)  $y = y_2$ ,  $(\tilde{M}, \tilde{C})$  — устойчивый вырожденный узел;
- 7)  $y_2 < y < 1$ ,  $(\tilde{M}, \tilde{C})$  — устойчивый узел.

Здесь

$$y_{1,2} = \frac{\hat{B}_2^2 - \hat{A}_1 \hat{B}_2 + 2\hat{A}_2 \hat{B}_1 \pm \sqrt{2\hat{B}_2^2 B + 4\hat{A}_2 \hat{B}_1 (\hat{A}_2 \hat{B}_1 - \hat{A}_1 \hat{B}_2)}}{(\hat{B}_2 - \hat{A}_1)^2 + 4\hat{A}_2 \hat{B}_1},$$

$$B = (\hat{B}_2 - \hat{A}_1)^2 + 4\hat{A}_2 \hat{B}_1.$$

Перестройка фазовых портретов системы (128) при изменении  $y$  от 0 до 1 приведена на рис. 3.1.

5.4. Квазистохастические колебания. 1°. Покажем возможность сведения уравнений (41) к уравнениям типа [305]

$$\dot{x} = \sigma x + \sigma y,$$

$$\dot{y} = rx - y - xz,$$

$$z = -bz + xy,$$

где  $\sigma$ ,  $r$ ,  $b$  — параметры. Если взять, например,  $b = 8/3$ ,  $\sigma = 10$ ,  $r$  (аналог числа Рейнольдса) изменять в диапазоне  $14 \div 48,5$ , то, как показано в [11], получаются весьма разнообразные, в том числе квазистохастические колебательные, решения.

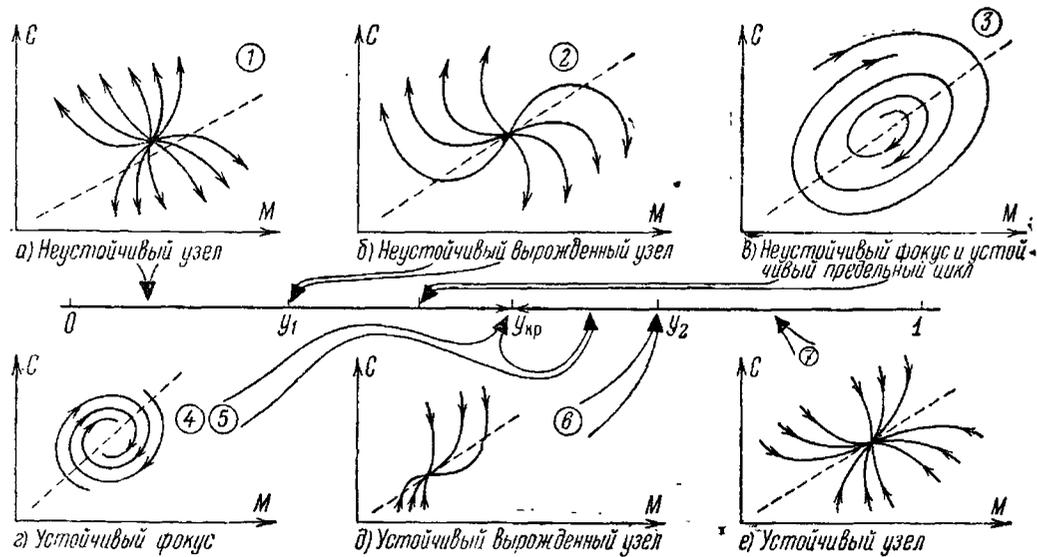


Рис. 3.1.

Исключив  $y$  из первого уравнения в (1.14), найдем

$$\ddot{x} = (\sigma - 1) \dot{x} + \sigma(r - 1)x - \sigma xz, \quad (3.132)$$

$$\dot{z} = -bz + \frac{xx}{\sigma} - x^2.$$

С другой стороны, пусть  $\alpha y$ ,  $\beta(1 - y)$  зависят лишь от  $t$ . Тогда из (41) вытекает, что

$$m(t) = \alpha y P(t), \quad (3.133)$$

$$c(t) = \beta(1 - y) P(t).$$

Положив в (133)

$$\alpha y = \frac{(\alpha y P)_0 + \int_{t_0}^t [(\sigma - 1)m(\tau) + \sigma(r - 1)M(\tau) - \sigma M(\tau)C(\tau)] d\tau}{P(t)}, \quad (3.134)$$

$$\beta(1 - y) = \frac{-bC + mM(t)/\sigma - M^2(t)}{P(t)},$$

придем к системе, равносильной (132) ( $M = x$ ,  $C = z$ ).

Заметим, что хотя указанное сведение представляется весьма искусственным, оно в теории рассматриваемого класса моделей имеет определенный смысл. Действительно, искомыми исходными данными моделей обычно являются функции эффективностей функционирования типа  $\alpha$ ,  $\beta$ , которые в общем случае могут быть произволь-

ными. Поэтому представляет интерес рассмотрение ряда частных моделей этих функций.

2°. Рассмотрим случай, когда

$$\begin{aligned} \alpha(m(\tau), \tau, t) &= 4(1 - m(\tau)) \delta(t - \tau - d), \\ d < t - a(t), \quad y(\tau) &\equiv y, \end{aligned} \quad (3.135)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Подставив (135) в уравнение (41), получим широко известное разностное уравнение

$$\begin{aligned} m(t) &= \hat{a}m(t-d)[1 - m(t-d)], \\ \hat{a} &= 4y, \end{aligned} \quad (3.136)$$

изучению свойств которого посвящены многие работы [216]. Установлено (см., например, [270] и др.), что при возрастании  $y$  от 0 до 1 у отображения  $m \rightarrow 4ym(1 - m)$ , задаваемого уравнением (136), последовательно возникают устойчивые предельные циклы (на плоскости  $m(t-d)$ ,  $m(t)$ ) в порядке, указанном в [271]. Существует также счетное множество значений параметра  $y \in (0, 1)$  (таким значением является, например,  $y = 0,919, \dots, 0,892$ ), при которых у этого отображения нет устойчивых предельных циклов, но есть так называемые *перемешивающие (странные) аттракторы* — притягивающие множества, состоящие из конечного числа интервалов [270]. При этом условии в уравнении (136) возникает стохастический режим — почти все его решения совершают колебания, приобретающие с ростом  $t$  хаотический характер.

3°. Если в трехпродуктовой модели  $(m_1, m_2, c)$  положить

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \bar{\alpha}_{ij}(m(\tau), \tau, t) \delta(t - \tau - d), \quad d = \text{const} > 0, \\ \bar{\alpha}_{11} &= 4[1 - m_2(\tau)], \\ \bar{\alpha}_{21} &= c \equiv \text{const}, \quad \bar{\alpha}_{12} = \bar{\alpha}_{22} \equiv 0, \\ y_{ij} &= \text{const}, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.137)$$

то приходим к разностному уравнению второго порядка:

$$m(t) = am(t-d)[1 - m(t-2d)], \quad a = 4y_{11}. \quad (3.138)$$

В [216] показано, что свойства уравнения (138) близки к свойствам уравнения (136), а именно, с ростом значения  $a$  в (138) появляются колебательные режимы, аналогичные описанным для (136).

Уравнение (138) получается также, если в двухпродуктовой модели имеем

$$\begin{aligned} \alpha(c(\tau), \tau, t) y(\tau) &= a_1[1 - c(\tau)] \delta(t - \tau - d), \\ [1 - y(\tau)] \beta(\tau, t) &= a_2 \delta(t - \tau - d). \end{aligned} \quad (3.139)$$

Этот случай можно интерпретировать, например, как ингибирование биологического сообщества продуктами его жизнедеятельности.

4°. Рассмотрим еще один случай трехпродуктовой динамической модели, который играет важную роль в приложениях. Положим

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= E_{11} [1 - m(\tau)] \delta(t - \tau - d), \\ \alpha_{12} &= E_{12} \delta(t - \tau - d), \\ \alpha_{21} &= E_{21} \delta(t - \tau - d), \\ \alpha_{22} &\equiv 0, \quad E_{ij}, y_{ij} = \text{const}, \quad i, j = 1, 2.\end{aligned}\tag{3.140}$$

Получим разностное уравнение второго порядка относительно  $x(t) = m_1(t)$ :

$$x(t) = \hat{a}x(t-d)[1 - x(t-d)] + \kappa x(t-2d) \equiv F(x, x),\tag{3.141}$$

$$\hat{a} = E_{11}y_{11}, \quad \kappa = E_{12}E_{21}y_{21}y_{11}.$$

Уравнение (141) при небольших  $\kappa$  можно рассматривать как возмущение уравнения (136). Поэтому можно предположить, что поведение их решений аналогично. Действительно, можно аналитически показать, что роль параметра  $\hat{a}$  в (136) играет величина  $l = \hat{a}/(1 - \kappa)$  в (4.7). Уравнение (161) при  $l \in (0, 2)$  не имеет колебательных решений; при  $l \in (2, 4)$  допускает колебания периода  $d$  (относительно особой точки  $\bar{x} = 1 - e^{-1}$ ): устойчивые (затухающие) при  $l \in (2, 3)$ , неустойчивые при  $l \in (3, 4)$ ; при  $l \in (3, 4)$  у отображения  $x \rightarrow F(x, x)$  есть цикл периода 2: притягивающий при  $l \in (3, 1 + \sqrt{6})$  и отталкивающий при  $l \in (1 + \sqrt{6}, 4)$ .

Определение значений параметра  $l$ , при которых уравнение (141) имеет колебательные решения более высоких периодов, затруднено тем обстоятельством, что для их определения получаются рекуррентные системы нелинейных алгебраических уравнений, а не одно уравнение, как для уравнения (136).

Численные исследования (141) на ЭВМ подтверждают наличие циклов периодов 4 и 8. Вычисления производились для значений  $\kappa = 0,01$  и  $\kappa = 0,1$ ; при этом результаты при одинаковых значениях параметра  $l = \hat{a}/(1 - \kappa)$  совпадают.

В табл. 3.1\*) приведены корни системы уравнений, определяющей цикл периода  $4d$  при  $l \in (1 + \sqrt{6}, 4]$  ( $x^1$  и  $x^5$  соответствуют состояниям равновесия  $\bar{x} = 0$  и  $\bar{x} = 1 - e^{-1}$ ;  $x^3$  и  $x^7$  — циклу периода  $2d$ ;  $x^2, x^4, x^6, x^8$  — циклу периода  $4d$ ).

Таким образом, на ряде примеров показано, что при заданной функции  $\alpha$  уравнения (2.9) выбором функций  $y, a$  можно добиться возникновения, исчезновения, затухания и нарастания колебаний, установления периодических движений, кратного и плавного (вы-

\*) При получении результатов табл. 3.1 помощь авторам оказали М. Д. Бабич и Л. Б. Шевчук (см. [16]).

бором  $a(t)$ ) увеличения их периодов, а также возникновения квазистохастических режимов. Принимая в первом уравнении (2.9) последовательно  $\alpha = M(t), M^2(t), M^3(t), M^4(t)$  и  $a(t) = 0, y \neq 0$ , получим также простейшие случаи катастроф в окрестности  $M_0 = 0$ : соответственно «складки», «сборки», «ласточкин хвост», «бабочки».

Таблица 3.1

$t \in (1 + \sqrt{6}, 4)$	$x^1$	$x^2$	$x^3$	$x^4$
$1 + \sqrt{6}, \approx 3,4495$	0,0	0,456776	0,456776	0,456776
3,5192	0,0	0,418516	0,439960	0,465770
3,6192	0,0	0,360866	0,418344	0,530481
3,9192	0,0	0,297680	0,366844	0,611748
4	0,0	0,287542	0,356072	0,625815

$t \in (1 + \sqrt{6}, 4)$	$x^5$	$x^6$	$x^7$	$x^8$
$1 + \sqrt{6}, \approx 3,4495$	0,704245	0,838979	0,838979	0,838979
3,5192	0,710102	0,839279	0,849938	0,858521
3,6192	0,718191	0,817771	0,863485	0,884488
3,9192	0,739958	0,802867	0,893199	0,914465
4	0,744949	0,802059	0,898978	0,919295

5.5. Солитонные решения. 1°. Рассмотрим континуальную модель (2.25) и покажем, что из нее можно вывести, например, уравнение Кортевега — де Вриса (КдВ)

$$\frac{\partial M(t, v)}{\partial t} + \alpha M(t, v) \frac{\partial M(t, v)}{\partial v} + \frac{\partial^3 M(t, v)}{\partial v^3} = 0, \quad \alpha = \text{const}, \quad (3.142)$$

обладающее неотрицательными солитонными решениями [242, 257]. Пусть

$$\alpha(\tau, t, u, v) \lambda(\tau, t, u, v) = [\delta'(u - v) \alpha M(t, v) + \delta'''(u - v)] \frac{m(\tau, u)}{m_1(\tau, u, v)},$$

$$M(t, u) = \int_0^t m(\tau, u) d\tau, \quad (3.143)$$

где  $\delta(\cdot)$  — дельта-функция Дирака. Подставляя (143) в первое уравнение (2.25), получаем (142). Здесь также следует отметить искусственность такого сведения. Однако (143) несет определенную полезную информацию о характере показателя эффективности  $\alpha(\tau, t, u, v)$ , вызывающего солитонное поведение продуктов развивающейся системы.

2°. Рассмотрим уравнение

$$u_t + \frac{3}{2} uu_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) u_{\xi}(\xi, t) d\xi = 0, \quad (3.144)$$

предложенное в [296]. При  $K(x) = \delta(x) + \delta''(x)$  оно превращается в обычное уравнение КдВ.

Для случая  $K(x) = \frac{1}{2} \mu e^{-\mu|x|}$  ( $\mu > 0$ ) в [296] приведены аналитические выражения для солитонных решений этого уравнения. Показано, что, в частности, оно обладает следующим решением:

$$u(x, t) = \frac{8}{9} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mu \left| x - \frac{4}{3} t \right| \right\},$$

$$u_t(x, t) = \begin{cases} \frac{16\mu}{27} \exp \left\{ -\frac{\mu}{2} \left| x - \frac{4}{3} t \right| \right\}, & x > \frac{4}{3} t, \\ -\frac{16\mu}{27} \exp \left\{ -\frac{\mu}{2} \left| x - \frac{4}{3} t \right| \right\}, & x < \frac{4}{3} t, \\ \text{не существует,} & x = \frac{4}{3} t, \end{cases} = \quad (3.145)$$

$$= \text{sign} \left( x - \frac{4}{3} t \right) \frac{16\mu}{27} \exp \left\{ -\frac{\mu}{2} \left| x - \frac{4}{3} t \right| \right\}, \quad x \neq \frac{4}{3} t.$$

5.6. Некоторые другие волновые процессы. Континуальные модели (2.28), (2.29) и др. можно интерпретировать как соотношения, описывающие процессы, разворачивающиеся как во времени, так и в пространстве. Для этого достаточно считать  $v$  пространственной переменной, вдоль которой в общем случае возникают различные по своему составу и количеству продукты. Частным случаем такого подхода будет добавление к  $m$ -продуктовым моделям так называемого диффузионного члена:

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} \approx m_i(t) = \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_{ij} \lambda_{ij} y_{ij} m_j d\tau + \frac{\partial}{\partial v} \left[ D_i(M_1, \dots, M_m) \frac{\partial M_i}{\partial v} \right],$$

$$i = \overline{1, m}, \quad (3.146)$$

где  $D_i$  — коэффициент диффузии вдоль координат  $v$ . Исследование уравнений вида (146), в которых в общем случае  $\alpha_{ij}$  нелинейным образом зависят от  $M_n - M_m$ , приводит к математическому моделированию широкого круга волновых процессов, называемых часто *автоволновыми* [110, 154, 226—228].

## § 6. Выявление особых точек

По аналогии с классическим случаем (см. п. 1.2 гл. 1) под *особой точкой* (обобщенной) будем понимать любую точку  $(\bar{X}, \bar{Y})$ ,  $\bar{X} = X(\bar{t})$ ,  $\bar{Y} = Y(\bar{t})$ , на фазовой плоскости  $(X, Y)$  решений системы

уравнений двухпродуктовой модели, для которой

$$x(\bar{t}) = \frac{dX}{dt} \Big|_{t=\bar{t}} = 0, \quad y(\bar{t}) = \frac{dY}{dt} \Big|_{t=\bar{t}} = 0, \quad (3.147)$$

$$X(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad Y(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

6.1. Общий случай двухпродуктовой модели. В случае двухпродуктовой модели, например (34), условие (147) приводит к системе

$$\frac{dM}{dt} = \int_0^t \alpha \lambda y \frac{dM}{d\tau} d\tau = \alpha(t, t) \lambda(t, t) y(t) M(t) -$$

$$- \int_0^{t_0} M_0(\tau) [\alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) y_0(\tau)]'_\tau d\tau -$$

$$- \int_{t_0}^t M(\tau) [\alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) y(\tau)]'_\tau d\tau = 0,$$

$$\frac{dC}{dt} = \int_0^t \beta \mu (1 - y) \frac{dM}{d\tau} d\tau = \beta(t, t) \mu(t, t) [1 - y(t)] M(t) - \quad (3.148)$$

$$- \int_0^{t_0} M_0(\tau) \{\beta(\tau, t) \mu(\tau, t) [1 - y_0(\tau)]\}'_\tau d\tau -$$

$$- \int_{t_0}^t M(\tau) \{\beta(\tau, t) \mu(\tau, t) [1 - y(\tau)]\}'_\tau d\tau = 0.$$

В этой системе искомыми являются значения  $t$ ,  $m_0$ ,  $y_0$ , а все остальные элементы заданы. При этом  $M = \int_0^t m(\tau) d\tau$ , а  $m(t)$  находится как решение уравнения

$$m(t) = \int_0^{t_0} \alpha \lambda y_0 m_0 d\tau + \int_{t_0}^t \alpha \lambda y m(\tau) d\tau.$$

Как видно, в общем случае задача отыскания особых точек оказывается весьма сложной. Рассмотрим лишь некоторые частные случаи.

Пусть  $\alpha \lambda$ ,  $\beta \mu = \text{const} \neq 0$ . Тогда

$$m'(t) = \alpha \lambda y(t) m(t), \quad m(t_0) = \alpha \lambda \int_0^{t_0} y_0(\tau) m_0(\tau) d\tau = m_0(t_0),$$

откуда

$$m(t) = m_0(t_0) \exp \left\{ \alpha \lambda \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau \right\}, \quad t \geq t_0.$$

Теперь систему (148) перепишем в виде

$$m_0(t_0) \exp \left\{ \alpha \lambda \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau \right\} = 0, \quad \beta \mu \int_0^{t_0} [1 - y_0(\tau)] m_0(\tau) d\tau + \\ + \beta \mu \int_{t_0}^t [1 - y(\tau)] \exp \left\{ \alpha \lambda \int_{t_0}^t y(\nu) d\nu \right\} d\tau m_0(t_0) = 0. \quad (3.149)$$

Решениями (149) будут

$$m_0(t_0) = 0, \quad \int_0^{t_0} m_0(\tau) d\tau = 0, \quad t \geq t_0, \quad (3.150)$$

или при условии, что  $\alpha \lambda y \leq d < 0$ ,  $t > t_0$ ,  $m_0(t_0) \neq 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ , имеем

$$\int_0^{t_0} m_0(\nu) d\nu = -m_0(t_0) \int_{t_0}^{\infty} \exp \left\{ \alpha \lambda \int_{t_0}^{\tau} y(\nu) d\nu \right\} d\tau. \quad (3.151)$$

На плоскости  $(M, C)$   $\left( M = \int_0^t m(\tau) d\tau, C = \int_0^t c(\tau) d\tau, t \geq t_0 \right)$  решению (150) соответствует начало координат, а решению (151) — семейство точек  $\{M(\infty), C(\infty)\}$ ,

$$M(\infty) = 0,$$

$$C(\infty) = \beta \mu \int_0^{t_0} \int_0^{\tau} [1 - y_0(\nu)] m_0(\nu) d\nu d\tau \times \\ \times m_0(t_0) \int_{t_0}^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} [1 - y(\nu)] \exp \left\{ \alpha \lambda \int_{t_0}^{\nu} y(u) du \right\} d\nu d\tau. \quad (3.152)$$

Пусть, в частности,  $y = \text{const}$ ,  $\alpha \lambda y < 0$ . Тогда (152) примет вид

$$M(\infty) = 0, \quad (3.153)$$

$$C(\infty) = C(t_0) m_0(t_0) \frac{1 - y}{\alpha \lambda y} \frac{\beta \mu}{\alpha \lambda y}.$$

Особая точка (153) будет неустойчивой точкой типа *седла*, ибо при значениях данных на предыстории, близких к тем, которые связаны соотношением (151), и таких, что  $C(\infty) \neq 0$ , кривые  $M = M(t)$ ,  $C = C(t)$  в плоскости  $(M, C)$  будут стремиться к  $\infty$ , приближаясь асимптотически к оси  $M = 0$ .

Следует заметить, что не обязательно считать, что  $x = m(t)$ ,  $y = c(t)$ . Другой важный случай:  $x = m(t)$ ,  $y = m'(t)$ . В этом случае фазовая плоскость будет иметь оси  $M$  и  $m = M'$ .

6.2. Специальный случай двухпродуктовой модели. В случае двухпродуктовой модели (2.11) условие (147) приводит к системе

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} \equiv m(t) &= \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau = 0, \\ \frac{da}{dt} &= \frac{m(t) - p(t)}{m(a)} = 0, \quad t \geq t_0, \quad a(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (3.154)$$

искомыми неизвестными которой следует считать  $t$ ,  $m_0$ ,  $y_0$ .

Пусть  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $a(t_1) = t_0$ ,  $\alpha, y, y_0 = \text{const}$ . Тогда

$$\begin{aligned} m(t) &= \alpha y_0 \int_{a(t)}^{t_0} m_0(\tau) d\tau + \alpha y \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau, \\ \frac{da}{dt} &= \frac{m(t) - p(t)}{m_0(a)}, \quad a(t_0) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} m'(t) &= \alpha(y - y_0) m(t) + \alpha y_0 p(t), \\ m_0(a) a'(t) &= m(t) - p(t). \end{aligned}$$

Определив из этих уравнений  $m(t)$  и  $a'(t)$ , перепишем (174) в виде

$$\begin{aligned} m(t) &= \alpha y_0 \int_{t_0}^t p(\tau) e^{\alpha(y-y_0)(t-\tau)} d\tau + m_0(t_0) e^{\alpha(y-y_0)(t-t_0)} = 0, \\ m_0(a) a'(t) &= \alpha y_0 \int_{t_0}^t p(\tau) e^{\alpha(y-y_0)(t-\tau)} d\tau + m_0(t_0) e^{\alpha(y-y_0)(t-t_0)} - p(t) = 0, \end{aligned} \quad (3.155)$$

$$m_0(a) \neq 0, \quad m'_0(a) \geq 0.$$

Если  $p(t) \neq 0$  для  $t_1 \geq t > t_0$ , то эта система не имеет решений относительно  $t$ ,  $m_0$ ,  $y_0$ . Предположим, что  $p(t)$  может обращаться в нуль, и обозначим через  $t_p$  любой корень уравнения  $p(t) = 0$  ( $t_1 \geq t_p > t_0$ ). В таком случае системе (155) удовлетворяют любые  $m_0(t_0)$ ,  $y_0$ , связанные соотношением

$$m_0(t_0) = -\alpha y_0 \int_{t_0}^{t_p} p(\tau) e^{\alpha(y-y_0)(t-\tau)} d\tau. \quad (3.156)$$

Особые точки на плоскости  $(M, a)$  будут иметь координаты

$$M_p = M(t_p) = \int_0^{t_0} m_0(\tau) d\tau - \alpha y_0 \int_{t_0}^{t_p} \int_{\tau}^{t_p} p(v) e^{\alpha(y-y_0)(\tau-v)} dv d\tau,$$

$$a_p = M_0^{-1} \left\{ \left[ M_p - \int_0^{t_p} p(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad M_0(a) = \int_0^a m_0(a) da,$$

где  $M_0^{-1}$  — обратная функция к  $M_0$ .

В отличие от стохастического случая обыкновенных уравнений, в данном случае  $M(t) \equiv M_p$  и  $a(t) \equiv a_p$  не являются решением исходной системы (154). Поэтому, хотя траектории будут входить и выходить из любой окрестности точки  $(M_p, a_p)$ , эта точка будет локально устойчивой точкой в том смысле, что малым нарушениям (156) будут соответствовать малые изменения траекторий при  $t = t_p$  и любом другом  $t: t_1 \geq t > t_0$ .

Заметим, что, определив  $t_1$  из уравнения

$$a(t) \equiv M_0^{-1} \{M(t) - P(t)\} = t_0,$$

можно подобным образом найти  $m(t)$  и  $a(t)$  на отрезке  $[t_1, t_2]$ ,  $a(t_2) = t_1$ , роль  $m_0(\tau)$  играет  $m(\tau)$  ( $\tau \in [t_0, t_1]$ ) и т. д. В итоге можно получить решение на всей временной оси. Интересен для исследования случай  $t_p = \infty$ , но мы оставляем этот вопрос открытым.

**6.3. Некоторые другие случаи.** Будем считать, что в трехпродуктовой модели (с двумя  $m$  и с одним  $C$ )  $\alpha_{ij}(\tau, t) \lambda_{ij}(\tau, t) m_{ij}(\tau) \equiv \equiv \varphi_{ij}(M_1(t), M_2(t))$  ( $i, j = 1, 2$ ). Тогда

$$\frac{dM_1}{dt} \equiv m_1 = \varphi_{11}(M_1, M_2) M_1 + \varphi_{12}(M_1, M_2) M_2 \equiv P(M_1, M_2), \quad (3.157)$$

$$\frac{dM_2}{dt} = m_2 = \varphi_{21}(M_1, M_2) M_1 + \varphi_{22}(M_1, M_2) M_2 \equiv Q(M_1, M_2).$$

Таким образом, при весьма частном виде функций  $\alpha_{ij} \lambda_{ij} m_{ij}$  получается общий классический случай системы (157), особые точки которой детально проанализированы в [9, 228].

Добавляя к правым частям (157) диффузионные члены (см. (146)), получим уравнения, стационарные решения которых моделируют многообразные процессы, называемые *диссипативными структурами* [201, 226—228]. Исследование многомерных аналогов этих уравнений получило дальнейшее развитие в так называемой *теории катастроф* [217].

## § 7. Асимптотические свойства моделей

Исследование асимптотического поведения функций, входящих в систему уравнений моделей, кроме очевидного самостоятельного интереса имеет большое значение для приближенного решения различных оптимизационных задач на достаточно больших интервалах времени.

**7.1. Общий случай двухпродуктовой модели.** Рассмотрим для простоты двухпродуктовую модель в виде (34). Будем предполагать,

что при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \text{А. } \alpha(\tau, t) &\sim \frac{\bar{\alpha}_\infty}{\tau+1} e^{c_\alpha(\tau-t)}, \quad \beta(\tau, t) \sim \frac{\bar{\beta}_\infty}{\tau+1} e^{c_\beta(\tau-t)}, \\ 0 \leq y \leq 1, \quad \lambda(\tau, t) &\sim \bar{\lambda}, \quad \mu(\tau, t) \sim \bar{\mu}, \end{aligned} \quad (3.158)$$

где « $\sim$ » — знак асимптотической эквивалентности или асимптотического равенства:  $x \sim y \leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x-y}{y} = 0$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $c_\alpha$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $c_\beta$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mu}$  — некоторые константы,  $0 \leq \bar{\lambda}, \bar{\mu} \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Б. } \alpha(\tau, t) &\sim \bar{\alpha}_\infty \tau e^{c_\alpha(\tau-t)}, \quad \beta(\tau, t) \sim \bar{\beta}_\infty \tau e^{c_\beta(\tau-t)}, \\ 0 \leq y \leq 1, \quad \lambda(\tau, t) &\sim \bar{\lambda}, \quad \mu(\tau, t) \sim \bar{\mu}, \\ \lambda(\tau, t) = \mu(\tau, t) = 0, \quad t - \tau &\geq t - a(t) \geq 0, \end{aligned} \quad (3.159)$$

где  $\bar{\alpha}$ ,  $c_\alpha$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $c_\beta$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mu}$  — неотрицательные константы.

Случай А моделирует естественные, природные развивающиеся системы, для которых  $\alpha(\tau, \tau) = \frac{\bar{\alpha}}{\tau+1} \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow \infty$ , а Б — искусственные ( $\alpha(\tau, \tau) = \bar{\alpha}\tau \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow \infty$ ), создаваемые людьми.

В случае А введем уравнение

$$\bar{m}(t) = \bar{\alpha}\bar{\lambda}e^{-c_\alpha t} \int_0^{t_1} \frac{e^{c_\alpha \tau}}{\tau+1} y_1 m_1 d\tau + \bar{\alpha}\bar{\lambda}e^{-c_\alpha t} \int_{t_1}^t \frac{e^{c_\alpha \tau}}{\tau+1} y m d\tau, \quad (3.160)$$

которое получается из уравнения

$$m(t) = \int_0^{t_1} \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) y_1 m_1 d\tau + \int_{t_1}^t \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) y m d\tau \quad (3.161)$$

заменой  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  в силу (158), причем роль функций на предистории играют известные функции  $y_1(\tau)$  и  $m_1(\tau)$  — решение исходного уравнения в (34) на отрезке  $[t_0, t_1]$  ( $t_1 \gg t_0$ ).

**Теорема 14. Пусть**

$$\left| \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) - \frac{\alpha_\infty \bar{\lambda}}{\tau+1} e^{c_\alpha(\tau-t)} \right| \leq \varepsilon_\alpha \frac{|\alpha_\infty \bar{\lambda}|}{\tau+1} e^{c_\alpha(\tau-t)}, \quad t \geq t_1. \quad (3.162)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\bar{m}(t)| &\leq |\bar{m}(t_1)| \exp \left\{ |\alpha_\infty \bar{\lambda}| \int_{t_1}^t \frac{|y(v)|}{v+1} dv \cdot e^{c_\alpha(t_1-t)} \right\} \leq \\ &\leq |\bar{m}(t_1)| \left( \frac{t+1}{t_1+1} \right)^{(\alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y})} e^{c_\alpha(t_1-t)}, \end{aligned}$$

$$|m(t)| \leq (1 + \varepsilon_\alpha) \bar{m}^+(t_1) \exp \left\{ |\alpha_\infty \bar{\lambda}| (1 + \varepsilon_\alpha) \int_{t_1}^t \frac{|y(v)|}{v+1} dv \right\} \times$$

$$\times \exp \{c_\alpha (t_1 - t)\} \leq (1 + \varepsilon_\alpha) \bar{m}^+(t_1) \left( \frac{t+1}{t_1+1} \right)^{|\alpha_\infty \bar{\lambda}|} e^{c_\alpha(t_1-t)},$$

$$\bar{m}(t_1) = \alpha_\infty \bar{\lambda} e^{-c_\alpha t_1} \int_0^{t_1} \frac{e^{c_\alpha \tau}}{\tau+1} y_1(\tau) m_1(\tau) d\tau, \quad (3.163)$$

$$\bar{m}^+(t_1) = |\alpha_\infty \bar{\lambda}| e^{-c_\alpha t_1} \int_0^{t_1} \frac{e^{c_\alpha \tau}}{\tau+1} |y_1(\tau) m_1(\tau)| d\tau.$$

Доказательство. В силу (160) имеем

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(t) + \varphi(t) \bar{x}(t), \quad \bar{x}(t) = \int_{t_1}^t y(\tau) \bar{m}(\tau) \frac{e^{c_\alpha \tau}}{\tau+1} d\tau,$$

$$f(t) = \varphi(t) - \int_0^{t_1} \frac{e^{c_\alpha \tau}}{\tau+1} y_1(\tau) m_1(\tau) d\tau,$$

$$\varphi(t) = \alpha_\infty \bar{\lambda} \frac{y(t)}{t+1},$$

откуда

$$\bar{x}(t) = \int_{t_1}^t f(\tau) \exp \left\{ \int_{\tau}^t \varphi(v) dv \right\} d\tau,$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= f(t) + \varphi(t) \int_{t_1}^t f(\tau) \exp \left\{ \int_{\tau}^t \varphi(v) dv \right\} d\tau = \\ &= f(t) \left[ 1 + \int_{t_1}^t \varphi(\tau) \exp \left\{ \int_{\tau}^t \varphi(v) dv \right\} d\tau \right] = \\ &= f(t) \left[ 1 + \int_{t_1}^t \varphi(\tau) \exp \left\{ \int_{\tau}^t \varphi(v) dv \right\} d\tau \right] = f(t) \exp \left\{ \int_{t_1}^t \varphi(v) dv \right\} \end{aligned}$$

и, значит,

$$\bar{m}(t) = \bar{m}(t_1) \exp \left\{ \alpha_\infty \bar{\eta} \int_{t_1}^t \frac{y(v)}{v+1} dv \right\} e^{c_\alpha(t_1-t)},$$

(3.164)

$$|\bar{m}(t)| \leq |\bar{m}(t_1)| \left( \frac{t+1}{t_1+1} \right)^{|\alpha_\infty \bar{\eta}|} e^{c_\alpha(t_1-t)}.$$

В силу (161) подобным же образом получим

$$y(t) m(t) \frac{e^{c\alpha t}}{t+1} = f(t) + f_e(t) + \varphi(t) \int_{t_1}^t \frac{e^{c\alpha \tau}}{\tau+1} y(\tau) m(\tau) d\tau,$$

$$f_e(t) = y(t) \frac{e^{c\alpha t}}{t+1} \left\{ \int_0^{t_1} \left[ \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) - \frac{\alpha_\infty \bar{\lambda}}{\tau+1} e^{c\alpha(\tau-t)} \right] y_1(\tau) m_1(\tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^t \left[ \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) - \frac{\alpha_\infty \bar{\lambda}}{\tau+1} e^{c\alpha(\tau-t)} \right] y(\tau) m(\tau) d\tau \right\}$$

или

$$\dot{x}(t) = f(t) + f_e(t) + \varphi(t) x(t), \quad x(t) = \int_{t_1}^t y(\tau) m(\tau) \frac{e^{c\alpha t}}{\tau+1} d\tau,$$

откуда

$$|\dot{x}(t)| \leq |f(t)| + |f_e(t)| + |\varphi(t)| |x(t)|.$$

Но с учетом (146)

$$|f_e(t)| \leq \varepsilon_\alpha \left[ f^+(t) + |\varphi(t)| \int_{t_1}^t |\dot{x}(\tau)| d\tau \right], \quad (3.165)$$

$$f^+(t) = |\varphi(t)| \int_0^{t_1} \frac{e^{c\alpha \tau}}{\tau+1} |y_1(\tau) m_1(\tau)| d\tau.$$

Так как

$$|x(t)| \leq \int_{t_1}^t |\dot{x}(\tau)| d\tau, \quad |f(t)| \leq f^+(t),$$

то

$$|\dot{x}(t)| \leq (1 + \varepsilon_\alpha) f^+(t) + (1 + \varepsilon_\alpha) |\varphi(t)| \int_{t_1}^t |\dot{x}(\tau)| d\tau.$$

Отсюда в силу известного неравенства Чаплыгина

$$|\dot{x}(t)| \leq (1 + \varepsilon_\alpha) f^+(t) +$$

$$+ (1 + \varepsilon_\alpha) |\varphi(t)| \int_{t_1}^t (1 + \varepsilon_\alpha) f^+(\tau) \exp \left\{ (1 + \varepsilon_\alpha) \int_{\tau}^t |\varphi(v)| dv \right\} d\tau =$$

$$= (1 + \varepsilon_\alpha) f^+(t) \exp \left\{ (1 + \varepsilon_\alpha) \int_{t_1}^t |\varphi(v)| dv \right\} \leq$$

$$\leq (1 + \varepsilon_\alpha) f^+(t) \left( \frac{t+1}{t_1+1} \right)^{(1+\varepsilon_\alpha) |\alpha_\infty \bar{\lambda} y|},$$

$$|\dot{x}(t)| = \left| y(t) m(t) \frac{e^{c\alpha t}}{t+1} \right|. \quad (3.166)$$

Из (164)—(166) легко вытекает искомое соотношение (163).

**З а м е ч а н и е 1.** Из (163) следует, что в случае  $A m(t) \rightarrow 0$  на бесконечности и, судя по оценке, тем быстрее, чем меньше  $|\alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y}|$  и больше  $c_\alpha$ .

**З а м е ч а н и е 2.** В случае неотрицательности  $\alpha_\infty \bar{\lambda} y(v)$  и  $y(\tau) m(\tau)$

$$\begin{aligned} \bar{m}(t) &= m(t_1) \exp \left\{ \alpha_\infty \bar{\lambda} \int_{t_1}^t \frac{y(v)}{v+1} dv \right\} \exp \{c_\alpha (t_1 - t)\}, \\ \bar{m}^+(t_1) &= m(t_1), \quad (1 - \varepsilon_\alpha) \bar{m}(t) \exp \left\{ -\alpha_\infty \bar{\lambda} \varepsilon_\alpha \int_{t_1}^t \frac{y(v)}{v+1} dv \right\} \leq \\ &\leq m(t) \leq \bar{m}(t) \exp \left\{ \alpha_\infty \bar{\lambda} \varepsilon_\alpha \int_{t_1}^t \frac{y(v)}{v+1} dv \right\} (1 + \varepsilon_\alpha). \end{aligned} \quad (3.167)$$

Это означает, что показатели скорости убывания  $m(t)$  и  $\bar{m}(t)$  к нулю на бесконечности с точностью до сколь угодно малой величины совпадают. Если дополнительно  $y(v) \equiv \bar{y}$ , то

$$\begin{aligned} \bar{m}(t) &= m(t_1) \left( \frac{t+1}{t_1+1} \right)^{\alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y}} e^{c_\alpha (t_1 - t)}, \\ (1 - \varepsilon_\alpha) \bar{m}(t) \left( \frac{t+1}{t_1+1} \right)^{-\varepsilon_\alpha \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y}} e^{c_\alpha (t_1 - t)} &\leq \\ &\leq m(t) \leq (1 + \varepsilon_\alpha) \bar{m}(t) \left( \frac{t+1}{t_1+1} \right)^{\varepsilon_\alpha \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y}} e^{c_\alpha (t_1 - t)}. \end{aligned} \quad (3.168)$$

**З а м е ч а н и е 3.** Доказательство теоремы 14 проясняет большие трудности получения хороших асимптотических оценок искомого решения  $m(t)$ , состоящие в необходимости получения точного (или приближенного с достаточно высокой степенью точности) решения  $m_1(t)$  на весьма большом отрезке  $[t_0, t_1]$ . Действительно, чем меньше  $\varepsilon_0$ , тем в общем случае большим должно быть  $t_1$ .

**Т е о р е м а 15.** Пусть

$$\left| \beta(\tau, t) \mu(\tau, t) - \frac{\beta_\infty \mu}{\tau+1} e^{c_\beta(\tau-t)} \right| \leq \varepsilon_\beta \frac{|\beta_\infty \bar{\mu}|}{\tau+1} e^{c_\beta(\tau-t)}, \quad t \geq t_1. \quad (3.169)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\bar{c}(t)| &\leq (1 + \varepsilon_\beta) |\beta_\infty \bar{\mu}| \max_{0 \leq \tau \leq t} |1 - y(\tau)| e^{-c_\beta t} \left[ \int_0^{t_1} \frac{e^{c_\beta \tau}}{\tau+1} |m_1(\tau)| d\tau + \right. \\ &\quad \left. + (1 + \varepsilon_\alpha) m^+(t_1) e^{c_\alpha t_1} \int_{t_1}^t \frac{e^{(c_\beta - c_\alpha)\tau}}{\tau+1} \left( \frac{\tau+1}{t_1+1} \right)^{|\alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y}|} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Доказательство легко вытекает из условия теоремы, теоремы 14 и второго равенства (34).

Замечание 4. Вычисление интегралов вида  $\int_a^b e^{c\tau} \tau^2 d\tau$ , входящих в (170), см. в [230].

В случае Б вместо (160) введем уравнение

$$\bar{m}(t) = \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y} e^{-c\alpha t} \int_{a(t)}^t e^{c\alpha\tau} \tau \bar{m}(\tau) d\tau, \quad t \geq t_1, \quad \bar{m}(\tau) = m(\tau), \quad \tau \leq t_1, \quad (3.171)$$

которое получается из уравнения (161) заменой  $\alpha, \lambda, y$  в силу (159).

Теорема 16. Пусть выполнены условия (159), и пусть

$$|\alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) y(\tau) - \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y} e^{c\alpha(\tau-t)}| \leq \varepsilon_\alpha \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y} e^{c\alpha(\tau-t)}, \quad (3.172)$$

$$0 \leq t - a(t) \leq d/t, \quad t \geq t_1.$$

Тогда

$$\bar{m}(t) \leq \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y} e^{\alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y} d} \int_{a(t_1)}^{t_1} e^{c\alpha\tau} m(\tau) d\tau (e^{\alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y} d} - 1)^{t^2/(2d)} e^{-c\alpha t}, \quad (3.173)$$

$$m(t) \leq (1 + \varepsilon_\alpha) \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y} e^{(1 + \varepsilon_\alpha) \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y} d} \int_{a(t_1)}^{t_1} e^{c\alpha\tau} \tau m(\tau) d\tau \times \\ \times (e^{(1 + \varepsilon_\alpha) \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y} d} - 1)^{t^2/(2d)} e^{-c\alpha t}, \quad (3.174)$$

где  $\leq$  означает неравенство, справедливое асимптотически при  $t \rightarrow \infty$ .

Доказательство. В силу (171) имеем

$$e^{c\alpha t} t m(t) = \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y} t \int_{a(t)}^{t_1} e^{c\alpha\tau} \tau m(\tau) d\tau + \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y} t \int_{t_1}^t e^{c\alpha\tau} \tau \bar{m}(\tau) d\tau, \\ t \in [t_1, t_2], \quad a(t_2) = t_1,$$

или

$$\dot{\bar{x}}(t) = c t \bar{x}(t) - c t \bar{x}(a(t)), \quad \bar{x}(t) = \int_{t_1}^t e^{c\alpha\tau} \tau \bar{m}(\tau) d\tau, \quad c = \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y},$$

откуда

$$\bar{x}(t) = - \int_{t_1}^t c(\tau) \bar{x}(a(\tau)) \exp \left\{ c \int_{\tau}^t v dv \right\} d\tau = - c e^{ct^2/2} \int_{t_1}^t \tau e^{-c\tau^2/2} \bar{x}(a(\tau)) d\tau,$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = - c t \bar{x}(a(t)) - c t e^{ct^2/2} \int_{t_1}^t c \tau e^{-c\tau^2/2} \bar{x}(a(\tau)) d\tau.$$

Асимптотическое поведение функций

c	Функ- ции	$y \rightarrow 1, 1 - y \asymp e^{-pt}, p > 0$
$\asymp e^{kt} e^{rst}$ $k = c_2 - c_0 - c_3 - p + n$ $s \leq c_0, r \leq \frac{y_0 \alpha_\infty}{c_0}$		$y_0 = 1, n = 0$
	a	Случай $s > c_0$ невозможен $s = c_0, r < \frac{\alpha_\infty}{c_0}$ $t - a \rightarrow -\frac{e^{-c_0 t}}{rc_0} \ln \left( 1 - \frac{rc_0}{\alpha_\infty} \right) \rightarrow 0$ $r = \frac{\alpha_\infty}{c_0}, t - a \rightarrow \infty$ Случай $r > \frac{\alpha_\infty}{c_0}$ невозможен $s < c_0, r \leq \frac{\alpha_\infty}{c_0}$ $t - a \rightarrow \frac{1}{\alpha_\infty} e^{-c_0 t} \rightarrow 0$
	m	$\asymp e^{-c_1 t} e^{rst}$
$\asymp e^{kt}, k > 0$	a	$t - a \rightarrow b = -\frac{1}{c_0 + k + p - c_2 + c_3 + c_0} \times$ $\times \ln \left[ 1 - \frac{(k + p - c_2 + c_3 + c_0) e^{-c_0 t}}{\alpha_\infty} \right] \rightarrow 0$
	m	$\asymp e^{(k+p-c_2+c_0)t}$

Но

$$0 \leq -\bar{x}(a(t)) = \int_{a(t)}^{t_1} e^{c\alpha\tau} m(\tau) d\tau \leq \int_{a(t_1)}^{t_1} e^{c\alpha\tau} m(\tau) d\tau = -\bar{x}(a(t_1)).$$

Поэтому с учетом (172)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &\leq -c t \bar{x}(a(t_1)) \left( 1 + e^{c t^2/2} \int_{t_1}^t c \tau e^{-c \tau^2/2} d\tau \right) = \\ &= -c t \bar{x}(a(t_1)) e^{c/2(t^2 - t_1^2)} \leq -c t \bar{x}(a(t_1)) e^{cd}, \\ \bar{x}(t) &\leq -\bar{x}(a(t_1)) (e^{cd} - 1), \quad t \in [t_1, t_2]. \end{aligned}$$

при заданных  $c(t)$ ,  $y(t)$ 

$y \rightarrow y_0, c < y_0 < 1$	$y \rightarrow 0, y = y_0 e^{-nt}, n > 0$
$p = 0, n = 0$	$\tilde{c}_0 = c_0 - n, p = 0$
Случай $s > c_0$ невозможен $s = c_0, r < \frac{y_0 \alpha_\infty}{c_0}$ $t - a \rightarrow - \frac{e^{-c_0 t}}{rc_0} \ln \left( 1 - \frac{rc_0}{y_0 \alpha_\infty} \right) \rightarrow 0,$ $r = \frac{y_0 \alpha_\infty}{c_0}, t - a \rightarrow \infty$ Случай $r > \frac{y_0 \alpha_\infty}{c_0}$ невозможен $s < c_0, r \leq \frac{y_0 \alpha_\infty}{c_0}$ $t - a \rightarrow \frac{1}{y_0 \alpha_\infty} e^{-c_0 t}$	Случай $s > c_0 - n$ невозможен, $n < c_0$ $s = c_0 - n, r < \frac{y_0 \alpha_\infty}{c_0 - n}$ $t - a \rightarrow - \frac{e^{-\tilde{c}_0 t}}{r(c_0 - n)} \ln \left( 1 - \frac{r \tilde{c}_0}{y_0 \alpha_\infty} \right) \rightarrow 0,$ $r = \frac{y_0 \alpha_\infty}{c_0 - n}, t - a \rightarrow \infty$ Случай $r > \frac{y_0 \alpha_\infty}{c_0 - n}$ невозможен $s < c_0 - n, r \leq \frac{y_0 \alpha_\infty}{c_0 - n}$ $t - a \rightarrow \frac{1}{y_0 \alpha_\infty} e^{-\tilde{c}_0 t}$
$\sim e^{-c_1 t} e^{r e^{st}}$	$\sim e^{-c_1 t} e^{r e^{st}}$
$t - a \rightarrow b = - \frac{1}{c_0 + k - c_2 + c_3 + c_0} \times$ $\times \ln \left[ 1 - \frac{(k - c_2 + c_3 + c_0) e^{-c_0 t}}{y_0 \alpha_\infty} \right] \rightarrow 0$	$t - a \rightarrow - \frac{1}{c_0 + k - c_2 + c_3 + c_0 - n} \times$ $\times \ln \left[ 1 - \frac{(k - c_2 + c_3 + c_0) e^{-\tilde{c}_0 t}}{y_0 \alpha_\infty} \right] \rightarrow 0$
$\sim e^{(k - c_2 + c_0)t}$	$\sim e^{(k - c_2 + \tilde{c}_0)t}$

Заменяя  $t_1$  на  $t_2$ , а  $t_2$  на  $t_3$  ( $a(t_3) = t_2$ ), подобным же образом получим

$$\dot{\bar{x}}(t) \leq -ct\hat{x}(a(t_2))e^{cd},$$

$$-\hat{x}(a(t_2)) = \int_{a(t_2)}^{t_2} e^{c\alpha\tau} \bar{m}(\tau) d\tau = \bar{x}(t_2),$$

$$\hat{x}(t) \leq -\hat{x}(a(t_2))(e^{cd} - 1) \leq -\bar{x}(a(t_1))(e^{cd} - 1)^2,$$

$$t \in [t_2, t_3].$$

Далее, используя метод математической индукции, найдем

$$\dot{\bar{x}}(t) \leq -ct\bar{x}(a(t_1)) (e^{cd} - 1)^k e^{cd}, \quad t \in [t_{k+1}, t_{k+2}],$$

$$k = 0, 1, \dots, \quad a(t_{k+2}) = t_{k+1}.$$

Так как  $t_k = \sqrt{2dk}$  является асимптотическим при  $k \rightarrow \infty$  решением разностного уравнения

$$t_{k+1} - t_k = \frac{d}{t_{k+1}},$$

то

$$k \sim \frac{t_k^2}{2d} \sim \frac{t^2}{2d}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Следовательно,

$$\dot{\bar{x}}(t) \leq -ct\bar{x}(a(t_1)) e^{cd} (e^{cd} - 1)^{t^2/(2d)},$$

откуда

$$\bar{m}(t) \leq ce^{cd} \int_{a(t_1)}^{t_1} e^{c\alpha\tau} m(\tau) d\tau (e^{cd} - 1)^{t^2/(2d)} e^{-c\alpha t},$$

что равносильно (173).

Введем теперь уравнение

$$e^{c\alpha t} t m(t) = \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y} t \int_{a(t)}^t e^{c\alpha\tau} \tau m(\tau) d\tau + f_\varepsilon(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

$$f_\varepsilon(t) = e^{c\alpha t} t \int_{a(t)}^t [\alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) y(\tau) - \alpha_\infty \bar{\lambda} \bar{y} \tau e^{c\alpha(\tau-t)}] m(\tau) d\tau,$$

или

$$\dot{x}(t) = ct x(t) - ct x(a(t)) + f_\varepsilon(t), \quad x(t) = \int_{t_1}^t e^{c\alpha\tau} m(\tau) d\tau.$$

Но с точностью до первых степеней  $\varepsilon_\alpha$

$$|f_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon_\alpha (ct x(t) - ct x(a(t))) = \varepsilon_\alpha \dot{x}(t).$$

Поэтому

$$\dot{x}(t) \leq (1 + \varepsilon_\alpha) ct x(t) - (1 + \varepsilon_\alpha) ct x(a(t)),$$

откуда

$$\dot{x}(t) \leq -(1 + \varepsilon_\alpha) ct x(a(t_1)) e^{(1+\varepsilon_\alpha)cd}, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Рассуждая, далее, по аналогии с оценкой  $\dot{\bar{x}}(t)$ , получаем

$$\dot{x}(t) \leq -(1 + \varepsilon_\alpha) ct x(at_1) e^{(1+\varepsilon_\alpha)cd} (e^{(1+\varepsilon_\alpha)d} - 1)^{t^2/(2d)}$$

Таблица 3.3

Асимптотическое поведение функций модели при заданных  $c(t)$  и  $y(t)$  ( $c_0 = c_1, c_4 = c_2 - c_1, c_5 = c_2 - c_3$ )

$c$	Функции	$1 - y \asymp e^{-pt}, p > 0$	$1 - y \asymp t^{-p}, p > 0$	$y \rightarrow y_0, 0 < y_0 < 1$				
$y \rightarrow y_0 \neq 0$ $t \rightarrow \infty$	$\asymp t^{-s} e^{kt},$ $k > 0$	$s = 0$ $0 < k + p - c_4 + c_3 < \alpha_\infty,$ $\ln \left( 1 - \frac{k + p - c_4 + c_3}{\alpha_\infty} \right)$ $t - a \rightarrow - \frac{\ln \left( 1 - \frac{k + p - c_4 + c_3}{\alpha_\infty} \right)}{k + p - c_4 + c_3};$ $k + p - c_4 + c_3 = \alpha_\infty,$ $t - a \rightarrow \infty;$ $k + p - c_4 + c_3 > \alpha_\infty,$ режим невозможен	$s = p$ $0 < k - c_4 + c_3 < \alpha_\infty,$ $\ln \left( 1 - \frac{k - c_4 + c_3}{\alpha_\infty} \right)$ $t - a \rightarrow - \frac{\ln \left( 1 - \frac{k - c_4 + c_3}{\alpha_\infty} \right)}{k - c_4 + c_3};$ $k - c_4 + c_3 = \alpha_\infty,$ $t - a \rightarrow \infty;$ $k - c_4 + c_3 > \alpha_\infty,$ режим невозможен	$s = 0$ $0 < k - c_4 + c_3 < y_0 \alpha_\infty,$ $\ln \left( 1 - \frac{k - c_4 + c_3}{y_0 \alpha_\infty} \right)$ $t - a \rightarrow - \frac{\ln \left( 1 - \frac{k - c_4 + c_3}{y_0 \alpha_\infty} \right)}{k - c_4 + c_3};$ $k - c_4 + c_3 = y_0 \alpha_\infty,$ $t - a \rightarrow \infty;$ $k - c_4 + c_3 > y_0 \alpha_\infty,$ режим невозможен				
					$m$	$\asymp e^{(k+p-c_5)t}$	$\asymp e^{(k-c_5)t}$	$\asymp e^{(k-c_5)t}$
					$I_1$	$\asymp e^{(k+p-c_5)t}$	$\asymp e^{(k-c_5)t}$	$\asymp e^{(k-c_5)t}$
					$I_2$	$\asymp e^{kt}$	$\asymp t^{-d} e^{kt}, 0 < d < p$	$\asymp e^{kt}$
$y \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$	$\asymp e^{-kt},$ $k > c_3$	$y \asymp t^{-p}, p > 0$		$y \asymp e^{-pt}, p > c_3 - c_2$				
		$a$	$= t - \frac{p}{k - c_3 + c_4} \ln t + \text{const}$	$= a_1 t + 0(t),$ $a_1 = \frac{\sqrt{(k - c_4 - c_3)^2 + 4(p + c_4)(k - c_3)} - k + c_3 + c_4}{2(p + c_4)}$				
		$m$	$\asymp t^{-\frac{p(k-c_3)}{k-c_3-c_4}} \cdot e^{-(k-c_3+c_2)t}$	$\asymp e^{-\left(\frac{k-c_3}{a_1} + c_2\right)t}$				
		$I_1$	$\asymp e^{-(k-c_3+c_2)t_0} = \text{const}$	$\asymp e^{-(k-c_3+a_1 c_2)t_0} = \text{const}$				
$I_2$	$\asymp e^{-kt_0} = \text{const}$	$\asymp e^{-kt_0} = \text{const}$						

Асимптотическое поведение функций при заданных  $a(t)$  и  $y(t)$ 

a	Функции	1-y → 0			y → y <sub>0</sub> , 0 < y <sub>0</sub> < 1	y → 0	
		$\asymp e^{-pt}$ , p > α <sub>∞</sub> + c <sub>1</sub>	$\asymp e^{-pt}$ , p < α <sub>∞</sub> + c <sub>1</sub>	$\asymp t^{-p}$ , p > 0		$\asymp t^{-p}$ , p > 1	$\asymp e^{-pt}$ , p > 0
t - a → b = const	m	$\asymp e^{kt}$ , $k \approx \frac{2}{b} \left(1 - \frac{1}{\alpha_{\infty} b}\right) - c_1$			$\asymp e^{kt}$ , $k \approx \frac{2}{b} \times$ $\times \left(1 - \frac{1}{y_0 \alpha_{\infty} b}\right) - c_1$	$\asymp e^{g(t)}$ , $-\left(\frac{p}{b} + \varepsilon\right) t \ln t - c_1 t <$	$\asymp e^{h(t)}$ , $-\left(\frac{p}{2b} + \varepsilon\right) t^2 < h(t)$
	F <sub>1</sub>					$< g(t) < -\frac{p}{b} t \ln t$	
	c	$\asymp e^{(k-p)t}$		$\asymp t^{-p} e^{kt}$		$\asymp t^l e^{g(t)}$ , 0 < l < p	$\asymp e^{h(t-d)}$ , 0 < d < b
a ≲ const	m	$\asymp e^{(\alpha_{\infty} - c_1)t}$			$\asymp e^{(y_0 \alpha_{\infty} - c_1)t}$	$\asymp e^{-c_1 t}$	
	F <sub>1</sub>						
	c	$\asymp e^{-c_1 t}$	$\asymp e^{lt}$ , l = α <sub>∞</sub> - - p - c <sub>1</sub>	$\asymp t^l \times$ $\times e^{(\alpha_{\infty} - c_1)t}$ , 0 < l < p			
	m	$\asymp e^{(\alpha_{\infty} - c_1)t}$			$\asymp e^{(y_0 \alpha_{\infty} - c_1)t}$	$\eta < 1$ $\asymp t^{\frac{\eta(1-p)}{1-\eta}} e^{-c_1 t}$	a <sub>1</sub> < 1 $\asymp e^{-\left(\frac{pa_1}{1-a_1} + c_1\right)t}$

	$\asymp e^{(\alpha_\infty - c_1)t}, \alpha_\infty > c_1$ $\asymp e^{(\alpha_\infty - c_1)a(t)}, \alpha_\infty < c_1$			$y_0 \alpha_\infty > c_1,$ $\asymp e^{(y_0 \alpha_\infty - c_1)t};$ $y_0 \alpha_\infty < c_1,$ $\asymp e^{(y_0 \alpha_\infty - c_1)a(t)}$	$\asymp a^{-l}(t) e^{-c_1 a(t)},$ $0 < l < \frac{\eta(p-1)}{1-\eta}$	$\asymp e^{-\left(c_1 + \frac{pa_1}{1-a_1}\right)a_1 t}$
$a \rightarrow \infty, t \rightarrow a \rightarrow \infty$	$\asymp e^{g(t)},$ $g(t) = -c_2 t +$ $+(\alpha_\infty + c_1 -$ $-p) a(t)$	$\asymp e^{lt},$ $l = \alpha_\infty -$ $-p - c_1$	$\asymp t^{-l} \times$ $\times e^{(\alpha_\infty - c_1)t},$ $0 < l < p$	$\asymp e^{(y_0 \alpha_\infty - c_1)t}$	$c_2 > c_1,$ $\asymp t^{-l} e^{-c_1 t}$ $0 < l < \frac{\eta(p-1)}{1-\eta};$ $c_2 < c_1,$ $\asymp a^{-l}(t) \times$ $\times e^{c_1 a(t) - c_2 t}$	$c_2 > c_1 + \frac{pa_1}{1-a_1},$ $\asymp e^{-\left(c_1 + \frac{pa_1}{1-a_1}\right)t};$ $c_2 < c_1 + \frac{pa_1}{1-a_1},$ $\asymp e^{lt},$ $l = \left(c_1 + \frac{pa_1}{1-a_1}\right)a_1 -$ $-c_2$

Обозначения:  $a_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} da/dt, t^n \asymp a(t), \varepsilon > 0, \varepsilon$  — малое

и, следовательно,

$$m(t) \leq (1 + \varepsilon_\alpha) c e^{(1+\varepsilon_\alpha)cd} \int_{a(t_1)}^{t_1} e^{c\alpha\tau} m(\tau) d\tau (e^{(1+\varepsilon_\alpha)cd} - 1)^{t^2/(2d)} e^{-c\alpha t},$$

что равносильно (174).

Замечание 5. Из (174) легко вытекает, что при

$$\alpha_\infty \bar{\lambda} y d < \ln 2 \quad (3.175)$$

$m(t) \rightarrow 0$  на бесконечности. Это означает, что при низком уровне коэффициента производительности, интенсивности или ресурсов и небольшом  $d$  «развивающаяся» система фактически быстро приходит в упадок.

7.2. Специальный случай двухпродуктовой модели. Рассмотрим модель (41), (42) с точки зрения асимптотики задачи А, т. е. при различном асимптотическом поведении функций  $y(t)$ ,  $c(t)$  изучим поведение функций  $m(t)$ ,  $a(t)$ .

Предположим, что для достаточно больших  $t$  ( $t \geq t_1$ )

$$\alpha(\tau, t) = \alpha_\infty e^{c_0\tau - c_1 t}, \quad (3.176)$$

$$\beta(\tau, t) = \beta_\infty e^{c_2\tau - c_3 t}.$$

Тогда исходная система уравнений сведется к следующей:

$$\bar{m}(t) = \alpha_\infty \int_{a(t)}^t e^{c_0\tau} y(\tau) \bar{m}(\tau) d\tau, \quad (3.177)$$

$$c(t) = \beta_\infty \int_{a(t)}^t e^{c_2\tau} [1 - y(\tau)] \bar{m}(\tau) d\tau,$$

$$c_6 = c_0 - c_1, \quad c_4 = c_2 - c_1, \quad m = \bar{m} e^{-c_1 t}, \quad c = \bar{c} e^{-c_3 t}.$$

Далее предполагаем, что  $c_6 \geq 0$ ,  $c_4 \geq 0$ .

Применяя простой метод исследования, состоящий в применении теоремы о среднем для интегралов или в сведении путем дифференцирования по  $t$  уравнений (177) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $\bar{m}(t)$  и  $a(t)$ , приходим к ряду асимптотических соотношений.

В заключение заметим, что многие результаты этого пункта могут быть перенесены на случай общей модели (2.29) по аналогии с двухпродуктовым случаем и с заменой асимптотик типа

$$\alpha \sim \frac{\alpha_\infty}{\tau + 1} e^{c\alpha(\tau-t)} \quad \text{и} \quad \alpha \sim \alpha_\infty \tau e^{c\alpha(\tau-t)}$$

$$\text{типа} \quad \alpha \sim \frac{\alpha_\infty}{(\tau + 1)(u + 1)} e^{c\alpha(\tau+u-t-v)} \quad \text{и} \quad \alpha \sim \alpha_\infty \tau u e^{c\alpha(\tau+u-t-v)}.$$

Достижение желанной цели при заданных средствах, а также отыскание необходимых средств для достижения цели всегда остается одной из важнейших задач моделирования, которая обычно называется *задачей оптимизации*. В данной главе на основе результатов двух предыдущих глав качественно исследуются различные задачи оптимизации для нового класса моделей. Приводятся примеры аналитического решения этих задач, исследуется структура решений, рассматриваются вопросы единственности и неединственности решений, изучаются асимптотические свойства решений.

Как и в гл. 3, не все задачи рассматриваются в равной степени подробно. Наиболее детально изучаются задачи максимизации выхода объема продуктов второго рода на заданном отрезке времени и минимизации времени достижения заданного состояния с применением двухпродуктовых моделей. Обобщение результатов на другие модели и исследование других задач оптимизации приводится весьма сжато.

## § 1. Примеры аналитического решения

1.1. Формулировки задач для двухпродуктовых и специальных трехпродуктовых моделей. Под задачей 1 для двухпродуктовых моделей будем понимать частный случай задачи I § 7 гл. 2.

**Задача 1.** Найти наибольшее значение функционала

$$I_1 = \int_{t_0}^T c(t) dt = C(T) - C(t_0) \quad (4.1)$$

с учетом соотношений (2.1)—(2.4) или (3.38), (3.39), а также ряда частных случаев этих соотношений (см. § 2 гл. 1). Решение этой задачи может интерпретироваться как достижение рекорда внешней функции системы на заданном периоде  $T - t_0$ .

Под задачей 2 для двухпродуктовых моделей будем понимать частный случай задачи II § 7 гл. 2.

**Задача 2.** Найти наименьшее значение функционала

$$I_2 = T - t_0, \quad M(T) \in M^*, \quad C(T) \in C^*, \quad P(T) \in P^*, \quad G(T) \in G^*, \quad (4.2)$$

где  $M^*$ ,  $C^*$ ,  $P^*$ ,  $G^*$  — заданные множества значений, с учетом тех же соотношений, что и в задаче 1. Решение этой задачи может ин-

терпретироваться как достижение желаемой цели:  $M(T) \in M^*$ ,  $C(T) \in C^*$ ,  $P(T) \in P^*$  за минимальное время.

Задачи 1, 2 для специального случая трехпродуктовой модели (3.65) будут отличаться тем, что при оптимизации (1) или (2) будут соблюдаться соотношения именно этой модели.

### 1.2. Примеры решения задачи 1.

1°. Возьмем сначала случай двухпродуктовой модели (2.33). Пусть  $\alpha(t, \tau) = \alpha$ ,  $\beta(\tau, t) = \beta$ ,  $\lambda(\tau, t) = \lambda$ ,  $\mu(\tau, t) = \mu$  ( $0 \leq \tau \leq t$ ),  $y(\tau) = y_0(\tau)$  ( $0 \leq \tau \leq t_0$ ),  $y(\tau) = y$  ( $t > t_0$ ),  $\alpha, \beta$  — заданные постоянные ( $\alpha < 0, \beta \geq 0$ ),  $\lambda, \mu, y$  — искомые функции. Тогда

$$m(t) = m_0 + \lambda \alpha y \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau = m_0 + \alpha \lambda y \hat{M}(t),$$

$$m_0 = \alpha \lambda \int_0^{t_0} y_0(\tau) m_0(\tau) d\tau,$$

$$c(t) = C_0 + \beta \mu (1 - y) \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau = C_0 + \beta \mu (1 - y) \hat{M}(t), \quad t > t_0,$$

откуда

$$\hat{M}(t) = \frac{m_0}{\alpha \lambda y} [e^{\alpha \lambda y (t - t_0)} - 1],$$

$$c(t) = C_0 + \frac{\beta \mu (1 - y) m_0}{\alpha \lambda y} [e^{\alpha \lambda y (t - t_0)} - 1]$$

и, следовательно,

$$I_1(y, \lambda, \mu) = \int_{t_0}^T c(t) dt =$$

$$= C_0(T - t_0) + \frac{\beta \mu m_0}{\alpha \lambda} \frac{1 - y}{y} \left[ \frac{e^{\alpha \lambda y (T - t_0)} - 1}{\alpha \lambda y} - (T - t_0) \right]. \quad (4.3)$$

Так как функция  $\frac{1}{x} \left[ \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right]$  монотонно возрастает при возрастании  $x$ , то для  $|y| \leq y, 0 \leq \lambda, \mu \leq 1$  легко найдем

$$I_{1\max} = C_0(T - t_0) + m_0 \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \frac{1 + y}{y} \left[ \frac{e^{|\alpha| y (T - t_0)} - 1}{|\alpha| y} - (T - t_0) \right], \quad (4.4)$$

$$y = -\bar{y}, \quad \lambda = \text{sign}(-\alpha), \quad \mu = \text{sign} \beta.$$

Пусть теперь  $0 \leq y \leq 1, \alpha, \beta > 0$ . В этом случае результат зависит от величины  $\alpha(T - t_0)$ . Если  $\alpha(T - t_0) \leq 3$ , то в силу того, что  $I_{1y}(0, 1, 1) = \frac{\beta' m_0 (T - t_0)^2}{6} [\alpha(T - t_0) - 3]$  и  $I_{1y}(y, 1, 1) = 0$

имеет не более одного положительного корня,

$$I_{1\max} = C_0(T - t_0) + \frac{\beta m_0 (T - t_0)^2}{2} = I_1(0, 1, 1), \quad (4.4')$$

$$y = 0, \quad \lambda = \mu = 1.$$

Если  $\alpha(T - t_0) > 3$ , то

$$I_{1\max} = C_0(T - t_0) + \frac{\beta m_0 (T - t_0)^2}{x^*} \left[ 1 - \frac{x^*}{\alpha(T - t_0)} \right] \left[ \frac{e^{x^*} - 1}{x^*} - 1 \right], \quad (4.4'')$$

$$y^* = \frac{x^*}{\alpha(T - t_0)}, \quad \lambda = \mu = 1,$$

где  $x^*$  — положительный корень уравнения

$$1 - \frac{x}{\alpha(T - t_0)} = \frac{e^x - 1 - x}{e^x - e^x + 1}. \quad (4.5)$$

2°. Пусть в более общем случае

$$m(t) = \int_{t_0}^t \alpha(\tau) \lambda(\tau) y(\tau) m(\tau) d\tau + m_0,$$

$$c(t) = \int_{t_0}^t \beta(\tau) \mu(\tau) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau + C_0, \quad t \geq t_0.$$

Тогда

$$m'(t) = \alpha(t) \lambda(t) y(t) m(t), \quad m(t_0) = m_0,$$

откуда

$$m(t) = m_0 \exp \left\{ \int_{t_0}^t \alpha(\tau) \lambda(\tau) y(\tau) d\tau \right\}, \quad t \geq t_0,$$

и, следовательно,

$$I_1(y, \lambda, \mu) = C_0(T - t_0) +$$

$$+ m_0 \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \beta(\tau) \mu(\tau) [1 - y(\tau)] \exp \left\{ \int_{t_0}^t \alpha(u) \lambda(u) y(u) du \right\} d\tau dt =$$

$$= C_0(T - t_0) + m_0 \int_{t_0}^T (T - \tau) \beta(\tau) \mu(\tau) [1 - y(\tau)] \times$$

$$\times \exp \left\{ \int_{t_0}^t \alpha(u) \lambda(u) y(u) du \right\} d\tau.$$

Ясно, что при  $|y| \leq \bar{y}$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\beta \geq 0$

$$I_{1\max} = C_0(T - t_0) +$$

$$+ m_0(1 + y) \int_{t_0}^T (T - \tau) |\beta(\tau)| \exp \left\{ y \int_{t_0}^{\tau} |\alpha(u)| du \right\} d\tau. \quad (4.6)$$

Если  $0 \leq y \leq 1$ ,  $\alpha, \beta, m_0 > 0$ , то для отыскания  $I_{1\max}$  положим  $\lambda = \mu = 1$  и определим максимальное значение функционала

$$\bar{I}_1(y) = \int_{t_0}^T (T - \tau) \beta(\tau) [1 - y(\tau)] e^{\int_{t_0}^{\tau} \alpha(u)y(u)du} d\tau.$$

Так как главный член вариации  $\bar{I}_1(y)$  равен

$$\begin{aligned} \delta \bar{I}_1 &= \int_{t_0}^T (T - \tau) \beta(\tau) \left[ -\delta y e^{\int_{t_0}^{\tau} \alpha(u)y(u)du} + \right. \\ &\quad \left. + [1 - y(\tau)] e^{\int_{t_0}^{\tau} \alpha(u)y(u)du} \int_{t_0}^{\tau} \alpha(u) \delta y(u) du \right] d\tau = \\ &= \int_{t_0}^T \left[ \int_{\tau}^T (T - v) \beta(v) e^{\int_{t_0}^v \alpha(u)y(u)du} [1 - y(v)] dv \alpha(\tau) - \right. \\ &\quad \left. - (T - \tau) \beta(\tau) e^{\int_{t_0}^{\tau} \alpha(u)y(u)du} \right] \delta y(\tau) d\tau, \quad (4.7) \end{aligned}$$

то нетрудно получить следующие результаты. При достаточно малом  $T - t_0$  максимальное значение  $I_1$  доставляет  $y(\tau) \equiv 0$ . Действительно, множитель при  $\delta y(\tau)$  в (7) (градиент функционала  $\bar{I}_1(y)$ ) при малом  $T - t_0$  будет всегда отрицательным. Поэтому вариация  $\delta \bar{I}_1$  с учетом ограничения на  $y$  ( $0 \leq y \leq 1$ ) будет отрицательной при  $y(\tau) = 0$ . По аналогичной причине при достаточно большом  $T - t_0$  и при  $y(v) \neq 1$  для  $v$  вблизи  $t_0$  указанный множитель окажется положительным, чего не должно быть в точке максимума. Следовательно, в искомой точке максимума  $y(\tau) = 1$  ( $\tau \in [t_2, t_1]$ ) при достаточно большом  $T$ , где  $t_1$  — некоторое значение ( $t_1 > t_0$ ). Существует также некоторое  $t_2 < T$ , для которого в точке максимума  $y(\tau) = 0$  ( $\tau \in [t_2, T]$ ).

Предположим, что на отрезке  $[t_1, t_2]$  градиент функционала  $\bar{I}_1(y)$  равен нулю:

$$\begin{aligned} \delta I_1(y) &= \int_{\tau}^T (T - v) \beta(v) e^{\int_{t_0}^v \alpha(u)y(u)du} [1 - y(v)] dv \alpha(\tau) - \\ &\quad - (T - \tau) \beta(\tau) e^{\int_{t_0}^{\tau} \alpha(u)y(u)du} \equiv 0. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Тогда равна нулю и производная по  $\tau$  левой части этого тождества:

$$-(T - \tau) e^{\int_{t_0}^{\tau} \alpha(u)y(u)du} \beta(\tau) [1 - y(\tau)] - \\ - \left\{ \left[ (T - \tau) \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} \right]' - (T - \tau) \beta(\tau) y(\tau) \right\} e^{\int_{t_0}^{\tau} \alpha(u)y(u)du} \equiv 0,$$

откуда вытекает, что  $-(T - \tau) \beta(\tau) \equiv \left[ (T - \tau) \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} \right]'$ . Если это последнее тождество выполнено, то при любом  $y(\tau)$  ( $\tau \in [t_1, t_2]$ ) градиент

$$\partial I_1(y) = \text{const} = (T - t_2) \beta(t_2) \exp \left\{ \int_{t_0}^{t_2} \alpha(u)y(u)du \right\} \neq 0,$$

чего не может быть в точке внутреннего максимума. Если же последнее тождество не имеет места, то (8), очевидно, также несправедливо. Предположив, что  $\partial I_1(y) \equiv 0$  на любом отрезке  $[t', t'']$ , снова придем к противоречию.

Таким образом, искомое экстремальное управление  $y^*(\tau)$  ( $\tau \in [t_0, T]$ ), доставляющее максимальное значение  $\bar{I}_1(y)$ , может принимать значение разве лишь 0 или 1 на каждом из подынгервалов отрезка  $[t_0, T]$ , причем при достаточно большом  $T - t_0$  вблизи левого конца  $[t_0, T]$   $y^*(\tau) \equiv 1$ , а вблизи правого конца  $y^*(\tau) \equiv 0$ .

3°. Рассмотрим более детально специальный случай двухпродуктовой модели (3.41), (3.44), считая  $P(t)$  заданным.

1.  $\alpha(\tau, t) \equiv \alpha$ ,  $\beta(\tau, t) \equiv \beta$ ,  $y_0(t) = y_0$  ( $t \in [0, t_0]$ ), где  $\alpha, \beta, y_0$  — заданные постоянные, отличные от нуля. Тогда

$$m(t) = \alpha \int_{a(t)}^t y(\tau) m(\tau) d\tau, \\ P(t) = \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau, \quad \frac{da}{dt} \geq 0, \quad t \geq t_0, \quad (4.9)$$

$$I_1(y) = \beta \int_{t_0}^T \left[ P(t) - \frac{m(t)}{\alpha} \right] dt, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Пусть  $t \in [t_0, a^{-1}(t_0)]$ . Тогда

$$m(t) = \alpha y_0 \int_{a(t)}^{t_0} m_0(\tau) d\tau + \alpha \int_{t_0}^t y(\tau) m(\tau) d\tau, \\ P(t) = \int_{a(t)}^{t_0} m_0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau, \quad \frac{da}{dt} \geq 0,$$

откуда

$$m'(t) - \alpha(y(t) - y_0)m(t) = \alpha y_0 p(t), \quad m(t_0) = m_0(t_0) = \alpha y_0 P(t_0),$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{m(t) - p(t)}{m_0(a)} \geq 0, \quad P'(t) = p(t). \quad (4.10)$$

Решив линейную задачу Коши в (10), получим

$$m(t) = \alpha y_0 \int_{t_0}^t e^{\alpha \int_{t_0}^t (y(\tau) - y_0) d\tau} f(u) du + m_0(t_0) e^{\alpha \int_{t_0}^t (y(\tau) - y_0) d\tau}. \quad (4.11)$$

Отсюда видно, что при уменьшении  $y(\tau)$  функция  $m(t)$  уменьшается. Она достигает своего допустимого минимального значения  $p(t)$  при наилучшем распределении

$$y^*(t) = \frac{p'(t)}{\alpha p(t)}, \quad m_0(t_0) = p(t_0), \quad (4.12)$$

если  $0 \leq p'(t)/(\alpha p(t)) \leq 1$ . Так как при этом  $a(t) = a(t_0) = 0$ ,  $a^{-1}(t_0) = \infty$ , то соответствующее максимальное значение функционала  $P$  равно

$$I_1(y^*) = \beta \int_{t_0}^T \left[ P(t) - \frac{p(t)}{\alpha} \right] dt. \quad (4.13)$$

Если  $p'(t_1)/(\alpha p(t_1)) > 1$  хотя бы для одного значения  $t_1 \in [t_0, T]$  то условия  $da/dt \geq 0$  и  $y(\tau) \leq 1$  несовместны, т. е. ограничение  $a'(t) \geq 0$  следует ослабить. Если существует  $t_2 \in [t_0, T]$  такое, что  $p'(t_2)/(\alpha p(t_2)) < 0$ , то искомые решения имеют вид

$$y^*(t) = \max [0, p'(t)/(\alpha p(t))],$$

$$I_1(y^*) = \beta \int_{t_0}^T \left[ P(t) - \frac{m^*(t)}{\alpha} \right] dt,$$

$$m^*(t) = \alpha y_0 \int_{t_0}^t e^{\alpha \int_{t_0}^t (y^*(\tau) - y_0) d\tau} f(u) dt + m_0(t_0) e^{\alpha \int_{t_0}^t (y^*(\tau) - y_0) d\tau},$$

$$\int_{a^*(t)}^{t_0} m_0(\tau) d\tau = P(t) - \int_{t_0}^t m^*(\tau) d\tau, \quad (4.14)$$

если

$$a^{-1}(t_0) \geq T, \quad P(a^{-1}(t_0)) = \int_{t_0}^{a^{-1}(t_0)} m^*(\tau) d\tau. \quad (4.15)$$

Если (15) не выполнено, то, положив

$$y^*(t) = \max [0, p'(t)/(\alpha p(t))], \quad t \in [t_0, T],$$

будем иметь

$$y^*(t) \frac{da^*(t)}{dt} = 0, \quad t \in [t_0, T].$$

Следовательно,

$$\frac{dm^*(t)}{dt} = \alpha y^*(t) m^*(t), \quad t \in [a^{-1}(t_0), T],$$

$$m^*(a^{-1}(t_0)) = \alpha \int_{t_0}^{a^{-1}(t_0)} y^*(\tau) m^*(\tau) d\tau,$$

$$\int_{a^*(t)}^t m^*(\tau) d\tau = P(t).$$

Отсюда

$$m^*(t) = m^*(a^{-1}(t_0)) e^{\alpha \int_{a^{-1}(t_0)}^t y^*(\tau) d\tau}, \quad t \in [a^{-1}(t_0), T].$$

Таким образом, если  $p'(t)/(\alpha p(t)) \leq 1$ ,  $m_0(t_0) = p(t_0)$ , то искомые решения существуют и определяются формулами (14) при условии (15) и формулами

$$y^*(t) = \max[0, p'(t)/(\alpha p(t))], \quad t \in [t_0, T],$$

$$I_1(y^*) = \beta \int_{t_0}^T \left[ p(t) - \frac{m^*(t)}{\alpha} \right] dt,$$

$$m^*(t) = \begin{cases} \alpha y_0 \int_{t_0}^t e^{\alpha \int_{t_0}^u (y^*(\tau) - y_0) d\tau} p(u) du + m_0(t_0) e^{\alpha \int_{t_0}^T (y^*(\tau) - y_0) d\tau}, & t \in [t_0, a^{-1}(t_0)], \\ m^*(a^{-1}(t_0)) e^{\alpha \int_{a^{-1}(t_0)}^t y^*(\tau) d\tau}, & t \in [a^{-1}(t_0), T], \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\int_{a^*(t)}^{t_0} m_0(\tau) d\tau = P(t) - \int_{t_0}^t m^*(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, a^{-1}(t_0)],$$

$$\int_{a^*(t)}^t m^*(\tau) d\tau = P(t), \quad t \in [a^{-1}(t_0), T],$$

если

$$a^{-1}(t_0) < T, \quad P(a^{-1}(t_0)) = \int_{t_0}^{a^{-1}(t_0)} m^*(\tau) d\tau. \quad (4.17)$$

Приняв простейшую модель

$$P(t) = P(t_0) e^{(c_1 - c_2)(t - t_0)}, \quad \frac{p'(t)}{\alpha p(t)} = \frac{c_1 - c_2}{\alpha}, \quad (4.18)$$

$$m_0(t_0) = \alpha y_0 P(t_0) > f(t_0),$$

найдем

$$m^0(t) = \alpha y_0 \int_{t_0}^t e^{-\alpha y_0(t-u)} p(u) du + m_0(t_0) e^{-\alpha y_0(t-t_0)}, \quad t \geq t_0,$$

соответствующее распределению  $y(\tau) = 0$ . Если существует один корень  $z^* > t_0$  уравнения

$$m^0(z) = p(z),$$

то искомым наилучшим решением (при  $0 \leq p'(t) / (\alpha p(t)) \leq 1$ ) будет

$$m^*(t) = \begin{cases} m^0(t), & t \in [t_0, z^*], \\ p(t), & t \geq z^*, \end{cases} \quad I_1(y^*) = \int_{t_0}^T \left( p(t) - \frac{m^*(t)}{\alpha} \right) dt, \quad (4.19)$$

а наилучшим распределением будет

$$y^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, z^*], \\ p'(t) / (\alpha p(t)), & t \geq z^*. \end{cases} \quad (4.20)$$

Доказательство этого вытекает из соотношения

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{z^*} m^0(t) dt &= \int_{t_0}^{z^*} \alpha y_0 \int_{t_0}^t e^{-\alpha y_0(t-u)} dt p(u) du + P(t_0) [1 - e^{-\alpha y_0(z^* - t_0)}] = \\ &= P(z^*) - P(t_0) e^{-\alpha y_0(z^* - t_0)} - \int_{t_0}^{z^*} p(u) e^{-\alpha y_0(z^* - u)} du < P(z^*), \end{aligned}$$

означающего, что  $z^* < a^{-1}(t_0)$ . Отсюда и из (19) следует, что  $a^*(t) < t_0$  при любом  $T \geq t_0$ . Указанный единственный корень существует, например, в случае, когда  $P(t)$  задано в виде (18).

2. В этом случае, в отличие от 1,  $\beta(\tau, t) \equiv \beta(\tau)$  может расти с ростом  $\tau$  ( $\tau \in [t_0, T]$ ). Тогда

$$m(t) = \alpha \int_{a(t)}^t m(\tau) y(\tau) d\tau, \quad P(t) = \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau,$$

$$\frac{da}{dt} \geq 0, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq y(\tau) \leq 1, \quad (4.21)$$

$$y(\tau) = y_0, \quad \tau \in [0, t_0],$$

$$I_1(y) = \int_{t_0}^T \left\{ \int_{a(t)}^t [1 - y(\tau)] \beta(\tau) m(\tau) d\tau \right\} dt.$$

Перепишем функционал  $I_1(y)$  в виде

$$I_1(y) = \beta(t_0) \int_{t_0}^T \left\{ P(t) - \frac{m(t)}{\alpha} + \int_{a(t)}^t [1 - y(\tau)] \left[ \frac{\beta(\tau)}{\beta(t_0)} - 1 \right] m(\tau) d\tau \right\} dt$$

и найдем вариацию функционала (с точностью до главных членов и с учетом ограничений типа равенства в (21))

$$\begin{aligned} \delta I_1(y) &= I_1(y + \delta y) - I_1(y) = \\ &= \beta(t_0) \int_{t_0}^T \left\{ \int_{a(t)}^t \frac{\beta(\tau)}{\beta(t_0)} m(\tau) (-\delta y(\tau)) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{a(t)}^t \left[ 1 - y(\tau) \right] \frac{\beta(\tau)}{\beta(t_0)} - (1 - y(t_0)) \frac{\beta(a)}{\beta(t_0)} \right\} \delta m(\tau) d\tau \Bigg\} dt, \end{aligned}$$

$$\delta y(\tau) = \delta m(\tau) \equiv 0, \quad \tau \in [0, t_0],$$

$$\delta a(t) = \frac{1}{m(a)} \int_{a(t)}^t \delta m(\tau) d\tau, \quad (4.22)$$

$$\delta m(t) = \alpha \int_{a(t)}^t [y(\tau) - y(a)] \delta m(\tau) d\tau + \alpha \int_{a(t)}^t m(\tau) \delta y(\tau) d\tau, \quad a \equiv a(t).$$

Если

$$y(\tau) \uparrow, (1 - y(\tau)) \beta(\tau) \downarrow, \tau \uparrow, 0 \leq y(\tau) \leq 1, \tau \in [t_0, T],$$

$$(1 - y(\tau)) \beta(\tau) \leq (1 - y_0) \beta(0)$$

(где знаки  $\ast \uparrow, \ast \downarrow$  означают соответственно неубывание, невозрастание функций  $\ast$ ), то из (22) вытекает, что всегда (независимо от  $T - t_0$ )

$$\delta I(y) \geq 0, \quad \delta y \leq 0.$$

В частности,

$$\begin{aligned} \delta I(1) &= \int_{t_0}^T \left\{ \int_{a(t)}^t \beta(\tau) m(\tau) (-\delta y(\tau)) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{a(t)}^t (1 - y(a)) \beta(a) (-\delta m(\tau)) d\tau \right\} dt \geq 0, \end{aligned}$$

$$\delta y \leq 0 \quad (\delta I(1) > 0, \delta y < 0).$$

Пусть  $y(\tau)$  — любое допустимое значение и

$$t_0 < T \leq a^{-1}(t_0). \quad (4.23)$$

Заметим, что независимо от  $y(\tau)$  ( $0 \leq y(\tau) \leq 1$ )  $a^{-1}(t_0) > t_0$ , так как

$$m(t) \leq \alpha P(t), \quad \int_{t_0}^{a^{-1}(t_0)} m(\tau) d\tau = P(a^{-1}(t_0)) \leq \alpha \int_{t_0}^{a^{-1}(t_0)} P(\tau) d\tau.$$

Если, в частности,  $P(\tau)$  не убывает, то

$$a^{-1}(t_0) - t_0 \geq 1/\alpha > 0.$$

При условии (23)

$$\begin{aligned} \delta I(y) = & \int_{t_0}^T \left\{ \int_{t_0}^t \beta(\tau) m(\tau) (-\delta y(\tau)) d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^t [(1-y(\tau))\beta(\tau) - (1-y_0)\beta(a)] \delta m(\tau) d\tau \right\} dt, \\ \delta m(t) = & \alpha \int_{t_0}^t [y(\tau) - y_0] \delta m(\tau) d\tau + \alpha \int_{t_0}^t m(\tau) \delta y(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Определив

$$\delta m(\tau) = \alpha \int_{t_0}^{\tau} e^{\alpha \int_{t_0}^{\nu} [y(\nu) - y_0] d\nu} m(u) \delta y(u) du,$$

получим

$$\begin{aligned} \delta I_1(y) = & \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \left\{ \beta(\tau) - \int_{\tau}^t \alpha [(1-y(u))\beta(u) - \right. \\ & \left. - (1-y_0)\beta(a)] e^{\alpha \int_{\tau}^u [y(\nu) - y_0] d\nu} du \right\} m(\tau) (-\delta y(\tau)) d\tau dt \geq \\ & \geq \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \left\{ \beta(\tau) - \alpha e^{\alpha(1-y_0)(t-\tau)} \int_{\tau}^t (1-y(u))\beta(u) e^{-\alpha \int_{\tau}^u [1-y(\nu)] d\nu} du \right\} \\ & m(\tau) (-\delta y(\tau)) d\tau dt \geq \\ & \geq \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \left\{ \beta(\tau) - \beta(t) \alpha(t-\tau) e^{\alpha(1-y_0)(t-\tau)} \right\} m(\tau) (-\delta y(\tau)) d\tau dt. \end{aligned}$$

Следовательно, при условии (23) и неравенстве

$$\alpha (T - t_0) e^{\alpha(1-y_0)(T-t_0)} \leq \frac{\beta(t_0)}{\beta(T)}$$

будем иметь  $\delta I(y) \geq 0$ ,  $\delta y \leq 0$  при любом  $y(\tau)$  ( $0 \leq y(\tau) \leq 1$ ).

