

## НЕКОТОРЫЕ АРГУМЕНТЫ В ПОЛЬЗУ ГИПОТЕЗЫ О МОЛЕКУЛЯРНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ПРИ АБСОЛЮТНОМ НУЛЕ\*

(Совместно с О. Штерном)

Выражение для энергии резонатора согласно первой формуле Планка имеет вид

$$E = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (1)$$

а согласно второй —

$$E = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{h\nu}{2}. \quad (2)$$

Отсюда получаем предельные значения энергии при высоких температурах (если отбросить в разложении  $e^{\frac{h\nu}{kT}}$  в ряд квадратичные члены)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E = kT - \frac{h\nu}{2}$$

и

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E = kT$$

по формулам (1) и (2) соответственно.

Энергия как функция температуры, представленная на рис. 1, в соответствии с формулой (1), начинается, следовательно, с нуля при  $T = 0$ , как это требует классическая теория, а при высоких температурах всегда остается меньше классического значения на  $h\nu/2$ . Согласно формуле (2),

\* *Einige Argumente für die Annahme einer molekularen Agitation beim absoluten Nullpunkt.* (Mit O. Stern). Ann. Phys., 1913, 40, 551—560.

резонатор имеет при абсолютном нуле энергию  $h\nu/2$ , вопреки классической теории, но при высоких температурах его энергия асимптотически стремится к классическому значению. Напротив, производная энергии по температуре, т. е. удельная теплоемкость, в обоих случаях одна и та же.

Таким образом, для резонатора с постоянной частотой  $\nu$  эти две формулы равносильны, тогда как теория таких резонаторов, которые имеют разные значения  $\nu$  для разных состояний, существенно меняется, если предположить, что существует нулевая энергия (энергия при абсолютном нуле). Идеальным был бы случай системы, состоящей из монохроматических резонаторов, значения  $\nu$  которых могут меняться произвольно и независимо от температуры. Зависимость энергии от частоты при постоянной температуре была бы связана с существованием нулевой энергии. К сожалению, экспериментов с подобными системами не проводилось. Впрочем, одна такая система нам, пожалуй, известна — это вращающиеся молекулы газа, тепловое движение которых проявляет далеко идущую аналогию<sup>1</sup> с тепловым движением монохроматического резонатора, причем средняя частота их зависит от температуры. Таким образом, на этих системах и следует в первую очередь проверять предположение о нулевой энергии. Ниже мы сначала рассмотрим, в какой степени можно делать вывод о теоретических свойствах такой системы, исходя из формулы Планка.

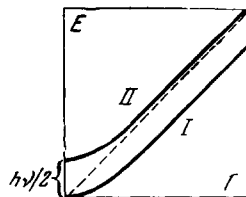


Рис. 1.

### Удельная теплоемкость водорода при низких температурах

Речь идет о том, как зависит от температуры энергия вращения двухатомной молекулы. Аналогично теории удельной теплоемкости твердых веществ мы вправе сделать предположение, что средняя кинетическая энергия вращения не зависит от того, обладает молекула электрическим моментом в направлении своей оси симметрии или нет. В случае, если молекула имеет такой момент, он не может нарушать термодинамическое равновесие между газом и излучением. Отсюда можно заключить, что под влиянием одного излучения молекула должна приобрести такую же кинетическую энергию вращения, которую она получила бы в результате столкновений с другими молекулами.

<sup>1</sup> На это впервые обратил внимание Нернст. Ср. W. N e r n s t. Zs. Elektrochem., 1911, 17, 270 и 825.

Следовательно, вопрос состоит в том, при каком среднем значении вращательной энергии инертный жесткий диполь, обладающий инертной массой, будет находиться в равновесии с излучением заданной температуры. Какими бы ни были законы излучения, мы должны, вероятно, полагать, что вращающийся диполь излучает в единицу времени в два раза больше энергии, чем одномерный резонатор, у которого амплитуда электрического и механического моментов равна амплитуде электрического и механического моментов диполя. Аналогичное предположение мы сделаем также о среднем значении поглощаемой энергии. Если мы примем еще упрощающее приближенное допущение, что при данной температуре все диполи нашего газа вращаются одинаково быстро, то придем к заключению, что в равновесии кинетическая энергия диполя должна быть вдвое больше кинетической энергии одномерного резонатора с одинаковой частотой. При сделанных предположениях формулы (1) или (2) можно применять непосредственно для вычисления кинетической энергии вращающейся молекулы газа с двумя степенями свободы, причем при каждой температуре  $E$  и  $\nu$  связаны соотношением

$$E = \frac{J}{2} (2\pi\nu)^2$$

( $J$  — момент инерции молекулы).

Таким образом, для энергии вращения на одну грамм-молекулу получаем

$$E = N_0 \frac{J}{2} (2\pi\nu)^2 = N_0 \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (3)$$

и

$$E = N_0 \frac{J}{2} (2\pi\nu)^2 = N_0 \left( \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{h\nu}{2} \right). \quad (4)$$

Так как  $\nu$  и  $T$  связаны трансцендентным уравнением, производную  $dE/dT$  нельзя выразить в виде явной функции  $T$ ; однако, полагая для краткости  $2\pi^2 J = p$ , мы получаем для вращательной удельной теплоемкости формулу

$$c_r = \frac{dE}{dT} = \frac{dE}{d\nu} \frac{d\nu}{dT} = N_0 2p\nu \frac{\nu}{T \left( 1 + \frac{kT}{p\nu^2 + h\nu} \right)} \quad (5)$$

или

$$c_r = \frac{dE}{dT} = \frac{dE}{d\nu} \frac{d\nu}{dT} = N_0 2p\nu \frac{\nu}{T \left( 1 + \frac{kT}{p\nu^2 - \frac{h^2}{4p}} \right)}, \quad (6)$$

причем  $\nu$  и  $T$  связаны уравнением

$$T = \frac{h}{k} \frac{\nu}{\ln\left(\frac{h}{p\nu} + 1\right)} \quad (5a)$$

или

$$T = \frac{h}{k} \frac{\nu}{\ln\left(\frac{h}{p\nu - \frac{h}{2}} + 1\right)}. \quad (6a)$$

На рис. 2 кривая *I* изображает удельную теплоемкость, вычисленную по формулам (6) и (6a), причем значение  $p$  равно  $2,90 \cdot 10^{-40}$ .<sup>2</sup> Кривая *II*

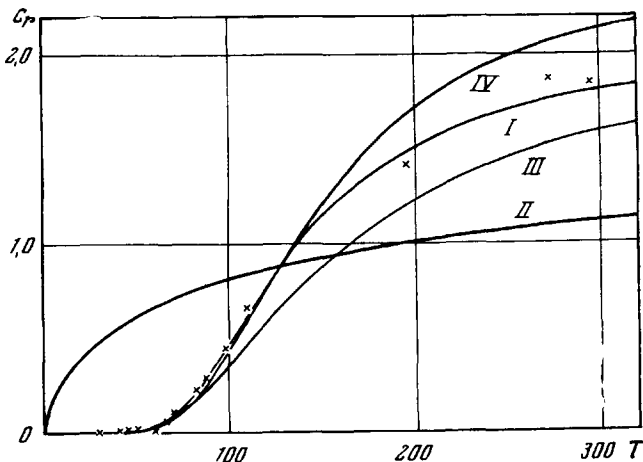


Рис. 2.

вычислена по формулам (5) и (5a) при  $p = 2 \cdot 10^{-40}$ . Крестики отвечают значениям, полученным Эйкеном<sup>3</sup>. Нетрудно видеть, что ход кривой *II* резко противоречит опыту, тогда как кривая *I*, основанная на предположении о нулевой энергии, превосходно воспроизводит результаты опыта. Чтобы установить, какое значение принимает  $\nu$  по формуле (4) в пределе

<sup>2</sup> Вычисляя соответствующий этому моменту инерции диаметр молекулы, получаем  $9 \cdot 10^{-9}$  — примерно половину значения, определяемого из теории газов.

<sup>3</sup> E u s k e n. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1912, 141.

$T = 0$ , напишем (4) в следующем виде

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = \frac{h}{p\nu - \frac{h}{2}} - 1 = \frac{p\nu + \frac{h}{2}}{p\nu - \frac{h}{2}},$$

Теперь видно, что при  $T = 0$   $\nu$  не может быть нулем, так как тогда правая часть стремилась бы к  $-1$ , а в левой части стоит степень  $e$ . Значит, в пределе  $T = 0$  частота  $\nu$  должна оставаться конечной и, так как и правая, и левая части должны стремиться к бесконечности, должно выполняться равенство  $p\nu_0 - h/2 = 0$ , причем  $\nu_0$  означает предельное значение  $\nu$  при  $T = 0$ . Таким образом,  $\nu_0 = h/2p$ . В рассматриваемом случае получается  $\nu_0 = 11,3 \cdot 10^{12}$ . Величина  $\nu$  с ростом температуры меняется сначала очень медленно; так, при  $102^\circ\text{K}$   $\nu = 11,4 \cdot 10^{12}$ , при  $189^\circ\text{K}$   $\nu = 12,3 \cdot 10^{12}$ , при  $323^\circ\text{K}$   $\nu = 14,3 \cdot 10^{12}$ . Этим объясняется тот факт, что Эйкен сумел сравнительно хорошо описать свои измерения простой формулой Эйнштейна с не зависящим от температуры значением  $\nu$  (кривая III, рис. 2). Однако очевидно, что и эта формула при более высоких температурах оказывается несостоятельной, не говоря уже о том, что без предположения о нулевой энергии постоянство  $\nu$  совершенно необъяснимо. Таким образом, ясно, что удельная теплоемкость водорода говорит в пользу существования нулевой энергии, и остается только проверить, насколько достоверным оказывается ее частное значение  $h\nu/2$ . Поскольку же в дальнейшем исследовании закона излучения предполагается, что нулевая энергия равна  $h\nu$ , мы вычислим удельную теплоемкость водорода также и для этого предположения ( $p = 5,60 \cdot 10^{-40}$ , кривая IV, рис. 2). Очевидно, что эта кривая при высоких температурах идет слишком круто и высоко. С другой стороны, следует заметить, что при учете распределения молекул по скоростям кривая должна во всяком случае стать более пологой. Поэтому можно, хотя и не с полной достоверностью, исключить значение  $h\nu$  для нулевой энергии, как маловероятное <sup>4</sup>.

<sup>4</sup> По теореме Нернста, приравнявая нулю энтропию вращающейся молекулы при  $T = 0$ , подобно энтропии твердых тел, мы получаем для энтропии на грамм-молекулу, обусловленной вращением двухатомной молекулы, значение

$$S_r = \int_0^T \frac{c_r}{T} dT = \int_{\nu_0}^{\nu} \ln \frac{\nu + \nu_0}{\nu - \nu_0} d\nu = \frac{2p\nu^2}{T} + k \ln \left[ \left( \frac{p\nu}{h} \right)^2 - 1 \right].$$

Для высоких температур имеем

$$S_r = R \ln T + 2R + R \ln \frac{2\pi^2 JK}{h^2}.$$

### Вывод закона излучения

Ниже будет показано, каким образом, основываясь на предположении о нулевой энергии, можно естественно, хотя и не вполне строго, вывести формулу излучения Планка; при этом не делается никаких предположений о дискретности каких-либо величин. Путь, который мы для этого предлагаем, по существу такой же, какой был применен Эйнштейном и Хопфом в работе, опубликованной два года назад<sup>5</sup>. Мы рассмотрим поступательное движение свободного резонатора, жестко связанного с молекулой газа, под действием неупорядоченного поля излучения. Тогда в тепловом равновесии средняя кинетическая энергия, приобретаемая молекулой газа от излучения, должна быть равна кинетической энергии, которую эта молекула получила бы в среднем при столкновениях с другими молекулами. Таким образом, мы получаем связь между плотностью черного излучения и средней кинетической энергией молекулы газа, т. е. температурой. Эйнштейн и Хопф получили этим способом закон Рэлея — Джинса. Мы проведем теперь такое же рассмотрение на основе предположения о нулевой энергии. Влияние излучения, по Эйнштейну и Хопфу, можно разделить на две разных части. Во-первых, прямолинейное поступательное движение молекулы-резонатора встречает своего рода сопротивление, оказываемое давлением излучения на движущийся осциллятор. Сила этого сопротивления  $K$  пропорциональна скорости  $v$ , так что  $K = -Pv$ , по крайней мере, если  $v$  мала по сравнению со скоростью света. Значит, импульс, приобретаемый молекулой-резонатором за малое время  $\tau$ , за которое  $v$  заметно не изменяется, есть  $-Pv\tau$ . Во-вторых, излучение возбуждает в молекуле-резонаторе флуктуации импульса  $\Delta$ , в первом приближении независимые от движения молекулы и одинаковые для всех направлений, так что кинетическая энергия определяется только их средним квадратом  $\bar{\Delta}^2$  за время  $\tau$ . Если же эта энергия принимает требуемое статистической механикой значение  $k(T/2)$  (ради простоты будем предполагать, что осциллятор движется только по оси  $x$  и колеблется только по оси  $z$ ), то по Эйнштейну и Хопфу (цит. статья, этот том, стр. 207.—*Ред.*), должно выполняться соотношение

$$\bar{\Delta}^2 = 2kT\rho\tau.$$

По Заккуру (См. Nernst-Festschrift, 1912, стр. 414) константа энтропии вращения равна

$$R + R \ln \frac{16\pi^2 Jk}{h^2}.$$

В главном, а именно зависимостью от  $Jk/h^2$ , она совпадает с нашим выражением. Тот же результат получается, впрочем, если для  $c_r$  пользоваться не формулой (5), а формулой (6).

<sup>5</sup> A. Einstein, L. N o r f. Ann. Phys., 1910, 33, 1105—1115 (Статья 21).

Что касается значения  $P$ , то мы предположим, что для него надо учитывать только флуктуации, возбуждаемые самим излучением, причем их можно вычислять так, как будто нулевой энергии не существует. Следовательно, можно воспользоваться значением  $P$ , вычисленным Эйнштейном и Хопфом (цит. статья, этот том, стр. 211.—*Ред.*):

$$P = \frac{3c\epsilon}{10\pi\nu} \left( \rho - \frac{\nu}{3} \frac{d\rho}{d\nu} \right).$$

Чтобы вычислить теперь  $\bar{\Delta}^2$ , возьмем (цит. статья, этот том, стр. 211.—*Ред.*) импульс, приобретаемый осциллятором за время  $\tau$  в направлении  $x$ :

$$J = \int_0^{\tau} K_x dt = \int_0^{\tau} \frac{\partial E_z}{\partial x} f dt,$$