Таким образом, при достаточно малом  $\alpha(T - t_0)$  максимальное значение  $I_1(y)$  достигается при минимально возможном  $y(t) = y^*(t)$ , указанном в (20).

Пусть

$$P(t) = P(t_0) e^{c_p(t-t_0)}, \quad \alpha y_0 P(t_0) = p(t_0), \quad \beta(t) = \beta(t_0) e^{c_\beta(t-t_0)}.$$

Тогда

$$y_0 = c_p / \alpha \leq 1, \quad \alpha(T - t_0) e^{\alpha(T-t_0)} \leq e^{(c_p - c_\beta)(T-t_0)}.$$

При  $c_p = 0,02 = c_\beta$ ,  $\alpha = 0,2$  имеем  $T - t_0 \leq 3$ .

Рассмотрим теперь случай достаточно большого отрезка  $T - t_0$ . Если  $y(\tau)$  удовлетворяет условию  $y^*(t) \leq y(t) \leq y_0 < 1$  ( $t \in [t_0, T]$ ), где  $y^*(t)$  дается формулой (20), и находится достаточно близко к  $y^*(t)$ , так что соответствующее  $a(t) \leq t_0$  ( $t \in [t_0, T]$ ), то, положив  $\delta y(\tau) \equiv \delta > 0$  ( $\tau \in [t_0, T]$ ,  $\delta$  достаточно мало), получим

$$\begin{aligned} \delta I_1(y) &= \delta \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \left\{ \int_{\tau}^t \alpha [(1 - y(u)) \beta(u) - \right. \\ &\quad \left. - (1 - y_0) \beta(a)] e^{-\alpha \int_{\tau}^u [y_0 - y(v)] dv} du - \beta(\tau) \right\} m(\tau) d\tau dt \geq \\ &\geq \delta \beta(t_0) \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \left\{ \alpha (1 - y_0) \int_{\tau}^t \frac{\beta(u)}{\beta(\tau)} e^{-\alpha \min_v [y_0 - y(v)](u-\tau)} du - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta(t_0)}{\beta(\tau)} (1 - y_0) (t - \tau) - 1 \right\} \frac{\beta(\tau)}{\beta(t_0)} m(\tau) d\tau dt. \end{aligned}$$

Покажем, что при

$$\beta(u) \geq \beta(\tau) e^{c_\beta(u-\tau)}, \quad u \geq \tau,$$

$$c_\beta - \alpha \min_v [y_0 - y(v)] = x > 0,$$

$$g(t) \leq g(\tau) e^{x(t-\tau)}, \quad t \geq \tau,$$

$$x + \alpha(1 - y_0) > z > x,$$

$$g(\tau) \equiv \frac{\beta(\tau)}{\beta(t_0)} m(\tau)$$

для достаточно большого  $T - t_0$  будем иметь

$$\delta I_1(y) > 0, \quad \delta > 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \delta I_1(y) &\geq \delta\beta(t_0) \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \left\{ \alpha(1-y_0) \frac{e^{x(t-\tau)} - 1}{x} + \right. \\ &\quad \left. + e^{c\beta(t_0-\tau)} \alpha(1-y_0)(t-\tau) - 1 \right\} g(\tau) d\tau dt \geq \\ &\geq \delta\beta(t_0) \alpha(1-y_0) g(T) \int_{t_0}^T e^{-x(T-t)} \int_{t_0}^t \left\{ \frac{e^{(x-z)(t-\tau)} - e^{-z(t-\tau)}}{x} - \right. \\ &\quad \left. - (t-\tau) e^{-x(t-\tau) + c\beta(t_0-\tau)} - \frac{e^{-z(t-\tau)}}{\alpha(1-y_0)} \right\} d\tau dt \sim \\ &\sim \delta\beta(t_0) \alpha(1-y_0) g(T) \frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z-x} - \frac{1}{\alpha(1-y_0)} \right] > 0. \end{aligned}$$

Пусть, в частности,

$$\begin{aligned} m_0(t_0) &= p(t_0), \quad P(t) = P(t_0) e^{c\beta(t-t_0)}, \quad \beta(u) = \beta(\tau) e^{c\beta(u-\tau)}, \\ y_0 &= y(t) = y^*(t) = \frac{c_p}{\alpha}, \quad m(t) = p(t) = P(t_0) c_p e^{c\beta(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta I_1(y) &= \delta\beta(t_0) P(t_0) c(\alpha - c) \left\{ \frac{\alpha - 2c}{(\alpha - c)c(c + c_1)^2} e^{(c+c_1)(T-t_0)} - \right. \\ &\quad - \frac{e^{c_1(T-t_0)}}{c_1^2 c} - \frac{e^{(c+c_1)(T-t_0) - c_1 T}}{c^3} + \frac{(T-t_0)^2 e^{-ct_0}}{2c} + \\ &\quad + (T-t_0) \left[ \frac{\alpha - c + c_1}{c_1(\alpha - c)(c + c_1)} + \frac{e^{-c_1 t_0}}{c^2} \right] + \frac{1}{c_1^2 c} - \\ &\quad \left. - \frac{\alpha - 2c}{(\alpha - c)c(c + c_1)^2} + \frac{e^{-c_1 t_0}}{c^3} \right\}, \\ c_1 &= c_\beta, \quad c = c_p, \end{aligned}$$

и условие  $x < z < x + \alpha(1 - y_0)$  означает, что  $c_\beta > 0$ ,  $\alpha > 2c_p$ .

Положив  $c_1 = c = 0,02$ ,  $\alpha = 0,2$ ,  $t_0 = 10$ , найдем  $T - t_0 \geq 0,9 \cdot 10^2 \Rightarrow \delta I_1(y) > 0$ ,  $\delta > 0$  (в тех единицах времени, для которых  $\alpha = 0,2$ ).

Таким образом, для достаточно большого  $T - t_0$  при росте  $\beta(t)$  возможно возрастание  $I_1(y)$  при уменьшении доли распределения продуктов групп отраслей А и Б. Это значит, что потери в Б за счет уменьшения доли ресурсов могут перекрываться приростом за счет повышения производительности.

Более подробный анализ  $\delta I_1(y)$  (см. далее) при произвольном  $\delta y(\tau)$  показывает, что для значений  $y(\tau)$ , близких к  $y_0 = c_p/\alpha$ ,



$$\left. + x(t_0) e^{\alpha \int_{t_0}^t [y(v) - e^{c_\alpha(a(v)-v)} y(a(v))] dv} \right\} \leq \\
 \leq e^{-c_\alpha(t-t_0)} \left[ \int_{t_0}^t e^{\alpha y_{\max}(t-v)} \alpha p(u) du + \alpha P(t_0) e^{\alpha y_{\max}(t-t_0)} \right],$$

Но  $m(t) \geq p(t)$ , поэтому

$$\frac{\alpha P(t_0)}{\alpha y_{\max} - c_p} e^{(\alpha y_{\max} - c_\alpha)(t-t_0)} \geq c_p P(t_0) e^{c_p(t-t_0)}. \quad (4.26)$$

Отсюда вытекает, что в данном случае для справедливости (26) при любых  $t \geq t_0$  должно быть

$$\alpha \geq \alpha y_{\max} \geq c_\alpha + c_p.$$

Ранее найденное значение  $y^* = c_p/\alpha$ , доставляющее в 1 наибольшее значение функционалу, теперь не будет допустимым.

В случае (25) и  $y_0(\tau) = y_0 e^{-c_\alpha \tau}$  имеем

$$m(t) = e^{-c_\alpha(t-t_0)} \left\{ \int_{t_0}^t e^{\alpha \int_u^t [y(v) - y_0(v)] dv} \alpha y_0(t_0) p(u) du + x(t_0) e^{\alpha \int_{t_0}^t [y(v) - y_0(v)] dv} \right\},$$

где чем меньше  $y$ , тем меньше  $m$ . Поэтому для малого  $T - t_0$  и  $x(t_0) = m(t_0) = P(t_0)$  максимальное значение функционала будет достигаться при минимально возможном

$$y^*(t) = \frac{c_\alpha + c_p}{\alpha}. \quad (4.27)$$

Соответствующие наилучшие значения:

$$m^*(t) = P(t), \quad t \geq t_0,$$

$$I_1(y^*) = \beta \int_{t_0}^T \left\{ p(t) \left[ 1 - \frac{c_\alpha + c_p}{\alpha} \right] + P(t_0) \frac{c_\alpha + c_p}{\alpha} - \right. \\
 \left. - \int_0^{t_0} m_0(\tau) y_0(\tau) d\tau \right\} dt, \quad y_0(\tau) = y_0 e^{-c_\alpha \tau}. \quad (4.28)$$

Можно показать, что при постоянном  $\beta(\tau)$  тот же результат (27), (28) будет иметь место для любого  $T - t_0$ . При росте же  $\beta(\tau)$  и достаточно большом  $T - t_0$  максимальное значение функционала будут давать значения  $y(\tau)$ , большие минимально возможных на начальной части отрезка времени планирования. По сравнению с 2, где  $c_\alpha = 0$ , при  $c_\alpha > 0$  указанная начальная часть отрезка несколько возрастает (рис. 4.2).

4. Рассмотрим решение задачи 1 для следующего случая модели (3.65):

$$\begin{aligned} M'(t) &= \alpha\lambda\tilde{M}(t), \quad \tilde{M} = M - M_1 - M_2, \\ C'(t) &= \beta_1\mu_1 M_1(t), \quad G'(t) = \beta_2\mu_2 M_2(t), \\ P(t) &= \lambda\tilde{M}(t) + \mu_1 M_1(t) + \mu_2 M_2(t) = M(t) - G(t), \\ F(t) &= C(t) + M(t), \quad P, M, C > 0, \quad G \geq 0, \quad t > t_0 > 0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где  $\alpha, \lambda, \beta_1, \mu_1, \beta_2, \mu_2$  — константы, отличные от нуля. Система (3.68) теперь примет вид

$$\begin{aligned} M' &= \alpha\lambda\tilde{M} = \alpha\lambda M - \alpha\lambda M_1 - \alpha\lambda M_2, \\ \alpha\lambda M + (\beta_1\mu_1 - \alpha\lambda) M_1 - \alpha\lambda M_2 &= F, \\ (1 - \lambda) M + (\lambda - \mu_1) M_1 + \\ + (\lambda - \mu_2) M_2 &= \beta_2\mu_2 \int_0^t M_2 d\tau, \end{aligned} \quad (4.30)$$

откуда

$$\begin{aligned} \beta_1\mu_1 M_1 &= F - M', \\ \alpha\lambda\beta_1\mu_1 M_2 &= \alpha\lambda\beta_1\mu_1 M - \\ &\quad - (\beta_1\mu_1 - \alpha\lambda) M' - \alpha\lambda F, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 M' + \Delta_2 M - \alpha\lambda\beta_1\mu_1\beta_2\mu_2 \int_0^t M(\tau) d\tau &= \\ = \alpha\lambda(\mu_2 - \mu_1) F - \beta_2\mu_2 \int_0^t F(\tau) d\tau &\equiv \hat{F}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\Delta_1 = \beta_1\mu_1(\lambda - \mu_2) + \alpha\lambda(\mu_2 - \mu_1),$$

$$\Delta_2 = (1 - \mu_2)\alpha\lambda\beta_1\mu_1 + (\beta_1\mu_1 - \alpha\lambda)\beta_2\mu_2.$$

Если  $\Delta_1 \neq 0$  (что соответствует условию (3.66)), то для определения  $M$  имеем линейное дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка. В противном случае  $M$  найдем из уравнений меньшего порядка.

Так как

$$\begin{aligned} I_1(F, \lambda, \mu_1, \mu_2) &= C(T) - C(t_0) = \\ &= \int_{t_0}^T \beta_1\mu_1 M_1(\tau) d\tau = \int_{t_0}^T F(\tau) d\tau - M(T) + M(t_0), \end{aligned} \quad (4.32)$$

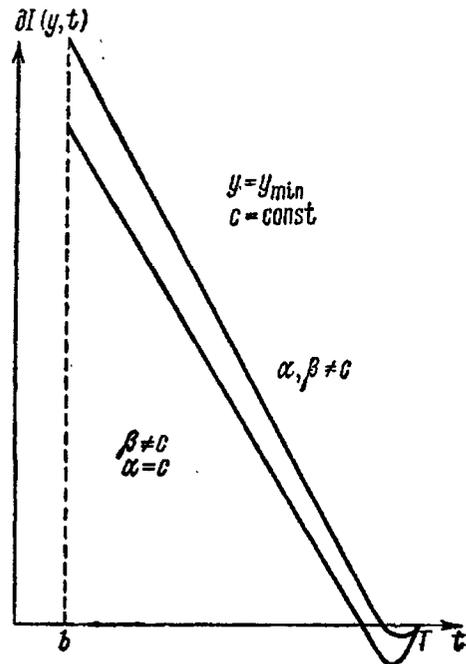


Рис. 4.2.

то задача сводится к максимизации  $\int_0^T F(\tau) d\tau - M(T) + M(t_0)$  с учетом ограничений  $P, M, C > 0, \hat{G} \geq 0, 0 \leq \lambda, \mu_1, \mu_2 \leq 1$ . Поскольку  $\hat{F}$  в модели (29) — независимый фактор, то максимум  $I_1$  достигается при максимально возможном  $F$ . Пусть  $F$  фиксировано. Тогда задача сводится к минимизации  $M(T) - M(t_0)$  при помощи  $\lambda, \mu_1, \mu_2$  с учетом указанных ограничений. Обозначим корни характеристического уравнения

$$\Delta_1 k^2 + \Delta_2 k - \alpha \lambda \beta_1 \mu_1 \beta_2 \mu_2 = 0 \quad (4.33)$$

через  $k_1$  и  $k_2$ . Предполагая, что эти корни различны, найдем [145]

$$\int_0^t M(\tau) d\tau = -\frac{1}{\Delta_1} \int_0^t \frac{e^{k_1 t + k_2 \tau} - e^{k_1 \tau + k_2 t}}{e^{(k_1 + k_2)\tau} (k_2 - k_1)} \hat{F}(\tau) d\tau, \quad (4.34)$$

откуда

$$M(t) - M(t_0) = \frac{1}{\Delta_1 (k_1 - k_2)} \int_{t_0}^t [k_1 e^{k_1(t-\tau)} - k_2 e^{k_2(t-\tau)}] \hat{F}(\tau) d\tau, \quad (4.35)$$

$$M(T) - M(t_0) = \frac{1}{\Delta_1 (k_1 - k_2)} \int_{t_0}^T [k_1 e^{k_1(T-\tau)} - k_2 e^{k_2(T-\tau)}] \hat{F}(\tau) d\tau.$$

Вводя  $k_1 = x + iy, k_2 = x - iy$  в случае комплексных корней и  $k_1 = x + y, k_2 = x - y$  в случае вещественных корней, перепишем  $M(T) - M(t_0)$  соответственно в виде

$$\begin{aligned} M(T) - M(t_0) &= \\ &= \frac{1}{\Delta_1 y} \int_{t_0}^T \{y \cos [y(T-\tau)] + x \sin [y(T-\tau)]\} e^{x(T-\tau)} \hat{F}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(T) - M(t_0) &= \\ &= \frac{1}{\Delta_1 y} \int_{t_0}^T \{y \operatorname{ch} [y(T-\tau)] + x \operatorname{sh} [y(T-\tau)]\} e^{x(T-\tau)} \hat{F}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Положим

$$F'(t) \equiv f(t) = \bar{f} = \text{const.} \quad (4.36)$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(t) &= F_0 + \bar{f}(t - t_0), \\ \int_0^t F(\tau) d\tau &= \int_0^{t_0} F_0(\tau) d\tau + F_0(t - t_0) + \bar{f} \frac{(t - t_0)^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\hat{F} = \alpha\lambda(\mu_2 - \mu_1)F_0 - \beta_2\mu_2 \int_{t_0}^t F_0(\tau) d\tau + \\ + [\alpha\lambda(\mu_2 - \mu_1)\bar{f} - \beta_2\mu_2 F_0](t - t_0) - \beta_2\mu_2 \bar{f} \frac{(t - t_0)^2}{2}.$$

При полученном  $\hat{F}$  можно определить явные выражения  $M(T) - M(t_0)$ . Однако аналитическое определение искомого  $\lambda, \mu_1, \mu_2$  остается весьма затруднительным. Если  $\hat{F}(t) < 0$  при  $t \in [t_0, T]$ , то из (15) вытекает, что минимальному значению  $M(T) - M(t_0)$  отвечает случай вещественных корней и положительных максимально возможных  $x, y$  (при фиксированном  $\Delta_1 > 0$ ).

**1.3. Примеры решения задачи 2.** Рассмотрим некоторые из случаев, что и в п. 1.2.

1°. В предположениях п. 1.2, 1°, если требуется минимизировать  $T - t_0$  при  $M(T^*) = M^*$ , где  $T^*$  — искомое значение  $T$ , то легко найдем

$$T^* - t_0 = \frac{1}{|\alpha| \max |y|} \left| \ln \frac{M^*}{M(t_0)} \right|. \quad (4.37)$$

Если вместо условия  $M(T^*) = M^*$  поставить условие  $C(T^*) = C^*$ , то в силу (3) будем иметь

$$\min_{y, \lambda, \mu} \frac{1}{\lambda \alpha y} \ln \left\{ \frac{C^*(T) - C(t_0)}{M(t_0)} \frac{\alpha \lambda y}{\beta \mu (1 - y)} + 1 \right\} = T^* - t_0.$$

Отсюда в случае  $|y| \leq \bar{y}, -1 \leq \lambda, \mu \leq 1$  в силу (4) нетрудно определить

$$T^* - t_0 = \frac{1}{|\alpha| \bar{y}} \ln \left\{ \left| \frac{C^* - C(t_0)}{M(t_0)} \frac{\beta}{\alpha} \right| \frac{\bar{y}}{1 + \bar{y}} + 1 \right\}. \quad (4.38)$$

В случае, если  $0 \leq y \leq 1$  и  $\alpha, \beta, M(t_0)$  положительны, в силу (4') и (4'') получим

$$T^* - t_0 = \frac{C^* - C(t_0)}{\beta M(t_0)}, \quad \frac{\alpha(C^* - C(t_0))}{\beta M(t_0)} \leq 2, \quad (4.39)$$

$$T^* - t_0 = \frac{1}{\alpha y^*} \ln \left[ \frac{\alpha y^* (C^* - C(t_0))}{\beta M(t_0)} + 1 \right],$$

$$\frac{1}{y^*} \ln \left[ \frac{\alpha y^* (C^* - C(t_0))}{\beta M(t_0)} + 1 \right] \geq 2, \quad (4.40)$$

где  $y^*$  — положительный корень уравнения (5).

2°. В предположениях п. 1.2, 2° легко найдем

$$M(t) = M(t_0) + m_0(t_0) \int_{t_0}^t e^{\alpha(\tau)\lambda(\tau)y(\tau)(\tau-t_0)} d\tau,$$

откуда

$$\frac{M^* - M(t_0)}{m_0(t_0)} = \int_{t_0}^{T^*} e^{|\alpha(\tau)\max y(x)|(\tau-t_0)} d\tau. \quad (4.41)$$

Если, например,  $|y| \leq \bar{y}$ ,  $\alpha(\tau) = c/(\tau + 1)$ , то из (41) получим

$$\begin{aligned} \frac{M^* - M(t_0)}{m_0(t_0)} &= e^{c|\bar{y}|} \int_{t_0}^{T^*} \exp\left\{-|c|\bar{y} \frac{1+t_0}{1+\tau}\right\} d\tau = \\ &= \frac{e^{c|\bar{y}|}}{|c|\bar{y}(1+t_0)} \int_{-|\bar{y}|}^{-\frac{(1+t_0)|c|\bar{y}|}{1+T^*}} \frac{e^u}{u^2} du = \\ &= \frac{e^{c|\bar{y}|}}{|c|\bar{y}(1+t_0)} \left( \frac{\exp\left\{-\frac{(1+t_0)|c|\bar{y}|}{(1+T^*)}\right\}}{\frac{(1+t_0)|c|\bar{y}|}{(1+T^*)}} - \frac{e^{c|\bar{y}|}}{|c|\bar{y}(1+t_0)} \int_{-|\bar{y}|}^{-\frac{(1+t_0)|c|\bar{y}|}{1+T^*}} \frac{e^u}{u} du \right). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Для вычисления  $T^*$  можно воспользоваться таблицами интегральной показательной функции [145, с. 625]. Вместе с тем видно, что в этом случае не всякое  $M^*$  достижимо.

Если  $|y| \leq \bar{y}$ ,  $\alpha(\tau) = a(\tau + 1)$ , то

$$\begin{aligned} \frac{M^* - M(t_0)}{m_0(t_0)} &= \\ &= \exp\left\{-|c|\bar{y} \left(\frac{1+t_0}{2}\right)^2\right\} \int_{t_0}^{T^*} \exp\left\{|c|\bar{y} \left(\tau + \frac{1-t_0}{2}\right)^2\right\} d\tau \end{aligned} \quad (4.43)$$

и для вычисления  $T^*$  можно воспользоваться таблицами [230, с. 332].

3°. В предположениях п. 1.2, 3° и

$$0 \leq \frac{p'(t)}{\alpha p(t)} \leq 1, \quad m_0(t_0) = p(t_0), \quad (4.44)$$

если требуется минимизировать  $T - t_0$  при  $M(T^*) = M^*$ , то

$$T^* = P^{-1}(M^*). \quad (4.45)$$

Если поставить условие  $c(T^*) = c^*$ , то в силу того, что

$$c(t) = \beta \left[ P(t) - \frac{P(t)}{\alpha} \right],$$

легко найдем

$$\beta \left[ P(T^*) - \frac{P(T^*)}{\alpha} \right] = c^*. \quad (4.46)$$

В частности, для модели (18) будем иметь

$$T^* - t_0 = \frac{1}{c_1 - c_2} \ln \frac{c^*}{\beta p(t_0) [1 - (c_1 - c_2)/\alpha]}. \quad (4.47)$$

Во всех случаях оптимальное распределение есть

$$Y^* = \frac{p'(t)}{\alpha p(t)}. \quad (4.48)$$

## § 2. Вопросы существования и единственности решений

2.1. Специальный случай двухпродуктовой модели. Рассмотрим вопросы существования и единственности решений для задач 1, 2 (см. п. 1.1), а также для задачи 1°: при заданных  $c(t)$ ,  $T$  ( $T > t_0$ ) найти  $y(t)$ ,  $m(t)$ ,  $a(t)$ , реализующие минимум

$$I(y) = \int_{t_0}^T P(t) dt \quad (4.49)$$

с учетом уравнений (3.41), (3.42) и ограничений (3.43) или (3.44). Для задачи 2 будем считать заданными  $F(t)$ ,  $P^* = P(T^*)$ , где  $T^*$  — искомое  $T$ .

**Лемма 1.** Если  $\beta(\tau, t) \neq 0$ , а функции  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  таковы, что  $0 \leq y_i(t) \leq 1 - \eta$ ,  $\eta > 0$  ( $i = 1, 2$ ), и для любого  $\varepsilon > 0$   $|y_1(t) - y_2(t)| \leq \varepsilon$  ( $t \in [t_0, T] \setminus E_\varepsilon$ ),  $\mu E_\varepsilon < \varepsilon$ , где  $\mu$  — знак меры множества, то  $|I(y_1) - I(y_2)| \leq c\varepsilon$ ,  $c = \text{const}$ .

**Доказательство.** Пусть  $a_1(t)$ ,  $m_1(t)$  и  $a_2(t)$ ,  $m_2(t)$  — соответствующие  $y_1$  и  $y_2$  решения задачи  $A^t$  (см. п. 2.2 гл. 3). Из (3.41), (3.43) после несложных преобразований получаются следующие оценки:

$$\left| \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} m_2(\tau) d\tau \right| \leq \int_{a_1(t)}^t \beta(\tau, t) [2|m_1(\tau) - m_2(\tau)| + |m_2(\tau)| |y_1(\tau) - y_2(\tau)|] d\tau,$$

$$|m_1(t) - m_2(t)| \leq K_1 e^{k_2(t-t_0)} \varepsilon,$$

где

$$K_1 = \|\alpha\| \left[ 1 + \frac{\|\beta\|}{\eta \min |\beta|} \right] (T - t_0 + 1),$$

$$K_2 = \|\alpha\| \left[ 1 + \frac{2\|\beta\|}{\eta \min |\beta|} \right],$$

$\|x\|$ ,  $\min x$  — соответственно верхняя, нижняя грани  $|x(\cdot)|$ . Тогда

$$|I_0(y_1) - I_0(y_2)| = \int_{t_0}^T \left\{ \int_{a_1(t)}^t [m_1(\tau) - m_2(\tau)] d\tau + \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} m_2(\tau) d\tau \right\} dt < c\varepsilon.$$

Можно показать, что лемма 1 справедлива для функционала  $I_2(y)$  при дополнительном условии  $P'(t^*) \neq 0$ , а для  $I_1(y)$  результат леммы выполняется для любых заданных функций.

**Теорема 1.** Пусть  $\eta > 0$ . Если  $\beta(\tau, t) \neq 0$ , а функции  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$ ,  $c(t)$ ,  $m_0(t)$ ,  $y_0(t)$  таковы, что задача  $A^t$  разрешима на  $[t_0, T]$  для какого-нибудь  $0 \leq y(t) \leq 1 - \eta$ , то задача 1° имеет решение на  $[t_0, T]$  в классе функций  $y(t)$  ( $0 \leq y(t) \leq 1 - \eta$ ), вариация которых на  $[t_0, T]$  ограничена некоторым числом.

**Доказательство.** Пусть  $D$  — множество определенных на  $[t_0, T]$  функций  $y(t)$  с вариацией, ограниченной некоторым

числом, и таких, что  $0 \leq y(t) \leq 1 - \eta$ ,  $\eta > 0$ . Функционал  $I_0(y)$  отображает  $D$  на некоторое множество  $P \subset \mathbb{R}^1$ . Из условий теоремы вытекает, что множество  $P$  — непустое. Очевидно, что множество  $P$  ограничено.

Покажем, что множество  $P$  замкнуто. Если  $P$  — конечное множество, то это очевидно. Пусть  $P$  — бесконечное множество,  $I^*$  — любая предельная точка  $P$ . Рассмотрим последовательность  $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ , сходящуюся к  $I^*$ . Каждому значению  $I_k$  соответствует хотя бы одна функция  $y_k(t) \in D$ . По теореме Хелли [193, с. 209] из бесконечного семейства функций  $\{y_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$  можно выделить подпоследовательность  $\{y_{k_i}(t)\}_{i=1}^{\infty}$ , сходящуюся в каждой точке отрезка  $[t_0, T]$  к некоторой функции  $y^*(t) \in D$ . Из теоремы Егорова [193, с. 97] следует, что  $\{y_{k_i}(t)\}_{i=1}^{\infty}$  сходится равномерно на отрезке  $[t_0, T]$ , за исключением множества бесконечно малой меры. Тогда из леммы 1 вытекает, что  $I_1(y_{k_i}) \rightarrow I_1(y^*)$ . Последовательность  $\{I_1(y_{k_i})\}_{i=1}^{\infty}$  является подпоследовательностью сходящейся последовательности  $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ ; следовательно,  $I^* = I_0(y^*) \in P$ , т. е.  $P$  замкнуто.

Из ограниченности и замкнутости  $P$  вытекает, что существуют

$$\bar{I} = \min_{I \in P} I_0 = \inf_{p \in P} p, \quad \bar{y}(t) \in D: \bar{I} = I_0(\bar{y}).$$

**Теорема 2.** Если вариация  $y(t)$  на  $[t_0, T]$  ограничена некоторым числом, а функции  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$ ,  $m_0(t)$ ,  $y_0(t)$ ,  $P(t)$  таковы, что задача  $B^i$  разрешима на  $[t_0, T]$  для какого-нибудь  $y(t)$ , то задача 1 имеет решение на  $[t_0, T]$  в указанном классе функций  $y(t)$ .

Доказательство аналогично предыдущему.

В отличие от задач  $1^{\circ}$  и 1, имеющих решение всегда, когда соответствующие задачи  $A^i$  и  $B^i$  имеют решение, решение задачи 2 существует не всегда, а лишь при выполнении определенных ограничений на значение  $P^*$ .

**Теорема 3.** Пусть 1)  $\beta(\tau, t) \neq 0$ ,  $P'(t) \neq 0$ ; 2) вариация  $y(t)$  на любом отрезке  $[t_0, T]$  не превосходит ограниченную функцию  $K(T)$ ; 3) функции  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$ ,  $y_0(t)$ ,  $m_0(t)$ ,  $F(t)$  таковы, что задача  $C^i$  имеет решение для какого-нибудь  $y(t) \leq 1 - \eta$  ( $\eta > 0$ ) на любом отрезке  $[t_0, T]$ ; 4) справедливы неравенства

$$P(t_0) < P^*, \quad \|P'\| \geq \|\beta(1 - y) + \alpha y\| P^*.$$

Тогда задача 2 имеет решение в классе функций  $y(t)$  ( $0 \leq y(t) \leq 1 - \eta$ ,  $\eta > 0$ ), удовлетворяющих условию 2) теоремы.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 (последние два условия гарантируют, что множество решений задачи 2 — непустое).

Значительно более сложными являются вопросы единственности решений задач  $1^{\circ}$ , 1, 2. Ниже излагаются некоторые результаты для частных случаев. Более подробно эти вопросы обсуждаются в §§ 5, 6.

**Теорема 4.** Пусть 1)  $\alpha(t, t) \neq 0$ ,  $m_0(t) \neq 0$ ; 2) отрезок  $[t_0, T]$  — такой, что

$$\alpha(T, T)(T-t_0)e^{\alpha(T, T)(T-t_0)} \leq \frac{\beta(t_0, T)}{\beta(T, T)}; \quad (4.50)$$

3)  $\alpha(\tau, t)$  удовлетворяет условию Липшица по  $t$  на  $[t_0, T]$ ; 4)  $P'(t)$  имеет ограниченную вариацию на  $[t_0, T]$ ; 5) соответствующая задача В<sup>1</sup> имеет решение при любых  $y(t)$ . Тогда задача 1 имеет единственное решение на  $[t_0, T]$ .

**Доказательство.** В [73] показано (см. также § 4), что при выполнении условия 2) достигается  $\max I_1(y)$  при  $y(t) = y_{\min}(t)$ , минимально допустимом в силу ограничений (3.44). Пусть существуют два решения  $y_1(t) \neq y_2(t)$  задачи 1. Разобьем  $[t_0, T]$  на интервалы знакопостоянности функции  $P'(t) - \Phi(0, t)$ , где  $\Phi(0, t)$  определено равенством (3.47). Из (3.41) видно, что при  $P'(t) \leq \Phi(0, t)$   $y_{\min}(t) = y_1(t) = y_2(t) = 0$  и решение задачи 1 единственно в силу теоремы 2. При  $P'(t) > \Phi(0, t)$   $a(t) = 0$ ,  $m(t) = P'(t)$ , а  $y_{\min}(t)$  определяется как решение уравнения Вольтерра первого рода:

$$\int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) F_1'(\tau) y(\tau) d\tau = P'(t) - \Phi(0, t). \quad (4.51)$$

Функции  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  должны удовлетворять этому уравнению; следовательно, задача свелась к единственности решения уравнения (51).

В силу условий 3) и 4) почти всюду на  $[t_0, T]$  существуют суммируемые производные  $P''(t)$  и  $\partial\alpha(\tau, t)/\partial t$ , причем  $\partial\alpha/\partial t$  ограничена и  $\alpha(t, t)P''(t) \neq 0$ . Значит, уравнение (51) сводится к уравнению Вольтерра второго рода, которое имеет единственное суммируемое решение  $y(t) \geq 0$ . Если  $t_1 < T$ , то, предполагая предысторию заданной на  $[a(t_1), t_1]$ , приходим к рассмотренной задаче на  $[t_1, T]$ .

Чтобы доказать для задачи 1<sup>o</sup> результат, аналогичный теореме 4, докажем следующую лемму.

**Лемма 2.** Если  $\alpha(\tau, t)$  не убывает по  $\tau$ , а отрезок  $[t_0, T]$  — такой, что

$$e^{\|\alpha_y\|(T-t_0)} \leq 1 + \frac{\|\alpha y\| \min \beta \min \beta (1-y)}{\|\alpha\| \|\beta\| \beta (1-y)},$$

то для вариаций функционала  $I_0(y)$  справедливы следующие неравенства:

$$\delta I_0 \geq 0, \quad \delta y \geq 0, \quad \delta I_0 \leq 0, \quad \delta y \leq 0.$$

Доказательство леммы в общем аналогично доказательству неравенства (50), поэтому здесь оно не приводится.

Заметим, что результат леммы имеет место с другой оценкой  $[t_0, T]$ , если снять ограничение на монотонность  $\alpha(\tau, t)$ .

**Теорема 5.** Пусть 1) выполнены условия теоремы 1 и леммы 2; 2)  $\beta(t, t) \neq 0$ ; 3)  $\beta(\tau, t)$  удовлетворяет условию Липшица

по  $t$ ; 4)  $s(t)$  имеет ограниченную вариацию на  $[t_0, T]$ ; 5) соответствующая задача  $A^i$  имеет решение на  $[t_0, T]$  при любых  $y(t)$ . Тогда задача 1<sup>о</sup> имеет единственное решение на  $[t_0, T]$ .

Доказательство подобно доказательству теоремы 4.

Рассмотрим теперь частный случай задачи 2 при постоянных  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$ .

**Теорема 6.** Если  $\alpha(\tau, t) \equiv \alpha \neq \beta$ ,  $\beta(\tau, t) \equiv \beta > 0$ , выполнены условия теоремы 3 и соответствующая задача  $C^i$  разрешима для любой  $y(t)$ , то задача 2 имеет единственное решение.

**Доказательство.** Из уравнений (3.41), (3.42) следует, что

$$P(t) = \frac{1}{\beta} \left[ f(t) - (\alpha - \beta) \int_{a(t)}^t y(\tau) m(\tau) d\tau \right], \quad (4.52)$$

а из  $P(t_0) < P^*$  и (52) видно, что  $\min I_2(y)$  достигается при  $y(t) \equiv y_{\max}(t)$  — наибольшем допустимом в силу (3.43)  $y(t)$ , если  $\alpha > \beta$ , и при  $y(t) \equiv y_{\min}(t)$  — наименьшем допустимом в силу (3.43)  $y(t)$ , если  $\alpha < \beta$ .

Пусть  $\alpha < \beta$ . Разобьем отрезок  $[t_0, T]$  на интервалы знакопостоянности функции  $g(t) = P'(t) - \Phi(0, t) - \Psi(0, t) - \int_0^t \beta(\tau, t) \times \times \Phi(0, \tau) d\tau$ , где  $\Psi(0, t)$  определено равенством (3.48). Далее, доказательство аналогично доказательству теоремы 4.

Пусть  $\alpha > \beta$ . Рассмотрим функцию

$$r(t) = F'(t) - \Phi(0, t) - \Psi(0, t) - \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-\tau)} \Phi(0, \tau) d\tau.$$

Если  $r(t) \leq 0$ , то  $y_{\max}(t) \equiv 1$  и задача имеет единственное решение. Если же существует  $\tilde{t} \in [t_0, T]$ :  $r(\tilde{t}) > 0$ , то соответствующая задача  $C^i$  не имеет решения ни при какой  $y(t)$ , что противоречит условию.

**2.2. Общий случай двухпродуктовой модели.** Рассмотрим вопросы существования и единственности решений задач 1, 2 для модели (3.36). В данном случае

$$\begin{aligned} I_1(z, \lambda, \mu) &= C(T) - C(t_0) = \\ &= - \int_0^{t_0} \int_{t_0}^T [\beta(\tau, u) \mu(\tau, u)]'_\tau du M_{20}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^T [\beta(\tau, \tau) \mu(\tau, \tau) - \\ &\quad - \int_\tau^T [\beta(\tau, u) \mu(\tau, u)]'_\tau du] [1 - z(\tau)] M(\tau) p\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(t) &= \\
&= M(t_0) - \int_0^{t_0} \int_{t_0}^t [\alpha(\tau, u) \lambda(\tau, u)]'_\tau du M_{10}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t [\alpha(\tau, \tau) \lambda(\tau, \tau) - \\
&\quad - \int_\tau^t [\alpha(\tau, u) \lambda(\tau, u)]'_\tau du] z(\tau) M(\tau) d\tau \geq P(t), \quad (4.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(t) &= P(t_0) + \int_{t_0}^t \{ \lambda(\tau, t) [z(\tau) M(\tau)]' + \\
&\quad + \mu(\tau, t) [(1 - z(\tau) M(\tau))]' \} d\tau \geq \bar{P}(t) > 0, \\
t > t_0 > 0, \quad 0 \leq \lambda, \quad \mu \leq 1, \\
|z| \leq z, \quad M(t_0), \quad P(t_0) > 0.
\end{aligned}$$

Считая неизвестными  $M_1 = zM$ ,  $M_2 = (1 - z)M$ ,  $M = M_1 + M_2$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ , получаем, что задача максимизации  $I_1(z, \lambda, \mu)$  с учетом указанных в (53) ограничений приводится к максимизации квадратичного функционала с квадратичными ограничениями типа равенств и неравенств.

**Теорема 7.** *В классе многочленов конечной степени или кусочно-постоянных функций  $z$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  с конечным числом значений решение задачи 1 всегда существует.*

Доказательство вытекает из конечномерности, ограниченности и замкнутости области искомых значений. Ограниченность и замкнутость вытекает из соотношений (53). Непустота области соблюдения ограничений в (53) вытекает из теоремы 3 гл. 3.

Будем считать, что  $m_1, m_2, \alpha, \beta \geq 0$ , и перепишем (53) в виде

$$\begin{aligned}
I_1(y, \lambda, \mu) &= C(T) - C(t_0) = \int_{t_0}^T c(t) dt, \\
c(t) &= \int_0^t \beta(\tau, t) \mu(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \\
M(t) &= M(t_0) + \int_{t_0}^t m(t) dt \geq P(t), \\
m(t) &= \int_0^t \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau, \quad (4.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(t) &= P(t_0) + \\
&+ \int_{t_0}^t [\lambda(\tau, t) y_1(\tau) + \mu(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau \geq \bar{P}(t) > 0, \\
0 &\leq y \leq 1.
\end{aligned}$$

Ясно, что при указанных предположениях искомыми  $\lambda, \mu$  будут

$$\lambda = \mu = 1, \quad \tau, t \geq 0. \quad (4.55)$$

Как следствие, имеем

$$M(t) = p(t) + M(t_0) - P(t_0) \geq \bar{p}(t) + M(t_0) - P(t_0), \quad t > t_0.$$

Поэтому задача 1 приводится к максимизации

$$I_1(y) = \int_{t_0}^T \int_0^{t_0} \beta(\tau, t) |m_{20}(\tau)| d\tau dt + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau dt \quad (4.56)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_0^{t_0} \alpha(\tau, t) |m_{10}(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau \equiv \\ &\equiv \int_0^{t_0} \alpha(\tau, t) |m_{10}(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) m(\tau) d\tau - \\ &\quad - \int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$0 \leq [1 - y] m \leq m,$$

$$\int_{t_0}^t m(\tau) d\tau \geq \bar{P}(t) - P(t_0). \quad (4.57)$$

Считая неизвестными  $[1 - y] m$  и  $m$ , получаем, что задача 1 приводится к максимизации линейного функционала (56) с линейными ограничениями (57) типа равенств и неравенств.

**Теорема 8.** Если

$$\int_0^{t_0} \alpha(\tau, t) |m_{10}(\tau)| d\tau > 0, \quad (4.58)$$

$$\int_{t_0}^t \int_0^{t_0} \alpha(\tau, t) |m_{10}(\tau)| d\tau dt \geq \bar{P}(t) - P(t_0),$$

то искомым решением задачи максимизации  $I_1(y)$  при ограничениях (57) будет

$$y^* = 0, \quad m^*(t) = \int_0^{t_0} \alpha(\tau, t) |m_{10}(\tau)| d\tau, \quad (4.59)$$

$$I_1^* = \int_{t_0}^T \int_0^{t_0} \beta(\tau, t) |m_{20}(\tau)| d\tau dt + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \beta(\tau, t) m^*(\tau) d\tau dt.$$

Доказательство легко следует из соотношений (57), (58). Действительно, чем больше функция  $[1 - y(\tau)] m(\tau)$ , тем больше  $I_1(y)$ . Но  $[1 - y(\tau)] m(\tau)$  не может быть больше  $m(\tau)$ . Значит,  $[1 - y(\tau)] \times m(\tau) = m(\tau)$ , т. е.  $y(\tau) = 0$ , так как

$$m(\tau) \geq \int_0^{t_0} \alpha(u, \tau) |m_{10}(u)| du > 0.$$

**Теорема 9.** Если

$$\int_{t_0}^t \int_0^{t_0} \alpha(\tau, t) |m_{10}(\tau)| d\tau dt < \bar{P}(t) - P(t_0) \leq \int_{t_0}^t x(t) dt, \quad (4.60)$$

$$x(t) = \int_0^{t_0} \alpha(\tau, t) |m_{10}(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) x(\tau) d\tau$$

и функция  $\bar{P}(t)$  — дифференцируемая, то искомым решением задачи максимизации  $I_1(y)$  с учетом (57) будет

$$m^*(t) = \bar{P}'(t), \quad t \geq t_0,$$

$$m^*(t) = \int_0^{t_0} \alpha(\tau, t) |m_{10}(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) y^*(\tau) m^*(\tau) d\tau, \quad (4.61)$$

$$I_1^* = \int_0^T \int_0^{t_0} \beta(\tau, t) m_{20}(\tau) d\tau dt + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \beta(\tau, t) \bar{P}'(\tau) d\tau dt.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8 и вытекает из монотонного характера зависимостей для всех решений.

Ясно, что искомое  $y^*$  можно найти как решение уравнения Вольтерра второго рода:

$$\begin{aligned} \alpha(t, t) m^*(t) y^*(t) + \int_{t_0}^t \alpha'_t(\tau, t) m^*(\tau) y^*(\tau) d\tau = \\ = m^{*'}(t) - \int_0^{t_0} \alpha'_t(\tau, t) |m_{10}(\tau)| d\tau, \quad (4.62) \end{aligned}$$

если  $\alpha(\tau, t) m^*(t) \neq 0$  и существует интегрируемая функция  $\alpha'_t$ .

Предположим теперь для простоты, что снова  $m_1, m_2, \alpha, \beta \geq 0$  и что требуется определить минимальное  $T^*$ , для которого  $P(T^*) = P^* > P(t_0)$ .

**Теорема 10.** Пусть требуется решить задачу 2. Тогда при заданных предположениях искомые  $\mu, \lambda$  удовлетворяют соотношению (55), искомое  $y^* \equiv 1$ ,  $T^*$  является наименьшим корнем

уравнения

$$P^* = \int_{t_0}^{T^*} m^*(t) dt + P(t_0), \quad (4.63)$$

$$m^*(t) = \int_0^{t_0} \alpha(\tau, t) m_{10}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) m^*(\tau) d\tau.$$

Если, дополнительно,  $\alpha, \beta$  — неубывающие функции и задана функция  $G(t)$ , для которой  $M(t) = P(t) + G(t)$ ,  $G(t) > 0$ , то вместо (63) будем иметь

$$\begin{aligned} P^* &= \int_{a(T^*)}^{T^*} m^*(t) dt, \\ G(t) &= \int_0^{a(t)} m^*(t) dt, \\ m^*(t) &= \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) m^*(\tau) d\tau, \\ m^*(t) &\equiv m_0(\tau), \quad \tau \in [0, t_0]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Доказательство этой теоремы почти очевидно в силу принятых допущений.

Заметим, что общий случай континуальной модели фактически приводится к двухпродуктовому (см. § 3 гл. 2), что позволяет получить весьма широкие обобщения теорем 7—10.

### § 3. Об устойчивости решений

**Теорема 11.** Если оптимизационная задача 1° (см. (49)) имеет единственное решение и выполнены условия теоремы 11 гл. 3, то задача 1° устойчива по функционалу относительно малых возмущений заданных функций  $\delta\alpha(\tau, t)$ ,  $\delta\beta(\tau, t)$ ,  $\delta c(t)$ ,  $\delta m_0(t)$ ,  $\delta y_0(t)$ , а относительная погрешность определения функционала  $I_0(y)$  равна

$$\begin{aligned} \delta' I_0 \leq & \frac{\|\beta(1-y)\|}{\min C} \left\{ \frac{e^{\|M\|(T-t_0)}}{\|M\|} \left[ \frac{\|c\|}{\min \omega} \left( \frac{\|\beta\|}{\min \beta} \delta'\beta + \delta'c \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\|m_0\|^2}{\min m_0} \left( 1 + \frac{\|\omega\|}{\min \omega} \right) \delta' m_0 \right] + \frac{\|c\| \|\alpha\|}{\|M\| \min \omega \min \alpha} [e^{\|M\|(t-t_0)} - 1] \delta'\alpha + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{(e^{\|M\|(t-t_0)} - 1)}{\|M\|} \left( 1 + \frac{\|\beta/\alpha\|}{\min \omega} \right) \frac{\|y_0\|}{\min \omega \min y_0} + \frac{\|y_0\|}{\min [\beta(1-y)^2]} \right] \delta'y \right\}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

где  $\omega(\tau, t) = \beta(1-y)/(\alpha y)$ .

**Доказательство.** Пусть заданные функции возмущены малыми по норме возмущениями. Тогда вариация  $\delta I_0$  функционала

$I_0(y)$  с точностью до главных членов имеет вид

$$\delta I_0 = \int_{t_0}^T \left[ \int_{a(t)}^t \delta m(\tau) d\tau - m(a(t)) \delta a(t) \right] dt. \quad (4.66)$$

Подставив в (66) формулы (3.79), получим зависимость  $\delta I_0$  от  $\delta y(t)$ ,  $\delta m_0(t)$ ,  $\delta c(t)$ ,  $\delta \beta(\tau, t)$ ,  $\delta \alpha(\tau, t)$ , причем эта зависимость линейна.

Для доказательства неравенства (65) достаточно оценить по норме формулу (66) и использовать оценки (3.78). Теорема доказана.

Заметим, что полученные результаты по устойчивости задач 1 и 2 подобны теореме 11 и доказываются аналогично, поэтому в данной монографии они не приводятся. Отметим только, что для задачи 1 устойчивость на конечном интервале имеет место при  $m(t) \neq 0$ , а для задачи 2 — при условиях теоремы 11 гл. 3 и  $P'(T^*) \neq 0$ .

В общем случае двухпродуктовой модели в силу результатов п. 2.2 исследование устойчивости решений сводится к устойчивости ряда простых задач математического программирования: линейного программирования, максимизации квадратичного функционала с квадратичными ограничениями и др.

С точностью до главных членов все эти задачи сводятся к устойчивости задачи линейного программирования, по которой имеются многочисленные результаты [44, 252]. Отметим, что для задачи линейного программирования возможна потеря устойчивости, что вызывает необходимость привлечения для нее методов решения некорректно поставленных задач. Простой некорректной задачей линейного программирования является следующий пример [44, с. 12].

Пусть требуется найти  $\Omega$ -нормальное решение задачи минимизации функции  $I(u) = ax + b$  на множестве

$$U = \{u = (x, y): x \geq 0, y \geq 0, 2 \leq x + y \leq 3\}$$

при  $\Omega(u) = x^2 + y^2 = |u|^2$ . Предположим, что точные значения  $a = b = 1$ . Тогда  $\inf I(u) = 2$  и

$$U^* = \{u = (x, y): x + y = 2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

— множество всех решений, а  $\Omega$ -нормальным решением является точка  $U^* = (1, 1)$ . Предположим теперь, что величины  $a, b$  известны лишь приближенно и при вычислениях с некоторым числом десятичных знаков задаются как  $a_k, b_k$ :  $|a_k - 1| \rightarrow 0, |b_k - 1| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Так как, вообще говоря,  $a_k \neq b_k$ , то минимум функции  $I_k(u) = a_k x + b_k y$  на множестве  $U$  будет достигаться либо в точке  $U_k^* = (2, 0)$  (при  $a_k > b_k$ ), либо в точке  $V_k^* = (0, 2)$  (при  $a_k < b_k$ ), так что  $|U_k^* - V_k^*| = \sqrt{2} \not\rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Это и означает некорректность отыскания  $\Omega$ -нормального решения задачи линейного программирования.

§ 4. О структуре решений оптимизационной задачи 1 для специального случая двухпродуктовой модели

Вспомним, что задача 1 заключается в определении функций  $y(t)$ ,  $m(t)$ ,  $a(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ), доставляющих максимум функционалу

$$I_1(y) = \int_{t_0}^T \int_{a(t)}^t \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau dt \quad (4.67)$$

при ограничениях

$$m(t) = \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau, \quad (4.68)$$

$$P(t) = \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau, \quad P(t) = P'(t), \quad (4.69)$$

$$0 \leq y(t) \leq 1, \quad \frac{da}{dt} \geq 0, \quad a(t_0) = 0, \quad a(t) < t, \quad (4.70)$$

где функции  $m(t) \equiv m_0(t)$ ,  $y(t) \equiv y_0(t)$  известны для  $t \in [0, t_0]$ . Докажем некоторые общие результаты о структуре решений задачи 1.

*Лемма 3. Градиент функционала  $I(y)$  в силу ограничений (68), (69) имеет вид*

$$\begin{aligned} \partial I_1(y, \tau) = & \left[ - \int_{I(\tau, T)} \beta(\tau, t) dt - \int_{I(\tau, T)} \int_{I(\tau, T)} \nabla \beta(\tau, t) dt \alpha(\tau, \tau_1) d\tau_1 - \right. \\ & \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \int_{I_{k+2}(\tau, T)} \int_{I(\tau_1, \tau)} \nabla \beta(\tau_1, t) dt \int_{I_k^*(\tau, \tau_1)} \Delta_{\alpha, k+1}(v, \tau_1) \alpha(\tau_1, v) dv d\tau_1 \right] m(\tau), \end{aligned} \quad (4.71)$$

где

$$\nabla \beta(\tau, t) = [1 - y(a(t))] \beta(a(t), t) - [1 - y(\tau)] \beta(\tau, t),$$

$$\Delta_{\alpha}(\tau, t) = \alpha(\tau, t) y(\tau) - \alpha(a(t), t) y(a(t)),$$

$$I(\tau, T) = \begin{cases} [\tau, a^{-1}(\tau)], & a^{-1}(\tau) \leq T, \\ [\tau, T], & a^{-1}(\tau) \geq T, \end{cases} \quad (4.72)$$

$$\Delta_{\alpha, 1} = \Delta_{\alpha}, \quad \Delta_{\alpha, k+1}(v, t) = \int_{I_k(v, t)} \Delta_{\alpha}(z, t) \Delta_{\alpha, k}(v, z) dz, \quad k=1, 2, \dots,$$

$$\tilde{a}(t) = \max \{t_0, a(t)\}, \quad \tilde{a}^k(t) = \tilde{a}(\tilde{a}^{k-1}(t)),$$

$$I_k(\tau, T) = \begin{cases} [\tau, a^k(\tau)], & a^{-k}(\tau) \leq T, \\ [\tau, T], & a^{-k}(\tau) \geq T, \end{cases}$$

$$\tilde{I}_k(\tau, t) = \begin{cases} I_k(\tau, t) - [\tau, \tilde{a}(t)], & \tilde{a}^{k+1} \leq \tau \leq \tilde{a}(t), \\ [\tau, t], & \tilde{a}(t) \leq \tau \leq t, \end{cases}$$

$$I_k^*(\tau, t) = \begin{cases} I(\tau, t) - [\tau, \tilde{a}^{k+1}(t)], & \tilde{a}^{k+2}(t) \leq \tau \leq \tilde{a}^{k+1}(t), \\ I(\tau, t), & \tilde{a}^{k+1}(t) \leq \tau. \end{cases} \quad (4.73)$$

Приращение функционала при малых вариациях  $dy(\tau)$  функции  $y(\tau)$  выражается формулой

$$\delta I_1 = \int_{t_0}^T \partial I_1(y, \tau) dy(\tau) d\tau. \quad (4.74)$$

Для случая  $\beta(\tau, t) \equiv \beta(\tau)$  результат леммы 3 получен в [73], в общем случае доказательство аналогично [73].

В дальнейшем будем обозначать через  $\partial I_1(y, \tau)$  выражение, стоящее в квадратных скобках в формуле (71).

Известно другое выражение градиента функционала.

**Лемма 4\*).** Градиент функционала  $I(y)$  в силу ограничений (68), (69) можно представить в виде

$$\partial I_1(y, \tau) = \left[ - \int_{I(\tau, t)} \beta(\tau, t) dt - \int_{I(\tau, t)} \alpha(\tau, t) \psi(t) dt \right] m(\tau), \quad (4.75)$$

где  $\psi(t)$  определяется из уравнения

$$\psi(\tau) = \int_{I(\tau, T)} \Delta_\alpha(\tau, t) \psi(t) dt + \int_{I(\tau, T)} \nabla_\beta(\tau, t) dt, \quad (4.76)$$

а  $I(\tau, T)$ ,  $\Delta_\alpha(\tau, t)$ ,  $\nabla_\beta(\tau, t)$  заданы формулами (72).

Докажем одно важное свойство оптимальных траекторий  $y_{\text{opt}}(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ).

**Лемма 5.** Существует момент  $\Theta$  ( $t_0 \leq \Theta < T$ ) такой, что при  $\tau \in [\Theta, T]$  решение задачи  $y_{\text{opt}}(\tau)$  совпадает с  $y_{\text{min}}(\tau)$ , минимально допустимым в силу ограничений (68) — (70).

**Доказательство.** Изучим поведение градиента (71) в окрестности точки  $\tau = T$ . Так как функция  $a(t)$  непрерывна на  $[t_0, T]$  и  $a(t) < t$ , то существует  $\varepsilon > 0$ :  $a(T) \leq T - \varepsilon$ .

Рассмотрим  $\tau \in [T - \varepsilon, T]$ . Тогда  $I_k(\tau, t) = I_k^*(\tau, t) = [\tau, t]$  ( $t > \tau$ ) и выражение  $\partial \bar{I}(y, \tau)$  имеет вид

$$\partial \bar{I}(y, \tau) = - \int_{\tau}^T \beta(\tau, t) dt - \int_{\tau}^T \int_{\tau_1}^T \nabla_\beta(\tau_1, t) dt \left[ \alpha(\tau, \tau_1) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau}^{\tau_1} \Delta_{\alpha, k+1}(v, \tau_1) \alpha(\tau, v) dv \right] d\tau_1. \quad (4.77)$$

\*) Этот результат впервые получен М. Ф. Бейко для случая  $\beta(\tau, t) \equiv \beta(\tau)$ .

Очевидно, что  $\partial \bar{I}(y, \tau)$  непрерывна по  $\tau$  и

$$\partial \bar{I}(y, T) = 0. \quad (4.78)$$

Найдем производную по  $\tau$  от  $\partial \bar{I}(y, \tau)$ :

$$\begin{aligned} (\partial \bar{I}(y, \tau))'_\tau &= \beta(\tau, \tau) - \\ &- \int_\tau^T \beta'_\tau(\tau, t) dt + \alpha(\tau, \tau) \int_\tau^T \nabla_\beta(\tau, t) dt - \int_\tau^T \int_{\tau_1}^T \nabla_\beta(\tau_1, t) dt \frac{\partial \alpha(\tau, \tau_1)}{\partial \tau} d\tau_1 + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \int_\tau^T \int_{\tau_1}^T \nabla_\beta(\tau_1, t) dt \Delta_{\alpha, k+1}(\tau, \tau_1) \alpha(\tau, \tau) d\tau_1 - \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} \int_\tau^T \int_{\tau_1}^T \nabla_\beta(\tau_1, t) dt \int_\tau^{\tau_1} \Delta_{\alpha, k+1}(v, \tau_1) \frac{\partial \alpha(\tau, v)}{\partial \tau} dv d\tau_1. \quad (4.79) \end{aligned}$$

Легко заметить, что

$$(\partial \bar{I}(y, T))'_\tau = \beta(T, T) > 0. \quad (4.80)$$

Из соотношений (78) и (80) вытекает, что  $\partial I_1(y, \tau) < 0$  на некотором отрезке  $[\Theta, T]$  ( $t_0 \leq \Theta < T$ ) при любом выборе функции  $y(t)$ . Следовательно, при уменьшении  $y(t)$  ( $t \in [\Theta, T]$ )  $I_1(y)$  увеличивается и оптимальной на отрезке  $[\Theta, T]$  будет функция  $y_{\min}(t)$ , минимально допустимая в силу ограничений задачи.

Из леммы 5 и непрерывности  $\partial I_1(y, \tau)$  по  $\tau$  вытекает следующая теорема.

**Теорема 12.** Пусть  $y_{\text{opt}}(\tau)$  ( $\tau \in [t_0, T]$ ) — решение оптимизационной задачи 1. Тогда существует момент  $\Theta$  ( $t_0 \leq \Theta < T$ ) такой, что при  $\tau \in (\Theta, T]$   $\partial I_1(y_{\text{opt}}, \tau) < 0$ ,  $y_{\text{opt}}(\tau) \equiv y_{\min}(\tau)$ , где  $y_{\min}(\tau)$  — минимально допустимая  $y(\tau)$  в силу ограничений (68) — (70). Отрезок  $[t_0, \Theta]$  состоит из подынтервалов, на каждом из которых

$$\begin{aligned} \partial I_1(y_{\text{opt}}, \tau) > 0, \quad y_{\text{opt}}(\tau) \equiv 1, \\ \partial I_1(y_{\text{opt}}, \tau) < 0, \quad y_{\text{opt}}(\tau) \equiv y_{\min}(\tau), \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\partial I_1(y_{\text{opt}}, \tau) \equiv 0, \quad y_{\min}(\tau) \leq y_{\text{opt}}(\tau) \leq 1. \quad (4.82)$$

В дальнейшем будет показано, что все указанные случаи на отрезке  $[t_0, \Theta]$  возможны в зависимости от поведения исходных элементов модели.

## § 5. Пример неединственности решения задачи 1

Предположим, что

$$\begin{aligned} y_0(t) \equiv y_0 = \text{const}, \quad t \in [0, t_0], \\ \alpha(\tau, t) \equiv \alpha = \text{const}, \quad \beta(\tau, t) \equiv \beta(t) \end{aligned} \quad (4.83)$$

и отрезок  $[t_0, T]$  — такой, что при любой  $y(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ) выполняется  $a(T) \leq t_0$ . Пусть также  $m_0(t) > 0$  ( $t \in [0, t_0]$ ). Покажем, что уже в этом частном случае задача 1 может иметь более одного решения.

Из леммы 3 следует, что при условиях (83) градиент  $\partial I_1(y, \tau)$  функционала (67) в силу ограничений (68), (69) имеет вид

$$\begin{aligned} \partial I_1(y, \tau) = & \left\{ -\beta(\tau)(T - \tau) - \int_{\tau}^T \left[ \int_{\tau_1}^T (1 - y_0) \beta(a(t)) dt - \right. \right. \\ & \left. \left. - (T - \tau_1)(1 - y(\tau_1)) \beta(\tau_1) \right] \alpha \exp \left\{ \int_{\tau}^{\tau_1} [y_0 - y(v)] dv \right\} d\tau_1 \right\} m(\tau) = \\ & = \partial \bar{I}(y, \tau) m(\tau). \quad (4.84) \end{aligned}$$

Лемма 6. Пусть

$$\partial \bar{I}(y, \Theta_2) = 0, \quad t_0 < \Theta_2 < T. \quad (4.85)$$

Тогда для того чтобы  $\partial \bar{I}(y, \tau) \equiv 0$  ( $\tau \in [\Theta_1, \Theta_2] \in [t_0, T]$ ), необходимо и достаточно, чтобы для  $\tau \in (\Theta_1, \Theta_2)$  выполнялось равенство

$$\int_{\tau}^T \beta(a(t)) dt = \beta(\tau)(T - \tau) + \frac{1}{\alpha(1 - y_0)} [\beta(\tau)(T - \tau)]'. \quad (4.86)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть  $\partial \bar{I}(y, \tau) \equiv 0$  ( $\tau \in [\Theta_1, \Theta_2]$ ). Тогда, продифференцировав  $\partial \bar{I}(y, \tau)$  по  $\tau$ , получаем

$$\begin{aligned} \partial \bar{I}'_{\tau}(y, \tau) = & \alpha(1 - y_0) \int_{\tau}^T [\beta(\tau) - \beta(a(t))] dt + [\beta(\tau)(T - \tau)]' - \\ & - \alpha[y_0 - y(\tau)] \partial \bar{I}(y, \tau) = 0, \quad \tau \in (\Theta_1, \Theta_2), \quad (4.87) \end{aligned}$$

откуда с учетом сделанного предположения вытекает равенство (86).

Достаточность. Пусть выполняется (86). Подставим (86) в выражение (84) для  $\tau \in [\Theta_1, \Theta_2]$  и проинтегрируем (84) по частям:

$$\begin{aligned} \partial \bar{I}(y, \tau) = & - \int_{\tau}^{\Theta_2} \left\{ \frac{1}{\alpha} [\beta(\tau_1)(T - \tau_1)]' + (1 - y_0) \beta(\tau_1)(T - \tau_1) - \right. \\ & \left. - (T - \tau_1)(1 - y(\tau_1)) \beta(\tau_1) \right\} \alpha e^{-\alpha \int_{\tau}^{\tau_1} [y_0 - y(v)] dv} d\tau_1 - \\ & - \int_{\Theta_2}^T \left[ \int_{\tau_1}^T (1 - y_0) \beta(a(t)) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (T - \tau_1) (1 - y(\tau_1)) \beta(\tau_1) \alpha e^{-\alpha \int_{\tau}^{\tau_1} [y_0 - y(v)] dv} d\tau_1 - \\
& - (T - \tau) \beta(\tau) = e^{-\alpha \int_{\tau}^{\Theta_2} [y_0 - y(v)] dv} d\bar{I}(y, \Theta_2).
\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (85) следует, что  $\partial \bar{I}(y, \tau) \equiv 0$ .

Лемма 7. Если функция  $r(\tau) = \alpha(1 - y_0) \int_{\tau}^T [\beta(\tau) - \beta(a(t))] dt +$   
 $+ [\beta(\tau)(T - \tau)]'$  знакопостоянна на  $(\tau_1, \tau_2) \subset [t_0, T]$  и  $\partial \bar{I}(y, \tau_1) = 0$   
или  $\partial \bar{I}(y, \tau_2) = 0$ , то  $\text{sign } \partial I(y, \tau) = \text{sign } r(\tau)$  при  $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ .

Доказательство. Из (87) имеем

$$\partial \bar{I}'_{\tau}(y, \tau) + \alpha(y_0 - y(\tau)) \partial \bar{I}(y, \tau) = r(\tau).$$

Рассматривая это равенство как дифференциальное уравнение относительно функции  $\partial \bar{I}(y, \tau)$  ( $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ ) с начальным условием  $\partial \bar{I}(y, \tau_1) = 0$ , получаем

$$\partial \bar{I}(y, \tau) = e^{-\alpha \int_{\tau_1}^{\tau} [y_0 - y(v)] dv} \int_{\tau_1}^{\tau} e^{\alpha \int_{\tau_1}^t [y_0 - y(v)] dv} r(t) dt,$$

откуда вытекает утверждение леммы.

Лемма 8. Пусть 1)  $\partial I_1(y, t) \equiv 0$  ( $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset [t_0, T]$ ); 2) функция  $a(t)$  монотонна при  $t \in [\Theta_1, T]$ ; 3) функция  $\beta(t)$  монотонна при  $t \in [\min\{a(\Theta_1), a(T)\}, \max\{a(\Theta_1), a(T)\}]$ ; 4) используются вариации функции  $y(t)$  следующего вида:

$$\delta y(t) = \begin{cases} \eta(t), & t \in [t_1, t_2] \subset [\Theta_1, \Theta_2], \\ 0, & t \in [t_0, T] \setminus [t_1, t_2], \end{cases}$$

при малых  $\eta(t)$  и  $\Delta = t_2 - t_1$ . Тогда знак второй вариации  $\delta^2 I_1(y) = \delta I_1(y + \delta y) - \delta I_1(y)$  функционала (67) противоположен знаку функции  $\beta'(t)$  ( $t \in [\min\{a(\Theta_1), a(T)\}, \max\{a(\Theta_1), a(T)\}]$ ).

Доказательство. Так как в силу условия 4)

$$\delta^2 I_1(y) = \int_{t_1}^{t_2} [\partial I_1(y + \delta y, \tau) - \partial I_1(y, \tau)] \eta(\tau) d\tau, \quad (4.88)$$

то изучим поведение вариации градиента  $\partial^2 I_1(y, \tau) = \partial I_1(y + \delta y, \tau) - \partial I_1(y, \tau)$  для  $\tau \in [t_1, t_2]$ . Из (84) и условия 1) следует, что при  $\tau \in [t_1, t_2]$

$$\partial^2 I_1(y, \tau) = \partial^2 \bar{I}(y, \tau) m(\tau).$$

В рассматриваемом случае  $m(t) > 0$  ( $t \in [t_0, T]$ ).

Пусть  $a(t)$  и  $\beta(t)$  в условиях 2), 3) возрастают, а  $\eta(t) \geq 0$  ( $\tau \in [t_1, t_2]$ ). Варьируя выражение для  $\partial \bar{I}(y, \tau)$  обычным образом, после преобразований получим

$$\begin{aligned} \partial^2 I(y, \tau) \leq & -(1 - y_0) \alpha^2 \int_{\tau}^T e^{-\alpha \int_{\tau}^{\tau_1} [y_0 - y(v) - \delta y(v)] dv} \times \\ & \times \int_{\tau_1}^T \frac{\beta'_{\text{ср}}(a(t))}{m_0(a(t))} \int_{t_1}^{\min(\tau_2, t_2)} \int_{t_1}^{\tau_2} e^{-\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} [y_0 - y(v)] dv} m(u) \eta(u) du d\tau_2 dt d\tau_1 + \\ & + \alpha^2 \int_{\tau}^{\tau_2} e^{-\alpha \int_{\tau}^{\tau_1} [y_0 - y(v) - \eta(v)] dv} \int_{\tau}^T [(1 - y_0) \beta(a(t)) dt - \\ & - (T - \tau_1) (1 - y(\tau_1)) \beta(\tau_1)] \int_{\tau}^{\tau_1} \eta(v) dv d\tau_1 + \\ & + \alpha e^{-\alpha \int_{\tau}^{\tau_2} [y_0 - y(v)] dv} \beta(t_2) (T - t_2) \int_{\tau}^{t_2} \eta(\tau_1) d\tau_1 - \alpha \int_{\tau}^{t_2} e^{-\alpha \int_{\tau}^{\tau_1} [y_0 - y(v) - \eta(v)] dv} \times \\ & \times (T - \tau_1) \beta(\tau_1) \eta(\tau_1) d\tau_1, \quad \tau \in [t_1, t_2], \quad (4.89) \end{aligned}$$

где  $\beta'_{\text{ср}}(a) = \frac{1}{\delta a} \int_a^{a+\delta a} \beta'(\tau) d\tau$  — арифметическое среднее функции  $\beta'(\tau)$  на отрезке  $[a, a + \delta a]$ .

Предположим теперь, что  $\Delta = t_2 - t_1$  — малая величина. Тогда первое слагаемое в правой части (89) имеет порядок  $\Delta \|\eta\|$ , второе — порядок  $\Delta^2 \|\eta\|$ , а третье и четвертое слагаемые взаимно уничтожаются. Таким образом, поведение  $\partial^2 \bar{I}(y, \tau)$  при  $\tau \in [t_1, t_2]$  определяется первым слагаемым (89) (обозначим его  $D(\tau)$ ). После изменения порядка интегрирования имеем

$$\begin{aligned} D(\tau) = & -(1 - y_0) \alpha^2 \int_{\tau}^T e^{-\alpha \int_{\tau}^{\tau_1} [y_0 - y(v)] dv} \int_{t_1}^{\min(t_2, \tau_2)} \int_{t_1}^{\tau_2} e^{-\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} [y_0 - y(v)] dv} \times \\ & \times m(u) \eta(u) du \int_{\max(\tau_1, \tau_2)}^T \frac{\beta'_{\text{ср}}(a(t))}{m_0(a(t))} dt d\tau_2 d\tau_1, \quad \tau \in [t_1, t_2]. \quad (4.90) \end{aligned}$$

Знак  $D(\tau)$  ( $\tau \in [t_1, t_2]$ ) определяется знаком функции

$$x(\tau) = \int_{\tau}^T \frac{\beta'_{\text{ср}}(a(t))}{m_0(a(t))} dt, \quad \tau \in [t_1, T].$$

Сделав замену  $a(t) = \Theta$ , получаем  $x(\tau) = \int_{a(\tau)}^{a(T)} \frac{\beta'_{cp}(\Theta)}{m_0(\Theta)} \frac{d\Theta}{a'(\Theta^{-1}(\Theta))}$ ,

откуда в силу условий 2), 3) вытекает, что  $\text{sign } x(\tau) = \text{sign } \beta'(\tau)$  ( $\tau \in [t_1, T]$ ). Аналогично доказываеся, что это соотношение справедливо при любых знаках функций  $a'$ ,  $\beta'$ ,  $\eta$ .

Из выражений (88), (90) и последнего результата следует, что независимо от знака функции  $\eta(t)$   $\text{sign } \delta^2 I(y) = -\text{sign } \beta'(\tau)$ .

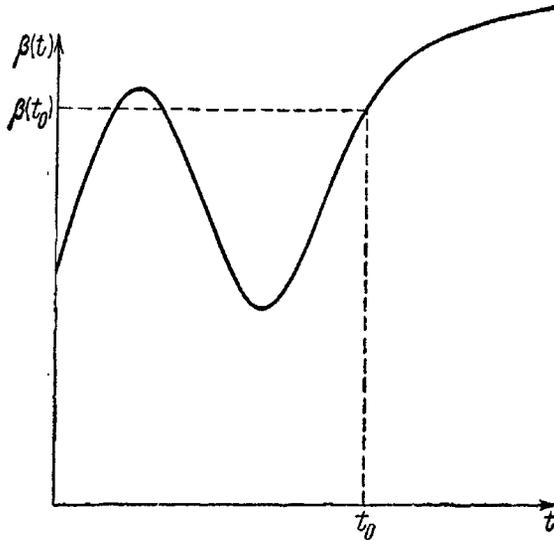


Рис. 4.3.

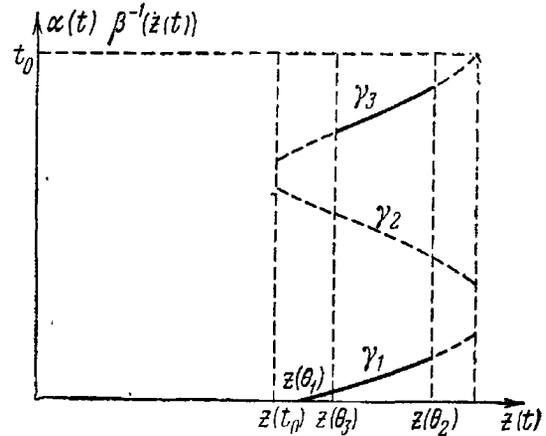


Рис. 4.4.

**Теорема 13.** Если функция  $\beta(\tau, t)$  не монотонна по  $\tau$ , то задача 1 может иметь более одного решения.

**Доказательство.** Пусть выполнены условия (83) и функция  $\beta(\tau)$  ( $\tau \in [0, T]$ ) дважды дифференцируема и имеет вид, представленный на рис. 4.3. Предположим, что отрезок  $[t_0, T]$  таков, что выполняется неравенство

$$[\beta(t_0) - \beta(0)](T - t_0) > \frac{1}{\alpha(1 - y_0)} [\beta(t_0) - \beta'_1(t_0)(T - t_0)].$$

Тогда из леммы 7 вытекает, что при  $a(t) \equiv 0$  ( $t \in [t_0, T]$ )  $\partial I_1(y, t_0) > 0$ ; следовательно, искомая  $a(t)$  возрастает. Из леммы 6 получаем, что для выполнения тождества  $\partial I_1(y, t) \equiv 0$  ( $t \in [\Theta_1, \Theta_2]$ ) необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\beta(a(t)) = z(t), \quad t \in (\Theta_1, \Theta_2), \quad (4.91)$$

$$z(t) = \beta(t) - \beta'(t)(T - t) + \frac{1}{\alpha(1 - y_0)} [2\beta'(t) - \beta''(t)(T - t)].$$

Для упрощения рассуждений предположим, что  $\beta(t)$  и  $T - t_0$  таковы, что  $z(t)$  монотонно возрастает при  $t \in [t_0, T]$ . Из немонотонности  $\beta(t)$  следует неоднозначность функции  $a(t)$ , удовлетворяющей уравнению (91). На рис. 4.4 приведены три ветви этой функции:  $\gamma_1(z)$ ,  $\gamma_2(z)$ ,  $\gamma_3(z)$ .

Рассмотрим функцию

$$a_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \Theta_1], \\ \gamma_1(z(t)), & t \in (\Theta_1, \Theta_2), \\ \gamma_1(z(\Theta_2)), & t \in [\Theta_2, T], \end{cases}$$

где момент  $\Theta_1$  определяется из условия  $\gamma_1(z(\Theta_1)) = 0$ , а момент  $\Theta_2$  — из условия

$$(T - \Theta_2) [\beta(\Theta_2) - \beta(\gamma_1(z(\Theta_2)))] = \frac{1}{\alpha(1 - y_0)} [\beta(\Theta_2) - \beta'(\Theta_2)(T - \Theta_2)].$$

Функции  $a_1(t)$  соответствует функция

$$y_1(t) = \begin{cases} y_{\min}(t), & t \in [t_0, \Theta_1] \cup (\Theta_2, T], \\ y_{\text{opt}_1}(t), & t \in (\Theta_1, \Theta_2). \end{cases}$$

Используя леммы 6—8, нетрудно убедиться в том, что  $\partial I_1(y_1, t)$  отрицательна при  $t \in [t_0, \Theta_1] \cup (\Theta_2, T]$  и равна нулю при  $t \in [\Theta_1, \Theta_2]$ ,  $\delta^2 I_1(y) < 0$ . Это означает, что кривая  $y_1(t)$  (соответственно  $a_1(t)$ ) доставляет локальный максимум функционалу  $I_1(y)$ , т. е. является решением задачи 1.

Рассмотрим функции

$$a_2(t) = \begin{cases} a_{\max}(t), & t \in [t_0, \Theta_3], \\ \gamma_3(z(t)), & t \in [\Theta_3, \Theta_2], \\ \gamma_3(z(\Theta_2)), & t \in [\Theta_2, T], \end{cases} \quad y_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_0, \Theta_3], \\ y_{\text{opt}_2}(t), & t \in [\Theta_3, \Theta_2], \\ y_{\min}(t), & t \in [\Theta_2, T], \end{cases}$$

где момент  $\Theta_3$  определяется из условия  $a_{\max}(\Theta_3) = \gamma_3(z(\Theta_3))$ . Из лемм 6—8 получаем, что  $\partial I_1(y_2, t) > 0$  при  $t \in [t_0, \Theta_3]$ ,  $\partial I_1(y_2, t) = 0$  при  $t \in [\Theta_3, \Theta_2]$ ,  $\partial I_1(y_2, t) < 0$  при  $t \in [\Theta_2, T]$  и  $\delta^2 I_1(y_2) < 0$ ; следовательно,  $y_2(t)$  (соответственно  $a_2(t)$ ) является решением задачи 1.

Покажем, что можно выбрать функции  $\beta, f, m_0$  так, чтобы  $y_i(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ) удовлетворяли ограничениям (70).

Пусть 1)  $\beta(\tau)$  ( $\tau \in [0, t_0]$ ) такова (см. рис. 4.3), что  $\Theta_1 < \Theta_3$ ,  $\frac{d\gamma(z(\Theta_3))}{dt} = \frac{da_{\max}(\Theta_3)}{dt}$ ,  $\gamma_1(z) \approx \gamma_3(z)$ ; 2)  $f(t)$  имеет разрывы при  $t = z(\Theta_1)$  и  $t = z(\Theta_2)$ :

$$f(\Theta_1 + 0) - f(\Theta_1 - 0) = -m_0 \frac{d\gamma_1(z(\Theta_1))}{dt},$$

$$f(\Theta_2 + 0) - f(\Theta_2 - 0) = m_0 \frac{d\gamma_1(z(\Theta_2))}{dt};$$

3)  $m_0(\tau) \equiv \text{const}$  ( $\tau \in [0, t_0]$ ). Тогда из (69), (70), (83) получаем, что

$$y_i(t) = \frac{1}{\alpha} \frac{f'(t) + m_0 a_i''(t) + \alpha y_0 m_0 a_i'(t)}{f(t) + m_0 a_i'(t)}, \quad i=1, 2, \quad t \in [t_0, T],$$

откуда видно, что, выбирая  $f(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ), можно удовлетворить (70).

Таким образом, мы построили два различных решения задачи, что и доказывает теорему.

**З а м е ч а н и е 1.** Значения  $I(y_1)$  и  $I(y_2)$  в общем случае различные, однако нетрудно показать, что возможен случай  $I(y_1) = I(y_2)$ , т. е. случай неединственности глобального максимума. Например, пусть  $m_0(t) \equiv m_0 = \text{const}$  ( $t \in [0, t_0]$ ). Выражая  $y(t)$  и  $m(t)$  через  $a(t)$ , получаем

$$I_1(y_2) - I_1(y_1) = \int_{t_0}^T \left\{ \int_{t_0}^t \beta(\tau) \left[ a_2'(\tau) - a_1'(\tau) - \frac{a_2''(\tau) - a_1''(\tau)}{\alpha(1-y_0)} \right] d\tau - \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \beta_0(\tau) d\tau \right\} m_0(1-y_0) dt.$$

Покажем, что можно подобрать функцию  $\beta(\tau)$  так, чтобы подынтегральное выражение тождественно равнялось нулю. Пусть  $\beta(\tau)$  ( $\tau \in [0, t_0]$ ) — такая функция, что  $\gamma_1'(z) \equiv \gamma_3'(z)$  ( $z \in [z(\Theta_3), t_0]$ ), а  $\Theta_1 = t_0$ . Для определения  $\beta(\tau)$  ( $\tau \in [t_0, \Theta_3]$ ) получаем квазилинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка, существование его решения вытекает из известных теорем о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений, причем можно выбрать это решение положительным и возрастающим. Выбрав таким образом  $\beta(\tau)$  ( $\tau \in [0, \Theta_3]$ ), получаем, что  $I_1(y_1) = I_1(y_2)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Из леммы 8 вытекает, что кривые  $\gamma_1(z)$  и  $\gamma_3(z)$  на рис. 4.4 определяют экстремали  $a(t)$ , доставляющие максимум функционалу  $I_1(y)$ , а кривая  $\gamma_2(z)$  определяет экстремаль, доставляющую локальный минимум функционалу.

## § 6. Достаточные условия единственности решений оптимизационной задачи 1

Из результатов предыдущего параграфа вытекает следующее достаточное условие единственности решения задачи в рассмотренном выше частном случае.

**Т е о р е м а 14** (достаточное условие единственности 1). *Если выполнены условия (83), а отрезок  $[t_0, T]$  — такой, что  $a_{\text{opt}}(T) \leq t_0$ , то для единственности решения задачи 1 достаточно, чтобы функция  $\beta(t)$  была монотонной на отрезке  $[0, T]$ ,  $P(t)$  имела кусочно-непрерывную вторую производную.*

Требование монотонности  $\beta(t)$  следует из леммы 6, а последнее условие гарантирует существование и единственность функции  $y_{\min}(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ).

Рассмотрим задачу 1 в общем случае, накладывая лишь некоторые естественные ограничения на заданные функции, а именно: 1)  $\alpha(\tau, t)$  удовлетворяет условию Липшица по  $t$  ( $t \in [t_0, T]$ ); 2)  $\alpha(t, t) \neq 0$ ,  $m_0(t) \neq 0$ ; 3)  $P'(t)$  имеет ограниченную вариацию на  $[t_0, T]$ .

Из 1)–3) вытекает единственность функции  $y_{\min}(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ) (см. теорему 4).

Из теоремы 12 видно, что проблема единственности решения задачи в основном сводится к исследованию единственности решения уравнения

$$\partial I_1(y, \tau) \equiv 0, \quad \tau \in [\Theta_1, \Theta_2], \quad t_0 \leq \Theta_1 < \Theta_2 < T. \quad (4.92)$$

Из (92) и леммы 4 получаем следующую систему уравнений относительно функций  $a(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\psi(t)$ :

$$-\partial \bar{I} \equiv \int_{\tau}^{\underline{a}^{-1}(\tau)} \alpha(\tau, t) \psi(t) dt + \int_{\tau}^{\underline{a}^{-1}(\tau)} \beta(\tau, t) dt = 0, \quad (4.93)$$

$$\int_{\tau}^{\underline{a}^{-1}(\tau)} \{\psi(t) \alpha(a(t), t) y(a(t)) - \beta(a(t), t) [1 - y(a(t))]\} dt + \\ + \int_{\tau}^{\underline{a}^{-1}(\tau)} \beta(\tau, t) dt + \psi(\tau) = 0, \quad \underline{a}^{-1}(\tau) = \min \{a^{-1}(\tau), T\}, \\ \tau \in [\Theta_1, \Theta_2].$$

Функции  $a(t)$  и  $y(t)$  связаны соотношениями (68), (69), так что в общем случае мы имеем систему четырех нелинейных интегро-функциональных уравнений (68), (69), (93) относительно  $a$ ,  $y$ ,  $m$ ,  $\psi$ .

Дальнейшее исследование разобьем на несколько этапов.

I. С л у ч а й «н е б о л ь ш о г о» отрезка  $[t_0, T]$ , удовлетворяющего условию

$$a_{\text{opt}}(T) \leq t_0. \quad (4.94)$$

Тогда система (93) имеет вид

$$-\partial \bar{I} \equiv \int_{\tau}^T [\alpha(\tau, t) \psi(t) + \beta(\tau, t)] dt = 0, \\ \int_{\tau}^T \{\psi(t) \alpha(a(t), t) y_0(a(t)) - \beta(a(t), t) [1 - y_0(a(t))]\} dt + \\ + \int_{\tau}^T \beta(\tau, t) dt + \psi(\tau) = 0. \quad (4.95)$$

В (95) функция  $y(\tau) \equiv y_0(\tau)$  ( $\tau \in [t_0, T]$ ) задана, а функции  $a(t)$  и  $\psi(t)$  являются неизвестными. Первое соотношение (95) представляет собой уравнение Вольтерра первого рода относительно функции  $\psi(t)$ . Продифференцировав его, приходим к уравнению Вольтерра второго рода:

$$\psi(\tau) = \int_{\tau}^T \frac{\alpha'_{\tau}(\tau, t)}{\alpha(\tau, \tau)} \psi(t) dt + \int_{\tau}^T \frac{\beta'_{\tau}(\tau, t)}{\alpha(\tau, \tau)} dt - \frac{\beta(\tau, \tau)}{\alpha(\tau, \tau)}, \quad (4.96)$$

к которое имеет единственное суммируемое решение  $\psi(t)$ , если  $\alpha(\tau, \tau) \neq 0$  и функции  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$  непрерывны и имеют ограниченную вариацию [254]. Подставляя это решение во второе уравнение (95) и продифференцировав его, получаем нелинейное уравнение относительно функции  $a(\tau)$ :

$$\begin{aligned} \psi(\tau) \alpha(a(\tau), \tau) y_0(a(\tau)) - \beta(a(\tau), \tau) [1 - y_0(a(\tau))] = \\ = \psi'(\tau) - \beta(\tau, \tau) + \int_{\tau}^T \beta'_{\tau}(\tau, t) dt, \quad \tau \in (\Theta_1, \Theta_2). \end{aligned} \quad (4.97)$$

Очевидно, что из единственности решения уравнения (97) вытекает единственность решения уравнения (92).