где  $f$  — импульс осциллятора. Рассмотрим сначала случай, когда энергия флуктуаций, возбуждаемых излучением, пренебрежимо мала по сравнению с нулевой энергией резонатора, что заведомо законно при достаточно низких температурах. Обозначая через  $f_0$  максимальный импульс резонатора, имеем

$$f = f_0 \cos \frac{2\pi n_0 t}{T},$$

где  $T$  — большое время и  $n_0/T = \nu_0$  — частота резонатора. Разложим  $\partial \mathcal{E}_z / \partial x$  в ряд Фурье

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} = \sum C_n \cos \left( 2\pi n \frac{t}{T} - \vartheta_n \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\tau} \sum C_n \cos \left( 2\pi n \frac{t}{T} - \vartheta_n \right) f_0 \cos \left( 2\pi n_0 \frac{t}{T} \right) dt = \\ &= f_0 \sum C_n \frac{T}{2\pi(n_0 - n)} \sin \left( \pi \frac{n_0 - n}{T} \tau \right) \cos \left( \pi \frac{n_0 - n}{T} \tau - \vartheta_n \right), \end{aligned}$$

так как член, умноженный на  $1/(n_0 + n)$ , выпадает, поскольку  $n_0 + n$  очень большое число. Полагая теперь  $n/T = \nu$  и возводя в квадрат, получаем

$$\bar{J}^2 = \bar{\Delta}^2 = f_0^2 \bar{C}_n^2 \frac{T}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \pi (\nu_0 - \nu) \tau}{[\pi (\nu_0 - \nu)]^2} d\nu,$$

или

$$\bar{\Delta}^2 = \frac{1}{8} f_0^2 \bar{C}_n^2 T \tau.$$

Теперь (цит. статья, стр. 1114) (этот том, стр. 214.— *Ред.*)

$$\overline{C_n^2 T} = \frac{64}{15} \frac{\pi^3 \nu^2}{c^2} \rho.$$

Следовательно, имеем

$$\overline{\Delta^2} = \frac{8}{15} \frac{\pi^3 \nu^2}{c^2} \rho \tau f_0^2.$$

Если же резонатор обладает нулевой энергией  $h\nu^6$ , то<sup>7</sup>

$$\frac{1}{2} K f_0^2 = h\nu \text{ или } f_0^2 = \frac{2h\nu}{K} = \frac{3}{8} \frac{hc\sigma^3}{\pi^4 \nu^2}.$$

Следовательно, имеем

$$\overline{\Delta^2} = \frac{1}{5\pi} hc\sigma\tau.$$

Подставляя это в формулу

$$\overline{\Delta^2} = 2kTP\tau,$$

мы получаем закон излучения Вина. Однако теперь мы откажемся от предположения, что флуктуациями, возбуждаемыми излучением, можно пренебречь. Предполагая теперь, что флуктуации импульса, возбуждаемые в резонаторе излучением, не зависят от флуктуаций, соответствующих нулевой энергии, мы можем складывать средние квадраты этих двух видов флуктуаций импульса<sup>8</sup>. Таким образом, прибавляя к вычисленному выше значению  $\overline{\Delta^2}$  величину, полученную еще Эйнштейном и Хопфом [цит. статья, стр. 1114 (этот том, стр. 214.— *Ред.*), соотношение (15)], мы находим

$$\overline{\Delta^2} = \frac{1}{5\pi} hc\sigma\tau + \frac{c^4 \sigma \tau}{40\pi^2 \nu^3} \rho^2.$$

С другой стороны,

$$\overline{\Delta^2} = 2kTP\tau = 2kT\tau \frac{3c\sigma}{10\pi\nu} \left( \rho - \frac{\nu}{3} \frac{d\rho}{d\nu} \right).$$

<sup>6</sup> Как оказалось, чтобы получить формулу излучения Планка, в рамках приведенных здесь вычислений нулевую энергию необходимо приравнять  $h\nu$ . Дальнейшие исследования покажут, исчезает ли при более строгом вычислении расхождение между этим предположением и гипотезой, положенной в основу исследования водорода.

<sup>7</sup> М. Планк. *Wärmestrahlung*. 6 Aufl., p. 112 [соотношение (168)]. (См. перевод: М. Планк. Теория теплового излучения. М.—Л., 1935.— *Ред.*)

<sup>8</sup> Едва ли надо подчеркивать, что этот способ действия можно оправдать только нашим незнанием истинных законов движения резонатора.



Отсюда для  $\rho$  получается дифференциальное уравнение

$$h\rho + \frac{c^3}{8\pi\nu^3}\rho^2 = 3kT \left( \rho - \frac{\nu}{3} \frac{d\rho}{c\nu} \right).$$

Решая это уравнение, приходим к закону излучения Планка

$$\rho = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

и энергия резонатора равна

$$E = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + h\nu.$$

### Заключение

1. Результаты Эйкена по измерению удельной теплоемкости водорода говорят в пользу существования нулевой энергии  $h\nu/2$ .

2. Предположение о нулевой энергии открывает путь для вывода формулы излучения Планка без введения каких-либо дискретных величин. Однако все же сомнительно, чтобы и другие трудности можно было преодолеть без гипотезы квантов.

Цюрих, декабрь 1912 г.

Поступила 5 января 1913 г.

### Примечание при корректуре

Проф. Вейсс обратил наше внимание на то, что выполненные П. Кюри измерения парамагнетизма газообразного кислорода также говорят о том, что вращательная энергия кислорода при высоких температурах стремится к величине, требуемой классической теорией, а не к значению, меньшему на  $h\nu/2$ , как это следовало бы без предположения о нулевой энергии. Легко показать, что в последнем случае при точности измерений, достигнутой Кюри, должны быть обнаружены отклонения от закона Кюри.

## ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ВЫВОД ЗАКОНА ФОТОХИМИЧЕСКОГО ЭКВИВАЛЕНТА \*

Гипотеза квантов привела к предположению о существовании следующего соотношения между фотохимическими явлениями и вызывающим их излучением: во всяком элементарном фотохимическом процессе диссоциации молекулы под действием излучения энергия, необходимая для процесса, равна  $h\nu$ , где  $h$  — известная постоянная, фигурирующая в формуле Планка, а  $\nu$  — частота падающего излучения. Сейчас мы рассмотрим этот закон, причем не будем становиться на точку зрения квантовой теории. Напротив, мы будем исходить из некоторого феноменологического представления и не будем использовать для решения задачи никаких представлений о взаимодействии с излучением.

Рассмотрим газ, молекулу которого обозначим символом АВ. Кроме того, предположим, что молекулы АВ газа под действием излучения расщепляются на составные части А и В и что процесс диссоциации связан с поглощением излучения. Мы будем предполагать также, что интервал частот, способных вызвать эту реакцию, не является бесконечно малым.

Относительно указанной реакции фотохимического расщепления мы выскажем несколько гипотез и выведем из них следствия методами классической термодинамики. Первые из этих гипотез состоят в следующем:

1. Если на газ действует излучение с частотами, принадлежащими интервалу  $d\nu$ , составляющему часть той области спектра, к которой чувствительна рассматриваемая реакция, то число молекул, распавшихся в единицу времени, пропорционально интенсивности излучения и числу имеющихся молекул АВ;

.....  
\* *Déduction thermodynamique de la loi de l'équivalence photochimique. J. phys.*, ser. 5, 1913, 111, 277—282 (Доложено на заседании Французского физического общества 27 марта 1913 г. — *Ред.*).

2. Энергия  $e$  света, поглощенного при расщеплении одной грамм-молекулы АВ, не зависит от интенсивности излучения, но может зависеть от частоты излучения и температуры газа.

3. Единственным результатом взаимодействия излучения и газа являются фотохимические процессы, так что переход энергии  $e$  от излучения с частотой  $\nu$  к газу однозначно (как с помощью жесткого механизма) связан с расщеплением грамм-молекулы АВ.

Ясно, что при температуре  $T$  излучение черного тела должно существовать в равновесии со смесью газов АВ, А и В, находящихся в определенных молярных концентрациях  $\eta_{AB}$ ,  $\eta_A$  и  $\eta_B$  при той же температуре  $T$ . Состояние такого рода мы будем называть «термодинамическим равновесием в узком смысле слова». В этом состоянии излучение, соответствующее интервалу частот  $d\nu$ , приводит в единицу времени к расщеплению некоторого числа молекул АВ. За счет обратного процесса то же число молекул АВ должно вновь рекомбинировать в единицу времени: газ должен выделить в точности то же количество энергии излучения, приходящегося на интервал  $d\nu$ , которое было поглощено при расщеплении молекул.

Что же касается энергии излучения, выделенной при рекомбинации, то мы сделаем еще две гипотезы, справедливость которых кажется менее сомнительной, если плотность излучения достаточно мала:

4. Число рекомбинаций молекул А и В в единицу времени не зависит от плотности излучения.

5. Энергия излучения, отвечающего определенному интервалу частот  $d\nu$ , выделенная при рекомбинации одной грамм-молекулы А и одной грамм-молекулы В, не зависит от плотности излучения.

Если эти условия выполнены, то из них вытекает следующее утверждение. Если величины

$$\rho(\nu)^1, \quad \eta_{AB}, \quad \eta_A, \quad \eta_B \quad (1)$$

характеризуют некое «термодинамическое равновесие в узком смысле слова», то существуют термодинамические равновесия, характеризуемые величинами

$$\rho' = \frac{\rho}{\alpha}, \quad \eta'_{AB} = \alpha \eta_{AB}, \quad \eta'_A = \eta_A, \quad \eta'_B = \eta_B, \quad (1a)$$

где  $\alpha$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $\nu$ , если температура смеси газов в случае (1a) та же, что и в случае (1).

В самом деле, из предположений 1 и 4 следует, что число молекул, распадающихся в единицу времени, и число молекул, рекомбинирующих в единицу времени, в обоих случаях одинаково. Кроме того, поскольку одновременно выполняется и предположение 3, из предположений 2 и 3

<sup>1</sup>  $\rho(\nu)$  есть плотность излучения черного тела при температуре  $T$ , соответствующая частоте  $\nu$ .

следует, что распределение энергии между газом и излучением остается неизменным. Следовательно, состояние (1а) существует в течение продолжительного времени, и его можно рассматривать как состояние термодинамического равновесия, которое можно назвать «термодинамическим равновесием в широком смысле».

Чтобы получить следствия из наших предположений, запишем уравнения, выражающие тот факт, что состояния (1а) являются состояниями термодинамического равновесия. Для удобства дополним нашу систему, состоящую из газа и излучения, бесконечно большим тепловым резервуаром, с которым газ постоянно находится в тепловом контакте (за счет теплопроводности). Предположим, что вся система полностью изолирована от внешней среды. Тогда для всякого виртуального изменения должно выполняться соотношение

$$\delta S_i + \delta S_g + \delta S_r = 0, \quad (2)$$

где  $S_i$  — энтропия излучения,  $S_g$  — энтропия газа и  $S_r$  — энтропия резервуара. Рассмотрим следующее виртуальное изменение: грамм-молекула АВ распадается с поглощением излучения с энергией  $\epsilon$ , отвечающей интервалу частот  $d\nu$  в окрестности частоты  $\nu$ .

Тогда

$$\delta S_i = \frac{\epsilon}{T_i}, \quad (a)$$

если через  $T_i$  обозначить температуру излучения с частотой  $\nu$ , соответствующей плотности  $\rho' = \frac{\epsilon}{\alpha}$ .

Для энтропии смеси газов получаем известное выражение

$$S_g = \sum n_\lambda \sigma_\lambda + R \ln V - R \ln n_\lambda,$$

где  $n_\lambda$  — число грамм-молекул газа  $\lambda$ -го сорта;  $\sigma_\lambda = \int du_\lambda/T$ ,  $u_\lambda$  — энергия, приходящаяся на одну грамм-молекулу газа  $\lambda$ -го сорта, так что  $\mathcal{E}_g = \sum n_\lambda u_\lambda$  — полная энергия смеси газов;  $V$  — объем и  $R$  — универсальная газовая постоянная.

Отсюда следует, что

$$\delta S_g = \sum \delta n_\lambda (\sigma'_\lambda - R \ln \eta'_\lambda), \quad (б)$$

где  $\delta n_\lambda$  — изменение числа грамм-молекул при виртуальном изменении ( $\delta n_1 = -1$ ,  $\delta n_2 = \delta n_3 = +1$ );  $\sigma'_\lambda = \sigma_\lambda - R$ ;  $\eta'_\lambda$  — объемная концентрация газа сорта  $\lambda$  в случае (1а).

Следует заметить, что в случае (1а), кроме указанного, выполняется также и соотношение

$$\sum \delta n_\lambda \ln \eta'_\lambda = \sum \delta n'_\lambda \ln \eta_\lambda - \ln \alpha = \sum \delta n_\lambda \ln \eta_\lambda + \ln \frac{\rho}{\rho'}. \quad (б')$$

Пусть, наконец,  $\mathcal{E}_r$  — энергия излучения,  $\mathcal{E}_g$  — энергия газовой смеси. В силу принципа равновесия величина  $(\delta\mathcal{E}_r + \delta\mathcal{E}_g)$  равна количеству тепла, сообщенному резервуару, так что

$$\delta S_r = - \frac{\delta\mathcal{E}_r + \delta\mathcal{E}_g}{T},$$

или, если заменить  $\delta\mathcal{E}_r$  и  $\delta\mathcal{E}_g$  их выражениями,

$$\delta S_r = \frac{\varepsilon}{T} - \sum \delta n_\lambda \frac{u_\lambda}{T}. \quad (в)$$

Из уравнения (2), принимая во внимание соотношения (а), (б), (б') и (в), получаем:

$$\sum \delta n_\lambda \left( \sigma_\lambda - \frac{u_\lambda}{T} - R \ln \eta_\lambda \right) + \frac{\varepsilon}{T} - \frac{\varepsilon}{T} + R \ln \rho - R \ln \rho' = 0. \quad (2а)$$

Это уравнение должно выполняться и в частном случае, когда  $\alpha = 1$ . В этом случае соотношение (а) совпадает с соотношением (1), т. е. рассматриваемое состояние переходит в «термодинамическое равновесие в узком смысле». Следовательно,  $T'_s = T$  и  $\rho' = \rho$ . Из этого вытекает, что первое слагаемое в уравнении (2а) должно обратиться в нуль:

$$\sum \delta n_\lambda \left( \sigma'_\lambda - \frac{u_\lambda}{T} - R \ln \eta_\lambda \right) = 0.$$

Это равенство представляет собой не что иное, как известное условие термохимического равновесия в смеси идеальных газов. Уравнение (2а) можно записать в виде

$$\frac{\varepsilon}{RT'_s} + \ln \rho' = \frac{\varepsilon}{RT} + \ln \rho.$$

Из уравнения (2) вытекает, что правая часть этого уравнения при заданной температуре газа и заданной частоте является некоторой постоянной. Следовательно, она не зависит ни от  $T$ , ни от  $T'_s$ . Так же обстоит дело и с левой частью, откуда

$$\rho' = A e^{-\frac{\varepsilon}{RT'_s}}. \quad (3)$$

Из этой формулы видно, что в силу сделанных предположений зависимость монохроматического излучения от температуры должна удовлетворять закону Вина, согласно которому

$$\rho = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu N}{RT}}. \quad (3а)$$

Известно, что при заданной частоте формула Вина верна лишь при достаточно слабом излучении. Отсюда ясно, что наши предположения не будут оставаться в силе при произвольной плотности излучения.