**Т е о р е м а 15** (достаточное условие единственности 2). Пусть 1) выполнено условие (94); 2) решение уравнения (96)  $\psi(t) \leq 0$  ( $t \in [t_0, T]$ ); 3) функции  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$  имеют ограниченную вариацию по  $\tau$  на  $[0, T]$ ; 4) функции  $\beta(\tau, t) [1 - y_0(\tau)]$ ,  $\alpha(\tau, t) y_0(\tau)$  монотонно возрастают по  $\tau$  при  $(\tau, t) \in [0, t_0] \times [t_0, T]$ . Тогда задача 1 имеет не более одного решения.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим выражение в левой части (97) через  $\sigma(a(\tau), \tau)$ . В силу условий 2), 4) функция  $\sigma(a, \tau)$  имеет единственную обратную по  $a$  функцию; следовательно, уравнение (97) имеет единственное решение (обозначим его через  $\tilde{a}(t)$ ). Покажем, что отсюда вытекает единственность решения задачи 1.

Рассмотрим функцию

$$a_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} \tilde{a}(t), & t \in [t_0, \Theta], \\ a_{\min}(t), y(t) = y_{\min}(t), & t \in [\Theta, T], \end{cases}$$

где момент  $\Theta$  определяется теоремой 12. Если  $\tilde{a}(t_0) = 0$ ,  $\tilde{a}'(t_0) = \frac{m_0(t_0) - f(t_0)}{m_0(0)}$  и соответствующая  $\tilde{y}(t)$  ( $t \in [t_0, \Theta]$ ) удовлетворяет

(70), то функция  $\tilde{a}_{\text{opt}}(t)$  является единственным решением задачи. В общем случае построение решения усложняется.

Рассмотрим градиент  $\partial l(y, \tau)$  как оператор от функции  $a(t)$  (обозначим его  $D(a, \tau)$ ). В общем случае  $D: C_{[t_0, T]}^1 \rightarrow C_{[t_0, T]}$ . Однако из (95) следует одно важное свойство оператора  $D$ : если  $D(a, \tau) = 0$ , то  $D(a, \tau)$  не зависит от  $a(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ).

Найдем производную Гато  $D'_a(a, \tau)$  ( $\tau \in [t_0, \Theta]$ ) градиента  $D(a, \tau)$  по  $a$  в точке  $a = a_{\text{opt}}$ . Используя правило дифференцирования неявной функции в банаховых пространствах (см., например, [151, с. 311]), из уравнений (95) получаем

$$D'_a h = \int_{\tau}^T \alpha(\tau, t) g(t) dt,$$

$$g(\tau) = \Gamma^{-1} \int_{\tau}^T \{ \psi(t) \alpha(a(t), t) y_0(a(t)) - \\ - \beta(a(t), t) [1 - y_0(a(t))] \}' h(t) dt, \\ \Gamma x(\tau) = x(\tau) + \int_{\tau}^T \alpha(a(t), t) y_0(a(t)) x(t) dt.$$

Из этих формул и единственности  $a_{\text{opt}}$  следует, что

$$a(t) < a_{\text{opt}}(t), \quad t \in [t_0, T], \Rightarrow D(a, \tau) > 0, \quad \tau \in [t_0, \Theta],$$

$$a(t) > a_{\text{opt}}(t), \quad t \in [t_0, T], \Rightarrow D(a, \tau) < 0, \quad \tau \in [t_0, T].$$

Пусть  $y(t), a(t)$  ( $t \in [t_0, T], a(t_0) = 0$ ) — решение задачи 1. Предположим, что  $a_{\text{opt}}(t_0) > 0$ . Возможны два случая.

а)  $a(t) < a_{\text{opt}}(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ). Тогда  $D(a, \tau) > 0$  ( $\tau \in [t_0, \Theta']$ ); следовательно,

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_0, \Theta'], \\ y_{\min}(t), & t \in [\Theta', T], \end{cases}$$

есть единственное решение задачи.

б)  $a(t)$  пересекает  $a_q(t)$ . Изучим этот случай подробнее. Предположим, что  $a(t) < a_q(t)$  ( $t \in [t_0, \tau_1]$ ),  $a(t) \equiv a_q(t)$  ( $t \in [\tau_1, T]$ ). Тогда в силу указанных свойств оператора  $D(a, t) > 0$   $y(t) \equiv 1$ ,  $a(t) = a_{\max}(t)$  ( $t \in [t_0, \tau_1]$ ). Следовательно, такое поведение  $a(t)$  возможно только при выполнении условия  $a'_{\max}(\tau_1) = a'_q(\tau_1)$ .

В общем случае  $a(t) \neq a_q(t)$  и градиент  $\partial I(y, \tau)$  тождественно не равен нулю.

Пусть градиент принимает на  $[t_0, T]$  как положительные, так и отрицательные значения. Обозначим точки перемен знака градиента через  $\tau_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Очевидно, что на интервалах  $(\tau_i, \tau_{i+1})$   $y(t) \equiv 1$  либо  $y(t) \equiv y_{\min}(t)$  (см. последние два графика на рис. 4.5). Изучим поведение функции  $a(t)$ . Из (95) получаем, что

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [R(a(t), t) - R(a_q(t), t)] dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.98)$$

В силу условий теоремы функция  $R(a, t)$  непрерывна и монотонно убывает по  $a$ , тогда по теореме о среднем существует хотя бы один момент  $\bar{\tau}$  такой, что  $\tau_i < \bar{\tau} < \tau_{i+1}$ ,  $R(a(\bar{\tau}), \bar{\tau}) = R(a_q(\bar{\tau}), \bar{\tau})$ ; следовательно,  $a(\bar{\tau}) = a_q(\bar{\tau})$ . Таким образом, на каждом отрезке  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  функции  $a(t), a_q(t)$  пересекаются (см. первый график на рис. 4.5).

Докажем единственность решения в последнем случае. Для этого рассмотрим функцию  $a_{\tau_1}(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ), построенную следующим образом:

1)  $y(t) \equiv 1$ ,  $a_{\tau_1}(t) = a_{\max}(t)$  ( $t \in [t_0, \tau_1]$ ),  $t_0 < \tau_1 < T$ , где  $\tau_1$  задано;

2)  $y(t) \equiv y_{\min}(t)$  ( $t \in [\tau_1, \tau_2]$ ), где  $\tau_2$  — ближайшая справа точка к  $\tau_1$ , удовлетворяющая условию (98); если (98) не выполняется ни при каком  $\tau_2 \in [\tau_1, T]$ , то  $\tau_2 = T$ ;

3)  $y(t) \equiv 1$  ( $t \in [\tau_2, \tau_3]$ ), где  $\tau_3$  определяется аналогично, однако в последнем случае полагаем  $\tau_3 = \Theta$ , где  $\Theta$  определяется из условий  $y(t) \equiv y_{\min}(t)$ ,  $\partial I_1(y, t) < 0$  ( $t \in (\Theta, T]$ ),  $\partial I_1(y, \Theta) = 0$ .

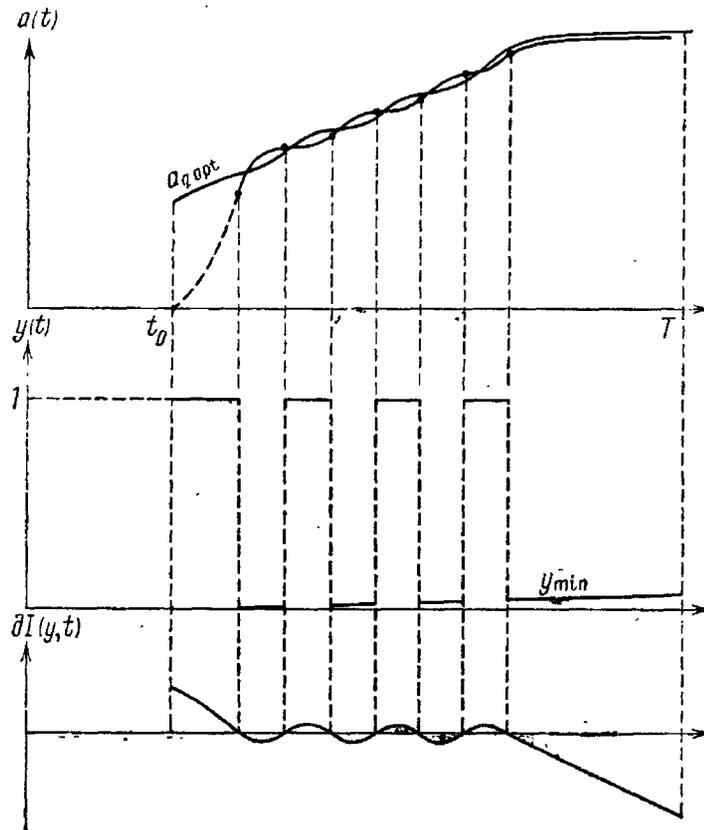


Рис. 4.5.

Пункты 2), 3) повторяем до тех пор, пока не получим функцию  $a_{\tau_1}(t)$  на всем отрезке  $[t_0, T]$ . Таким образом, задание момента  $\tau_1$  полностью определяет функцию  $a_{\tau_1}$ , т. е. мы построили отображение  $\tau_1 \rightarrow a_{\tau_1}(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ). Из способа построения вытекает, что это отображение непрерывно, производная Гато  $\partial a_{\tau_1} / \partial \tau_1$  положительна и имеет место следующее свойство:

$$\text{sign}[a_{\tau_1}(\tau_i) - a_q(\tau_i)] = -\text{sign}[a_{\tau_1}(\tau_{i+1}) - a_q(\tau_{i+1})].$$

Рассмотрим непрерывную функцию

$$P(\tau_1) = \int_{\tau_1}^T [R(a_{\tau_1}(t), t) - R(a_q(t), t)] dt.$$

Очевидно, что если  $P(\tau_1) = 0$ , то функция  $a_{\tau_1}(t)$  является решением  $a(t)$  рассматриваемой задачи.

Из свойств оператора  $D(a, \tau)$  вытекает, что в последней точке  $\tau_N$  происходит перемена знака:  $a(\tau_N) < a_q(\tau_N)$ . Тогда можно показать, что  $a(\tau_1) > a_q(\tau_1)$ . Найдем производную функции  $P(\tau_1)$ :

$$P'(\tau_1) = R(a_q(t), t) - R(a_{\tau_1}(t), t) + \int_{\tau_1}^T \frac{\partial R(a_{\tau_1}, t)}{\partial a_{\tau_1}} \frac{\partial a_{\tau_1}(t)}{\partial \tau_1} dt.$$

В силу свойств функции  $R(a, t)$  и отображения  $\tau_1 \rightarrow a_{\tau_1}(t)$  получаем, что  $P'(\tau_1) < 0$  в интересующей нас области; следовательно, уравнение  $P(\tau_1) = 0$  имеет единственное решение  $\tau_1^*$  и функция  $a_{\tau_1^*}(t \in [t_0, T])$  является единственным решением задачи. Если  $P(\tau_1) = 0$  не имеет решения, то приходим к рассмотренному выше случаю а).

Случай  $a_{\text{opt}}(t_0) = 0$  исследуется аналогично. Теорема доказана.

Условие 2) теоремы всегда выполняется для  $\tau$ , близких к  $T$ , однако в общем случае оно накладывает определенные ограничения на функции  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$ . Для выяснения структуры этих ограничений рассмотрим один важный частный случай теоремы 15:

$$\alpha(\tau, t) = \alpha_1(\tau)/\alpha_2(t), \quad \beta(\tau, t) \equiv \beta(\tau) \quad (4.99)$$

(это случай 3 из работы [73]). При условиях (99) решение уравнения (96) имеет вид

$$\psi(t) = \alpha_2(t) \left[ \frac{(T-t)\beta(t)}{\alpha_1(t)} \right]'. \quad (4.100)$$

**С л е д с т в и е** (достаточное условие единственности 3). Пусть 1) выполнены условия (94), (99); 2) функция  $(T-t)\beta(t)/\alpha_1(t)$  не возрастает на  $[t_0, T]$ ; 3) функции  $\beta(t)$   $[1 - y_0(t)]$ ,  $\alpha_1(t)$   $y_0(t)$  монотонно возрастают на  $[0, t_0]$ . Тогда задача 1 имеет не более одного решения.

**З а м е ч а н и е 1.** Если выполнены условия теоремы 15 и функции  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $y_0$  таковы, что  $\partial R/\partial a \leq \eta < 0$ , то задача устойчива к таким малым по норме возмущениям  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$ ,  $\delta y_0$ ,  $\delta m_0$ ,  $\delta P$  заданных функций, что первые и вторые производные  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$ ,  $\delta y_0$  также являются малыми.

Действительно, линеаризуя уравнение (97) в окрестности его решения  $\tilde{a}(\tau)$ , получаем, что  $\delta\tilde{a}(t) = \frac{\Delta R(\tilde{a}(t), t)}{\partial R(\tilde{a}, t)/\partial a}$ ; следовательно,

функция  $\tilde{a}(t)$  получит малое приращение. Из доказательства теоремы следует, что приращение решения задачи  $a(t)$  будет также малым. Из (68), (69) видно, что  $m(t)$  и  $y(t)$  выражаются через  $a'(t)$  и  $a''(t)$ , откуда вытекает требование малости производных заданных функций.

**З а м е ч а н и е 2.** Кроме теоремы 15 и следствия из нее, из уравнений (96), (97) можно получить и другие достаточные условия единственности решения задачи 1, в частности, теорему 14.

**З а м е ч а н и е 3.** Уравнения (96), (97) могут быть получены также на основе выражения для градиента  $\partial I_1(y, \tau)$ , приведенного в

лемме 3, однако этот путь связан с более громоздкими математическими выкладками.

**З а м е ч а н и е 4.** При построении решений задачи 1 желательно уметь проверять выполнение ограничений на  $y$  ( $\tau$ ) непосредственно по поведению функции  $a$  ( $\tau$ ). Математическим аппаратом для получения таких оценок является теория дифференциальных и интегральных неравенств (см., например, [12]). Например, при условиях (94), (99) из соотношений (68), (69) и ограничения  $0 \leq y \leq 1$  вытекает дифференциальное неравенство для функций  $a$ :

$$0 \leq [\alpha_2 m_0(a) a']' + \alpha_1(a) y_0(a) m_0(a) a' + [\alpha_2 P]' \leq \leq \alpha_1 m_0(a) a' + \alpha_1 P. \quad (4.101)$$

Решив это неравенство (если это удастся сделать), получим ограничения на функцию  $a$ . При этом из уравнения (97) для  $a$  можно вывести ограничения на заданные функции  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta$ ,  $m_0$ ,  $y_0$ ,  $P$ , гарантирующие выполнение неравенства

$$0 \leq y(\tau) \leq 1 \quad (\tau \in [\Theta_1, \Theta_2]).$$

В последнем случае структура решений задачи упрощается.

**З а м е ч а н и е 5.** Наиболее трудным для априорной проверки является условие (94), поэтому ниже сделаны попытки снять либо ослабить это ограничение.

II. Случай произвольного отрезка  $[t_0, T]$ . Введем обозначения  $a^n(t) = a(a^{n-1}(t))$ ,  $a^{-n}(t) = a^{-1}(a^{-n+1}(t))$  ( $n = 2, 3, \dots$ ),  $a^0(t) = t$ ,  $a^{-n}(t) = \min\{a^{-n}(t), T\}$ .

Из (70) и непрерывности  $a(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ) следует, что существует натуральное число  $N$  такое, что  $a^N(T) \leq t_0$ . Разобьем отрезок  $[t_0, T]$  на отрезки точками  $t_i = a^{N-i}(T)$  ( $i = \overline{1, N}$ ) и введем функции

$$y_i(t) \equiv y(t), \quad a_i(t) \equiv a(t), \quad \psi_i(t) \equiv \psi(t) \quad (t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = \overline{1, N}).$$

Рассмотрим систему уравнений (93) на отрезках  $[t_{k-1}, t_k]$  последовательно от  $k = N$  до  $k = 1$  и для каждого отрезка, начиная с  $k = N - 1$ , выполним следующие преобразования. Разобьем интеграл в уравнениях (93) на сумму интегралов по введенным отрезкам и последовательно исключим из второго уравнения (93) интегралы, содержащие  $y_i$  ( $i = \overline{k, N}$ ). Получим следующую систему  $2N$  уравнений относительно неизвестных функций  $y_i(\tau)$ ,  $a_i(\tau)$ ,  $\psi_i(t)$  (функции  $y_i(\tau)$  и  $a_i(\tau)$  связаны соотношениями (68), (69)):

$$\int_{\tau}^{t_k} \alpha(\tau, t) \psi_k(t) dt + \int_{t_k}^{a_{k+1}^{-1}(\tau)} \alpha(\tau, t) \psi_{k+1}(t) dt + \int_{\tau}^{a_{k+1}^{-1}(\tau)} \beta(\tau, t) dt = 0, \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau}^{t_k} \{ \psi_k(t) \alpha(a_k(t), t) y_{k-1}(a_k(t)) - \beta(a_k(t), t) [1 - y_{k-1}(a_k(t))] \} dt + \\
& + \sum_{i=k}^N \psi_i(a_i^{k-i}(\tau)) + \sum_{i=k}^N \int_{a_i^{k-i}(\tau)}^{a^{k-i-1}(\tau)} \beta(a_i^{k-i}(\tau), t) dt - \\
& - \sum_{i=k+1}^N \psi_i(t_{i-1}) - \sum_{i=k+1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \beta(t_{i-1}, t) dt = 0, \quad (4.103) \\
& \tau \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = \overline{1, N}.
\end{aligned}$$

Видно, что уравнения (102) содержат неизвестные  $\psi_k, a_{k+1}$ , а уравнения (103) — неизвестные  $y_{k-1}, \Phi_i, a_i$  ( $i = \overline{k, N}$ ). Решая систему с правого конца отрезка  $[t_0, T]$ , можно формально получить операторные зависимости (вообще говоря, неоднозначные)  $\psi_N(y_{N-1})$  и  $a_N(y_{N-1})$ , из уравнений (68), (69) определить  $y_{N-1}(a_1, \dots, a_{N-1})$ , а затем для  $k = N - 1, \dots, 1$  аналогичным образом исключить из (102), (103)  $\psi_{k+1}$  и  $a_{k+1}$ , пока не получим при  $i = 1$  систему двух уравнений относительно  $\psi_1, y_1, a_1$ , решаемую совместно с (68) — (70). Очевидно, что доказать единственность полученного решения будет весьма сложно.

Рассмотрим один частный случай, важный для приложений [67], в котором система (102), (103) значительно упрощается.

Теорема 16 (достаточное условие единственности 4). Пусть 1)  $\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\beta(\tau, t)}{\alpha(\tau, t)} \right] \equiv 0$ ; 2) функция  $\beta(\tau, t)$  монотонна по  $\tau$  в своей области определения. Тогда задача 1 имеет не более одного решения.

Доказательство. В силу условия 1)  $\beta(\tau, t)/\alpha(\tau, t) = \gamma(t)$  — некоторая функция от  $t$ . Введем новую переменную  $Y(t) = \psi(t) + \gamma(t)$ . Из первого уравнения (93) после дифференцирования по  $\tau$  имеем

$$\begin{aligned}
Y(\tau) &= \\
&= \frac{1}{\alpha(\tau, \tau)} \int_{\tau}^{a^{-1}(\tau)} \frac{\partial \alpha(\tau, t)}{\partial \tau} Y(t) dt + \alpha(\tau, a^{-1}(\tau)) Y(a^{-1}(\tau)) \frac{da^{-1}(\tau)}{d\tau}.
\end{aligned}$$

Последовательно решая это уравнение на  $[t_{k-1}, t_k]$  для  $k = N, N - 1, \dots, 1$ , получаем

$$\psi(t) \equiv - \frac{\beta(\tau, t)}{\alpha(\tau, t)}, \quad t \in [t_0, T]. \quad (4.104)$$

Подставляя (104) во второе уравнение (93), приходим к уравнению

$$\int_{\tau}^{a^{-1}(\tau)} [\beta(\tau, t) - \beta(a(t), t)] dt + \psi(\tau) = 0.$$

Продифференцировав его, получим

$$\beta(a_k(\tau), \tau) = \beta(\tau, \tau) - \int_{\tau}^{a_{k+1}^{-1}(\tau)} \beta'_{\tau}(\tau, t) dt - \psi'_k(\tau), \quad k = \overline{1, N}. \quad (4.105)$$

В систему (105) не входит  $y(t)$ , а  $a_k(t)$  зависит только от  $a_{k+1}(t)$ ; следовательно, система легко решается справа налево (от  $N$  к  $1$ ) и в силу условия 2) имеет не более одного решения  $\tilde{a}(t)$  ( $t \in [t_0, \Theta]$ ). Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 15.

Из теоремы вытекают два очевидных следствия.

**С л е д с т в и е 1** (достаточное условие единственности 5). Пусть 1)  $\beta(\tau, t) = k\alpha(\tau, t)$  ( $k = \text{const}$ ); 2)  $\beta(\tau, t)$  монотонна по  $\tau$ . Тогда задача 1 имеет не более одного решения.

**С л е д с т в и е 2** (достаточное условие единственности 6). Пусть 1)  $\alpha(\tau, t) = \alpha_1(\tau)/\alpha_2(\tau)$ ,  $\beta(\tau, t) = \beta_1(\tau)/\beta_2(t)$ ; 2)  $\beta_1(\tau) = k\alpha_1(\tau)$  ( $k = \text{const}$ ); 3)  $\beta_1(\tau)$  — монотонная функция. Тогда задача 1 имеет не более одного решения.

Вопрос об условиях единственности решения задачи 1 на произвольном отрезке  $[t_0, T]$  в общем случае остается пока нерешенным. Для иллюстрации возникающих трудностей рассмотрим случай разбиения отрезка  $[t_0, T]$  на два отрезка, т. е. пусть  $a_{\text{opt}}^2(T) < t_0$ . Пусть также функции  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$  удовлетворяют условию (99). Тогда после ряда преобразований система интегральных уравнений (102), (103) сводится к следующей нелинейной краевой задаче четвертого порядка для обыкновенных дифференциальных уравнений (относительно неизвестных функций  $a_1(t)$ ,  $m_1(t)$ ,  $\psi_1(t)$ ,  $v(t) \equiv a_2^{-1}(t)$  ( $t \in [t_0, t_1]$ )):

$$m'_1 = \frac{1}{\alpha_2} \{[\alpha_1 y_1 - \alpha_1(a_1) y_0(a_1) - \alpha'_2] m_1 + \alpha_1(a_1) y_0(a_1) \rho\},$$

$$a'_1 = \frac{m - \rho}{m_0(a_1)},$$

$$\begin{aligned} \psi'_1 = & [\alpha_1(a_1) y_0(a_1) - \alpha_1 y_1] \frac{\psi_1}{\alpha_2} - \beta(a_1) [1 - y_0(a_1)] + \\ & + \beta [1 - y_1] + \left\{ \alpha_1 \left[ \frac{\beta}{\alpha_1} \right]' y_1 - \beta' \right\} (v - \tau), \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\lambda(\tau, v) v' = \frac{\psi_1}{\alpha_2} + \frac{\beta}{\alpha_1} - \left[ \frac{\beta}{\alpha_1} \right]' (v - \tau),$$

$$\alpha_1(\tau) y_1(\tau) \lambda(\tau, v) = \mu(\tau, v)$$

с нелинейными краевыми условиями

$$m(t_0) = m_0(t_0), \quad a(t_0) = 0, \quad \psi_1(t_1) = \psi(t_1),$$

$$y_1(t_1) \left[ \alpha_1(t_1) \frac{\beta(v(t_1))}{\alpha_1(v(t_1))} - \beta(t_1) \right] = \frac{\psi(v(t_1))}{T - v(t_1)} + \beta(t_1) - \beta(v(t_1)),$$

$$\frac{\psi(t_1)}{\alpha_2(t_1)} \alpha_1(a_1(t_1)) y_0(a_1(t_1)) - \beta(a_1(t_1)) [1 - y_0(a_1(t_1))] = \quad (4.107)$$

$$= \psi'(t_1) - [\beta(t_1)(T - t_1)]'.$$

Здесь

$$\lambda(\tau, v) = \frac{\beta(\tau)}{\alpha_1(\tau)} - \left[ \frac{\beta(v)(T - v)}{\alpha_1(v)} \right]' v, \quad (4.108)$$

$$\mu(\tau, v) = \beta(\tau) + [\beta(v)(T - v)]'_v + \psi'(v),$$

а  $\psi(t)$  определяется по формуле (99).

Задача (106), (107) является задачей с подвижной границей (момент  $t_1$  заранее неизвестен и определяется в процессе решения). Современное состояние теории нелинейных краевых задач (см., например, [135, 293]) не дает ответа на вопрос о единственности решений задачи (106), (107).

Интересным для приложений [67, 73] является случай близких  $\alpha_1(\tau)$  и  $\beta(\tau)$  (таких, что  $\|[\alpha_1/\beta]'\|$  является малой величиной). Тогда задача (106), (107) оказывается сингулярно возмущенной (функция  $\lambda(\tau, v)$  имеет порядок величины  $[\alpha_1/\beta]'$ ) (см. [253]). Вырожденная система для уравнений (106), (107) соответствует случаю  $\alpha_1(\tau) \equiv \beta(\tau)$  (см. следствие 2 теоремы 16). Для исследования задачи в этом случае можно использовать теорию сингулярных возмущений [47]. Особенно ценным является то обстоятельство, что описанные в [47] методы позволяют одновременно с построением приближенного решения задачи исследовать вопрос о его единственности.

Для численного исследования краевой задачи (106), (107) в общем случае могут быть использованы метод квазилинеаризации [23] и метод инвариантного погружения [24], в случае неоднозначности решений — методы теории ветвления решений [46].

## § 7. Некоторые обобщения и замечания

1. Обобщая полученные результаты, можно сказать, что самым существенным условием единственности решения задачи является монотонность по  $\tau$  функций  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$ . Если  $\beta(\tau, t)$  убывает по  $\tau$ , то получаем тривиальный режим:  $y \equiv y_{\min}$ . Наиболее интересным для приложений является случай монотонно возрастающих по  $\tau$  функций  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$ .

2. Специфической чертой задачи является ее сильная зависимость от длины планового отрезка  $[t_0, T]$ . По характеру решений и методам исследования можно выделить три типа отрезка  $[t_0, T]$ : «малый» (см. теорему 4), «небольшой» и «произвольный» (см. § 6), причем с увеличением длины интервала сложность построения решения задачи и исследования его свойств резко возрастает.

3. Наиболее эффективным управлением для рассматриваемых процессов оказывается функция  $a(t)$ . Однако возможности управления сужаются из-за *инерционности* процесса, которая заключа-

ется в требовании ограниченности второй производной функции  $a(t)$  (это необходимо для выполнения условия  $0 \leq y \leq 1$ ).

4. Заданная предыстория процесса на отрезке  $[0, t_0]$  определяет начальные условия для функции  $a(t)$  и ее производной:

$$a(t_0) = 0, \quad a'(t_0) = [m_0(t_0) - p(t_0)]/m_0(0)$$

(это также проявление инерционности процесса).

5. В рассмотренных случаях (теоремы 14—16) существует некоторая функция  $a_{q \text{ opt}}(t)$  (вообще говоря, неоднозначная), для которой градиент функционала  $I_1$  тождественно равен нулю на отрезке  $[t_0, \Theta]$  ( $t_0 \leq \Theta \leq T$ ). Если  $a_{q \text{ opt}}(t)$  удовлетворяет условиям (70) и начальным условиям для  $a(t)$ , то она является решением задачи. В общем случае оптимальная  $a(t)$  колеблется относительно  $a_{\text{opt}}(t)$ , а оптимальная  $y(t)$  принимает минимальные и максимальные значения (см. рис. 4.5).

6. Функция  $a_{q \text{ opt}}(t)$  определяется функцией  $\beta(\tau, t)$  и величиной  $T - t_0$ . Несовпадение в точке  $t_0$  функций  $a_{q \text{ opt}}(t)$  и  $a(t)$  отражает влияние предыстории процесса на возможности его оптимизации в дальнейшем. Экстремальные значения управления  $y(t)$  (см. п. 5) вызваны необходимостью скорейшего перехода от «плохой предыстории» к наивыгоднейшему режиму функционирования, которому соответствует функция  $a_{q \text{ opt}}(t)$ . При перспективном планировании длина отрезка  $[t_0, T]$  должна согласовываться с предысторией.

7. Заметим, что если не выполняется требование монотонного возрастания по  $\tau$  функций  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$ , то лежащее в основе рассмотренной задачи допущение о стопроцентной загрузке производственных мощностей на временном отрезке  $[a(t), t]$  (см. [73]) может оказаться чрезмерно жестким и оптимальный закон распределения и загрузки мощностей будет иметь иной, более сложный характер. Определение этого закона представляет собой более трудную задачу, являющуюся обобщением рассмотренной задачи 1 (см. п. 2.2).

8. В общем случае модели, когда функции типа  $\alpha$  и  $\beta$  могут принимать произвольные знаки и иметь колебательный характер, неединственность решений оптимизационных задач может быть также следствием неединственности решений систем нелинейных уравнений при заданных управляющих воздействиях. Причиной такой неединственности может быть неоднозначная обратимость заданных (благодаря предыстории) нелинейных операторов, нарушение условия Липшица для нелинейных систем типа Вольтерра и пр. Частными случаями модели могут быть все хорошо изученные случаи ветвления решений для нелинейных систем дифференциальных уравнений [46] и также все известные случаи катастроф [217].

## § 8. Асимптотические свойства решений

8.1. **Общий случай двухпродуктовой модели.** Рассмотрим для простоты двухпродуктовую модель в виде (3.34). Будем предполагать, что при  $t \rightarrow \infty$  выполнено условие А (3.178) или Б (3.179).

Теорема 17. Пусть выполнено условие А и условия теорем 14, 15 гл. 3. Тогда

$$\begin{aligned}
 I_1 &= C(T) - C(t_0) = \int_{t_0}^T c(t) dt \leq \\
 &\leq \int_{t_0}^{t_1} |c_1(t)| dt + (1 + \varepsilon_\beta) |\bar{\beta} \bar{\mu}| \int_0^{t_1} \frac{e^{c\beta\tau}}{\tau+1} |m_1(\tau)| d\tau \frac{e^{-c\beta t_1} - e^{-c\beta T}}{c\beta} + \\
 &\quad + (1 + \varepsilon_\alpha) \bar{m}^+(t_1) e^{c\alpha t_1} \int_{t_1}^T e^{-c\beta t} \int_{t_1}^t \frac{e^{(c\beta - c\alpha)\tau}}{\tau+1} \left(\frac{\tau+1}{t_1+1}\right)^{|\bar{\alpha}\bar{\lambda}y|} d\tau dt, \\
 \bar{m}^+(t_1) &= |\bar{\alpha}_\infty \bar{\lambda}| e^{-c\alpha t_1} \int_0^{t_1} \frac{e^{c\alpha t}}{\tau+1} |y(\tau) m_1(\tau)| d\tau, \quad (4.109)
 \end{aligned}$$

где  $m_1, c_2$  — решения исходной системы (3.34) при  $y = y_1$ .

Доказательство легко вытекает из условий теоремы и теорем 14, 15 гл. 3.

Как следствие получаем, что в условиях теоремы 22 гл. 3 функционал  $I_1$  и его максимальное значение остаются ограниченными, когда  $T \rightarrow \infty$ . Можно показать (см. (3.188)), что в случае неотрицательности  $\alpha_\infty \bar{\lambda} y$ ,  $\beta_\infty \bar{\mu}$  и  $ym$ , а также  $0 < d_1 \leq y \leq d_2 < 1$ , где  $d_1, d_2$  — некоторые константы, оценка (109) будет также оценкой по порядку снизу для  $I_1$  и его максимального значения.

Теорема 18. Пусть выполнено условие Б, условие теоремы 16 гл. 3, а также условие

$$\begin{aligned}
 |\beta(\tau, t) \mu(\tau, t) - \bar{\beta}_\infty \bar{\mu} \tau e^{c\beta(\tau-t)}| &\leq \varepsilon_\beta |\bar{\beta}_\infty \bar{\mu}| \tau e^{c\beta(\tau-t)}, \\
 0 \leq t - a(t) &\leq d/t, \quad t \geq t_1 = t_1(\varepsilon_\beta). \quad (4.110)
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^T c(t) dt &\leq \frac{1}{c\beta} (1 + \varepsilon_\alpha) (1 + \varepsilon_\beta) |\bar{\beta}_\infty \bar{\mu}| |\bar{\alpha}_\infty \bar{\lambda}| e^{(1+\varepsilon_\alpha)\bar{\alpha}_\infty \bar{\lambda} d} \times \\
 &\quad \times \int_{t_1}^T t e^{-c\alpha t} \int_{a(t_1)}^t e^{c\alpha\tau} \tau m(\tau) d\tau (e^{(1+\varepsilon_\alpha)\bar{\alpha}_\infty \bar{\lambda} d} - 1)^{t^2/(2d)} dt, \quad (4.111)
 \end{aligned}$$

где  $m(t)$  является решением линейного неравенства

$$m(t) \leq (1 + \varepsilon_\alpha) \bar{\alpha}_\infty \bar{\lambda} e^{(1+\varepsilon_\alpha)\bar{\lambda} d} \int_{a(t_1)}^t e^{c\alpha\tau} \tau m(\tau) d\tau (e^{(1+\varepsilon_\alpha)\bar{\alpha}_\infty \bar{\lambda} d} - 1)^{t^2/(2d)}, \quad (4.112)$$

знак  $\leq$  означает неравенство, справедливое по порядку асимптотики при  $T \rightarrow \infty$  для (111) и при  $t \rightarrow \infty$  для (112).

Доказательство легко следует из условий теоремы и теоремы 16 гл. 3.

Как следствие при  $(1 + \epsilon_\alpha) \bar{\alpha}_\infty \bar{\lambda} d < \ln 2$  получаем, что функционал  $I_1$  и его максимальное значение остаются ограниченными, когда  $T \rightarrow \infty$ . Можно показать, что в случае неотрицательности всех исходных величин при  $(1 - \epsilon_\alpha) \bar{\alpha}_\infty \bar{\lambda} d > \ln 2$  максимальное значение будет неограниченно возрастать, когда  $T \rightarrow \infty$ .

**8.2. Специальный случай двухпродуктовой модели.** Рассмотрим модель (3.41), (3.42) с точки зрения асимптотики решения оптимизационных задач:

$$\text{минимизации функционала } I_0 = \int_{t_0}^T \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau dt;$$

$$\text{максимизации функционала } I_1 = \int_{t_0}^T c(t) dt;$$

$$\text{минимизации функционала } I_2 = T - t_0.$$

Предположим, что для достаточно больших  $t$  ( $t \geq t_1$ ) имеют место соотношения (3.196), (3.197), а также условия  $c_6 \geq 0$ ,  $c_4 \geq 0$ . Применяя простой метод исследования, состоящий в применении теоремы о среднем для интегралов или в сведении путем дифференцирования по  $t$  уравнений (3.197) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $\tilde{m}(t)$ ,  $a(t)$ , приходим к ряду асимптотических соотношений, собранных в табл. 4.1, 4.2. Следует заметить, что указанные в этих таблицах соотношения, строго говоря, справедливы лишь с точностью до сколь угодно малого  $\epsilon > 0$  во всех показателях.

В отношении асимптотики модели (3.41), (3.42) можно сделать следующие выводы:

1. На практике реализуются режимы, в которых  $t - a(t) \leq \leq \text{const}$ , поэтому весьма важным является результат о том, что для  $y(t)$ , не стремящихся к 0 при  $t \rightarrow \infty$ , переход от конечной предыстории к бесконечной (т. е. к  $t - a(t) \rightarrow \infty$ ) не дает значительного выигрыша в асимптотике функций и функционалов модели.

2. Пусть  $y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда необходимо выполняется  $m(t)$ ,  $c(t) \rightarrow 0$  при любом поведении  $a(t)$ .

3. Максимально возможная в модели скорость роста  $m(t)$  достигается при  $y(t) \rightarrow 1$ ,  $t - a(t) \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Тогда  $m \asymp e^{(\alpha_\infty - c_1)t}$ ; при этом  $c \asymp e^{(\alpha_\infty y - c_1 + c_6)t} [1 - y]$ . Максимально возможная  $c \asymp e^{(\alpha_\infty - c_1 + c_6)t}$  достигается при  $1 - y \asymp t^{-1}$ . Этот результат подтверждает и уточняет выдвинутую в [73] гипотезу о том, что рекордные режимы в модели (1.1) — (1.6) достигаются при  $y(t) \rightarrow 1$ .

4. Для достаточно больших заданных значений  $P^* \min_y I_2$  достигается при  $y(t) \rightarrow 1$  так, что  $1 - y \asymp e^{-pt}$  ( $p \geq c_5$ ). При этом наименьшее значение  $\min_y I_2 \asymp \frac{1}{\alpha_\infty - c_1} \ln P^*$  достигается при максимально возможной  $p \asymp e^{(\alpha_\infty - c_1)t}$ .

Таблица 4.1

Асимптотическое поведение функционалов  $I_0, I_1$  при заданной  $c(t)$ 

c		y		
		$y \rightarrow 1, 1-y \asymp e^{-pt}, p > 0$	$y \rightarrow y_0, 0 < y_0 < 1$	$y \rightarrow 0, y = y_0 e^{-nt}, n > 0$
$\asymp e^{kt} e^{rest}$ , $k = c_2 - c_0 - c_3 - p$ , $s \ll c_0, r \ll \frac{y_0 \alpha_\infty}{c_0}$	$I_0$	$\asymp e^{-(c_1+s)t} e^{rest}$	$\asymp e^{(c_1+s)t} e^{rest}$	$\frac{n < c_0}{\asymp e^{-(c_1+s)t} e^{rest}}$ $c_0$ заменяется на $\tilde{c}_0 = c_0 - n$
	$I_1$	$\asymp e^{(k-s)t} e^{rest}$	$\asymp e^{(k-s)t} e^{rest}$	$\asymp e^{(k-s)t} e^{rest}$
$\asymp e^{kt}, k > 0$	$I_0$	$\asymp e^{(k+p-c_2+c_0)t}$	$\asymp e^{(k-c_2+c_0)t}$	$\frac{n \leq c_0}{\asymp e^{(k-c_2+c_0)t}}$
	$I_1$	$\asymp e^{kt}$	$\asymp e^{kt}$	$\asymp e^{kt}$
$\asymp e^{-kt}, k > 0$	$I_0$	—	—	$\frac{n > c_0 - c_2}{\asymp e^{-\left(c_4 + \frac{k}{a_1}\right)t_0} = \text{const}}$
	$I_1$	—	—	$\asymp e^{-kt_0} = \text{const}$

Асимптотическое поведение функционала  $I_2$  при заданных  $f(t)$ ,  $f(t) = P'(t)$ 

$f$		$y \rightarrow y_0 \neq 0$		
		$1 - y \sim e^{-pt}, p > 0$		$y \rightarrow y_0, 0 < y_0 < 1$
		$p \geq c_5$	$0 < p \leq c_5$	
$\asymp e^{kt}, k > 0$	$I_2$	$\asymp \frac{1}{k} \ln P_1^*$	$\asymp \frac{1}{k + p - c_5} \ln P_1^*$	$\asymp \frac{1}{k - c_5} \ln P_1^*$
$\asymp e^{-kt}, k > 0$	$I_2$	$y \rightarrow 0$		
		$y \asymp t^{-p}, p > 0$		$y \asymp e^{-pt}, p > 0$
		$P_1^* \rightarrow C = \text{const} \quad I_2 \rightarrow \infty,$		
			$P_1^* > C \quad I_2 \text{ не существует}$	

5. Если в задаче 1 заданная функция  $c(t)$  такова, что минимально допустимая в силу ограничений (3.43), (3.44) функция  $y(t) \equiv y_{\min}(t) \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow \infty$  (т. е. при  $t \rightarrow \infty$   $c(t) \leq e^{kt}$ ,  $k < \alpha_\infty + c_5 - c_1$ ), то  $\min_y I_1$  достигается при  $y(t) \geq y_{\min}(t)$ , не стремящемся к 1. Аналогичный результат справедлив и для задачи 2.

6. Если  $y \rightarrow y_0$  при  $t \rightarrow \infty$  ( $0 < y_0 < 1$ ), то значение  $y_0$  не влияет на порядки роста функций  $m(t)$ ,  $c(t)$ ,  $P(t)$  и функционалов  $I_0$ ,  $I_1$ . Следовательно, доказанный в [73] результат о том, что для достаточно больших отрезков  $[t_0, t]$   $\max I_1$  достигается при  $y(t)$ , больших минимально возможных  $y_{\min}(t)$ , не отражается в этом случае на порядке роста  $c(t)$  и  $I_1$ . Для получения подобного результата исследуем асимптотическое поведение функционала  $I_1(y)$  на отрезке  $[t_0, t]$  при  $c(\tau) = Ce^{k\tau}$ ,  $\tau \in [t_0, \infty)$ ,  $y(\tau) \equiv y_0$ ,  $\tau \in [0, \infty)$ ,  $m_0(\tau) = Ke^{(k-c_5)\tau}$ ,  $\tau \in [0, t_0]$ . Решив уравнения (3.197), получим

$$I_0(y_0, t) = \frac{C(k+c_5) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{k+c_1-c_5}{y_0 \alpha_\infty} \right)^{\frac{(k+c_5-c_2)}{(k+c_1-c_5)}} \right] e^{(k-c_5)t}}{\beta_\infty (k-c_5)^2 (1-y_0) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{k+c_1-c_5}{y_0 \alpha_\infty} \right)^{\frac{(k+c_5)}{(k+c_1-c_5)}} \right]}. \quad (4.113)$$

Можно показать, что при некоторых условиях множитель при  $e^{(k-c_5)t}$  имеет максимальное значение при некотором  $\tilde{y}_0$  ( $0 < \tilde{y}_0 < 1$ ), т. е. результат [73] справедлив и для задачи 1° и сказывается на величине множителя функции, характеризующей порядок роста  $I_0$ .

При произвольном законе изменения  $y(\tau)$  на отрезке  $[a(t), t]$  ( $0 \leq y(\tau) \leq 1$ ) асимптотические свойства задачи 2 можно получить, исследуя (3.197) так, как сделано в [73] при решении частных модельных задач. В частности, отсюда вытекает, что в асимптотике будет иметь место указанное свойство и для оптимизационной задачи 2.

Требуемые численные методы предназначены для решения широкого круга задач моделирования развивающихся систем на ЭВМ и поэтому должны включать практически весь арсенал средств современной вычислительной математики. Чтобы не загромождать изложение хорошо описанными методами, в данной главе основное внимание уделяется оригинальным подходам, позволяющим доводить до числа решение ряда трудных задач моделирование развивающихся систем на ЭВМ. К числу таких задач относятся задачи трех основных классов: идентификации моделей, решения систем нелинейных уравнений типа Вольтерра и оптимизации развивающихся систем по различным критериям. Ниже приводится не только описание, но и обоснование предлагаемых методов, с указанием оценок их основных характеристик: полной погрешности приближенного решения, необходимого числа операций и необходимой памяти ЭВМ. Кроме того, рассматриваются вопросы оптимизации численных методов и распараллеливания алгоритмов.

### § 1. Численные методы для идентификации моделей

#### 1.1. Об аппроксимации таблично заданных функций.

1°. Пусть некоторая однозначная функция  $f(t)$  с областью определения  $[t_0, T]$  ( $T < \infty$ ) известна в  $N$  точках

$$t_v = \frac{T - t_0}{2} \cos \frac{2v + 1}{2N} \pi + \frac{T + t_0}{2},$$

$$f_v = f(t_v), \quad v = \overline{1, N}.$$
(5.1)

Это означает, что периодическая функция

$$g(\theta) = f\left(\frac{T - t_0}{2} \cos \theta + \frac{T + t_0}{2}\right) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

задана в  $N$  равноотстоящих узлах  $\frac{2v\pi}{2N + 1}$  или что функция  $\varphi(x) = f\left(\frac{T - t_0}{2} x + \frac{T + t_0}{2}\right)$  задана в узлах Чебышева  $x_v = -\cos \frac{2v}{2N} \pi$ .

Известно, что

$$U_N(\varphi, x) = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \varphi(x_v) \frac{(-1)^{v-1} \sin x_v}{x - x_v} \cos(N \arccos x) \quad (5.2)$$

является многочленом интерполяции  $(N - 1)$ -й степени для  $\varphi(x)$ ,  $U_N(\varphi, x_v) = \varphi(x_v) = f_v$  ( $v = \overline{1, N}$ ). Известно также [94, 192], что

$$|\varphi(x) - U_N(\varphi, x)| \leq \left(2 + \frac{2}{\pi} \ln N + \frac{0,05}{N^2}\right) \rho_N(\varphi), \quad (5.3)$$

где  $\rho_N(\varphi)$  — величина наилучшего приближения  $\varphi$  при помощи многочленов степени не выше  $N - 1$ :

$$\rho_N(\varphi) = \inf_{\{a_k\}_0^{N-1}} \max \left| \varphi(x) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k \right|. \quad (5.4)$$

Если, в частности,  $\varphi(x)$  имеет  $s$ -ю производную по  $\theta$  ( $x = \cos \theta$ ), ограниченную по модулю константой  $M_s$ , то

$$\rho_N(\varphi) \leq \frac{\pi}{2} \frac{M_s}{N^s}. \quad (5.5)$$

Возвращаясь к исходной функции  $f(t)$ , получим

$$\left| f(t) - U_N \left[ \varphi, \frac{2t - (T + t_0)}{T - t_0} \right] \right| \leq \left(2 + \frac{2}{\pi} \ln N + \frac{0,05}{N^2}\right) \rho_N(\varphi), \quad (5.6)$$

что дает погрешность указанного метода аппроксимации. Если вместо  $f_v$  будут даны их приближенные значения  $\hat{f}_v$  и числа  $\varepsilon_v$ , для которых

$$|f_v - \hat{f}_v| \leq \varepsilon_v, \quad v = \overline{1, N}, \quad (5.7)$$

то, положив

$$\begin{aligned} \tilde{U}_N(\varphi, x) &= \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \tilde{f}_v \frac{(-1)^{v-1} \cos(N \arccos x) \sin x_v}{x - x_v} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} \cos(k \arccos x), \end{aligned} \quad (5.8)$$

будем иметь [94, 192]

$$\begin{aligned} \left| f(t) - \tilde{U}_N \left( \varphi, \frac{2t - (T + t_0)}{T - t_0} \right) \right| &\leq \left(2 + \frac{2}{\pi} \ln N + \frac{0,05}{N^2}\right) \rho_N(\varphi) + \\ &+ \left(1 + \frac{2}{\pi} \ln N + \frac{0,05}{N^2}\right) \max_v \varepsilon_v. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из комые коэффициенты  $a_k$  многочлена (8) можно вычислять по формулам

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \tilde{f}_v \cos \frac{(2k-1)(2v-1)}{2N} \pi, \quad k = \overline{1, N}, \quad (5.10)$$

с применением алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) [105], что требует не более  $2N \log_2 N$  арифметических операций.

2°. Пусть функция  $f(t)$  с областью определения  $[t_0, \infty]$  известна в  $N$  точках  $t_v$ , причем

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N, \quad f_v = f(t_v), \quad v = \overline{1, N}. \quad (5.11)$$

Спрашивается, в каких условиях и при помощи какого аппарата можно получить значения  $f(t)$  на всем отрезке  $[t_0, \infty]$  с наперед заданной абсолютной погрешностью  $\Delta$ .

Сделаем замену переменных

$$y = \frac{1 - (t - t_0)^2}{1 + (t - t_0)^2}, \quad t = t_0 + \sqrt{\frac{1 - y}{1 + y}}, \quad (5.12)$$

которая преобразует  $[t_0, \infty]$  в отрезок  $[-1, 1]$ , и введем зависимость

$$y = \psi(x), \quad x = \psi^{-1}(y), \quad (5.13)$$

где  $\psi$  — достаточно гладкое взаимно однозначное отображение отрезка  $[-1, 1]$  на себя, обладающее свойством

$$y_v \equiv \frac{1 - (t_v - t_0)^2}{1 + (t_v - t_0)^2} = \psi(x_v), \quad x_v = -\cos \frac{2v-1}{2N} \pi, \quad v = \overline{1, N}. \quad (5.14)$$

Тогда функция

$$\varphi(x) = f\left[t_0 + \sqrt{\frac{1 - \psi(x)}{1 + \psi(x)}}\right] \quad (5.15)$$

в силу (11)–(14) определена на отрезке  $[-1, 1]$  и в узлах Чебышева  $x_v$  принимает известные значения  $\varphi(x_v) = f_v$ .

Возвращаясь к исходной функции  $f(t)$ , в силу (2)–(5) получаем, в частности,

$$\max_{t \in [t_0, \infty]} \left| f(t) - U_N \left[ \varphi, \psi^{-1} \left( \frac{1 - (t - t_0)^2}{1 + (t - t_0)^2} \right) \right] \right| \leq \left( 2 + \frac{2}{\pi} \ln N + \frac{0,05}{N^2} \right) \frac{\pi}{2} \frac{M_s}{N^s}. \quad (5.16)$$

Принимая правую часть оценки (16) не превосходящей  $\Delta$ , находим искомые условия на  $N$  и  $s$ .

Для практического использования указанного подхода возьмем простейший случай  $\psi(x) \equiv x$ , которому отвечают узлы

$$t_v = t_0 + \sqrt{\frac{1 - \cos(2v-1)/(2N)}{1 + \cos(2v-1)/(2N)}} = t_0 + \operatorname{tg} \frac{2v-1}{4N}, \quad v = \overline{1, N}, \quad (5.17)$$

и найдем явные оценки величин  $M_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ). Имеем

$$\begin{aligned} \varphi'_0 &= -\varphi'_x \sqrt{1-x^2} = \\ &= -f'_t \sqrt{1-x^2} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}(1+x)} = \frac{f'_t}{1+x}, \quad 1+x = \frac{2}{1+(t-t_0)^2}, \\ \varphi''_0 &= -\frac{f''_{tx}(1+x) - f'_t}{(1+x)^2} \sqrt{1-x^2} = \frac{f''_t + f'_t \sqrt{1-x^2}}{(1+x)^2}, \end{aligned}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2(t-t_0)}{1+(t-t_0)^2},$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\theta}''' = & - \left[ \frac{(f_{tx}''' + f_{tx}'' \sqrt{1-x^2} + f_t' \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})(1+x)^2}{(1+x)^4} - \right. \\ & \left. - \frac{2(1+x)(f_t'' + f_t' \sqrt{1-x^2})}{(1+x)^4} \right] \sqrt{1-x^2} = \\ & = \frac{f_t''' + 3f_t'' \sqrt{1-x^2} + f_t'(1+x)(2-x)}{(1+x)^3}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$2-x = \frac{1+3(t-t_0)^2}{1+(t-t_0)^2}.$$

Далее будем считать известными оценки

$$\begin{aligned} |f_t'| & \leq \frac{d_1}{(1+t-t_0)^2}, \quad \left| f_t'' + f_t' \frac{2}{1+t-t_0} \right| \leq \frac{d_2}{(1+t-t_0)^4}, \\ f_t''' + 6f_t'' \frac{1}{1+t-t_0} + 6f_t' \frac{1}{(1+t-t_0)^2} & \leq \frac{d_3}{(1+t-t_0)^6}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Нетрудно проверить, что если

$$\left| f(t) = c_0 + \frac{c_1}{1+t-t_0} + \frac{c_2}{(1+t-t_0)^2} + \frac{c_3}{(1+t-t_0)^3} + \dots \right|, \quad (5.20)$$

причем этот ряд равномерно сходится для  $t \geq t_0$ , то оценки вида (19) имеют место. В силу (18) и (19) легко находим

$$M_1 \leq \frac{d_1}{2}, \quad M_2 \leq \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4}, \quad M_3 \leq \frac{3}{4}d_1 + \frac{3}{4}d_2 + \frac{d_3}{8}. \quad (5.21)$$

3°. При условии (7) нередко ищут аппроксимацию  $f(t)$  в виде  $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t)$ , где  $\varphi_k(t)$  — заданные координатные функции, например,  $\varphi_k(t) = \left[ \frac{1-(t-t_0)^2}{1+(t-t_0)^2} \right]^k$ , по методу наименьших квадратов из условия

$$\sum_{v=1}^N \left[ \tilde{f}_v - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t_v) \right]^2 = \min_{\{a_k\}_1^n}. \quad (5.22)$$

В этом случае искомые коэффициенты  $\{a_k\}_1^n$  являются решением следующей нормальной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n a_k (\varphi_k, \varphi_j) = (\tilde{f}, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n},$$

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{v=1}^N \varphi_k(t_v) \varphi_j(t_v), \quad (5.23)$$

$$(\tilde{f}, \varphi_j) = \sum_{v=1}^N \tilde{f}_v \varphi_j(t_v).$$

Эта система всегда разрешима, и для ее решения могут быть применены многие хорошо отработанные алгоритмы и программы [53, 313]. Можно выписать также соответствующие оценки полной погрешности метода и необходимого числа операций [28, 53; 313].

В случае задачи аппроксимации функции двух переменных  $f(\tau, t)$  при помощи функций вида  $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(\tau) \psi_k(t)$ , считая заданными  $\tilde{f}_{v\kappa}$  и  $\varepsilon_{v\kappa}$ , для которых

$$|\hat{f}_{v\kappa} - f(\tau_v, t_\kappa)| \leq \varepsilon_{v\kappa}, \quad v = \overline{1, N}, \quad \kappa = \overline{1, M}, \quad (5.24)$$

вместо (22) и (23) будем иметь соответственно

$$\sum_{v=1}^N \sum_{\kappa=1}^M \left| \tilde{f}_{v\kappa} - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(\tau_v) \psi_k(t_\kappa) \right|^2 = \min_{\{a_k\}_1^n} \quad (5.25)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k (\varphi_k, \varphi_j)_N (\psi_k, \psi_i)_M = (\tilde{f}, \varphi_j \psi_i)_{NM}, \quad j = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, M};$$

$$(\varphi_0, \varphi_j)_N = \sum_{v=1}^N \varphi_0(\tau_v) \varphi_j(\tau_v), \quad (5.26)$$

$$(\psi_k, \psi_i)_M = \sum_{\kappa=1}^M \psi_k(t_\kappa) \psi_i(t_\kappa),$$

$$(\tilde{f}, \varphi_j \psi_i)_{NM} = \sum_{v=1}^N \sum_{\kappa=1}^M \tilde{f}_{v\kappa} \varphi_j(\tau_v) \psi_i(t_\kappa)$$

с аналогичными (23) свойствами системы (26).

Если нет определенных оснований относительно выбора наиболее подходящих координатных функций  $\varphi_k(\tau)$  и  $\psi_k(t)$ , нередко полезным оказывается прием [87] отыскания одновременно и коэффициентов, и самих координатных функций из условия

$$\sum_{v=1}^N \sum_{\kappa=1}^M \left| \tilde{f}_{v\kappa} - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{kv} \psi_{k\kappa} \right|^2 = \min_{\substack{\{a_k\}_1^n, \{\varphi_{kv}\}_{k=1}^N, \{\psi_{k\kappa}\}_{k=1}^M \\ \{\psi_{k\kappa}\}_{k=1}^N, \{\varphi_{kv}\}_{k=1}^M}} \quad (5.27)$$

При этом дело сводится к последовательному решению задач типа

$$\sum_{v=1}^N \sum_{\kappa=1}^M [g_{v\kappa}^{(k-1)} - a_k \varphi_{k v} \psi_{k \kappa}]^2 = \min_{a_k, \{\varphi_{k v}\}_{v=1}^N, \{\psi_{k \kappa}\}_{\kappa=1}^M}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.28)$$

$$g_{v\kappa}^{(k)} = g_{v\kappa}^{(k-1)} - a_k \varphi_{k v} \psi_{k \kappa}, \quad g_{v\kappa}^{(0)} = \tilde{f}_{v\kappa}.$$

В [87] показано, что итерационный процесс

$$a^{(s)} = \left[ \sum_{\kappa=1}^M \left( \sum_{v=1}^N g_{v\kappa}^{(k-1)} x_v^{(s)} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$x_v^{(s)} = \frac{\sum_{\kappa=1}^M g_{v\kappa}^{(k-1)} y_{\kappa}^{(s-1)}}{\left[ \sum_{v=1}^N \left( \sum_{\kappa=1}^M g_{v\kappa}^{(k-1)} y_{\kappa}^{(s-1)} \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad (5.29)$$

$$y_{\kappa}^{(s)} = \frac{\sum_{v=1}^N g_{v\kappa}^{(k-1)} x_v^{(s)}}{\left[ \sum_{\kappa=1}^M \left( \sum_{v=1}^N g_{v\kappa}^{(k-1)} x_v^{(s)} \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad s = 1, 2, \dots$$

(при условии, что  $\sum_{v=1}^N \varphi_{k v}^2 = \sum_{\kappa=1}^M \psi_{k \kappa}^2 = 1$  ( $k = \overline{1, n}$ )), обладает свойством

$$\lim_{s \rightarrow \infty} a^{(s)} = a_k, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} x_v^{(s)} = \varphi_{k v}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} y_{\kappa}^{(s)} = \psi_{k \kappa}. \quad (5.30)$$

При этом для искомого  $a_k$  имеет место соотношение

$$\Delta_n = \sum_{v=1}^N \sum_{\kappa=1}^M (\tilde{f}_{v\kappa})^2 - \frac{1}{NM} \sum_{k=1}^n a_k^2. \quad (5.31)$$

Заметим, что процесс (29) решает задачу (28) по итеративному методу [26] отыскания наибольшего собственного значения  $a_k$  для матрицы  $\{g_{v\kappa}^{(k-1)}\}^T \{g_{v\kappa}^{(k-1)}\}$  и соответствующих собственных векторов  $\{\varphi_{k v}\}$  (для матрицы  $\{g_{v\kappa}^{(k-1)}\} \{g_{v\kappa}^{(k-1)}\}^T$ ) и  $\{\psi_{k \kappa}\}$  (для матрицы  $\{g_{v\kappa}^{(k-1)}\}^T \times \times \{g_{v\kappa}^{(k-1)}\}$ ). Отсюда вытекает весьма высокая скорость сходимости этого процесса, по порядку совпадающая с  $(a_{k+1}/a_k)^s$  (при условии, что начальные приближения не ортогональны к искомым собственным векторам).

Следует заметить еще, что можно сразу находить сингулярное разложение исходной матрицы  $\{\tilde{f}_{v\kappa}\}$  и тем самым решать задачу (27),

применяя хорошо разработанные алгоритмы решения полной проблемы на собственные значения [53, 313]. Вычислительная погрешность этих алгоритмов совпадает с погрешностью округлений и не превосходит  $k [\max(N, M)]^{2-\tau}$ , где  $\tau$  — число двоичных разрядов у мантисс машинных чисел,  $k$  — определенная константа [53].

Для получения высокой точности приближения к собственным значениям и собственным векторам матрицы  $\{\tilde{f}_{vk}\}$  и соответствующей эффективной апостериорной оценки погрешности целесообразно объединить прямой метод решения полной проблемы на собственные значения с итеративным методом (29). При этом за начальное приближение в методе итераций естественно принять соответствующее решение, полученное прямым методом.

4°. Кроме указанных способов существуют многочисленные другие приемы аппроксимации таблично заданных функций одной и многих переменных [104, 205, 248]. Вопросы оптимальной по точности аппроксимации функций некоторых классов будут кратко рассмотрены в п. 4.1. Остановимся здесь на методе определения оценки линейных динамических характеристик стационарных объектов управления.

Пусть передаточная функция

$$\Phi(i\omega) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-t\omega} dt, \quad (5.32)$$

где  $k(t)$  — импульсная переходная функция (реакция объекта на возмущение в виде  $\delta$ -функции Дирака), задана таблицей своих приближенных значений  $\tilde{\Phi}_v$ :

$$\tilde{\Phi}_0 = 0, \quad |\tilde{\Phi}_v - \Phi(i\omega_v)| < \varepsilon_v, \quad \omega_v = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{N+1} v, \quad v = \overline{1, N}. \quad (5.33)$$

За приближенное значение  $\Phi$  примем

$$\tilde{\Phi}(i\omega) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \left( \frac{\omega+i}{\omega-i} \right)^{k-1} \left( \frac{2i}{\omega-i} \right)^2, \quad (5.34)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{NM} \sum_{v=0}^N \tilde{\Phi}_v e^{-i \frac{2\pi}{N+1} vk} \left( \frac{\omega_v - i}{2i} \right)^2.$$

Имеем [94]

$$|\tilde{\Phi}(i\omega) - \Phi(i\omega)| \leq \left( 0,57 + \frac{2}{\pi} \ln N \right) (\rho_N(\varphi) + \max_v \varepsilon_v) + \rho_N(\varphi), \quad (5.35)$$

$$\varphi(\theta) = \Phi \left( \frac{e^{i\theta} + 1}{-e^{i\theta} + 1} \right) \frac{1}{(e^{i\theta} - 1)^2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 k(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \approx \tilde{k}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \\
 &= + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N+1} \beta_k \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\omega+i}{\omega-i} \right)^k \frac{2i}{\omega-i} e^{i\omega t} d\omega = \\
 &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^N \beta_k e^{-t} P_k(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (5.36)
 \end{aligned}$$

$$\beta_0 = -\alpha_0, \quad \beta_k = \alpha_{k-1} - \alpha_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad \beta_{N+1} = \alpha_N,$$

где  $P_k$  — полиномы Лагерра, ортогональные на  $[0, \infty]$  с весом  $e^{-2t}$ :

$$P_{k+1}(t) = \frac{2k+1-2t}{k+1} P_k(t) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(t), \quad (5.37)$$

$$P_0(t) = 4\pi, \quad P_1(t) = 4\pi(1-2t).$$

Кроме того,

$$|k(\tau) - \tilde{k}(\tau)| \leq 2 \left( 0,57 + \frac{2}{\pi} \ln N \right) (\rho_N(\varphi) + \max \varepsilon_\nu) + \rho_N(\varphi). \quad (5.38)$$

В более общем случае, когда в окрестности бесконечности

$$\Phi(i\omega) = \frac{\tilde{b}_{-1}}{i\omega} + \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1(i\omega) + \dots + \tilde{b}_p(i\omega)^p + \Phi_1(i\omega), \quad (5.39)$$

$$\Phi_1(i\omega) = O\left(\frac{1}{\omega^2}\right),$$

следует формулы (33) — (38) применить к  $\Phi_1$  и к соответствующей ей функции  $k_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$ . После этого получим

$$\tilde{k}(t) = -\frac{1}{2} \tilde{b}_{-1} \operatorname{sign} t + \frac{1}{2\pi} [\tilde{b}_0 \delta(t) + \tilde{b}_1 \delta'(t) + \dots + \tilde{b}_p \delta^{(p)}(t)] + \tilde{k}_1(t), \quad (5.40)$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака. При этом для  $|k(t) - \tilde{k}|$  найдем ту же оценку погрешности, что и в (38) (с заменой  $\varphi$  на соответствующую функцию  $\varphi_1$ ).

## 1.2. Общие методы идентификации.

1°. Пусть рассматриваются некий объект  $O$  и его математическая модель  $M$ , причем известно проявление  $O$  в виде ряда значений  $Z_\nu^0$

вектора его параметров  $Z^0(z_1, \dots, z_q)$  в моменты времени  $t_\nu$  ( $\nu = \overline{1, N}$ ). Пусть соответствующий вектор  $Z^M$  в  $M$  зависит от вектора параметров модели  $A^M(a_1, \dots, a_r)$ :

$$Z^M = Z^M(A^M). \quad (5.41)$$

Тогда задача обычно состоит в отыскании  $A^M$  из условия

$$\Delta_1 = \sum_{\nu=1}^N P_\nu \sum_{k=1}^q g_k (Z_{k\nu}^0 - Z_{k\nu}^M(A))^2 = \min_A \quad (5.42)$$

или

$$\Delta_2 = \max_{1 \leq \nu \leq N} P_\nu \max_{1 \leq k \leq q} g_k |Z_{k\nu}^0 - Z_{k\nu}^M(A)| = \min_A, \quad (5.43)$$

где некоторые веса  $P_\nu, g_k \geq 0, \sum_{\nu=1}^N P_\nu = \sum_{k=1}^q g_k = 1$ .

Нередко вектор  $Z$  можно составить из двух:  $Z = (X, Y)$ , где  $X$  имеет смысл входных регистрируемых воздействий на  $O$ ,  $Y$  имеет смысл реакций  $O$  на  $X$ , или из трех векторов:  $Z = (U, V, Y)$ , где  $U$  — управляющие воздействия на  $O$ , поддающиеся воле экспериментатора,  $V$  — прочие воздействия, не зависящие от экспериментатора. В таких случаях вместо (41)—(43) имеем соответственно

$$Y^M = Y^M(X, A^M), \quad Y_M(y_1^M, \dots, y_n^M), \quad (5.41')$$

$$\Delta_1 = \sum_{\nu=1}^N P_\nu \sum_{k=1}^n g_k (y_{k\nu}^0 - y_k^M(X_\nu, A))^2 = \min_A, \quad (5.42')$$

$$\Delta_2 = \max_{1 \leq \nu \leq N} P_\nu \max_{1 \leq k \leq n} g_k |y_{k\nu}^0 - y_k^M(X_\nu, A)| = \min_A. \quad (5.43')$$

Величина  $\Delta = \|Y^0 - Y_{(A)}^M\|$ , где  $\|\cdot\|$  — знак некоторой нормы вектора, называется *мерой рассогласования* объекта и модели. Выше были указаны лишь частные случаи  $\|\cdot\|$ : среднеквадратичная норма ( $\Delta_1$ ) и чебышевская, равномерная ( $\Delta_2$ ).

Задачи минимизации (42), (43) или (42'), (43') в общем случае являются весьма сложными, нелинейными по отношению к  $A$ , многоэкстремальными и многомерными задачами. Поэтому в настоящее время еще нет достаточно эффективных и обоснованных алгоритмов их решения. Некоторые теоретические результаты по отысканию оптимальных алгоритмов минимизации многоэкстремальных функций некоторых классов получены в [111] (см. также п. 4.2). На практике весьма эффективным оказался так называемый комбинированный алгоритм быстрого спуска и случайного поиска [115, 121, 122, 256], состоящий на  $j$ -м итерационном шаге из случайного поиска направления убывания  $\Delta$  из данной точки  $A^{(j)}$  в пространстве параметров  $A$  и минимизации  $\Delta$  в найденном направлении каким-либо детерми-

нированным алгоритмом одномерного поиска. Для получения глобального минимума исходная точка  $A^{(0)}$  выбирается случайным образом многократно и затем находится наименьший из локальных минимумов.

Если параметры  $A$  входят в зависимость  $Z^M(A)$  или  $Y^M(X, A)$  линейно, то решение задач (42), (42') приводится к решению линейных алгебраических систем, а задач (43), (43') — к линейному программированию [44, 49].

2°. Рассмотрим случай двухпродуктовой модели (2.9), считая известными  $a_i(t_v)$ ,  $y_i(t_v)$ ,  $c_i(t_v)$ ,  $f_i(t_v)$ :  $Z = (\{a_i\}, \{y_i\}, \{c_i\}, \{f_i\})$ , а искомыми  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$ , которые будем искать в виде

$$\alpha(\tau, t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(\tau) \psi_k(t), \quad (5.44)$$

$$\beta(\tau, t) = \sum_{k=1}^m \beta_k \varphi_k(\tau) \psi_k(t).$$

Примерами функций  $\varphi_k(\tau)$  и  $\psi_k(t)$  могут служить (в экономике)

$$\varphi_k(\tau) = e^{kc\tau}, \quad \psi_k(t) = e^{-kdt}, \quad c, d \geq 0, \quad (5.45)$$

и (в биологии)

$$\varphi_k(\tau) = \tau^k e^{-k\tau}, \quad \psi_k(t) = e^{-kdt}. \quad (5.46)$$

В число функций  $\varphi_k$  полезно вводить [117, 310] также обобщенные дельта-функции Дирака вида  $\delta(\tau - \tau_k)$  и их производные.

Так как  $m = f - c$ , то можно считать заданными  $a_{v_i} = a(t_v)$ ,  $y_{v_i} = y_i(t_v)$ ,  $c_{v_i} = c_i(t_v)$ ,  $m_{v_i} = m_i(t_v) = f_i(t_v) - c_i(t_v)$ . Аппроксимировав  $y(t)$  и  $m_i(t)$  так, как указано, например, в п. 1.1, будем считать  $y_i(t)$  и  $m_i(t)$  известными для  $t \leq T$ . Тогда в соответствии с 1° будем искать  $\alpha$ ,  $\beta$  из условия

$$\sum_{i=1}^R \left\{ \sum_{v=1}^N P_{v_i}^{(1)} \left[ m_{v_i} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{a_{v_i}}^{t_v} \varphi_k(\tau) y_i(\tau) m_i(\tau) d\tau \psi_k(t_v) \right]^2 + \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^N P_{v_i}^{(2)} \left[ c_{v_i} - \sum_{k=1}^m \beta_k \int_{a_{v_i}}^{t_v} \varphi_k(\tau) [1 - y_i(\tau)] m_i(\tau) d\tau \psi_k(t_v) \right]^2 \right\} = \min_{\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}}, \quad (5.47)$$

что приводит к следующим системам линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n d_k(e_k, e_j) = (m, e_j), \quad j = \overline{1, n},$$

$$\begin{aligned}
(e_k, e_j) &= \sum_{i=1}^R \sum_{v=1}^N P_{v_i}^{(1)} \int_{a_{v_i}}^{t_v} \varphi_k(\tau) y_i(\tau) m_i(\tau) d\tau \times \\
&\quad \times \psi_k(t_v) \int_{a_{v_i}}^{t_v} \varphi_j(\tau) y_i(\tau) m_i(\tau) d\tau \psi_j(t_v),
\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$(m, e_j) = \sum_{i=1}^R \sum_{v=1}^N P_v^{(1)} m_v \int_{a_v}^{t_v} \varphi_j(\tau) y_i(\tau) m_i(\tau) d\tau \psi_j(t_v);$$

$$\sum_{k=1}^m \beta_k (g_k, g_j) = (c, g_j), \quad j = \overline{1, m},$$

$$\begin{aligned}
(g_k, g_j) &= \sum_{i=1}^R \sum_{v=1}^N P_{v_i}^{(2)} \int_{a_{v_i}}^{t_v} \varphi_k(\tau) [1 - y_i(\tau)] m_i(\tau) d\tau \times \\
&\quad \times \psi_k(t_v) \int_{a_{v_i}}^{t_v} \varphi_j(\tau) [1 - y_i(\tau)] d\tau \psi_j(t_v),
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$$(c, g_j) = \sum_{i=1}^R \sum_{v=1}^N P_v^{(2)} c_{v_i} \int_{a_{v_i}}^{t_v} \varphi_j(\tau) [1 - y_i(\tau)] d\tau \psi_j(t_v),$$

или из условия

$$\max_{1 \leq i \leq R} \max_{1 \leq v \leq N} \max \left[ P_{v_i}^{(1)} \left| m_{v_i} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{a_{v_i}}^{t_v} \varphi_k(\tau) y_i(\tau) m_i(\tau) d\tau \psi_k(t_v) \right|, \right.$$

$$\left. P_{v_i}^{(2)} \left| c_{v_i} - \sum_{k=1}^m \beta_k \int_{a_{v_i}}^{t_v} \varphi_k(\tau) [1 - y_i(\tau)] m_i(\tau) d\tau \psi_k(t_v) \right| \right] = \min_{\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}}, \tag{5.50}$$

что приводит к следующим задачам линейного программирования:

$$Z = \min \tag{5.51}$$

$$-Z \leq P_{v_i}^{(1)} \left( m_{v_i} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{a_{v_i}}^{t_v} \varphi_k(\tau) y_i(\tau) m_i(\tau) d\tau \psi_k(t_v) \right) \leq Z,$$

$$v = \overline{1, N}; \quad i = \overline{1, R},$$

$$Z = \min$$

$$-Z \leq P_{v_i}^{(2)} \left( c_{v_i} - \sum_{k=1}^m \beta_k \int_{a_{v_i}}^{t_{v_i}} \varphi_k(\tau) [1 - y_i(\tau)] m_i(\tau) d\tau \psi_k(t_{v_i}) \right) \leq Z, \quad (5.52)$$

$$v = \overline{1, N}; \quad i = \overline{1, R}.$$

3°. В отличие от 2° будем считать неизвестными  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$ ,  $y(\tau)$ . Тогда, отыскивая  $\alpha$ ,  $\beta$  в виде (44), а  $y(\tau)$ , например, в виде полигона:

$$y(\tau) = y_v \frac{t_{v+1} - \tau}{t_{v+1} - t_v} + y_{v+1} \frac{\tau - t_v}{t_{v+1} - t_v}, \quad \tau \in [t_v, t_{v+1}], \quad v = \overline{1, N}, \quad (5.53)$$

будем минимизировать (47) или (50) еще по переменным  $\{y_v\}$  с ограничением  $0 \leq y_v \leq 1$  ( $v = \overline{1, N}$ ). Таким образом, приходим к более сложным задачам минимизации, которые не сводятся к линейным задачам.

Еще более сложные задачи получатся, если  $a_v$  ( $v = \overline{1, N}$ ) считать также неизвестными величинами. Для того чтобы в результате были найдены значения  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$ , близкие к искомым, очевидно, в случае их независимости от  $y(t)$  и  $a(t)$ , необходимо иметь достаточно большое  $N$  и достаточно большой временной отрезок наблюдения  $[0, T]$ , а при возможности также достаточно большое количество  $R$  достаточно близких к идентичным объектам изучения. Последнее условие позволит идентифицировать  $\alpha$  и  $\beta$  при разных  $\{m_{v_i}\}$  и  $\{c_{v_i}\}$  за счет определения разных  $\{y_{v_i}\}$  и  $\{a_{v_i}\}$ .

Кроме указанного в 1° комбинированного алгоритма, для решения нелинейных задач идентификации (и оптимизации) нами не раз успешно применялись адаптивные методы типа [114] (см. п. 1.3).

Аналогичным образом можно поступать и в случае других видов двухпродуктовых моделей, и в случае  $n$ -продуктовых и континуальных моделей. При этом роль вектора  $X$  (см. 1°) могут играть, например, известные дискретные значения всех или части элементов модели на свершившейся предыстории ( $t \in [0, t_0]$ ).

4°. В общем случае функции  $\alpha$ ,  $\beta$  могут зависеть от функций  $my$ ,  $m$ ,  $a$  или, в более общем случае, от  $my$ ,  $m$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ . Пусть требуется, например, оценить  $\alpha \equiv \alpha(\tau, t, \lambda y m)$ . Исходя из смысла  $\alpha$  как производительности выполнения функции воспроизводства доли  $m(t)$  за счет единицы  $\lambda(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau$ , естественно искать  $\alpha$  в виде

$$\alpha = \sum_{k=0}^n c_k \left[ \frac{\lambda(\tau, t) m(\tau)}{d_k + \lambda(\tau, t) m(\tau)} \frac{m(\tau)}{e_k + \int_0^{\tau} \lambda(u, t) y(u) m(u) du} e^{-l_k(\tau-t) + f_k \tau} \right]^k, \quad (5.54)$$

$$d_k, e_k, l_k, f_k \geq 0,$$

$d_k$  имеет размерность  $m$ ,  $e_k$  — размерность  $M = \int_0^t m(\tau) d\tau$ . Первый множитель в квадратных скобках выражения (54) соответствует известному закону Моно [103, 110], означающему, что производительность многих живых объектов в силу дифференциации их клеток сначала возрастает, а затем происходит насыщение этого роста. Второй множитель соответствует закону падения производительности всякой системы при простом росте числа ее элементов. В третьем множителе  $l_k$  означает коэффициент износа всякого элемента системы, созданного в момент времени  $\tau$  к моменту времени  $t$  ( $t \geq \tau$ ),  $f_k$  — коэффициент обучения или (и) изменения технологии воспроизводства, направленной на повышение производительности  $\alpha$ , суммирование по  $k$  означает возможность наложения нескольких разных зависимостей указанного вида.

Подставляя (54) в первое уравнение модели (2.8)—(2.11) и считая  $m(t)$  заданным, приходим к следующей задаче идентификации:

$$\Delta = \left\| m(t) - \sum_{k=0}^n c_k \int_0^t \left\{ \frac{\lambda(\tau, t) m(\tau)^2}{[d_k + \lambda(\tau, t) m(\tau)] \left[ e_k + \int_0^\tau \lambda(u, t) y(u) m(u) du \right]} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{-l_k(t-\tau) + f_k \tau} \right\}^k \lambda(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau \right\| = \min_{\{c_k, d_k, e_k, l_k, f_k\}}, \quad (5.55)$$

$$0 \leq y, \lambda \leq 1, d_k, l_k, f_k \geq 0,$$

где  $\|\cdot\|$  — знак нормы функции  $\cdot$ , например, в  $L_2[t_0, T]$

$$\|\chi\|_{L_2[t_0, T]} = \left( \frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T |\chi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (5.56)$$

или в  $C[t_0, T]$

$$\|\chi\|_{C[t_0, T]} = \max_{t \in [t_0, T]} |\chi(t)|. \quad (5.57)$$

Ясно, что для решения задач (55) — (57) необходимо искать функции  $y$  и  $\lambda$  в приближенном виде, например, в виде полиномов (см. (53)). Если можно задавать  $y$  и  $\lambda$ , то задача сводится к определению лишь параметров  $\{c_k, d_k, e_k, l_k, f_k\}$ .

Если, в частности,  $\lambda(\tau, t) = 0$  для  $0 \leq \tau \leq a(t)$  и  $\lambda(\tau, t) = 1$  для  $a(t) \leq \tau \leq t$ , то (55) примет вид

$$\Delta = \left\| m(t) - \sum_{k=0}^n c_k \int_{a(t)}^t \left\{ \frac{[m^2(\tau)] e^{l_k(\tau-t) + f_k \tau}}{[d_k + m(\tau)] \left[ e_k + \int_{a(t)}^\tau y(u) m(u) du \right]} \right\}^k \times \right. \\ \left. \times y(\tau) m(\tau) d\tau \right\| = \min_{\{c_k, d_k, e_k, l_k, f_k\}}, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (5.58)$$

Если же задача такова, что заданы еще  $y$ ,  $a$ , то, приняв  $d_k = d$ ,  $e_k = e$ ,  $l_k = l$ ,  $f_k = f$ , приходим к нелинейной задаче поиска четырех параметров, на каждом шаге которого по отношению к  $\{c_k\}$  будем иметь линейную задачу.

Следует заметить, что в гл. 7 модели производительности типа  $\alpha$ ,  $\beta$  обсуждаются более подробно.

### 1.3. Об экстраполяции и прогнозировании развивающихся процессов.

1°. Для биологических объектов важнейшее значение имеет экстраполяция оценок производительностей типа  $\alpha$  и  $\beta$ , полученных на временном отрезке  $[t_0, T_1]$ , на весь заданный отрезок  $[t_0, T]$  ( $T > T_1$ ). Один из способов такой экстраполяции указан в п. 1.1.2°.

В случае, когда  $\alpha$  ищется в виде (54) на всем заданном отрезке  $[t_0, T]$ , необходимо оценить коэффициенты  $\{c_k, d_k, e_k, l_k, f_k\}$  так, чтобы они практически не зависели от  $\lambda$ ,  $y$ ,  $m$  ( $0 \leq y$ ,  $\lambda \leq 1$ ).

Это возможно, например, тогда, когда наблюдаем на  $[t_0, T]$  достаточное количество идентичных биологических объектов (имеющих практически один и тот же генетический код), находящихся в равных условиях, но имеющих различную предысторию. Для таких объектов  $m$ ,  $\lambda$ ,  $y$  различны, а коэффициенты  $\{c_k, d_k, e_k, l_k, f_k\}$  одинаковы с точностью до наперед заданного  $\varepsilon$ . Конечно, это  $\varepsilon$  должно быть не меньше суммы наследственной абсолютной погрешности  $m(t)$ , когда  $\alpha$  задано в виде (54), и абсолютной погрешности измерения  $m(t)$  в той же метрике  $\|\cdot\|$ , что и в (55).

Зависимость производительности  $\alpha$  от различных факторов  $\omega$  внешней среды (температуры, давления, влажности и т. д.) может быть учтена в моделях (44), (54) путем оценок соответствующих коэффициентов  $\{\alpha_k\}$  и  $\{c_k, d_k, e_k, l_k, f_k\}$  как функций этих факторов, заданных в определенном виде (см. п. 1.1).

Из-за больших трудностей учета всевозможных факторов величину  $\omega$  удобно считать случайной, что приводит к стохастической постановке задачи оценки указанных коэффициентов.

2°. Рассмотрим кратко ряд широко распространенных способов оценки зависимости случайных величин [223]. Пусть случайную величину  $Y$  необходимо оценить по результатам наблюдения некоторой другой случайной величины  $X$ . Зависимость любым образом выбранного среднего значения величины  $Y$  от каждого данного значения  $x$  величины  $X$  называется *регрессией*  $Y$  на  $X$ . В случае скалярных случайных величин  $X$ ,  $Y$  кривая, изображающая зависимость какого-нибудь среднего значения величины  $Y$  от значения  $x$  величины  $X$ , называется *кривой регрессии*  $Y$  на  $X$ .

В качестве среднего возможного значения величины  $Y$  при каждом данном значении  $x$  величины  $X$  во многих случаях естественно принять условное математическое ожидание  $Y$  относительно  $X$ , т. е.

$$y^* = M[Y/x]. \quad (5.59)$$

Для скалярной величины  $Y$  и любой функции  $\varphi(x)$  справедливо неравенство [223]

$$M [|y^* - Y|^2] \leq M [|\varphi(x) - Y|^2], \quad (5.60)$$

которое означает, что оценка в виде (59) является наилучшим квадратическим приближением к случайной величине  $Y$  среди всех возможных функций от  $X$ .

Часто оказывается целесообразным искать функцию, реализующую минимум средней квадратической ошибки приближения случайной величины  $Y$ , не среди всех возможных функций случайной величины  $X$ , а в ограниченном классе функций, обладающих каким-либо заданным свойством, например, в классе линейных функций или полиномов данной степени. Функции от  $x$ , реализующие минимум средней квадратической ошибки приближения случайной величины  $Y$  в данном классе функций  $F$ , называются *средней квадратической регрессией*  $Y$  на  $X$  класса  $F$ .

Пусть  $F$  определено в виде множества всех линейных комбинаций данных функций  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  от  $x$ , которое может быть скаляром или вектором. Полагая искомое приближение равным

$$Y^0 = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(X), \quad (5.61)$$

получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_k$ :

$$\sum_{k=1}^n a_k M [\varphi_k(X) \bar{\varphi}_j(X)] = M [Y \bar{\varphi}_j(X)], \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.62)$$

При этом точность приближения будет даваться формулой

$$\begin{aligned} M [|Y^0 - Y|^2] &= M [|Y|^2] - \sum_{k=1}^n a_k M [\varphi_k(X) \bar{Y}^0] = \\ &= M [|Y|^2] - \sum_{k,j=1}^n a_k \bar{a}_j M [\varphi_k(X) \bar{\varphi}_j(X)]. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Здесь «—» означает в случае комплексной величины  $\cdot$  ее комплексно сопряженное значение.

Классическая модель линейной регрессии обычно записывается в виде

$$y = Xa + \xi, \quad (5.64)$$

где  $y$  —  $N$ -мерный вектор наблюдений,  $X$  —  $N \times n$ -матрица значений независимых переменных,  $a$  —  $n$ -мерный вектор коэффициентов, подлежащих оценке,  $\xi$  —  $N$ -мерный вектор возмущающих воздействий, который также называют *вектором ошибок* наблюдения.

Предположим, что значения вектора  $\xi$  являются статистически зависимыми, но не зависящими от  $X$ ; процесс  $\{\xi\}$  имеет нормальное распределение,  $M(\xi) = 0$ . Далее, пусть матрица  $X$  является детерминированной и имеет ранг  $n$  ( $N \geq n$ ). Оценкой по методу наименьших квадратов будет

$$a_1^* = (X'X)^{-1} X'y. \quad (5.65)$$

При этом матрица ковариаций (корреляционных или вторых моментов) вектора  $a_1^*$  имеет вид

$$R_{a_1^*} = (X'X)^{-1} X'R_\xi X (X'X)^{-1}, \quad (5.66)$$

где  $R_\xi$  — матрица ковариаций вектора  $\xi$ :

$$R_\xi = \{M[(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)]\}_{i,j=1}^N, \quad m_i = M(\xi_i). \quad (5.67)$$

Наилучшей линейной несмещенной оценкой будет

$$a_2^* = (X'R_\xi^{-1}X)^{-1} X'R_\xi^{-1}y. \quad (5.68)$$

Дисперсия этой оценки минимальна в классе всех линейных оценок и

$$R_{a_2^*} = (X'R_\xi^{-1}X)^{-1}. \quad (5.69)$$

Если в (66)—(69) матрица  $R_\xi$  заменяется ее оценкой, то такие методы называют *взвешенными*.

Сравнительному анализу отмеченных и некоторых других способов оценки вектора  $a$  посвящены работы [163, 223].

3°. Для экономических объектов распространено прогнозирование развивающегося объекта с привлечением экспертов. Рассмотрим единичную задачу прогнозирования, которая заключается в следующем.

Пусть  $\alpha(t)$  ( $\alpha(t) \equiv \alpha(t, t)$ ) — значение производительности в момент времени  $t$ . Требуется оценить производительности  $\alpha_i = \alpha(t_i)$  в некоторые последующие моменты времени  $t_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $t_{i+1} > t_i$ ).

При решении этой задачи будем следовать [64], в соответствии с чем переформулируем задачу так. Требуется достичь производительностей  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  и определить моменты времени  $t_i$ , в которые будет достигнуто  $\alpha_i$  при заданных ресурсах  $R$ . При этом  $t_i$  должны быть минимально возможными.

Дополним список поставленных проблем ( $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ), которые называются *конечными* или *основными целями*, новыми проблемами (промежуточными целями)  $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+n}$ , решение которых может оказаться необходимым или полезным для достижения конечных целей. (В качестве промежуточных целей могут выступать такие, как создание новой технологии и др.)

Пусть  $p_i(t)$  ( $i = \overline{1, m+n}$ ) — вероятность того, что проблема  $\alpha_i$  будет решена в момент времени  $t$ .

Тогда

$$p_i(t) = \frac{\sum_{j=1}^{l_i} r_{ij} p_{ij_1}(t - t_{ij}) p_{ij_2}(t - t_{ij}) \dots p_{ijk_j}(t - t_{ij})}{\sum_{j=1}^{l_i} r_{ij}} \quad (5.70)$$

где  $ij_1, \dots, ijk_j$  — номера промежуточных целей, которые  $j$ -й эксперт выдвинул в качестве условия достижения цели  $\alpha_i$ ,  $t_{ij}$  — оценка  $j$ -м экспертом времени достижения цели  $\alpha_i$  после выполнения поставленного условия,  $r_{ij}$  — весовой коэффициент ( $i$  — номер цели,  $j$  — номер эксперта в группе, оценивающей эту цель). (Процедура подсчета  $r_{ij}$  включает в себя самооценку эксперта, его оценку другими экспертами и ряд дополнительных приемов [97, 241].)

Для вычисления  $p_i(t)$  необходимо иметь вероятности  $p_{ij_s}(t)$ . Последние могут быть определены следующим образом. Все цели разбиваются на непересекающиеся множества  $M_0, M_1, \dots, M_p$ . Множество  $M_0$  состоит из целей, имеющих лишь безусловные оценки времени своего достижения. Для достижения целей из  $M_i$  в качестве условий могут выступать лишь цели из  $M_0, \dots, M_{i-1}$ . Если при оценке цели эксперт не выдвинул никаких условий, то произведение  $r_{ij} p_{ij_1}(t - t_{ij}) \dots p_{ijk_j}(t - t_{ij})$  в (70), очевидно, должно быть заменено на  $r_{ij} Q(t - t_{ij})$ , где  $Q(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $Q(t) = 1$  при  $t \geq 0$ .

В противном случае вероятности в правых частях уравнений (70) совпадают с определенными вероятностями слева. При выполнении указанного способа разбиения всех целей формул (70) оказывается достаточно для вычисления вероятностей  $p_i(t)$  для всех целей при всех значениях  $t$  (с некоторым интервалом дискретности).

После получения  $p_i(t)$  определяются наиболее вероятные значения времени достижения каждой из поставленных целей. В качестве такого времени обычно принимается медиана распределения, т. е. время  $t$ :  $p_i(t) = 0,5$  (определяется интерполяцией).

Степень неопределенности прогноза характеризуется величиной  $Q''_i - Q'_i$ , где  $Q''_i$  ( $Q'_i$ ) — значение  $t$ , при котором  $p_i(t) = 0,75$  ( $p_i(t) = 0,25$ ). Величины  $Q''_i$ ,  $Q'_i$  называются *квартлями* распределения.

Оценку количества операций  $N$ , необходимых для вычисления по формулам (70), можно представить в виде

$$N \leq (k + 2) l \sum_{i=1}^{m+n} N_i, \quad (5.71)$$

где  $l$  — количество экспертов,  $k$  — количество промежуточных целей,  $N_i$  — количество дискретных значений, которыми задана функция  $p_i(t)$ .

Более подробное изложение указанного метода прогнозирования см. в [64]. Отметим здесь, что во многих случаях в результате ана-

лиза работы экспертов примерно одинаковые вероятности достижения конечных целей получаются для различных наборов промежуточных целей, а также различных времен и условий достижения всех целей. Тогда возникает задача анализа и оптимизации соответствующего прогнозного графа с целью выбора путей достижения конечных целей, минимальных по времени или по стоимости [97, 241].

## § 2. Численные методы решения систем уравнений типа Вольтерра

Как уже отмечалось выше, задачи моделирования можно разделить на три больших класса: задачи оценки исходных элементов модели, задачи решения уравнений и оптимизационные задачи. Задачи решения уравнений являются подзадачами для оптимизационных, а также имеют самостоятельное значение.

Программы на ЭВМ для решения систем уравнений могут применять различные методы: итерационные, сеточные, проекционные. Универсальным и весьма эффективным методом решения рассматриваемых систем уравнений вольтерровского типа является метод шагов в сочетании с методом простой итерации.

**2.1. Специальный случай двухпродуктовой модели.** Опишем алгоритм решения этим методом задачи определения функций  $m(t)$ ,  $a(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ) из системы уравнений

$$m(t) = \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau,$$

$$c(t) = \int_{a(t)}^t \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \quad 0 < t_0 \leq t \leq T, \quad (5.72)$$

$$0 \leq a(t) < t, \quad a(t_0) = a_0 = 0, \quad 0 \leq y(\tau) \leq 1,$$

при заданных  $c(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau, t)$  и  $m_0(u) = m(u)$  ( $u \in [0, t_0]$ ).

Пусть функция  $m(t)$  известна на некотором отрезке  $[0, t_i]$  (на первом шаге  $i = 0$ ). Рассмотрим отрезок  $[t_i, t_{i+1}]$  такой, что  $a(t) \leq t_i$  при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Момент  $t_{i+1}$  заранее неизвестен и определяется в процессе решения.

Разбивая интегралы в (72) на два интеграла по отрезкам  $[a(t), t_i]$  и  $[t_i, t]$ , вводя функции

$$\Phi_i(a, t) = \int_a^{t_i} \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau,$$

$$x(t) = \Psi_i(a, t) = \int_a^{t_i} \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \quad (5.73)$$

$$a(t) = \Psi_i^{-1}[x(t), t]$$

и обращая линейный оператор Вольтерра в 1-м уравнении (72), получаем

$$m(t) = \int_{t_i}^t \delta(\tau, t) \Phi_i[a(\tau), \tau] d\tau + \Phi_i[a(t), t] \equiv A_m, \quad (5.74)$$

$$a(t) = \Psi_i^{-1} \left[ c(t) - \int_{t_i}^t \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, t \right],$$

где  $\delta(\tau, t)$  — резольвента линейного уравнения Вольтерра в (72), получаемая методом простой итерации с заданной абсолютной погрешностью  $\varepsilon_1$ .

Система уравнений (74) относительно функций  $m(t)$ ,  $a(t)$  ( $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ) решается методом простой итерации:

$$m^{(r)}(t) = \int_{t_i}^t \delta(\tau, t) \Phi_i[a^{(r-1)}(\tau), \tau] d\tau + \Phi_i[a^{(r-1)}(t), t], \quad (5.75)$$

$$a^{(r)}(t) = \Psi_i^{-1} \left[ c(t) - \int_{t_i}^t \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m^{(r-1)}(\tau) d\tau, t \right],$$

$$r = 1, 2, \dots,$$

где  $m^{(0)}(t)$ ,  $a^{(0)}(t)$  — произвольно заданные начальные функции, значения которых удобно брать совпадающими со значениями  $m$ ,  $a$ , полученными на предыдущем отрезке  $[t_{i-1}, t_i]$ . Единственность решения системы (74) и сходимость метода простой итерации при достаточно широких предположениях доказаны в гл. 3, п. 2.2.

При  $\alpha, \beta, m_0 \geq 0$  операторы в (74) оказываются антитонными\*). Поэтому [140, с. 333], если начальные приближения  $m^{(0)}(t)$ ,  $a^{(0)}(t)$  меньше искомых решений, то нечетные приближения будут больше искомых решений. Следовательно, при нарушении условия  $a^{(r)}(t) \geq 0$  при нечетном  $r$  задача не имеет решения в силу его единственности.

Остановимся на некоторых деталях численной реализации указанного алгоритма. Отрезок  $[0, T]$  разбивается на  $N$  равноудаленных точек  $t'_\nu = \frac{T}{N-1}(\nu - 1)$  ( $\nu = \overline{1, N}$ ). Все интегралы вычисляются по квадратурной формуле трапеций, выбранной в силу малой гладкости подынтегральных функций и переменного отрезка интегрирования. Приближения  $a^{(r)}(t)$  ( $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ) определяются непосредственно из 2-го уравнения (72) при помощи последовательного перебора значений всех интегралов по  $[t'_\nu, t_i]$  ( $\nu = \overline{1, \lceil \frac{t_i}{T} N^{-1} \rceil}$ )

\*) Оператор  $A$  называется антитонным, если из соотношения  $v \leq w$  (в упорядоченном пространстве) следует соотношение  $Av \geq Aw$ .

и линейной интерполяции подынтегральной функции на выбранном малом отрезке  $[t'_{v-1}, t'_v]$ . Этот способ особенно удобен при наличии более жесткого ограничения  $da/dt \geq 0$ , обычно имеющего место в экономических системах. Тогда для вычисления функции  $a^{(r)}(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ) требуется не более  $2N$  сложений элементов массива  $\beta(t'_v, t'_\mu) [1 - y(t'_v)] m(t'_v)$ .

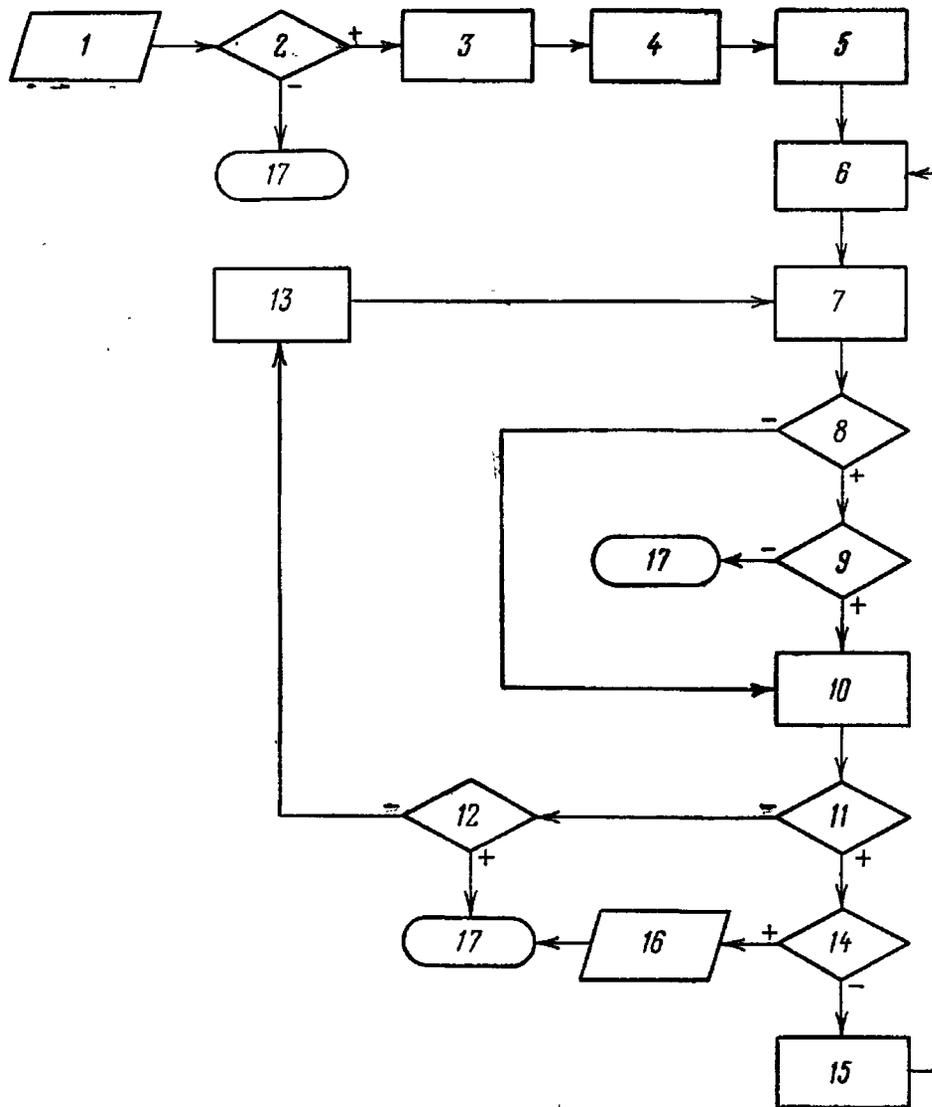


Рис. 5.1.

На рис. 5.1 приведена упрощенная блок-схема описанного алгоритма («+» и «-» на выходах логических элементов обозначают соответственно «да» и «нет») [282]. Цифрами обозначены следующие блоки:

- 1 — ввод исходных данных;
- 2 — проверка согласованности процесса при  $t = t_v$ ;
- 3 — вычисление с заданной точностью  $\varepsilon_1$  резольвенты  $\delta(\tau, t)$ ;
- 4 — выбор начального приближения  $m^{(0)}(t)$ ;
- 5 — номер шага  $i = 0$ ;
- 6 — номер итерации  $r = 0$ ;

7 — вычисление  $r$ -го приближения  $a^{(r)}(t)$  из уравнения (75) при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , где  $t_{i+1} = t_i + h$ , или  $t_{i+1} = T$ ,  $a^{(r)}(T) < t_i$ ,  $t_i + h > T$ , или  $t_{i+1} = \tau \leq T$ ,  $a^{(r)}(\tau) = t_i$ ,  $a^{(r)}(t_i + h) > t_i$ ;

8 — проверка условия:  $r$  — нечетное;

9 — проверка условия:  $a^{(r)}(t) > 0$ ;

10 — вычисление  $r$ -го приближения  $m^{(r)}(t)$  на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$ ;

11 — проверка условия  $|m^{(r-1)}(t) - m^{(r)}(t)| \leq \epsilon$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ;

12 — проверка условия заикливания итерационного процесса;

13 —  $r = r + 1$ ;

14 — проверка условия:  $t_{i+1} = T$ ;

15 —  $i = i + 1$ ;

16 — вывод полученных результатов;

17 — «стоп».

Указанный алгоритм реализован в виде подпрограммы на языке фортран-IV для ОС ЕС ЭВМ. Аналогичная программа составлена также для задачи определения  $m(t)$ ,  $a(t)$  при заданных  $y(t)$ ,

$$P(t) = \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau \quad (\text{см. [282, 283]}).$$

Рассмотренные задачи могут решаться и другими методами. Так, в работе [115] для решения задачи определения  $m(t)$ ,  $a(t)$  при заданных  $y(t)$ ,  $P(t)$  реализован сеточный метод, являющийся аналогом схемы Эйлера для задачи Коши. Для решения нелинейных уравнений вида (74) может быть использован метод функциональных поправок [166]. В [115] показано, что в случае вырожденных ядер  $\alpha$  и  $\beta$  задача отыскания  $m(t)$ ,  $a(t)$  равносильна задаче Коши для определенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Оценим полную абсолютную погрешность решения задачи (72) на ЭВМ в режиме плавающей запятой с  $\tau$  двоичными разрядами для мантисс чисел при помощи указанного алгоритма (73) — (75).

Оценка для наследственной погрешности из-за приближенного и дискретного задания исходных данных и приближенного вычисления резольвенты имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_1 = |\tilde{m}(t) - \hat{m}(t)| \leq e^{\|\alpha y\|(T-t_0)} & \left\{ \left( 1 + \frac{\|\beta/\alpha\|}{\min|\omega|} \right) \frac{1}{\min|y|} (L_y h + \epsilon_y) + \right. \\ & + \frac{1}{\min|\alpha|} (L_{\alpha_\tau} h + h_{\alpha_\tau} h + \epsilon_\alpha) + \left( 1 + \frac{\|\omega\|}{\min|\omega|} \right) \frac{1}{\min|m_0|} (L_{m_0} h + \epsilon_{m_0}) + \\ & + \frac{\|\omega\|}{\min|\omega|} \left[ \frac{1}{\min|\beta|} (L_{\beta_\tau} h + L_{\beta_t} h + \epsilon_\beta) + \frac{1}{\|C\|} (L_c h + \epsilon_c) \right] \Big\} + \\ & + \exp \left\{ \frac{\|\beta(1-y)\|(T-t_0)}{\|\omega\|} e^{\|\alpha y\|(T-t_0)} \right\} \frac{\|\beta(1-y)\|}{\|\omega\|} \|m_0\| \times \\ & \times e^{\|\alpha y\|(T-t_0)} \frac{e^{\|\alpha y\|(T-t_0)} - 1}{\|\alpha y\|} \epsilon_1, \quad (5.76) \end{aligned}$$

$$\omega(x, t) = \frac{\beta(\tau, t) [1 - y(\tau)]}{\alpha(\tau, t) y(\tau)}, \quad t \in [t_0, T],$$

где  $\hat{m}$  — точное решение теоретического уравнения с точными, идеальными входными данными,  $\varepsilon_\varphi$ ,  $l_\varphi$  — соответственно погрешность задания каждой известной функции  $\varphi$  в узлах сетки и ее постоянная Липшица,  $h$  — шаг сетки (по  $\tau$  и по  $t$ ), в узлах которой заданы известные функции,  $\varepsilon_1$  — погрешность вычисления резольвенты (если  $n$ -е интегрированное ядро  $\|\alpha_n\| < \varepsilon_1$ , то процесс вычисления резольвенты прекращается), знак  $\|\cdot\|$  везде означает норму в  $C$ ,  $\|\cdot\| = \max \|\cdot\|$ .

Оценка для вычислительной погрешности, включающей погрешность алгоритма и погрешность округлений, имеет вид

$$\Delta_2 \leq (\varepsilon + 2\Delta_3) e^{\|\alpha y\|(T-t_0)}, \quad (5.77)$$

где  $\varepsilon$  — критерий останова при итерациях: если  $|m^{(r-1)} - m^{(r)}| \leq \varepsilon$ , то  $m = m^{(r)}$ ;

$$\Delta_3 \leq \left[ 2 \frac{\|e\| \|\alpha y\|}{\|\beta(1-y)\|} + \|\alpha y\|^2 \|m_0\| t_0 e^{\|\alpha y\|(T-t_0)} \left( 57 \frac{T^3}{h^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 1,06 (hN_R + \|\alpha y\|) + \frac{1}{\|\alpha y\|} \right) \right] \alpha^{-\tau}, \quad N_R \alpha^{-\tau} < 0, 1, \quad (5.78)$$

есть оценка погрешности округления при вычислении на ЭВМ значения оператора  $A$  (см. (74)), полученная с точностью до главных членов,  $N_R$  — максимально возможное число членов в сумме при вычислении резольвенты с точностью до  $\varepsilon_1$ .

В случае останова итераций по условию заикливания [140, с. 213] оценка вычислительной погрешности имеет вид

$$\Delta_2 \leq \frac{\Delta_3}{1-hL_A} e^{\|\alpha y\| \frac{(1+2h\|\alpha y\|e^{h\|\alpha y\|})}{1-hL_A} (T-t_0)}, \quad (5.79)$$

$$L_A \leq \left\| \frac{\alpha y}{\beta(1-y)} \right\| \|\beta(1-y)\| e^{\|\alpha y\|h},$$

при условии

$$h \left\| \frac{\alpha y}{\beta(1-y)} \right\| \|\beta(1-y)\| e^{\|\alpha y\|h} < 1, \quad (5.80)$$

накладываемом определенные ограничения на выбор шага  $h$ . Следует заметить, что оценка (79) справедлива для более широкого случая, когда условие антитонности может не выполняться.

Объединяя оценки (76) — (78) или (76), (78) — (80), приходим к оценке полной погрешности

$$\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2. \quad (5.81)$$

Общее число арифметических операций при решении системы на отрезке  $[t_0, T]$  равно

$$N \leq \frac{(T-t_0)^3}{h^3} \left( \frac{1}{2} + \frac{r_h}{3} \right) + \frac{t_0 T (T-t_0)}{2h^3} r_h, \quad (5.82)$$

где  $r_k$  — общее число итераций;

$$\frac{(L_A h)^{r_k}}{r_k!} \leq \varepsilon, \quad r_k \approx \frac{\ln \varepsilon}{\ln(L_A h)} \quad (5.83)$$

или

$$\frac{(L_A h)^{r_k}}{r_k!} \leq \Delta_3, \quad r_k \approx \frac{\tau}{\ln(L_A h)}. \quad (5.84)$$

Необходимая память ЭВМ равна

$$M = 8 \frac{T^2}{h^2} + 48 \frac{T}{h} + 714 + M_p \text{ (байт)}, \quad (5.85)$$

где  $M_p$  — память, занимаемая программой ( $M_p \approx 36.300$  байт).

2.2. Случай  $n$ -продуктовой модели. Рассмотрим задачу численного решения системы  $n = p + r + 1$  уравнений относительно  $n$  функций  $m_i, c_j, a$  ( $i = \overline{1, r}; j = \overline{1, p}$ ):

$$\begin{aligned} m_i(t) &= \sum_{k=1}^r \int_{a(t)}^t \alpha_{ik}(\tau, t) y_{ik}(\tau) m_k(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, r}, \\ c_j(t) &= \sum_{k=1}^r \int_{a(t)}^t \beta_{jk}(\tau, t) z_{jk}(\tau) m_k(\tau) d\tau, \quad j = \overline{1, p}, \\ f(t) &= \sum_{i=1}^r m_i(t) + \sum_{j=1}^p c_j(t), \end{aligned} \quad (5.86)$$

$$\sum_{i=1}^r y_{ik} + \sum_{j=1}^p z_{jk} = 1, \quad k = \overline{1, r},$$

$$t \in [t_0, T], \quad a(t) < t, \quad a(t) \geq a(t_0) = 0,$$

$$m_i(u) = \varphi_i(u), \quad u \in [0, t_0].$$

Требуется построить приближенное решение системы (86) в узлах сетки

$$\begin{aligned} \Delta: t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, \\ t_v = t_0 + hv, \quad h = (T - t_0)/N, \end{aligned} \quad (5.87)$$

где  $N$  обеспечивает заданное значение погрешности дискретизации.

Для решения задачи воспользуемся схемой, основанной на методе Эйлера:

$$\Psi_{ijv}(\alpha) = \sum_{s=1}^{w_v} [\tilde{\Phi}_{ij}(\alpha, v+1, s) - \tilde{\Phi}_{ij}(\alpha, v, s)],$$

$$w_v = \left\lceil \frac{t_v - a_v}{h} \right\rceil,$$

$$\Phi_{ij}(\alpha, v, s) = \alpha_{ij}(t_v, t_s) y_{ij}(t_s) m_j(t_s),$$

$$\tilde{\Phi}_{ij}(\alpha, v, s) = \begin{cases} \Phi_{ij}(\alpha, v, s), & s > 1, \\ \Phi_{ij}(\alpha, v, s) \frac{\tau_v - a_v}{h}, & s = 1. \end{cases}$$

$$a_v = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{w_v},$$

$$\tau_i \in \Delta, \quad i > 1,$$

$$\chi_{iv} = h \sum_{i=1}^r [\Phi_{ij}(\alpha, v+1, v) + \Psi_{ijv}(\alpha)],$$

$$\nabla_{mv} = h \sum_{j=1}^r [\Phi_{mj}(\beta, v+1, v) + \Psi_{mjv}(\beta)],$$

$$\Phi_{mj}(\beta, v+1, v) = \beta_{mj}(t_{v+1}, t_v) z_{mj}(t_v) m_j(t_v),$$

$$j = \overline{1, r}, \quad m = \overline{1, p},$$

$$b_v = \sum_{i=1}^r \chi_{iv} + \sum_{m=1}^p \nabla_{mv} - f_v + f_{v+1},$$

$$c_v = \sum_{i,j=1}^r \Phi_{ij}(\alpha, t_{v+1}, a_v) + \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^r \Phi_{js}(\beta, t_{v+1}, a_v),$$

$$a_{v+1} = a_v + b_v/c_v, \tag{5.88}$$

$$m_{i,v+1} = m_{i,v} + \chi_{iv} - (a_{v+1} - a_v) \sum_{j=1}^r \Phi_{ij}(\alpha, t_{v+1}, a_v),$$

$$c_{m,v+1} = c_{m,v} + \nabla_{mv} - (a_{v+1} - a_v) \sum_{j=1}^r \Phi_{ij}(\beta, t_{v+1}, a_v),$$

$$m_j(a_v) = \varphi_j(a_v), \quad a_v \leq t_0,$$

$$m_{j,a_v} = m_{j,s} + \frac{m_{j,s+1} - m_{j,s}}{h} (a_v - t_s),$$

$$t_s \leq a_v \leq t_{s+1}, \quad m_{j,s} = m_j(t_s),$$

$$i = \overline{1, r}, \quad m = \overline{1, p}, \quad v = \overline{0, N-1}.$$

Мажорантные оценки погрешностей метода и округлений при решении задачи по схеме (88) могут быть получены по стандартной методике в результате решения рекуррентных уравнений вида

$$\overset{a}{E}_{v+1} = l_v \overset{a}{E}_v + \sum_{s=v_0}^v l_{vs} E_s + \Delta_{v+1},$$

$$E_{v+1} = n_v \overset{a}{E}_v + \sum_{s=v_0}^v n_{v_s} E_s + \delta_{v+1}, \quad (5.89)$$

$$v = 0, 1, \dots, \overset{a}{E}_0 = E_0 = 0,$$

$$v_0 = v - \left\lceil \frac{t_v - a_v}{h} \right\rceil, \quad t_v = t_0 + vh.$$

При этом имеем:

а) для погрешности метода

$$\begin{aligned} \|m(t_v) - m_v\| &\leq E_v + O(v^{-2}), \\ |a(t_v) - a_v| &\leq \overset{a}{E}_v + O(v^{-2}), \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\|m(t)\| = \sum_{i=1}^r m_i(t);$$

б) для погрешности за счет округлений

$$\|m_v - m_{v,\tau}\| \leq E_v + O(v2^{-2\tau}), \quad (5.91)$$

$$|a_v - a_{v,\tau}| \leq \overset{a}{E}_v + O(v2^{-2\tau}),$$

$\tau$  — число двоичных разрядов для мантисс чисел.

Величины  $\Delta_v$ ,  $\delta_v$  в случае погрешности метода имеют порядок  $O(h^2)$ , а в случае погрешности округлений —  $O(2^{-\tau})$ . Все величины  $\Delta_v$ ,  $\delta_v$ ,  $l_v$ ,  $n_v$ ,  $l_{v_s}$ ,  $n_{v_s}$ , входящие в (89), могут быть оценены через известные исходные величины стандартными приемами [26]. Из-за громоздкости получаемых выражений эти оценки здесь не приводятся.

Для решения задачи (86) по схеме (88) требуется (с точностью до главных членов)

$$\mathcal{N} = Nnr\omega s_\alpha, \quad \min_v \omega_v \leq \omega \leq \max_v \omega_v, \quad (5.92)$$

арифметических операций. Здесь  $s_\alpha$  — среднее число операций для вычисления (выборки из таблицы) значений в одном узле трех функций:  $\alpha_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $m_j$  или  $\beta_{ij}$ ,  $z_{ij}$ ,  $m_j$ .

Пусть функции  $\alpha_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $z_{ij}$  заданы аналитически и программы их вычисления с требуемой точностью имеют длину  $n_\alpha$  слов (это может быть длина таблиц при табличном задании функций). Общий объем памяти для хранения этих программ равен  $2rnn_\alpha$ . Для хранения таблиц значений функций  $m_j$ ,  $c_i$ ,  $a$  требуется память объемом  $nN$ . Пусть еще объем программы для указанного алгоритма составляет  $M_p$  команд. Тогда общая необходимая память составляет

$$M = 2rnn_\alpha + nN + M_p \quad (5.93)$$

ячеек ЭВМ.

**2.3. Некоторые другие случаи.** Случай континуальных моделей (§ 3 гл. 3) в приближенной постановке приводится к случаю  $\hat{n}$ -продуктовых моделей, для которых применяются методы, аналогичные пп. 2.1, 2.2. Хотя сами континуальные модели произошли из  $n$ -продуктовых моделей при больших  $n$ , редукция континуальных моделей для их численного моделирования к конечно-продуктовым не означает возврата к исходным моделям. Напротив, обычно  $\hat{n} \ll n$ , так как  $\hat{n}$  определяется, как правило, невысокой требуемой точностью приближенного метода. То же самое относится к шагу дискретизации при приближенном интегрировании, который обычно намного крупнее того шага дискретных моделей (см. §§ 1, 2 гл. 2), непрерывный аналог которых вводится для удобства применения хорошо разработанного аппарата математического анализа.

Во многих приложениях естественно возникают нелинейные системы уравнений вольтерровского типа, когда функции типа  $\alpha$ ,  $\beta$  нелинейно зависят от искомых решений. Метод шагов в сочетании с простой итерацией (п. 2.1) оказывается применимым и весьма эффективным и в случае нелинейных вольтерровских систем.

Если нарушаются условия единственности решения рассматриваемых систем, то тогда бывает необходимым привлечение принципиально других методов, ориентированных на отыскание всех решений. Один из таких методов, основанный на идеях работы [198] и доведенный до программной реализации, разработан в [16].

### § 3. Численные методы решения задач оптимизации

В настоящее время создано и создается все нарастающими темпами большое число различных приближенных методов решения задач оптимизации. Однако до определенной степени завершенной можно считать лишь задачу выпуклого программирования с выпуклыми целевыми функциями и выпуклыми ограничениями. Для нелинейных невыпуклых задач до сих пор нет достаточно эффективных и обоснованных методов.

Ниже описываются некоторые общие методы математического программирования для решения ряда частных задач оптимизации в рамках нового класса рассматриваемых моделей.

**3.1. Комбинированный метод случайного поиска и быстрого спуска.** Проиллюстрируем применение этого метода на примере численного решения задачи типа 1 для специального случая двухпродуктовых моделей. Пусть требуется максимизировать функционал

$$I(y) = \int_{t_0}^T c(t) dt, \quad (5.94)$$

$$c(t) = \int_{a(t)}^t \beta(\tau) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau,$$

при ограничениях (72) и  $\dot{a}(t) \geq 0$ .

В приближенной постановке (94) сводим к  $I(\bar{y})$ , где  $\bar{y}$  — полигон с  $n$  искомыми приближенными значениями

$$y_k = y(\tau_k), \quad \tau_k = \frac{T - t_0}{n} k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.95)$$

В дальнейшем удобно ломаную линию  $\bar{y}$  отождествлять с вектором или точкой  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ . Заметим, что иногда удобно под  $\bar{y}$  подразумевать  $n$  коэффициентов некоторого гладкого аналитического представления  $y(t)$ .

Для решения задачи максимизации  $I(\bar{y})$  применим известный комбинированный метод случайного поиска и быстрого спуска [256] (случайным поиском определяется направление возрастания  $I(\bar{y})$ , точка локального максимума в данном направлении определяется методом быстрого спуска). При этом для решения системы (72) при данном  $\bar{y}$  применим схему (88), случай  $n = 1$ .

Комбинированный метод может быть реализован по следующей схеме.

1. Поиск начального приближения: задается  $m$  точек  $\bar{y} \in \mathbb{P}_c^n$  равномерным распределением в  $\pi_n: 0 \leq \bar{y} \leq 1$ , вычисляются  $I(\bar{y}_i)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) и находится

$$I(\bar{y}^0) = \max_{1 \leq i \leq m} I(\bar{y}_i).$$

2. Поиск направления возрастания  $I(\bar{y})$  из заданной точки  $\bar{y}^r$  (на первом шаге  $r = 0$ ): в области  $\pi_n \cap S(\rho, \bar{y}^r)$ , где  $S(\rho, \bar{y}^r)$  — сфера радиуса  $\rho > 0$  с центром  $\bar{y}^r$ , берутся точки

$$\bar{y}_{r,i} = \bar{y}^r + \rho_i, \quad i \leq M,$$

с равномерным распределением; выбирается первая точка, для которой

$$I(\bar{y}_{r,i}) > I(\bar{y}^r)$$

с соблюдением всех соотношений модели; если такая точка не находится для  $i \leq M$ , то считается, что

$$I(\bar{y}^r) = \max_{\bar{y}} I(\bar{y}).$$

3. Поиск в заданном направлении: строятся точки

$$\bar{y}_{r,i,j} = \bar{y}^r + 2^j \rho_i, \quad j = \overline{1, l},$$

со свойством

$$I(\bar{y}_{r,i,j}) \geq I(\bar{y}_{r,i,j-1}), \quad j = \overline{1, l-1},$$

$\bar{y}_{i,r,l}$  впервые попадает за пределы допустимой области ограничений или  $\bar{y}_{i,r,l}$  лежит внутри допустимой области, но при этом

$$I(\bar{y}_{i,r,l}) < I(\bar{y}_{i,r,l-1});$$

в обоих случаях последняя «вилка»  $[\bar{y}^r + 2^{l-1}p_i, \bar{y}^r + 2^l p_i]$  уменьшается вдвое, т. е. берется точка  $\bar{y}^r + 2^{l-1}p_i + 2^{l-2}p_i$ ; если эта точка лежит за пределами допустимой области или в ней значение функционала  $I$  меньше  $I(\bar{y}_{i,r,i})$ , то уменьшается вдвое «вилка»  $[\bar{y}^r + 2^{l-1}p_i, \bar{y}^r + 2^{l-1}p_i + 2^{l-1}p_i]$ , в противном случае вдвое уменьшается «вилка»  $[\bar{y}^r + 2^{l-1}p_i + 2^{l-2}p_i, \bar{y}^r + 2^l p_i]$ ; поступая далее аналогичным образом, находим значение  $\bar{y}^{r+1}$  локального (граничного или внутреннего) максимума в данном направлении  $p_i$  с абсолютной погрешностью, не превосходящей  $\rho$ .

4. Переход к 2 с заменой  $r$  на  $r + 1$ . Сделаем ряд замечаний к указанной схеме.

1°. Для вычисления  $I(\bar{y})$  воспользуемся формулой

$$I(\bar{y}) = h \sum_{i=1}^N v_i \Phi_i + \Delta_N,$$

$$v_1 = v_N = \frac{1}{2}, \quad v_i = 1, \quad i = \overline{2, N-1},$$

$$h = \frac{T-t_0}{N}, \quad t_i = t_0 + hi, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i + \frac{1}{2} h (\mu(t_i) + \mu(t_{i+1})) -$$

$$- \frac{1}{2} (a_{i+1} - a_i) (\mu(a_i) + \mu(a_{i+1})), \quad (5.96)$$

$$i = \overline{0, N-1}, \quad \mu(t) = [1 - \bar{y}(t)] m(t) \beta(t),$$

$$\Phi_0 = c_0 = \int_0^{t_0} \beta(\tau) [1 - y_0(\tau)] m_0(\tau) d\tau,$$

$$\Delta_N \leq \frac{(T-t_0)^3}{12N^2} M_{c''} + \frac{(T-t_0)^4}{24N^2} M_{\mu''} [1 + (M_a)^\beta],$$

где  $M_\phi$  для любой функции  $\phi$  означает оценку наибольшего значения  $|\phi|$ . Оценка для  $\Delta_N$  здесь получена на основе известной оценки формулы трапеций [26, с. 250]. Если не существует вторых производных  $c''$  и  $\mu''$ , то аналогичным образом может быть получена оценка для  $\Delta_N$  первого порядка относительно  $1/N$  через  $M_{c'}$  и  $M_{\mu'}$  или через их константы Липшица. Впрочем, в классе функций Липшица может быть сохранен порядок  $1/N^2$ , если в качестве входных данных в формуле квадратур заданы средние интегральные значения исходных функций на каждом из шагов  $h$  (см. п. 7.4 гл. 7). Если можно обосновать большую гладкость функций, входящих в  $I(\bar{y})$ , то целесообразно применять более точные формулы квадратур, например формулу Симпсона.

2°. При наличии в модели многих трудно проверяемых ограничений исходную задачу обычно приводят методом штрафов к зада-

че максимизации нового функционала во всем пространстве  $R^n$  или в простой области, например, в кубе  $\pi_n$ . В рассматриваемой задаче этот новый функционал можно ввести следующим образом:

$$I_1(\bar{y}) = I(\bar{y}) - \lambda \|\tilde{a}^+(t)\|, \quad (5.97)$$

где  $\lambda$  — достаточно большой штрафной множитель, определяемый из требований к погрешности метода штрафов [122],  $\|\cdot\|$  означает знак нормы в пространстве непрерывных или суммируемых с квадратом функций,  $\tilde{\varphi}$  для любой функции  $\varphi$  означает 0, если  $\varphi \geq 0$ , и означает  $\varphi$ , если  $\varphi < 0$ .

3°. Введение больших  $\lambda$  приводит к тому, что функционал  $I_1(\bar{y})$  вблизи искомого решения  $\bar{y}^*$ , максимизирующего  $I_1(\bar{y})$ , имеет сильно «овражный» характер и большинство методов поиска оказывается малоэффективным. Поэтому в [121] рассмотрен другой метод сведения исходной задачи со сложными ограничениями к задаче с простыми ограничениями. Применительно к нашему случаю этот метод требует использовать функционал

$$I_2(\bar{y}, \lambda^*) = \overline{(I(\bar{y}) - \lambda)^+} - \|\tilde{a}^+(t)\|, \quad (5.98)$$

где  $\lambda$  — неизвестное максимальное значение  $I(\bar{y})$  в  $\pi_n$  с учетом всех ограничений модели.

4°. Программная реализация указанного в 3° подхода, который мы назовем *методом невязок*, выполнена в [115]. Там же дан анализ основных характеристик программы — времени ее реализации на ЭВМ, необходимой машинной памяти и полной абсолютной погрешности решения задачи. Заметим здесь, что важной отличительной чертой метода невязок является возможность построения алгоритма максимизации с заданной точностью, причем таким образом, чтобы избежать «овражной» области значений  $\bar{y}$ ,  $\lambda$  функционала  $I_2(\bar{y}, \lambda)$ :

$$\overline{-\lambda + I(\bar{y})} = -\lambda + I(\bar{y}) < 0. \quad (5.99)$$

Обойти эту область можно путем введения специального правила «останова», когда при заданном  $\lambda$  поиск  $\bar{y}$ , максимизирующего  $I_2(\bar{y}, \lambda)$ , прекращается по условию достижения известного числа итераций  $R$ . Последнее число определяется априорно по условию достижения требуемой точности  $\varepsilon$  максимизации  $I_2(\bar{y}, \lambda)$  в «нормальной» области  $-\lambda + I(\bar{y}) = 0$ . Если, следовательно, в процессе максимизации точность  $\varepsilon$  не будет достигнута, а число итераций превзойдет  $R$ , то заданное  $\lambda$  принадлежит «овражной» области. Распознавание заданного  $\lambda$  позволяет реализовать эффективный алгоритм типа дихотомии с целью отыскания искомого  $\lambda^*$ , равного максимальному значению  $I(\bar{y})$ , с необходимыми ограничениями.

**3.2. Градиентные методы.** Известные методы условного градиента или проекции градиента в гильбертовом пространстве [48, 131] оказываются обычно малоэффективными для решения задач оптимизации в рассматриваемом классе моделей, так как в общем случае весьма сложной оказывается задача отыскания искомым проекций на заданное множество ограничений. Кроме того, само множество ограничений нередко может подлежать вариации с целью повышения эффекта оптимизации. В силу этих обстоятельств целесообразно приводить исходную задачу оптимизации с ограничениями к последовательности задач оптимизации без ограничений. Как было показано в предыдущем пункте, это целесообразно делать не методом штрафов, а методом невязок [121]. Если желательно обеспечить существование градиента, можно ввести вспомогательный функционал иначе, нежели в (98). Например:

$$\hat{I}(y) = (\overline{I(y) - \lambda})^{+2} - \|(\dot{a})^+(t)\|^2 - \|\tilde{y}^+(t)\|^2 - \|(\overline{1 - y(t)})^+\|^2, \quad (5.100)$$

где  $\hat{\varphi}^+$  для любой функции  $\varphi$  означает, как и ранее, 0, если  $\varphi \geq 0$ , и  $\varphi$ , если  $\varphi < 0$ , а знак  $\|\cdot\|$  означает норму в пространстве  $L_2([0, T])$ :

$$\|\varphi\| = \left( \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \varphi^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}.$$

При каждом фиксированном  $\lambda$  (см. п. 3.1, 4°) задача сводится к максимизации функционала  $\hat{I}(y)$  по  $y(t)$  без каких-либо ограничений на  $y$  в виде неравенств. Сохраняются лишь ограничения модели (72) в виде равенств.

Ясно, что

$$\begin{aligned} \hat{I}'(y) = 2(\overline{I(y) - \lambda})(I'(y)) - \frac{2}{T - t_0} (\dot{a}_y^*(t))^* (\dot{a}^*(t)) - \\ - \frac{2}{T - t_0} \tilde{y}^*(t) + \frac{2}{T - t_0} [\overline{1 - y(t)}], \end{aligned} \quad (5.101)$$

где

$$I'(y) = m(t) \int_t^{a(t)} [\beta(t, \tau) - \alpha(t, \tau) \psi(\tau)] d\tau,$$

$$\psi(t) = \int_t^{a(t)} \Delta_\alpha(t, \tau) \psi(\tau) d\tau + \int_t^{a(t)} \nabla_\beta(t, \tau) d\tau,$$

$$\Delta_\alpha(t, \tau) = \alpha(t, \tau) y(t) - \alpha(a(\tau), \tau) y(a(\tau)),$$

$$\nabla_\beta(t, \tau) = [1 - y(a(\tau))] \beta(a(\tau), \tau) - [1 - y(t)] \beta(t, \tau),$$

$$m(t) = \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau, \quad \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau = P(t), \quad (5.102)$$

$$a(t) = \min \{T, a^{-1}(t)\},$$

$$\dot{a}_y(t)(\delta y) = \frac{\delta m(t)}{m(a)} + \frac{m - P'_t(t)}{m^2(a)} \left[ \frac{m'_a(a)}{m(a)} \int_{a(t)}^t \delta m(\tau) d\tau + \delta m(a) \right],$$

$$\delta m(t) = \int_{a(t)}^t \Delta_\alpha(\tau, t) \delta m(\tau) d\tau + \int_{\bar{a}(t)}^t \alpha(\tau, t) m(\tau) \delta y(\tau) d\tau,$$

$$\bar{a}(t) = \max \{t_0, a(t)\}, \quad t \geq t_0,$$

$(\dot{a}_y)^*$  — оператор, сопряженный к  $\dot{a}_y$ .

Релаксационный метод градиентного типа запишем в виде

$$y^{n+1} = y^n + \mu_n \hat{I}'(y^n), \quad \mu_n \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.103)$$

В силу известного неравенства [131, с. 158]

$$\hat{I}(y^{n+1}) - \hat{I}(y^n) \geq \hat{I}'(y^n)(y^{n+1} - y^n) - \frac{L}{2} \|y^{n+1} - y^n\|^2, \quad (5.104)$$

где  $L$  — константа Липшица для градиента  $\hat{I}'(y)$  ( $|\hat{I}'(y^1) - \hat{I}'(y^2)| \leq L \|y^1 - y^2\|$ ), и в силу (103) при  $\mu_n = 1/L$  находим

$$\hat{I}(y^{n+1}) - \hat{I}(y^n) \geq \|\hat{I}'(y^n)\|^2 \mu_n \left(1 - \frac{L}{2} \mu_n\right) = \frac{1}{2L} \|\hat{I}'(y^n)\|^2.$$

Но  $\hat{I}(y) \leq 0$ . Поэтому при  $\|\hat{I}'(y^k)\|^2 \frac{1}{2L} \geq \varepsilon$  может быть сделано не более чем  $n^*$  шагов,

$$I(y^0) + n^* \varepsilon \leq 0, \quad I(y^0) + (n^* + 1) \varepsilon > 0,$$

$$n^* = \lceil -I(y^0)/\varepsilon \rceil. \quad (5.105)$$

Значит,  $\|\hat{I}'(y^{n+1})\| \leq \sqrt{2L\varepsilon}$  для некоторого  $n \leq \lceil -I(y^0)/\varepsilon \rceil$ . Но тогда, соединив точку максимума  $y^*(t) = y(1, t)$  с точкой  $y^{n+1}(t) = y(0, t)$  гладкой кривой  $y(x, t)$ , для которой  $\|\hat{I}'(y(x, t))\| \leq \sqrt{2L\varepsilon}$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \hat{I}(y^*) - \hat{I}(y^{n+1}) &= \int_0^1 \hat{I}'(y(x, t)) y'_x(x, t) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \hat{I}'(y(x, t)) y'_x(x, t) dt dx \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{2L\varepsilon} \min \left[ \int_0^1 \max_t |y'_x(x, t)| dx, \left( \frac{1}{T-t_0} \int_0^1 \int_{t_0}^T |y''_x(x, t)|^2 dt dx \right)^{1/2} \right]. \quad (5.106)$$

Сходимость и оценка будут следствием (106), если будет доказана ограниченность одного из интегралов в квадратных скобках и будут получены оценки этого интеграла и константы  $L$ .

Различные условия, при которых имеет место сходимость, указаны в [48, 131]. Однако их проверка в данном случае, как и оценка  $L$ , оказываются чрезвычайно громоздкими и поэтому здесь опускаются.

Заметим здесь лишь, что путь к обоснованию градиентного метода на основе (106) в данном случае представляется наиболее целесообразным, так как прямая оценка близости  $y^*$  к  $y^{n+1}$  вряд ли возможна из-за возможного релейного характера искомого наилучшего значения  $y^*$  и большого числа точек переключения  $y^*$  — нулей градиента  $I'(y^*)$ . Следует еще заметить, что обычный подход к обоснованию градиентных методов, основанный на оценках типа

$$m(y, y) \leq (f^n(y), y) \leq M(y, y), \quad m > 0, \quad (5.107)$$

в данном случае не дает желаемых результатов, так как  $\hat{I}''(y)$  и  $I''(y)$  являются операторами вольтерровского типа, для которых (107) не имеет места. (Правда, оценки типа (107) могут быть получены для вольтерровских операторов при некоторых дополнительных ограничениях на множество допустимых значений  $y$ .)

Все же в частном случае модели (72) и  $\dot{a}(t) \geq 0$ , как показано в гл. 4, нередок случай, когда  $I'(y)$  обращается в нуль в небольшом числе точек. Тогда весьма эффективным оказывается алгоритм типа проекции градиента:

$$y^{n+1} = \begin{cases} 1, & I'(y^n) > 0, \\ y_{\min}, & I'(y^n) < 0, \end{cases} \quad y_{\min} = \min\{y, 1\}, \quad (5.108)$$

где  $y$  дается формулами

$$y(t) = 0, \quad t \in [t_0, t'_0],$$

$$m(t'_0) = \int_{a(t'_0)}^{t'_0} \alpha(\tau, t'_0) m_0(\tau) y_0(\tau) d\tau = f(t'_0),$$

$$m(t_0) = m(t_0) \geq f(t_0), \quad (5.109)$$

$$f(t) = \int_{a(t'_0)}^{t'_0} \alpha(\tau, t) m_0(\tau) y_0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) f(\tau) y(\tau) d\tau, \\ t \geq t'_0.$$

**3.3. Некоторые другие методы.** К числу методов решения оптимизационных задач для рассматриваемого класса моделей, доведенных до программной реализации, кроме указанных в пп. 3.1, 3.2, относится также метод скользящего допуска [267]. Решение ряда задач этим методом на ЭВМ показало его удовлетворительную практическую эффективность.

В случае негладких выпуклых целевых функций и функций ограничений, кроме комбинированного метода п. 3.1, могут быть успешно применены многие разновидности методов, основанных на определении обобщенного градиента негладкой функции [184].

Наконец, с целью отыскания глобального оптимума в случае многоэкстремальных задач, кроме метода п. 3.1, могут быть полезными методы динамического и геометрического программирования [24, 93], последовательной оптимизации [122], а также различные оптимальные по точности методы поиска (см. § 4).

Заметим еще, что в случае задачи отыскания оптимума функций одной переменной в настоящее время накоплен весьма богатый арсенал средств [49], который в случае многих переменных может быть применен рекурсивно, благодаря соотношению

$$\inf_{x_1, x_2, \dots, x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \inf_{x_1} [\inf_{x_2} [\dots [\inf_{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)] \dots]].$$

## § 4. Об оптимизации численных методов

**4.1. Постановка задач.** Основными характеристиками задач, алгоритмов и ЭВМ, нашедшими широкое распространение на практике, являются:

$E(I, X, Y)$  — полная абсолютная погрешность решения задачи  $P(I)$  при помощи алгоритма  $A(X)$  на ЭВМ  $C(Y)$ ;

$T(I, X, Y)$  — время реализации алгоритма  $A(X)$  на ЭВМ  $C(Y)$ ;

$M(I, X, Y)$  — память, необходимая для реализации  $A(X)$ .

Иногда вводится также некий технико-экономический показатель  $f(I, X, Y)$ , который характеризует «пользу» от решения задачи  $P(I)$ .

В общей постановке проблема оптимизации вычислений на ЭВМ нередко сводится к оптимизации одной из указанных характеристик (минимизации  $E, T, M$  и максимизации  $f$ ) на классе задач  $\mathcal{P}$  при помощи как алгоритмических ( $X$ ), так и технических средств ( $Y$ ). Будем в дальнейшем считать  $Y$  заданными и рассмотрим оптимизацию лишь за счет  $X$ .

Пусть рассматриваются задачи  $P(I, R)$  с исходными данными  $I$  и результатами  $R$  из некоторого класса задач  $\mathcal{P} (I \in \mathcal{I}, R \in \mathcal{R})$ , и пусть задачу  $P(I, R)$  требуется решить при помощи некоторого алгоритма  $A(X)$  на ЭВМ  $C(Y)$ , где  $X, Y$  — совокупность параметров соответственно алгоритма и ЭВМ.

Пусть в пространстве исходных или входных данных  $\mathcal{I}$  и в пространстве решений  $\mathcal{R}$  рассматриваемых задач введены метрики со-

ответственно  $\rho_I$  и  $\rho_R$ . Ясно, что диаметры

$$d(\mathcal{I}) = \sup_{I_1, I_2 \in \mathcal{I}} \rho_I(I_1, I_2), \quad (5.110)$$

$$d(\mathcal{R}) = \sup_{R_1, R_2 \in \mathcal{R}} \rho_R(R_1, R_2) \quad (5.110')$$

могут служить мерами неопределенности входных данных и соответствующих решений на классе задач  $\mathcal{P}$ . Задачи, для которых  $d(\mathcal{P}) \neq 0$ , когда  $d(\mathcal{I}) \rightarrow 0$ , называются *некорректно поставленными*. Обычно известно некоторое априорное множество  $\mathcal{R}_1$ , содержащее искомые решения, так что можно переопределить  $\mathcal{R}$  так, что оно будет частью  $\mathcal{R}_1$ . Если после этого  $\mathcal{R}$  оказывается компактным множеством, то задача становится, как правило, корректной, т. е. из  $d(\mathcal{I}) \rightarrow 0$  вытекает, что  $d(\mathcal{R})$  также стремится к нулю.

Неполнота исходных данных  $I$  и неопределенность параметров модели не позволяют узнать, с какой именно задачей  $P(I, R)$  имеем дело. Поэтому требуемый алгоритм  $A$  должен давать приемлемое решение для любой из этих задач. Таким решением может служить чебышевский центр из множества решений  $R^* \in \Omega$ , т. е. точка  $R^*$ , для которой

$$\sup_{R^{(2)} \in \mathcal{R}} \rho_R(R^*, R^{(2)}) \leq \sup_{R^{(2)} \in \mathcal{R}} \rho_R(R^{(1)}, R^{(2)}) \quad \forall R^{(1)}.$$

Мерой погрешности тогда будет чебышевский радиус  $\mathcal{R}$ :

$$\rho^* = \inf_{R^{(1)} \in \Omega} \sup_{R^{(2)} \in \mathcal{R}} \rho_R(R^{(1)}, R^{(2)}) = \sup_{R^{(2)} \in \mathcal{R}} \rho_R(R^*, R^{(2)}). \quad (5.111)$$

Пусть  $R_A$  — приближенное решение, полученное алгоритмом  $A$ . Величину

$$\Delta_A = \rho_R(R^*, R_A) \quad (5.112)$$

назовем *погрешностью* алгоритма  $A$ . Если  $\Delta_A = 0$ , то алгоритм  $A$  назовем *оптимальным* по точности. Если

$$\Delta_A = \sigma(\rho^*), \quad O(\rho^*), \quad (5.113)$$

когда  $d_I(\mathcal{I}) \rightarrow 0$ , то алгоритм  $A$  назовем соответственно *асимптотически оптимальным*, *оптимальным* по порядку по точности.

Предположим, что искомый алгоритм  $A$  ищется на некотором множестве  $\mathcal{A}$ . Множество  $\mathcal{A}$  алгоритмов, которые используют наперед заданную информацию  $\mathcal{I}$ , составляет множество пассивных стратегий решения класса задач  $\mathcal{P}$ . Если элементы  $\mathcal{I} = \{I_\nu\}_1^N$  образуются по правилу

$$I_1 = A_1(I), \quad I_2 = A_2(I_1), \quad I_3 = A_3(I_1, I_2), \dots, \quad I_N = A_N(I_1, \dots, I_{N-1}) \quad (5.114)$$

и далее рассматривается произвольный алгоритм  $A_N$ , использующий всю ранее полученную информацию  $(I_1, \dots, I_N)$ , то множество алго-

ритмов  $\{A_1, \dots, A_{N-1}, A_N\}$  составляет множество последовательных стратегий решения класса задач  $\mathcal{P}$ .

Все указанные определения в настоящее время относят к проблеме так называемой аналитической сложности [311] алгоритмов, когда точность выражается через входные данные и время решения задач на ЭВМ не учитывается.

Алгебраическая сложность [292] непосредственно связана с конкретным набором базисных операций ЭВМ и с временем реализации алгоритмов на ЭВМ.

Пусть  $O (O_1, \dots, O_r)$  — базисный набор операций ЭВМ и  $\tau_i$  — время выполнения операции  $O_i$ . Тогда время реализации алгоритма  $A$  на ЭВМ равно

$$T_A(I) = \sum_{i=1}^r n_i \tau_i, \quad (5.115)$$

где  $n_i$  — число операций  $O_i$  при реализации алгоритма  $A$ ,  $I$  — входные данные алгоритма. Алгоритм  $A^*$  назовем *оптимальным* по времени реализации на классе входных данных  $\mathcal{J}$ , если

$$T_{A^*} = \inf_A \sup_{I \in \mathcal{J}} T_A(I). \quad (5.116)$$

#### 4.2. Оптимальные по точности методы аппроксимации функций.

**Теорема 1.** Пусть дано множество функций  $F$  с равномерной метрикой. Оптимальной по точности аппроксимацией на  $F$  — чебышевским центром  $F$  и чебышевским радиусом  $F$  — будет

$$f^*(x) = \frac{f^+(x) + f^-(x)}{2}, \quad \rho^*(x) = \frac{f^+(x) - f^-(x)}{2}, \quad (5.117)$$

$$f^+(x) = \sup_{f \in F} f(x), \quad f^-(x) = \inf_{f \in F} f(x).$$

Доказательство этой теоремы легко проводится от противного, исходя из определения чебышевского центра и чебышевского радиуса (п. 4.1). Интересно, что  $f^*(x)$  будет чебышевским центром в  $\mathbb{R}^1$  на классе  $\{f(x)\}$  ( $f \in F$ ) при каждом фиксированном  $x$ . Однако  $f^*(x)$  не обязательно принадлежит  $F$  и важным является вопрос о свойствах  $f^*(x)$ .

**Теорема 2 [205].** Рассмотрим класс  $C_{1,L,N,\varepsilon}$  таких функций  $f$  с условием Липшица и константой Липшица  $L$ , т. е.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \|x_1 - x_2\|, \quad (5.118)$$

где  $\|\cdot\|$  — знак нормы в некотором линейном нормированном пространстве функций, относительно которых известно  $3N$  чисел  $\{x_v\}_1^N, \{\tilde{f}_v\}_1^N, \{\varepsilon_v\}_1^N$ :

$$|f(x_v) - \tilde{f}_v| \leq \varepsilon_v, \quad v = \overline{1, N}. \quad (5.119)$$

Чебышевский центр и чебышевский радиус на классе  $C_{1,L,N,\varepsilon}$

даются формулами

$$\begin{aligned}
 f^*(x) &= \frac{f^+(x) + f^-(x)}{2}, \quad \rho^*(x) = \frac{f^+(x) - f^-(x)}{2}, \\
 f^+(x) &= \min_{1 \leq v \leq N} \{\tilde{f}_v + z_v + L \|x - x_v\|\}, \\
 z_v^+ &= \min_{1 \leq \mu \leq N} \{\tilde{f}_\mu - \tilde{f}_v + \varepsilon_\mu + L \|x_v - x_\mu\|\}, \\
 f^-(x) &= \max_{1 \leq v \leq N} \{\tilde{f}_v - z_v - L \|x - x_v\|\}, \\
 z_v^- &= \min_{1 \leq \mu \leq N} \{- (\tilde{f}_\mu - \tilde{f}_v) + \varepsilon_\mu + L \|x_v - x_\mu\|\}.
 \end{aligned} \tag{5.120}$$

Доказательство также нетрудно получить способом рассуждений от противного.

Если, в частности,  $\varepsilon_v = 0$  ( $v = \overline{1, N}$ ) и рассматриваются функции класса  $C_{1,L,N}$  от одной независимой переменной, то чебышевским центром будет функция  $f^*(x)$ , изображенная на рис. 5.2 жирной линией.

Пусть теперь дан некоторый класс функций  $F$  и алгоритм  $A$  использует информацию не более чем о  $N$  значениях функции  $f \in F$  в точках  $x_v$  ( $v = \overline{1, N}$ ). Обозначим через  $\tilde{f}(A) = A(\{x_v\}, \{f_v\}_1^N, x)$  результат применения алгоритма  $A$  для аппроксимации  $f \in F$  и положим

$$\begin{aligned}
 v(f, A, \{x_v\}_1^N) &= \|f - \tilde{f}(A)\|, \\
 v(F, A, \{x_v\}_1^N) &= \sup_{f \in F} v(f, A, \{x_v\}_1^N), \\
 v_N(F, \{x_v\}_1^N) &= \inf_A v(F, A, \{x_v\}_1^N), \\
 v_N(F) &= \inf_{\{x_v\}_1^N} v_N(F, \{x_v\}_1^N),
 \end{aligned} \tag{5.121}$$

где нижняя грань берется по всевозможным алгоритмам  $A$  и всевозможным наборам  $\{x_v\}_1^N \subset \pi_n$ . Ясно, что  $v_N(F)$  характеризует наименьшую возможную погрешность аппроксимации  $f$  из класса  $F$  при использовании информации о не более чем  $N$  значениях  $f$ , т. е. является наименьшей возможной погрешностью аппроксимации на множестве пассивных стратегий.

Пусть сами точки  $\{x_v\}_1^N$  выбираются при помощи некоторых алгоритмов  $\{A_v\}_1^N$ :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= A_1(1), \quad f_1 = f(x_1), \quad x_2 = A_2(x_1, f_1), \quad f_2 = f(x_2), \dots, \\
 x_N &= A_N(x_1, f_1, x_2, f_2, \dots, x_{N-1}, f_{N-1}), \quad f_N = f(x_N)
 \end{aligned}$$

и окончательный результат аппроксимации равен

$$r_N(f, A, x) = A_{N+1}(x_1, f_1, \dots, x_N, f_N; x).$$

Положим

$$W(f, A) = \|f - r_N(f, A)\|,$$

$$W(F, A) = \sup_{f \in F} W(f, A), \quad (5.122)$$

$$W_N(F) = \inf_{\{A_v\}_1^{N+1}} W(F, A).$$

Ясно, что  $W_N(F)$  является наименьшей погрешностью аппроксимации на множестве последовательных стратегий.

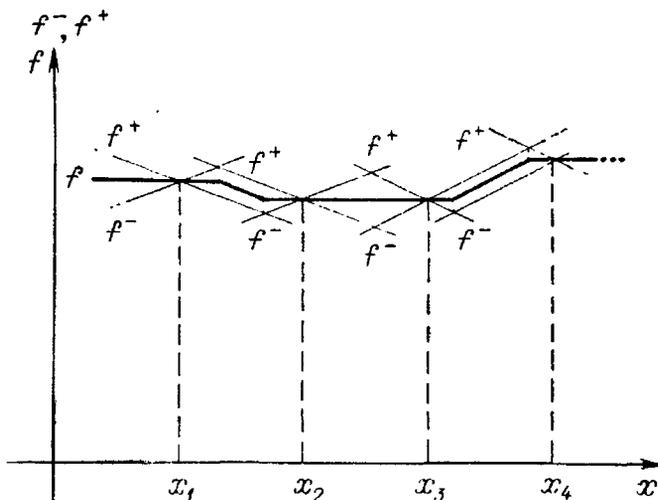


Рис. 5.2.

**Теорема 3.** Пусть дан класс  $C_{1,L}$  функций, определенных в кубе  $\pi_n$ :  $0 \leq x_i \leq 1$  ( $i = 1, n$ ) и удовлетворяющих в  $\pi_n$  условию Липшица с константой  $L$  в кубической метрике, т. е.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \|x_1 - x_2\|_1 = L \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|.$$

Тогда в метрике  $C(\|\cdot\| = \max_x |\cdot|)$  имеем

$$V_N(C_{1,L}^n) = W_N(C_{1,L}^n) \sim \frac{L}{2N^{1/n}}, \quad (5.123)$$

причем оптимальными узлами  $\{x_v^*\}_1^N$ , на которых достигается  $V_N(C_{1,L}^n)$ , в случае  $N = t^n$  будут узлы минимальной  $1/(2t)$ -сети в  $\pi_n$  (в смысле Колмогорова [51]), а оптимальной аппроксимацией в этом случае будет функция

$$f^*(x) = f_v, \quad x \in [x_v^*, x_{v+1}^*], \quad v = \overline{1, N}. \quad (5.124)$$

Доказательство этой теоремы получим методом «шапочек», состоящим в построении нижней оценки для  $V_N(F)$  и  $W_N(F)$ , асимпто-

тически совпадающей с верхней, которая равна, очевидно,  $L/(2N^{1/n})$ . Для получения нижней оценки возьмем две функции (в случае  $N = m^n$ ):

$$f_1(x) = L \|x - x_v^*\|_1, \quad \|x - x_v\|_1 \leq \frac{1}{2m}, \quad (5.125)$$

$$f_2(x) = -L \|x - x_v^*\|_1, \quad \|x - x_v\|_1 \leq \frac{1}{2m}, \quad v = \overline{1, m^n}.$$

Нетрудно убедиться, что  $f_1, f_2 \in C_{1,L}^n$  и

$$\|f_1 - f_2\|_C = \frac{L}{N^{1/n}}.$$

Кроме того, очевидно, что

$$V_N \geq W_N \geq \sup_{f_1, f_2} \|f - r_N(f_1, A)\|_C \geq \frac{\|f_1 - f_2\|_C}{2} = \frac{L}{2N^{1/n}}.$$

В случае произвольного  $N$  найдем такое  $m$ , что  $m^n \leq N < (m+1)^n$ . После этого доказательство проведем аналогичным способом.

Заметим, что минимальная  $1/(2m)$ -сеть в кубической метрике легко строится и состоит из внутренних узлов кубической сетки с шагом  $1/m$ , построенной для  $n$ -мерного куба

$$-\frac{1}{2m} \leq x_i \leq 1 + \frac{1}{2m}, \quad i = \overline{1, n}.$$

**Теорема 4.** Пусть  $C_{s+1,L}^n$  означает класс  $s$  раз дифференцируемых функций в  $\pi_n$ , для которых  $s$ -е производные непрерывны по Липшицу с константой  $L$ . Тогда в метрике  $C$

$$V_N(C_{s+1,L}^n), W_N(C_{s+1,L}^n) = O\left(\frac{L}{N^{(s+1)/n}}\right). \quad (5.126)$$

Доказательство состоит в получении необходимых верхних и нижних оценок. Кусочно многочленная аппроксимация  $T_{N,s}(f, x)$  функции  $f(x) \in C_{s+1,L}^n$ , полученная путем разбиения каждого из отрезков  $[0, 1]$  по осям  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) на  $[N^{1/n}/(s+1)]$  равных частей и построения на полученных  $[N^{1/n}/(s+1)]^n$  кубах многочленов интерполяции степени  $sn$  по  $s+1$  узлам типа Чебышева вдоль каждой оси и каждого из отрезков разбиения, обладает свойством [111]

$$\begin{aligned} |T_{N,s}(f, x) - f(x)| &\leq \frac{L}{(N+1)^{(s+1)/n}} \frac{(s+1)^{s+1}}{(s+1)! 2^s} \times \\ &\times \frac{q_s^n - 1}{q_{s-1} [1 - (s+1)/(N+1)^{1/n}]} \cdot \quad (5.127) \\ q_s &\leq 1 + \frac{2}{\pi} \ln(s+1), \end{aligned}$$

что дает искомую верхнюю оценку. Для получения необходимой нижней оценки введем две функции:

$$f^{\pm} = \begin{cases} 0, & \|x - x^*\|_3 \geq 1/N^{1/n}, \\ \pm \frac{LN^{(s+1)/n}}{(s+1)! 2^{s+1}} \left[ \frac{1}{N^{2/n}} - \|x - x^*\|_3^2 \right]^{s+1}, & \|x - x^*\|_3 \leq 1/N^{1/n}, \end{cases} \quad (5.128)$$

где  $x^*$  — такая точка, для которой  $\min_{1 \leq v \leq n} \|x^* - x_v\| \geq 1/N^{1/n}$ .

Ясно, что

$$f^{\pm} \in C_{s+1,L}^n, \quad \|f^+ - f^-\|_C = \frac{L}{(s+1)! 2^s N^{(s+1)/n}}.$$

Поэтому

$$V_N \geq W_N \geq \sup_{f^{\pm}} \|f - r_N(f, A)\|_C \geq \frac{\|f^+ - f^-\|}{2} = \frac{L}{(s+1)! 2^{s+1} N^{(s+1)/n}}.$$

Сделаем ряд замечаний.

1. В случае класса  $\tilde{C}_{s+1,L}^1$  периодических функций от одной переменной на  $[0, 2\pi]$ , имеющих  $s$ -ю производную, непрерывную по Липшицу с константой  $L$ , в [146] по  $N$  равноотстоящим узлам построена оптимальная по точности сплайновая аппроксимация дефекта 1, для которой

$$V_N(\tilde{C}_{s+1,L}^1) = \frac{\Phi_N}{N^{s+1}}, \quad \Phi_N \leq \frac{\pi}{2}, \quad (5.129)$$

где  $\Phi_N$  — константа Фавара (точно та же, что и для величины наилучшего приближения многочленами степени  $N$ ).

2. В подклассе  $C_{s+1,L}^n$  — классе функций  $f \in H_{s+1,L}^n$ , для которых производные вида  $\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  ( $0 \leq \alpha_i \leq s+1$ ,  $i = \overline{1, n}$ ) ограничены константой  $L$ , как показано в [147],

$$V_N(H_{s+1,L}^n) \asymp L \frac{\ln^C N}{N^{s+1}}, \quad \tilde{C} > 0. \quad (5.130)$$

3. В более узких классах функций  $\mathcal{E}_\rho$ , аналитически продолжимых за пределы  $\pi_n$  вплоть до эллипсоида с максимальной суммой осей, равной  $\rho$ , и с фокусами в  $0, 1$ ;  $G_{A_\varepsilon, \nu}^n$  — целых функций в  $R^n$  с характеристикой роста

$$|f(z)| \leq A_\varepsilon \exp\{(\nu + \varepsilon) \|z\|\} \quad (5.131)$$

и  $G_A^n$  — целых функций в  $R^n$  с характеристикой роста

$$|f(z)| \leq \exp\{A (\ln \|z\|)^{n/(n-1)}\}, \quad n > 1, \quad (5.132)$$

в [111, 205] получены соответственно оценки

$$V_N(\Theta_\rho^n), W_N(\Theta_\rho^n) = O\left(\left(\frac{1}{\rho}\right)^{N^{1/n}}\right), \quad (5.133)$$

$$V_N(G_{A_\varepsilon, \nu}^n), W_N(G_{A_\varepsilon, \nu}^n) = O\left(\left(\frac{\nu + \varepsilon}{N^{1/n}}\right)^{N^{1/n}}\right), \quad (5.134)$$

$$V_N(G_A^n), W_N(G_A^n) = O(q^N), \quad q < 1. \quad (5.135)$$

4. Качественно те же оценки, что и (121) — (135), справедливы и в том случае, когда исходной информацией будут не значения функций в  $N$  точках, а первые  $N$  коэффициентов разложения функций в ряд Фурье по многочленам Чебышева.

4.3. Оптимальные по точности методы решения уравнений. Рассмотрим уравнение

$$Ax = y, \quad (5.136)$$

где оператор  $A$  действует из пространства  $X$  в  $Y$ ,  $x$  — искомый элемент,  $x \in X$ . Будем считать  $X, Y$  линейными нормированными пространствами.

Пусть  $A \in \mathcal{A}$ ,  $y \in \mathcal{Y}$ , где  $\mathcal{A}, \mathcal{Y}$  — заданные классы соответственно операторов и правых частей. Обозначим через  $A^*$  и  $y^*$  чебышевские центры соответственно в  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{Y}$ , а через  $x_*$  — решение уравнения

$$A^*x = y^*, \quad (5.137)$$

которое назовем *оптимальным по точности* представлением уравнения (136).

*Теорема 5. Если производная по Фреше  $A_{x_*}^*$  существует и имеет ограниченный обратный оператор  $(A_{x_*}^*)^{-1}$ , причем равномерно малым отклонениям операторов в  $\mathcal{A}$  от  $A^*$  отвечают равномерно малые отклонения их производных, то с точностью до первых степеней отклонений имеем*

$$x = x_* + (A_{x_*}^*)^{-1} [\Delta A_{x_*} + \Delta y], \quad (5.138)$$

$$A = A^* + \Delta A, \quad y = y^* + \Delta y.$$

Доказательство легко следует из принятых предположений.

Рассмотрим случай нелинейной системы интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода в виде

$$Ax \equiv x(t) - \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau, t) d\tau = y(t). \quad (5.139)$$

В данном случае

$$A_{x_*}^* \Delta x = \Delta x(t) - \int_{t_0}^t f_x^*(x_*(\tau), \tau, t) \Delta x(\tau) d\tau, \quad (5.140)$$

$$A_{x_*}^* = x_*(t) - \int_{t_0}^t f^*(x_*(\tau), \tau, t) d\tau = y^*(t),$$

где  $f_x^*$  — матрица Якоби для  $f^*$ , которая по предположению существует,  $f^*$ ,  $y^*$  — чебышевские центры в заданных классах функций  $f$ ,  $y$ , которые будем считать компактными. Обозначим через  $x^*(t)$  чебышевский центр множества  $x$  решений уравнения (139), когда  $f$ ,  $y$  пробегает множества возможных значений.

**Теорема 6.** При указанных предположениях и в условиях теоремы 5 справедливы следующие асимптотические равенства:

$$x^*(t) \sim x_*(t),$$

$$x^\pm(t) = x_*(t) \pm \int_{t_0}^t |\gamma^*(t, \tau)| (\Delta Ax_* + \Delta y)^\pm(\tau) d\tau,$$

$$\rho_x^*(t) \sim \int_{t_0}^t |\gamma^*(t, \tau)| (\Delta Ax_*(\tau) + \Delta y)^\pm(\tau) d\tau, \quad (5.141)$$

$$\gamma^*(t, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j^*(t, \tau), \quad k_0^*(t, \tau) = f_x^*(x_*(\tau), \tau, t),$$

$$k_j^*(t, \tau) = \int_{\tau}^t k_{j-1}^*(v, \tau) k_0^*(t, v) dv, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} (\Delta Ax_* + \Delta y)^\pm(t) = & \int_{t_0}^t [f^\pm(x_*(\tau), \tau, t) - \\ & - f^*(x_*(\tau), \tau, t)] d\tau + y^\pm(t) - y^*(t), \end{aligned}$$

где  $|\gamma^*(t, \tau)|$  означает матрицу, компоненты которой состоят из модулей компонент  $\gamma^*(t, \tau)$ .

Доказательство нетрудно вывести из теорем 1, 5.

Заметим, что асимптотику можно сохранить, аппроксимируя достаточно точно  $\gamma^*(t, \tau)$  при помощи отрезка соответствующего ряда и  $x_*$  — путем численного решения уравнения  $A^*x_* = y^*$ . Конкретным примером, на котором все соотношения могут быть доведены до числа, может быть случай задания классов в виде  $C_{1,L,N,\varepsilon}$  (п. 4.2).

**4.4. Оптимальные по точности методы минимизации функций.** Рассмотрим задачу отыскания

$$R = \inf_{x \in \pi_n} f(x), \quad \pi_n: 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.142)$$

где  $f$  принадлежит некоторому классу функций  $F$ . К этому случаю приводятся многие задачи оптимизации функционалов и решения операторных уравнений.

**Теорема 7.** *Оптимальное по точности значение  $R^*$  и погрешность  $\rho^*$  даются формулами*

$$R^* = \frac{R^+ + R^-}{2}, \quad R^\pm = \inf_{x \in \pi_n} f^\pm(x),$$

$$f^+(x) = \sup_{f \in F} f(x), \quad f^-(x) = \inf_{f \in F} f(x), \quad (5.143)$$

$$\rho^* = \frac{R^+ - R^-}{2}.$$

Доказательство аналогично теореме 1.

Заметим, что ряд алгоритмов, оптимальных по точности в случае  $F = C_{1,L,N,\varepsilon}^n$ , построен в [205] (см. теорему 2).

Введем пассивные и последовательные стратегии для отыскания  $R$ , пользуясь не более чем  $N$  значениями  $f(x_\nu)$  ( $x_\nu \in \pi_n$ ), и соответствующие характеристики  $V_N(F)$ ,  $W_N(F)$  точно так, как и в задаче аппроксимации (п. 4.2) (следует только вместо  $f$  подставить  $\inf_{x \in \pi_n} f$ , а знак нормы  $\|\cdot\|$  заменить на знак модуля  $|\cdot|$ ).

**Теорема 8.** *Имеет место соотношение*

$$V_N(C_{1,L}^n) = W_N(C_{1,L}^n) =$$

$$= \sup_{f \in C_{1,L}^n} \left| \inf_{x \in \pi_n} f - \min_{1 \leq \nu \leq N} f(X_\nu^*) - \frac{L}{2N^{1/n}} \right| = \frac{L}{2N^{1/n}}, \quad (5.144)$$

$$N = m^n,$$

где  $\{X_\nu^*\}_1^N$  —  $1/(2m)$ -минимальная сеть в  $\pi_n$  (в кубической метрике,  $C_{1,L}^n$  — класс функций с условием Липшица в  $\pi_n$  и с константой Липшица  $L$ ).

Доказательство аналогично теореме 3.

Аналогично теореме 4 устанавливается также еще

**Теорема 9.** *Имеют место следующие соотношения:*

$$V_N(C_{s+1,L}^n), \quad W_N(C_{s+1,L}^n) = O\left(\frac{L}{N^{(s+1)/n}}\right). \quad (5.145)$$

Заметим, что оптимальным по порядку (в смысле точности) алгоритмом в классе  $C_{s+1,L}^n$  будет любой алгоритм достаточно точной минимизации кусочно многочленной функции (степени  $sn$ ), оптимально по порядку аппроксимирующей соответствующую функцию из рассматриваемого класса. При этом оказывается существенной проблема алгебраической сложности для задач минимизации многочленов от  $n$  переменных.

В [255] показано, что даже задача минимизации квадратичной функции вида

$$f(x) = - \sum_{i > j=1}^n a_{kj} x_i x_j + (x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad a_{kj} = 0, 1, \quad (5.146)$$

по вершинам куба  $\pi_n$  относится к числу универсальных или  $NP$ -полных [13].

Так как задача минимизации в  $\pi_n$  путем введения двоичных представлений аргументов

$$x_i = 2^{-1}\alpha_1^{(i)} + 2^{-2}\alpha_2^{(i)} + \dots + 2^{-m}\alpha_m^{(i)}, \quad i = \overline{1, n},$$

с любой степенью точности  $2^{-m}$  приводится к задаче минимизации по вершинам куба  $\pi_{nm}$ , то естественно ожидать, что не существует эффективных алгоритмов минимизации многочленов от  $n$  переменных степени выше первой на классе всех многочленов. Однако имеются определенные основания ожидать, что для каждого конкретного многочлена и заданной точности  $\varepsilon > 0$  всегда найдется алгоритм его минимизации, требующий степенного порядка числа арифметических операций, т. е.  $O(n^k)$ , где  $k$  не зависит от  $n$ . Тем не менее вопрос построения такого алгоритма остается пока что открытым.

В заключение этого пункта заметим, что в более узких классах точность отыскания глобального минимума функций  $n$  переменных может быть существенно повышена. Кроме того, можно получить аналогичные результаты, когда исходной информацией служат не значения функции в точках, а значения ряда других функционалов (см. п. 4.2).

**4.5. Оптимизация алгоритмов по быстродействию.** Общий аппарат решения проблем алгебраической сложности (п. 4.1) создан в [85] в виде алгебры алгоритмов. Этот аппарат позволяет автоматизировать процесс поиска наилучшего по быстродействию алгоритма при помощи ЭВМ. Однако пока на этом пути удается решать лишь весьма простые задачи. Аппарат оптимизации алгоритмов, приближенный к решению традиционных стандартных задач вычислительной математики, развит в работах [229, 307] и др.

Остановимся здесь на некоторых результатах оптимизации алгоритмов решения операторных уравнений по быстродействию, т. е. по числу основных операций ЭВМ или по времени реализации алгоритмов на ЭВМ.

Рассмотрим общую схему метода наименьших квадратов (м. н. к.) для решения уравнений

$$Ax = y$$

в гильбертовом пространстве  $X$ . Приближенное решение ищут в виде

$$x_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \quad (5.147)$$

где  $e_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) — первые  $n$  элементов некой полной системы в  $X$ , из условия

$$\|Ax_n - y\| \equiv \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k A e_k - y \right\| = \min_{\{\alpha_k\}_1^n} \quad (5.148)$$

В результате приходим к линейной алгебраической системе

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (Ae_k, Ae_j) = (y, Ae_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.149)$$

Перепишем ее в матричном виде:

$$\begin{aligned} \overline{A}\overline{\alpha} &= \overline{y}, \quad \overline{A} = \{(Ae_k, Ae_j)\}, \\ \overline{y} &= \{(y, Ae_j)\}, \quad \overline{\alpha} = \{\alpha_k\}. \end{aligned} \quad (5.150)$$

Известно, что решение общих систем  $n$  линейных алгебраических уравнений многими хорошо изученными и реализованными на ЭВМ алгоритмами требует порядка  $n^3$  арифметических операций. Покажем, что для решения широкого класса систем вида (156) с точностью  $\varepsilon > 0$  требуется порядка  $n^2$  арифметических операций.

Введем ленточные матрицы

$$\overline{A}_m = \{a_{kj}^m\}, \quad a_{kj}^m = \begin{cases} (Ae_k, Ae_j), & |k - j| \leq m - 1, \\ 0, & |k - j| \geq m. \end{cases} \quad (5.151)$$

Указанная «широта» класса систем определяется свойством

$$\|\overline{A} - \overline{A}_m\| \leq \frac{c}{m^s}, \quad s \geq 1, \quad \|\overline{A}\overline{\alpha}\| \geq \overline{m} \|\overline{\alpha}\|, \quad \overline{m} > 0, \quad (5.152)$$

где константы  $c, \overline{m}$  не зависят от  $n, m$ . В [112, 118] показано, что свойство (152) выполняется для широкого класса интегральных уравнений, коэффициенты и ядра которых имеют  $s$  производных.

Для приближенного решения (151) при условии (152) применим следующий алгоритм. Выберем  $m_0, q_0$ , не зависящие от  $n$ , такие, что

$$\|\overline{A}_{m_0}^{-1}(\overline{A}_{m_0} - \overline{A}_l)\| \leq q_0 \leq \frac{1}{2}, \quad m_0 \leq l \leq n. \quad (5.153)$$

Для этого достаточно выбрать  $m_0$  из условия

$$\frac{c}{m_0^s \overline{m}} \leq q_0 \frac{(1 - q_0)}{2},$$

так как тогда

$$\begin{aligned} X = \|\overline{A}_{m_0}^{-1}(\overline{A}_{m_0} - \overline{A}_l)\| &\leq \|\overline{A}_{m_0}^{-1}\| \frac{2c}{m_0^s} \leq \|\overline{A}^{-1}\| \frac{1}{1 - X} \frac{2c}{m_0^s} \leq \\ &\leq \frac{2c}{m_0^s \overline{m}} \cdot \frac{1}{1 - X} \leq q_0 (1 - q_0) \frac{1}{1 - X} \leq q_0. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} z_0 &= \overline{A}_{m_0}^{-1} \overline{y}, \quad \overline{y}_g = (\overline{A}_{m_0} + \overline{A}_{m_g}) Z_{g-1}, \\ z_g &= \overline{A}_{m_0}^{-1} \overline{y}_g, \quad m_g = [q^g n] + 1, \quad q < 1, \quad g = \overline{1, r}, \\ z^{(r)} &= z_0 + z_1 + \dots + z_r = \overline{A}_{m_0}^{-1} (\overline{y} + \overline{y}_1 + \dots + \overline{y}_r). \end{aligned} \quad (5.154)$$

Выполнив элементарные выкладки [118], получим

$$\|\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^{(r)}\| \leq \left[ \frac{q_0^{r+1}}{1-q_0} + \frac{2c \|\bar{A}_{m_0}^{-1}\|}{n^s} \sum_{q=1}^r \left(\frac{q_0}{q^s}\right)^{q-1} \frac{1}{q^s - q^{2s}} \right] \|z_0\|.$$

Выберем  $q < 1$  из условия

$$\frac{q_0}{q^s} = q_1 < 1$$

и  $r$  — из условия

$$q_0^r = \frac{1}{n^s}.$$

В итоге приходим к следующему результату.

**Т е о р е м а 10.** *Справедливо неравенство*

$$\|\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^{(r)}\| \leq \left[ \frac{q_0}{1-q_0} + \frac{2c \|\bar{A}_{m_0}^{-1}\| q_1^2}{q_0 (q_1 - q_0) (1-q_1)} \right] \frac{\|z_0\|}{n^s} \leq \frac{c_1}{n^s}, \quad (5.155)$$

где константа  $c_1$  не зависит от  $n$ . При этом число операций сложения и умножения для отыскания  $\bar{\alpha}^{(r)}$  будет

$$N \leq r m_0^2 n + n (m_1 + \dots + m_r) < r m_0^2 n + nr + n^2 \frac{q}{1-q} \asymp n^2. \quad (5.156)$$

Соотношения (155), (156), в частности, означают, что для решения системы (149) с любой точностью  $\varepsilon > 0$  достаточно порядка  $n^2$  арифметических операций. Сделаем еще ряд замечаний.

Если  $n^{-s}$  является порядком наилучших аппроксимаций в  $X$ , то порядок погрешности  $n^{-s}$  для метода наименьших квадратов не может быть улучшен для всего класса и ряда подклассов линейных операторных уравнений в  $X$ .

Всякий алгоритм решения системы (149), использующий  $O(n^2)$  данных из числа  $n(n+1)/2$  данных  $(\bar{A}, \bar{y})$ , будет иметь не менее  $O(n^2)$  бинарных и унарных операций, так как по крайней мере одна операция будет произведена над каждым из данных. Поэтому можно считать, что указанный выше алгоритм является оптимальным по порядку и по числу бинарных и унарных операций.

В случае  $\bar{m} = 0$  может быть построена [112] аналогичная теория для регуляризованной системы

$$(\bar{A} + \alpha I) \bar{\alpha} = \bar{y}, \quad \alpha > 0. \quad (5.157)$$

Для случая, когда матрица  $\bar{A}$  является теплицевой (так, например, при решении по м. н. к. уравнений Винера — Хопфа с разностным ядром), аналогичная теория приводит [112] к числу арифметических операций

$$N \asymp n \ln n. \quad (5.158)$$

Существенный интерес для приложений имеет невыясненный вопрос о наилучшей константе в оценке типа (155).

## § 5. О распараллеливании алгоритмов

**5.1. Постановка и общие результаты.** Как известно, целью распараллеливания алгоритмов является уменьшение времени, необходимого для решения задач с заданной точностью на многопроцессорных ЭВМ. Предположим, что в реализации алгоритмов на ЭВМ может одновременно участвовать  $k \geq 1$  арифметических процессоров (АП), каждый из которых на очередном шаге (такте) может выполнять арифметические и логические операции над заданными или вычисленными на предыдущих шагах величинами, операции обмена информации с другими АП или внешней памятью (ВП), простаивать в очереди для обмена или в ожидании задания. АП имеет оперативную память (ПАП). Внешней памятью для АП служит память периферийной ЭВМ (ПП), которая в свою очередь имеет в качестве ВП магнитные диски (МД). Обмен между ПП и МД может вестись одновременно не более чем по  $x$  каналам связи со скоростью  $U_x$  (слов/с) по каждому, а между ПП и ПАП — по  $y$  каналам со скоростью  $U_y$  (слов/с). Со скоростью  $U_y$  осуществляется также обмен между АП. Во всех случаях (кроме управляющих команд) обмен ведется страницами объемом  $q_0$  (слов). АП может вести либо обмен, либо вычисления. Возможны лишь бинарные обмены (по принципу телефонной сети).