Однако то обстоятельство, что наш вывод приводит, с одной стороны, к известной формуле термохимического равновесия, а с другой — к закону излучения Вина, показывает, что при достаточно малых плотностях излучения мы приходим к результатам, согласующимся с экспериментальными фактами.

Из сравнения формул (3) и (3а) видно, что

$$\varepsilon = N h \nu, \quad (4)$$

где  $N$  — число молекул в грамм-молекуле,  $h$  — известная постоянная Планка. Это соотношение выражает закон фотохимического эквивалента, который был уже выведен ранее из гипотезы квантов.

Обратим внимание еще на одну характерную особенность нашего вывода, имеющую принципиальное значение. Исходным пунктом наших рассуждений было допущение о том, что молекула, поглощающая излучение, обладает конечной областью чувствительности ( $\nu_1 - \nu_2$ ). В соотношении (4) частота  $\nu$  означает любую из частот, принадлежащих этой области. Фотохимическое действие этой частоты  $\nu$  изучалось путем рассмотрения виртуального изменения. Следовательно, из соотношения (4) вытекает, что энергия, поглощенная при диссоциации грамм-молекулы рассматриваемого газа, никоим образом не характеризует механизм поглощения, а является величиной, зависящей лишь от частоты падающего излучения.

К этому выводу можно также прийти и из гипотезы световых квантов; но поскольку в силу известных причин этой гипотезой можно пользоваться лишь с чрезвычайной осторожностью и осмотрительностью, мне представлялось важным получить сформулированное выше заключение, стоя на более прочной основе. Экспериментальная проверка полученного результата с помощью светового излучения или рентгеновых лучей была бы весьма желательна.

## К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ \*

Ниже будут рассмотрены две проблемы, находящиеся в тесной взаимосвязи друг с другом, так как они показывают, в какой степени можно вывести чисто термодинамическим путем важнейшие новейшие результаты учения о теплоте, а именно формулу излучения Планка и теорему Нернста, не обращаясь к принципу Больцмана, но используя основные идеи теории квантов. Поскольку приводимые ниже соображения соответствуют действительности, теорема Нернста выполняется для химически чистых, кристаллических веществ, но не для смешанных кристаллов. Об аморфных веществах, вследствие полной неясности в вопросе о сущности аморфного состояния, нечего и говорить.

Для оправдания излагаемой здесь попытки доказать теорему Нернста я должен прежде всего заметить, что вывести теоретически теорему Нернста *термодинамическим* путем, используя опытный факт исчезновения теплоемкости при  $T = 0$ , пока не удавалось. Я готов обосновать это утверждение для каждой отдельной попытки доказательства, если этого пожелают коллеги.

§ 1. *Термодинамический вывод формулы излучения Планка.* Рассмотрим химически однородный газ, каждая молекула которого несет на себе резонатор<sup>1</sup>. Пусть энергия этого резонатора принимает не непрерывные, а определенные дискретные значения  $\epsilon_\sigma$  (отнесенные к одной грамм-молекуле). Теперь я позволю себе считать две молекулы химически различными, т. е. принципиально разделяемыми полупроницаемыми перегородками, если энергии  $\epsilon_\sigma$  и  $\epsilon_\tau$  их резонаторов не равны. В таком случае пер-

\* *Beiträge zur Quantentheorie.* Verhandl. Dtsch. phys. Ges., 1914, 16, 820—828. (Должено на заседании Немецкого физического общества 24 июля 1914 г.)

<sup>1</sup> Под «резонатором» здесь понимается носитель внутренней энергии молекулы, структура которого пока не детализируется.

воначально химически однородный газ я могу также понимать как смесь химически разных газов, компоненты которой характеризуются определенным значением  $\varepsilon_\sigma$ . Формулируя условие термодинамического равновесия этой смеси по отношению ко всем изменениям значений  $\varepsilon$  для молекулы, я получу статистический закон распределения энергий резонаторов по молекулам. Рассматривая затем энергию резонаторов опять как «тепловую энергию», я получу часть удельной теплоемкости газа, соответствующую резонаторам, связанным с молекулами.

Пусть  $n_0, n_1, n_2$  и т. д. — молярные плотности молекул, энергии резонаторов которых равны  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  и т. д. Тогда энергия  $U$  и энтропия  $S$  смеси будут определяться выражениями

$$U = \sum_{\sigma} n_{\sigma} (cT + u_0 + \varepsilon_{\sigma}),$$

$$S = \sum_{\sigma} n_{\sigma} (c \ln T + R \ln V) + \sum_{\sigma} n_{\sigma} (s_{\sigma} - R \ln n_{\sigma}).$$

Удельную теплоемкость  $c$  (при постоянном объеме) на моль — в соответствии с высказанными выше идеями — следует брать при постоянной энергии резонаторов  $\varepsilon_{\sigma}$ , т. е. надо считать одинаковой для всех компонент. Постоянная энтропии газа с энергией резонаторов  $\varepsilon_{\sigma}$  пусть будет  $s_{\sigma}$ ; эта постоянная для каждого  $\sigma$  априори может иметь свое значение. Теперь нам надо образовать свободную энергию  $F = U - TS$  и сформулировать условие, что относительно каждой подлежащей рассмотрению реакции должно выполняться равенство:

$$\delta F = \delta(U - TS) = 0.$$

Мы учтем всю совокупность возможных реакций резонаторов, полагая для каждого  $\sigma$ , отвечающего определенной реакции,

$$\delta n_0 = -1,$$

$$\delta n_{\sigma} = +1.$$

Таким способом получается система уравнений

$$\left( s_{\sigma} - \frac{\varepsilon_{\sigma}}{T} - R \ln n_{\sigma} \right) - \left( s_0 + \frac{\varepsilon_0}{T} - R \ln n_0 \right) = 0,$$

или

$$\frac{n_{\sigma}}{n_0} = e^{(s'_{\sigma} - s'_0) - \frac{\varepsilon_{\sigma} - \varepsilon_0}{T}} \quad (1)$$

(здесь сделана подстановка  $s'_\sigma = s_{\sigma}/R$ ). Это и есть искомое равновесное распределение.



Пусть теперь рассматриваемый резонатор будет монохроматическим с одной степенью свободы и частотой  $\nu$ . Чтобы получить известную формулу Планка для средней энергии этого резонатора, мы должны сделать два предположения:

1. Постоянные энтропии всех компонент нашей смеси, отличающихся энергиями своих резонаторов, одинаковы, т. е. для каждого  $\sigma$  должно иметь место

$$s_{\sigma} = s_0.$$

Это предположение соответствует теореме Нернста.

2. Энергия резонаторов (на моль) кратна величине  $Nh\nu$ :

$$\varepsilon_{\sigma} = \sigma Nh\nu.$$

Это — квантовая гипотеза для монохроматического объекта.

На основе этих гипотез мы получаем

$$n_{\sigma} = n_0 e^{-\frac{\sigma h\nu}{kT}}, \quad (1a)$$

откуда следует

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} n_{\sigma}}{\sum_{\sigma} n_{\sigma}} = + RT^2 \frac{d}{dT} \left( \ln \sum_{\sigma} e^{-\frac{\varepsilon_{\sigma}}{kT}} \right) = \frac{\sum_{\sigma} \sigma N h\nu e^{-\frac{\sigma h\nu}{kT}}}{\sum_{\sigma} e^{-\frac{\sigma h\nu}{kT}}} = N \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (2)$$

Это и есть формула Планка для средней энергии одномерного монохроматического резонатора <sup>2</sup>.

То обстоятельство, что этим способом получается формула Планка, примечательно в нескольких отношениях. Во-первых, понятия физического и химического изменения молекулы, видимо, перестают быть принципиально различными. Квантовое изменение физического состояния молекулы принципиально, по-видимому, не отличается от ее химического изменения. Можно даже пойти еще дальше. Законы броуновского движения привели к стиранию принципиальной противоположности между молекулой и физической системой произвольной протяженности; с другой стороны, Дебай показал, что системам произвольной протяженности с большим успехом можно приписывать разные состояния квантового типа. Таким образом, квантовое изменение состояния в протяженной системе можно даже понимать как процесс, аналогичный химическому изменению молекулы. В этом смысле соотношения (1) и (2), несомненно,

<sup>2</sup> Мое внимание было обращено на то, что подобный вывод формулы Планка дал Бернулли (Zs. Elektrochem., 1914, 20, 269). Однако Бернулли получил свой результат, опираясь на две неверные формулы (4) и (5) в статье Планка.

можно применять к собственным колебаниям систем произвольной протяженности.

Представим себе далее, что компонента смеси с энергией резонатора  $\epsilon_{\sigma}$  отделена от остальных компонент. Предположение, что это возможно без изменения энергии резонатора, лежит в основе нашего вывода. Это предположение аналогично предположению теории химического равновесия о том, что химические смеси можно разложить на их химически простые составные части, не вызывая при этом химических превращений. Теперь представим себе, что температура изолированной таким способом компоненты изменяется при постоянной энергии резонатора  $\epsilon_{\sigma}$ . В какой мере это возможно практически, зависит от «скорости реакции», с которой молекулы меняют свои значения  $\epsilon$ . Если она достаточно мала, то компоненту можно охлаждать как угодно, не теряя никакой части энергии  $\epsilon_{\sigma}$ . Тогда наша система будет иметь сходство с радиоактивной системой. Таким образом, для принципиального понимания радиоактивных явлений, диамагнетизма и т. п. нет необходимости предполагать существование нулевой энергии в смысле Планка. Достаточно предполагать, что энергия распределяется квантами и что она медленно приходит в тепловое равновесие.

Но, с другой стороны, излагаемый вывод помогает глубже понять теорему Нернста, и прежде всего потому, что для получения формулы Планка нам требуется гипотеза 1. Чтобы лучше понять эту взаимосвязь, мы попытаемся распространить проведенное рассмотрение на системы, обладающие числом степеней свободы больше 1. Представим себе, что резонатор, несущий энергию  $\epsilon_{\sigma}$ , имеет две степени свободы; как следовало бы рассуждать в этом случае? Для вывода соотношения (1) совершенно несущественно, какой структурой обладает носитель энергии  $\epsilon_{\sigma}$ ; значит, это уравнение можно сохранить и здесь. Точно так же следует придерживаться гипотезы 2. Опираясь также на гипотезу 1, мы опять получим для средней энергии формулу (2), т. е. только половину величины, соответствующей двумерному резонатору. Чтобы получить здесь правильный результат, уже нельзя приравнивать друг другу энтропийные постоянные компонент смеси, характеризующихся разными значениями  $\epsilon_{\sigma}$ .

Это становится очевидным, если монохроматический резонатор с двумя степенями свободы заменить двумя резонаторами, каждый из которых имеет одну степень свободы. Тогда энергия резонатора  $\epsilon_{\sigma\tau}$  будет

$$\epsilon_{\sigma\tau} = (\sigma + \tau) h\nu.$$

Мы получаем правильное значение средней энергии, предполагая, что молекулы сортов  $\sigma$ ,  $\tau$  и  $\sigma'$ ,  $\tau'$  всегда можно разделить друг от друга, если только одновременно не выполняются равенства  $\sigma = \sigma'$ ,  $\tau = \tau'$  и если для определенных таким образом компонент смеси выполняется гипотеза 1.

Действительно, таким способом находим

$$\frac{n_{\sigma\tau}}{n_{00}} = e^{-\frac{\varepsilon_{\sigma\tau} - \varepsilon_{00}}{kT}},$$

$$\bar{\varepsilon} = RT^2 \frac{d}{dT} \left[ \ln \sum_{\sigma} \sum_{\tau} e^{-\frac{(\sigma+\tau)h\nu}{kT}} \right] = 2N \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}. \quad (2a)$$

То, что гипотеза 1, соответствующая теореме Нернста, становится неприемлимой, если носитель энергии  $\varepsilon_{\sigma}$  имеет две степени свободы и если состояние молекулы характеризуется только энергией  $\varepsilon_{\sigma}$  (без учета того, как эта энергия распределяется по степеням свободы), связано, вероятно, со следующим обстоятельством: *гипотеза 1 применима тогда и только тогда, когда обозначаемое в формуле (3) индексом  $\sigma$  состояние молекулы в смысле квантовой теории полностью характеризуется тем, что оно может реализоваться лишь одним единственным образом.* В этом случае справедлив закон распределения

$$\frac{n_{\sigma}}{n_0} = e^{-\frac{\varepsilon_{\sigma} - \varepsilon_0}{RT}}. \quad (1a)$$

Ограничиваясь поэтому случаем, когда для реализации «внутреннего состояния» молекулы, к которому относятся величины  $\varepsilon_{\sigma}$ , существуют только дискретные возможности, мы должны придерживаться формулы (1a), пока для каждой такой возможности реализации выбирается особый индекс (или особая система индексов). С этим ограничением соотношение (1) становится применимым не только для «молекулы» в обычном смысле этого слова, но и для физической системы, которая рассматривается квантово-теоретически в смысле Джинса — Дебая. Таким образом, мы не вступаем в противоречие с установленными до сих пор результатами квантовой теории.

Энергия  $\varepsilon_{\sigma}$  относится к грамм-молекуле. Относящуюся к отдельной молекуле величину  $\frac{\varepsilon_{\sigma}}{N} = \varepsilon_{\sigma}^*$  всегда можно вводить в том случае, если «молекула» является системой, наблюдаемой на опыте в качестве отдельного объекта. Тогда можно положить

$$\frac{n_{\sigma}}{n_0} = w_{\sigma} = e^{-N \frac{\varepsilon_{\sigma}^* - \varepsilon_0^*}{RT}}. \quad (1b)$$

§ 2. *Энтропия. Теорема Нернста.* Возьмем теперь физическую систему, играющую в предыдущем параграфе роль «молекулы». Будем считать эту систему не изолированной, а связанной с бесконечно большим резервуаром тепла. Состояние системы будет определяться в тер-

модинамическом смысле температурой и одним (или больше, чем одним) параметром  $\lambda$  (например, объемом). Возможные состояния системы, а значит и реализуемые значения энергии  $\varepsilon_\sigma^*$  системы, будут тогда зависеть от значений параметра  $\lambda$ . При постоянном  $\lambda$  будет справедливо соотношение (2а). Тогда средняя энергия системы будет задаваться выражением

$$\bar{\varepsilon}^* = \frac{\sum \varepsilon_\sigma^* w_\sigma}{\sum w_\sigma} = \frac{\sum \varepsilon_\sigma^* e^{-\frac{N\varepsilon_\sigma^*}{RT}}}{\sum e^{-\frac{N\varepsilon_\sigma^*}{RT}}} = \frac{R}{N} T^2 \frac{d}{dT} \ln \left( \sum e^{-\frac{N\varepsilon_\sigma^*}{RT}} \right). \quad (3)$$