Далее будут применены следующие характеристики алгоритмов распараллеливания.  $S(k) \equiv S(A, k, f, \varepsilon)$  — число шагов (условных операций), которое требуется для вычисления по алгоритму  $A$  значения (вектора) функции  $f$  с точностью  $\varepsilon$ , если используется одновременно не более  $k$  процессоров. Другими словами, если  $\tau_k$  — время вычисления функции  $f$  с точностью  $\varepsilon$  по алгоритму  $A$  и  $\Delta\tau$  — время вычисления условной операции, то

$$S(A, k, f, \varepsilon) = \frac{\tau_k}{\Delta\tau}. \quad (5.159)$$

$N(f, \varepsilon)$  — число арифметических и логических операций, необходимое для вычисления функции  $f$  с точностью  $\varepsilon$ . Кроме этого,

$$\begin{aligned} X(A, k, f, \varepsilon) &= \frac{N(f, \varepsilon)}{S(A, k, f, \varepsilon)}, \\ Q(k) &= \frac{S(A_1, 1, f, \varepsilon)}{S(A, k, f, \varepsilon)}, \\ Q_0(k) &= \frac{Q(k)}{k}. \end{aligned} \quad (5.160)$$

Ясно, что характеристики  $X$ ,  $Q$ ,  $Q_0$  являются показателями качества распараллеливания алгоритмов.  $Q_0$  называется *коэффициентом эффективности* распараллеливания.

Заметим, что

$$S(A, k, f, \varepsilon) \approx S_0(1 + q) + S_0, \quad (5.161)$$

где  $S_0$  — число необходимых шагов в предположении, что все АП

имеют общую оперативную память произвольно большого объема и результаты вычислений могут использоваться одновременно любыми АП на последующих шагах [292], коэффициент  $q$  учитывает операции, сопутствующие арифметическим (организация циклов, передача управления и т. п.), и структуру алгоритма  $A$ , затраты  $S_0$  (в условных операциях) на обмен информацией между АП, а также между АП и ВП. Время вычисления при указанных идеальных условиях обозначим через  $\tau_{k,c}$ .

Имеются многочисленные результаты [292, 307] по распараллеливанию алгоритмов, однако они получены при идеальных предположениях и нуждаются в корректировке.

Один из общих результатов [307] состоит в том, что

$$\tau_{k,c} < \tau_{\infty,c} + \frac{N\Delta\tau - \tau_{\infty,c}}{k} = \frac{N\Delta\tau}{k} + \tau_{\infty,c} \left(1 - \frac{1}{k}\right), \quad (5.162)$$

где  $\tau_{\infty,c}$  — время вычисления при  $k = \infty$ ,  $\Delta\tau$  — время вычисления одной (усредненной) арифметической и логической операций. Трудности, связанные с реальными условиями, поясним на примере.

Пусть надо определить сумму  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$  на  $k$  процессорах.

Разбив  $S_n$  на  $k$  частей, каждая по  $n/k$  слагаемых ( $n$  кратно  $k$ ), получим время реализации  $\tau_i \leq \tau_1/k + k\tau$ , где  $\tau_i$  — время реализации на  $i$  процессорах,  $\tau$  — время обмена между процессорами в расчете на одно слово (например, из 64-х разрядов):  $\tau = 1/(U_y y)$ . Таким образом, число арифметических операций как бы уменьшается в  $k$  раз, но добавляется  $k$  операций обмена. Пусть  $\Delta\tau$  — среднее время одной арифметической операции. Тогда

$$\tau_k \approx \frac{n\Delta\tau}{k} + k\tau = \frac{n}{k} \left(\Delta\tau + \frac{k^2}{n} \tau\right), \quad \frac{\tau_k}{\tau_1} \approx \frac{1}{k} \left(1 + \frac{k^2}{n} \frac{\tau}{\Delta\tau}\right), \quad (5.163)$$

где  $\tau/\Delta\tau$  — коэффициент замедления (или ускорения) операции обмена по сравнению с арифметической операцией. Если, например,  $\tau/\Delta\tau = 2$ ,  $k^2 = n$ , то  $\tau_k/\tau_1 \approx 2/k$  и коэффициент эффективности  $Q_0(k) \approx 0,5$ . Пусть еще учитывается  $q_0$  — минимальная порция для обмена между процессорами. Тогда число слагаемых в каждом процессоре должно быть уменьшено от  $n/k$  до  $q_0$ , после чего в одном процессоре можно собрать  $kq_0$  слагаемых и сложить их. В результате получим

$$\tau_k \approx \left(\frac{n}{k} - q_0\right) \Delta\tau + kq_0\Delta\tau + kq_0\tau, \quad (5.164)$$

$$\frac{\tau_k}{\tau_1} \approx \frac{1}{k} + \frac{k}{n} q_0 (1 + p).$$

Вопросы распараллеливания с учетом скорости и порций обмена между накопителями и процессорами, а также между процессорами рассмотрим на примере той же задачи получения суммы  $S_n$  при большом  $n$ , так что  $a_i$  хранится на МД. Пусть  $\mu$  — память АП. Тогда

$$\begin{aligned}\tau_k &\approx \frac{n}{\mu k} [(\mu - q_0) \Delta\tau + kq_0\Delta\tau + kq_0\tau] + \tau^*n, \\ \tau_1 &\approx n\Delta\tau + \tau^*n,\end{aligned}\tag{5.165}$$

$$\frac{\tau_k}{\tau_1} \approx \frac{1}{k} \frac{(\mu + kq_0) \Delta\tau + kq_0\tau}{\mu (\Delta\tau + \tau^*)} + \frac{\tau^*}{\Delta\tau + \tau^*},$$

где  $\tau^*$  — время обмена между дисками и процессором в расчете на одно слово:

$$\tau^* = \frac{1}{U_x x} + \frac{1}{U_y y} > \tau = \frac{1}{U_y y}.\tag{5.166}$$

Если, в частности,  $\mu \gg kq_m$ ,  $\tau^* \approx \Delta\tau$ , то

$$\frac{\tau_k}{\tau_1} \approx \frac{1}{2k} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}, \quad Q_0(k) \leq \frac{2}{k}.\tag{5.167}$$

Организация вычислений с целью минимизации влияния времени обмена должна быть такой, чтобы время обмена было существенно меньше времени счета с введенной информацией. Пусть объем всех данных есть  $V$ . Тогда на каждую порцию введенной информации  $\mu$  должно быть не менее чем  $\varphi(\mu)$  операций на каждом процессоре:

$$\frac{\varphi(\mu)}{\mu} \gg k.\tag{5.168}$$

В результате время счета будет равно

$$\tau_k = \varphi(\mu) \Delta\tau \frac{V}{\mu k} + V\tau^*.$$

Чистое время без обменов будет равно

$$\tau_{k,c} = \varphi(\mu) \Delta\tau \frac{V}{\mu k}.$$

Поэтому

$$\frac{\tau_k}{\tau_{k,c}} = 1 + \frac{k\tau^*}{\Delta\tau} \frac{\mu}{\varphi(\mu)} \approx 1.\tag{5.169}$$

С целью полной загрузки АП не обязательно добиваться распараллеливания каждой отдельной задачи при решении большого комплекса задач. Нередко может быть ситуация, когда каждый процессор решает свои задачи. Важно лишь загрузить ими все процессоры так, чтобы не было простоев и чтобы вся проблема решалась за минимальное время. В то же время необходимость распараллеливания очевидна в случае трудных задач, требующих огромного коли-

чества вычислений. Следует еще заметить, что дополнительные запросы на распараллеливание могут возникнуть из-за необходимости решения отдельных подзадач в реальном масштабе времени.

**5.2. О распараллеливании алгоритмов решения систем уравнений.** Рассмотрим задачу численного решения системы  $n$  уравнений (86) при большом  $n$ . Примем вычислительную схему (87), (88). При этом предположим, что в ПАП хранятся программы вычисления значений функций на предыстории  $\Phi_i(U)$  ( $U \in [a_0, t_0]$ ,  $i = \overline{1, r}$ ), а также  $2\mu_0$  программ вычисления функций

$$A_{ij}(\tau, t), \quad y_{ij}(\tau), \quad i, j = \overline{1, r}, \quad (5.170)$$

$$B_{ij}(\tau, t), \quad Z_{ij}(\tau), \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, p}, \quad n = p + r + 1,$$

и  $\mu_0$  таблиц функций  $m_j$  ( $j = \overline{1, r}$ ). Остальные программы и данные хранятся в ВП. Тогда, если  $1 \leq k \leq n$ , то (см. п. 2.2)

$$S(k) = k^{-1} N r n \omega S_\alpha (1 + q) + \Delta_1 + \Delta_2' + \Delta_3,$$

$$\Delta_1 = N \left[ \frac{\mu_0 (\omega + 2n_\alpha)}{q_0} \right] \left( \left[ \frac{k}{y} \right] - 1 + \left[ \frac{r}{\mu_0} \right] \left[ \frac{n}{k} \right] \right) \frac{U}{U_y} q_0, \quad U = \frac{1}{\Delta \tau},$$

$$\Delta_2' = \begin{cases} \Delta_2, & \Delta_2 > 0, \quad k > 1, \\ 0, & \Delta_2 < 0, \end{cases}$$

$$\Delta_2 = N \left[ \frac{n}{k} \right] \left[ \frac{r}{\mu_0} \right] \left( \left[ \frac{k}{y} \right] - 1 \right) \left[ \frac{\mu_0 (\omega + 2n_\alpha)}{q} \right] q_0 \frac{U}{U_y} - \mu \omega S_\alpha, \quad (5.171)$$

$$\Delta_3 = q_0 N \left[ \frac{n}{q_0} \right] (1 + 2 \lceil \log k \rceil) \frac{U}{U_y},$$

где  $\Delta_1$  — затраты на ввод данных из внешней памяти,  $\Delta_2$  — величина простоев, которые могут возникнуть при  $k > y$ ,  $\Delta_3$  — затраты на обмен между АП и запись результатов решения в узле  $\tau_v \in \Delta$  в ВП.

Остановимся подробнее на природе величины  $\Delta_2$ . Ввод очередной порции данных в ПАП из ПП требует

$$\mu_1 = \left[ \frac{\mu_0 (\omega + 2n_\alpha)}{q_0} \right] \frac{U}{U_y} q_0$$

операций. После этого АП может выполнить до следующей порции  $\mu_2 = \mu_0 \omega S_\alpha$  операций. Каналы ввода освободятся только после  $\mu_1 \left( \left[ \frac{k}{y} \right] - 1 \right)$  операций. Таким образом, АП не будет простаивать при условии

$$\mu_2 \geq \mu_1 \left( \left[ \frac{k}{y} \right] - 1 \right)$$

или

$$\left[ \frac{k}{y} \right] \leq \lceil 1 + \lambda_1^{-1} \rceil, \quad \lambda_1 = \frac{U}{U_y S_\alpha} \left( 1 + \frac{2n_\alpha}{\omega} \right). \quad (5.172)$$

Следовательно, при заданных  $y, U, U_g$  и  $y < k$  число АП, которые могут быть эффективно использованы для повышения быстродействия алгоритма, определяется в основном величиной  $S_\alpha$ . Например, если  $S_\alpha = 20, U/U_y = 4, 2n_\alpha = \omega$ , то простоев не будет при  $k \leq 3y$ .

Пусть  $\Delta_2 > 0$ ; тогда при  $k > 1$

$$Q(k) = k \frac{1 + q + \lambda_1 + \lambda_2/(r\omega)}{q + \lambda_1 \lfloor k/y \rfloor (\mu_0 k/(nr) + 1) + k\lambda (1 + 2 \lfloor \log k \rfloor)/(r\omega)},$$

$$\lambda_2 = \frac{U}{S_\alpha} U_y. \quad (5.173)$$

Если положить  $S_\alpha = 20, U/U_y = 4, 2n_\alpha = \omega = 10^2, r = 80, \mu_0 = 40, n = 100, y = 8$ , то  $Q(80) \approx 26$ , а  $Q(40) \approx 28$ .

При  $\Delta_2 = 0$

$$Q(k) = k(1 + \delta)^{-1}, \quad (5.174)$$

$$\delta = \frac{k}{r} \left(1 + \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{r\omega}\right)^{-1} \left[ \frac{\mu k \lambda_1}{yn} + \frac{1}{\omega} \left(2 \lfloor \log k \rfloor + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \lambda_2\right) \right].$$

Так как возможны случаи, когда увеличение числа АП не дает желаемого роста быстродействия алгоритма из-за малого числа каналов связи ПАП с ВП, то интересна следующая ситуация. Пусть  $k = n = r + p + 1$  и в память каждого из АП помещается  $2r$  программ вычисления функций (170) и две таблицы  $\{m_j(t_i)\}$  или  $\{c_j(t_i)\}$ . Каждый АП в этом случае при построении решения задачи в очередном узле сетки  $\Delta$  вычисляет величину  $\bar{X}_{iv}$  ( $\bar{X}_{iv} = X_{iv}, i = \overline{1, r}; \bar{X}_{iv} = \bar{v}_{iv}, i = \overline{r+1, n}$ ) и одну из сумм в выражениях  $m_{i,v+1}, c_{m,v+1}$  в (88). Для вычисления этих величин требуется

$$C_n = \frac{r(r-1)}{\lfloor r/2 \rfloor} + \begin{cases} p' \left\lfloor \frac{r}{p'} \right\rfloor, & p' \leq r, \\ r \left\lfloor \frac{p'}{r} \right\rfloor, & p' \geq r, \end{cases} \quad p' = \begin{cases} p, & r = 2r_0, r_0 > 0, \\ p-1, & r = 2r_0 + 1, \end{cases} \quad (5.175)$$

сеансов обмена между АП таблицами  $\{m_j(t_i)\}$ . Обмен информацией между АП и ВП в процессоре этих вычислений не требуется. При этом

$$S(n) \approx Nr\omega S_\alpha (1 + q) + NC_n \frac{U}{U_y} \left\lfloor \frac{\omega}{q_0} \right\rfloor q_0 + 2N \lfloor \log k \rfloor q_0 \frac{U}{U_y},$$

$$Q(n) \approx n(1 + q + \lambda_2) \left(1 + q + \frac{n+r}{r} \lambda_2\right)^{-1}, \quad r\omega \gg q_0. \quad (5.176)$$

**5.3. О распараллеливании алгоритмов идентификации и оптимизации.** В сложных случаях задачи идентификации (п. 1.2) и оптимизации сводятся к задачам поиска наименьшего или наибольшего

значения заданного функционала (в общем случае многоэкстремального) с соблюдением многих ограничений в виде систем уравнений и неравенств. Комбинированный метод (п. 3.1) решения этих задач оказывается удобным для распараллеливания, ибо по нему дело сводится к независимым алгоритмам поиска для каждой из случайно заданных начальных точек. Если в каждом из АП помещается задача однократного поиска, то в  $k$  АП можно одновременно начать решение  $k$  таких задач. После завершения поиска в каждом из АП в нем может быть продолжен поиск, начиная со следующей начальной точки, и т. д. до тех пор, пока путем сравнения полученных локальных решений (на одном из АП) не будет надежно определено искомое глобальное решение. Если задача однократного поиска помещается лишь в  $k_0$  АП, то можно одновременно решать  $[k/k_0]$  таких задач. При этом для каждой из задач на каждом шаге алгоритма в процессе решения систем уравнений модели можно применить схемы распараллеливания, указанные в п. 5.2 (с заменой  $k$  на  $k_0$ ).

Градиентные методы (п. 3.2) в случае решения многоэкстремальных задач допускают тот же характер распараллеливания, что и выше, если начальную точку  $y^0$  брать многократно. Вопросы распараллеливания этих методов при однократном поиске также сводятся по существу к распараллеливанию алгоритмов решения систем уравнений.

## Глава 6. ОБЩАЯ СХЕМА И СРЕДСТВА МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

---

В настоящей главе рассматриваются некоторые вопросы создания методологических и программно-технических средств математического моделирования. Изложены некоторые подходы к разработке соответствующих средств моделирования и тенденции их развития, упомянуты известные разработки, соответствующие этим тенденциям.

### § 1. О некоторых тенденциях развития средств математического моделирования

К основным видам средств моделирования в настоящее время принято относить методологические, программно-алгоритмические, информационные, технические, организационные и правовые. Образованная из этих средств взаимоувязанная технология и является эффективным моделирующим комплексом (МК), направленным на решение определенного класса задач [153, 195, 231, 265, 286, 287]. Проектирование МК осуществляется с позиций системного анализа, основными этапами которого являются:

- 1) постановка задач, оценка теоретических затрат моделирования;
- 2) разработка методик и технологических схем экспериментальных исследований, подлежащих автоматизации;
- 3) разработка и привязка к объекту информационного, алгоритмического, программно-технического и других обеспечений;
- 4) проведение экспериментов;
- 5) обработка результатов экспериментов, оценка адекватности моделей, оценка достоверности выдвинутых гипотез и эффективности управляющих воздействий;

6) сопоставление теоретической и фактической цен (затрат) моделирования, определение направлений совершенствования МК.

Некоторым видам средств моделирования посвящен ряд работ [10, 20, 52, 72, 132, 172, 246, 251, 280, 286, 301], в которых были даны определения, область применения, состав, параметры, технология проектирования и тенденции их дальнейшего развития.

Основная тенденция развития МК связана с сокращением сроков проектирования и испытания различных типов объектов, с прогнозированием поведения сложных объектов, с заменой дорогостоящих

натурных испытаний на адекватные им исследования математических моделей. При этом идет непрерывное совершенствование рабочих мест в МК, не только оператор системы имеет возможность разнообразного вмешательства в различные звенья технологического процесса, но и система способна управлять состояниями оператора и в необходимых случаях брать управление «на себя».

К сожалению, в минувшем десятилетии развитие средств вычислительной техники, программных средств, методологического, организационного и правового обеспечений шло недостаточно согласованно и было далеко от своего совершенства. К основным недостаткам проектирования и практического использования этих средств следует отнести высокую стоимость, низкое качество, сложность применения, сложность привязки к объекту управления, отсутствие документации, невысокую надежность эксплуатации, невысокий уровень подготовки кадров.

Остановимся на рассмотрении особенностей некоторых этапов разработки МК.

## § 2. Методологическое обеспечение

Под *методологическим обеспечением МК* понимается прежде всего совокупность мероприятий, направленных на повышение эффективности взаимодействия отдельных средств моделирования, объединенных в единую технологическую цепочку. Естественным образом к методологическому обеспечению относятся те средства, с помощью которых определяются затраты из-за несогласованности выполнения различных операций в последовательности: постановка задач, определение измеримых параметров объекта, определение методов, алгоритмов, программно-технических средств решения задач, оценка возможностей достижения цели за требуемый период, определение цены моделирования при фиксированном объеме предварительной алгоритмизации и др. Совокупность основных этапов представлена на рис. 6.1. При этом предполагается автоматическое или автоматизированное взаимодействие МК с объектом. Узловыми этапами являются оценка принципиальной возможности достижения целей и оценка адекватности моделей. В результате многократного прохождения через первый этап достигается корректная постановка задачи и правильный выбор целей, а через второй — обеспечивается в конечном счете подтверждение выдвинутых гипотез и расширяется плацдарм для новой теории. Основные особенности некоторых из этапов рассмотрены в п. 2.2 настоящей главы.

**2.1. Об особенностях организации работ специалистов различных профилей.** Многообразие режимов функционирования развивающихся систем, наличие множества принципов их структурно-функциональной организации приводят к соответствующему числу постановок задач решения уравнений и задач оптимизации. При решении задачи разработки эффективной технологической цепочки МК оцениваются потенциальные пределы возможностей методов при

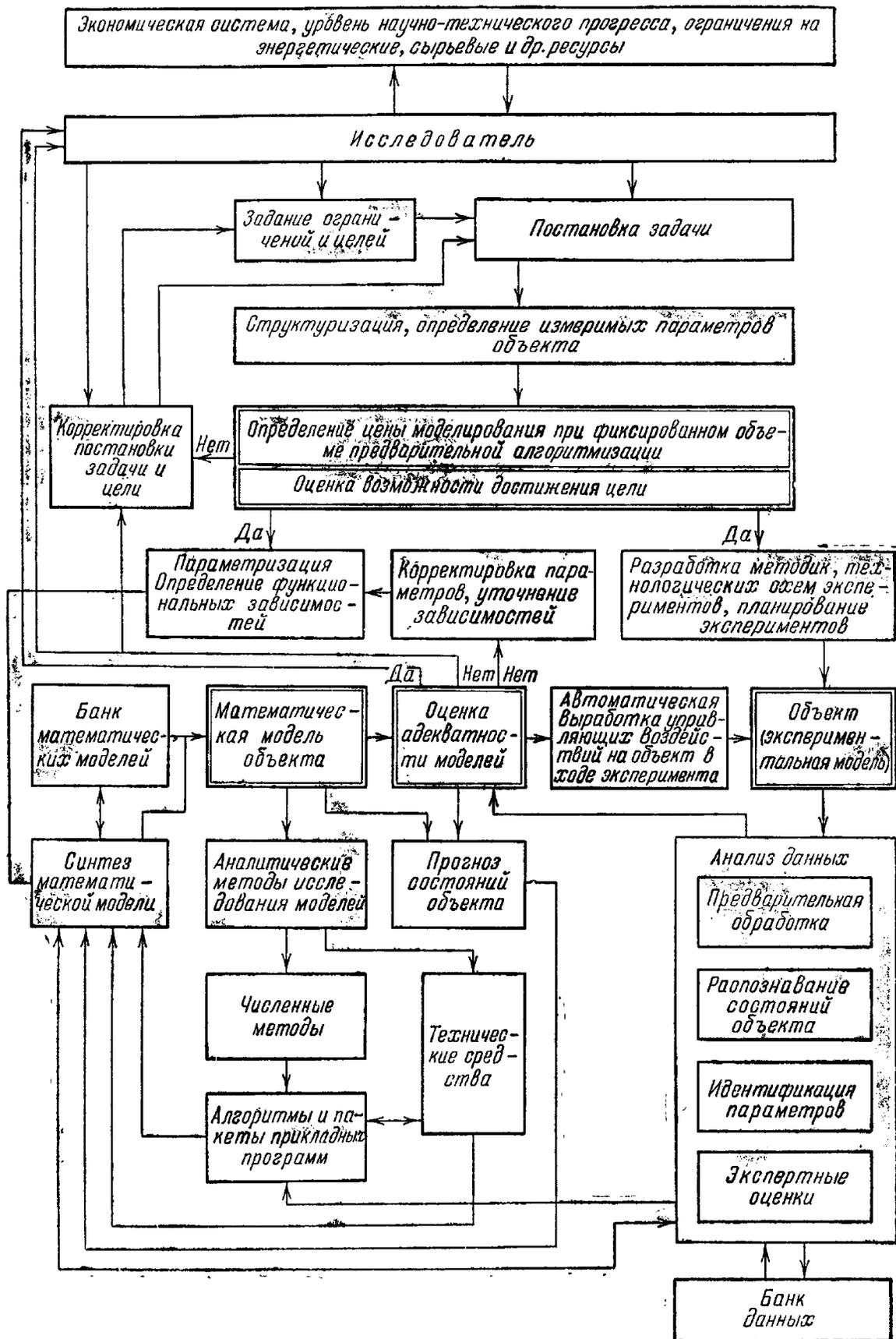


Рис. 6.1.

данной информации о задаче и данных о программно-технических, информационных и других средствах, а также о социально-экономических и других ограничениях. Здесь еще раз следует подчеркнуть, что при недостаточной разрешающей способности оптимального метода никакими другими методами эту способность повысить нельзя. Выход опять же может быть найден за счет погружения рассматриваемой задачи в более узкий класс, за счет совершенствования соответствующих средств моделирования, а также за счет изменения соответствующих ограничений.

Если четко сформулирована задача, то ясен результат. Поэтому для данного этапа чрезвычайно важна совместная работа математиков и экономистов, биологов, социологов и других специалистов по развивающимся системам над формулировкой задачи. В результате этой работы вырабатываются совместные конкретные постановки задач, формулируются гипотезы, определяются допустимые управляющие воздействия на объект, достигается договоренность о конкретном смысле продуктов типа  $m_i$ ,  $c_j$ , оцениваются диапазоны их изменений и т. п. При этом может оказаться, что для измеряемых параметров не существует датчиков информации; тогда необходимо сформулировать вместе с системотехниками техническое задание на разработку таких датчиков. Кроме того, проверяется существование эффективных методов и программных средств решения поставленных задач и при их отсутствии вырабатывается соответствующий план мероприятий по их созданию.

Результатом настоящего этапа является четкая формулировка решаемых задач и проверяемых гипотез, определяются допустимые управляющие воздействия на объект, разрабатываются технические задания на программно-технические и другие средства.

Этап разработки методик и технологических схем экспериментов наиболее трудоемкий. На нем определяется возможность дальнейшего эффективного сотрудничества математиков, системотехников, биологов, экономистов и других специалистов. Здесь согласовываются исходные данные для выполнения работы, разрабатываются классификаторы методик, задач, состояний объекта управлений, например классификаторы диагностируемых заболеваний и прогнозируемых осложнений организма; перечни признаков (симптомы, синдромы) с выделением ведущих и второстепенных; перечни измеряемых функциональных параметров, диапазонов их изменений для разных режимов функционирования объектов; таблицы диапазонов изменения усредненных значений параметров (признаков, симптомов) с указанием их логических связей и т. п.

На этапе проведения экспериментальных работ от экспериментаторов, например биологов и системотехников, требуется совместное проведение экспериментов: постановка эксперимента; сбор и регистрация данных; предварительная обработка и сжатие данных; заполнение баз данных на моделирующем комплексе. Кроме того, системотехники, математики и биологи должны провести дальнейшую обработку и выполнить анализ результатов экспериментов:

решить задачи идентификации [43, 117], распознавания образов [138, 173, 264, 278], имитационного моделирования [72, 164, 177, 195, 272, 309]; определить эффективный класс математических моделей и уточнить их конкретные параметры [165]; определить адекватность замены численными экспериментами тех натуральных экспериментов, которые приводят к наиболее значительным затратам материальных ресурсов или к катастрофическим последствиям [75]; определить информативные показатели состояний систем; оценить различные адаптационные механизмы; определить «диапазоны» живучести исследуемых систем и т. п.

Схема проведения экспериментальных работ с позиций математики и системотехники была рассмотрена в гл. 2.

**2.2. Об основных этапах системного анализа.** Под *системным анализом* принято понимать современную методологию применения информационного, программно-технического и организационного обеспечения для изучения и оптимизации сложных динамических объектов, называемых *обобщенными динамическими системами* (ОДС) [64].

В настоящее время известен опыт применения системного анализа в задачах оценки режимов функционирования развивающихся систем, например, оценки ресурсов развивающейся экономики [210], оценки интегративной деятельности нейрона [7], вегетативных функций [273], в проблеме рака [70] и др.

Исследование ОДС в системном анализе осуществляется (как показано в работе [64]) в несколько основных этапов.

**2.2.1. Постановка задачи.** Этот этап состоит из определения объекта исследования, постановки цели, а также задания критериев для изучения этого объекта и управления им.

Этот этап плохо формализуется, так что успех здесь определяется прежде всего искусством и опытом системного аналитика, глубиной его понимания поставленной проблемы, так как именно он сможет четко поставить задачу. Нетрудно понять огромную важность данного этапа: ведь неправильная или неполная постановка целей может свести на нет результаты всего последующего анализа.

В истории системного анализа было немало случаев неправильной постановки целей. Критическому анализу возможностей системного подхода и корректности его применения на различных этапах исследований в биологии посвящен ряд работ, например [168], в экономике — работы [17, 64].

Приходится встречаться с ошибкой, заключающейся в неполной постановке целей. Примером может служить ошибка, состоящая в том, что при рассмотрении целей общественного развития, при проектировании крупных многоцелевых производственных комплексов ограничиваются лишь материальными факторами, забывая о целях всестороннего развития личности, ее «рекреационных» возможностях. Это приводит к тому, что на вновь созданных производственных объединениях иногда простаивают отдельные рабочие места.

В биологических и медицинских исследованиях также следует избегать ошибок из-за неполной постановки целей; например, при

создании эффективных воздействий на опухоль следует учитывать, с позиций системного анализа, что сложность таких воздействий должна быть соизмерима со сложностью опухолевых процессов [70]. Появившаяся недавно биотехнология гибридов подтверждает это положение.

При изучении интегративной деятельности нейрона, как показано в [7, с. 83], «электрическая и только мембранная трактовка возбуждений нейрона не только не помогает решению вопросов именно системного характера, но скорее наоборот, она становится совершенно реальным тормозом на этом пути исследований».

При определении объекта исследования следует использовать не только всю сумму объективных фактов о структурно-функциональной организации системы, но и гипотезы, цели и критерии, которые являются субъективными факторами. Так, например, при изучении иммунологического ответа в качестве объекта исследования следует выбрать иммунные системы и воздействия на них со стороны других систем регулирования организма, а также со стороны всех возможных факторов окружающей среды.

Некоторые цели в исследованиях иммунных систем состоят в определении интегральных механизмов регуляции размножения и дифференцировки клеток иммунной системы и определении эффективных путей применения иммунорегуляторов при различных иммунодефицитных состояниях; создании теоретических и численных методов для моделирования и определении моделей оптимального управления механизмами регуляции распределения клеток иммунокомпетентной ткани в органах иммунной системы [120]. Известны работы, в которых проводилась оценка некоторых гипотез при экспериментально-клиническом или математическом моделировании иммунных систем [55, 75—78, 95, 124, 125, 156, 171, 175, 177, 178, 185, 189, 200, 201, 211, 228, 247, 262, 295, 308, 310, 314, 316], рассмотренных в гл. 1.

**2.2.2. Структуризация.** На втором этапе проводится очерчивание границ изучаемой системы и ее (первичная) структуризация. Этот этап, как и первый, в значительной мере основан на искусстве и опыте проводящих его специалистов. Смысл состоит прежде всего в том, что вся совокупность объектов и процессов, имеющих отношение к поставленной цели, разбивается на два класса — собственно изучаемая система и внешняя среда. Такое разделение происходит в результате последовательного перебора и включения в систему объектов и процессов, оказывающих заметное влияние на процесс достижения поставленных целей. Окончание перебора может произойти прежде всего потому, что будут исчерпаны все существенные факторы. Система в этом случае может рассматриваться как замкнутая (т. е. с известной степенью приближения) и независимая (от внешней среды).

Другая возможность разграничения системы от внешней среды основывается на том, что в ряде случаев можно при изучении системы ограничиться лишь влиянием среды на систему и пренебречь с точки зрения поставленных целей) влиянием системы на среду.

Если быть более точным, то это последнее влияние должно быть столь малым, чтобы оно не могло существенно изменить влияние среды на систему. При этом получаем открытую систему, поведение которой зависит от входных, поступающих из внешней среды параметров.

В такой постановке изучаются различные обособленные звенья метаболизма организма, например цикл гликолиза [100, 110], цикл лимонной кислоты [276], окислительное фосфорилирование, или различные комбинации отдельных звеньев в интегративном метаболизме [144, 281, 290, 315].

Завершение процесса первичной структуризации состоит в том, что выделяются отдельные составные части — элементы изучаемой системы, а возможные внешние воздействия представляются в виде совокупности элементарных воздействий.

2.2.3. Р а з р а б о т к а м а т е м а т и ч е с к о й м о д е л и. Третий этап — составление математической модели изучаемой системы. Первым шагом в этом направлении является *параметризация*, т. е. описание выделенных элементов системы и элементарных воздействий на нее с помощью тех или иных параметров. Это наиболее сложный и трудоемкий шаг, для которого характерны такие процедуры, как формализация, метризация, стандартизация и классификация параметров и процессов.

Второй важнейший шаг заключается в установлении различного рода зависимостей между введенными параметрами. Характер этих зависимостей может быть любым: для количественных (числовых) параметров зависимости, как правило, задаются в виде уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегро-дифференциальных, интегральных, разностных, детерминированно-стохастических и др.); для качественных параметров могут использоваться табличные способы задания зависимостей, основанные на перечислении всех возможных комбинаций значений параметров.

Современный системный анализ, как правило, имеет дело с системами, характеризующимися большим числом (от нескольких сотен до многих десятков тысяч) параметров различной природы. Зависимости между ними обычно разнообразны и сложны. Описание всех этих зависимостей (т. е. математическая модель системы) также весьма сложно и громоздко. Поэтому при построении математической модели стремятся по возможности сократить это описание. Одним из наиболее употребительных приемов является разбиение изучаемой системы на подсистемы, выделение т и п о в ы х подсистем (имеющих одинаковые описания), установление иерархии подсистем и стандартизация связей подсистем на одних уровнях иерархии с однотипными системами на других уровнях.

В экономике таким приемом пользуются на различных уровнях, группируя однотипные отрасли или однотипные предприятия внутри одной и той же отрасли. При этом удается сократить суммарное описание системы, поскольку в группе однотипных подсистем достаточно привести описание лишь одной из них. В результате использования подобных методов удается получить простое описа-

ние систем с огромным числом параметров. Один из наиболее разительных примеров такого рода дает статистическая теория газов, дающая простое и притом достаточно удовлетворительное описание поведения системы, состоящей из огромного числа молекул.

В биологии для многих целей принято использовать иерархию структурно-функциональной организации биосистем [31, 75]. Так, например, при исследовании иммунной системы *молекулярный уровень* содержит описание [124] «легких» и «тяжелых» полипептидных цепей молекул и иммуноглобулина, а также описание антигенов и механизмов взаимодействия антиген — антитело.

*Субклеточный уровень* содержит описание органелл клеток, обеспечивающих инициацию иммуноглобулинов и других полипептидов, регулирующих пролиферацию, синтезирующих энергию и др.

*Клеточный уровень* содержит описание клеток, являющихся носителями свойств иммунной системы как управляющей и наделенной целостными свойствами — макрофаги; Т-лимфоциты-хелперы (помощники, стимулирующие пролиферацию В-лимфоцитов); Т-лимфоциты-супрессоры (ингибирующие популяцию В-лимфоцитов); Т-лимфоциты-киллеры («убийцы», осуществляющие реакции клеточного иммунитета); В-лимфоциты; А-клетки; натуральные киллеры; антителообразующие клетки (АОК), клоны которых соответствуют числу различных по специфичности антител (иммуноглобулинов) порядка от  $10^4$  до  $10^{12}$  [124].

*Тканевый уровень* содержит описание взаимодействий иммунокомпетентной, кроветворной, костной и других тканей.

*Органный уровень* содержит описание физиологического состояния лимфатических узлов, селезенки, тимуса, костного мозга.

*Популяционный уровень* содержит параметры, характеризующие устойчивость, жизнестойкость иммунной системы к факторам эволюции у данной популяции.

Таким образом, каждый уровень содержит описания структурно-функциональных взаимодействий антиген — антитело. По-видимому, наиболее изученными свойствами иммунологических систем являются [91, 175, 211, 295, 308, 310]: 1) узнавание своих нормальных и перерожденных клеток и антигенов; 2) выработка антител; 3) наличие латентного периода; 4) чувствительность латентного периода; 5) наличие сенсibilизированных клеток; 6) различие интенсивностей первичного и вторичного иммунных ответов; 7) иммунологическая память; 8) наличие баланса скоростей в производстве своих антигенов организмом и в выработке антител для их уничтожения [70]; 9) наличие очень быстрых и очень медленных иммунных ответов [95]; 10) наличие антиидиотипических клеток [200, 262].

В свою очередь, каждый уровень может дополнительно содержать описание основных свойств живой материи. Так, например, при определении основных видов биологической активности при испытании химических соединений в качестве основных свойств живой материи предлагается учитывать [214, с. 332]: «1) гибель; 2) повреждение; 3) восстановление исходного состояния; 4) обратимые изменения устойчивости к повреждающему агенту (адаптация);

5) устойчивое изменение чувствительности к действующему агенту (с изменением дифференцировки в широком смысле слова, без изменения наследственных свойств); 6) изменение наследственных свойств; 7) рост; 8) деление или другие формы размножения; 9) изменение интенсивностей функций (из которых следует выделить полный перечень основных): (9-1) проницаемость, (9-2) активный транспорт, (9-3) выработка энергии, (9-4) синтез, (9-5) секреция синтезированных продуктов, (9-6) передача возбуждения, (9-7) движение, (9-8) разрушение веществ на поверхности и в среде, (9-9) свечение, (9-10) изменение адгезивных свойств; 10) изменение реактивности (это свойство можно детализировать указанием тех же специализированных функций, что и в п. 9)».

При моделировании (в зависимости от поставленных целей) существующая классификация биосистем иногда помогает выделению типовых подсистем, выделению в них временной и пространственной иерархии.

Таким приемом пользуются при моделировании поведения биосистем на различных уровнях организации, группируя быстро и медленно протекающие биохимические реакции [103, 110, 228], различные системы регулирования организма [3, 4, 202], группируя разнородные популяции [216, 226, 227] и т. п. При этом удается сократить суммарное описание системы, поскольку в группе однотипных подсистем достаточно провести описание одной из них. В результате использования подобных методов иногда удается получить простое описание сложных систем.

К сожалению, подобная ситуация в современном системном анализе наблюдается достаточно редко: хотя в результате указанных выше приемов описание (модель) системы и сокращается, обычно оно все-таки остается достаточно сложным и громоздким. Системы такого рода принято называть *большими* или *сложными*.

Выделение подсистем и установление их иерархии помимо упрощения описания преследуют и другую цель: в процессе исследования уточняются первоначальная структуризация (разбиение на элементы) и параметризация системы, а также корректируются цели и критерии.

Здесь следует подчеркнуть ценные свойства имитационного моделирования. Сложные модели биосистем могут в какой-то своей части содержать блоки-модели, поддающиеся аналитическому описанию (например, с помощью дифференциальных уравнений). Другие блоки-модели могут быть заданы соотношением некоторых числовых таблиц. Первые обычно хорошо описывают несложные и небольшие по числу параметров биопроцессы. С помощью только таких моделей в ближайшее время нельзя ожидать существенных успехов в исследованиях специфики живого. Другие, хотя и неточные, нередко улавливают решения, удовлетворяющие системным целям описания специфики живого. Имеются также и *дыры*, т. е. блоки-модели некоторых биопроцессов отсутствуют. Описание поведения биосистем, содержащих указанные выше блоки-модели, возможно лишь с использованием имитационного моделирования, ко-

торое, образно говоря, является универсальным «склеивающим» средством.

К сожалению, сейчас существует разрыв в описаниях первого рода моделей, удовлетворяющих своей строгостью математиков, и второго рода моделей, удовлетворяющих пользователей. Для моделей второго рода, базирующихся на аппарате дискретной математики, размытых (нечетких) множеств, невозможно (пока) получить такие же качественные исследования их поведения, как это возможно, например, в качественной теории дифференциальных уравнений. Отсюда следует вывод, что необходимо создать новый аппарат дискретной математики размытых множеств. Когда появятся алгебры функций размытых множеств, тогда принципиальной разницы в исследовании моделей первого и второго рода не будет. В настоящее время имитационная модель позволяет судить о свойствах моделируемых явлений лишь по отдельным реализациям ее зависимостей.

Анализ полученной математической модели приводит к уточнению первоначальной структуризации и параметризации системы, коррекции цели и критериев. При такой последовательной коррекции модели существует опасность распространения полученных решений и выводов за пределы границ применимости модели. «Исследователь постоянно находится между Сциллой усложненности и Харибдой недоверности. С одной стороны, построенная им модель должна быть достаточно простой в математическом отношении, чтобы ее можно было подробно исследовать имеющимися средствами. С другой стороны, в результате всех упрощений она не должна утратить и «рациональное зерно», существо проблемы» [231, с. 28].

Кроме того, следует помнить, что разрабатываемая математическая модель может быть использована:

— в фундаментальных исследованиях, например, на правах «соавтора» открытия [231], причем эта модель может иметь определенную кратность использования в различных отраслях знаний;

— в прикладных исследованиях для повышения эффективности соответствующих технологических процессов [117, 277].

Рассмотрим возможный подход к определению целесообразной сложности и достоверности математической модели, или, что то же самое, целесообразного объема и уровня алгоритмизации. По аналогии с [74, 75] определим *предварительную алгоритмизацию* развивающихся систем как алгоритмизацию с целью оценки социально-экономического эффекта от того или иного объема и уровня алгоритмизации на базе ЭВМ. Под *объемом* алгоритмизации будем понимать совокупность учитываемых параметров модели из общего состава в процессе, под *уровнем* алгоритмизации — совокупность применяемых алгоритмов (и технических средств).

Задача предварительной алгоритмизации состоит в оценке того варианта объема алгоритмизации и тех параметров алгоритмов (и технических средств), которые максимизируют общий социально-экономический выигрыш от изучения и оптимизации развивающейся системы. В понятие *общего выигрыша* входит сумма всех положительных эффектов и всех затрат от моделирования на ЭВМ. Может

случиться в частном случае, что дальнейшее усложнение модели (хотя и полезное с точки зрения большей глубины исследований) окажется нецелесообразным ввиду огромного роста затрат, перекрывающих получаемый положительный эффект от моделирования (рис. 6.2).

Таким образом, в результате третьего этапа возникает законченная математическая модель развивающейся системы, описанная на формальном (например, алгоритмическом) языке.

2.2.4. Разработка прогноза развития системы. Задачи следующих этапов заключаются в исследовании

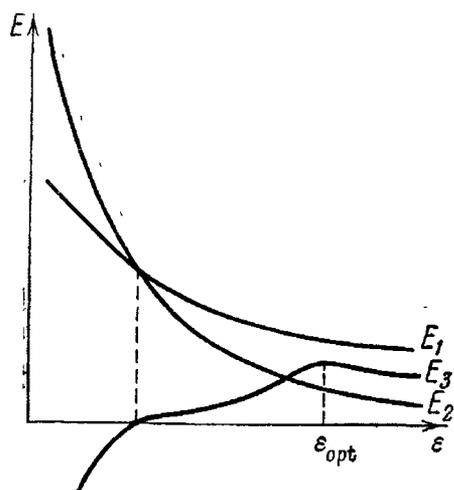


Рис. 6.2.

построенной модели. Первая задача — прогноз развития изучаемой системы. Для ее решения задаются различными предположениями о внешних воздействиях на систему в течение рассматриваемого периода и с помощью построенной математической модели определяют распределение вероятностей значений характеризующих систему параметров для любых фиксированных моментов времени. Термином «прогноз развития мы подчеркиваем то обстоятельство» что, в отличие от классических динамических систем, для обобщенных динамических систем нельзя определить единствен-

ную траекторию развития, а лишь множество таких траекторий. Каждая траектория этого множества может реализоваться в действительности лишь с той или иной степенью вероятности.

Второе отличие от классического случая заключается в том, что, как правило, для сложных систем не удастся найти аналитическое решение, позволяющее описать поведение системы в общем виде (для любого  $t$ ). Поэтому обычно пользуются прямым (имитационным) моделированием изучаемой системы на ЭВМ. Методика моделирования напоминает численный метод решения дифференциальных или (и) интегральных уравнений. Отправляясь от начальных значений параметров (которые предполагаются известными) и задаваясь определенным шагом  $\Delta t$  по времени, последовательно, шаг за шагом, по заданным зависимостям между параметрами определяют значения параметров (или распределения этих значений) для моментов времени  $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$  и т. д. (Часто оказывается полезным употреблять переменный шаг.)

Получив прогноз развития изучаемой системы, производят анализ соответствия его результатам заданным целям и критериям и в случае необходимости вырабатывают предложения по улучшению принятого ранее управления. Затем снова осуществляется прогноз уже при новом управлении, снова вырабатываются предложения по улучшению управления и т. д., пока не получится удовлетворительный результат.

По существу, здесь описан метод решения задачи синтеза управления методом *проб и ошибок*. Такой метод применим, разумеется, и к классическим динамическим системам. Однако, в отличие от классического случая, для обобщенных динамических систем этот метод является не только основным, но большей частью и единственным возможным, поскольку известные аналитические приемы (подобные принципу максимума Понтрягина) для таких систем, как правило, непригодны.

Разумеется, последняя задача решается лишь тогда, когда целью системного анализа является выработка оптимального или, точнее, приближенно-оптимального управления. В ряде случаев оказывается достаточным ограничиться лишь прогнозом развития системы. Возможно также привлечение и других методов анализа системы.

Приведем некоторые примеры применения указанной общей схемы системного анализа в моделировании биомедицинских процессов. В 1971—1975 гг. в Институте кибернетики АН УССР был разработан программно-технический комплекс, предназначенный для автоматизации построения и анализа моделей ОДС. Технической базой служит многомашинный комплекс, центральным ядром которого является ЭВМ БЭСМ-6, а в качестве «интеллектуальных» терминалов используются ЭВМ МИР-2, соединенные с БЭСМ-6 по коммутируемым телефонным каналам связи. Программное обеспечение указанного комплекса состоит из управляющего модуля, интерпретатора директив, интерпретатора экспертных оценок, трансляторов с внешних языков системы, специализированного фактографического банка экспертных оценок, модулей обслуживания информационных файлов модели обобщенных динамических систем, модулей обеспечения интерактивного режима работы оператора ЭВМ, программ обработки и анализа результатов моделирования динамики ОДС. Языковое обеспечение комплекса включает язык управляющих директив, язык для записи экспертных оценок, язык ввода управляющих воздействий, язык коррекции задания управляющих воздействий, язык редактирования экспертных оценок. Одни задачи прогноза развития ОДС комплекс позволяет решать при заданной предыстории развития системы и управляющих воздействий и задачу синтеза управления, переводящего систему из начального состояния в состояние, удовлетворяющее заданным критериям, другие задачи решаются путем интерактивного взаимодействия человека с ЭВМ. На базе данного программно-технического комплекса возможно прогнозирование поведения биосистем [82].

Другим примером может служить разрабатываемая в настоящее время автоматизированная система управления испытаниями биологической активности химических соединений [214]. Прямая экономическая эффективность от применения такой системы зависит от существенного уменьшения испытаний на животных.

**2.3. Методы оптимизации в исследованиях структурно-функциональной организации развивающихся систем.** Обширная дискуссия вокруг проблемы «хороший — плохой — оптимальный», носящая как методологический, так и специальный характер,

в настоящее время все еще далека от своего завершения. Хорошо, когда критерий один и о нем относительно легко писать доклады и его сравнительно легко изучать аналитически. Однако практические задачи обычно многокритериальны. В них могут быть существенны показатели живучести, устойчивости и др. Определенный итог дискуссии по этим вопросам подведен работами [75, 202, 225, 233], указавшими на полезность, необходимость и закономерность концепции оптимальности в изучении и описании свойств развивающейся системы, которая в случае биосистем может рассматриваться как адаптационная и гомеостатическая задача.

Рассмотрим более детально некоторые методы оптимизации.

2.3.1. **И с с л е д о в а н и е о п е р а ц и й.** Решение актуальных задач в области оптимизации структурно-функциональной организации динамических систем непосредственно связано с решением следующих актуальных задач теории исследования операций [183, с. 7]:

1. Развитие эффективных (по общим затратам времени) численных методов решения оптимальных задач с большим числом переменных, с негладкими функциями цели и ограничениями. Негладкий характер функций, невозможность вычисления их производных являются характерной чертой современных приложений исследования операций. Например, кусочно-линейными функциями аппроксимируются заданные таблично экономические показатели.

2. Разработка легко реализуемых на ЭВМ методов решения задач дискретного программирования со значительным числом переменных.

3. Создание численных методов оптимизации при наличии ситуаций с риском и неопределенностью, в частности, развитие прямых методов стохастического программирования.

4. Разработка процедур направленного имитационного моделирования. Процедуры направленного поиска оптимальных решений, которые разрабатываются в современной теории оптимальных решений, применяются в основном только в тех случаях, когда модель процесса задана аналитическими зависимостями. В имитационных моделях зависимости между факторами, влияющими на качество решения, скрыты от исследователя, и можно наблюдать только отдельные случайные проявления тех или иных решений.

Оценка каждого допустимого решения путем многократной имитации интересующего нас процесса может потребовать большого количества времени, и при значительном числе допускаемых вариантов поиск удовлетворительного (не говоря уже об оптимальном) решения без специальных процедур вряд ли возможен. Применение прямых методов стохастического программирования открывает большие перспективы.

5. Разработка диалогового режима решения оптимизационных задач.

В настоящее время имеются серьезные успехи в построении общей теории оптимизации методов и алгоритмов; в частности, в работе [85] разработана алгебра алгоритмов, позволяющая в автоматичес-

ческом режиме при помощи ЭВМ осуществлять различные преобразования алгоритмов с целью их оптимизации. Разработаны способы построения оптимальных методов (метод шапочек, мажорант и др.) и ряд конкретных оптимальных методов в области решения особых интегральных уравнений, в том числе важных для моделирования динамических систем уравнений Винера — Хопфа, аппроксимации и минимизации функций некоторых классов, решения некорректно поставленных задач и др. [252].

2.3.2. Методы согласования решений оптимизационных задач. Это направление работ возникло и развивается в связи с проблемой принятия управляющих решений в многоуровневых иерархических системах [54, 182, 278]. Каждая из подсистем в системе описывается собственной моделью функционирования и целевой функцией, на основании которой определяются управляющие решения в подсистеме. Наличие многих целевых функций подсистем, взаимодействующих между собой конкурентным образом, с возможным переключением лидерства одной из них, приводит к принятию управляющих решений по многим критериям. Определенный итог этим работам дан в [182, с. 435], где рассмотрены методы согласования решений оптимизационных задач в многоуровневых системах. При этом рассмотрена  $n$ -уровневая иерархическая система, «...каждая из подсистем которой решает задачу управления подчиненными ей подсистемами нижнего уровня путем изменения правых частей ограничений. Обозначим через  $I_i$  множество подсистем  $i$ -го уровня, а через  $I_i^j$  — множество подсистем  $i$ -го уровня, подчиненных  $j$ -й подсистеме  $(i+1)$ -го уровня. Пусть  $l$ -я подсистема  $i$ -го уровня осуществляет управление подчиненными ей подсистемами  $(i-1)$ -го уровня через управляющие воздействия  $u_{il} = \{u_{il}^r, r \in I_{i-1}^l\}$ , которые находятся при решении задачи оптимизации следующего вида:

$$\min_{u_{il}} f_{il}(u_{il}), \quad (6.1)$$

$$H_{il}(u_{il}) \geq 0, \quad (6.2)$$

$$g_{il}(u_{il}) \geq u_{i+1,j}^l, \quad (6.3)$$

где вектор-функция  $H_{il}$  характеризует собственные ограничения  $l$ -й подсистемы, вектор-функция  $g_{il}$  характеризует ограничения, связывающие ее с  $j$ -й подсистемой  $(i+1)$ -го уровня через вектор управляющих воздействий  $u_{i+1,j}^l$ . В свою очередь управляющие воздействия  $u_{i+1,j}^l = \{u_{i+1,j}^l, l \in I_i^j\}$  находятся при решении своей задачи оптимизации вида (1) — (3), сформулированной для  $j$ -й подсистемы  $(i+1)$ -го уровня.

При решении оптимизационных задач (1) — (3) в силу связанности областей допустимых решений каждой из подсистем через неравенства (3) необходимо рассматривать множество ограничений всей системы в целом. Это приводит к оптимизации функции вида (1)

по всему множеству управляющих воздействий  $u_{il}$  ( $l \in I_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ), что затрудняет непосредственное применение методов оптимизации при исследовании многоуровневых систем в силу большой размерности таких задач. Для того чтобы избежать решения указанной выше задачи, предложен подход, основанный на нахождении совместных областей допустимых вариаций изменения связывающих переменных  $[u_{i+1,j}^{l(*)}, u_{i+1,j}^{l(*)}]$  для каждой из подсистем в силу ограничений (1), (2), записанных для  $l$ -й подсистемы  $i$ -го уровня и  $j$ -й подсистемы  $(i+1)$ -го уровня. Если таких областей хотя бы для одной из подсистем не существует, то множество ограничений всей системы в целом несовместно. Задача оптимизации (1) на множество ограничений всей системы в целом эквивалентна задаче оптимизации (1) — (3) с дополнительными ограничениями на связывающие переменные  $u_{i+1,j}^l \in [u_{i+1,j}^{l(*)}, u_{i+1,j}^{l(*)}]$ .

В связи с тем, что если управляющие воздействия подсистемы верхнего уровня влияют на математическую модель задачи оптимизации подсистемы нижнего уровня, то это приводит к тому, что глобальный оптимум целевых функций подсистем не достигается, т. е. возникает задача координируемости. Выбор компромиссных управляющих воздействий осуществляется с использованием человеко-машинной процедуры решения многокритериальной задачи оптимизации с учетом математических моделей всех подсистем. Для найденного с помощью эвристической процедуры вектора предпочтений  $\rho = \{\rho_{il}, l \in I_i, i = \overline{1, n}\}$  эта задача формулируется в следующем виде:

$$\min_{u_{il}, l \in I_i, i = \overline{1, n}} \left\{ W = \max_{l \in I_i, i = \overline{1, n}} \left[ \rho_{il} \frac{f_{il}(u_{il}) - f_{il}^0}{f_{il(\max)} - f_{il}^0} \right] \right\} \quad (6.4)$$

с учетом ограничений вида (2), (3), записанных для всех подсистем. В (4)  $f_{il}^0$ ,  $f_{il(\max)}$  — это соответственно оптимальные и наихудшие значения целевых функций подсистем. На основании подхода, предложенного выше для решения однокритериальных задач, и метода ограничений задача (4) сводится в каждой из подсистем к проверке совместности системы неравенств (2), (3) с учетом дополнительных ограничений

$$u_{i+1,j}^l \in [u_{i+1,j}^{l(*)}, u_{i+1,j}^{l(*)}], \\ f_{il}(u_{il}) \leq f_{il}^0 + k_0 (f_{il(\max)} - f_{il}^0) / \rho_{il}$$

для каждого значения параметра  $k_0$  с последующим нахождением новых границ изменения связывающих переменных. При  $k_0 \rightarrow 0$  верхняя и нижняя границы изменения связывающих переменных стремятся к одному и тому же значению, что является условием окончания применения итерационной процедуры метода ограничений».

Этот подход применяется в задачах технико-экономического планирования трехуровневой иерархической системы управления машиностроительной отрасли [182], при оценке состояний и выработке

управляющих решений в медико-биологических исследованиях [314] и др.

2.3.3. Системная оптимизация. Современные теория и практика оптимизации строятся на основе классической постановки оптимизационных задач. Как известно, суть этой постановки состоит в нахождении в наперед заданной неизменной допустимой области  $P$  точки (или множества точек)  $p$ , в которой заданная скалярная целевая функция  $f(p)$  принимает экстремальное значение [69].

Для большого числа планово-экономических и проектно-конструкторских задач такая постановка является неудовлетворительной по крайней мере в двух отношениях. Во-первых, целевая функция  $f(x)$  в таких задачах является не скалярной, а векторной. При этом она оказывается практически не сводимой к скалярной функции путем той или иной априорной процедуры (взвешивания различных компонент исходной векторной функции). Во-вторых, допустимая область  $P$  может меняться в процессе оптимизации. Более того, в ее целенаправленном изменении как раз и заключается основная содержательная сущность процесса оптимизации для рассматриваемого класса задач.

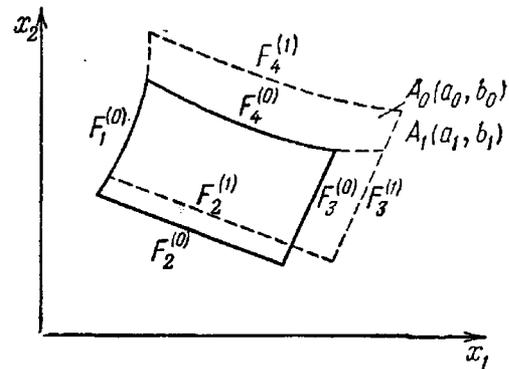


Рис. 6.3.

Поскольку законы возможных изменений допустимой области  $P$  задаются обычно системой моделей, то описываемый подход к оптимизационным задачам естественно называть *системным*. Заметим, что при системном подходе изменения ограничений, задающих допустимую область в пространстве тех или иных параметров, происходят, как правило, в результате последовательности решений, выбираемых из дискретного множества возможных решений. Причем само это множество в начале процесса оптимизации обычно бывает полностью не заданным и пополняется в процессе диалога с людьми (плановиками или конструкторами), владеющими не до конца формализованными приемами выработки новых решений.

Приведем одну из характерных формализованных постановок задачи системной оптимизации. Для того чтобы лучше уяснить идею, проиллюстрировав ее графически, рассмотрим двухкритериальный случай. Предположим также, что выбором значений этих критериев однозначно определяется соответствующее решение. Иными словами, искомое решение ищется непосредственно в пространстве  $K$  критериев оптимизации, которые обозначим  $x_1, x_2$  (рис. 6.3).

Процесс решения начинается с того, что в заданном пространстве  $K$  выбирается некоторая точка  $A_0$  с координатами  $a_0, b_0$  (желательное решение задачи). Далее строятся начальные ограничения  $F_1^{(0)}(x_1, x_2) \geq 0, \dots, F_n^{(0)}(x_1, x_2) \geq 0$ , задающие начальную допустимую область  $P_0$ .

Прямой проверкой устанавливается факт принадлежности или непринадлежности точки  $A_0$  области  $P_0$ . В первом случае в принципе может быть применена обычная (классическая) процедура оптимизации либо по одному из критериев  $x_1, x_2$ , либо по той или иной их комбинации. Однако при системном подходе применяется обычно совершенно другой прием, а именно, в соответствии с моделью  $M$  высшего уровня, управляющей выбором критериев, точка  $A_0$  выводится из пределов допустимой области  $P_0$ , как это и показано на рис. 6.3.

После этого выделяются те ограничения, которые не выполняются в точке  $A_0$  (в рассматриваемом случае ими будут  $F_3^{(0)}, F_4^{(0)}$ ). Обращаясь к моделям  $M_3$  и  $M_4$ , формирующим эти ограничения, в диалоговом режиме опробуются те или иные решения, изменяющие соответствующие ограничения в нужном направлении (если такое изменение оказывается возможным). Нужным при этом считается то направление, которое уменьшает абсолютную величину отрицательных невязок  $F_i^{(0)}(a_0, b_0)$  (в рассматриваемом случае  $F_3^{(0)}(a_0, b_0), F_4^{(0)}(a_0, b_0)$ ).

Следует иметь в виду, что во многих случаях ограничения  $F_i$  оказываются взаимосвязанными, так что изменение одного из них приводит к изменению определенной части других ограничений. Управление выбором решений для изменения ограничений определяется при этом минимизацией некоторой функции штрафа  $g_0(a_0, b_0)$ . В качестве такой функции выбирается обычно максимальная абсолютная величина отрицательных невязок  $\lambda_i F_i^{(0)}(a_0, b_0)$  (где  $\lambda_i$  — некоторые положительные весовые коэффициенты). Если таких невязок нет, то по определению  $g_0(a_0, b_0) = 0$ .

В результате управления появляется ряд решений  $R_1, \dots, R_m$ , приводящих к уменьшению значения функции штрафа, которое после  $m$ -го решения обозначим  $g_m(a_0, b_0)$ . Изменяя ограничения, каждое из принятых решений приводит к соответствующему изменению допустимой области. На рис. 6.3 показаны два таких изменения. Первое из них изменяет ограничения  $F_3^{(0)}$  и  $F_2^{(0)}$ , заменяя их соответственно ограничениями  $F_3^{(1)}$  и  $F_2^{(1)}$ . Второе изменение затрагивает лишь одно ограничение  $F_4^{(0)}$ , заменяя его ограничением  $F_4^{(1)}$ . Получающаяся после этих изменений допустимая область  $P_2$  ограничена линиями  $F_1^{(0)}, F_2^{(1)}, F_3^{(1)}, F_4^{(1)}$ , а соответствующее значение функции штрафа равно  $g_2(a_0, b_0)$ .

Заметим, что заблаговременный выбор конечной допустимой области невозможен ввиду того, что последовательность областей  $P_0, P_1, \dots$  может не быть упорядочена по вложению. Кроме того, огромная трудоемкость формирования новых ограничений не позволяет выполнить эту работу заблаговременно, поскольку при этом потребовалось бы сделать много лишней работы по изменению несущественных ограничений.

Если (как это имеет место на рис. 6.3)  $g_2(a_0, b_0) \neq 0$ , а решений, приводящих к дальнейшему уменьшению значения функции штрафа

фа, не имеется, то происходит возвращение к высшей модели  $M$ , управляющей выбором желательного решения задачи  $A(a, b)$ . Путем ряда последовательных решений  $D_1, D_2, \dots, D_k$  на изменение начального решения задачи  $A_0(a_0, b_0)$  оно последовательно заменяется на  $A_1(a_1, b_1), \dots, A_k(a_k, b_k)$ , пока очередная точка  $A_k(a_k, b_k)$  не окажется в допустимой области (на рис. 6.3  $k = 1$ ).

Решения на изменения выбираются из допустимого множества решений с целью минимизации функции штрафа. Этот процесс близок к классическому процессу оптимизации, за исключением лишь того обстоятельства, что шаги выбираются не произвольно, а в соответствии с допустимыми (моделью  $M$ ) решениями.

Наконец, после попадания точки  $A_k$  в заключительную допустимую область  $P_m$  может быть применена дополнительная процедура оптимизации по каким-либо комбинациям критериев  $x_1, x_2$  в пределах этой допустимой области. Такая процедура отличается от классической лишь тем, что выбор шагов оптимизации не произволен, а управляется моделью  $M$  высшего уровня. Если дальнейшему улучшению избранного критерия мешают некоторые ограничения, поддающиеся дальнейшим изменениям в нужную сторону, то процесс оптимизации может быть продолжен за счет включения в него последовательных решений на такие изменения.

Заметим, что однозначное определение решения задачи выбором значений всех критериев оптимизации встречается не столь редко, как это может показаться на первый взгляд. Оно имеет, например, место для планово-экономических задач, где критерием (векторным) является чистый выпуск продукции разных видов, а решением задачи — полный выпуск [66]. В случае, когда такая однозначность отсутствует, пространство, в котором ищется решение, помимо координат, соответствующих критериям оптимизации, может иметь и другие координаты. Описанный выше процесс оптимизации при этом усложняется за счет того, что точки  $A_i(a_i, b_i)$  заменяются гиперплоскостями. Усложняется и определение функции штрафа: в качестве нее может быть выбрано, например, расстояние от выбранной гиперплоскости до очередной допустимой области в пространстве с заданными сжатиями (растяжениями) вдоль осей, соответствующих критериям оптимизации.

В самом общем случае вместо гиперплоскостей могут фигурировать точечные множества произвольного вида. Возможны постановки, при которых на этих множествах значения критериев определены неоднозначно, а для различия более или менее предпочтительных решений на множествах задаются (моделью высшего уровня  $M$ ) соответствующие весовые функции. Однако важной чертой системной оптимизации, сохраняющейся при всех подходах, помимо многокритериальности и возможности изменения допустимой области, является взаимодействие моделей различных уровней. В случае планово-экономических задач решения в этих моделях производятся управляющими различных уровней, а в случае проектно-конструкторских задач — проектантами, работающими над различными частями проекта.

К настоящему времени разработана одна из конкретных схем оптимизации, основанная на изложенных принципах,— так называемые системы Дисплан [66].

### § 3. Программно-алгоритмическое обеспечение

Под *программно-алгоритмическим* (или *математическим*) *обеспечением* принято понимать совокупность общесистемных и прикладных программных средств, позволяющих автоматизировать вычислительный процесс в период написания и отладки программ, а также при решении задач пользователя. Наиболее эффективной формой объединения программных средств, направленных на решение задач пользователя, являются пакеты прикладных программ (ППП).

**3.1. Общие замечания о тенденциях развития ППП.** Программные средства, объединенные в ППП, содержат языковые средства доступа, системные и функциональные модули, средства управления вычислительным процессом, средства управления базой данных и банки данных. Эффективное использование функциональных программных модулей в ППП достигается в том случае, когда для каждой задачи создаются свои решающие и оценочные модули [113].

Идея объединения программных средств в ППП стала возможной только спустя три десятилетия после успешного развития технических средств вычислительной техники и соответствующих средств общесистемного математического обеспечения.

Первый этап развития программных средств (1950—1960 гг.) характеризовался простым объединением программных модулей для соответствующих типов ЭВМ, информация о составе которых распространялась Ассоциацией пользователей соответствующих классов ЭВМ [10, 109, 206, 221, 251]. Вторым этапом (1960—1970 гг.) характеризовался созданием библиотек стандартных программ (БСП) для решения соответствующих задач на ЭВМ [3, 10, 108, 263].

Недостатки разработок программных средств первого и второго этапов прежде всего состояли в низкой их надежности и низком качестве. В связи с этим третий этап (1970—1980 гг.) был направлен прежде всего на создание программных средств, лишенных недостатков своих предшественников. Здесь следует отметить среди зарубежных такие разработки, как IMSL [10], NAG [10], PORT [10], NATS [10] и др., а среди отечественных — СЛАУ [28], Вектор-1 [90, 237], ДИСУС [107], САФРА [86], Диспро [184, 237, 238], по математической физике и др. [53, 134, 287].

Соответствующим образом росла стоимость одной перфокарты в программных средствах: от 7—10 долларов на 1-м этапе, 25—30 долларов на 2-м, до 60—80 долларов на 3-м этапе [10].

**3.2. О требованиях к структуре и функциям ППП.** Известны современные определения ППП как совокупности программных средств, обладающей определенной внутренней структурой и полнотой, обеспечивающей решения определенного класса задач [132, 251] либо обладающей большей структурированностью, чем их простая совокупность [10], и др.

В настоящее время выработаны следующие требования по качеству и надежности к ППП (см., например, [10, 20, 113]):

— *функциональная полнота*, т. е. возможность автоматического выполнения всех функций организаций и планирования вычислительного процесса при непроцедурной форме задания;

— *проблемная ориентация*, т. е. наличие языковых средств доступа с непроцедурной формой задания на уровне, близком к профессиональному языку проблематики;

— *гибкость и динамичность*, т. е. возможность расширения системы с развитием проблемной области;

— *надежность в работе*, т. е. способность реализовать на ЭВМ точно и эффективно то содержание, которое в них заложено;

— *устойчивость в работе*, т. е. способность проводить вычисления до критерия останова при любых данных, не создающих конфликтных ситуаций, а при возникновении таковых либо их обходить, либо выдавать надлежащую диагностику;

— *структурированность*, т. е. логическая схема должна достаточно легко прослеживаться;

— *легкая доступность использования*, в частности, наличие качественной документации, обеспечивающей внедрение и сопровождение ППП;

— *обоснованность и доказательство надежности* путем многократного и разностороннего тестирования;

— *оценивание характеристик вычислительного процесса*, т. е. наличие оценочных модулей, являющихся важной характеристикой качества программных средств.

Эти характеристики указывают время реализации на ЭВМ, объем занимаемой памяти, гарантированную точность и др.

Реализация требований по качеству и надежности к ППП возможна с помощью следующих основных мероприятий: 1) детально систематизировать рассматриваемые классы задач по априорной информации; 2) разработать новые (в определенном смысле наилучшие) или исследовать известные алгоритмы для решения выделенных подклассов задач; 3) провести модульный анализ алгоритмов и создать на модульном принципе программы, реализующие алгоритмы решения задач; 4) создать сервисную и организационную часть программного обеспечения пакета; 5) создать интерфейс с СУБД; 6) создать интерфейс с программными модулями, представленными на языках ассемблер, PL/1, фортран; 7) создать диалоговые программные средства для работы пользователя с ППП в интерактивном режиме; 8) создать средства специализации структур данных и средства манипулирования с ними; 9) создать интерфейс с другими ППП; 10) создать проблемно-ориентированный язык.

Структура современного ППП приведена на рис. 6.4. Здесь основными составными частями ППП обычно являются: 1 — главная управляющая программа; 2 — анализатор языка пользователя, обеспечивающий семантический и синтаксический контроль языка и выдающий соответствующую диагностику сообщений; 3 — диалоговые средства, обеспечивающие связь пользователя с моделиру-

ющим комплексом в интерактивном режиме; 4 — классификатор задач; 5 — интерфейсы с различными блоками ППП, что соответствует системному наполнению пакета; 6 — библиотека программных (решающих) модулей, представленных на одном из языков (ассемблер, фортран, PL/1 и др.), что соответствует функциональному наполнению пакета; 7 — библиотека оценочных модулей, каждый из которых соответствует своему решающему модулю, что

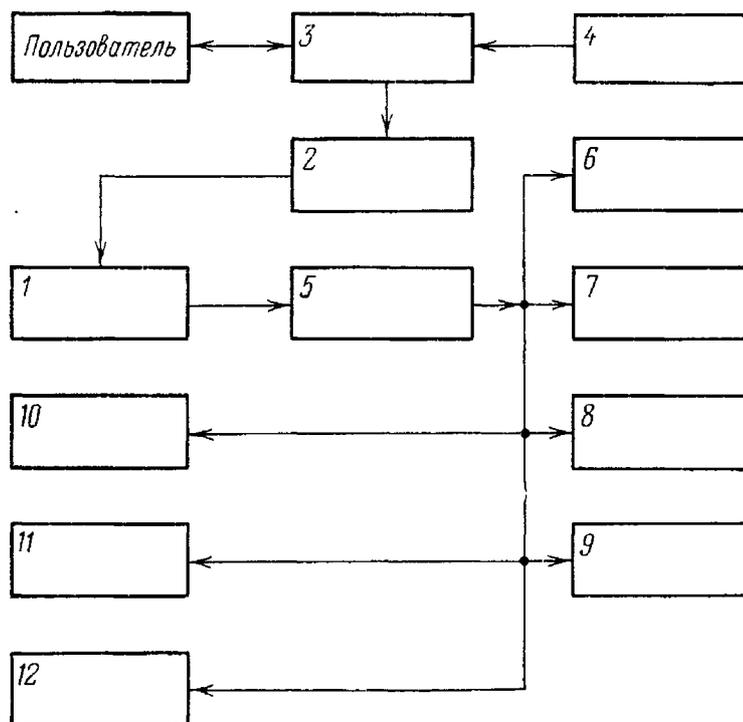


Рис. 6.4.

соответствует функциональному наполнению пакета; 8 — библиотека паспортов модулей, что соответствует системному наполнению пакета; 9 — СУБД; 10 — библиотека сервисных программ; 11 — библиотека управляющих (оптимизирующих) программ; 12 — другие типы ППП.

**3.3. О некоторых языках моделирования.** Языки моделирования представляют собой специально разработанную семиотическую систему, которая используется при решении задач на цифровой вычислительной технике. Известна различная классификация языков моделирования [85, 272, 302]. В основе их использованы категории действий, событий и процессов [272].

В языках первого класса действие зависит от времени и представимо в модельном времени как мгновенное. События представляемы через условия, в которых они могут произойти. Действия не регламентируются, а программно анализируется реализуемость всех условий. Если условия наступления событий выполнены, то осуществляется сдвиг модельного времени, в противном случае команды действия пропускаются. Языки данного класса характеризуются своей краткостью.

В языках второго класса событие представимо в модельном времени как мгновенное. События регламентируются состояниями системы. Языки данного класса более эффективны, чем первого.

Языки третьего класса, ориентированные на процессы, объединяют в себе достоинства языков первого и второго классов.

Анализ эффективности языков для конкретных постановок задачи взаимосвязи языков моделирования между собой, основанных на SIMULA — ориентированных языках, проведен в [212, 272], а соответствующих систем имитационного моделирования дискретных процессов — в [12, 164]. В [212] приведена схема развития SIMULA — ориентированных языков и соответствующих систем имитационного моделирования.

В настоящее время языки моделирования находят все большее применение.

Отметим некоторые приложения языков моделирования в математической экологии [290]. Здесь использована модель DYNAMO для описания процессов мировой экодинамики для периода 1900—2100 гг. [290]. Известна также система ОРБИТАЛЬ, созданная на базе системы НЕДИС, позволяющая моделировать конформационный анализ молекул. Все большее признание находят методы моделирования биокинетики. Известна система моделирования ферментативной кинетики; обзор подобных систем дан в [290]. На базе математических методов и программных средств ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, МГУ им. М. В. Ломоносова, ИБФ АН СССР и НИВЦ АН СССР получены существенно новые научные результаты [110, 226—228, 231].

**3.4. Программное обеспечение системы моделирования.** В задачах моделирования развивающихся систем можно выделить следующие основные этапы [280]: обработка данных, собственно моделирование на основе выбранного класса моделей, анализ результатов моделирования и сравнение их с теорией. Как указывалось выше, на начальном этапе математики, биологии и системотехники должны разработать требуемые для решения конкретных задач соответствующие схемы программно-технических средств и методики биологических экспериментов, провести подготовку и проектирование экспериментов; тестирование программных средств; тестирование приборов программными средствами; выбор оптимального плана эксперимента и построение сетевого графика проведения экспериментов; провести анализ научной библиографической информации.

Рассмотрим особенности использования программного обеспечения (ПО) для решения задач на каждом из этапов.

**3.4.1. Обработка данных.** По признаку генерирования, задаваемому пользователем, параметры, связанные соотношениями моделей из рассматриваемого класса, могут быть разбиты на две группы: 1) параметры, значения которых невозможно получить экспериментальным путем; 2) параметры, значения которых могут быть получены в результате эксперимента.

В первом случае ПО должно включать библиотеку стандартных (модельных) функций, обладающих заданными свойствами.

Во втором случае требуется по исходным данным оценить значения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $t$ ,  $c$ . Эти данные могут иметь детерминированный, случайный или смешанный характер. Поэтому ПО должно включать в себя полный набор следующих программных средств:

— ППП для статистической обработки данных (например, условное название ППП СОДА — статистическая обработка данных) [3, 105, 164];

— ППП для планирования эксперимента (например, условное название ППП ПЭК — планирование эксперимента) [155, 164];

— ППП по аппроксимации и идентификации (чебышевская аппроксимация, сплайн-аппроксимация, экстраполяция и др.; условное название ППП АПЭД — аппроксимация экспериментальных данных) [27, 117, 164];

— ППП по определению параметров одного класса динамических моделей: в случае решения некорректных задач численного дифференцирования и др., с использованием известного аппарата [252]; в случае использования экспертных оценок по [64, 241];

— ППП по решению уравнений, в частности, решению систем линейных алгебраических уравнений [28, 286]; по решению различных задач линейной алгебры [10], на основе алгоритмов Уилкинсона и его сотрудников [313]; по исследованию свойств динамических моделей [18, 266] и др.; по решению различных типов интегро-дифференциальных уравнений [15, 80, 244]; по вычислению специальных функций [10]; по математическому программированию [10].

Следует отметить, что в случае фиксированной постановки задачи выбранный ППП может полностью покрывать тот или иной технологический этап обработки данных. В противном случае, когда выбранный ППП не покрывает данный этап или совокупность этапов обработки данных, следует переходить к технологической цепочке обработки данных, реализующейся в рамках единого моделирующего комплекса (МК). Ниже будет рассмотрена технология решения задач моделирования с помощью МК АЛСИМ-2.

**3.4.2. О б а н к а х д а н н ы х.** Наличие информационного обеспечения в виде банка данных позволяет осуществлять одноразовый ввод больших матриц наблюдений с последующим многократным их использованием, легким доступом к любой части массива и представляет удобные средства корректировки исходной информации.

Однако имеющегося информационного обеспечения таких СУБД, как КАМА, ОКА, ТВЕРЬ и др., предназначенных для задач АСУ, недостаточно для научных исследований по следующим причинам [80]: невозможно хранение аналитической и графической информации; сложный язык общения (язык макроассемблера); обработка информационных массивов ведется с помощью системных средств (т. е. требует дополнительного системного программирования); имеется избыточная программная сложность (предусмотрено хранение иерархических таблиц сложной структуры с учетом долговремен-

ного хранения, в то время как экспериментаторам необходимо хранение только простых таблиц и только на этапе обработки данных эксперимента); отсутствуют интерфейсы для взаимодействия с ППП.

Указанных выше недостатков лишена разрабатываемая в настоящее время система кодирования информационных файлов, работающая на естественном языке общения во взаимодействии с ППП СОДА, АПЭД и др.

3.4.3. О решении задач моделирования и проверки адекватности моделей. Ядром программного обеспечения системы моделирования развивающихся систем является ППП для решения различных задач, возникающих в рамках рассматриваемого класса динамических моделей (условное название ППП МРС — моделирование развивающихся систем). Часть применяемых здесь методов и алгоритмов описана в [76—78, 80, 115, 282—284], а для новых модификаций моделей методы и программы еще предстоит разработать.

Для представления связей между отдельными «блоками» моделей (или между уравнениями моделируемых иерархических систем) рассматриваемое ПО должно включать программы, реализующие наиболее типичные формы зависимостей между параметрами моделей (положительная и отрицательная обратная связь, диссипативные связи, нелинейные зависимости химической кинетики и т. п.).

При моделировании некоторых развивающихся систем отдельные блоки модели могут быть описаны системами дифференциальных уравнений, которым следует в таких случаях отдавать предпочтение ввиду их меньшей вычислительной сложности по сравнению с выбранными динамическими моделями. Их стационарные решения определяются системами нелинейных уравнений. Поэтому ПО следует дополнить программами решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (в том числе жестких), решения краевых задач для дифференциальных уравнений, решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

Программное обеспечение должно также содержать средства анализа результатов моделирования и сравнения их с теорией. В случае использования моделей развивающихся систем в виде систем дифференциальных уравнений для каждого этапа необходимо разработать программные средства, в основе которых лежат известные методы качественной теории дифференциальных уравнений, в частности, метод фазовых портретов, примеры применения которого содержатся в работах [29, 143, 190], в гл. 1, 3.

При изучении различных режимов поведения развивающихся систем наибольший интерес представляют такие, фазовые траектории которых подобны неустойчивому узлу, неустойчивому фокусу, аттрактору, седлу. Это связано с тем, что развивающиеся системы являются неравновесными в термодинамическом смысле. Более сложные типы колебательных (например, стохастических) и других режимов поведения  $m$ ,  $c$ , интересные с точки зрения качественного исследования решений динамических моделей (гл. 3) для описания

поведения развивающихся систем, приводят к более сложным фазовым траекториям (см. гл. 1, 3).

Кроме этого, разбив имеющуюся предысторию для отрезка  $[t'_0, t_0]$  на части, каждая из которых отвечает отрезку  $[t'_{j-1}, t'_j]$ , а  $a(t'_j) = t'_{j-1}$  ( $j = \overline{1, j_0}$ ),  $t'_{j_0} = t_0$ , можно проверить адекватность моделей на каждом из отрезков  $[t'_{j-1}, t'_{j+1}]$ , считая процессы заданными на  $[t'_{j-1}, t'_j]$ , определяемыми с помощью моделей на  $[t'_j, t'_{j+1}]$  и сравниваемыми на последнем отрезке с известными экспериментальными моделями.

Далее, несмотря на большую аналитическую сложность задач в рассматриваемом классе динамических моделей, в ряде частных случаев удалось построить аналитическое решение, исследовать асимптотику, например, двухпродуктовой модели (см. гл. 3—5). Полученные аналитические решения могут быть использованы либо в качестве нулевых приближений в итерационных методах, либо для контроля процесса численного решения соответствующих задач (а также как тестовые примеры для проверки новых методов решения). В случае больших величин  $\max\{\max(\alpha), \max(\beta)\}$  ( $T$  —  $t_0$ ), определяемых как жесткость задач, большую помощь для корректировки решений может оказать известная асимптотика модели. Исходя из сказанного, ПО должно также содержать библиотеку известных аналитических решений задач моделирования. Кроме того, для проверки адекватности моделей в некоторых случаях также может быть применен указанный выше метод фазовых портретов (см. гл. 3). По этой методике в нашем случае следует в системе координат  $M, C$  записать поведение этих продуктов во времени. В общей постановке исключение  $t$  с целью получения зависимости аналитического вида  $F(M, C) = 0$  может оказаться невозможным или чрезвычайно громоздким. Однако при помощи программ на ЭВМ можно приближенно определить искомую зависимость.

В заключение отметим важность вопроса об эффективности использования тех или иных моделей развивающихся систем. Затраты, которые несет исследователь, также должны быть введены в рассмотрение результатов моделирования, для чего необходима разработка соответствующих программных средств.

**3.4.4. Комплексное МО моделирования.** Использование набора автономных ППП для моделирования обычно сталкивается с такими трудностями, как с отсутствием единой технологической цепочки вычислительного процесса, с рассогласованием представлений входных и выходных данных ППП и необходимостью создания интерфейса между ними. Эти трудности могут быть преодолены в рамках комплексного математического обеспечения (МО), ориентированного на решение задач моделирования. При этом комплексное МО должно обладать следующими свойствами:

— единой технологической цепочкой решения задач моделирования;

— универсальными средствами описания динамических и статистических объектов;

- средствами планирования модельного эксперимента и обработки экспериментальных данных;
- средствами конструирования и работы со специализированными ППП;
- единым интерфейсом между ППП и универсальной частью системы;
- средствами управления информацией во внешней памяти;
- диалоговыми средствами для решения задач, для информационного обслуживания и др.

Примерами комплексного МО могут быть моделирующий комплекс (МК) АЛСИМ-2 [164], система автоматического конструирования ППП — TAMPR [10] (Transformation Assisted Multiple Programm Realization) и др.

Остановимся на рассмотрении некоторых особенностей МК АЛСИМ-2, структурная схема которого приведена на рис. 6.5. Основным средством ведения работы пользователем в МК является

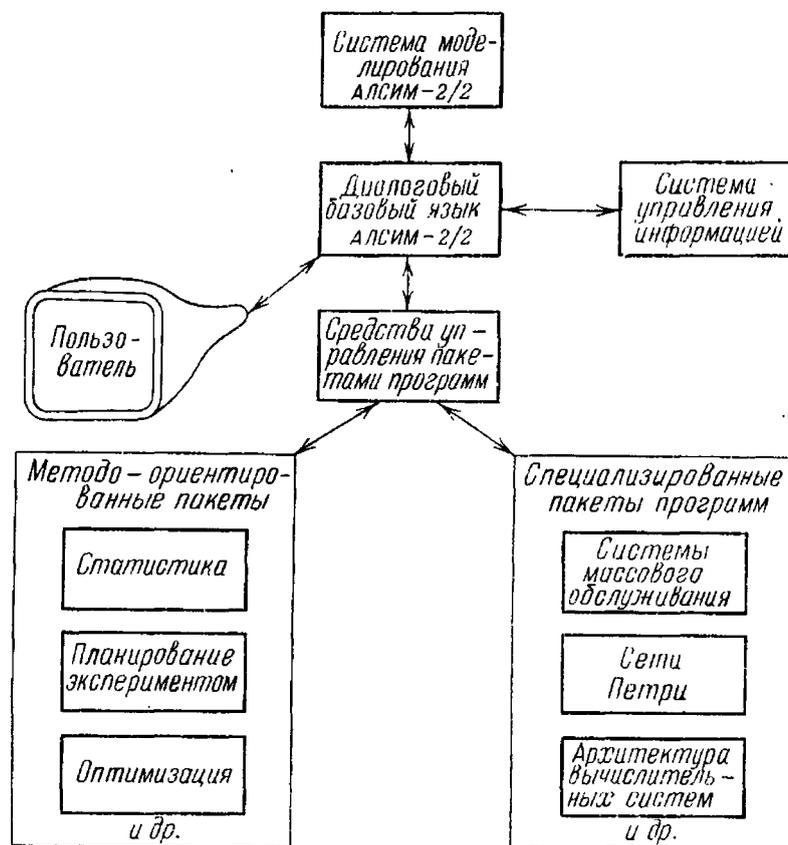


Рис. 6.5.

базовый язык процедурного типа АЛСИМ-2/2 [164], который ориентирован на диалоговый режим работы. Основными особенностями языка являются: осуществление интерфейса по данным между различными подсистемами МК, языковыми уровнями, рабочей областью и внешней памятью; наличие широкого спектра информационных объектов языка; наличие средств конструирования и использования ППП. Система управления информацией (СУИ)

является составной частью базового языка [164], дает возможность пользователю описывать и манипулировать данными.

Второй частью МК АЛСИМ-2 является собственно система имитационного моделирования дискретных процессов АЛСИМ-2/3.

Средства управления ППП позволяют создать информационное обеспечение, организовать единую технологию вычислительного процесса в МК и обеспечить интерфейс между ППП [164, 249].

Следующей составной частью МК являются методо-ориентированные ППП, предназначенные для поддержания метода имитационного моделирования. Специализированные ППП в данной конфигурации ориентированы на решение задач моделирования вычислительного процесса в сетях ЭВМ. Для расширения ППП пользователь должен создать свой ППП (функциональное наполнение пакета) и соответствующее информационное обеспечение (системное наполнение пакета). Причем функциональное наполнение МК ведется средствами ОС ЕС (либо АПРОП [52, 240], системой разделения времени и др.), а системное наполнение обеспечивается средствами базового языка АЛСИМ-2/2. Функциональная схема взаимодействия различных средств в МК АЛСИМ-2 приведена на рис. 6.6.

3.5. О путях повышения эффективности систем моделирования. Большая вычислительная сложность задач моделирования приводит к проблеме эффективного использования вычислительных ресурсов. Поэтому возникает необходимость в оснащении моделирующего комплекса программными средствами эффективного выбора моделей для заданного класса задач пользователя. Здесь уместно напомнить ценные свойства имитационного моделирования при выборе и работе с моделями. Как правило, выбор сложных моделей развивающихся систем осуществляется из такого класса, когда какая-то часть их содержит блоки-модели, представимые в рамках классического или нового класса динамических моделей. Другие блоки-модели имеют вид численных таблиц, качественных, приближенных оценок. И наконец, существуют непознанные процессы, блоки-модели которых отсутствуют. Описание поведения сложной модели развивающейся системы, состоящей из моделей подобного рода, возможно лишь в рамках системы имитационного моделирования, которая, как указывалось выше, выполняет функцию универсального «склеивающего» средства, позволяющего исследовать целостное поведение сложной развивающейся системы. Возможность таких исследований реализуется в интерактивном режиме путем выдачи пользователю информации, содержащей оценки быстродействия, требуемого объема оперативной и долговременной памяти, точности вычислений. Расчет этих оценок должен проводиться на основе оценочных модулей для выбранного набора программных средств. Этот комплекс мероприятий позволит эффективно использовать вычислительные ресурсы, так как пользователю предоставляется возможность выбора программных средств, удовлетворяющих его критериям.

Для развитых систем моделирования в перспективе возникает необходимость разработки ПО как для последовательных во вре-

мени, так и параллельных (альтернативных) модификаций моделей при заданных критериях отбора. Параллельные модификации моделей могут быть эффективно реализованы на рекурсивных вычислительных машинах (РВМ). При таком подходе сравнительный анализ результатов вычислений позволит определить преимущества

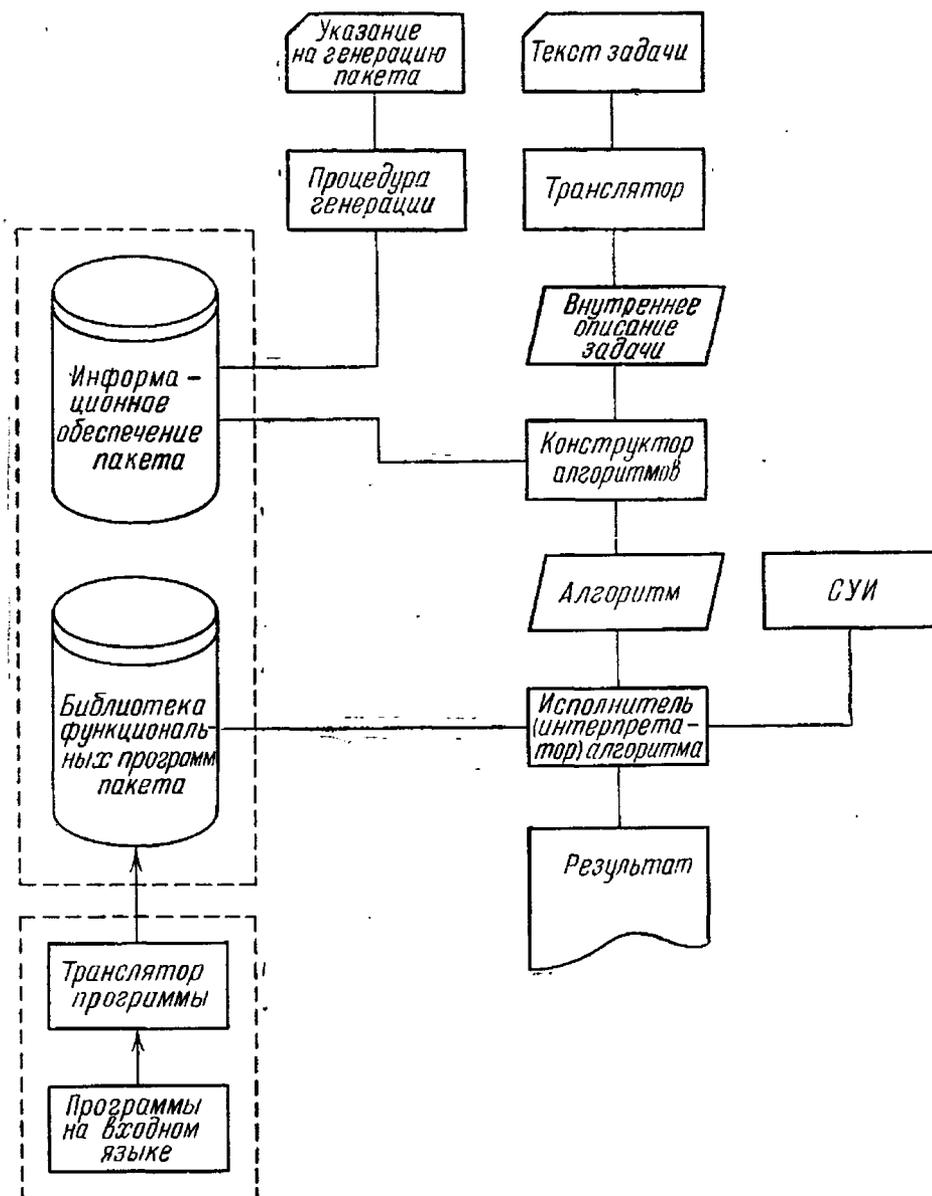


Рис. 6.6.

каждой из параллельных модификаций и тем самым исключить субъективность в выборе моделей.

Для удобства пользователей систему моделирования следует дополнить средствами общения на естественном языке и обучающей средой. Последняя должна включать следующие курсы:

- по типовым постановкам задач и методике их решения с указанием эффективных средств решения;
- по работе с вычислительными методами (указывается, какие методы следует применять и каковы особенности работы с ними с учетом используемой ЭВМ);

— по работе с программным обеспечением (как готовить данные и вызывать необходимые программные модули); в качестве программного обеспечения для этих целей могут быть также использованы программные средства МК АЛСИМ-2, СПОК и др.

Система моделирования, включающая все программные средства, описанные в этом параграфе, будет представлять собой автоматизированный проблемно-ориентированный комплекс для моделирования развивающихся систем.

#### § 4. Комплекс технических средств системы моделирования

Комплекс технических средства (КТС) представляет собой совокупность совместимых экспериментальных приборов и вычислительных устройств сбора, передачи, обработки, хранения и отображения информации.

КТС должен обеспечить надежный сбор информации от экспериментальных установок, решение задач системы в установленные сроки, не накладывая при этом существенных ограничений на работу экспериментальных установок. Работа КТС должна начинаться и оканчиваться по сигналу экспериментальных установок. При проектировании КТС следует предусмотреть возможность его дальнейшего совершенствования и расширения. При этом должна быть обеспечена возможность исследования различных свойств объектов с последующим объединением данных в системе моделирования.

**4.1. Некоторые характеристики объектов управления.** Исследование различных характеристик научно-производственных объединений как развивающейся системы проведено в [224, 246]. Технология исследования биологических объектов выдвинула требования к созданию специализированных подсистем анализа электрофизической информации, физико-химических свойств, структуры и состава веществ, гидробиологических, психофизиологических, биохимических данных и многих других.

Анализ, например, электрофизиологической информации позволяет дать оценку параметрам в следующих диапазонах: диапазон изменения амплитуды сигнала 0,01 : 100 мВ, полоса частот 0,01 : 10 000 Гц [14, 80] и др. Анализ эволюции данных о строении и функциях клеток организма, начиная с первых представлений Р. Гука, до современных молекулярно-биологических, показывает, как от одного параметра возросли необходимость и возможность изучать десятки параметров с помощью самых разнообразных методов и технических средств [80]. Это естественным образом предъявляет разнообразные требования к проектированию проблемно-ориентированного комплекса как развивающейся системы.

**4.2. Устройство связи с объектом.** Изучение опыта разработки различных специализированных и универсальных устройств сбора данных [14, 80, 172] позволило сформулировать некоторые основные требования к измерительно-кодирующей части: динамический диапазон входных сигналов 120 дБ; динамический диапазон на

входе аналого-цифрового преобразователя (АЦП): а) в режиме быстрого измерения 60 дБ; б) в режиме медленного измерения 78 дБ; диапазон сигналов на входе АЦП  $\pm 0,1-0,5 \div 10-100$  дБ; частотный диапазон входных сигналов 0—10 000 кГц; динамическая погрешность преобразования не должна превышать 0,2 % для сигналов от 0—500 Гц и может увеличиться на 20 дБ на октаву, начиная с 500 Гц; время преобразования: а) в режиме быстрого измерения 1—2 мкс; б) в режиме медленного измерения 12 мкс; при сохранении в режиме медленного измерения апертурного времени 1 мкс; количество входов 15—180; количество выходов 10—100—200. Проблема создания устройств связи с объектом в настоящее время является наиболее важной в комплексных целевых программах разработки систем автоматизации научных исследований и еще требует своего развития и решения.

**4.3. Микропроцессоры, малые и большие ЭВМ** Конкретные типы микропроцессоров, характеристики малых и больших ЭВМ рассмотрены достаточно подробно в различных работах [79, 80, 84, 129, 160, 172, 194, 219, 245]. В целом средства вычислительной техники должны представлять иерархию совместимых ЭВМ различной производительности с четкой агрегатной структурой, имеющую следующие уровни:

Сети ЭВМ с системами сопряжения ЭВМ [79]. Инициатива обмена данными может принадлежать различным ВЦ.

Вычислительные средства данного ВЦ, ориентированные на диалоговую пакетную обработку данных. Здесь же осуществляется связь терминалов с ЭВМ каналами аппаратуры передачи данных, например средствами типа БАРС [84]. Инициатива обработки и обмена данными принадлежит в основном терминалам.

Автоматизированные рабочие места исследователей, состоящие из экспериментальных установок и малых ЭВМ, ориентированных на работу в реальном масштабе времени. Инициатива обработки идет непосредственно от экспериментальных установок или с пульта оператора.

Наметившиеся в последнее десятилетие пути развития КТС, по-видимому, будут направлены на повышение эффективности использования микропроцессоров по сравнению с малыми ЭВМ. Что касается больших ЭВМ, то здесь намечена тенденция к созданию многопроцессорных систем, высокопроизводительных, например, рекурсивных, вычислительных систем, устройств и ЭВМ.

При моделировании некоторых реальных задач на ЭВМ на основе нового класса динамических моделей обнаружена большая их жесткость. Уровень современного научно-технического прогресса в области вычислительной техники может обеспечить эффективное решение задач со сравнительно небольшой жесткостью. У биологических систем жесткость на 4—10 порядков выше, чем жесткость искусственных систем. Поэтому для моделирования на ЭВМ трудных биологических задач необходимо существенно повысить качество и эффективность ЭВМ.

Цель настоящей главы — показать интерпретацию одного класса динамических моделей применительно к развивающимся системам экономического, вычислительного и биологического характера. Главное внимание уделяется выделению в развивающейся системе двух видов ресурсов. Первый вид идет на воспроизводство самого себя (или внутренний), а второй — на выполнение основных функций системы (или внешний). Кроме того, уделяется внимание интегральным оценкам некоторых функций системы, в частности, выделяются структуры, связанные с производительностью систем, и структуры, обеспечивающие различные направления и интенсивности использования ресурсов.

Вначале излагаются построения минимальных моделей и результаты моделирования в макроэкономике, затем — применительно к вычислительному процессу и научно-техническому прогрессу, к процессу сахаронакопления сахарной свеклы, к процессу роста организма, к процессу взаимодействия организма с антигеном, и заканчиваются теоретическими обобщениями и дополнениями.

### § 1. Моделирование оптимизации распределения рабочих мест между отраслями производства групп А и Б

В данном параграфе на основе двухпродуктовой макроэкономической модели (2.1)—(2.3) исследованы математические вопросы оптимизации производства предметов потребления (производства группы Б) за счет выбора наилучшего и сбалансированного распределения числа рабочих мест между группами Б и А, где А — группа производства средств производства.

**1.1. Математическая постановка задачи.** Рассмотрим максимизацию функционала

$$I(y) = \int_b^T \left\{ \int_{a(t)}^t [1 - y(\tau)] m(\tau) \beta(\tau) d\tau \right\} dt, \quad 0 < b < T, \quad (7.1)$$

при ограничениях

$$\int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau = F(t), \quad 0 = a(b) \leq a(t), \quad \frac{da}{dt} \geq 0, \quad (7.2)$$

$$m(t) = \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad t \in [b, T].$$

Здесь заданными функциями являются:  $F(t)$  — положительная непрерывно дифференцируемая,  $\beta(t)$  — неотрицательная неубывающая непрерывная,  $\alpha(\tau, t)$  — неотрицательная неубывающая по  $\tau$  при любом  $t$  и непрерывная по обоим аргументам, а искомыми:  $a(t)$  — дифференцируемая неубывающая,  $m(t)$  — непрерывная неотрицательная и  $y(t)$  — кусочно-дифференцируемая с конечным числом разрывов, причем для  $0 \leq t \leq b$  функции  $m(t)$ ,  $y(t)$  являются известными. Требуется максимизировать функционал (1) при соблюдении условия (2) с заданной относительной погрешностью, скажем, 1 %. Некоторые другие постановки задач см. в [67].

Одна из важных интерпретаций указанной математической задачи состоит в максимизации ожидаемого выхода продукции отраслей производства группы Б за плановый период  $T - b$ . В этом случае  $\beta(t)$  — производительность труда на рабочем месте, создаваемом в момент  $t$  в группе Б. Под рабочим местом понимается [268] локализованная в производственном пространстве и времени — средствами труда и его организацией — определенная совокупность трудовых функций, для выполнения которых на протяжении любого данного календарного периода необходима трудовая деятельность одного работника в течение полного (установленного законом) рабочего времени за этот период [268, с. 9]. Под совокупностью трудовых функций понимается часть общего процесса труда, выделяемая определенными средствами труда и соответствующая этим средствам производственная задача [243, с. 320]. Эти положения основываются на фундаментальном определении «простого процесса труда», данном К. Марксом [174, с. 188]. Кроме того,  $\alpha(\tau, t)$  — производительность труда в группе А: количество рабочих мест, создаваемых за единицу времени, начиная с момента времени  $t$ , одним работающим в группе А на рабочих местах, созданных в момент времени  $\tau$ ,  $F(t)$  — общее количество рабочих мест:

$$F(t) = \frac{n(t)}{k(t)}, \quad (7.3)$$

где  $n(t)$  — количество трудовых ресурсов,  $k(t)$  — коэффициент сменности;  $m(t)$  — скорость создания новых рабочих мест в А и Б,  $a(t)$  — временная граница ликвидации устаревших рабочих мест,  $y(t)$  — относительная доля рабочих мест в А. Первое из уравнений (2) — уравнение баланса рабочей силы; второе — уравнение роста фондов; отсчет времени  $t = 0$  начинается с того момента, когда была введена в эксплуатацию самая старая из используемых в начале планового периода  $[b, T]$  производственных мощностей.

**1.2. Качественное исследование.** Аналитическое решение и качественное исследование указанной задачи в некоторых частных случаях выполнено в § 1 гл. 3. Здесь рассмотрим более детально эту задачу в общем случае.

Найдем первую вариацию (с точностью до главных членов)  $\delta I(y) \equiv \delta I = I(y + \delta y) - I(y)$  функционала (1) при ограничениях (2) с учетом лишь ограничений типа равенства. Имеем

$$\delta I = \int_b^T \int_{a+\delta a}^t [1 - y(\tau) - \delta y(\tau)] [m(\tau) + \delta m(\tau)] \beta(\tau) d\tau dt - I(y), \quad (7.4)$$

$$\int_{a+\delta a}^t (m + \delta m) d\tau = F(t), \quad m + \delta m = \int_{a+\delta a}^t \alpha(\tau, t) (m + \delta m) (y + \delta y) d\tau,$$

откуда, с точностью до главных членов,

$$\delta I = - \int_b^T \int_{a(t)}^t \beta(\tau) m(\tau) \delta y(\tau) d\tau dt - \int_b^T \int_{a(t)}^t \nabla_{\beta}(\tau, t) \delta m(\tau) d\tau dt,$$

$$\nabla_{\beta}(\tau, t) = [1 - y(a(t))] \beta(a(t)) - [1 - y(\tau)] \beta(\tau),$$

$$\delta m(t) = \int_{a(t)}^t \Delta_{\alpha}(\tau, t) \delta m(\tau) d\tau + \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) m(\tau) \delta y(\tau) d\tau, \quad (7.5)$$

$$\Delta_{\alpha}(\tau, t) = \alpha(\tau, t) y(\tau) - \alpha(a(t), t) y(a(t)),$$

$$\delta a(t) = \frac{1}{m(a(t))} \int_{a(t)}^t \delta m(\tau) d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования и учитывая то, что  $\delta y(\tau) = 0$  (и  $\delta m(\tau) = 0$ ),  $\tau < b$ , получаем

$$\delta I = - \int_b^T \int_{\mathcal{J}(\tau, T)} dt \beta(\tau) m(\tau) \delta y(\tau) d\tau - \int_b^T \int_{\mathcal{J}(\tau, T)} \nabla_{\beta}(\tau_1, t) dt \delta m(\tau_1) d\tau_1, \quad (7.6)$$

$$\delta m(t) = \int_{\hat{a}(t)}^t \Delta_{\alpha}(\tau, t) \delta m(\tau) d\tau + \int_{\hat{a}(t)}^t \alpha(\tau, t) m(\tau) \delta y(\tau) d\tau,$$

$$\hat{a}(t) = \begin{cases} a(t), & t > a^{-1}(b), \\ b, & b \leq t \leq a^{-1}(b), \end{cases} \quad (7.7)$$

где контур интегрирования  $\mathcal{J}(\tau, T)$  изображен на рис. 7.1. Уравнение (7) относительно  $\delta m$  можно рассматривать как уравнение Вольтерра, продолжив значения  $\Delta_{\alpha}(\tau, t)$  нулем за пределы кривой  $\tau = a(t)$  вплоть до прямой  $\tau = b$ . Обратив оператор Вольтерра,

найдем

$$\delta m(t) = \int_{\hat{a}(t)}^t \alpha(\tau, t) m(\tau) \delta y(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\hat{a}^{k+2}(t)}^t \int_{\mathcal{F}_k^*(\tau, t)} \Delta_{\alpha, k+1}(v, t) \alpha(\tau, v) dv m(\tau) \delta y(\tau) d\tau,$$

$$\Delta_{\alpha, 1} = \Delta_{\alpha}, \Delta_{\alpha, k+1}(v, t) = \int_{\mathcal{F}_k(v, t)} \Delta_{\alpha}(z, t) \Delta_{\alpha, k}(v, z) dz,$$

$$k = 1, 2, \dots, \hat{a}^k(t) = \hat{a}(\hat{a}^{k-1}(t)),$$
(7.8)

$$\mathcal{F}_k^*(\tau, t) = \begin{cases} \mathcal{F}(\tau, t) - [\tau, \hat{a}^{k+1}(t)], & \hat{a}^{k+2}(t) \leq \tau \leq \hat{a}^{k+1}(t), \\ \mathcal{F}(\tau, t), & \tau \geq \hat{a}^{k+1}(t), \end{cases}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_k(v, t) = \begin{cases} \mathcal{F}_k(v, t) - [v, \hat{a}(t)], & \hat{a}^{k+1}(t) \leq v \leq \hat{a}(t), \\ [v, t], & t \geq v \geq \hat{a}(t), \end{cases}$$

где  $\mathcal{F}_k(v, T)$  — контуры, аналогичные  $J(v, T)$ , с заменой  $v = a(t)$  и  $a^{-1}(b)$  соответственно на  $v = a^k(t)$  и  $a^{-k}(b)$ ,  $\mathcal{F}_k(\tau, T) \equiv [\tau, T]$  для всех таких  $k$ , что  $a^{-k}(b) \geq T$ . Заметим, что все  $\hat{a}^k(t)$ , начиная с некоторого  $k$ , зависящего от  $t$ , будут совпадать с  $b$ . Подставив (8) в (6) и еще раз поменяв порядок интегрирования, окончательно получим

$$\delta I = \int_b^T dt \beta(\tau) +$$

$$+ \int_{\mathcal{F}(\tau, T)} \int_{\mathcal{F}(\tau_1, T)} \nabla_{\beta}(\tau_1, t) dt \alpha(\tau, \tau_1) d\tau_1 +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathcal{F}_{k+2}(\tau, T)} \int_{\mathcal{F}(\tau_1, T)} \nabla_{\beta}(\tau, t) dt \int_{\mathcal{F}_k^*(\tau, \tau_1)} \Delta_{\alpha, k+1}(v, \tau_1) \times$$

$$\times \alpha(\tau, v) dv d\tau_1 \Big] m(\tau) \delta y(\tau) d\tau. \quad (7.9)$$

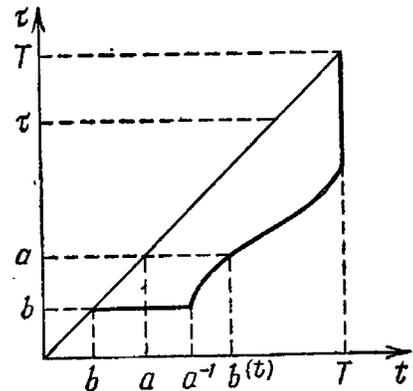


Рис. 7.1.

Множитель при  $\delta y(\tau)$  под интегралом (9) будет градиентом  $\mathcal{J}I(y, \tau)$  функционала (1) в силу ограничений типа равенства в (2).

Рассмотрим ряд случаев поведения  $\delta I$  в силу (6) и (9), предполагая, что  $\alpha(\tau, t)$  не возрастает с ростом  $t$ , а  $\alpha(\tau, \tau)$  не убывает с ростом  $\tau$ .

1.  $T = b + \Delta t$ ,  $\Delta t$  мало и будет оценено ниже. При условии  $\Delta(t) < a^{-1}(b) - b$  имеем

$$\delta I = \int_b^T \left[ (T - \tau) \beta(\tau) + \int_{\tau}^T \int_{\tau_1}^T \Delta_{\beta}(\tau_1, t) dt \alpha(\tau, \tau_1) d\tau_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau}^T \int_{\tau_1}^T \nabla_{\beta}(\tau_1, t) dt \int_{\tau}^{\tau_1} \Delta_{\alpha, k+1}(v, \tau_1) \alpha(v, v) dv d\tau_1 \right] \times \\ \times m(\tau) (-\delta y(\tau)) d\tau, \quad \Delta_{\alpha, k+1}(v, \tau_1) = \int_v^{\tau_1} \Delta_{\alpha}(z, \tau_1) \Delta_{\alpha, k}(v, z) dz. \quad (7.10)$$

Используя математическую индукцию, нетрудно получить оценку

$$\int_{\tau}^{\tau_1} \Delta_{\alpha, k+1}(v, \tau_1) dv \leq \frac{[\alpha(\tau_1, \tau_1) (\tau_1 - \tau)]^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{[\alpha(T, T) (T - \tau)]^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (7.11)$$

Поэтому

$$\delta I \geq \int_b^T \left[ 1 - \frac{\beta(T)}{\beta(b)} \alpha(T, T) e^{\alpha(T, T) \Delta t} \Delta t \right] (T - \tau) \beta(\tau) (-\delta y(\tau)) d\tau. \quad (7.12)$$

Заметив, что из (2) вытекает

$$t - a(t) \geq \frac{1}{\alpha(t, t)}, \quad (7.13)$$

при условии

$$\alpha(T, T) \Delta t e^{\alpha(T, T) \Delta t} \leq \frac{\beta(b)}{\beta(T)} \quad (7.14)$$

будем всегда иметь

$$\delta I \geq 0, \quad \delta y \leq 0. \quad (7.15)$$

Таким образом, для достаточно малого отрезка планирования, удовлетворяющего неравенству (14), функционал (1) возрастает при уменьшении  $y(\tau)$  вплоть до минимально допустимых значений в силу ограничений типа неравенства в (2).

2.  $\Delta_{\alpha}(\tau, t), \Delta_{\beta}(\tau, t) \geq 0$ . В этом случае  $\delta y$  и  $\delta m$  имеют одинаковые знаки, а  $\delta I \geq 0$  при  $\delta y \leq 0$ . В частности, независимо от  $T - b$  всегда

$$\delta I(y) \geq 0, \quad \delta y \leq 0. \quad (7.16)$$

Для того чтобы выполнялся этот случай, достаточно возрастания  $\alpha(\tau, t) y(\tau)$  и убывания  $\beta(\tau) (1 - y(\tau))$  как функций от  $\tau$ .

3.  $y(\tau) = \hat{y}(\tau) \equiv y \min$  — минимально допустимое значение — решение уравнения

$$\int_b^t \alpha(v, t) f(\tau) \hat{y}(\tau) d\tau = f(t) - \int_0^b \alpha(v, t) m_0(v) y_0(\tau) d\tau,$$

$$\int_0^b \alpha(\tau, b) m_0(\tau) y_0(\tau) d\tau = f(b). \quad (7.17)$$

При небольшом  $T - b \hat{y}(\tau)$  доставляет максимальное значение функционалу (1). Покажем, что при достаточно большом  $T - b$  и при росте  $\beta(\tau)$  функционал может возрастать при увеличении  $y(\tau)$ , т. е. при  $\delta y \geq 0$ . Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, T) = & \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau}^T (T - \tau_1) \frac{-\nabla_{\beta}(\tau_1, t)}{\beta(\tau)} \times \\ & \times \int_{\tau}^{\tau_1} \Delta_{\alpha, k}(v, \tau_1) \alpha(\tau, v) dv d\tau_1 - (T - \tau), \end{aligned}$$

$$\delta I(\hat{y}) = \int_b^T \varphi(\tau, T) \beta(\tau) m(\tau) \delta y(\tau) d\tau,$$

$$\int_{\tau}^{\tau_1} \Delta_{\alpha, 0}(v, \tau_1) \alpha(\tau, v) dv = \alpha(\tau, \tau_1), \quad (7.18)$$

$$\frac{-\nabla_{\beta}(T, t)}{\beta(\tau)} = (1 - \hat{y}(\tau_1)) \frac{\beta(\tau_1)}{\beta(\tau)} - (1 - y_0(0)) \frac{\beta(0)}{\beta(\tau)}.$$

Имеем

$$\varphi(T, T) = 0, \quad -\varphi'_{\tau}(T, T) = \varphi'_T(T, T) = 1,$$

$$\begin{aligned} \varphi'_{\tau}(\tau, T) = & 1 + \frac{\nabla_{\beta}(\tau, t)}{\beta(\tau)} \alpha(\tau, \tau) (T - \tau) + \\ & + \frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau}^T (T - \tau_1) \frac{\nabla_{\beta}(\tau_1, t)}{\beta(\tau)} \int_{\tau}^{\tau_1} \Delta_{\alpha, k}(v, \tau_1) \alpha(\tau, v) dv d\tau_1 + \\ & + \int_{\tau}^T (T - \tau_1) \frac{\nabla_{\beta}(\tau_1, t)}{\beta(\tau)} \left\{ [\Delta_{\alpha}(\tau, \tau_1) \alpha(\tau, \tau) - \alpha'_{\tau}(\tau, \tau_1)] + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\infty} [\Delta_{\alpha, k+2}(\tau, \tau_1) \alpha(\tau, \tau) - \varphi'_T(\tau, T)] = \right. \\ & \left. = \int_{\tau}^T \frac{-\nabla_{\beta}(\tau_1, t)}{\beta(\tau)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau}^{\tau_1} \Delta_{\alpha, k}(v, \tau_1) \alpha(\tau, v) dv d\tau_1 - 1. \quad (7.19) \right. \end{aligned}$$

Далее, в силу (17)

$$\begin{aligned} \alpha(t, t) f(t) \hat{y}(t) = \\ = f'(t) + \int_0^b -\alpha'_t(\tau, t) m_0(\tau) y_0(\tau) d\tau + \int_b^t -\alpha'_t(\tau, t) f(\tau) \hat{y}(\tau) d\tau, \quad (7.20) \end{aligned}$$

откуда

$$1 - \varepsilon_1 \geq \frac{f'(t)}{\alpha(t, t) f(t)} + \frac{c_\alpha^+}{\alpha(t, t)} \geq \hat{y}(t) \geq \frac{f'(t)}{\alpha(t, t) f(t)} + \frac{c_\alpha^-}{\alpha(t, t)} \geq \frac{c_f + c_\alpha^-}{\alpha(t, t)}, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad (7.21)$$

если выполнены условия

$$c_\alpha^+ \alpha(\tau, t) \geq -\alpha'_t(\tau, t) \geq c_\alpha^- \alpha(\tau, t), \\ \frac{f'(t)}{\alpha(t, t) f(t)} + \frac{c_\alpha^+}{\alpha(t, t)} \leq 1 - \varepsilon_1, \quad \frac{f'(t)}{f(t)} \geq c_1. \quad (7.22)$$

Предположим еще, что

$$\alpha'_\tau(\tau, t) \leq c_\alpha^+ \alpha(\tau, t), \quad \beta(t) \leq \beta(\tau) e^{c\beta(t-\tau)}, \quad c_\alpha^- + c_f > c_\alpha^+, \quad (7.23)$$

$$\frac{\alpha(\tau, \tau)}{\alpha(\tau, t)} \alpha(0, t) \leq \omega(\tau^{-1}), \quad t \geq \tau, \quad \omega(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0,$$

и найдем такое  $\tau_0$ , для которого

$$-\nabla_\beta(\tau_1, t) \geq 0, \quad \frac{\Delta_\alpha(\tau, \tau_1)}{\alpha(\tau, \tau_1)} = \hat{y}(\tau) - \frac{\alpha(0, \tau_1)}{\alpha(\tau, \tau_1)} y_0(0) \geq \frac{c_\alpha^- + c_f - \omega(\tau^{-1})}{\alpha(\tau, \tau)} \geq \frac{c_\alpha^+ + \varepsilon_2}{\alpha(\tau, \tau)}, \\ \varepsilon_2 < c_\alpha^- + c_f - c_\alpha^+, \quad \tau_1 \geq \tau \geq \tau_0. \quad (7.24)$$

Тогда по индукции при всех  $k \geq 0$

$$\int_\tau^{\tau_1} \Delta_{\alpha, k}(v, \tau_1) \alpha(\tau, v) dv \geq (c_\alpha^+ + \varepsilon_2)^k e^{-c_\alpha^+(\tau_1-\tau)} \frac{(\tau_1-\tau)^k}{k!} \alpha(\tau, \tau), \\ \Delta_{\alpha, k+2}(\tau, \tau_1) \alpha(\tau, \tau) - \int_\tau^{\tau_1} \Delta_{\alpha, k+1}(v, \tau_1) \alpha'_\tau(\tau, v) dv = \\ = \int_\tau^{\tau_1} \Delta_\alpha(z, \tau_1) \left[ \Delta_{\alpha, k+1}(\tau, z) d(\tau, \tau) - \int_\tau^z \Delta_{\alpha, k}(v, z) d'_\tau(\tau, v) dv \right] dz \geq 0, \\ \Delta_{\alpha, 1}(\tau, \tau_1) \alpha(\tau, \tau) - \alpha'_\tau(\tau, \tau_1) \geq \alpha(\tau, \tau_1) \varepsilon_2 > 0, \quad (7.25) \\ \tau_1 \geq \tau \geq \tau_0.$$

Поэтому, с точностью до главных членов,

$$\varphi(b, T) \geq \int_{\tau_0}^T (T - \tau_1) [1 - \hat{y}(\tau_1)] \frac{\beta(\tau_1)}{\beta(b)} e^{\varepsilon_2(\tau_1-\tau_0)} d\tau_1 \alpha(b, b) \geq \\ \geq \varepsilon_1 \alpha(b, b) \int_{\tau_0}^T e^{c\beta(\tau_1-b) + \varepsilon_2(\tau_1-\tau_0)} (T - \tau_1) d\tau_1 \sim \frac{e^{-\varepsilon_2(\tau_0-b)} \varepsilon_1 \alpha(b, b)}{(c\beta + \varepsilon_2)^2} e^{(c\beta + \varepsilon_2)(T-b)},$$

$$\begin{aligned}
\varphi'_\tau(\tau, T) &\leq -\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau)} \varepsilon_1 \int_{\tau_0}^{\tau} (T - \tau_1) e^{c\beta(\tau_1 - \tau) + \varepsilon_2(\tau_1 - \tau)} d\tau_1 \alpha(\tau, \tau) \sim \\
&\sim -\frac{\beta'(\tau) \alpha(\tau, \tau) \varepsilon_1}{\beta(\tau) (c_\beta + \varepsilon_2)^2} e^{c\beta(T - \tau) + \varepsilon_2(T - \hat{\tau})}, \quad \varphi'_T(\tau, T) \geq \\
&\geq \varepsilon_1 \int_{\tau_0}^{\tau} e^{c\beta(\tau_1 - \tau) + \varepsilon_2(\tau_1 - \hat{\tau})} d\tau_1 \alpha(\tau, \tau) \sim \frac{\varepsilon_1 \alpha(\tau, \tau)}{c_\beta + \varepsilon_2} e^{c\beta(T - \tau) + \varepsilon_2(T - \hat{\tau})},
\end{aligned}
\tag{7.26}$$

$$\begin{aligned}
\tau = \tau_0, \quad \tau \leq \tau_0, \quad \tau = \tau, \quad \tau > \tau_0, \\
\tau \in [b, T_q], \quad q < 1.
\end{aligned}$$

Полученные соотношения означают, что для всех достаточно больших  $T - b$  справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
\varphi'_\tau(\tau, T) \leq 0, \quad \varphi'_T(\tau, T) \geq 0, \quad \tau \in [b, T_q], \\
\varphi(\tau, T) \geq 0, \quad \tau \in [b, T_{q_1}], \quad 0 < q_1 < q < 1.
\end{aligned}
\tag{7.27}$$

Это вместе с результатом случая 1 подтверждает вид и свойства градиента  $\partial I(\hat{y}, \tau)$ , изображенные на рис. 4.1.

С учетом указанных предположений для максимизации выхода продуктов потребления на достаточно большом отрезке времени можно считать доказанной необходимость возрастания доли числа рабочих места в  $A$  по сравнению с той минимально допустимой долей, которая максимизирует выход продуктов потребления на небольшом отрезке времени планирования.

**1.3. Численное исследование.** Будем отыскивать приближенное распределение  $y(\tau)$  ( $\tau \in [b, T]$ ) в классе кусочно-постоянных распределений:

$$y(\tau) = y_s, \quad \tau \in \Delta_s \equiv [b + (s - 1)\Delta T, b + s\Delta T] \quad s = \overline{1, R}, \quad R\Delta T = T - b.
\tag{7.28}$$

За начальное приближение возьмем ( $f(t) \geq 0$ )

$$y_s^{(0)} = \frac{f(b + s\Delta T) - \sum_{r=1}^{s-1} y_r^{(0)} \int_{\Delta r} \alpha(\tau, b + s\Delta T) f(\tau) d\tau}{\int_{\Delta s} \alpha(\tau, b + s\Delta T) f(\tau) d\tau}, \quad s = \overline{1, R}, \tag{7.29}$$

которое дает приближенное решение уравнения в (17) и тем самым — искомое приближенное распределение, если  $\alpha, y_0, \beta = \text{const}$  и  $m_0(b) = f(b)$ . Для дальнейшей максимизации  $I(y)$  (или, что то же самое, минимизации  $-I(y)$ ) по искомым  $R$  значениям  $y_s$  ( $s = \overline{1, R}$ )

применим методы [121, 256], согласно которым задача условной минимизации сводится к безусловной введением вспомогательной неизвестной: искомого минимального значения  $I^*$ , затем к отысканию этого значения и соответствующего оптимального распределения  $\{y_s^*\}_1^R$  комбинированным алгоритмом быстрого спуска и случайного поиска. При этом на  $j$ -й итерации ( $j \geq 0$ )  $a^{(j)}(t)$  и  $m^{(j)}(t)$  находятся путем решения системы

$$\frac{da}{dt} = \frac{m(t) - f(t)}{m(a(t))}, \quad t \in [b, T], \quad a(b) = a_0(0), \quad (7.30)$$

$$m(t) = \int_{a(t)}^t \alpha(\tau, t) y^{(j)}(\tau) m(\tau) d\tau, \\ y^{(j)}(\tau) = y_s^{(j)}, \quad \tau \in \Delta_s,$$

по дискретной схеме, аналогичной схеме Эйлера для решения задачи Коши. Существенной положительной особенностью выбранной схемы [15] является то, что она будет порядка  $h^3$  на шаге дискретизации  $h$  при условии, что  $\alpha(\tau, t)$  и  $m(t)$  удовлетворяют по переменной  $t$  условию Липшица, и будет иметь порядок  $h\omega_\alpha(h)\omega_m(h)$  в общем случае, где  $\omega$  — знак модуля непрерывности. Этот факт достигается за счет применения формулы типа

$$\int_t^{t+h} \varphi(u) \varphi(u) du = h^{-1} \int_t^{t+h} \varphi(u) d(u) \int_t^{t+h} \varphi(u) du + \Delta, \\ |\Delta| \leq h\omega_\varphi(h)\omega_\varphi(h). \quad (7.31)$$

Соответствующее значение функционала вычисляется по формуле

$$I_j \equiv I(y^{(j)}) = \sum_{i=0}^{N-1} v_i (t_{i+1} - t_i) + \Delta', \quad E_0 = b, \\ t_N = T, \quad v_{i+1} = v_i + \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2}, \\ \Delta_i = (1 - \bar{y}_i^{(j)}) \bar{m}_i \bar{\beta}_i - (1 - \bar{y}_{a_i}^{(j)}) (\bar{m}_i - \bar{f}_i) \bar{\beta}_{a_i}, \\ v_0 = \sum_{i=s}^0 (1 - \bar{y}_{0i}) \bar{m}_{0i} \bar{\beta}_i + \frac{\Delta_0}{2}, \quad \bar{*}_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} * (t) dt, \\ \bar{*}_i = * (t_i), \quad \bar{*}_{a_i} = \frac{1}{a_{i+1} - a_i} \int_{a_i}^{a_{i+1}} * (t) dt, \quad (7.32)$$

$$\Delta' = O(h^2) \leq 0,01 I_j, \quad h = \max_i (t_{i+1} - t_i), \quad t - s = 0.$$

Указанный численный метод реализован на ЭВМ БЭСМ-6 [115].

Для решения задачи (30) применим также метод простой итерации, описанный в гл. 5. Соответствующая программа для ЕС ЭВМ, использующая для минимизации  $I(y)$  метод скользящего допуска, содержится в [80, 267, 284]. Сущность другого [114] метода состоит в применении метода штрафных функций для сведения условной минимизации к безусловной и поиска искомого минимума

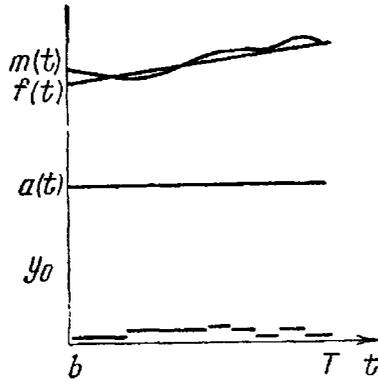


Рис. 7.2.

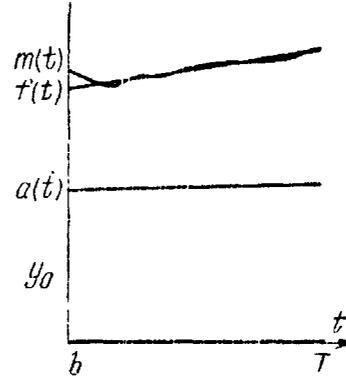


Рис. 7.3.

методом локальных вариаций функционала. В случае весьма большого  $\alpha$  ( $T - b$ ) целесообразно применять специальные методы [96, 244].

Приведем результаты программирования и счета на ЭВМ. Вся программа разбита на две части [115]: подпрограмму задания и получения исходных данных и ведущую подпрограмму. Первая содержит набор исходных параметров; предусматривает ряд способов задания входных функций  $\alpha(\tau, t)$ ,  $\beta(\tau)$ ,  $f(t)$ ,  $y_0(\tau)$ ,  $m_0(\tau)$ , в том числе задание  $\alpha(\tau, t)$  в виде  $\alpha e^{c\alpha(\tau-t)} \cos[\omega(t-\tau) + \varphi]$ ; формирует аппроксимацию  $y(\tau)$  в виде кусочно-постоянной функции, полигона или квадратичного сплайна; вызывает ведущую подпрограмму.

Вторая вычисляет условие согласования решений системы (30) при  $t = b$  и  $j = 0$ ; построение конкретной сетки; решение задачи; построение таблиц и графиков искомых функций  $a(t)$ ,  $m(t)$ ,  $y(t)$ .

Примеры результатов счета на ЭВМ изображены на рис. 7.2 — 7.5. Во всех случаях  $\alpha(\tau, t) = \alpha e^{0,02(\tau-t)}$ ,  $\beta(\tau) = e^{0,04\tau}$ ,  $f(t) = 2,4 \cdot 10^6 e^{0,02t}$ ,  $y_0 = 0,7$ ;  $m_0(t) = 2,6 \cdot 10^6 e^{0,01t}$ ,  $T - b = 5$ . Разные значения  $\alpha = 1/4, 2, 4, 8$  можно интерпретировать как различные значения  $T - b$ , причем первым двум соответствует случай достаточно малых  $T - b$ , а вторым — достаточно больших.

1.4. Экономические следствия. Введем функцию потребления

$$c(t) = \int_{a(t)}^t [1 - y(\tau)] \beta(\tau) m(\tau) d\tau. \quad (7.33)$$

Исследование ее поведения с учетом (2) также представляет

значительный интерес. При  $\alpha, \beta = \text{const}$  имеем

$$\frac{c(t)}{\beta} + \frac{m(t)}{\alpha} = F(t). \quad (7.34)$$

Путем исключения  $t$  можно определить зависимость между  $c$  и

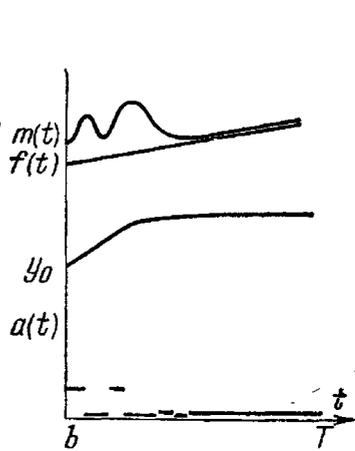


Рис. 7.4.

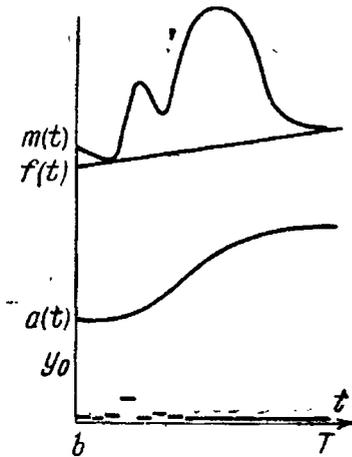


Рис. 7.5.

$m$ , если известно поведение  $y(\tau)$  или  $a(\tau)$ . Пусть, например,

$$a(t) = kt, \quad 0 \leq k < 1. \quad (7.35)$$

Тогда при некотором  $s = s(T - b)$

$$\varphi_s(t) \equiv \sum_{i=0}^s f(k^i t) + m_0(k^{s+1}t) = m(t), \quad t \in [b, T], \quad (7.36)$$

откуда  $t = \varphi_s^{-1}(m)$  и

$$\frac{c}{\beta} + \frac{m}{\alpha} = F[\varphi_s^{-1}(m)]. \quad (7.37)$$

В системе координат  $m, c$  уравнение (37) представляет некоторую кривую.

Путем выбора определенного поведения функций можно получить различные режимы поведения  $m(t)$ . В частности, могут быть колебательные, периодические или квазистохастические (странные аттракторы) типы в конечномерном случае, солитонного типа — в континуальном случае. Каждый из этих режимов может иметь определенную интерпретацию в экономических исследованиях. Так, например, случай квазистохастического поведения может быть интерпретирован, по-видимому, как экономический кризис.

Одним из основных экономических следствий является то, что практически любой режим функционирования развивающейся системы, в том числе наперед заданный «наилучший» или «рекордный» (с разумными ограничениями), может быть достигнут путем существенного увеличения относительной доли ресурса  $y(\tau)$  ( $y(\tau)$  близко к 1) в начале интервала  $(T - b)$  по сравнению с долей  $y(\tau)$  в конце интервала  $(T - b)$ . Это соответствует тому, что для достижения максимального удовлетворения продуктами в отраслях производств группы Б на достаточно большом интервале времени

( $T - b$ ) (соответствует продолжительности жизни двух и более поколений) необходимо большую долю ресурсов  $y(T)$  в начале интервала ( $T - b$ ) направлять в отрасли производств группы А. К концу интервала относительная доля ресурсов уменьшается, опережающий рост производства продуктов достигается в отраслях производств группы Б. Этой тактикой достигается максимизация количества продуктов в отраслях производств группы Б на всем интервале ( $T - b$ ).

## § 2. Моделирование вычислительного процесса

*Вычислительный процесс* (ВП), понимаемый как процесс производства программ, обеспечивающий эффективное функционирование имеющейся вычислительной техники, и процесс решения набора задач внешнего пользователя, можно рассматривать как искусственную развивающуюся систему. Ниже сделана попытка описания вычислительного процесса на основе рассматриваемого класса динамических моделей.

Основными характеристиками ВП являются объемы и скорости производства соответствующего программного обеспечения (ПО), предназначенного для выполнения различных функций. За единицу измерения объема программного обеспечения выберем усредненный программный модуль (УПМ) или элементарную команду [80]. Конкретное значение УПМ (например, в операторах или макрокомандах для соответствующей ЭВМ) может быть оценено на основании статистических данных о работе ВЦ. Потребность в подобной усредненной характеристике возникает вследствие необходимости сравнения разнородного ПО. Для наиболее полного выявления различных сторон ВП, а также качественного и количественного его описания моделирование будем проводить на нескольких уровнях.

**2.1. Моделирование структуры программного обеспечения.** Этот уровень дает возможность выявить структуру взаимосвязи основных видов ПО и качественно описать стратегию ВП, оптимального по разным критериям. Разделим программное обеспечение на основные группы: общее и прикладное ПО.

В общее ПО входят общесистемные программы, необходимые для организации ВП. Эти программы реализуют языковое и операционное взаимодействие вычислительных систем с пользователями. С целью освобождения программиста от рутинной работы и повышения его производительности над машинным языком ЭВМ надстроена сложная иерархия системных программ, выполняющих различные функции в общении человека и ЭВМ. Общее ПО для ЭВМ третьего поколения имеет объем в миллионы машинных команд и непрерывно совершенствуется.

Прикладное ПО состоит из программ, обеспечивающих выполнение конкретных специализированных функций ЭВМ (произведение научно-технических расчетов, сбор и обработка данных, управление технологическими процессами и пр.). Наиболее совершенной формой прикладного ПО являются пакеты прикладных программ (ППП).

На рассматриваемом уровне динамика ВП может быть описана двухпродуктовой динамической моделью (2.1)—(2.3). Функции, входящие в модель, имеют следующую интерпретацию:  $m(t)$  — скорость производства всего ВП (количество УПМ ПО, производимых за единицу времени);  $y(t)$  — относительная доля общего ПО во всем объеме ПО, производимого в момент  $t$  (тогда  $y(t)m(t)$  и  $[1 - y(\tau)]m(\tau)$  — скорости производства соответственно общего и прикладного ПО);  $a(t)$  — временная граница ликвидации устаревшего ПО (программы, созданные в момент  $\tau < a(t)$ , в момент  $t$  не используются),  $c(t)$  — скорость производства расчетов и программ для внешних заказчиков;  $F_1(t)$  — объем работающего ПО в момент  $t$  (состоит из общего ПО  $\int_{a(t)}^t y(\tau)m(\tau)d\tau$  и прикладного ПО  $\int_{a(t)}^t [1 - y(\tau)]m(\tau)d\tau$ );  $F_2(t)$  — объем расчета и программ (для заказчиков), произведенных с начала планового периода (т. е. на отрезке  $[t_0, t]$ );  $\alpha(\tau, t)$  — производительность общего ПО: число УПМ ПО, созданных за единицу времени, начиная с момента  $t$ , при помощи общего ПО, созданного в момент  $\tau$ , отнесенное к объему последнего;  $\beta(\tau, t)$  — производительность прикладного ПО: объем расчетов (или число программ), производимых для заказчика за единицу времени, начиная с момента  $t$ , при помощи прикладного ПО, созданного в момент  $\tau$ , отнесенный к его объему.

Можно ввести дополнительные функции:  $F_{\text{опо}}(t) = \int_{t_0}^t y(\tau)m(\tau)d\tau$  — объем общего ПО;  $F_{\text{ппо}}(t) = \int_{t_0}^t [1 - y(\tau)]m(\tau)d\tau$  — объем прикладного ПО;  $F'_{\text{по}}(t) = F_{\text{опо}}(t) + F_{\text{ппо}}(t)$  — объем всего ПО, произведенного с начала планового периода. Отсчет времени  $t = 0$  начинается с момента создания самой старой из используемых в момент  $t_0$  программ ПО.

Заметим, что мы различаем прикладное ПО, созданное для самого ВЦ, и программы, производимые для внешнего заказчика.

На основании описанной модели можно исследовать различные режимы функционирования ВП и оптимизировать его работу по различным критериям. В частности, для моделирования ВП имеет смысл оптимизационная задача (1), описанная в § 1, поскольку объем для работающего ПО во многих случаях можно считать заданным. При этом предполагаем, что производительность более современных программ выше, чем их предшественниц, т. е. если создана какая-либо программа, то более старые программы аналогичного назначения не используются (это эквивалентно ограничению  $da/dt \geq 0$ ). Указанная оптимизационная задача для ВП состоит в следующем: при заданном объеме работающего ПО  $F_1(t)$  определить относительную долю  $y(t)$  общего ПО во всем произво-

димом ПО, при которой достигается максимальный объем расчетов для внешнего заказчика  $F_2(t)$  за некоторый плановый период  $[t_0, T]$ . Для этой задачи справедлив фундаментальный результат, установленный в работе [73] и состоящий применительно к ВП в следующем. Если плановый период небольшой, то  $\max F_2(T)$  достигается тогда, когда доля общего ПО во всем производимом ПО минимальна. При этом функция  $a(t)$  постоянна, т. е. используется все ПО, имевшиеся к началу планового периода. Если же производительность более современного прикладного ПО выше (т. е. функция  $\beta(\tau, t)$  возрастает по  $\tau$ ) и плановый период достаточно продолжителен, то для достижения  $\max F_2(t)$  следует увеличить долю общего ПО во всем ПО в начале планового периода и уменьшить ее до минимально возможной в конце. При этом функция  $a(t)$  возрастает, т. е. производится замена старого ПО более эффективным новым ПО. Не менее важное значение при моделировании ВП имеет оптимизационная задача (2.54), заключающаяся в следующем: при заданном объеме расчетов для пользователя на некотором плановом периоде  $[t_0, T]$  определить долю  $y(t)$  общего ПО во всем ПО, при которой объем всего работающего ПО минимален. Результат, аналогичный приведенному выше, для этой задачи показан в [81] на основании изучения ее асимптотического поведения. Более содержательные задачи будут, очевидно, оптимизировать взвешенную сумму нескольких критериев.

Для численного моделирования ВП на этом уровне можно использовать достаточно разработанные приближенные методы и программы, описанные в гл. 5.

Основная трудность, возникающая при предложенном подходе, состоит в определении производительности ПО  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$ , которая должна быть осредненной по разнородному ПО, различным ЭВМ, различным видам прикладных расчетов и т. д. В некоторой степени эта трудность преодолевается при более подробном моделировании ВП, описанном ниже.

**2.2. Моделирование работы гипотетической сети ЭВМ.** Этот уровень моделирования позволяет учитывать структуру машинного парка, наличие квалифицированных кадров для решения определенных задач, а также территориальное размещение ЭВМ.

Сети ЭВМ, или сети ВЦ, являются наиболее перспективным способом организации вычислительных работ [79]. Для рассматриваемого класса моделей достоинство сети ВЦ заключается в том, что сеть позволяет снизить расходы на создание программного обеспечения, поскольку созданное в одном ВЦ программное обеспечение оказывается доступным для всех ВЦ сети. В одном пункте для описания динамики гипотетической сети ВЦ принимается многопродуктовая модель (см. гл. 2).

Предположим, что сеть ВЦ состоит из  $r$  ВЦ, оборудованных  $p$  типами ЭВМ. К ЭВМ, машинам одного типа, будем относить ЭВМ, программно-совместимые на уровне машинных команд. Пусть  $N_{kl}$ —число ЭВМ  $l$ -го типа в  $k$ -м ВЦ ( $l = \overline{1, p}$ ;  $k = \overline{1, r}$ ). При наличии

ЭВМ одного типа, но различной мощности за единицу измерения следует взять некоторую машину одной мощности.

Предположим также, что сеть ВЦ производит  $k$  видов *полезного продукта* (это могут быть научно-технические расчеты, календарное планирование, статистическая обработка информации, информационно-справочный поиск и т.д.). В соответствии с этим будем разделять все ПО, имеющееся в сети ВЦ, на общее ПО для ЭВМ  $j$ -го типа и прикладное ПО для ЭВМ  $j$ -го типа, предназначенное для производства  $k$ -го полезного продукта ( $j = \overline{1, p}$ ;  $k = \overline{1, n}$ ).

Введем следующие функции:  $m_j(t)$  — скорость производства ПО одной ЭВМ  $j$ -го типа,  $y_{ij}(t)$  — относительная доля общего ПО в объеме всего ПО, производимого в момент  $t$  на одной ЭВМ  $j$ -го типа в  $i$ -м ВЦ,  $z_{sj}^k$  — доля прикладного ПО, предназначенного для «производства»  $k$ -го полезного продукта ( $k = \overline{1, n}$ ),  $c_k(t)$  — скорость производства  $k$ -го продукта во всей сети,  $a_j(t)$  — временная граница ликвидации устаревшего ПО для ЭВМ  $j$ -го типа,  $F_{1j}(t)$  — объем работающего ПО для ЭВМ  $j$ -го типа (состоит из общего ПО для ЭВМ  $j$ -го типа, называемого *операционной системой* ЭВМ:

$$\sum_{i=1}^r N_{ij} \int_{a_j(t)}^t y_{ij}(\tau) m_j(\tau) d\tau, \text{ и } n \text{ видов прикладного ПО для ЭВМ}$$

$$j\text{-го типа: } \sum_{i=1}^r N_{ij} \int_{a_j(t)}^t z_{sj}^k(\tau) m_j(\tau) d\tau, \quad k = \overline{1, n}, \quad F_{2k}(t) \text{ — объем рас-}$$

четов, произведенных с начала планового периода для выполнения  $k$ -й «внешней функции» (объем  $k$ -го полезного продукта),  $\alpha_{ij}(\tau, t)$  — производительность общего ПО для ЭВМ  $j$ -го типа в  $i$ -м ВЦ на одной ЭВМ ( $j$ -го типа),  $\beta_{sj}^k(\tau, t)$  — производительность прикладного ПО для  $k$ -го полезного продукта на одной ЭВМ  $j$ -го типа в  $i$ -м ВЦ.

Производительности  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{sj}^k$  зависят от номера ВЦ, так как в сети ВЦ, кроме больших ВЦ, как правило, входят средние и малые ВЦ, предназначенные для выполнения специализированных функций (например, управление предприятием) и укомплектованные кадрами соответствующей квалификации и профиля. Производительности таких ВЦ, за исключением их основной функции, будут ниже, чем у больших универсальных ВЦ.

Система уравнений, описывающих динамику сети ВЦ, имеет вид

$$m_j(t) = \sum_{i=1}^r N_{ij} \int_{a_j(t)}^t \alpha_{ij}(\tau, t) y_{ij}(\tau) d\tau, \quad j = \overline{1, p}, \quad (7.38)$$

$$c_k(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p N_{ij} \int_{a_j(t)}^t \beta_{sj}^k(\tau, t) z_{sj}^k(\tau) m_j(\tau) d\tau, \quad k = \overline{1, n}, \quad (7.39)$$

$$F_{1j}(t) = \sum_{i=1}^r N_{ij} \int_{a_j(t)}^t m_j(\tau) d\tau, \quad j = \overline{1, p},$$

$$F_{2k}(t) = \int_{t_0}^t c_k(\tau) d\tau, \quad k = \overline{1, n}, \quad (7.40)$$

$$y_{ij}, \quad z_{sj}^k \geq 0, \quad y_{ij} + \sum_{k=1}^n z_{sj}^k = 1, \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, p},$$

$$0 \leq a_j(t) < t, \quad \frac{da_j}{dt} \geq 0. \quad (7.41)$$

Предполагается, что в начальный момент  $t = t_0$  ЭВМ всех типов обеспечены требуемым объемом ПО.

Заметим, что модель (38)—(41) составлена при естественном предположении о том, что на ЭВМ  $j$ -го типа может производиться общее ПО только для ЭВМ  $j$ -го типа. Если это не выполняется (например, если в задачи ВЦ входит отладка на имеющихся в наличии ЭВМ ПО для новых ЭВМ), то модель такой сети ВЦ также может быть составлена на основе многопродуктовой модели (2.17), но будет иметь вид, отличный от (38)—(41).

В рамках модели (38)—(41) можно ставить различные оптимизационные задачи, аналогичные приведенным ранее, а также — более сложные. Управляющими воздействиями на систему при этом являются относительные доли распределения производимого ПО на общее и прикладное (для каждой ЭВМ в каждом ВЦ), т. е. функции  $y_{ij}(t)$ ,  $z_{sj}^k(t)$  ( $i = \overline{1, r}$ ;  $j = \overline{1, p}$ ;  $k = \overline{1, n}$ ). С учетом (41) таких функций будет  $p \times r \times n$ ; следовательно, оптимизационные задачи имеют весьма большую размерность.

Однако в реальной ситуации их размерность может быть значительно понижена посредством предварительного анализа производительностей  $\alpha_{ij}$  и  $\beta_{sj}^k$ , который, как уже отмечалось, показывает, что для малых ВЦ оптимальной загрузкой будет выполнение их основной функции (соответствующая доля  $z_{sj}^k$  должна быть максимально возможной), и оптимизация сводится к распределению долей внутри одного или нескольких больших ВЦ.

**2.3. Об оценке исходных элементов модели.** Наибольшая сложность при применении предложенной модели заключается в определении производительностей  $\alpha_{ij}(\tau, t)$ ,  $\beta_{sj}^k(\tau, t)$ . Основным способом получения этих функций, по-видимому, является исчерпывающий анализ данных о работе каждого ВЦ (и каждой ЭВМ) сети за возможно более длительный период, их статистическая обработка, определение на этой основе функций  $\alpha_{ij}(\tau, t)$  и  $\beta_{sj}^k(\tau, t)$  на прошедшем отрезке времени и их экстраполяция на будущее с учетом современных тенденций развития ПО ЭВМ. Этот вывод подтверждает необходимость включения в комплекс программных средств для моделирования развивающихся систем соответствующих средств обработки данных.

В заключение отметим, что наблюдающееся возрастание доли затрат на создание программного обеспечения ЭВМ во всем объеме

затрат на развитие и эксплуатацию вычислительной техники [80, 119] подтверждает правильность качественных выводов о динамике ВП.

### § 3. Моделирование развития растений

В настоящем параграфе разработаны и исследованы модели роста продуктивности сахарной свеклы (ПСС). Исследование моделей проводится для систем уравнений, в которых одни элементы заданы, а другие являются неизвестными функциями. Кроме того, рассмотрена оптимизационная задача, связанная с динамикой перераспределения ресурсов ассимилятов, идущих в процессе роста и развития растения на компартмент активного метаболизма (КАМ), компартмент запасания (КЗ) и отвал [233, 250, 251а].

**3.1. Модель развития растений (от начала фотосинтеза до конца первого вегетативного периода).** Модель имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 m_1(t) &= \int_0^t \alpha_1(\tau, t) \lambda_1(\tau, t) y_1(\tau) m_1(\tau) d\tau, \\
 M_1(t) &= \int_0^t m_1(\tau) d\tau, \quad c(t) = \int_0^t \beta(\tau, t) \mu(\tau, t) z(\tau) m_1(\tau) d\tau, \\
 C(t) &= \int_{t_0}^t c(\tau) d\tau, \quad s(t) = \int_0^t \sigma(\tau, t) \zeta(\tau, t) [1 - y_1(\tau) \cdot z(\tau)] m_1(\tau) d\tau, \\
 S(t) &= \int_1^t s(\tau) d\tau, \quad 0 \leq y_1, \quad z \leq 1, \quad y_1 + z \leq 1, \quad 0 \leq \lambda_1, \mu, \zeta \leq 1,
 \end{aligned}
 \tag{7.42}$$

$$\begin{aligned}
 P(t) &= P_0 + \int_{t_0}^t [\lambda_1 y_1 + \mu z + (1 - y_1 - z) \zeta] m_1(\tau) d\tau, \quad M = M_1 + S, \\
 p &= P', \quad m = M' = m_1 + s, \quad G = M - P, \quad g = G', \quad f = p + y + c,
 \end{aligned}$$

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + F_0, \quad T \geq t \geq t_0 > 0.$$

Здесь  $m$  — скорость роста количества новой общей биомассы растения;  $c$  — скорость роста количества продуктов, покидающих растение;  $s$  — скорость роста количества запасаемой биомассы;  $y_1 m_1$ ,  $z m_1$ ,  $(1 - y_1 - z) m_1$  — скорости роста количеств биомасс, создающих соответственно  $m_1$ ,  $c$ ,  $s$ ;  $\alpha_1$  — производительность (удельная скорость роста) по каналу  $y_1 m_1 - m_1$ ;  $M_1$  — скорость создания количества новой биомассы  $m_1$  момента  $t$  в расчете на единицу биомассы  $y_1 m_1$  момента  $\tau$ ;  $\sigma$  — производительность по каналу  $(1 - y_1 - z) m_1 - s$ ;  $S$  — скорость создания количества новой биомассы  $s$  момента  $t$  в расчете на единицу биомассы  $(1 - y_1 - z) m_1$

момента  $\tau$ ;  $\beta$  — производительность по каналу  $zm_1 - c$ ;  $C$  — скорость образования новых продуктов  $c$  момента  $t$  в расчете на единицу биомассы  $zm_1$  момента  $\tau$ ;  $\lambda_1, \mu, \zeta$  — коэффициенты интенсивности использования в момент  $t$  продуктов момента  $\tau$ ;  $P(t)$  — масса растения в момент  $t$ ;  $G$  — отвал;  $f$  — скорость поступления субстрата;  $t$  — момент появления листьев растения,  $T$  — конец одного вегетационного периода;  $0$  — момент прорастания семени.

Заметим, что вместо биомассы в ряде приложений целесообразно рассматривать реакционные системы растения (аналог рабочих мест в макроэкономике), состоящие из трех основных компонентов: ферменты, мембраны и пр. (орудия), сахара, глюкоза и пр. (сырье), аденозинтрифосфат и пр. (энергия). Заметим также, что в модели (42) в отличие от общего случая трехпродуктовой модели отсутствуют перекрестные связи между  $c$  и  $s$ , так как  $s$  не относится к функционирующей биомассе. Кроме соотношений (42) будем еще учитывать условие

$$m(t) = kc(t), \quad (7.43)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности ( $k > 0$ ), возникающий в силу того, что неизменные доли состава субстрата идут на  $m$  и  $c$ .

В случае сахарной свеклы основная биомасса образуется в процессе фотосинтеза из углекислого газа  $CO_2$ , азота  $N$ , фосфора  $P$ , калия  $K$  и водорода  $H$ , который является составной частью поступающей воды  $H_2O$ . В процессе гидролиза  $H_2O$  водород  $H$  идет на энергетические нужды растения, а кислород  $O_2$  высвобождается и уходит в атмосферу. Таким образом, имеем [88]

$$\frac{m}{c} = k \simeq \frac{\text{масса } (CO_2) - \text{масса } (NPK) - \text{масса } (H)}{\text{масса } (O_2)} \simeq 2. \quad (7.44)$$

Следует отметить, что и днем, и особенно ночью идет процесс дыхания растения, в результате которого потребляется кислород и выделяется углекислый газ. Однако в этом процессе изменения массы растения практически не происходит.

Диапазоны изменения усредненных значений различных элементов модели (42), (43), а также величин основных продуктов на конец вегетационного периода ( $T$ ), в случае сахарной свеклы приведен в табл. 7.1 (см. [32]).

### 3.2. Частный случай 1. Пусть

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = \mu = 1, \quad y_1, y_2, z = \text{const}, \\ \alpha_1 &= \alpha_1^0 \frac{m_1(\tau) e^{d(\tau-t)}}{M(\tau) y_1}, \\ \beta &= \beta^0 \frac{m_1(\tau) e^{d(\tau-t)}}{M_1(\tau) z}, \\ \sigma &= \sigma^0 \frac{m_1 e^{d(\tau-t)}}{M_1(\tau) (1-y_1-z)}, \end{aligned} \quad (7.45)$$

где  $\alpha^0, \beta^0, \sigma^0$  — константы удельных скоростей,  $d$  — декремент износа биомассы в момент  $t$ , созданной в момент  $\tau$  ( $\tau \leq t$ ). Принятый

вид нелинейностей типичен для биологии [89, 103, 228] и соответствует качественному выводу о том, что при простом росте числа и износе элементов системы ее производительность падает.

С учетом (45) имеем

$$m_1' + dm_1 = \alpha_1^0 \frac{m_1^0}{M_1}, \quad m_1(t_0) = m_{10}, \quad M_1(t_0) = M_{10},$$

$$s' + ds = \sigma^0 \frac{m_1^2}{M_1}, \quad s(t_0) = s_0, \quad S(t_0) = 0,$$

$$c'(t) + dc = \beta^0 \frac{m_1^2}{M_1}, \quad c(t) = c_0, \quad c(t_0) = 0, \quad m = m_1 + s = kc,$$

$$f = m + c, \quad y_1 + y_2 + z = 1, \quad T \geq t \geq t_0 > 0, \quad y_2 = 1 - y_1 - z. \quad (7.46)$$

Положим

$$m_1' = \frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_1}{dM_1} m_1.$$

Тогда

$$m_1 \frac{dm_1}{dM_1} + dm_1 = \alpha_1^0 \frac{m_1^2}{M_1},$$

или

$$\frac{dm_1}{dM_1} - \alpha_1^0 \frac{m_1}{M_1} = -d,$$

откуда при  $\alpha_1^0 \neq 1$

$$m_1 \equiv \frac{dM_1}{dt} = c \left( \frac{M_1}{M_{10}} \right)^{\alpha_1^0} - \frac{d}{1 - \alpha_1^0} M_1, \quad c = m_{10} + \frac{d}{1 - \alpha_1^0} M_{10},$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \left[ M_{10}^{(1-\alpha_1^0)} + \frac{(1-\alpha_1^0) m_{10}}{M_{10}^{\alpha_1^0 d}} (1 - e^{-d(t-t_0)}) \right] \frac{1}{1 - \alpha_1^0} = \\ &= M_{10} \left[ 1 + \frac{(1-\alpha_1^0) m_{10}}{M_{10} d} (1 - e^{-d(t-t_0)}) \right] \frac{1}{1 - \alpha_1^0}, \end{aligned}$$

$$m_1 = m_{10} \left[ 1 + (1 - \alpha_1^0) \frac{m_{10}}{M_{10}} \cdot \frac{1 - e^{-d(t-t_0)}}{d} \right]^{\alpha_1^0 / (1 - \alpha_1^0)} e^{-d(t-t_0)},$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{\sigma^0}{\alpha_1^0} m_{10} \left\{ \left[ 1 + (1 - \alpha_1^0) \frac{m_{10}}{M_{10}} \cdot \frac{1 - e^{-d(t-t_0)}}{d} \right]^{d/(1-\alpha_1^0)} - 1 \right\} e^{-d(t-t_0)} + \\ &+ s_0 e^{-d(t-t_0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sigma^0}{\alpha_1^0} M_{10} \left\{ \left[ 1 + (1 - \alpha_1^0) \frac{m_{10}}{M_{10}} \cdot \frac{1 - e^{-d(t-t_0)}}{d} \right]^{1/(1-\alpha_1^0)} - 1 \right\} + \\ &+ \left( s_0 - \frac{\sigma^0}{\alpha_1^0} m_{10} \right) \frac{1 - e^{-d(t-t_0)}}{d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= \left(1 + \frac{\sigma^0}{\alpha_1^0}\right) m_{10} \left\{ \left[ 1 + (1 - \alpha_1^0) \frac{m_{10}}{M_{10}} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \frac{1 - e^{-d(t-t_0)}}{d} \right] \alpha_1^{0/(1-\alpha_1^0)} - 1 \right\} e^{-d(t-t_0)} + m_0 e^{-d(t-t_0)}, \\
c &= \frac{1}{\alpha_1^0} m_{10} \left\{ \left[ 1 + (1 - \alpha_1^0) \frac{m_{10}}{M_{10}} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \frac{1 - e^{-d(t-t_0)}}{d} \right] \alpha_1^{0/(1-\alpha_1^0)} - 1 \right\} e^{-d(t-t_0)} + c_0 e^{-d(t-t_0)}, \\
f &= \left(1 + \frac{\sigma^0 + \beta^0}{\alpha_1^0}\right) m_{10} \left\{ \left[ 1 + (1 - \alpha_1^0) \frac{m_{10}}{M_{10}} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \frac{1 - e^{-d(t-t_0)}}{d} \right] \alpha_1^{0/(1-\alpha_1^0)} - 1 \right\} e^{-d(t-t_0)} + f_0 e^{-d(t-t_0)}, \\
F &= F_0 + \left(1 + \frac{\sigma^0 + \beta^0}{\alpha_1^0}\right) M_{10} \times \\
&\quad \times \left\{ \left[ 1 + (1 - \alpha_1^0) \frac{m_{10}}{M_{10}} \cdot \frac{1 - e^{-d(t-t_0)}}{d} \right]^{1/(1-\alpha_1^0)} - 1 \right\} + \\
&\quad + \left[ f_0 - m_{10} \left(1 + \frac{\sigma^0 + \beta^0}{\alpha_1^0}\right) \right] \frac{1 - e^{-d(t-t_0)}}{d}, \\
\sigma^0 &= \frac{k}{k+1} - \alpha_1^0, \quad \beta^0 = \frac{1}{k+1}. \tag{7.47}
\end{aligned}$$

Как видно,  $\alpha_1^0$ ,  $\beta^0$ ,  $\sigma$ —все меньше единицы (для свеклы). При  $\alpha_1^0 = 0,5$ ,  $d = 0,01:0,014$  имеет место рис. 7.6 (Б), который вполне согласуется с экспериментальной кривой (А).

3.3. Частный случай 2. Отбросим условие, что  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $z = \text{const}$ . Тогда вместо (45) будем иметь

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\tau, t) &= \alpha_1^0 \frac{m_1(\tau) e^{d(\tau-t)}}{\int_0^\tau m_1(u) y_1(u) du}, \\
\beta(\tau, t) &= \beta^0 \frac{m_2(\tau) e^{d(\tau-t)}}{\int_0^\tau m_2(u) z(u) du}, \\
\sigma(\tau, t) &= \sigma^0 \frac{m_3(\tau) e^{d(\tau-t)}}{\int_0^\tau m_1(u) y_2(u) du} \tag{7.48}
\end{aligned}$$

и, вместо (46),

$$x_1' + \left(d - \frac{y_1'}{y_1}\right) x_1 = \alpha_1^0 \frac{x_1^2}{X_1}, \quad x_1 = m_1 y_1, \quad x_1(t_0) = m_{10} y_{10},$$

$$X_1 = \int_0^t x_1(u) du, \quad X_1(t_0) = \int_0^{t_0} m_{10}(u) y_{10}(u) du,$$

$$s' + ds = \sigma^0 \frac{m_1^2 y_2}{\int_0^t m_1(\tau) y_2(\tau) d\tau}, \quad s(t_0) = s_0, \quad (7.49)$$

$$c'(t) + dc = \beta^0 \frac{m_1^2 z}{\int_0^t m_1(\tau) z(\tau) d\tau},$$

$$m_1 + s = kc, \quad f = (k+1)c.$$

Предположим, что  $y_1'/y_1 = dy_1 = \text{const}$ . Так как  $y_1 \ll 1$ ,  $t \in [t_0, T]$ , то

$$0 < \frac{y_1'}{y_1} = dy_1 \leq \frac{\ln 1/y_{10}}{T - t_0}. \quad (7.50)$$

Из (48)—(50) видно, что за счет переменного  $y_1$  можно существенно уменьшить влияние износа и повысить производительность раз-

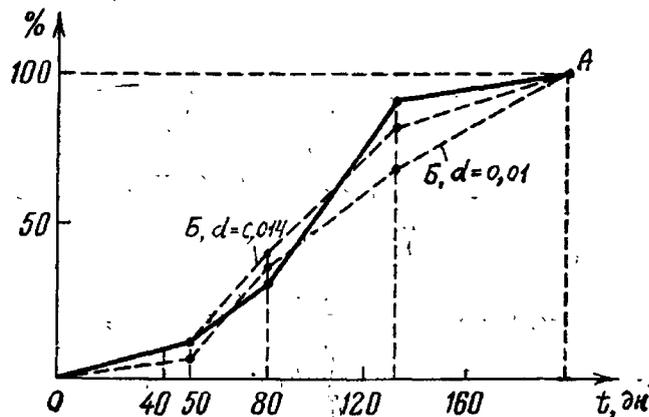


Рис. 7.6.

тения. Решив первое уравнение в (49) так же, как уравнение относительно  $m_1$  в (46), найдем подобным образом  $s, c, m, f, M_1, S, F$ .

3.4. Модель развития растений до начала фотосинтеза (гетеротрофная фаза). Модель имеет следующий вид:

$$\hat{m}(t) = \int_0^t \hat{\alpha}(\tau, t) \lambda(\tau, t) \hat{y}(\tau) \hat{m}(\tau) d\tau + \hat{m}_0,$$

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \hat{M}_0 + \int_0^t \hat{m}(\tau) d\tau, \\ \hat{c}(t) &= \int_0^t \hat{\beta}(\tau, t) \hat{\mu}(\tau, t) [1 - \hat{y}(\tau)] \hat{m}(\tau) d\tau, \\ \hat{C} &= \int_0^t \hat{c}(\tau) d\tau, \quad 0 \leq \hat{y} \leq 1, \quad 0 \leq \hat{\lambda}, \hat{\mu} \leq 1, \\ \hat{P} &= \hat{M}_0 + \int_0^t [\hat{\lambda}\hat{y} + \hat{\mu}(1 - \hat{y})] \hat{m}(\tau) d\tau, \\ \hat{G} &= \hat{M} + \hat{P}, \quad \hat{g} = \hat{G}', \quad \hat{p} = \hat{P}', \\ \hat{f} &= \hat{p} + \hat{g} + \hat{c}, \quad \hat{F} = \int_0^t \hat{f}(\tau) d\tau, \\ &0 \leq t \leq t_0. \end{aligned} \tag{7.51}$$

Здесь  $\hat{m}$  — скорость роста количества новой общей биомассы растения;  $\hat{y}\hat{m}$  — скорость роста количества новой биомассы в подсистеме «средства производства» растения (А);  $(1 - \hat{y})\hat{m}$  — скорость роста количества новой биомассы в подсистеме производства выделяемого  $\text{CO}_2$  (Б);  $\hat{c}$  — скорость увеличения количества этого  $\text{CO}_2$ ;  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  — производительности по соответствующим каналам;  $\hat{\lambda}, \hat{\mu}$  — коэффициенты интенсивности;  $\hat{P}$  — функционирующая биомасса растений;  $\hat{G}$  — отвал;  $\hat{F}$  — субстрат;  $\hat{F}(t_0)$  — масса запасенных веществ семени растения вместе с водой и кислородом, поступивших в растение;  $M_0$  — масса зародыша семени;  $\hat{m}_0$  — начальная скорость создания биомассы растения; 0 — момент прорастания семени;  $t_0$  — момент появления листьев;  $\hat{M}(t_0) = M(t_0) = M_1(t_0)$ ;  $\hat{m}(t_0) = m_{10}$ .

В случае сахарной свеклы соответствующие данные приведены в табл. 7.1.

3.5. Частный случай 3. Положим в (51)

$$\hat{\lambda} = \hat{\mu} = 1, \quad \hat{y} = \text{const}, \quad \hat{\alpha} = \hat{\alpha}^0 \frac{\hat{m}}{\hat{M}\hat{y}}, \quad \hat{\beta} = \hat{\beta}^0 \frac{\hat{m}}{\hat{M}(1 - \hat{y})}. \tag{7.52}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{m}' &= \hat{\alpha}^0 \frac{\hat{m}^2}{\hat{M}}, \quad \hat{m}(0) = \hat{m}_0, \quad \hat{M}(0) = \hat{M}_0, \quad \frac{d\hat{M}}{dt} = \hat{m}, \\ \hat{P} &= \hat{M}, \quad \hat{G} = 0, \quad \hat{f} = \hat{m} + \hat{c}, \quad \hat{c}' = \hat{\beta}^0 \frac{\hat{m}^2}{\hat{M}}, \quad 0 \leq t \leq t_0. \end{aligned} \tag{7.53}$$

Таблица 7.1

Вес семени, мг	Вес корня, $P_k$ , г	Сахаристость, с. %	Вес листьев, $P_b$ , г	Общая биомасса, г	$t_0$ , дней	Длительность вегетационного периода, $T$ , дней	Вес отмирающего листа, $C$ , г	Интенсивность фотосинтеза, $[CO_2]$ , мг/дм <sup>2</sup> ·ч	Площадь листовой поверхности, дм <sup>2</sup>	Масса (фотосинтез), гк	Масса $CO_2$ поглощенная за весь вегетационный период
4÷6	100÷1000	12÷20	300÷1200	400÷2200	12	160÷200÷	40÷70	83÷10	10,0÷500	0,1÷54,9	0,17÷92,4

$\alpha_1$	$\sigma$	$\beta$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$a$	$m_{10}$ , г/сут	$M_{10}$ , г	$m_{20}$ , г/сут	$\hat{m}_0$ , г/сут	$\hat{M}_0$ , г	$C_0$ , кг
0,15÷0,01	1,05÷0,07	0,525÷0,035	(1,3÷0,7) $10^{-1}$	21,7÷43,5	0,01÷0,0004	3,0	0,5	0,14	$1/12 \cdot 10^{-3}$	$(1\div 2)10^{-3}$	84,14

Масса NPK, поглощенная за весь вегетационный период, кг	Масса H, поглощенная во время фотосинтеза, кг	$k$
(21÷27)	0,01÷6,8	1,2÷2

Отсюда при  $\alpha^0 \neq 1$

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \hat{M}_0 \left[ 1 + \frac{\hat{m}_0}{\hat{M}_0} (1 - \alpha^0) t \right]^{1/(1-\alpha^0)}, \\ \hat{m} &= \hat{m}_0 \left[ 1 + \frac{\hat{m}_0}{\hat{M}_0} (1 - \alpha^0) t \right]^{\alpha^0/(1-\alpha^0)}, \\ \frac{\hat{m}}{\hat{M}} &= \frac{\hat{m}_0}{\hat{M}_0 + \hat{m} (1 - \alpha^0) t}, \quad \hat{c} = \hat{c}_0 + \frac{\hat{\beta}_0}{\alpha^0} [\hat{m} - \hat{m}_0], \\ \hat{C} &= \frac{\hat{\beta}_0}{\alpha^0} (\hat{M} - \hat{M}_0) + \left( \hat{c}_0 - \frac{\hat{\beta}_0}{\alpha^0} \hat{m}_0 \right) t, \quad \hat{F} = \hat{M} + \hat{C},\end{aligned}\tag{7.54}$$

$$\begin{aligned}M(t_0) &= M_{10} = \hat{M} \left[ 1 + \frac{\hat{m}_0}{\hat{M}_0} (1 - \alpha^0) t_0 \right]^{1/(1-\alpha^0)}, \\ m_{10} &= \hat{m}_0 \left[ 1 + \frac{\hat{m}_0}{\hat{M}_0} (1 - \alpha^0) t_0 \right]^{\alpha^0/(1-\alpha^0)}, \quad m_{20} = \hat{c}(t_0).\end{aligned}$$

Отбросим в (52) условие  $y = \text{const}$ . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \hat{\alpha}^0 \frac{\hat{m}}{\hat{M}_0 \hat{y}_0 + \int_0^{\tau} \hat{m}(u) \hat{y}(u) du}, \\ \hat{\beta} &= \hat{\beta}^0 \frac{\hat{m}}{\hat{M}_0 (1 - \hat{y}_0) + \int_0^{\tau} \hat{m}(u) (1 - \hat{y}) du}\end{aligned}\tag{7.55}$$

и, вместо (53),

$$\hat{x}' - \frac{\hat{y}'}{\hat{y}} \hat{x} = \hat{\alpha}^0 \frac{\hat{x}^2}{\hat{x}}, \quad \hat{x} = \hat{m}\hat{y}, \quad \hat{X}' = \hat{x}, \quad \hat{x}(0) = \hat{m}_0 \hat{y}_0, \quad \hat{x}_0 = \hat{M}_0 \hat{y}_0,\tag{7.56}$$

$$\hat{c}' = \hat{\beta}^0 \frac{\hat{m}^2 (1 - \hat{y})}{\hat{M}_0 (1 - \hat{y}_0) + \int_0^{\tau} \hat{m}(u) (1 - \hat{y}(u)) du}, \quad \hat{f} = \hat{m} + \hat{c}, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Предполагая, что

$$\frac{\hat{y}'}{\hat{y}} = \hat{d}_y = \text{const} > 0, \quad \hat{d}_y \leq \frac{\ln 1/y_0}{t_0},\tag{7.57}$$

$$\hat{y} = \hat{y}_0 e^{\hat{d}_y t} \leq 1, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

находим

$$\hat{x} = \frac{d\hat{X}}{dt} = c \left( \frac{\hat{X}}{\hat{X}_0} \right)^{\hat{\alpha}^0} + \frac{\hat{d}y}{1 - \hat{\alpha}^0} \hat{X}, \quad c = \hat{x}_0 - \frac{\hat{d}y}{1 - \hat{\alpha}^0} \hat{X}_0,$$

$$\hat{x} = \hat{x}_0 \left[ 1 + \frac{\hat{x}_0}{\hat{x}_0} \cdot \frac{1 - \hat{\alpha}^0}{\hat{d}y} (e^{\hat{d}y t} - 1) \right]^{\hat{\alpha}^0 / (1 - \hat{\alpha}^0)} e^{\hat{d}y t}, \quad (7.58)$$

$$\hat{m} = \frac{\hat{x}}{\hat{y}_0 e^{\hat{d}y t}}, \quad \hat{m}(t_0) = m_{10}, \quad M_{10} = \hat{M}(t_0) + \hat{C}(t_0).$$

Как видно из (55) — (58), за счет  $\hat{d}y > 0$  возможен ускоренный рост биомассы  $\hat{M}_0$ .

**3.6. Модель фотосинтезирующих растений.** Модель с учетом в отдельности характеристики листы, и корня имеет следующий вид:

$$m_1 = \int_{t_0}^t \alpha_{11} \lambda_{11} y_{11} m_1(\tau) d\tau + \int_0^t \alpha_{12} \lambda_{12} y_{12} m_2(\tau) d\tau, \quad M_1 = \int_{t_0}^t m_1(\tau) d\tau,$$

$$m_2 = \int_{t_0}^t \alpha_{21} \lambda_{21} y_{21} m_1(\tau) d\tau + \int_0^t \alpha_{22} \lambda_{22} y_{22} m_2(\tau) d\tau, \quad M_2 = \int_{t_0}^t m_2(\tau) d\tau + M_{20}$$

$$s = \int_{t_0}^t \alpha_{31} \lambda_{31} y_{31} m_1(\tau) d\tau + \int_0^t \alpha_{32} \lambda_{32} y_{32} m_2(\tau) d\tau, \quad S = \int_{t_0}^t s(\tau) d\tau,$$

$$c = \int_{t_0}^t \beta_1 \mu_1 z_1 m_1(\tau) d\tau + \int_0^t \beta_2 \mu_2 z_2 m_2(\tau) d\tau, \quad C = \int_{t_0}^t c(\tau) d\tau,$$

$$P(t) = P_0 + \int_{t_0}^t [(\lambda_{11} y_{11} + \lambda_{21} y_{21} + \lambda_{31} y_{31} + \mu_1 z_1) m_1 +$$

$$+ (\lambda_{12} y_{12} + \lambda_{22} y_{22} + \lambda_{32} y_{32} + \mu_2 z_2) m_2] d\tau, \quad (7.59)$$

$$M = M_1 + M_2 + S, \quad G = M - P, \quad p = P',$$

$$m = M', \quad g = G', \quad f = p + g + c = F,$$

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} + z_1 = 1, \quad y_{12} + y_{22} + y_{32} + z_2 = 1, \quad 0 \leq y_{ij}, z_j, \lambda_{ij},$$

$$\mu_j \leq 1, \quad m = kc, \quad T \geq t \geq t_0 > 0.$$

Здесь  $M_1$  — масса листа,  $M_2 + S$  — масса корня,  $S$  — запасенная масса (сахароза),  $M_2$  — функционирующая масса корня, остальные величины имеют смысл тот же или аналогичный (42), (43).