Отсюда получается энтропия в зависимости от  $T$  при постоянном  $\lambda$ :

$$S = S_0 = \int_{T_0}^T \frac{d\bar{\varepsilon}^*}{T} = \left| \frac{\bar{\varepsilon}^*}{T} \right|_{T_0}^T + \int_{T_0}^T \frac{\bar{\varepsilon}^*}{T^2} dT$$

или, при соответствующем выборе  $S_0$ ,

$$S = \frac{\bar{\varepsilon}^*}{T} + \frac{R}{N} \ln \left( \sum e^{-\frac{N\varepsilon_\sigma^*}{RT}} \right). \quad (4)$$

Если система обладает очень большим числом степеней свободы, то из соотношения (1б), как известно, вытекает следствие, что рассмотрению подлежат только такие состояния системы, которые соответствуют малому интервалу  $\varepsilon_\sigma^*$ . Тогда при вычислении суммы в формуле (4) можно ограничиться этим малым интервалом, полагая в нем значения  $\varepsilon_\sigma$  постоянными. В результате получаем

$$S = \frac{R}{N} \ln Z, \quad (4а)$$

где  $Z$  — число возможных в смысле квантовой теории элементарных состояний, принадлежащих значению энергии  $\varepsilon^*$ <sup>3</sup>. Формула (4а) выражает принцип Больцмана в трактовке Больцмана — Планка.

До сих пор мы рассматривали изменения состояния только при постоянном  $\lambda$ . Теперь возникает вопрос, будет ли формула (4а) выполняться также по отношению к таким изменениям состояния системы, при которых  $\lambda$  изменяется. На этот вопрос нельзя ответить без новых гипотез. Наиболее вероятная гипотеза, которая здесь напрашивается, это — адиабати-

<sup>3</sup> Это соответствует переходу от «канонического» к «микрканоническому» ансамблю.

ческая гипотеза Эрэнфеста, которую можно сформулировать следующим образом.

При обратимом адиабатическом изменении  $\lambda$  всякое возможное с точки зрения квантовой теории состояние переходит снова в состояние того же типа.

Эта гипотеза ведет к следствию, что число  $Z$  возможных в квантовой теории реализаций термодинамического состояния при адиабатических процессах не изменяется. Так как это справедливо и для  $S$ , то в соответствии с адиабатической гипотезой Эрэнфеста, по смыслу являющейся обобщением закона смещения Вина, следует заключить, что формула (4а), выражающая принцип Больцмана, применима в общем случае. *Следовательно, энтропия системы имеет одинаковое значение для всех (термодинамически определенных) состояний, которые можно реализовать в смысле квантовой теории одинаковым числом способов.*

Поставим теперь вопрос, нельзя ли установить вероятную область применимости теоремы Нернста. Возьмем физическую систему, находящуюся при абсолютном нуле температуры в двух термодинамически определенных состояниях  $A_1$  и  $A_2$ . Значения энтропии этих состояний можно сравнивать, если будет известно число  $Z$  возможностей реализации в смысле квантовой теории.

Мы будем считать описание состояния системы (микросостояния) при абсолютном нуле полным с точки зрения как квантовой, так и молекулярной теории, если указаны положения, в которых находятся центры тяжести отдельных (мысленно пронумерованных) атомов всех элементов, входящих в состав системы. Тогда  $Z$  будет представлять собой число, показывающее, сколько существует микросостояний, относящихся к одному и тому же состоянию, определенному термодинамически.

Если все фазы системы химически однородны и образуют кристаллическую пространственную решетку, такую, что атомы каждого сорта располагаются в определенных местах решетки, то от одного микросостояния в другое из числа  $Z$  можно переходить только путем взаимной перестановки узлов, занимаемых однородными атомами. Напротив, состояния, возникающие при взаимной перестановке двух атомов разного сорта, учитывать не следует. Если во всей системе имеется  $n_1$  молекул первого типа,  $n_2$  молекул второго типа и т. д., то из этого для  $Z$  получается значение

$$Z = n_1! n_2! \dots$$

Отсюда с учетом формулы (4а) следует, что энтропия во всех таких состояниях имеет одно и то же значение. *Таким образом, теорема Нернста справедлива в форме Планка, т. е. для химически простых, кристаллических веществ.*

Но если, например, атомы двух сортов образуют смесь, то можно, не меняя термодинамического состояния системы, переставлять два разнородных атома. Тогда получим

$$Z = (n_1 + n_2)!,$$

в то время как для разделенных веществ выполнялось бы равенство

$$Z = n_1! n_2!.$$

Следовательно, в этом случае энтропии при абсолютном нуле не будут равны. Напротив, разность энтропий для веществ в разделенном и смешанном состояниях имеет значение

$$\frac{R}{N} \ln \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!},$$

которое при  $n_1 = n_2 = N$  переходит в  $R 2 \ln 2$ .

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АТОМИСТИКА \*

*Сравнение,  
разъясняющее  
отношение  
закона  
сохранения  
энергии  
к опыту*

Толчок развитию современного учения о теплоте вообще, так же как и молекулярно-кинетической теории тепла, дало, в первую очередь, открытие закона сохранения энергии. Вначале мы остановимся на отношении этого закона к физическому опыту. Чтобы нам не мешали ни многогранность предмета, ни привычки и убеждения, мы проведем рассмотрение с помощью совсем простого сравнения.

Передо мной стоят два открытых сверху частично заполненных водой сосуда  $G_1$  и  $G_2$ . Сосуды сообщаются друг с другом через гибкий шланг, по которому вода из нижних слоев одного сосуда может перетекать в другой сосуд; такое перетекание всегда происходит до тех пор, пока уровни воды в обоих сосудах не выравняются. Сосуд  $G_1$  имеет прозрачные стенки, так что уровень воды в нем можно определять путем наблюдения снаружи; пусть этот сосуд будет закреплен на определенной высоте. Стенки же второго сосуда пусть будут непрозрачными, и непосредственно наблюдать уровень воды в этом сосуде нельзя вообще; но пусть этот сосуд установлен вертикально и существует способ определять для каждой высоты уровня вес второго сосуда вместе с его содержимым. После установления равновесия наблюдатель при каждом положении  $G_2$  определяет как уровень  $h$  в  $G_1$  по отношению к стенкам этого сосуда, так и соответствующий вес  $\bar{g}$  сосуда  $G_2$ , причем он ограничивается такими положениями  $G_2$ , когда и в  $G_1$ , и в  $G_2$  находится вода. Если сосуд  $G_1$  имеет цилиндрическую форму, этот наблюдатель найдет простое соотношение, которое гласит,

\* *Theoretische Atomistik*. В кн.: «Die Physik». Unter Redaktion von E. Lecher. Die Kultur der Gegenwart. Т. 3, Abt. 3, Bd. 1, Leipzig, Teubner, 1915, 251—263. (Перевод со 2-го издания 1925 г. (стр. 281—294). — *Прим. ред.*)

что — при соответствующем выборе числового множителя  $a$  — величина  $ah + g$  не зависит от высоты, на которой устанавливается  $G_2$ . Если наблюдатель знаком с законами гидростатики и знает, что в сосудах находится жидкость, то такие опыты не представляют для него никакого интереса. Но наш наблюдатель ничего не знает о содержимом сосудов; для него полученный им при изучении нашей физической системы результат явится научным открытием. Он скажет: «Уровень воды  $h$  в сосуде  $G_1$  и вес  $g$  сосуда  $G_2$  — это эквивалентные величины, так как всякое изменение уровня воды  $h$  в  $G_1$  всегда имеет следствием вполне определенное противоположное изменение  $g$ ; величина  $ah + g$  измеряет некоторое свойственное системе неизменное количество».