**3.7. Частный случай 4.** Положим в (59)

$$\lambda_{ij} = \mu_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 2},$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^0 \frac{m_j}{M_j y_{ij}} e^{-d(t-\tau)}, \quad \beta_j = \beta_j^0 \frac{m_j}{M_j z_j} e^{-d(t-\tau)}, \quad (7.60)$$

где  $\alpha_{ij}^0, \beta_j^0, y_{ij}, z_j = \text{const}$ , определяемые из условий идентификации модели и объекта. Тогда

$$m_i' + dm_i = \alpha_{i1}^0 \frac{m_1^2}{M_1} + \alpha_{i2} \frac{m_2^2}{M_2}, \quad i = \overline{1, 2}, \quad m_i(t_0) = m_{i0},$$

$$i = \overline{1, 2}, \quad t \in [t_0, T], \quad s' + ds = \alpha_{31}^0 \frac{m_1^2}{M_1} + \alpha_{32}^0 \frac{m_2^2}{M_2}, \quad (7.61)$$

$$\sum_{i=1}^2 y_{ij} + z_j = 1, \quad j = 1, 2, \quad f = m + c,$$

$$c = \beta_1^0 z_1 \int_0^t \frac{m_1^2(\tau) e^{-d(\tau-t)}}{M_1(\tau)} d\tau + \beta_2^0 z_2 \int_0^t \frac{m_2^2(\tau) e^{-d(\tau-t)}}{M_2(\tau)} d\tau,$$

$$m = m_1 + m_2 + s = kc, \quad s(t_0) = s_0, \quad c(t_0) = c_0.$$

Исследуем систему

$$m_1' + dm_1 = \alpha_{11}^0 \frac{m_1^2}{M_1} + \alpha_{12}^0 \frac{m_2^2}{M_2},$$

$$m_i(t_0) = m_{i0}, \quad M_i(t_0) = M_{i0}, \quad (7.62)$$

$$m_2' + dm_2 = \alpha_{21}^0 \frac{m_1^2}{M_1} + \alpha_{22}^0 \frac{m_2^2}{M_2}.$$

Положим

$$\frac{m_1}{M_1} = u_1, \quad \frac{m_2}{M_2} = u_2, \quad M_1 = m_1, \quad M_2 = m_2. \quad (7.63)$$

В этом случае

$$u_1' = (\alpha_{11}^0 - 1) u_1^2 + \alpha_{12}^0 \frac{M_2}{M_1 u_2^2} - du_1, \quad (7.64)$$

$$u_2' = \alpha_{21}^0 \frac{M_1}{M_2 u_1^2} + (\alpha_{22}^0 - 1) u_2^2 - du_2, \quad u_i(t_0) = \frac{m_{i0}}{M_{i0}}.$$

Обычно отношение  $M_1/M_2$  нетрудно оценить из экспериментальных данных [32]. Ясно, что вначале  $0 < M_1/M_2 \leq 1$ , но вскоре оно может стать больше 1.

Приравнивая правые части системы (64) нулю, получаем

$$u_2^2 = u_1 \frac{d + (1 - \alpha_{11}^0) u_1}{\alpha_{12}^0} \cdot \frac{M_1}{M_2}, \quad u_{11} = u_{21} = 0,$$

$$\sqrt{\frac{u_1 M_1}{\alpha_{12}^0 M_2}} \{(\alpha_{22}^0 - 1) d + [\alpha_{21}^0 \alpha_{12}^0 + (\alpha_{22}^0 - 1)(1 - \alpha_{11}^0)] u_1\} = \\ = \sqrt{d^2 + d^2(1 - \alpha_{11}^0) u_1}.$$

Сделав замену  $u_1 = dx$ , найдем

$$\sqrt{x \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{1}{\alpha_{12}^0}} \{(\alpha_{22}^0 - 1) + [\alpha_{21}^0 \alpha_{12}^0 + (\alpha_{22}^0 - 1)(1 - \alpha_{11}^0)] x\} = \\ = \sqrt{1 + (1 - \alpha_{11}^0) x}.$$

В общем случае ( $M_1/M_2 > 0$ ) это уравнение может не иметь ни одного положительного корня или иметь лишь один положительный корень (см. рис. 7.7, а)). Значения параметров на рис. 7.7, а) следующие:

$$v_1' = -ev_1^2 + \frac{v_2^2}{a} - v_1, \quad t = \frac{\tau}{d}, \quad u_1 = dv_1, \\ v_2' = \alpha_{21}^0 \alpha_{12}^0 av_1^2 + bv_2^2 - v_2, \quad u_2 = dv_2, \\ a = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{1}{\alpha_{12}^0} > 0, \quad b = \alpha_{22}^0 - 1, \quad e = 1 - \alpha_{11}^0, \\ c = \alpha_{12}^0 \alpha_{21}^0 - (\alpha_{11}^0 - 1)(\alpha_{22}^0 - 1) = \alpha_{12}^0 \alpha_{21}^0 - be, \\ \alpha_{12}^0, \quad \alpha_{21}^0 \geq 0, \quad \alpha_{12}^0 \neq 0.$$

Обозначим положительный корень  $x$  через  $\bar{x}$ , тогда

$$\bar{u}_1 = d\bar{x}, \quad \bar{u}_2 = \sqrt{\frac{\bar{u}_1 [d + (1 - \alpha_{11}^0) \bar{u}_1]}{\alpha_{12}^0} \cdot \frac{M_1}{M_2}} = d \sqrt{\frac{\bar{x} [1 + (1 - \alpha_{11}^0) \bar{x}]}{\alpha_{12}^0 M_2 / M_1}}, \quad (7.65)$$

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2 > 0, \quad \bar{u}_2 = d\bar{y}, \quad \bar{y} = \sqrt{\frac{\bar{x} [1 + (1 - \alpha_{11}^0) \bar{x}]}{\alpha_{12}^0} \cdot \frac{M_1}{M_2}}.$$

Характеристическое уравнение системы (64) для корней (65) будет иметь вид

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0, \quad p = 2d[\alpha_{11}^0(1 - \alpha_{11}^0) + \bar{y}(\alpha_{12}^0 - 1)], \quad (7.66)$$

$$q = d^2 \{4[(\alpha_{11}^0 - 1)(\alpha_{22}^0 - 1) - \alpha_{12}^0 \alpha_{21}^0] \bar{x} \bar{y} - \\ - 2[(\alpha_{11}^0 - 1)\bar{x} + (\alpha_{12}^0 - 1)\bar{y}] + 1\} < p^2/4.$$

Решая (66), находим

$$\lambda_{1,2} = d \{-[\bar{x}(1 - \alpha_{11}^0) + \bar{y}(1 - \alpha_{22}^0) + 1] \pm \\ \pm \sqrt{[\bar{x}(1 - \alpha_{11}^0) - \bar{y}(1 - \alpha_{22}^0)]^2 + 4\alpha_{12}^0 \alpha_{21}^0 \bar{x} \bar{y}}\}.$$

В силу известной теоремы Пуанкаре [103]  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Поэтому возможна лишь неустойчивая точка типа седла. Заметим, что точка  $u_{11} = u_{21} = 0$  является при  $d > 0$  устойчивым узлом. Поэтому будем иметь фазовый портрет системы (64) вида, приведенного на рис. 7.7, б)–е).

Таким образом, в данной модели возможен рост  $u_1, u_2$  и, значит, определенный рост производительностей  $\alpha_{ij}(\tau, t), \beta_j(\tau, t)$ . Этот

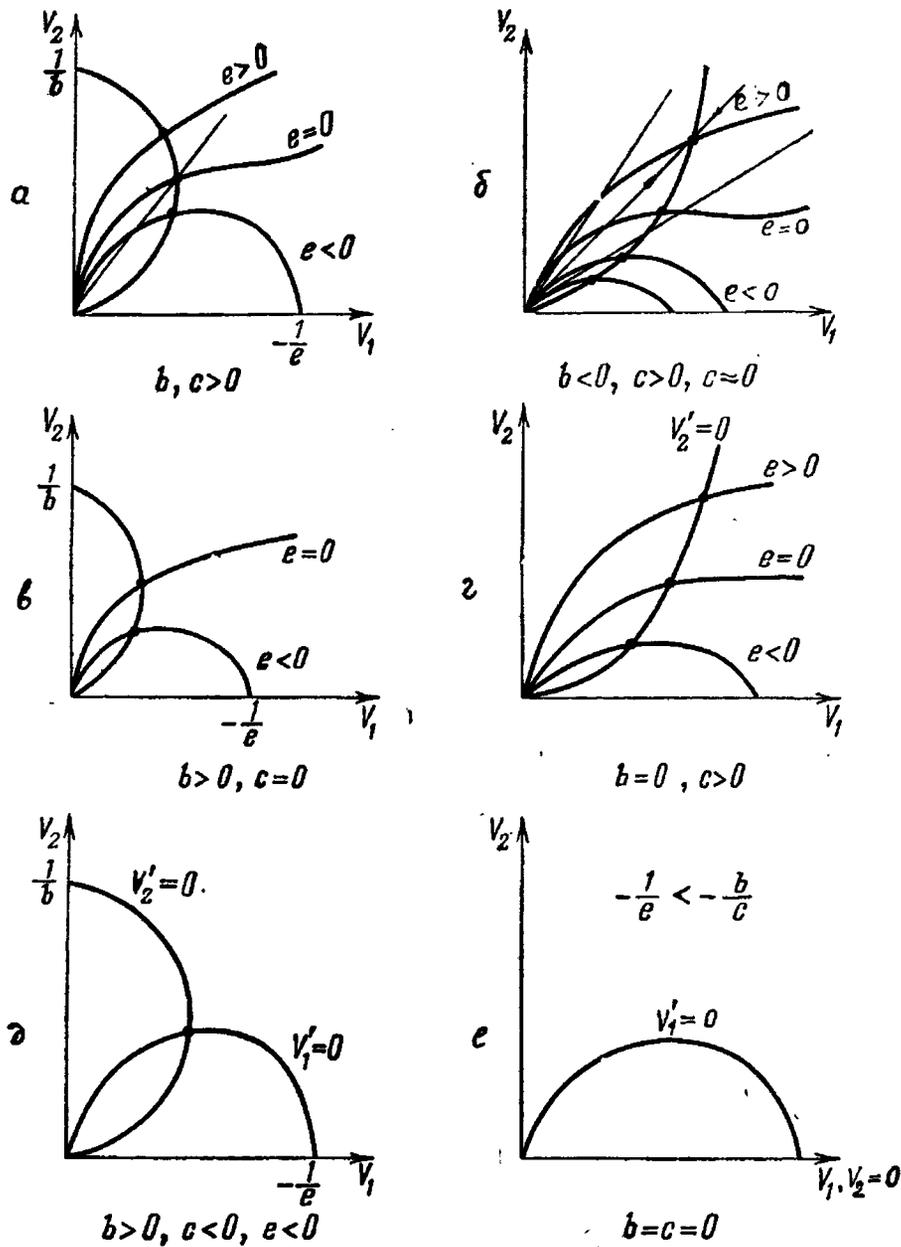


Рис. 7.7.

результат можно интерпретировать как существенное возрастание производительностей системы за счет разделения функций между двумя ее подсистемами.

3.8. Модель развития растения (после появления листы с учетом характеристик листы и корня). Дальнейшее уточнение предыдущей модели связано с тем, что на самом деле [250] снижение

производительности листьев растения в конце вегетативного периода происходит примерно в три раза быстрее, чем в начале. Чтобы компенсировать этот эффект, происходит удаление устаревших листьев в отвал ( $a(t) > 0$ ). Кроме того, естественно предположить, что в начальной стадии будет дополнительный прирост производительности растения за счет дифференциации его клеток. Все это приводит к следующему более общему виду модели развития растения (после появления листы с учетом характеристик листы и корня):

$$m_1 = \int_{a(t)}^t \alpha_{11}^0 \frac{M_1(\tau) m_1^2(\tau) \exp \{d_{11}^{(1)}(\tau-t) + d_{11}^{(2)}(\tau-t)^2 + d_{11}^{(3)}(\tau-t)^3\} y_{11}^2(\tau)}{\left[ c_1 + \int_{a(\tau)}^{\tau} m_1(u) y_{11}(u) du \right]^2} d\tau + \\ + \int_0^t \alpha_{12}^0 \frac{M_2(\tau) m_2^2 \exp \{d_{12}(\tau-t)\} y_{12}^2(\tau) d\tau}{\left[ \int_0^{\tau} m_2(u) y_{12}(u) du \right]^2}, \quad (7.67)$$

$$m_2 = \int_{a(t)}^t \alpha_{21}^0 \frac{M_1(\tau) m_1^2(\tau) \exp \{d_{21}^{(1)}(\tau-t) + d_{21}^{(2)}(\tau-t)^2 + d_{21}^{(3)}(\tau-t)^3\} y_{21}^2(\tau)}{\left[ c_2 + \int_{a(\tau)}^{\tau} m_2(u) y_{21}(u) du \right]^2} d\tau + \\ + \int_0^t \alpha_{22}^0 \frac{M_2(\tau) m_2^2 \exp \{d_{22}(\tau-t)\} y_{22}^2(\tau) d\tau}{\left[ \int_0^{\tau} m_2(u) y_{22}(u) du \right]^2}, \quad (7.68)$$

$$s = \int_{a(t)}^t \alpha_{31}^0 \frac{M_1(\tau) m_1^2 \exp \{d_{31}^{(1)}(\tau-t) + d_{31}^{(2)}(\tau-t)^2 + d_{31}^{(3)}(\tau-t)^3\} y_{31}^2(\tau)}{\left[ c_3 + \int_{a(t)}^{\tau} m_2(u) y_{31}(u) du \right]^2} d\tau + \\ + \int_0^t \alpha_{32}^0 \frac{M_2(\tau) m_2^2 \exp \{d_{32}(\tau-t)\} y_{32}^2(\tau) d\tau}{\left[ \int_0^{\tau} m_2(u) y_{22}(u) du \right]^2}, \quad (7.69)$$

$$c = \int_{a(t)}^t \beta_1^0 \frac{M_1(\tau) m_1^2 \exp \{d_{41}^{(1)}(\tau-t) + d_{41}^{(2)}(\tau-t)^2 + d_{41}^{(3)}(\tau-t)^3\} z_1^2(\tau) d\tau}{\left[ c_4 + \int_{a(\tau)}^{\tau} m_1(u) z_1(u) du \right]^2} + \\ + \int_0^t \beta_2^0 \frac{M_2(\tau) m_2^2 \exp \{d_{42}(\tau-t)\} z_2^2(\tau) d\tau}{\left[ \int_0^{\tau} m_2(u) z_2(u) du \right]^2}, \quad (7.70)$$

$$P' = P_0 + \int_{a(t)}^t m_1 d\tau + \int_{t_0}^t m_2(\tau) d\tau, \quad G = M - P = \int_{t_0}^{a(t)} m_1(\tau) d\tau,$$

$$M = M_1 + M_2 + S, \quad f = p + g + c, \quad p = p',$$

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} + z_1 = 1, \quad y_{12} + y_{22} + y_{32} + z_2 = 1, \quad m = kc,$$

$$T \geq t \geq t_0 > 0, \quad t > a(t) \geq t_0,$$
(7.71)

где все величины имеют тот же смысл или аналогичный (42), (43), (59).

В общем случае система уравнений относительно  $m_1, m_2$  (67) — (71) не сводится к дифференциальной. Решение ее на ЭВМ осуществляется на основе программ для вольтерровских систем. Идентификация этой модели и весь комплекс задач по ее применению находятся в настоящее время в стадии опытной проверки.

**3.9. Оптимизационная задача.** В дополнение к существующим принципам оптимальности поведения биосистем [233] может быть сформулирован следующий принцип.

**П р и н ц и п.** *Для того чтобы обеспечить максимальную продуктивность биосистем за весь вегетационный период, необходимо в начале онтогенеза большую долю ресурсов (ассимилятов) перераспределить на компартмент активного метаболизма (КАМ), а в конце — на компартмент запасаания (КЗ).*

Соответствующая оптимизационная задача имеет следующий вид:  $S^*(T) = \max$  при ограничениях (2.49) и (67)—(71).

## § 4. Моделирование развития организма животных

**4.1. Модель развития организма животного (на примере белой беспородной крысы).** По отношению к моделям развития животного можно в основном повторить все, что сказано в § 3. Подчеркнем здесь ряд существенных отличий животных и растений. Аналогом табл. 7.1 будет приведенная ниже табл. 7.2 основных элементов модели вида (42), (43) для белой беспородной крысы. В табл. 7.2 даны диапазоны изменений усредненных значений элементов моделей (42), (43), причем верхняя строка — норма, а нижняя — для животных с оперированным вентрикулярным ядром. Как видно, основные показатели производительности для крысы существенно выше соответствующих показателей для сахарной свеклы. Характер кривой потребления субстрата животным в течение его жизни будет тот же, что и на рис. 7.6. Для объяснения этого факта примем (48), однако усилим рост производительности в период «расцвета» организма.

**4.2. Частный случай I.** Итак, вместо (48) положим (на примере  $\alpha_1 = \alpha$ )

$$\alpha(\tau, t) = \alpha^0 \frac{M}{[c_0 + M(\tau)] y} e^{(d-a_0)(\tau-t)},$$
(7.72)

Таблица 7,2

$P_{0,2}$	$\hat{P}_{0,2}$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$T$ , сут
200÷500	15÷30	0,5÷1,1	0,8÷3,3	600÷1000
$\Delta P$ , г	$\beta$	$F$ , г		$G$ , г
		пища	вода	
1,5÷4,2 50÷100	0,8÷0,9 1,4÷2,0	64,2÷4 153,8	25,1 88,0	85,1÷87,9 138÷188

$\Delta P$  — прирост веса за контрольный период.

где  $\alpha^0$ ,  $c_0$ ,  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $d$  — положительные константы. Тогда вместо (49) будем иметь

$$m' + (d - a_0)m = \alpha^0 \frac{M}{c_0 + M} m,$$

$$m(t_0) = m_0, \quad M(t_0) = M_0,$$

откуда

$$\frac{dm}{dM} = \alpha^0 \frac{M}{c_0 + M} - \Delta, \quad \Delta = d - a, \quad m(M_0) = m_0,$$

$$m - m_0 = (\alpha^0 - \Delta)(M - M_0) - \alpha^0 c_0 \ln \frac{M + c_0}{M_0 + c_0} = \frac{dM}{dt} - m_0;$$

$$M \sim e^{(\alpha^0 - \Delta)(t - t_0)}, \quad t \gg 1.$$

Ожидаемый характер поведения  $M$  и  $\alpha$  ( $\tau$ ,  $t$ ), а именно, вначале возрастание, а затем стремление к постоянным значениям, получим при условии, что величина  $d$  вначале мала, а затем растет с ростом  $t$ . Последний факт согласуется с известными представлениями [32, 50, 228, 250].

Представление  $\alpha$  ( $\tau$ ,  $t$ ) в виде (72), отвечающее известным фактам, не является единственным. Другим видом  $\alpha$  ( $\tau$ ,  $t$ ) может быть

$$\alpha(\tau, t) = \alpha^0 \frac{m}{(c_0 + m)y} e^{(d - a_0)(\tau - t)}. \quad (7.73)$$

Тогда

$$\frac{dm}{dt} = \alpha^0 \frac{m^2}{c_0 + m} - \Delta m = \frac{(\alpha^0 - \Delta) m^2 - \Delta c_0 m}{c_0 + m}, \quad m(t_0) = m_0,$$

откуда

$$\frac{\left(m - \frac{\Delta c_0}{\alpha^0 - \Delta}\right)^{\alpha^0 / (\alpha^0 - \Delta)}}{m} = \frac{\left(m_0 - \frac{\Delta c_0}{\alpha^0 - \Delta}\right)^{\alpha^0 / (\alpha^0 - \Delta)}}{m_0} e^{\Delta(t - t_0)}.$$

Следовательно, при малых  $\Delta$  ( $\Delta > 0$ ) величина  $m$  будет расти с ростом  $t$ , а при больших  $\Delta$  ( $\alpha^0 - \Delta < 0$ ) будет убывать при увеличении  $t$ , что даст качественно ту же картину, что и ранее.

Отметим еще, что решения нужного характера можно получить также, если сразу искать  $y(\tau)\alpha(\tau, t)$  как функцию  $\tau, t$ , например, в виде

$$y(\tau)\alpha(\tau, t) = [\alpha^0(\tau - t_0)^r + d^1] \exp\{-c_0(\tau - t_0) + \Delta(\tau - t)\}, \quad \tau \geq t_0. \quad (7.74)$$

Тогда

$$m' + \Delta m = [\alpha^0(t - t_0)^r + \alpha^1] \exp\{-c_0(t - t_0)\} m, \quad m(t_0) = m_0.$$

Приняв для простоты  $r = 1$ , легко найдем

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\Delta(t - t_0) + \alpha^0 \frac{\exp\{-c_0(t - t_0)\} [\exp\{c_0(t - t_0) - 1\} - c_0(t - t_0)]}{c_0^2} + \\ + \alpha^1 \frac{1 - \exp\{-c_0(t - t_0)\}}{c_0},$$

$$m = m_0 \exp\left\{-\Delta(t - t_0) + \alpha^1[(t - t_0) + \dots] + \alpha^0\left[-\frac{(t - t_0)^2}{2} + \dots\right]\right\}.$$

Интересно заметить, что при  $\alpha^1 < \Delta$  функция  $m$  будет сначала убывать, потом возрастать, а затем убывать до нуля, что даст ти-

пичную кривую логистического типа для  $M = M_0 + \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau$ .

**4.3. Модель организма животного.** Рассмотрим теперь аналог модели (64) применительно к организму животного. Аналогом листьев (и окончаний корня) будем считать желудочно-кишечную подсистему организма ( $m_1$ ), поскольку непосредственно за счет ее функций создается масса организма. Всю остальную часть организма представим в виде функционирующей биомассы ( $m_2$ ) и запасаемой биомассы ( $s$ ). С учетом указанных отличий организма от растения вместо (64) будем иметь

$$m_1' = \alpha_{11}^0 \frac{m_1^2}{c_{11} + m_1} + \alpha_{12}^0 \frac{m_2^2}{c_{12} + m_2} - \Delta_1 m_1, \\ m_2' = \alpha_{21}^0 \frac{m_1^2}{c_{21} + m_1} + \alpha_{22}^0 \frac{m_2^2}{c_{22} + m_2} - \Delta_2 m_2, \quad (7.75)$$

$$m_i(t_0) = m_{i0},$$

$$i = 1, 2, \Delta_i = d_i - a_i.$$

Найдем стационарные точки системы (75), т. е. корни системы уравнений

$$\alpha_{11}^0 \frac{m_1^2}{c_{11} + m_1} + \alpha_{12}^0 \frac{m_2^2}{c_{12} + m_2} = \Delta_1 m_1,$$

$$\alpha_{21}^0 \frac{m_1^2}{c_{21} + m_1} + \alpha_{22}^0 \frac{m_2^2}{c_{22} + m_2} = \Delta_2 m_2. \quad (7.76)$$

В начальный период, начиная с  $t = t_0$ , пока  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  весьма малы, система (76) не имеет положительных корней. В дальнейшем, когда  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  становятся весьма значительными, система может иметь (при некоторых значениях коэффициентов) положительные корни  $m_1^*$ ,  $m_2^*$ . При еще больших  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  снова отсутствуют положительные

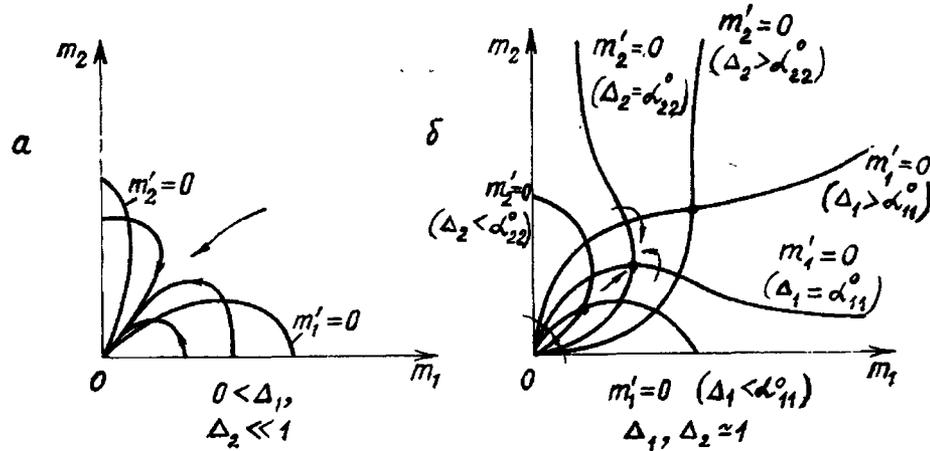


Рис. 7.8.

корни. Значения  $m_1 = m_2 = 0$  всегда остаются устойчивым узлом системы (76), а  $m_1^*$ ,  $m_2^*$  могут быть только седлом. Изменение фазового портрета системы (76) при росте  $\Delta$  см. на рис. 7.8.

**4.4. Обобщения** Обобщая изложенное, приходим к минимальной модели развития организма животного примерно того же вида, что и (67).

Отличия состоят в следующем: 1) в показателях экспонент будут стоять дополнительные положительные слагаемые, характеризующие эффективность приспособления животного к изменяющимся условиям внешней среды путем его «обучения»; 2) вместо одного  $a(t) > 0$  в нижних пределах интегрирования будут стоять  $a_1(t)$ ,  $a_2(t) > 0$  соответственно при  $m_1$ ,  $m_2$ ; 3) подсчет  $g$  и  $c$  существенно отличается от случая растения необходимостью учета совершаемой животным работы, большого количества выделяемого тепла и соответствующих выделяемых отходов; 4) в данном случае чаще возможен случай, когда  $m_1$ ,  $m_2$  зависят еще от  $s$ , что приводит к полной системе трех уравнений [45].

## § 5. Моделирование взаимодействия организма с антигеном

В настоящем параграфе рассмотрено взаимодействие иммунной подсистемы организма с антигеном и с прочими «внутренними» и «внешними» подсистемами целостного организма. При этом рассматривается оптимизационная задача функционирования иммунной подсистемы организма, связанная с обеспечением как режима

толерантности, так и поддержания генетического постоянства (индивидуальности) организма.

При построении минимальной модели иммунной подсистемы были использованы следующие предположения:

I. Ресурсы организма идут: 1) на воспроизводство внутренних функций; 2) в запас; 3) в отвал; 4) на удаление отвала; 5) на выполнение внешних функций организма.

II. Для компонентов иммунной системы характерно: 1) самопроизвольная пролиферация (а также управляемая поэтинами и

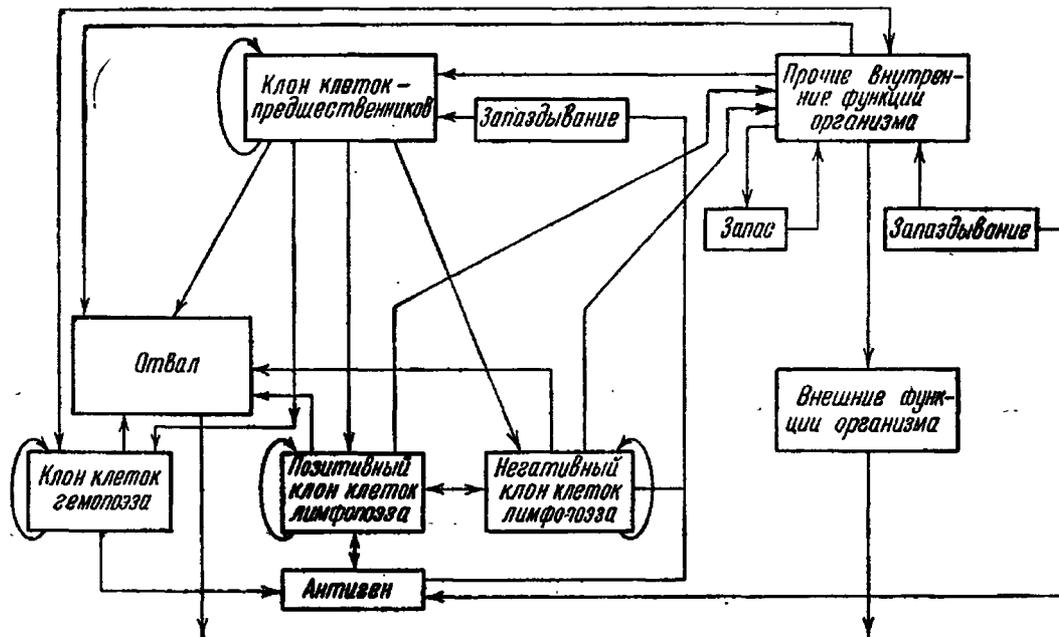


Рис. 7.9.

кинетинами пролиферация), обеспечивающая их воспроизводство и самоподдержание их уровня; 2) взаимодействие с антигеном; 3) взаимодействие с другими внутренними подсистемами и функциями организма; 4) уход в отвал.

III. Взаимодействие клеток-предшественников с антигеном приводит к появлению через время запаздывания  $\tau_1$  «позитивного» и «негативного» клонов. Если преобладает позитивный клон, то разворачивается иммунный ответ, в результате которого антиген уничтожается клетками позитивного клона или их производными. При преобладании негативного клона иммунной реакции не происходит и в организме образуется одна из форм иммунологической толерантности (неотвечаемости). К толерантности приводят малые и большие дозы попавшего в организм антигена, в то время как средние его дозы — к иммунному ответу.

IV. Антиген способен уничтожать клетки позитивного клона, подавлять прочие внутренние подсистемы и функции организма с запаздыванием  $\tau_2$ , а также размножаться в организме.

Более подробные предположения содержатся в работах [55, 70, 78, 95, 125, 175, 176, 177, 185, 189, 228, 247, 314, 316].

На основании этих предположений может быть построена соответствующая блок-схема иммунной системы (рис. 7.9).

5.1. Минимальная модель иммунного ответа и иммунологической толерантности. Минимальная модель иммунной системы, соответствующая приведенной упрощенной блок-схеме (рис. 7.9), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 m_0(t) &= \int_{a_0(t)}^t \alpha_{00}(\tau, t) y_{00}(\tau) m_0(\tau) d\tau + \int_{a_3(t)}^{t-\tau_1} \alpha_{03}(\tau, t) y_{03}(\tau) m_3(\tau) d\tau + \\
 &\quad + \int_{a_4(t)}^t \alpha_{04}(\tau, t) y_{04}(\tau) m_4(\tau) d\tau, \\
 m_1(t) &= \int_{a_0(t)}^t \alpha_{10}(\tau, t) y_{10}(\tau) m_0(\tau) d\tau + \int_{a_1(t)}^t \alpha_{11}(\tau, t) y_{11}(\tau) m_1(\tau) d\tau - \\
 &\quad - \int_{a_2(t)}^t \alpha_{12}(\tau, t) y_{12}(\tau) m_2(\tau) d\tau - \int_{a_3(t)}^t \alpha_{13}(\tau, t) y_{13}(\tau) m_3(\tau) d\tau, \\
 m_2(t) &= \int_{a_0(t)}^t \alpha_{20}(\tau, t) y_{20}(\tau) m_0(\tau) d\tau - \int_{a_1(t)}^t \alpha_{21}(\tau, t) y_{21}(\tau) m_1(\tau) d\tau + \\
 &\quad + \int_{a_2(t)}^t \alpha_{22}(\tau, t) y_{22}(\tau) m_2(\tau) d\tau, \\
 m_3(t) &= \int_{a_1(t)}^t \alpha_{31}(\tau, t) y_{31}(\tau) m_1(\tau) d\tau + \int_{a_3(t)}^t \alpha_{33}(\tau, t) y_{33}(\tau) m_3(\tau) d\tau - \\
 &\quad - \int_{a_4(t)}^t \alpha_{34}(\tau, t) y_{34}(\tau) m_4(\tau) d\tau - \int_{a_5(t)}^t \alpha_{35}(\tau, t) y_{35}(\tau) m_5(\tau) d\tau, \\
 m_4(t) &= - \int_{a_1(t)}^t \alpha_{41}(\tau, t) y_{41}(\tau) m_1(\tau) d\tau - \int_{a_2(t)}^t \alpha_{42}(\tau, t) y_{42}(\tau) m_2(\tau) d\tau - \\
 &\quad - \int_{a_3(t)}^{t-\tau_2} \alpha_{43}(\tau, t) y_{43}(\tau) m_3(\tau) d\tau + \int_{a_4(t)}^t \alpha_{44}(\tau, t) y_{44}(\tau) m_4(\tau) d\tau + \\
 &\quad + \int_{a_5(t)}^t \alpha_{45}(\tau, t) y_{45}(\tau) m_5(\tau) d\tau, \\
 m_5(t) &= \int_{a_0(t)}^t \alpha_{50}(\tau, t) y_{50}(\tau) m_0(\tau) d\tau - \int_{a_3(t)}^t \alpha_{53}(\tau, t) y_{53}(\tau) m_3(\tau) d\tau + \\
 &\quad + \int_{a_4(t)}^t \alpha_{54}(\tau, t) y_{54}(\tau) m_4(\tau) d\tau + \int_{a_5(t)}^t \alpha_{55}(\tau, t) y_{55}(\tau) m_5(\tau) d\tau,
 \end{aligned}$$

$$c(t) = \int_{a_4(t)}^t \beta(\tau, t) z(\tau) m_4(\tau) d\tau, \quad m_i(t_0) = m_{i0},$$

$$M_i(t_0) = M_{i0}, \quad M_i = \int_{t_0}^t m_i(\tau) d\tau, \quad c(t_0) = c_0, \quad C(t_0) = C_0,$$

$$C = \int_{t_0}^t c(\tau) d\tau,$$

$$y_{50} + y_{00} + y_{10} + y_{20} = 1, \quad y_{11} + y_{21} + y_{31} = 1,$$

$$y_{03} + y_{13} + y_{33} + y_{43} + y_{53} = 1, \quad y_{35} + y_{45} + y_{55} = 1,$$

$$y_{04} + y_{44} + z = 1, \quad f = m + c = g + p + c,$$

$$m = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5,$$

$$g = G', \quad t \geq t_0 \geq 0,$$

$$G = \int_0^{a_0(t)} m_0 d\tau + \int_0^{a_1(t)} m_1 d\tau + \int_0^{a_2(t)} m_2 d\tau + \int_0^{a_3(t)} m_3 d\tau + \int_0^{a_4(t)} m_4 d\tau + \int_0^{a_5(t)} m_5 d\tau,$$

$$0 \leq a_0, a_1, a_2, a_4, a_5 < t, \quad 0 \leq a_3 < t - \tau_1,$$

$$\tau_1 > 0, \quad 0 \leq y_2 \leq 1. \quad (7.77)$$

Здесь  $m_i$  ( $i = \overline{0,5}$ ) — скорость воспроизводства количества новых клеток соответственно предшественников ( $i = 0$ ) (например, стволовые клетки); позитивного ( $i = 1$ ) и негативного ( $i = 2$ ) клонов; антигена ( $i = 3$ ) (в случае неразмножающегося антигена  $m_3 = 0$ , а различные концентрации антигена учитываются в удельных скоростях роста соответствующих клонов клеток иммунной системы); клон клеток гемопоэза ( $i = 5$ ) и прочих частей организма ( $i = 4$ );  $\alpha_{ij}(\tau, t)$  — удельная скорость роста (дифференцировки) концентрации клеток, полученная в момент времени  $\tau$ , соответственно для воспроизводства собственно клонов предшественников ( $i = j = 0$ ), позитивного ( $i = j = 1$ ), негативного ( $i = j = 2$ ), антигена ( $i = j = 3$ ), гемопоэтических ( $i = j = 5$ ) и прочих внутренних функций организма ( $i = j = 4$ ) и для воспроизводства клонов с учетом взаимодействий по соответствующему каналу ( $i \neq j$ );  $\beta(\tau, t)$  — производительность выполнения внешних функций организма в момент  $t$  за счет единичной концентрации веществ, поступивших в момент  $\tau$ ;  $y_{ij}$ ,  $z$  — относительные доли соответствующих клонов клеток (веществ), идущих на воспроизводство самих себя ( $i = j$ ) и на взаимодействие с другими ( $i \neq j$ ) клонами или системами организма;  $c(t)$  — скорость выполнения прочих внешних функций организма;  $a_i(t)$  — момент начала использования новой биотехнологии;  $a_0(t)$  — момент начала взаимодействия клон ( $i = 0$ ) клеток-предшественников с антигеном;  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3, 5$ ) — моменты начала

взаимодействия антигена с соответствующими клоонами в организме;  $a_4$  — момент начала взаимодействия позитивного и негативно-го клонов с прочими внутренними системами организма;  $a_5$  — момент начала выполнения внешних функций организмом;  $g(t)$  — скорость образования отвала или скорость отмирания (выведения) устаревших клеток, или скорость элиминации антители-антигенных комплексов;  $\tau_1$  — запаздывание по каналу  $m_3$ — $m_0$ , связанное с тем, что клетки-предшественники начинают взаимодействовать с клетками антигена лишь спустя определенное время, при этом для  $t - \tau_1 < a_3(t)$  соответствующие интегралы равны 0;  $\tau_2$ —запаздывание по каналу  $m_3$ — $m_4$ , связанное с тем, что различные ткани и органы поражаются антигеном спустя определенное время, при этом для  $t - \tau_2 < a_4(t)$  соответствующие интегралы равны 0; 0 — момент времени, начиная с которого в процессе не участвуют самые «старые» из ранее созданных клеток; на отрезке предыстории  $[0, t_0]$  все функции считаются заданными.

Кроме (77), введем еще одну зависимость

$$f = \kappa m, \quad \kappa = \kappa(\hat{f}), \quad (7.78)$$

аналогичную (43) и означающую дополнительное балансовое соотношение с учетом несоответствия молекулярной структуры субстрата ( $f$ ) и биомассы ( $m$ ). Соотношение  $\kappa = \kappa(\hat{f})$  означает зависимость коэффициента  $\kappa$  в основном от качественного состава субстрата  $\hat{f}$ , а не от его количества.

Учитывая вышеизложенное, а также результаты многих работ о характере взаимодействия клеток иммунной системы и антигена (см., например, [124, 125, 175, 228, 247]), рассмотрим ряд частных случаев (77), (78). Отметим, что блоки минимальной модели (77), не связанные с организмом в целом, в моделях иммунологической сети [314], учитывающей идиотип-антиидиотипические взаимодействия клеток, составляют лишь ее отдельную минимальную базовую ячейку, между различными соседними базовыми ячейками по вертикали появляются новые важные связи. В итоге вся сеть описывается системой уравнений значительно большей размерности, причем матрица этой системы оказывается блочно-трехдиагональной.

## 5.2. Взаимосвязи с другими минимальными моделями.

5.2.1. Модель по Степановой Н. В. — Чернавскому Д. С. [247]. Положим

$$\begin{aligned} \alpha_{50} &= \alpha_{53} = \alpha_{54} = \alpha_{55} = \alpha_{35} = \alpha_{45} = 0, \\ a_i &= 0, \quad t - \tau_1 \leq 0, \quad \alpha_{10} = \alpha_{12} = \alpha_{20} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = \alpha_{34} = 0, \\ \alpha_{11}y_{11} &= \frac{aM_3(\tau) - b}{c + M_3(t)}, \quad \alpha_{13}y_{13} = \alpha M_1(t), \quad \alpha_{33}y_{33} = e, \\ \alpha_{31}y_{31} &= gM_3(t), \quad a, b, c, d, e, g = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Тогда получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= \frac{aM_3 - b}{c + M_3} M_1 - dM_1M_3, & M_1(t_0) &= M_{10}, \\ \frac{dM_3}{dt} &= eM_3 - gM_1M_3, & M_3(t_0) &= M_{30}, \end{aligned} \quad (7.80)$$

исследованную в [247]. Фазовый портрет важного частного случая системы (80) имеет вид рис. 7.10. Точка  $(e/g, M_{31})$  является особой

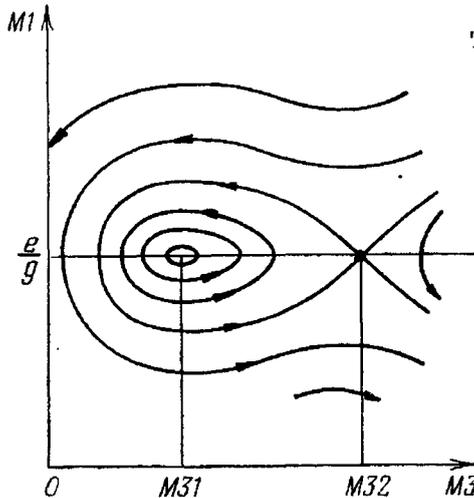


Рис. 7.10.

точкой типа центр, а точки  $(0, 0)$ ,  $(e/g, M_{32})$ —типа седла. Траектории с координатами  $M_3 \rightarrow \infty$ ,  $M_1 \rightarrow 0$  иллюстрируют неограниченный рост антигена и гибель организма.

5.2.2. Модель по Марчуку Г. И. [175]. Положим

$$\begin{aligned} a_i &= 0, \quad \alpha_{00}y_{00} = -\mu, \\ \alpha_{03}y_{03} &= \alpha \left( \frac{M_3(t)}{M_4(t)} \right) M_1(t - \tau_1), \\ \alpha_{04} &= \alpha_{12} = \alpha_{20} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0, \\ \alpha_{10} &= y_{10} = p, \quad \alpha_{11}y_{11} = -\mu_1, \quad \alpha_{13}y_{13} = dM_1, \quad \alpha_{33}y_{33} = e, \\ \alpha_{31}y_{31} &= gM_3, \quad \alpha_{41}y_{41} = gM_4(t), \\ \alpha_{44} &= e + \mu_4 = \sigma M_4, \\ \alpha_{50} &= \alpha_{53} = \alpha_{54} = \alpha_{55} = \alpha_{35} = \alpha_{45} = 0. \end{aligned} \quad (7.81)$$

Тогда приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{dM_0}{dt} &= \frac{M_3}{M_4} \alpha M_1(t - \tau_1) M_3(t - \tau_1) - \mu_0 M_0, \\ \frac{dM_1}{dt} &= \beta M_0 - \mu_1 M_1 - dM_1 M_3, \end{aligned}$$

$$\frac{dM_3}{dt} = eM_3 - gM_1M_3, \quad M_0(t_0) = M_0, \quad M_1(t_0) = M_{10}, \quad (7.82)$$

$$\frac{d(M_3/M_4)}{dt} = \sigma M_3 - \mu_4 \frac{M_3}{M_4}, \quad M_3(t_0) = M_{30}, \quad M_4(t_0) = M_{40},$$

близкой к исследованной в [175]. Заметим, что, в отличие от (82), в [175] роль  $M_3/M_4$  играет функция  $m = 1 - \frac{M'}{M}$ , где  $M'$  — масса (или площадь) здоровой части пораженного органа,  $M$  — соответствующая характеристика здорового органа.

**5.3. Об исследовании базовой модели.** Пусть, в отличие от (79), (81),

$$\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{34}, \alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, \alpha_{04}, \alpha_{50}, \alpha_{53}, \alpha_{54}, \alpha_{55}, \alpha_{35}, \alpha_{45} > 0. \quad (7.83)$$

Тогда дополнительная активность клеток-предшественников при малом  $\alpha_{12}$  приведет к нарастающему (первичному) иммунному ответу и к расширению «петли жизни» (удалению друг от друга точек  $M_{31}$  и  $M_{32}$ ). По отношению к (80) случай (81) можно интерпретировать как увеличение коэффициентов  $a$ ,  $g$  и уменьшение  $e$ ,  $d$ . При большом  $\alpha_{12}$  может возникнуть режим толерантности к антигену, что приведет к сужению петли жизни. Режим толерантности играет важную положительную роль при сохранении плода, пересадке органов и др. Учет в модели роли негативного клона представляется весьма важным не только для моделирования толерантности, но и для иммунного ответа.

Наряду с возможностями, которые предоставляет модель (77) благодаря наличию функций  $y_{ij}$  и  $a_i$ , подчеркнем одну важную особенность, вытекающую из модели (78). При одном и том же в среднем количестве потребляемого субстрата  $f$  при существенном возрастании  $m$  за счет изменения  $\hat{f}$  можно надеяться на эффект существенного усиления иммунного ответа и обновления организма.

В рамках данного класса моделей возможно также описание возникновения некоторых форм патологий гемопоэза, в частности, некоторых форм острого лейкоза. Развитие различных форм острого лейкоза регистрируется как нарушение соотношений параметров форменных элементов крови, а именно, нарушение соотношений концентраций сегментно-ядерных эозинофилов (СЭ), нейтрофилов (СН) и базофилов (СБ), объединенных в клон клеток гемопоэза на рис. 7.9, по сравнению с концентрациями клеток позитивного и негативного клонов [171, 211]. В рамках данного класса моделей возможно учитывать состояние пула стволовых клеток, его интенсивности воспроизводства (пролиферации), его резервных возможностей и способности при экстремальных воздействиях большую долю клеток направлять в пролиферацию по сравнению с остальной долей клеток, идущих в дифференцировку. Нарушение последнего механизма приводит к тому, что в экстремальных условиях не обеспечивается воспроизводство стволовых клеток, а впоследствии это

приводит к дефициту соответствующего клона клеток гемопоэза. Подобный механизм, названный нами *явлением адаптационного перераспределения и восстановительного накопления*, наблюдается в вилочковой железе при воздействиях на организм больших доз стрессреализующего гормона коры надпочечников—гидрокортизона [185]. При этом, воспроизводство зрелых тимоцитов на небольшом временном интервале (до 9 сут) обеспечивается за счет преимущественной дифференцировки, а на длительном (30—40 сут) — в начале интервала за счет преимущественной пролиферации тимоцитов коры долек вилочковой железы.

Более подробно экспериментальные и теоретические модели иммунной системы обсуждались в [120, 185, 314, 316]. Рассмотрим некоторые случаи.

1°. Полное аналитическое и численное исследование динамических свойств модели (77) является весьма сложной задачей, а условия экспериментальных исследований не позволяют одновременно наблюдать процессы по всем требуемым для верификации модели направлениям взаимодействий. Кроме того, модель (77) отражает структуру взаимодействий, но не учитывает специфику взаимодействующих объектов. Так как продукты  $m_0, m_1, m_2, m_5$  соответствуют клеточным популяциям (в ряде случаев и антиген  $m_3$ ), то их производительности  $\alpha_{ij}$  могут иметь следующий вид:

$$\alpha_{ij}(\tau, t) = A_{ij}(M_i, C_j, \tau, t) \delta(t - \tau - d_i), \quad (7.84)$$

где  $d_i$  — возраст размножения соответствующих клеток. Величины  $A_{ij}$  в общем случае являются функциями от  $t, t - d_i$  и от  $m_i(t), M_i(t)$  ( $i = 0, 5$ ), поскольку в описываемом объекте имеет место ингибирование и стимулирование продуктами взаимодействующих клонов клеток. Следует также учитывать различные способы взаимодействия: один продукт  $m_i$  может влиять на другой  $m_j$ , затрачивая при этом некоторую часть  $y_{ij}$ , либо не затрачивая ее (последнее соответствует зависимости  $A_{kj}(m_i)$ ).

С учетом сказанного из (77) получаем следующую уточненную модель взаимодействия подсистем гемопоэза и лимфопоэза в антигеном и прочими внутренними подсистемами организма:

$$m_0(t) = A_{00}y_{00}(t - d_0)m_0(t - d_0) + \int_{a_4(t)}^t \alpha_{04}y_{04}(\tau)m_4(\tau)d\tau,$$

$$y_{04} + y_{44} + z = 1,$$

$$m_1(t) = A_{10}y_{10}(t - d_0)m_0(t - d_0) + A_{11}y_{11}(t - d_1)m_1(t - d_1) - \int_{a_1(t)}^t \alpha_{12}y_{12}(\tau)m_2(\tau)d\tau + \int_{a_3(t)}^t \alpha_{13}y_{13}(\tau)m_3(\tau)d\tau,$$

$$m_2(t) = A_{20}y_{20}(t - d_0)m_0(t - d_0) + A_{22}y_{22}(t - d_1)m_2(t - d_1),$$

$$m_3(t) = A_{33}y_{33}(t - d_3)m_3(t - d_3) - \int_{a_1(t)}^t \alpha_{31}y_{31}(\tau)m_1(\tau)d\tau,$$

$$m_4(t) = \int_{a_4(t)}^t \alpha_{44} y_{44}(\tau) m_4(\tau) d\tau - \int_{a_3(t)}^{t-\tau_2} \alpha_{43} y_{43}(\tau) m_3(\tau) d\tau - \\ - \int_{a_1(t)}^t \alpha_{41} y_{41}(\tau) m_1(\tau) d\tau - \int_{a_1(t)}^t \alpha_{42} y_{42}(\tau) m_2(\tau) d\tau,$$

$$m_5(t) = A_{55} y_{55}(t - d_5) m_5(t - d_5) + A_{50} y_{50}(t - d_0) m_0(t - d_0) - \\ - \int_{a_3(t)}^t \alpha_{53} y_{53}(\tau) m_3(\tau) d\tau,$$

$$c(t) = \int_{a_4(t)}^t \beta(\tau, t) z(\tau) m_4(\tau) d\tau; \quad f(t) = x(\hat{f}) m(t),$$

$$\begin{aligned} y_{00} + y_{10} + y_{20} &= 1, & y_{11} + y_{31} + y_{41} &= 1, \\ y_{22} + y_{12} + y_{42} &= 1, & y_{33} + y_{43} + y_{13} &= 1. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Остальные соотношения модели подобны модели (77).

Система уравнений (85) и после введения естественных предположений о видах производительностей (84) остается весьма сложной и не поддается исчерпывающему исследованию. Поэтому в (85) выделяются различные простые блоки, содержащие один — три продукта, для которых можно получить качественную картину поведения их решений. В этой связи оказываются полезными случаи модели, изученные в гл. 3. Так, разностное уравнение (3.138) описывает изолированную популяцию клеток (это может быть  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ), которая ингибируется своими же клетками.

2°. Рассмотрим поведение изолированной популяции  $m_0(t)$ . Положим  $\alpha_{ij} = 0$ ,  $(i, j) \neq (0, 0)$  в (85), а  $\alpha_{00}(\tau, t, m_0) > 0$ ,  $\alpha' m_0 < < 0$ . Здесь учитывается ингибирование  $M_0$  на  $\alpha_{00}$ . Изучение автономного поведения клона клеток-предшественников важно для доказательства его взаимосвязи с остальными подсистемами. Случайный механизм пролиферации клеток клона соответствует случаю (3.135) при  $\hat{a} = 4$  и отнюдь не является доказательством отсутствия связи клеток-предшественников с другими подсистемами, как указано в [124]. Хаотическое поведение  $m_0(t)$ , по-видимому, связано со сложным механизмом ингибирования клона клеток-предшественников, упрощенно представимого в виде  $\alpha_{00}(M_0)$ , с выбором соответствующей доли  $y_{00}$ , достаточно близкой к единице; последний факт также имеет место в межклеточных взаимодействиях [124].

Здесь может быть сделано предположение о характере оптимального регулирования  $m_0(t)$ : хаотическое поведение обеспечивает увеличение жизнестойкости, а перераспределение  $y_{00}$  в различные интервалы времени обуславливает оптимальный адаптационный режим. Кроме того, при решении оптимизационной задачи иммунной или кроветворной подсистемами организма, связанной с максими-

зацией, например, количества антителообразующих клеток, экспериментальное поведение  $y_{00}$ , полученное в [185], качественно совпадает с выбором  $y_{00}$  [77,78]. При этом для обеспечения максимума концентрации клеток в соответствующем кроветворном ростке на заданном (длительность равна либо больше периода жизни двух поколений) отрезке  $[0, T]$  должна быть в начале отрезка доля  $y_{00}$  существенно большей по сравнению с долей  $y_{00}$  в конце отрезка  $[0, T]$ .

3°. Разностное уравнение (3.138) соответствует случаю, когда клеточная популяция помимо воспроизводства собственного клона клеток производит некоторый внешний продукт и ингибируется этим продуктом (например, случай ингибирования  $m_0$  позитивными или негативными клоном).

Рассмотрим взаимодействие  $M_5(t)$  и  $M_3(t)$ , полагая, что антиген  $M_3$  является продуктом  $M_5$  (что соответствует некоторым формам лейкоза [89, 171, 279]). В данном случае имеем  $\alpha_5(\tau, t, M_3)$ ,  $\alpha_3(\tau, t)$ . Этот тип взаимодействий также подобен исследованному в (3.138) случаю. Аналогичен случай взаимодействия для  $(M_1, M_3)$ .

4°. Разностное уравнение (3.140) обобщает случай (3.135). Оно описывает двухпродуктовое сообщество, в котором клеточная популяция воспроизводит себя, ингибируется своими же клетками и способствует производству или подавлению другой популяции. Это могут быть системы  $(M_0, M_1)$ ,  $(M_1, M_3)$ ,  $(M_5, M_3)$  и др. Результаты исследования этого случая качественно совпадают со случаем 2°.

Очевидно, что для обнаружения более сложных и глубоких эффектов, возникающих в данной биологической системе, необходимо исследовать взаимодействие трех и более объектов. Однако в настоящее время это остается открытой задачей.

5°. Сравнительный анализ экспериментальных данных и теоретических моделей показывает следующее.

а) Исследованные колебательные режимы, возникающие в новом классе динамических моделей, охватывают на качественном уровне известные типы поведения реальных биосистем.

б) В выбранном классе моделей можно эффективно описывать характер взаимодействий продуктов, а управление с помощью функций  $y(t)$  и  $a(t)$  наглядно показывает возможность перехода к различным фазовым портретам развивающейся системы.

в) В ряде случаев диапазон  $(\underline{y}, \bar{y}) (\underline{y} > 0, \bar{y} < 1)$  изменения  $y(t)$  соответствует устойчивым колебаниям и в определенном смысле оптимален для функционирования системы (а именно, если  $y(t) < \underline{y}$ , то в системе отсутствуют колебания, что может ухудшить ее свойства, если  $y(t) > \bar{y}$ , то в системе возникают неустойчивые колебательные режимы). При определенных значениях  $y(t)$  и удельных скоростях воспроизводства по соответствующему «каналу» в системе возникают режимы типа квазистохастических, существование которых расширяет диапазон гомеостатического регулирования системы [285].

г) Введение различных величин запаздываний  $t - a_i(t)$  приводит к появлению колебаний  $m_i$  различных периодов, например, возможны быстрые и медленные иммунные ответы и связанные с ними различные формы хронических заболеваний.

д) В экстремальных условиях эффективность взаимодействия организма с антигеном на определенном временном интервале ( $T - b$ ) повышается, если доля  $y_{00}(t)$  растет в начале интервала (обеспечивается вначале воспроизводство клона клеток-предшественников с большей скоростью по сравнению со скоростью роста остальных клонов клеток), а затем  $y_{00}(t)$  падает в конце интервала (увеличивается скорость роста клеток соответствующих клонов, вступающих во взаимодействие с антигеном).

## § 6. О применении моделей

**6.1. О применении моделей развития растений.** Одна из важных задач применения — прогноз развития растения на отрезке  $[T', T]$  по данным идентификации модели на отрезке  $[0, T]$  или  $[t_0, T']$  ( $0 < t_0 < T' < T$ ),  $T$  — конец вегетационного периода,  $t_0$  — начало появления листы,  $0$  — момент прорастания семени. Правильный прогноз позволяет увеличить число вариантов селекции растений с целью отбора наиболее продуктивных сортов. Трудность прогноза состоит в учете влияния возможных погодных условий на дальнейшее развитие растений. Для анализа этого влияния производится экспериментальная проверка различных гипотез о поведении производительностей (удельных скоростей) развития в зависимости от внешних условий и начальных данных [32, 120, 250]. Если те или иные преимущества растений в момент  $T'$  сохраняются до момента  $T$ , то, очевидно, отпадает необходимость ожидания конца вегетационного периода и возникает возможность ускорения процесса селекции.

Другая важная задача — максимизация продуктивности растения:

$$S^*(T) = \max, \quad (7.86)$$

точнее, отыскание тех характеристик растения, которые дают решение задачи (78) на основе моделей развития растений. При этом

$$S^*(T) = s \frac{1 - e^{-d(T-t_0)}}{d} + \frac{k}{k+1} M_{10} \left( \frac{1}{\alpha_1^0} - \frac{k+1}{k} \right) \{ [1 + (1 - \alpha_1^0) e]^{1/(1-\alpha_1^0)} - (1 + e) \}, \quad (7.87)$$

$$e = \frac{m_{10}}{M_{10}} \cdot \frac{1 - e^{-d(T-t_0)}}{d}.$$

Так как

$$[S_2(T)]'_{\alpha_1^0} = - \frac{k}{k+1} \frac{M_{10}}{(\alpha_1^0)^2} \{ [1 + (1 - \alpha_1^0) e]^{1/(1-\alpha_1^0)} - (1 + e) \} +$$

$$+ \frac{k}{k+1} M_{10} \left( \frac{1}{\alpha_1^0} - \frac{k+1}{k} \right) [1 + (1 - \alpha_1^0) e]^{1/(1-\alpha_1^0)} \times$$

$$\times \left[ \frac{\ln [1 + (1 - \alpha_1^0) e]}{(1 - \alpha_1^0)^2} - \frac{d}{(1 - \alpha_1^0) [1 + (1 - \alpha_1^0) e]} \right]$$

в зависимости от  $e$  может быть как неположительным ( $e$  — малое), так и менять знак ( $e$  — большое), то искомое  $\alpha_1^{0*}$ , максимизирующее выражение (86), может быть как равным нулю, так и больше нуля ( $0 \leq \alpha_1^{0*} \leq k/(k+1)$ ).

В случае сахарной свеклы, применяя данные табл. 7.1, находим при помощи ЭВМ различные решения, помещенные в табл. 7.3\*).

Таблица 7.3

№№	$s_0$ , г	$M_{10}$ , г	$m_0$ , г/сут	$d$	$k$	$t_0$ , сут	$\alpha_1^{0*}$	$S^*$ , г	$S^*/M^*$ , %	$M^*+S^*$ , г
1	0,14	6,5	3,0	0,01	1,125	12	0,243	407,6	40,5	1003,9
2	0,14	1,5	0,5	0,01	1,008	12	0,022	64,8	59	110,9
3	0,14	1,5	0,5	0,01	2	6	0,05116	113,8	19	494,9
4	0,14	1,5	0,5	0,02	2	6	0,3620	42,27	28	110,4
5	0,14	1,5	0,5	0,03	2	6	0,056	23,62	35	67,5

Для более общих случаев модели (59) и (67) можно указать ряд качественных выводов о характере различных управляющих воздействий, решающих задачу (86). Начальные данные семени и зародыша семени растения, а также распределения ресурсов  $\hat{y}$  следует выбирать так, чтобы начальные данные растения в период появления фотосинтезирующей листы попадали в устойчивую область акселерации развития растения (случай седла, отличного от нуля, для системы (64), что подтверждает сформулированный в п. 3.9 настоящей главы принцип; распределение ресурсов после появления листы должно по возможности уменьшить износ листьев (см. (50));  $a(t)$  следует выбирать так, чтобы максимизировать производительность фотосинтеза с учетом износа ранее созданной биомассы растения).

**6.2. О применении моделей развития организма.** Кроме задачи максимизации продуктивности организмов животных (например, в мясо-молочной промышленности), которая аналогична (86) и имеет аналогичные характеристики искомым управляющим воздействиям, во многих приложениях актуальна задача установления рекорда внешней функции организма. Рассмотрим задачу

$$C(T) = \int_{t_0}^T c(\tau) d\tau = \max, \quad (7.86)$$

\*) При получении результатов табл. 7.1 и 7.3 существенную помощь авторам оказали Н. И. Лысенко и Ю. П. Яценко.

где  $[t_0, T]$  — период подготовки рекорда, состоящего в возможно большем значении  $C(T)$ . Ее качественное решение состоит в том, что при малом  $T - t_0$  все ресурсы организма следует использовать непосредственно на максимизацию  $c(\tau)$  ( $z \gg 0$ ), при большом  $T - t_0$ , наоборот, на максимальное удовлетворение внутренних потребностей ( $y_1 \gg 0$ ) на начальном большем отрезке периода  $[t_0, T]$  и максимизации непосредственно  $c(\tau)$  на конечном оставшемся отрезке.

Следующей задачей типа установления рекорда будет

$$\bar{C}(T) = \max, \quad c(t_0) = c_0, \quad t_0 < T, \quad (7.87)$$

где  $c_0$  — заданное значение. Примерами этой задачи могут служить различные спортивные рекорды. Применительно к вопросам определения перспективных спортсменов и наилучших режимов их тренировок (см., например, [59]) из указанных выше моделей вытекают следующие качественные выводы. При прочих равных условиях перспективнее тот спортсмен, у которого более высокая производительность внутренней сферы ( $\alpha_1$ ) или внешней функции ( $\beta$ ); на начальном отрезке достаточно большого периода тренировок максимальное внимание следует уделить укреплению внутренней сферы; на среднем отрезке, постепенно увеличивая нагрузку и обучаясь, следует добиваться максимального возрастания производительности выполнения внешней функции; и, наконец, на заключительном этапе все силы направить на максимизацию  $\bar{C}(T)$ .

Следует отметить, что все эти качественные выводы справедливы, если на интервале  $(t_0, T)$  функции типа  $\alpha, \beta$  монотонно возрастают. Если они на части интервала начинают убывать или имеют колебательный характер, картина решений сильно усложняется [81].

Отметим в заключение этого пункта еще задачу

$$\bar{C}(T) \geq \bar{C}_0, \quad T = \max, \quad (7.88)$$

которую можно назвать рекордом по времени активной трудовой деятельности. Главным фактором, увеличивающим  $T$ , здесь будет уменьшение износа ( $d$ ).

**6.3. О применении моделей иммунной системы.** Оценка иммунологического статуса больного (ИСБ) с целью повышения эффективности индивидуальной терапии является одной из важнейших задач подобно оценке параметров гемодинамики, внешнего дыхания, которая проводится, например, в кардиохирургии [44, 165, 218].

Необходимо также проводить прогноз развития заболевания на отрезке  $[T', T]$  по данным идентификации функций, входящих в модель на отрезке  $[0, T']$  или  $[t_0, T']$  ( $0 < t_0 < T' < T$ ), где  $0$  — момент начала изучения иммунологического статуса больного,  $t_0$  — момент попадания в организм антигена,  $T$  — интересующий врача момент прогноза заболевания. В оценке иммунологического статуса больного важны параметры регуляторных механизмов воспроизводства численности и распределения в организме раз-

личных субпопуляций лимфоидных клеток в процессе их антиген-независимой и антиген-зависимой дифференцировки в условиях нормы, при иммунодефицитном состоянии и др. Это позволит индивидуально для каждого больного количественно обосновать выбор оптимальных схем иммунотерапии инфекционных, аллергических и опухолевых заболеваний, врожденных и приобретенных иммунодефицитов, оценивать эффективность идиотип-антиидиотипических взаимодействий при пересадках органов и др.

Математически управление механизмами регуляции иммунологической толерантностью с использованием модели (77) представимо в виде следующего условия:

$$M_3^-(t) \leq M_3(t) \leq M_3^+(t), \quad (7.89)$$

с соблюдением необходимых ограничений.

Задачу оптимизации иммунного ответа можно сформулировать в виде

$$M_3(T) = 0, \quad T = \min \quad (7.90)$$

с соблюдением необходимых ограничений.

В (89) и (90) управление реализуется за счет функций  $y_{ij}$ ,  $a_i$  и  $\hat{f}$ . Качественное решение задачи (89) и (90) показывает, что как быстрый ( $\tau_1 \ll 1$ ), так и медленный ( $\tau_1 \gg 1$ ) иммунные ответы «вредны» для организма. Так, например, при быстром иммунном ответе может произойти истощение клона клеток-предшественников. Поэтому при эффективной иммунотерапии необходимо ввести определенное запаздывание ( $\tau_1 = \tau_{opt}$ ), при котором в начале происходит накопление до определенного уровня клона клеток-предшественников (вначале растет  $y_{00}$ ), а затем последние идут в дифференцировку в соответствующем направлении. При медленном иммунном ответе антиген может успеть размножиться до опасной для данного организма концентрации.

Примеры применения математических моделей иммунной системы содержатся в [55, 63, 125, 156, 175, 177, 228, 247, 262, 295, 308, 310, 314, 316].

## § 7. Некоторые дополнения и теоретические обобщения

**7.1. Модель предприятия.** Каждое предприятие как развивающуюся систему со своим планом экономического и социального развития представим состоящим из двух подсистем. Подсистема А — система управления предприятием, основные функции которой — дальнейшее совершенствование всех рабочих мест (РМ) предприятия, включая РМ самой системы управления, и подсистема Б — система производства продукции предприятия, идущей внешнему «заказчику». Часть продукции предприятия, идущей на внутренние потребности, можно отнести к общим ресурсам, поступающим на предприятие, или к продукции подсистемы А.

Указанная словесная, описательная модель предприятия и общая теория нового класса динамических моделей позволяют ввести

следующую (обобщенную) математическую модель предприятия:

$$m(t) = \int_{a_1(t)}^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau, \quad (7.91)$$

$$M(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau,$$

$$c(t) = \int_{a_2(t)}^t \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \quad C(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau, \quad (7.92)$$

$$P(t) = \int_{a_1(t)}^t y(\tau) m(\tau) d\tau + \int_{a_2(t)}^t [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \quad (7.93)$$

$$G(t) = M(t) - P(t), \quad (7.94)$$

$$f(t) = k_m m(t) + k_c c(t),$$

$$0 \leq a_1(t), \quad a_2(t) \leq t, \quad (7.95)$$

$$0 \leq t_0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Здесь  $m(t)$  — скорость создания новых РМ: количество новых РМ предприятия в единицу времени в момент  $t$ , создаваемых подсистемой А;  $y(\tau) m(\tau)$  — количество новых РМ в единицу времени в момент  $\tau$ , направляемое в подсистему А;  $[1 - y(\tau)] m(\tau)$  — количество новых РМ в единицу времени в момент  $\tau$ , направляемое в подсистему Б;  $\alpha(\tau, t)$  — показатель эффективности функционирования подсистемы А: доля  $m(t)$ , создаваемая в расчете на одно РМ момента  $\tau$  в А;  $a_1(t)$  — временная граница ликвидации в момент  $t$  устаревших РМ в А (РМ, созданные для А ранее момента  $a_1(t)$  в момент  $t$ , в А совсем не используются, а созданные позже момента  $a_1(t)$  используются на 100 %);  $c(t)$  — скорость создания новой (внешней) продукции предприятия: количество новых (обобщенных) продуктов в единицу времени в момент  $t$ , создаваемых подсистемой Б;  $\beta(\tau, t)$  — показатель эффективности подсистемы Б: доля  $c(t)$ , создаваемая в расчете на одно РМ момента  $\tau$  в Б;  $a_2(t)$  — временная граница ликвидации устаревших РМ в Б;  $P(t)$  — общее количество всех функционирующих РМ на предприятии в момент  $t$ , равное числу всех работающих в случае полной занятости (и одной смены);  $f(t)$  — количество (обобщенного) нового ресурса в единицу времени в момент  $t$ , поступающего на предприятие;  $k_m, k_c$  — коэффициенты согласования размерностей в (94);  $0$  — условный момент времени, ранее которого созданные РМ на предприятии не используются в течение времени  $[t_0, T]$ ;  $t_0$  и  $T$  — соответственно начальный и конечный момент для моделирования предприятия; на предыстории  $[0, t_0]$  все функции модели считаются заданными (будем обозначать их теми же буквами с индексом 0).

При известных  $\alpha, \beta, P, f$  система 4-х уравнений (91)—(94) содержит 5 неизвестных  $m, a_1, a_2, c, y$ . Распределительная функция  $y(\tau)$  ( $\tau \in [t_0, T]$ ) обычно является управляющим воздействием с целью решения определенной оптимизационной задачи. Одной из важных оптимизационных задач является задача максимизации выпуска (внешней) продукции предприятия на заданном периоде  $[t_0, T]$ :

$$I_1(y) = \int_{t_0}^T c(t) dt = \max_y \quad (7.96)$$

с соблюдением соотношений (91)—(95). В процессе поиска наилучшего  $y$  для каждого случая известных  $\alpha, \beta, P, f, y$  необходимо решать нелинейную систему (91)—(94) с целью вычисления  $I_1(y)$ .

Случай  $a = a_1(t) = a_2(t)$  по существу исследован в § 1 данной главы. В этом случае из первых 3-х уравнений находится  $m, a$  и  $c, a; f$  нельзя считать наперед заданным, так как оно является следствием равенства (94).

В общем случае, по аналогии, введем отрезок  $[t_0, t_1]$ , для которого  $a_1(t), a_2(t) \leq t_0$  ( $t \in [t_0, t_1]$ ). Тогда для отыскания  $a_1(t), a_2(t)$  получим систему 2-х уравнений

$$\begin{aligned} f(t) = & k_m \int_{a_1(t)}^{t_0} \alpha(\tau, t) y_0(\tau) m_0(\tau) d\tau + \\ & + k_c \int_{a_2(t)}^{t_0} \beta(\tau, t) [1 - y_0(\tau)] m_0(\tau) d\tau + k_m \int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau + \\ & + k_c \int_{t_0}^t \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(t) = & \int_{a_1(t)}^t y_0(\tau) m_0(\tau) d\tau + \\ & + \int_{a_2(t)}^t [1 - y_0(\tau)] m_0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t y(\tau) m(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где  $y_0(\tau), m_0(\tau)$  — известные функции в силу предыстории. Обозначив первообразные функций  $\alpha y_0 m_0, \beta(1 - y_0) m_0, y_0 m_0, (1 - y_0) m_0$  соответственно через  $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}$ , приходим к системе

$$\begin{aligned} k_m F_{11}(a_1, t_0) + k_c F_{12}(a_2, t_0) = f_1(t) = & k_m F_{11}(t_0, t_0) + F_{12}(t_0, t_0) - f(t) + \\ & + k_m \int_{t_0}^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau + k_c \int_{t_0}^t \beta(\tau, t) [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (7.97)$$

$$\begin{aligned} F_{21}(a_1) + F_{22}(a_2) = f_2(t) = & F_{21}(t) + F_{22}(t) - P(t) + \\ & + \int_{t_0}^t y(\tau) m(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t [1 - y(\tau)] m(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Так как  $\alpha, \beta, y_0, m_0, 1 - y_0$  — неотрицательные функции, то введенные первообразные  $F_{ij}$  монотонны (при любом  $t$ ) и имеют обратные функции  $F_{ij}^{-1}$ . Поэтому можно исключить  $a_2$  из второго уравнения (97):

$$a_2 = F_{22}^{-1} [f_2(t) - F_{21}(a_1)],$$

и подставить в первое:

$$k_m F_{11}(a_1, t) + k_c F_{12} \{F_{22}^{-1} [f_2(t) - F_{21}(a_1)], t\} = f_1(t). \quad (7.98)$$

Уравнение (98) можно для каждого заданных  $m, t$  ( $t \in [t_0, t_1]$ ) решать общими методами отыскания корней [26, 207]. Так как  $t_1$  наперед неизвестно, то все решение следует осуществлять малыми шагами. При этом, отыскивая для каждого найденных  $a_1, a_2$  соответствующее  $m$  из первого уравнения (91) (как нелинейного уравнения типа Вольтерра с известной правой частью

$\int_{a_1(t)}^{t_0} \alpha(\tau, t) y_0(\tau) m_0(\tau) d\tau$ ) и  $c$  путем

подстановки найденного  $m$  во второе уравнение (92), можно постепенно расширять известную предысторию и продвигаться далее вплоть до  $T$ .

Таким образом, система (91)—(94) имеет единственное решение относительно  $m, a_1, a_2, c$  при весьма широких предположениях (см. гл. 3), если уравнение (98) однозначно разрешимо. Но уравнение (98) можно представить в виде

$$f_2(t) - F_{21}(a_1) = \varphi [f_2(t) - F_{21}(a_1), t], \quad (7.98')$$

где  $\varphi$  — неубывающая функция по первому аргументу. Поэтому, если кривая  $y = \varphi(x, t)$  пересекает биссектрису  $y = x$  в одной единственной точке, то уравнение (98) имеет единственное решение. В противном случае может быть и два решения, и ни одного. Решения уравнения (98') нередко можно определить методом простой итерации или методом двусторонних итераций [76, 151]. Если, в частности, найдены  $x_0 \leq x_1 \leq y_1 \leq y_0$ ,  $x_1 = \varphi(x_0, t)$ ,  $y_1 = \varphi(y_0, t)$ , то все  $x_n, y_n$ :  $x_n = \varphi(x_{n-1}, t)$ ,  $y_n = \varphi(y_{n-1}, t)$ , обладают свойством  $x_{n-1} \leq x_n \leq y_n \leq y_{n-1}$ . При этом уравнение  $x = \varphi(x, t)$  имеет единственное решение  $u(t)$ :  $x_n(t) \leq u(t) \leq y_n(t)$ . Очевидно, что тогда искомые  $a_1(t) = F_{21}^{-1} [f_2(t) - u(t)]$ ,  $a_2(t) = F_{22}^{-1} (u(t))$ . Естественно за  $x_0$  принять  $f_2(t) - F_{21}(t)$ , а за  $y_0$  принять  $f_2(t) - F_{21}(0)$ . В таком случае  $\varphi(x_0) \geq x_0$ , и  $\varphi(y_0) \leq y_0$  будет достаточным условием для существования единственного решения уравнения (98), обладающего свойством  $0 \leq a_1(t) \leq t$ .

Важно также определить, сохраняются ли основные качественные выводы о свойствах решений задачи (96) (см. п. 7.1) в случае более общей модели (91)—(95). Как показывает асимптотическое исследование задачи (96) (§ 7 гл. 4), основная причина тенденции роста  $y$  при максимизации  $I_1(y)$  состоит в опережающем росте решения уравнения (91), что приводит к возрастанию  $[1 - y(\tau)]m(\tau)$  при постепенном, «щадящем» увеличении  $y$ . Можно предположить,

что на качественном уровне это свойство сохраняется и для более общей модели (91)—(95), конечно, при условии достаточно быстрого роста функций  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $P$ ,  $f$ .

И, наконец, требуется оценить исходные функции  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $P$ ,  $f$ , особенно  $\alpha$  и  $\beta$ . Здесь необходима тщательная проработка на каждом конкретном предприятии. Трудность оценки  $\alpha$  и  $\beta$  состоит, в частности, в том, что на их значения влияет весь комплекс социальных мероприятий, осуществляемых на данном предприятии. Эффективность выполнения тех или иных функций на каждом РМ зависит не только от совершенства соответствующих технологий, но в существенной степени и от квалификации и настроения специалиста, работающего на этом РМ. Детальную методику обследования РМ с целью оценки их различных характеристик см. в [268].

Для облегчения прогноза значений функций  $\alpha$  и  $\beta$  на достаточно большой период моделирования и оптимизации  $[t_n, T]$  целесообразно отыскивать  $\alpha$  и  $\beta$  в виде определенных достаточно простых выражений (п. 7.7), чтобы дело сводилось к оценке лишь отдельных параметров этих выражений. Методика отыскания функций типа  $\alpha$  и  $\beta$  в общем случае описана в § 1 гл. 5. Что касается численных методов, то описанные в гл. 5 общие схемы переносятся на данный случай без особых изменений.

Указанная здесь модель и весь перечень связанных с ней вопросов в настоящее время апробируется на ряде конкретных объектов.

В заключение заметим, что в более общем случае вместо функций  $a_1$ ,  $a_2$  могут понадобиться функции  $\lambda(\tau, t)$ ,  $\mu(\tau, t)$  ( $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ ) (см. гл. 2), так что, например, первое уравнение (91) примет вид

$$m(t) = \int_0^t \alpha(\tau, t) \lambda(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau.$$

Кроме того, модели вида (91)—(95), а также их объединение, могут служить моделями более крупных экономических регионов, а также отраслей и всего народного хозяйства в целом.

**7.2. Модель научно-производственного объединения.** По сравнению с п. 7.1 отличие может состоять в интерпретации и детализации подсистем А и Б. Кроме функций стимулирования и совершенствования функционирования различных служб (РМ) научно-производственного объединения (НПО), подсистема управления А, которую, исключая общественные организации, нередко называют научно-организационным подразделением НПО, планирует и контролирует работу своего и других подразделений НПО, осуществляет взаимодействие с другими организациями, выработывает требования к формам отчетности различных подразделений НПО и т. д. Специфика подсистемы Б состоит в характере внешней продукции НПО, основную долю которой нередко составляет знаковая, информационная компонента. В идеале последнюю можно рассматривать как описание функций типа  $\alpha$  и  $\beta$ , характеризующих эф-

фективность новых технологий, разработанных в НПО. Особенность знаковой компоненты продукции НПО состоит в большой доступности ее применения в самом НПО и больших возможностях ее широкого распространения.

С учетом сказанного, наряду с моделью п. 7.1 для НПО может быть также полезна следующая «замкнутая» модель НПО:

$$\begin{aligned} \alpha(t, t) + \beta(t, t) &= K_\alpha \int_{a_1(t)}^t [\alpha(\tau, t) \gamma(\tau, t)] \alpha(\tau, \tau) d\tau, \\ \gamma(t) &= K_\beta \int_{a_2(t)}^t [\beta(\tau, t) \gamma(\tau, t)] \beta(\tau, \tau) d\tau, \\ P(t) &= \int_{a_1(t)}^t \alpha(\tau, \tau) d\tau + \int_{a_2(t)}^t \beta(\tau, \tau) d\tau, \\ K_f \cdot f(t) &= \alpha(t, t) + \beta(t, t) + \gamma(t), \\ \alpha(\tau, t) &= \alpha(\tau, \tau) e^{c_\alpha(\tau-t)}, \\ \beta(\tau, t) &= \beta(\tau, \tau) e^{c_\beta(\tau-t)}, \\ \gamma(\tau, t) &= \gamma(\tau) e^{c_\gamma(\tau-t)}, \quad t \geq t_0 > 0. \end{aligned} \tag{7.99}$$

Здесь роль  $m_1(\tau) = ym$  и  $m_2(\tau) = (1 - y)m$  играют соответственно функции  $\alpha(\tau, \tau)$  и  $\beta(\tau, \tau)$ ;  $\gamma(t)$  — продукция в единицу времени в момент  $t$  подсистемы Б;  $K_\alpha, K_\beta, K_f$  — коэффициенты согласования размерностей (размерности  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  считаются совпадающими);  $c_\alpha, c_\beta, c_\gamma$  — коэффициенты, характеризующие снижение показателя эффективности в момент  $t$  тех технологий, которые были созданы в момент  $\tau$  ( $\tau < t$ ); все функции заданы на предыстории  $[0, t_0]$ ;  $0 \leq a_1(t), a_2(t) \leq t$ .

Если заданы функции  $\gamma, P, f$  и коэффициенты  $c_\alpha, c_\beta, c_\gamma$ , то система уравнений (99) сводится к определенной системе 4-х уравнений относительно 4-х неизвестных  $\alpha(t, t), \beta(t, t), a_1(t), a_2(t)$ . Прогнозируя значения  $\gamma, P, f, c_\alpha, c_\beta, c_\gamma$  и решая указанную систему, можно получить в качестве следствия прогнозные значения для  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$ . В отличие от предыдущего пункта теперь после определения  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  (тем же способом, что и выше) придется решать квадратичные уравнения типа Вольтерра, теория и численные методы решения которых, в основном, аналогичны случаю линейных уравнений Вольтерра. Отметим, что второе уравнение в (99) является квадратичным уравнением типа Вольтерра первого рода, которое дифференцированием приводится к уравнению вольтерровского типа второго рода лишь при определенных ограничениях на  $\gamma$ .

Очевидно, что более общие модели НПО типа (99) получаем, если вместо экспонент  $e^{c_i(\tau-t)}$  (множителей при  $\alpha(\tau, \tau), \beta(\tau, \tau), \gamma(\tau)$ ) принимаем более общие функции  $\varphi_i(\tau, t)$  ( $\varphi_i(\tau, \tau) = 1$ ).

7.3. Эколого-экономическая модель региона. Для построения искомой модели экологическую модель региона объединим с соответствующей экономической моделью (п. 7.1). Остановимся подробнее на экологической модели.

Пусть  $\hat{m}(t)$  — скорость образования количества (обобщенных) экологических продуктов региона, остающихся внутри региона;  $\hat{m}_1(t)$  — доля  $\hat{m}(t)$ , при помощи которой происходит процесс воспроизводства  $\hat{m}(t)$ ;  $\hat{c}(t)$  — скорость образования количества (обобщенных) экологических продуктов, покидающих регион;  $\hat{m}_2(t)$  — доля  $\hat{m}(t)$ , при помощи которой происходит процесс образования  $\hat{c}(t)$ ;  $\hat{m}_1(t) + \hat{m}_2(t) = \hat{m}(t)$ ;  $\hat{f}(t)$  — скорость поступления в регион количества (обобщенного) ресурса извне. Тогда

$$\begin{aligned}\hat{m}(t) &= \int_{\hat{a}_1(t)}^t \hat{\alpha}(\tau, t) \hat{m}_1(\tau) d\tau, & \hat{M}(t) &= \int_{\hat{0}}^t \hat{m}(\tau) d\tau > 0, \\ \hat{c}(t) &= \int_{\hat{a}_2(t)}^t \hat{\beta}(\tau, t) \hat{m}_2(\tau) d\tau, & \hat{C}(t) &= \int_{\hat{t}_0}^t \hat{c}(\tau) d\tau \geq 0, \\ \hat{P}(t) &= \int_{\hat{a}_1(t)}^t \hat{m}_1(\tau) d\tau + \int_{\hat{a}_2(t)}^t \hat{m}_2(\tau) d\tau, \\ \hat{M}_i(t) &= \int_{\hat{0}}^t \hat{m}_i(\tau) d\tau > 0, & i &= 1, 2, \end{aligned} \quad (7.100)$$

$$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \hat{M}, \quad \hat{G}(t) = \hat{M}(t) - \hat{P}(t),$$

$$\hat{f}(t) = k_m \hat{m}(t) + k_c \hat{c}(t), \quad \hat{F}(t) = \int_{\hat{0}}^t \hat{f}(\tau) d\tau \geq 0,$$

$$t \geq t_0 > \hat{0}, \quad \hat{0} \leq \hat{a}_1, \quad \hat{a}_2 \leq t,$$

где  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{a}_2$ ,  $\hat{P}$ ,  $\hat{0}$ ,  $k_m$ ,  $k_c$  имеют смысл, аналогичный  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $P$ ,  $0$ ,  $k_m$ ,  $k_c$  в п. 7.1. Существенное отличие теперь может состоять в том, что  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  могут в общем случае принимать как положительные, так и отрицательные значения. Последние будут значениями показателя эффективности процессов разрушения (распада) экологических продуктов.

Кроме (100), введем еще соотношение

$$\hat{f}(t) = k(\hat{F}) \hat{m}(t), \quad t \geq \hat{0}, \quad (7.101)$$

где коэффициент пропорциональности  $k(\widehat{F})$  зависит от качественного состава  $\widehat{F}$  ресурсов в  $\widehat{f}$ . Соотношение (101) есть дополнительное к  $\widehat{f} = \widehat{m} + \widehat{c}$  балансовое соотношение, возникающее в силу несоответствия пропорций количеств различных компонент, входящих в  $\widehat{f}$  и  $\widehat{m}$ .

Модель (100), (101) назовем *экологической моделью* региона. При заданных  $\widehat{\alpha}$ ,  $\widehat{\beta}$ ,  $k(\widehat{F})$ ,  $\widehat{G}$  (100), (101) является системой 7 уравнений относительно 8 неизвестных  $\widehat{m}_1$ ,  $\widehat{m}_2$ ,  $\widehat{m}$ ,  $\widehat{c}$ ,  $\widehat{f}$ ,  $\widehat{p}$ ,  $\widehat{a}_1$ ,  $\widehat{a}_2$ . Задавая  $\widehat{f}$  или  $\widehat{c}$ , или полагая  $\widehat{a}_1 = \widehat{a}_2$ , или решая некоторую оптимизационную задачу, получим определенные системы уравнений. При этом следует иметь в виду, что для их решений должны выполняться условия неотрицательности количеств функционирующих продуктов. Ряд результатов относительно существования решений систем подобных уравнений с указанными дополнительными свойствами решений см. в гл. 3 и в п. 7.3.

Большие трудности оценки исходных величин  $\widehat{\alpha}$ ,  $\widehat{\beta}$ ,  $k(\widehat{F})$ ,  $\widehat{G}$  хорошо известны (см., например, [176]). Ниже (пп. 7.4, 7.7) сделана попытка построения некоторых моделей для функций типа  $\widehat{\alpha}$  и  $\widehat{\beta}$ .

Вернемся теперь к эколого-экономической модели. Будем считать, что определенная доля экономических ресурсов региона ( $q_1 F$ ) состоит из определенных долей  $q_2 \widehat{c}$  и  $q_3 \widehat{G}$  экологических продуктов региона:

$$k_f q_1(t) F(t) = k_c q_2(t) \widehat{c} + k_G q_3(t) \widehat{G}. \quad (7.102)$$

Также будем считать, что определенные доли отвала экономической подсистемы региона ( $q_4 \widehat{G}$ ) и продуктов подсистемы Б ( $q_5 c$ ) являются определенной долей ресурсов ( $q_6 \widehat{F}$ ), поступающих в экологическую подсистему:

$$k_G q_4 \widehat{G} + k_c q_5(t) c(t) = k_F q_6(t) \widehat{F}(t), \quad (7.103)$$

$$0 \leq q_4, q_5, q_6 \leq 1, \quad t \geq t_0.$$

Коэффициенты  $k_f$ ,  $k_c$ ,  $k_G$ ,  $k_G$ ,  $k_F$  численно равны 1 и введены для согласования размерностей левых и правых частей равенств (102), (103). Объединяя (91)—(95) и (100)—(103), получим систему соотношений, которую назовем *эколого-экономической моделью* региона.

При заданных  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$ ,  $f$ ,  $y$ ,  $\widehat{\alpha}$ ,  $\widehat{\beta}$ ,  $k(\widehat{F})$ ,  $q_i$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) (91)—(95) и (100)—(103) является определенной системой уравнений относительно 13 неизвестных  $\widehat{m}$ ,  $\widehat{a}_1$ ,  $\widehat{a}_2$ ,  $\widehat{c}$ ,  $\widehat{m}_1$ ,  $\widehat{m}_2$ ,  $\widehat{c}$ ,  $\widehat{f}$ ,  $\widehat{a}_1$ ,  $\widehat{a}_2$ ,  $\widehat{p}$ ,  $\widehat{G}$ .

Работы по апробации эколого-экономической модели проводятся в настоящее время совместно с институтом Биологии Южных морей им. А. О. Ковалевского АН УССР на примере моделирования шельфа Черного моря с прилегающими прибрежными районами СССР.

**7.4. Модель биосферы.** В качестве математической модели биосферы примем континуальный аналог эколого-экономической модели п. 7.3:

$$m(t, u) = \int_{a_1(t, u)}^t \int_{a_1(t, u)}^u \alpha(\tau, v, t, u) y(\tau, v) m(\tau, v) dv d\tau,$$

$$c(t, u) = \int_{a_2(t, u)}^t \int_{a_2(t, u)}^u \beta(\tau, v, t, u) [1 - y(\tau, v)] m(\tau, v) dv d\tau,$$

$$p(t, u) = \int_{a_1(t, u)}^t \int_{a_1(t, u)}^u y(\tau, v) m(\tau, v) dv d\tau + \\ + \int_{a_2(t, u)}^t \int_{a_2(t, u)}^u [1 - y(\tau, v)] m(\tau, v) dv d\tau.$$

$$G(t, u) = P(t, u) - M(t, u), \quad M(t, u) = \int_0^t \int_0^v m(\tau, v) dv d\tau,$$

$$f(t, u) = k_m \int_0^t m(t, u) du + k_c \int_0^t c(t, u) du,$$

$$F(t, u) = \int_0^t \int_0^v f(\tau, v) dv d\tau,$$

$$0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq a_1, \quad a_2 \leq u \leq t, \quad t, u \geq t_0 > 0,$$

$$\hat{m}(t, u) = \int_{\hat{a}_1(t, u)}^t \int_{\hat{a}_1(t, u)}^u \hat{\alpha}(\tau, v, t, u) \hat{m}_1(\tau, v) dv d\tau,$$

$$\hat{M}(t, u) = \int_{\hat{0}}^t \int_{\hat{0}}^u \hat{m}(\tau, v) dv d\tau > 0,$$

$$\hat{m}(t) = \int_{\hat{0}}^t \hat{m}(t, u) du,$$

$$\hat{c}(t, u) = \int_{\hat{a}_2(t, u)}^t \int_{\hat{a}_2(t, u)}^u \hat{\beta}(\tau, v, t, u) \hat{m}_2(\tau, v) dv d\tau,$$

$$\hat{c}(t, u) = \int_{t_0}^t \int_{\hat{a}_1(t, u)}^u \hat{c}(\tau, v) dv d\tau \geq 0, \quad \hat{c}(t) = \int_0^t \hat{c}(t, u) du,$$

$$\hat{P}(t, u) = \int_{\hat{a}_1(t, u)}^t \int_{\hat{a}_1(t, u)}^u \hat{m}_1(\tau, v) dv d\tau + \int_{\hat{a}_2(t, u)}^t \int_{\hat{a}_2(t, u)}^u \hat{m}_2(\tau, v) dv d\tau,$$

$$\hat{G}(t, u) = \hat{M}(t, u) - \hat{P}(t, u),$$

$$\hat{g}(t, u) = \frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial u \partial t}, \quad \hat{m} = \hat{m}_1 + \hat{m}_2,$$

$$\hat{f}(t) = k_{\hat{m}} \int_0^t \hat{m}(t, u) du + k_{\hat{c}} \int_0^t \hat{c}(t, u) du,$$

$$\hat{F}(t, u) = \int_0^t \int_0^u \hat{f}(\tau, v) dv d\tau, \quad 0 \leq \hat{a}_1, \hat{a}_2 \leq u \leq t,$$

$$\hat{f}(t) = k(\hat{F}) \hat{m}(t),$$

$$k_f q_1(t) f(t) = k_{\hat{c}} q_2(t) \hat{c}(t) + k_{\hat{g}} q_3(t) \hat{g}(t),$$

$$\hat{g}(t) = \int_0^t \hat{g}(t, u) du,$$

$$k_g q_4(t) g(t) + k_c q_5(t) c(t) = k_{\hat{F}} q_6(t) \hat{f}(t),$$

$$0 \leq q_i \leq 1, \quad i = \overline{1, 6}, \quad t, u \geq t_0 > 0. \quad (7.104)$$

Здесь  $m(t, u)$  — скорость изменения по  $u$  скорости создания в момент  $t$  количества (обобщенных) новых продуктов 1-го рода  $u$ -го вида, где  $u$  — одновременно момент времени возникновения продуктов  $u$ -го вида (в результате человеческой деятельности в биосфере);  $y(\tau, v)m(\tau, v)$  — доля  $m(\tau, v)$ , функционирующая в подсистеме А воспроизводства  $m(t, u)$ ;  $\alpha(\tau, v, t, u)$  — показатель эффективности функционирования подсистемы А: аддитивная доля  $m(t, u)$ , создаваемая в расчете на единицу величины  $y(\tau, v)m(\tau, v) dv d\tau$ ;  $a_1(t, u)$  — временная граница ликвидации в моменты  $t, u$  устаревших продуктов в подсистеме А;  $c(t, u)$  — скорость изменения по  $u$  скорости создания в момент  $t$  количества (обобщенных) новых продуктов II рода  $u$ -го вида в результате человеческой деятельности в биосфере;  $[1 - y(\tau, v)]m(\tau, v)$  — доля  $m(\tau, v)$ , функционирующая в подсистеме Б, создающей продукты II рода;  $\beta(\tau, v, t, u)$  — пока-

затель эффективности функционирования подсистемы Б; аддитивная доля есть  $c(t, u)$ , создаваемая в расчете на единицу величины  $[1 - y(\tau, v)]m(\tau, v)$ ;  $a_2(t, u)$  — временная граница ликвидации в моменты  $t, u$  устаревших продуктов в подсистеме Б;  $P(t, u)$  — общее количество функционирующих продуктов в подсистеме (А, Б) в моменты  $t, u$ ;  $G(t, u)$  — отвал: общее количество устаревших продуктов в подсистеме (А, Б) в моменты  $t, u$ ;  $M(t, u)$  — общее количество всех продуктов, созданных к моментам  $t, u$  в подсистеме А в результате человеческой деятельности, начиная с момента 0; 0 — момент времени, для которого  $a_1(t, u), a_2(t, u) \geq 0$  при  $t, u \geq t_0$ ;  $t_0$  и  $t$  — соответственно начальный и текущий момент времени моделирования;  $F(t)$  — общее количество (обобщенного) ресурса, поступившего в подсистему (А, Б) к моменту  $t$  начиная с момента 0;  $\hat{m}(t, u)$  — скорость изменения по  $u$  скорости образования в момент  $t$  количества (обобщенных) экологических продуктов биосферы, остающихся внутри экологической подсистемы (А, Б);  $\hat{m}_1(\tau, v)$  — доля  $m(\tau, v)$ , при помощи которой в подсистеме  $\hat{A}$  происходит процесс воспроизводства  $\hat{m}(t, u)$ ;  $\alpha(\tau, v, t, u)$  — показатель эффективности функционирования подсистемы  $\hat{A}$ : доля  $\hat{m}(t, u)$ , создаваемая в расчете на единицу величины  $\hat{m}_1(\tau, v) dv dt$ ;  $\hat{a}_1(t, u)$  — временная граница вывода из подсистемы  $\hat{A}$  в моменты  $t, u$  ее устаревших продуктов;  $\hat{c}(t, u)$  — скорость изменения по  $u$  скорости образования в момент  $t$  количества (обобщенных) экологических продуктов биосферы, покидающих экологическую подсистему ( $\hat{A}, \hat{B}$ );  $\hat{m}_2(\tau, v)$  — доля  $m(\tau, v)$ , при помощи которой в подсистеме  $\hat{B}$  происходит процесс создания  $\hat{c}(t, u)$ ;  $\hat{\beta}(\tau, v, t, u)$  — показатель эффективности функционирования подсистемы  $\hat{B}$ : доля  $\hat{c}(t, u)$ , создаваемая в расчете на единицу величины  $\hat{m}_2(\tau, v) dv dt$ ;  $\hat{a}_2(t, u)$  — временная граница вывода из подсистемы  $\hat{B}$  в моменты  $t, u$  ее устаревших продуктов;  $\hat{P}(t, u)$  — общее количество функционирующих экологических продуктов в подсистеме ( $\hat{A}, \hat{B}$ ) в моменты  $t, u$ ;  $\hat{M}(t, u)$  — общее количество всех экологических продуктов, созданных к моментам  $t, u$  в подсистеме  $\hat{A}$ , начиная с момента  $\hat{0}$ ;  $\hat{0}$  — момент времени, для которого  $\hat{a}_1(t, u), \hat{a}_2(t, u) \geq \hat{0}$  при  $t, u \geq t_0$ ;  $\hat{F}(t)$  — общее количество (обобщенного) ресурса, поступившего в подсистему ( $\hat{A}, \hat{B}$ ) к моменту  $t$ , начиная с момента  $\hat{0}$ ; на отрезке времени  $[0, t_0]$  все функции модели без значка « $\wedge$ » и на отрезке  $[\hat{0}, t_0]$  все функции модели со значком « $\wedge$ » считаются заданными;  $k(\hat{f})$  — коэффициент, зависящий от качественного состава ресурсов  $\hat{F}$ ; все

коэффициенты  $k_\varphi$  для разных функций  $\varphi$  в (14) равны 1 и введены для согласования размерностей в различных равенствах;  $q_i$  ( $i = \overline{1,6}$ ) — относительные доли взаимодействующих продуктов подсистем (А, Б) и  $(\widehat{A}, \widehat{B})$ .

Как показано в гл. 3 (см. также п. 7.1), двумерная система уравнений вольтерровского типа (104) обладает свойствами, аналогичными одномерным вольтерровским системам. Важной особенностью модели (14) является возможность интерпретации в качестве экологических «продуктов» в процессе эволюции биосферы «исходных» структур типа  $\alpha(t, u)$  и  $\beta(t, u)$  для различных биологических систем. Если к этому добавить продукты биосферы в виде соответствующих управляющих структур, то возникновение простейших развивающихся систем и дальнейшее их усложнение вплоть до возникновения различных биосистем станет неизбежной закономерностью развития биосферы. Однако для моделирования процессов эволюции и решения ряда других задач при помощи (14) снова необходимо знание исходных структур типа  $\alpha(\tau, v, t, u)$  и  $\beta(\tau, v, t, u)$ , которые являются продуктами некоторой системы, включающей биосферу в качестве ее элемента, и т. д. Поэтому на некотором этапе необходимо проникновение в сущность закономерностей поведения показателей эффективности функционирования различных систем. Такая попытка будет сделана в п. 7.7.

Заметим только, что исходя из результатов исследования оптимизационной задачи типа I в гл. 4 и учитывая связи подсистем (А, Б) и  $(\widehat{A}, \widehat{B})$  в (104), можно ожидать, что повышенные требования от подсистемы (А, Б) к биосфере, выражающееся в чрезмерно быстром росте потребления экологических продуктов  $\widehat{c}(t)$ , приведет к замедлению роста  $\widehat{M}(t)$  и, тем самым, к серьезным изменениям в подсистеме  $(\widehat{A}, \widehat{B})$ . За счет уменьшения коэффициента  $k^{-1}(\widehat{F})$  этот эффект может существенно усилиться.

**7.5. Модель клетки.** В качестве математической модели клетки растения или животного примем аналог экологической части модели биосферы, детализированной введением ряда подсистем клетки, аналогичных подсистемам растения и животного (§§ 3,4):

$$m(t, X) = \int_{a^1(t, X)}^t \int_{a^2(t, X)}^X \alpha(\tau, Y, t, X) m^1(\tau, Y) dY d\tau,$$

$$c(t, X) = \int_{a^2(t, X)}^t \int_{a^4(t, X)}^X \beta(\tau, Y, t, X) m^2(\tau, Y) dY d\tau,$$

$$p(t, X) = \int_{a^1(t, X)}^t \int_{a^2(t, X)}^X m^1(\tau, Y) dY d\tau + \int_{a^2(t, X)}^t \int_{a^4(t, X)}^X m^2(\tau, Y) dY d\tau > 0,$$

$$m^1(t, X) + m^2(t, X) = m(t, X),$$

$$M(t, X) = \int_0^t \int_0^X m(\tau, Y) dY d\tau > 0,$$

$$G(t, X) = P(t, X) - M(t, X) \geq 0,$$

$$c(t, X) = \int_0^t \int_0^X c(\tau, Y) dY d\tau \geq 0,$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_i K_{m_i} \int_{\Omega} m_i(t, X) dX + \sum_s k_{c_s} \int_{\Omega} c_s(t, X) dX = \\ &= \sum_i k_i(\hat{f}) \int_{\Omega} m_i(t, X) dX, \end{aligned} \quad (7.105)$$

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \geq 0, \quad 0 \leq a^1, a^2, a^3, a^4 \leq t,$$

$$t \geq t_0 > 0, \quad X \in \Omega \subset \mathbb{R}^3.$$

Здесь смысл всех введенных величин аналогичен предыдущему, однако в данном случае  $m, m^1, m^2, a^1, a^2, a^3, a^4, c, p, f$  — вектор-функции времени  $t$  и точки  $X$  трехмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ ;  $X = (x_1, x_2, x_3)$  (это означает, что  $X$  одновременно является обозначением продуктов  $X$ -го вида, и тем самым, различные продукты клетки оказываются распределенными в пространстве);  $\alpha, \beta$  — соответствующие матрицы; запись первого равенства в (105) означает

$$m_i(t, X) = \sum_{j=1}^n \int_{a_j^1}^{x_1} \int_{a_1^2}^{x_2} \int_{a_2^2}^{x_3} \alpha_{ij}(\tau, Y, t, X) m_j^1(\tau, Y) dY d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7.106)$$

аналогично—второго равенства; неравенства для вектора означают, как обычно, соответствующие неравенства для соответствующих компонент этих векторов;  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^3$ , занимаемая клеткой.

Полагая, в частности, в (106)

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(\tau, Y, t, X) m_j^1(\tau, Y) &= F_{ij}(M_1, M_2, \dots, M_n) m_j(\tau, Y) + \\ &+ \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ D_{ij}^{(1)}(M_1, M_2, \dots, M_n) \frac{\partial M_i}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ D_{ij}^{(2)}(M_1, M_2, \dots, M_n) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{\partial M_i}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ D_{ij}^{(3)}(M_1, M_2, \dots, M_n) \frac{\partial M_i}{\partial x_3} \right] \right\} \frac{m_j(\tau, Y)}{\partial M_j / \partial t}, \end{aligned} \quad (7.107)$$

$$a^1(t, X), \quad a^2(t, X) = \text{const},$$

где  $M_1, M_2, \dots, M_n$  зависят лишь от  $X, t$ , приходим к системе нелинейных параболических уравнений с частными производными

вида

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} = F_i(M_1, M_2, \dots, M_n) + \frac{\partial}{\partial X} \left[ D_i(M_1, \dots, M_n) \frac{\partial M_i}{\partial X} \right], \quad i = \overline{1, n}, \quad (7.108)$$

описывающей многие известные автоволновые процессы, различные диссипативные структуры [103, 110, 154, 226—228], а также весьма сложные процессы дифференциации клеток [236].

Опыт исследования и применения более общих моделей вида (105) показывает, что имеется новая возможность объяснения деления и дифференциации клеток, не связанная с механизмами скачкообразного изменения элементов модели. Как было показано в гл. 4, в случае колебательного характера функций типа  $\alpha$  и  $\beta$  различные оптимизационные задачи для рассматриваемого класса моделей имеют неединственное решение. Предположив, что развитие клеток преследует решение определенных оптимизационных задач, например, удвоение клеток максимизирует надежность их функционирования, а дифференцировка клеток максимизирует эффективность выполнения заданных функций для некоторых систем клеток, приходим к возможности объяснения деления и дифференцировки клеток через неединственность решений соответствующих оптимизационных задач. Исходя из одной предыстории для одной клетки, можно получить (при спаде значений функций типа  $\alpha$  и  $\beta$ ) два различных решения модели (105), удовлетворяющие одному и тому же оптимизационному принципу, которые естественно интерпретировать как модели развития и роста 2-х новых клеток (при возрастании значений  $\alpha$  и  $\beta$ ), предыстории каждой из которых (и новый спад  $\alpha$  и  $\beta$ ) послужат причиной возникновения моделей 4-х новых клеток и т. д.

**7.6. Модель биополя.** Пусть обособленный биологический объект занимает в пространстве  $\mathbb{R}^3$  некоторую область  $\Omega_3$  и пусть  $\mathbb{R}^3/\Omega_3$  — дополнение к  $\Omega_3$  до  $\mathbb{R}^3$ . Будем считать, что в  $\mathbb{R}^3/\Omega_3$  определено биополе, если в каждой точке этой области задана вектор-функция

$$c(t, X) = \{c_1(t, X), c_2(t, X), c_3(t, X)\}, \quad X \in \mathbb{R}^3/\Omega_3. \quad (7.109)$$

Здесь  $t$  — время;  $X = (x_1, x_2, x_3)$  — декартовы координаты точки  $X$ ;  $c_1$  — скорость изменения по  $X$  (т. е. последовательно по  $x_1, x_2, x_3$ ) скорости образования концентрации количества (обобщенного) материального продукта  $t, X$ -го вида в точке  $X$  в момент  $t$ , выработанного биологическим объектом;  $c_2$  — скорость изменения по  $X$  скорости образования концентрации количества (обобщенного) энергетического продукта  $t, X$ -го вида в точке  $X$  в момент  $t$ ;  $c_3$  — скорость изменения по  $X$  скорости образования концентрации (плотности) количества (обобщенного) информационного продукта  $t, X$ -го вида в точке  $X$  в момент  $t$ .

В качестве математической модели биополя на основании вышеизложенного естественно принять следующую систему

соотношений:

$$m(t, X^1) = \int_{a^1(t, X^1)}^t \int_{a^2(t, X^1)}^{X^1} \alpha(\tau, Y, t, X^1) m^1(\tau, Y) dY d\tau,$$

$$X^1 \in \Omega_3,$$

$$c(t, X^1, X^2) = \int_{a^3(t, X^1, X^2)}^t \int_{a^4(t, X^1, X^2)}^{X^1} \beta(\tau, Y, t, X^1, X^2) m^2(\tau, Y) dY d\tau,$$

$$X^2 \in \mathbb{R}^3/\Omega_3,$$

$$m^1(\tau, Y) + m^2(\tau, Y) = m(\tau, Y),$$

$$p(t, X^1, X^2) = \int_{a^1(t, X^1)}^t \int_{a^2(t, X^1)}^{X^1} m^1(\tau, Y) dY d\tau + \\ + \int_{a^3(t, X^1, X^2)}^t \int_{a^4(t, X^1, X^2)}^{X^1} m^2(\tau, Y) dY d\tau,$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^3 \left[ k_{m_i} \int_{\Omega_3} m_i(t, X^1) dX^1 + k_{c_i} \int_{\Omega_3} \int_{\mathbb{R}^3/\Omega_3} c_i(t, X^1, X^2) dX^2 dX^1 \right] = \\ = \sum_{i=1}^3 k_i(\hat{f}) \int_{\Omega_3} m_i(t, X^1) dX^1, \quad t \geq t_0 > 0. \quad (7.110)$$

Здесь

$$m(t, X) = \{m_1(t, X), m_2(t, X), m_3(t, X)\}, \quad X \in \Omega_3; \quad (7.111)$$

$m_i(t, X)$  — скорость изменения по  $X$  скорости воспроизводства концентрации количества (обобщенного) продукта  $t, X$ -го вида соответственно материального ( $i = 1$ ), энергетического ( $i = 2$ ) и информационного ( $i = 3$ ) в точке  $X$  в момент времени  $t$ ;  $\alpha, \beta$  — матрицы третьего порядка, компоненты которых являются показателями эффективности функционирования рассматриваемого биологического объекта по соответствующим каналам;  $c(t, X)$  см. в (109); смысл всех других величин и обозначений аналогичен предыдущим.

Естественно  $\Omega_3$ , в которой задано (111), назвать *биополем внутренней сферы* биологического объекта или *внутренним биополем*, а  $\mathbb{R}^3/\Omega_3$  вместе с (109) — *внешним биополем*.

Условия, при которых могут возникать значительные величины  $c_2(t, X)$  при значениях  $X$ , весьма удаленных от границы области  $\Omega_3$ , описаны в [71].

**7.7. Модели показателей эффективности.** Из опыта разработки и применения ряда конкретных моделей экономических и биологических объектов, вытекает, что решающее значение в рассматриваемом классе моделей имеют функции типа  $\alpha$  и  $\beta$ . Исходя из их интерпретации как показателей эффективности (производительности) или просто эффективностей выполнения определенных функций по

заданным каналам и их анализа на ряде примеров, можно выделить следующие обобщенные свойства эффективности.

I. Эффективность развивающейся системы зависит от объемов ресурсов, идущих на выполнение ее внутренних и внешних функций (эффективность на большом отрезке времени обычно возрастает при увеличении доли ресурсов на внутренние функции), а также от состояния внешней среды.

II. Рост эффективности развивающейся системы может быть обусловлен: 1) расчленением системы на взаимодействующие подсистемы; 2) выводом из строя устаревших элементов системы (с низкими показателями эффективности); 3) обучением через взаимодействие системы с внешней средой; 4) совершенствованием технологий и структур.

III. Эффективность падает за счет простого увеличения числа элементов системы и за счет падения с течением времени эффективности ранее созданных элементов системы.

В отличие от экономической системы, для которой эффективность (производительность) в силу научно-технического прогресса в нормальных условиях постоянно возрастает, для большинства биологических объектов в процессе их развития эффективность вначале возрастает, а затем падает.

Математические модели эффективностей типа  $\alpha(\tau, t)$  и  $\beta(\tau, t)$  могут иметь вид нелинейных функций и функционалов от  $m, M, y, a, \tau, t$  и могут отыскиваться в виде только функций от  $\tau, t$ . Приняв за элементарные модели эффективностей, например, функции вида

$$\alpha_i^0 \frac{m_i(\tau)}{\int_0^\tau m_i(u) y(u) du} e^{\alpha_i(\tau-t)},$$

можно чисто теоретически получить более сложные структуры путем укрупнения исходных многопродуктовых моделей и сохранения значений обобщенных продуктов. На этом пути, по-видимому, может быть создана теория, аналогичная биокинетике.

Сделаем попытку построения введения в такую теорию. Пусть, с одной стороны,

$$m(t) = \int_0^t \alpha(\tau, t) y(\tau) m(\tau) d\tau,$$

$$t \geq t_0 > 0, \quad m_0 = m(t_0), \quad (7.112)$$

$$M(t_0) = \int_0^{t_0} m_0(t) dt = M_0,$$

и с другой стороны,

$$m_i(t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t \alpha_{ij}(\tau, t) y_{ij}(\tau) m_j(\tau) d\tau,$$

$$y_{ij}(\tau) \alpha_{ij}(\tau, t) = \alpha_{ij}^0 \frac{m_i(\tau)}{\int_0^\tau m_j(u) du} e^{d_i(\tau-t)}, \quad (7.113)$$

$$i, j = \overline{1, n}, \quad t \geq t_0 > 0.$$

Из (113) вытекает, что

$$\frac{m_i'}{m_i} + d_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^0 \frac{M_j'}{M_j},$$

$$M_j = \int_0^t m_j(u) du M_{j0} = M_j(t_0), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\ln \frac{m_i}{m_{i0}} + d_i(t - t_0) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^0 \ln \frac{M_j}{M_{j0}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда

$$m_i = M_i' = m_{i0} e^{d_i(t-t_0)} \prod_{j=1}^n \left( \frac{M_j}{M_{j0}} \right)^{\alpha_{ij}^0}. \quad (7.114)$$

Определив отсюда  $M_i$ ,  $m_i = M_i'$  и подставив найденные выражения в формулу

$$\alpha(\tau, t) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}^0 \frac{m_i(\tau) m_j(\tau) e^{d_i(\tau-t)}}{y(\tau) M_j(\tau) (m_1(\tau) + m_2(\tau) + \dots + m_n(\tau))}, \quad (7.115)$$

вытекающую из соотношения (112), (113), получим одно из искомым выражений для показателя эффективности всей системы.

Однако решение системы (114) в общем случае затруднительно. Рассмотрим частный случай  $d_i = 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), что соответствует случаю оценки  $\alpha(\tau, \tau)$ . Тогда можно положить

$$M_i = M_{i0} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\beta_i},$$

$$m_i = M_{i0} \frac{\beta_i}{t_0} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\beta_i - 1}, \quad m_{i0} = M_{i0} \frac{\beta_i}{t_0}, \quad (7.116)$$

$$\frac{1}{t_0} \sum_{i=1}^n M_{i0} \beta_i = M_0, \quad \sum_{i=1}^n M_{i0} = M_0,$$

где в силу (114) ( $d_i = 0$ ) искомые  $\beta_i$  являются решением линейной алгебраической системы

$$\beta_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^0 \beta_j = 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.117)$$

Подставив найденные выражения (116) в (115) ( $d_i = 0$ ), получим

$$\alpha(\tau, \tau) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}^0 \frac{M_{i0} (\tau/t)^{\beta_i} \beta_j t_0}{y(\tau) \tau [M_{10} \beta_1 (\tau/t_0)^{\beta_1-1} + \dots + M_{n0} \beta_n (\tau/t_0)^{\beta_n-1}]}, \quad (7.118)$$

где  $\{\beta_i\}$  — решение системы (117).

Следует подчеркнуть, что коэффициенты  $\alpha_{ij}^0$ ,  $M_{i0}$  в выражениях (117), (118) являются свободными параметрами (с учетом соотношений (116)), которыми можно распоряжаться для синтеза  $\alpha(\tau, \tau)$  по различным оптимизационным критериям.

После оценки  $\alpha(\tau, \tau)$  неизвестную функцию

$$\omega(\tau, t) = \frac{\alpha(\tau, t)}{\alpha(\tau, \tau)}, \quad \omega(\tau, \tau) = 1, \quad (7.119)$$

можно оценивать, привлекая различные теории постепенного падения со временем эффективности ранее созданных средств функционирования систем (амортизации оборудования, износа материалов, старения клеток, тканей, органов и организма в целом и др.).

Другой аппарат для синтеза  $\alpha(\tau, t)$  получим, если в качестве элементарных показателей эффективности (во временной области) примем

$$y_{ij}(\tau) \alpha_{ij}(\tau, t) = \alpha_{ij}^0 \frac{1}{t}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad t \geq t_0 > 0. \quad (7.120)$$

Тогда

$$m_i = \frac{dM_i}{dt} = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^0 M_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (7.121)$$

и дело сводится к решению линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dZ_i}{dv} = -Z_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^0 Z_j, \quad v = \ln t, \quad (7.122)$$

$$M_i = tZ_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq t_0 > 0,$$

после чего искомое  $\alpha(\tau, t)$  равно

$$\alpha(\tau, t) = \frac{1}{ty(\tau)} \frac{\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}^0}{\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}^0 Z_j}, \quad (7.123)$$

$$t_0 \sum_{i=1}^n Z_{i0} = M_{0i} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}^0 Z_{j0} = m_0.$$

Другие обобщения вытекают из необходимости рассмотрения в ряде приложений, например в биологии, наряду с процессами синтеза (анаболическими процессами) процессов распада (катаболических процессов). Нетрудно в моделях ввести показатели эффективности распада, которые при объединении с показателями эффективности синтеза войдут в уравнение с противоположными знаками. Обобщая этот факт далее, получим уравнения, в которых функции типа  $\alpha$  и  $\beta$  могут иметь на разных интервалах различные знаки.

Заметим, что главным фактором, определяющим в конечном счете падение эффективности всякой развивающейся системы в целом, является износ. Определенного уменьшения влияния износа можно добиться за счет повышения эффективности взаимодействия системы с внешней средой, увеличения имеющихся ресурсов на удовлетворение внутренних потребностей системы и т. д. Однако избавиться от него полностью, по-видимому, нельзя.

Замыкание моделей также может быть получено на основе ряда экстремальных принципов. Так, в экономике известен принцип дифференциальной оптимизации [130a], предполагающий наилучшее использование ресурсов, поступающих в систему, в каждый данный момент времени. В биологии принимается более сильное предположение [233], что вся предыстория образуется так, чтобы максимизировать прирост биомассы и т. д.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение остановимся на некоторых методологических вопросах, более полно освещенных в [75]. Вдумчивый читатель, изучивший наиболее интересные для него разделы настоящей монографии, все же, очевидно, захочет найти четкое математическое определение понятия РС. Одно из определений приведено на стр. 9; кроме того, там же перечислены некоторые свойства РС. Естественно, однако, предположить наличие еще ряда дополнительных существенных свойств. Развитие интегро-функциональных моделей данного класса позволило не только объединить несколько частных свойств РС, но также предоставило возможность выявить ряд новых свойств, объяснить и понять их в совокупности. Развитие моделей и методов, позволивших описать и проанализировать целостную картину функционирования РС, является достаточно актуальной и важной задачей. По этому поводу уместно вспомнить слова В. И. Ленина: «...Кто берется за частные вопросы без предварительного решения общих, тот неминуемо будет на каждом шагу бессознательно для себя «натякаться» на эти общие вопросы» \*). Само собой разумеется, что частные вопросы и задачи послужили развитию частных моделей, методов, алгоритмов, на основе которых создавались общим модели, методы и теории. Но этот процесс эффективен только тогда, когда позволяет на базе общих теорий, моделей, методов и алгоритмов более глубоко изучить конкретные задачи, открыть новые свойства РС. В нашем случае развитие интегро-функциональных моделей, в частности, позволило более глубоко понять динамику функционирования тимоцитов центрального органа иммунной системы — вилочковой железы [185], связанную с явлением адаптационного перераспределения и восстановительного накопления тимоцитов при стрессовом воздействии; объяснить механизм пролиферации и дифференцировки клона клеток-предшественников, например, стволовых кроветворных клеток, и объединить при этом кажущиеся противоречивыми свойствами квазистохастического и колебательного характера изменения их численности.

\*) В. И. Ленин. ПСС, 15, с. 368.

Что же дал метод математического моделирования в целом. Какие его недостатки, проявились в настоящее время? Можно ли повысить эффективность методов и средств математического моделирования? Каким должно быть соотношение между фундаментальными (методологическими, теоретическими) и прикладными исследованиями?

Эти вопросы частично уже были рассмотрены в настоящей монографии. Можно с удовлетворением констатировать ряд важных результатов в неравновесной термодинамике [201], математической биофизике [55, 110, 103, 128, 175], биомедицинской кибернетике [3, 4, 177], развивающейся экономике [210, 224], изучение и понимание которых стало возможным только в результате применения методов и средств моделирования.

Основные недостатки методики метода связаны с отсутствием своевременной динамической оценки характера развития «Сциллы усложненности и Харибды недоверности» методов и средств моделирования, с одной стороны, и возможностями экспериментального и практического доказательства тех или иных свойств РС, с другой стороны. Эти недостатки заключаются в следующем: а) некорректная постановка задач и отсутствие полноты данных и целей; б) редукционизм, зачастую приводящий к излишнему упрощенчеству; в) механицизм, нередко отождествляющий свойства РС с механизмами типа «часы»; г) витализм, обожествляющий всякие механизмы регулирования РС; д) хализм, неправоммерно противопоставляющий приобретенные в ходе эволюции свойства «живой» и неживой» материи, и др.

Оценка способов повышения эффективности и качества методов и средств моделирования может быть получена с позиций, рассмотренных в разделе 7.7, гл. 7\*). Что же касается моделей РС, то их недоопределенность может быть ликвидирована на основе их замыкания с помощью введения соответствующих принципов структурно функциональной организации.

Точные формулировки некоторых принципов даны в [75]. Эти принципы для краткости условно можно объединить в группы следующим образом.

Группа экстремальных принципов, объясняющих характер поведения РС, а также определяющих целесообразность ее структур и функций, при которых обеспечивается эффективное функционирование РС.

Группа принципов сохранения, объясняющих характер поведения тех структур и функций РС, при которых обеспечивается гомеостазисное (например, генетическое) постоянство внутренней среды РС.

Группа принципов адекватности, объясняющих те значения параметров, свойств РС, которые обеспечивают согласованное

---

\*) Иванов В. В., Михалевич В. С., Сергиенко И. В. Проблемы повышения эффективности моделирующих комплексов.— Кибернетика, 1982, № 5, с. 22—32.

взаимодействие внутри данных уровней и между ними и регулирующими системами РС.

Группа принципов воспроизводства и развития, объясняющих возникновение, существование закономерно изменяющихся и появляющихся новых количественных и качественных характеристик и свойств РС.

Остальные группы принципов приведены в [75].

Сделаем попытку определить соотношение между фундаментальными и прикладными исследованиями. Какой должна быть динамическая модель, связывающая воедино эти исследования, какова доля обобщенного ресурса, идущего на фундаментальные либо прикладные исследования? По-видимому, такой динамической моделью может служить двухпродуктовая модель (2.1) — (2.3), причем роль продукта первого рода может выполнять обобщенный ресурс, идущий на получение фундаментальных знаний, а второго рода — прикладных. Из анализа вытекает, что должно быть динамическое перераспределение ресурса первого и второго рода; на отдельных этапах возможна попеременная лидирующая роль первого или второго продукта; при максимизации положительного эффекта в данной отрасли науки, чем длительнее период ее развития и чем она весомей, тем большая доля ресурса должна идти на развитие фундаментальных исследований данной отрасли науки. Наконец, повышение эффективности научных исследований требует дальнейшего развития методов и средств автоматизированного анализа данных, развития технологий безбумажной информатики. Причем понятие «анализ данных» существенно расширяется. В связи с этим полезно процитировать слова известного математика Дж. У. Таки: «Будущее анализа данных может привести к большому прогрессу, к преодолению реальных трудностей, к оказанию большой помощи всем областям науки и техники. Будет ли то так? Это зависит от нас, от нашего желания встать на каменистый путь реальных проблем вместо гладкой дороги нереальных предпосылок, произвольных критериев и абстрактных результатов, не имеющих реалистической направленности. Кто примет этот вызов?» ([75], с. 56).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Введение в теорию групп.— М.: 1980.—144 с.
2. Альперин Л. Б.; Исавина И. А., Лозовой В. П., Шергин С. Н. Математическая модель ауторегуляции иммунного ответа.— Автометрия, 1979, № 6, с. 75—85.
3. Амосов Н. М. и др. Медицинская информационная система / Под ред. Н. М. Амосова, А. А. Попова.— Киев : Наукова думка, 1975.— 588 с.
4. Амосов Н. М. и др. Теоретические исследования физиологических систем / Под ред. Н. М. Амосова.— Киев : Наукова думка, 1977.— 245 с.
5. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Наука, 1959.— 915 с.
6. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1967.— 488 с.
7. Анохин П. К. Системный анализ интегративной деятельности нейрона.— УФН, 1974, 5, № 2, с. 5—92.
8. Антомонов Ю. Г. Принципы нейродинамики.— Киев: Наукова думка, 1974.— 200 с.
9. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 304 с.
10. Арушанян О. Б. О проекте NATS (США).— В кн.: Комплексы программ математической физики: Материалы VI Всесоюз. семинара по комплексам программ матем. физики) / Под ред. Н. Н. Яненко.— Новосибирск., 1980, с. 3—12.
11. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца.— ДАН СССР, 1977, 234, № 2, с. 336—339.
- 11а. Асаченков А. Л., Белых Л. Н. Исследование математической модели вирусного заболевания.— В кн.: Математические методы в клинической практике. Новосибирск: Наука, 1978, с. 19—26.
12. Ахламов А. Г. Некоторые вопросы совершенствования математического обеспечения системы моделирования дискретных процессов.— Автореф. дисс. ... канд.-физ.-матем. наук.— Киев, 1980.— 25 с.
13. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.— М.: Мир, 1979.— 536 с.
14. Ахутин В. М., Лурье О. Б., Немирко А. П., Попечителей Е. П. Теория и проектирование диагностической электронно-медицинской аппаратуры / Под ред. В. М. Ахутина.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.— 148с.
15. Бабич М. Д., Бесараб П. Н., Добра Н. Д., Иванов В. В. Решение некоторых классов уравнений.— Киев: Изд. ИК АН УССР, 1979.— 56 с. (Препринт/ АН УССР, Ин-т кибернетики; 79—54).
16. Бабич М. Д., Шевчук Л. Б. Об одном алгоритме приближенного решения систем нелинейных уравнений. — Кибернетика, 1982, № 1, с. 37—41.
17. Бакушинский А. Б., Данилов-Данилян В. И. Мелкая философия на глубоком месте или «антисогласованный пессимизм». — Экономика и математические методы, 1978, № 2, с. 392—397.
18. Балабаев Н. К., Луневская Л. В. Движение по кривой в  $n$ -мерном пространстве.— В кн.: Материалы по математическому обес-

- печению ЭВМ (фортран). Вып. 1.— Пущино: Изд. НЦБИ АН СССР, 1978.— 52 с.
19. Балантер Б. И., Ханин М. А., Чернавский Д. С. Введение в математическое моделирование патологических процессов.— М.: Медицина, 1980.— 264 с.
  20. Башмаков И. Н. Пакеты прикладных программ — новая компонента архитектуры математического обеспечения ЭВМ третьего поколения.— Труды МЭИ, 1975, вып. 221, с. 3—15.
  21. Бекларян Л. А., Петров А. А., Тер-Крикоров А. М. Об одной линейной динамической модели производства.— Экономика и математические методы, 1978, XIV, № 2, с. 312—325.
  22. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства.— М.: Мир, 1965.— 276 с.
  23. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи.— М.: Мир, 1970.— 182 с.
  24. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных.— М.: Мир, 1974.— 208 с.
  25. Беляев В. И. Теория сложных геосистем.— Киев: Наукова думка, 1978.— 156 с.
  26. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений.— М.: Физматгиз, 1962.
  27. Березовский А. И., Данильченко Л. С., Дульская В. А., Иванов В. В. Аппроксимация функций.— Киев: ИК АН УССР, 1979.— 38 с. (Препринт/ АН УССР. Ин-т кибернетики: 79-48).
  28. Березовская Л. И., Дзех В. Н., Еремина Е. П. и др. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Руководство по использованию пакета СЛАУ/Под ред. В. М. Глушкова, В. М. Дракина.— М.: 1980.— 164 с.
  29. Березовская Ф. С. Алгоритм исследования сложных стационарных точек двумерных моделей.— В кн.: Математическое моделирование биологических процессов / Под ред. А. М. Молчанова — М.: Наука, 1979, с. 105—116.
  30. Бесараб П. Н. Определение параметра пространственной ориентации движущегося объекта.— ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 1, с. 240—246.
  31. Биологическая кибернетика/Под ред. А. Б. Когана. Учебн. пособие для вузов.— М.: Высшая школа, 1977.— 408 с.
  32. Биология и селекция сахарной свеклы/Под ред. И. Ф. Бузанова.— М.: Колос, 1968.— 775 с.
  33. Бир Ст. Кибернетика и управление производством.— М.: Наука, 1965.— 389 с.
  34. Биркгоф Г. Гидродинамика, постановка задач и подобие.— М.: ИЛ, 1963.— 125 с.
  35. Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике.— М.: Наука, 1981.— 352 с.
  36. Блохина И. Н., Угодчиков Г. А. Исследование динамики микробных популяций (системный подход).— Горький, 1980.— 168 с.
  37. Богач П. Г., Решодько Л. В. Алгоритмические и автономные модели деятельности гладких мышц.— Киев: Наукова думка, 1979.— 350 с.
  38. Боголюбов В. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 504 с.
  39. Бокс Дж, Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление.— М.: Мир, 1974, вып. 1.— 408 с.; вып. 2.— 200 с.
  40. Брекнер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы.— М.: Мир, 1977, с. 157—158.
  41. Бриджмен П. В. Анализ размерностей.— М—Л., 1934.
  42. Бублик Б. Н., Кириченко Н. Ф. Основы теории управления.— Киев: Вища школа, 1975.— 328 с.
  43. Бузин А. Ю. Сравнение некоторых макроэкономических моделей равновесия.— В кн.: Модели и алгоритмы программного метода планирования сложных систем. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1979, с. 72—94.
  44. Бураковский В. И., Лищук В. А., Подгорный В. Ф. и др. Принципы индивидуальной терапии на основе электронно-вычислительной техники.— Вестник АМН СССР, 1974, № 6, с. 31—40.

45. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаева Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1976.— 384 с.
46. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвлений решений нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1969.— 527 с.
47. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.— 272 с.
48. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1981.— 400 с.
49. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1980.— 520 с.
50. Винберг Г. Г. Взаимосвязь роста и энергетического обмена у пойклотермных животных.— В кн.: Количественные аспекты роста организмов. М.: Наука, 1975, с. 7—25.
51. Витушкин А. Г. Оценка сложности задачи табулирования. М.: Физматгиз, 1959.— 228 с.
52. Вишня А. Т., Моренцов Е. И. Принципы реализации и структура хранилищ системы АПРОП. В кн.: Теория и практика системного программирования. Киев: Изд. ИК АН УССР, 1981, с. 80—88.
53. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры.— М.: Наука, 1977.— 304 с.
54. Волкович В. Л. Многокритериальные задачи и методы их решения.— В кн.: Кибернетика и вычислительная техника. Вып. 1. Киев: Наукова думка, 1969, с. 10—20.
55. Волькенштейн М. В. Общая биофизика.— М.: Наука, 1978.— 591 с.
56. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование.— М.: Наука, 1976.— 288 с.
- 56а. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1982.— 304 с.
57. Вунш Г. Теория систем.— М.: Сов. радио, 1978.— 288 с.
58. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные методы решения некоторых классов линейных задач.— Изв. вузов. Математика, 1976, № 6, с. 20—35.
59. Галенко Д. Н., Аронов Г. Е., Емчук И. Ф. Модель мотивации соперничества и достижений.— В кн.: Кибернетика и вычислительная техника, Вып. 36. Киев: Наукова думка, 1977, с. 19—27.
60. Галушкин А. И. Введение в теорию систем распознавания на септронах.— М.: Изд. МИЭМ, 1970.— 200 с.
61. Гейзенберг Б. Что такое «понимание» в теоретической биофизике.— Природа, 1971, № 4, с. 75—77.
62. Геодокян В. А. Эволюционная логика дифференциации полов.— В кн.: Математические методы в биологии/ Под ред. А. Ю. Митропольского. Киев: Наукова думка, 1977, с. 84—107.
63. Гительзон И. И. Интегральные механизмы регуляции эритропоэза.— В кн.: I Всесоюз. Съезд гематологов и трансфузиологов: Тез. докл. Баку, 22—26 окт., 1979 г. М. 1979. 152.
64. Глушков В. М. Введение в АСУ.— Киев: Техніка, 1972.— 312 с.
65. Глушков В. М. Введение в кибернетику.— М.: Изд-во АН СССР, 1963.— 324 с.
66. Глушков В. С. Макроэкономические модели и принципы построения ОГАС.— М.: Статистика, 1975.— 160 с.
67. Глушков В. М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей.— Управляющие системы и машины, 1977, № 2, с. 3—6.
68. Глушков В. М. О возможных особенностях физических полей биосистем.— Кибернетика, 1981, № 3, с. 105—106.
69. Глушков В. М. О системной оптимизации.— Кибернетика, 1980, № 5, с. 89—90.
70. Глушков В. М. Проблема рака с позиций общей теории систем.— Киев: Изд. ИК АН УССР, 1979.— 20 с. (Препринт/ АН УССР. Ин-т кибернетики: 79-26).
71. Глушков В. М. Флуктуационная системология.— Кибернетика, 1979, № 2, с. 114—115.

72. Глушков В. М., Гусев В. В., Марьянович Т. П., Сахнюк М. А. Програмные средства моделирования непрерывно-дискретных систем.— Киев: Наукова думка, 1975.— 152 с.
73. Глушков В. М., Иванов В. В. Моделирование оптимизации распределения рабочих мест между отраслями производства А и Б.— Кибернетика, 1977, № 6, с. 117—131.
74. Глушков В. М., Иванов В. В., Михалевич В. С. и др. Резервы оптимизации вычислений.— Киев: Изд. ИК АН УССР, 1977.— 54 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т кибернетики: 77-67).
75. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Методологические вопросы применения математических методов в биологии.— Киев: Изд. ИК АН УССР, 1979.— 65 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т кибернетики: 79-60)
76. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование внутри- и межклеточных взаимодействий на основе одного класса динамических макромоделей.— Киев: Изд. ИК АН УССР, 1978.— 42 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т кибернетики: 78-71).
77. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. О новом классе динамических моделей и его применении в биологии.— Кибернетика, I.— 1979, № 4, с. 131—139; II.— 1980, № 4, с. 116—125; III.— 1981, № 5.
78. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Применение одного класса динамических моделей к исследованию иммунных систем.— В кн.: Математические методы в биологии / Под ред. Ю. А. Митропольского. Киев: Наукова думка, 1983, с. 22—35.
79. Глушков В. М., Калинин Л. А., Лазарев В. Г., Сифоров В. И. Сети ЭВМ.— М.: Связь, 1977.— 279 с.
80. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. и др. О средствах моделирования развивающихся систем.— Киев: Изд. ИК АН УССР, 1980.— 58 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т кибернетики; 80-37).
81. Глушков В. М., Иванов В. В., Яценко Ю. П. Аналитическое исследование одного класса динамических моделей.— Кибернетика, I.— 1980, № 2 с. 1—12; II.— 1982, № 3, с. 104—112.
82. Глушков В. М., Попов А. А., Петрухин В. А. Системный подход к моделированию в медицине.— В кн.: Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наукова думка, 1977, вып. 36, с. 3—6.
83. Глушков В. М., Пшеничный Б. Н. Об одной математической модели развивающейся экономики.— Кибернетика, 1977, № 4, с. 1—6.
84. Глушков В. М., Скурихин В. И., Морозов А. А. Система БАРС, назначение, характеристики.— УСМ, № 2, 1979, с. 3—7.
85. Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. Алгебра. Языки. Программирование.— Киев: Наукова думка, 1978.— 320 с.
86. Горбунов-Посадов М. М., Карпов В. Я., Корягин Д. А. и др. Пакет прикладных программ САФРА. Системное наполнение.— М.: Изд-во ИПМ АН СССР, 1977.— 20 с. (Препринт 85).
87. Гришин А. П. Экстремальная задача о представлении таблично заданной функции двух переменных через функции одного переменного.— ЖВМ и МФ, 1977, 17, № 4, с. 838—846.
88. Гродзинский А. М., Гродзинский Д. М. Краткий справочник по физиологии растений.— Киев: Наукова думка, 1973.— 592 с.
89. Груздев Г. П., Моничев А. Я., Щербова Е. Н. Итоги математического моделирования процесса кроветворения (стволовая клетка).— Вопросы кибернетики. Математические модели механизмов патологических процессов / Под ред. М. А. Ханина, И. Б. Бухарова. М. 1979, вып. 49, с. 64—106.
90. Гуляницкий Л. Ф. Вопросы построения специализированного математического обеспечения для решения на ЭВМ некоторых задач проектирования.— Автореф. дисс. ... канд. физ.-матем. наук.— Киев, 1980.— 24 с.
91. Гюллинг Э. В., Никольский И. С. Гормоны тимуса и иммунитет.— УСБ, 1977, 83, № 1, с. 97—111.
92. Давыдов А. С. Биология и квантовая механика.— Киев: Наукова думка, 1979.— 296 с.

93. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование.— М.: Мир, 1972.— 312 с.
94. Дзядык В. К., Иванов В. В. Об асимптотике и оценках равномерных норм интерполяционных многочленов Лагранжа по узлам Чебышева.— *Analysis Math.*, 1983, р. 102—114.
95. Дибров Б. Ф., Лившиц М. А., Волькенштейн М. В. Математическая модель иммунной реакции.— *Биофизика*. I.— 1976, № 5, с. 905—909; II.— 1977, № 2, с. 312—317; III.— 1978, № 1, с. 143—147; IV.— 1978, № 3, с. 494—500.
96. Добра И. Д. Оптимальные алгоритмы решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— В кн.: Оптимизация вычислений: Киев: Изд. ИК АН УССР, 1975, с. 44—48.
97. Добров Г. М. Прогнозирование науки и техники.— М.: Наука, 1969.— 208 с.
98. Довідник з біології / Під ред. К. М. Ситника.— Киев: Наукова думка. 1978.— 400 с.
99. Дюльдин А. А. Коэффициент вариации и аллометрия.— *Экология*, 1973, № 6, с. 97—99.
100. Дынник В. В., Сельков Е. Е. Поведение гликолитической системы и обмена пуриновых нуклеотидов в условиях стрессовой АТФазной нагрузки.— В кн.: Регуляция энергетического обмена и физиологическое состояние организма / Под ред. М. Н. Кондрашовой. М.: Наука, 1978, с. 51—66.
101. Ейген М. Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул.— М.: Мир, 1973.— 216 с.
102. Ермольев Ю. М., Ястремский А. И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании.— М.: Наука, 1979.— 256 с.
103. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания.— М.: Наука, 1974.— 178 с.
104. Завьялов Ю. С., Квасов В. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций / Под ред. Н. Н. Яненко.— М.: Наука, 1980.— 352 с.
105. Задирака В. К. Оптимизация вычислений преобразования Фурье с приложениями.— Автореф. дисс. ... д-ра физ.-матем. наук.— Киев, 1981.— 30 с.
106. Заика В. Е., Островская Н. А. Скорость роста, продолжительность жизни и удельная продукция моллюсков.— *ЖОБ*, 1971, 32, № 3, с. 317—323.
107. Заикин П. Н., Засорин А. З., Лепин С. В., Ниради Л. О реализации одной диалоговой системы управления комплексом программных модулей со сложной структурой информационных связей.— В кн.: Обработка и интерпретация физических экспериментов. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 53—60.
108. Зайцев Н. Г. Общесистемное математическое обеспечение ЭВМ третьего поколения для обработки данных.— М.: Статистика, 1980.— 228 с.
109. Збірник стандартних підпрограм на КМШП/Під ред. В. В. Іванова.— Київ: Техніка, 1966.— 312 с.
110. Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е. Математическая биофизика клетки.— М.: Наука, 1978.— 312 с.
- 110а. Иванилов Ю. П., Лотов А. В. Математические модели в экономике.— М.: Наука, 1979.— 304 с.
111. Иванов В. В. Об оптимальных алгоритмах минимизации функций некоторых классов.— *Кибернетика*, 1972, № 4, с. 81—94.
112. Иванов В. В. О минимизации числа операций для линейных некорректных задач.— *Изв. вузов. Математика*, 1978, § II (198), с. 47—54.
113. Иванов В. В., Бабич М. Д., Людвигенко В. А. К вопросу создания пакетов программ для решения классов задач вычислительной математики.— В кн.: Оптимизация вычислений и технология программирования. Киев: Изд. ИК АН УССР, 1978, с. 3—12.
114. Иванов В. В., Бейко М. Ф. Численное решение задач оптимального управления динамическими процессами распределения, описываемыми интегральными уравнениями В. М. Глушкова.— В кн.: Исследование опе-

- раций и АСУ: Респ. междунар. Научн. сб. Киев: Вища школа, 1981, вып. 18, с. 45—51.
115. Иванов В. В., Бесараб П. Н., Людвиченко В. А. О пакете программ для численной реализации двухпродуктовой модели развивающихся систем.— УС и М, 1981, № 5, с. 109—111.
  116. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения.— М.: Наука, 1978, 206 с.
  117. Иванов В. В., Задирака В. К., Березовский А. И. и др. Методы алгоритмизации непрерывных производственных процессов / Под ред. В. В. Иванова.— М.: Наука, 1975.— 400 с.
  118. Иванов В. В., Котенкова Г. Н. Оптимизация алгоритмов по времени их реализации на ЭВМ для решения особых интегральных уравнений.— В кн.: Труды, посвященные памяти академика И. Н. Векуа. «Дифференциальные и интегральные уравнения. Краевые задачи». Тбилиси: Изд-во ТбГУ, 1978, с. 45—52.
  119. Иванов В. В., Кирьяков В. А. Вопросы построения автоматизированной системы учета, контроля и оптимизации показателей работы вычислительных центров.— В кн.: Машинная обработка информации и управление производством. М.: Статистика, 1976, с. 101—111.
  120. Иванов В. В., Летичевский А. А., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем.— Кибернетика, 1980, № 4, с. 146—147; 1981, № 4, с. 148—150.
  121. Иванов В. В., Людвиченко В. А. Об одном методе последовательной безусловной минимизации решения задач математического программирования.— Кибернетика, 1977, № 2, с. 1—8.
  122. Иванов В. В., Трутень В. Е. Анализ точности квадратичных программ.— Кибернетика, 1969, № 4, с. 97—105.
  123. Иванов В. В., Яненко В. М., Яценко Ю. П., Горда О. В. О колебательных режимах в нелинейной интегральной динамической модели с последействием.— В кн.: IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям: Тез. докл. (Киев, сентябрь, 1981). Киев, 1981, с. 136—137.
  124. Иммуногенез и клеточная дифференцировка / Под ред. А. Е. Гурвича.— М.: Наука, 1978.— 232 с.
  125. Ишков В. Л., Лищук В. А. Математические модели иммунных процессов.— Успехи современной биологии, 1979, 87, вып. 1, с. 229—244.
  126. Ищенко В. Г. Применение аллометрических уравнений в популяционной экологии животных.— Тр. Ин-та экол. раст. и животных, Свердловск, 1969, вып. 71, с. 95—116.
  127. Каймаков Е. А. Возможный этап абиогенной молекулярной эволюции. Биофизика, 1980, № 1, с. 7—11.
  128. Кальвин М. Химическая эволюция.— М.: Мир, 1971.— 420 с.
  129. КАМАК — системы автоматизации в экспериментальной биологии и медицине / Под ред. Ю. Е. Нестерихина.— Новосибирск: Наука, 1979, 269 с.
  130. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Оптимальные решения в экономике.— М.: Наука, 1972.— 232 с.
  - 130а. Канторович Л. В., Жиянов В. И. Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса.— ДАН СССР, 1973, 211, № 6, с. 1280—1283.
  131. Карманов В. Г. Математическое программирование.— М.: Наука, 1975.— 272 с.
  132. Карпов В. Я., Корягин Д. А., Самарский А. А. Принципы разработки пакетов прикладных программ для задач математической физики.— ЖВМ и МФ, 1978, 18, № 2, с. 459—467.
  133. Кастлер Г. Возникновение биологической организации.— М.: Мир, 1967.— 900 с.
  134. Каталог программных средств и методических материалов централизованного фонда алгоритмов и программ АСУ научно-производственного объединения «Центрпрограммсистем». (По состоянию на 1 марта 1981 г.).— М., 1981.— 221 с.

135. К и г у р а д з е И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси: Изд-во Тб. ГУ, 1975.— 352 с.
136. К и р п и ч е в М. В., К о н а к о в Р. К. Математические основы теории подобия.— М.: Изд-во АН СССР, 1949.— 76 с.
137. К л е й н Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»).— В кн.: Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1956, с. 399—434.
138. К о в а л е в с к и й В. А. Методы оптимальных решений в распознавании изображений.— М.: Наука, 1976.— 328 с.
139. К о в а л е н к о И. Н. Исследование по анализу надежности сложных систем.— Киев: Наукова думка, 1975.— 212 с.
140. К о л л а т ц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика.— М.: Мир, 1969.— 448 с.
141. К о л м о г о р о в А. Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций.— Проблемы кибернетики, 1972, вып. 25, с. 100—106.
142. К о м и с с а р ч у к А. М. Афинная геометрия.— Минск, 1977.— 334 с.
143. К о н д р а ш о в А. С., М о л ч а н о в А. М. О роли ассортативного скрещивания в процессе симпатрического видообразования. I. Аналитические модели.— В кн.: Факторы разнообразия в математической экологии и популяционной генетике / Под ред. А. М. Молчанова, А. Д. Базыкина. Пушино, 1980, с. 101—121.
144. К о н д р а ш о в а М. Н., М а е в с к и й Е. И. Переменное использование углеводов и липидов как формы регуляции физиологического состояния.— В кн.: Регуляция энергетического обмена и физиологическое состояние организма. М.: Наука, 1978, с. 5—14.
145. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике.— М.: Наука, 1968.— 720 с.
146. К о р н е й ч у к Н. П. Экстремальные задачи теории приближения.— М.: Наука, 1976.— 320 с.
147. К о р о б о в Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе.— М.: Физматгиз, 1963.— 224 с.
148. К о р о л ю к В. С., Т у р б и н А. Ф. Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев: Наукова думка, 1978.— 218 с.
149. К о ф м а н Г. Б. Биологический смысл аллометрических закономерностей.— В кн.: Исследование динамики роста организмов / Под ред. И. А. Терскова. Новосибирск: Наука, 1980, с. 36—55
150. К р а п и в и н В. Ф. О теории живучести сложных систем.— М.: Наука, 1978.— 248 с.
151. К р а с н о с е л ь с к и й М. А. и др. Приближенное решение операторных уравнений.— М.: Наука, 1969.— 465 с.
152. К р а с с И. А. Математические модели экономической динамики / Под ред. И. А. Полетаева.— М.: Сов. радио, 1976.— 280 с.
153. К р и н е ц к и й И. И. Основы научных исследований.— Киев—Одесса: Вища школа, 1981.— 208 с.
154. К р и н с к и й В. И., Ж а б о т и н с к и й А. М. Автоволновые структуры в активных средах.— В кн.: Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: Изд. ИПФ АН СССР, 1981, с. 6—32.
155. К р у г Г. К., Б р ы к и н С. Н., К и с е н к о в а Н. А. и др. Диалоговая система планирования эксперимента и обработки результатов измерений.— В кн.: Труды МЭИ. М.: 1978, вып. 350, с. 3—7.
156. К р у т ь к о В. Н., С т е п а н е н к о Р. Н. Математическая модель системы иммунитета: имитация циркуляции компонентов иммунной реакции.— В кн.: Моделирование систем в биологии и медицине, Прага, 1981, с. 120—128.
157. К у з и н Л. Т. Основы кибернетики.— М.: Высшая школа, 1979. Т. 1.— 408 с.; Т. 2.— 584 с.
158. К у х т е н к о А. И. О физике и кибернетике.— Кибернетика, 1981, № 4, с. 133—138.
159. Л а н к а с т е р К. Математическая экономика.— М.: Сов. радио, 1972.— 464 с.

160. Ларионов А. М., Левин В. К., Пржиялковский В. В., Фатеев А. Е. Основные принципы построения и технико-экономические характеристики Единой системы ЭВМ (ЕС ЭВМ).— УСИМ, 1973, № 2, с. 1—12.
- 160а. Лейбин В. М. «Модели мира» и образ человека.— М.: ИГЛ, 1982.— 256 с.
161. Ленин В. И. Великий почин.— Полн. Собр. соч., т. 39, с. 1—29.
162. Леонтьев В. Исследование структуры американской экономики Теоретический и эмпирический анализ по схеме затраты—выпуск.— М. Госстатиздат, 1959.— 640 с.
163. Либберт Э. Физиология растений.— М.: Мир, 1976.— 582 с.
164. Литвинов В. В. Общее математическое обеспечение проектирования вычислительных машин, систем и сетей.— Киев: Техніка, 1981.— 300 с.
165. Лищук В. А. Опыт применения математических моделей в лечении больных после операции на сердце.— Вестник АМН СССР, 1978, № 11, с. 33—49.
166. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев: Наукова думка, 1980.— 264 с.
167. Любич Ю. И. Стохастические алгебры и некоторые их применения в математической генетике.— В кн.: Математические методы в биологии. Киев: Наукова думка, 1977, с. 119—131.
168. Любичев А. А. Об ошибках в применении математики в биологии. 2. Ошибки, связанные с избытком энтузиазма.— ЖОБ, 1969, 30, № 6, с. 715—723.
169. Ляпунов А. А. О математическом подходе к изучению жизненных явлений.— В кн.: Математическое моделирование жизненных процессов. М.: Мысль, 1968, с. 65—107.
170. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.: ОНТИ, 1935.
171. Мазуренко В. А., Бабий З. Н., Яненко В. М. Оценка некоторых показателей иммунологической реактивности у больных острыми лейкозами.— В кн.: I Всесоюз. съезд гематологов и трансфузиологов (Баку, ноябрь, 1979 г.): Тез. докл. М.: Изд. МЗ СССР, 1979.— с. 263.
172. Малиновский Б. Н., Реутов В. Б., Египко В. М., Вавилин Г. В. Принципы организации и использования УСО—Мини-УВМ.— В кн.: Мини-УВМ для систем автоматизации научных исследований и технологических процессов. Киев: Знание, 1977, с. 11—24.
173. Маринов Ю. Автоматични радиоелектронни класификатори.— София: Техника, 1975.— 448 с.
174. Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения.— 2-е изд. Т. 23, с. 188.
175. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии.— М.: Наука, 1980.— 264 с.
176. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.— М.: Наука, 1982.— 320 с.
177. Математическое моделирование вирусного гепатита / Н. И. Нисевич, Г. И. Марчук, И. И. Зубикова, И. Б. Погожев.— М.: Наука, 1981.— 352 с.
178. Меклер Л. Б. Опыт общей теории онкогенеза. 1. Основные положения теории.— Успехи современной биологии, 1977, вып. 4, с. 113.
179. Митропольский Ю. А. Пути применения математических методов в биологии.— В кн.: Математические методы в биологии/Под ред. Ю. А. Митропольского. Киев: Наукова думка, 1977, с. 84—106.
180. Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев: Вища школа, 1979.— 248 с.
181. Митрофанов В. К. Об одном алгоритме многомерного случайного поиска.— М.: Изд. ИПМ АН СССР, 1975.— 15 с. (Препринт / АН СССР. ПИМ: 75-118).
182. Михалевич В. С., Волкович В. Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем.— М.: Наука, 1982.— 288 с.
183. Михалевич В. С., Ермольев Ю. М. Некоторые вопросы теории исследования операций.— Киев: Изд. ИК АН УССР, 1976.— 12 с. (АН УССР, Ин-т кибернетики; 76-70).

184. Михалевич В. С., Сергиенко И. В., Шор Н. З. Исследование методов решения задачи их приложения.— Кибернетика, 1981, № 4, с. 89—113.
185. Моделирование процесса адаптационного перераспределения и восстановительного накопления лимфоцитов вилочковой железы / В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яненко, Э. В. Гюллинг и др. Киев: Изд ИК АН УССР, 1982.— 31 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т кибернетики: 82—30).
186. Моисеев Н. Н. Математические модели экономической науки. Вып. I.—М.: Знание, 1973.— 64 с.
187. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа.— М.: Наука, 1981.— 488 с.
188. Моисеева Н. И., Симонов М. Ю., Сысуев В. М. Систематизация математических методов обработки медико-биологических данных.— Физиология человека, 1979, 5, № 1, с. 150—158.
189. Молчанов А. М. Многобарьерный иммунитет.— Биофизика, 1971, 16, № 4, с. 482—490.
190. Молчанов А. М., Антомонов Ю. Г., Котова А. Б., Ханин М. А. Методы математической биологии. Книга 3. Методы синтеза динамических моделей биологических систем / Под ред. М. А. Ханина.— Киев: Вища школа, 1981.— 328 с.
191. Мышкис А. Д., Шиманов С. Н., Эльсгольц Л. Э. Устойчивость и колебание систем с запаздыванием.— Киев: Изд. Ин-т математики АН УССР, 1961.— 55 с.
192. Натансон И. П. Конструктивная теория функций.— М.: Физматгиз, 1960.— 688 с.
193. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной.— М.: Наука, 1974.— 480 с.
194. Наумов Б. Н., Праченко В. Д., Семик В. П., Чижев К. А. Программное обеспечение для интегрированной обработки данных на базе ЭВМ М-4030.— УСИМ, 1975, № 6, с. 38—42.
195. Нейлор Т. и др. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем.— М.: Мир, 1975.— 502 с.
196. Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов / Закончено и отредактировано А. Берксом.— М.: Мир, 1971.— 384 с.
197. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение.— М.: Наука, 1970.— 708 с.
198. Немыцкий В. В. Об одном методе отыскания всех решений нелинейных операторных уравнений.— ДАН СССР, 1960, 131, № 4, с. 746—747.
199. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М—Л.: ГИТТЛ, 1949.— 448 с.
200. Нестеренко В. Г. Иммунологическая регуляция дифференцировки соматических клеток.— УСБ, 1980, 80, вып. 2(5), с. 214—220.
201. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах / Под ред. Ю. А. Чизмадзе.— М.: Мир, 1979.— 512 с.
202. Новосельцев В. Н. Теория управления и биосистемы. Анализ сохранительных свойств.— М.: Наука, 1978.— 320 с.
203. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 339 с.
204. Опарин А. И. Происхождение жизни на Земле.— М.: Изд. АН СССР, 1957, 458 с.
205. Оптимизация вычислений. сборник статей. Вып. 1—3.— Киев: Изд. ИК АН УССР, 1977.— 528 с.
- 205а. Основы исследования операций в военной технике / Чуев Ю. В., Мельников П. М., Петухов С. И. и др. / Под ред. Ю. В. Чуева.— М.: Сов. радио, 1965.— 592 с.
206. О состоянии библиотек программ.— М.: Изд. ИВТ АН СССР, 1979.— 58 с.
207. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений.— М.: ИЛ, 1963.— 220 с.
208. Павлов В. В. Начала теории эргатических систем.— Киев: Наукова думка, 1975.— 238 с.

209. Перцептрон — система распознавания образов / Под ред. А. Г. Ивахненко.—Киев: Наукова думка, 1975.— 432 с.
210. Петров А. А., Поспелов И. Г. Системный анализ развивающейся экономики.—Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. I.—1979, № 5, с. 13—25; II.— 1979, № 6, с. 12—24; III.— 1980, № 1, с. 12—21; IV.— 1980, № 2, с. 10—25; V.— 1980, № 3, с. 10—20.
211. Петров Р. В. Иммунология и иммуногенетика.— М.: Медицина, 1976.— 336 с.
212. Пигарев Ю. Б. Разработка вопроса обеспечения естественно-языкового интерфейса в системах имитационного моделирования дискретных процессов.— Автореф. дисс. ... канд. физ.-матем. наук.— Киев, 1980.— 25 с.
213. Пиковский А. С., Рабинович М. И. О странных аттракторах в физике.— В кн.: Нелинейные волны / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979, с. 176—192.
214. Пирюзян Л. А., Маленков А. Г., Баренбойм Г. М. Система для определения биологической активности химических соединений, образующих большой массив (научная методология).— М.: Изд. АН СССР. Сер. биол., 1977, № 3, с. 325—340.
215. Погребинский С. Б., Сапатый П. С. Элементы аналитической модели для оценки зависимости производительности вычислительной машины от уровня ее внутреннего языка.— Кибернетика, 1981, № 3, с. 34—40.
216. Полуэктов Р. А., Пых Ю. А., Швытов И. А. Динамические модели экологических систем.— Л.: Гидрометеиздат, 1980.— с. 288.
217. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения.— М.: Мир, 1980.— 608 с.
218. Потемкина Н. С. Комплексная оценка показателей системы внешнего дыхания на основе математической модели.— В кн.: Применение математических моделей в клинике сердечно-сосудистой хирургии / Под ред. В. И. Бураковского. М.: Машиностроение, 1980, с. 82—92.
219. Пржиалковский В. В. Единая система ЭВМ. Состояние и перспективы развития.— УСиМ, № 6, 1979, с. 3—8.
220. Природа, 1981, № 9.
221. Программное обеспечение ЭВМ МИР-1 и МИР-2; В 3 т.— Киев: Наукова думка, -1976.
222. Пуанкаре А. Замечания о кинетической теории газов.— Избр. труды. М.: Наука, 1974.— 385 с.
223. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.— М.: Физматгиз, 1960.— 883 с.
224. Реутов А. П., Савченко Р. Г., Суслов Р. М. Системная модель как отношение обобщенных качеств — упорядоченности, надежности и эффективности.— В кн.: Вопросы кибернетики (управление развитием систем) / Под ред. А. П. Реутова, Р. М. Сулова. М., 1979, с. 5—34.
225. Розен Р. Принцип оптимальности в биологии.— М.: Мир, 1969.— 215 с.
226. Романовский Ю. М. Проблемы математической биофизики.— М.: Изд-во МГУ, 1981.— 36 с.
227. Романовский Ю. М. Процессы самоорганизации в физике, химии и биологии.— М.: Знание, 1981.— 48 с.
228. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическое моделирование в биофизике.— М.: Наука, 1975.— 343 с.
229. Руденко А. П. Эволюционный катализ и проблема происхождения жизни.— В кн.: Взаимодействие методов естественных наук в познании жизни. М.: Наука, 1976, с. 186—236.
230. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.— 500 с.
231. Самарский А. А. Что такое вычислительный эксперимент.— Наука и жизнь, 1979, № 3, с. 27—32.
232. Сборник научных программ на фортране. Вып. I. Статистика. Нью-Йорк, 1960—1971.— М.: Статистика, 1974.— 220 с. Вып. 2, Матричная алгебра и линейная алгебра. Нью-Йорк, 1960—1971.— М.: Статистика, 1974.— 224 с.

233. Свирижев Ю. М. Математическое моделирование в экологии в условиях недостатка информации.— В кн.: Вопросы кибернетики (управление развитием систем)/Под ред. А. П. Реутова, Р. М. Сулова.— М., 1979, с. 66—74.
234. Свирижев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ.— М.: Наука, 1978.— 352 с.
235. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1977.— 438 с.
236. Сендов Б. Х. Математические модели процессов деления и дифференцировки клеток.— М.: Изд-во МГУ, 1976.— 58 с.
237. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения задач на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации.— Киев: Наукова думка, 1981.— 288 с.
238. Сергиенко И. В., Лебедева Т. Т., Рощин В. А. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации.— Киев: Наукова думка, 1980.— 273 с.
239. Синай Я. Г. Стохастичность динамических систем.— В кн.: Нелинейные волны/Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979, с. 192—212.
240. Система автоматизации производства программ (АПРОП).— Киев: Изд. ИК АН УССР, 1976.— 80 с.
241. Скобец Т. Я. Об одном алгоритме определения весовых коэффициентов в экспертных оценках.— В кн.: Оптимизация вычислений. Вып. 3, Киев, 1976, с. 35—40.
242. Скотт А., Чжу Ф., Маклафлин Д. Солитон — новое понятие в прикладных науках.— ТИИЭР, 1973, 61, № 10, с. 79—123.
243. Советский рабочий и научно-техническая революция.— Киев: Политиздат Украины, 1982.— 320 с.
244. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений/Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта.— М.: Мир, 1979.— 312 с.
245. Соучек Б. Микропроцессоры и микро-ЭВМ/Под ред. А. И. Петренко.— М.: Сов. радио, 1979.— 520 с.
246. Справочник проектировщика систем автоматизации управления производством/Под ред. Г. Л. Смилянского.— М.: Машиностроение, 1976.— 600 с.
247. Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая модель взаимодействия опухоли с организмом.— Вопросы кибернетики. Математическое моделирование механизмов патологических процессов/Под ред. М. А. Ханина И. Б. Бухарова.— М., 1979, вып. 49, с. 32—44.
248. Стечкин С. Б., Суботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике.— М.: Наука, 1976.— 248 с.
249. Сулов В. Ю., Гара В. К. Организация проблемного математического обеспечения в моделирующем комплексе АЛСИМ-2.— Киев: Знание, 1981.— 24 с.
250. Сытник К. М., Курченко Т. С., Немченко О. А. Математическая модель пространственного распределения и накопления ассимилянтов в растении.— ДАН СССР, 1980, 250, № 6, с. 1466—1469.
251. Тамм Б. Г., Тыугу Э. Х. О создании проблемно-ориентированного программного обеспечения.— Кибернетика, 1975, № 4, с. 76—85.
- 251а. Тезисы докладов пленарных лекций и симпозиальных заседаний I Всесоюзного биофизического съезда.— М.: Изд. АН СССР, 1982.— 180 с.
252. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.— 223 с.
253. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1980.— 232 с.
254. Трикоми Ф. Интегральные уравнения.— М.: ИЛ, 1960.— 229.
255. Трубин В. А. Универсальность одного класса квадратичных целочисленных задач.— Кибернетика, 1977, № 2, с. 147—148.
256. Трутень В. Е. Нелинейное программирование.— Киев Изд. ИК АН УССР, 1970.— 112 с.
257. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.— 624 с.
258. Урманцев Ю. А. Симметрия природы и природа симметрии.— М.: Мысль, 1974.— 229 с.

259. Федоренко Н. П. Оптимизация экономики.— М.: Наука, 1977.— 287 с.
260. Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1976.— 152 с.
261. Фокс С., Дозе М. Молекулярная эволюция и возникновение жизни.— М.: Мир, 1975.— 376 с.
262. Фонталин Л. Н., Певницкий Л. А. Иммунологическая толерантность.— М.: Медицина, 1978.— 313 с.
263. Френкина И. П. Обзор программ по математической статистике.— Экономика и матем. методы, 1969, № 5, с. 737—743.
264. Фу К. Структурные методы в распознавании образов.— М.: Мир, 1977.— 320 с.
265. Фукс-Киттовский К. Проблемы детерминизма и кибернетики в молекулярной биологии.— М.: Прогресс, 1980.— 376 с.
- 265а. Хакен Г. Синергетика.— М.: Мир, 1980.— 408 с.
266. Хибник А. И. Периодические решения системы п дифференциальных уравнений. Алгоритмы и программы на фортране. Материалы по математическому обеспечению ЭВМ. Вып. 5/Под ред. Э. Э. Шноль.— Пушкино: Изд. НЦБИ АН СССР, 1979.— 72 с.
267. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.— М.: Мир, 1975.— 536 с.
268. Хмелько В. Е. Методика социально-информационного обеспечения сбалансированного совершенствования структур рабочих мест и образования рабочих кадров промышленного предприятия.— Киев, 1981.— 151 с.
269. Шананин А. А. К теории производственных функций.— В кн.: Модели и алгоритмы программного метода планирования сложных систем.— М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1979. с. 24—50.
270. Шарковский А. Н. Разностные уравнения и динамика численности популяций.— В кн.: Математические методы в биологии/Под ред. Ю. А. Митропольского.— Киев: Наукова думка, 1983, с. 143—156.
271. Шарковский А. Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя.— УМЖ, 1964, 16, № 1, с. 61—71.
272. Шеннон Р. Иммитационное моделирование систем — искусство и наука.— М.: Мир, 1978.— 420 с.
273. Шидловский В. А. Системный анализ вегетативных функций.— Вопросы кибернетики. Вып. 36.— М., 1977, с. 5—20.
274. Шмальгаузен И. И. Кибернетические вопросы биологии.— Новосибирск: Наука, 1968.— 233 с.
275. Шноль С. Э. Физико-химические факторы биологической эволюции.— М.: Наука, 1979.— 263 с.
- 275а. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах.— М.: Мир; 1979.— 280 с.
276. Яненко В. М., Атоев К. Л. Об одной математической модели возбудимой структуры.— В кн.: Математическое моделирование и экспериментальное исследование физиологических систем/Под ред. Н. М. Амосова. Киев: Изд. ИК АН УССР, 1976, с. 15—23.
277. Яненко В. М. Об одной задаче оптимизации медицинского обслуживания в медицинской информационной системе.— В кн.: Кибернетика и вычислительная техника.— Вып. 36.— Киев: Наукова думка, 1977, с. 6—12.
278. Яненко В. М. О повышении эффективности одного класса решающих правил.— В кн.: Материалы Всесоюз. школы-семинара «Чувствительность, оптимизация, проблемы решения». Воронеж: ВПИ, 1978, с. 21—25.
279. Яненко В. М., Мазуренко В. А. К вопросу о повышении эффективности автоматизирования дифференциальной диагностики острого лейкоза.— В кн.: Математические и технические вопросы медицинской кибернетики/Под ред. М. Л. Быховского.— Воронеж: Изд. Политехн. ин-та, 1978, с. 84—97.
280. Яненко В. М., Какичев С. В., Яценко Ю. П. Об обработке данных в системах автоматизации исследований медико-биологического профиля.— В кн.: Опыт создания и внедрения автоматизированных систем

- обработки данных комплексных испытаний сложных объектов.— Киев: Изд. ИК АН УССР, 1978, с. 146—148.
281. Яненко В. М., Атоев К. Л., Березовский В. А. Математическая модель взаимосвязи аэробного и анаэробного окисления в гипотетической клетке миокарда при гипоксии.— В кн.: Специальная и клиническая физиология гипоксических состояний. Ч. 2. Киев: Наукова думка, 1979, с. 211—215.
  282. Яненко В. М., Яценко Ю. П. Программа численного решения нелинейной динамической модели В. М. Глушкова в случае заданных  $s(t)$ ,  $y(t)$ . (Алгоритм и программа).— Киев, 1980.—19 с. Рукопись деп. в РФАП СКТБ ПО ИК АН УССР, инв. № 5695.
  283. Яненко В. М., Яценко Ю. П. Программа численного решения динамической модели В. М. Глушкова в случае заданных  $F(t)$ ,  $y(t)$ . (Алгоритм и программа).— Киев, 1980.—19 с. Рукопись деп. в РФАП СКТБ ПО ИК АН УССР, инв. № 5697.
  284. Яненко В. М., Яценко Ю. П. Программа численного определения минимума интеграла от  $F_1(t)$  при заданной  $s(t)$  в динамической модели (по В. М. Глушкову). (Алгоритм и программа).— Киев, 1980.—40 с. Рукопись деп. в РФАП СКТБ ПО ИК АН УССР, инв. № 5703.
  285. Яненко В. М. О моделировании возрастных адаптационных механизмов гипотетического организма.— В кн.: Физиологическая кибернетика М.: Изд. Ин-т нормальной физиологии, 1981, с. 136—137.
  286. Яненко Н. Н. Проблемы математической технологии.— В кн.: Структура и организация пакетов программ: Тез. докл. Тбилиси: Мецниереба, 1976, с. 9—11.
  287. Яненко Н. Н. Вопросы модульного анализа и параллельных вычислений в задачах математической физики.— В кн.: Комплексы программ математической физики (Материалы VI Всесоюз. семинара по комплексам программ матем. физики) /Под ред. Н. Н. Яненко.— Новосибирск, 1980, с. 3—12.
  288. Яненко Н. Н. О некоторых уравнениях переменного типа.— В кн. Теория кубатурных формул и вычислительная математика/Под ред. С. Л. Соболева. Новосибирск: Наука, 1980, с. 48—55.
  289. Яценко Ю. П. Моделирование некоторых колебательных биопроцессов.— Кибернетика, 1978, № 5, с. 29—35.
  290. Аскерман Е., Gretewood L. G. *Mathamatical Models in the. Health Sciancies.*— Minneapolis: Univ. of Minnesota Press, 1979.—358 p.
  291. A g a b a b y a n K. G. Perception of the boundary cavature of the image in the neuron structures.— *Cybenretica*, 1977, 20, № 3, p. 235—246.
  292. B o r o d i n A., M u n r o I. *Computational Complexity of Algebraic and Numerical Problems.*— N. Y.: American Elsevier, 1975.—170 p.
  293. C o n t i R. Recent Trends in the theory of boundary value problems for ordinary equations.— *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 1967, 22, № 2, p. 135—178.
  294. D e r o m e J. Biological similarity and group theory.— *J. Theor. Biol.*, 1977; 65, № 2, p. 369—378.
  295. D e l i s i C h., R e s i g n o A. Immune Surveillance and Neoplasia. I. A Minimal Mathematical Model.— *Bull. Math. Biol.*, 1977, 93, № 39, p. 201—213.
  296. F o r n b e r g B., W h i t a m G. B. A Numerical and Theoretical Study of Certain Nonlinear Wave Phenomena.— *Philosophical Transactions of the Royal Society of London J.*, 1978, 1361, p. 373—404.
  297. G a n t i T. A theory of Biochemical supersystems and its application to problems of natural and artificial biogenesis.— *Budapest; Akademiai*, 1979.—136 p.
  298. G l u c h k o v V., M., I v a n o v V. V., J a n e n k o V. M. One class of nonlinear dynamic models and its applications.— *Physica*, 1981, 2D, p. 61—72.
  299. G u m o v s k i I., M i r a C. *Dynamique chaotique.*— Toulouse: Cepa-dues Editions, 1979.—295 p.

300. Hirai K., Uskio T., Iwai M. Catastrophe and Chaos in Nonlinear control systems.— В кн.: IX Международ. конференция по нелинейным колебаниям: Тез. докл. (Киев, сентябрь, 1981 г.). Киев: Институт математики, 1981, с. 346.
301. Information Technology in Health Science Education/Ed. E. C. De land.— N. Y.— L.: Plenum Press, 1978.— 608 p.
302. Kindler E. Classification of simulation programming languages. I. Declaration of Necessary system concepting.— EIK, 1978, 14, № 10, p. 519—526. II. Description of types and individual Typology.— EIK, 1978, 14, № 11, pp. 575—584;
303. Lindenmayer A. Growth functions of cell populations with lineage control.— In: Biomathematics and Cell Kinetics/Eds. A.—J. Vallerin, P. D. M. Macdonald. Amsterdam: Elsevier/North — Holland Biom. Press, 1978, p. 117—131.
304. Livshits M. A., Gurija G. T., Belintsev B. N., Volkenstein M. V. Positional differentiation as pattern formation in reaction diffusion with permeable boundaries. Bifurcation analysis.— J. Mathem. Biology, 1981, 184, p. 123—131.
305. Lorenz E. N. Deterministic Nonperiodic Flow.— J. Atmos. Sci., 1963, 20, p. 130—141. (Русский перевод: Лоренц Э. Н. Детерминированное непериодическое течение.— В кн.: Странные аттракторы/Под ред. Я. Г. Синая, Л. П. Шильникова. М.: Мир, 1981, с. 88—116).
306. Marzecz C. J., Spiegel E. A. Ordinary differential equations with strange attractors.— SIAM J. Appl. Math., 1980, 38, № 3, p. 403—421.
307. Miklosko J. Synteza a analiza numerickych Algoritmov.— Nakladedelesto VEDA, Slovenska akademia vUIL.— Bratislava, 1977.
308. Mohler R. R., Bruni G., Gandolfy A. A. A system approach to Immunology.— Proc. of IEEE, 1980, 68, p. 964—990.
309. Oren T. I., Zeigler B. P. Concepts for advanced simulation methodologies.— SIMULATION, 1979, 23, № 3, p. 69—82.
310. Theoretical Immunology/Ed. G. Bell, A. Perelson, G. Pimbley.— N. Y.: Marcel Dekker, 1978.— 395 p.
311. Traub J. F., Wozniakowski H. A General Theory of Optimal Algorithms.— N. Y.: Acad. Press, 1980.— 341 p.
312. Turing A. M. The chemical basis of morphogenesis.— Phil. Trans., 1952, 37, № 237.
313. Wilkinson J. N., Reinsch C. Handbook for Automatic Computation. Linear Algebra. V. 2, p. 2.— Heidelberg.: Springer, 1971. 442 p.
314. Mathematical Modeling in Immunology and Medicine/Ed. G. I. Marchuk, L. N. Belykh.— Amsterdam: North Holland Publish. C., 1983.— 396 p.
315. Yanenko V. M. On the Improvement of Efficiency of a Diagnostic Process in Electrocardiology by the Dynamic Optimisation of a Mathematical Models of the Cardiovascular System.— In: Proc. 4-th International Congress on Electrocardiology, Balatonfüred, 1977. Budapest: Akademia Kiadó, 1978, p. 321—333.
316. Working Conference on Mathematical Modelling in Immunology and Medicine.— IFIP TC 7. Abstracts. Moscow, 1982.— 144 p.

**Виктор Михайлович Глушков,  
Виктор Владимирович Иванов,  
Василий Михайлович Яненко**  
**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИВАЮЩИХСЯ  
СИСТЕМ**

Редакторы *И. Г. Поспелов, Л. Н. Белях.*  
Тех. редактор *С. Я. Шкляр.*  
Корректор *Т. С. Вайсберг.*

**ИБ № 12464**

Сдано в набор 17.06.83. Подписано к печати  
24.11.83. Т-22227. Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага  
тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая пе-  
чать. Условн. печ. л. 22. Уч.-изд. л. 26,11.  
Тираж 4300 экз. Заказ № 3-483. Цена 4 р. 10 к.

Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Киевская книжная типография научной книги.  
252004, Киев 4, ул. Репина, 4

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

*ВЫШЛА ИЗ ПЕЧАТИ:*

ГЛУШКОВ В. М. Основы безбумажной информатики.—  
М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы,  
1982.

Книга посвящена проблемам автоматизированной обработки  
и хранению информации в безбумажном (машинном) представле-  
нии, т. е. с помощью ЭВМ. В ней представлено комплексное из-  
ложение современного состояния и перспектив безбумажной  
информатики и связанных с нею научно-технических проблем.

41. 1116.