Многочисленные наблюдения подобного рода и привели физиков к закону сохранения энергии. В области чистой механики (без трения) прежде всего было найдено, что существует величина  $\Phi$  (потенциальная энергия), которая зависит только от положения материальных точек, и величина  $L$  («кинетическая энергия»), которая зависит только от скоростей точек; эти две величины таковы, что сумма  $\Phi + L$  не изменяется во времени при всех движениях, при которых механическая система не испытывает внешних воздействий. Эту сумму принято называть «механической энергией» системы.

Этот закон сохранения перестает быть справедливым, если в замкнутой механической системе заметную роль играет трение. Но к середине XIX века физики поняли, что и в этом случае можно сформулировать закон сохранения, рассматривая наряду с механическими величинами еще и тепловые (эквивалентность механической и тепловой энергии). Закон сохранения будет справедливым и в случае, когда система претерпевает не только механические и тепловые, но и любые другие (например, электрические или химические) изменения состояния; в этом случае неизменная в изолированной системе величина, называемая «энергией», будет зависеть также и от переменных, определяющих состояние системы в тепловом, электрическом, химическом и других отношениях.

Обрисованный выше закон сохранения энергии имеет неопределимое значение для физики не только потому, что он дает нам много отдельных закономерностей и позволяет рассматривать самые разнообразные изменения с единой точки зрения, сравнивая все состояния системы по их значениям энергии. Сверх того, закон сохранения энергии заставляет нас также припи-

*Содержание  
закона  
сохранения  
энергии*

*Влияние закона  
сохранения  
энергии  
на основные  
теоретические  
представления  
прошлого  
столетия*



сывать всякой энергии одну и ту же физическую природу, совершенно независимо от того, в какой взаимосвязи энергия находится с непосредственно наблюдаемыми величинами в каждом отдельном случае.

Упомянутый выше несведущий наблюдатель, экспериментирующий с двумя сосудами  $G_1$  и  $G_2$ , может поступать в малом так же, как и физики в своей области исследования. Исходя из того, что величина  $ah + g$  остается постоянной, он сначала припишет сосуду  $G_1$  некоторое количество  $ah$ , сосуду  $G_2$  — некоторое количество  $g$ , не предполагая, однако, что эти количества обладают одинаковым качеством; он удовлетворит опыту, представляя себе, что при данном процессе часть содержимого сосуда  $G_1$  превращается в соответственно равное приращение содержимого  $G_2$ . Но он может пойти и дальше, высказав гипотезу, что содержимое сосудов  $G_1$  и  $G_2$  одинакового качества и что, следовательно, процесс, происходящий при опускании  $G_2$ , заключается не в п р е в р а щ е н и и, а всего лишь в *изменении пространственного положения* содержимого сосудов. Ясно, что при таком понимании он придет к дальнейшим выводам и опытам, к которым первоначальное понимание его не привело бы.

То же самое происходило по существу с физиками. Опыт настойчиво подсказывал им, что закон сохранения энергии следует интерпретировать так, что в сущности имеется только один вид энергии, как бы ни различались внешние формы ее проявления. Такая трактовка позволяет действительно понять закон сохранения энергии, т. е. получить его как следствие общих основ теории, т. е. представляется невозможным при допущении принципиально различных видов энергии.

Современные физики также считают выдающимся достижением сведение всех видов энергии к одному единственному виду; однако они не надеются достичь этой цели в обозримом будущем. Но в середине прошлого столетия физики были более уверенными. Механика играла столь главенствующую роль в предшествующем развитии физики, что предположение о единстве энергии для тогдашних физиков было неразрывно связано с гипотезой, что эта единая энергия должна быть механической энергией. Поэтому они были твердо убеждены в том, что в конечном счете все явления должны сводиться к механическим процессам. Во введении к своей основополагающей работе «О сохранении силы» (1847 г.) Г. Гельмгольц выразил это убеждение следующими словами: «Наконец-то опре-

делилась задача физических наук — свести явления природы к неизменным силам притяжения и отталкивания, интенсивность которых зависит от расстояния. Разрешимость этой задачи является также условием полной познаваемости природы».

Сегодня мы, пожалуй, можем с уверенностью сказать, что это убеждение, которое несколько десятилетий назад было еще безусловно господствующим, уже нельзя сохранить в полном объеме. Но вместе с тем сегодня меньше, чем раньше, отвергается, что большую часть физических явлений удается вполне удовлетворительным образом сводить к механическим процессам. Этому убеждению в фундаментальном значении механики для теоретической физики мы обязаны в первую очередь кинетической теории тепла, о важнейших чертах развития которой я сейчас расскажу. При этом я не всегда буду придерживаться исторического хода развития, который в значительной мере определяется тем, в какой последовательности удавалось преодолевать известные математические трудности.

Кинетическая теория материи с самого начала заимствовала из химии и кристаллографии молекулярную теорию. Согласно этой теории все физические вещества состоят из определенных частиц конечных размеров (молекул), способных двигаться только как целое и наделенных свойствами, в основном аналогичными свойствам тел, знакомых нам из повседневного опыта. Каждая такая молекула состоит из некоторого числа атомов, как правило, небольшого. Читатель-скептик может подумать, что молекулярная теория, вероятно, не дает ничего нового кроме того, что она просто переносит на молекулы те качества, с которыми мы познакомились, изучая тела нашего повседневного опыта. Очень важно показать здесь, что это не так. Очевидно, теория приобретает научную ценность только тогда, когда лежащие в ее основе предположения более просты, т. е. менее разнообразны, чем их следствия, сравниваемые с опытом.

*Основные  
гипотезы  
кинетической  
теории  
теплоты*

Кроме молекулярной гипотезы кинетическая теория использует еще предположение, что к молекулам и атомам можно применять без всяких изменений законы механики, причем атомы принимаются за материальные точки. Последнее означает, что положение атома определяется заданием одной единственной точки и что, таким образом, об ориентации и, соответственно, вращении атома можно не говорить.

Теперь представим себе любую *изолированную* физическую систему тел, т. е. такую систему, которая не находится ни в

Общий  
результат  
теории  
(равномерное  
распределение  
кинетической  
энергии)

каком взаимодействии с телами других систем. Согласно теории, эта система состоит из чудовищно большого числа движущихся по законам механики атомов, которые действуют друг на друга с силами, зависящими только от их положения. Если мы будем следить некоторое время за одним атомом, то заметим, что его скорость вследствие взаимодействия с другими атомами принимает с течением времени самые разнообразные значения, так же как и величина  $m \frac{c^2}{2}$  ( $m$  — масса атома),

которая называется его кинетической энергией. Но если мы будем следить за этим атомом достаточно долго, то из всех значений, принимаемых кинетической энергией с течением времени, мы сможем образовать некоторое среднее значение, которое мы обозначим через  $L$ . Анализ дает теперь совершенно общий закон, что это среднее по времени значение  $L$  переменной величины  $m \frac{c^2}{2}$  одинаково для всех атомов системы. Можно

представить себе, что молекула состоит из нескольких атомов, которые хотя и движутся относительно друг друга, но так, что расстояния между входящими в молекулу атомами благодаря силам их взаимодействия не могут превышать определенных пределов. Центр тяжести молекулы в каждое мгновение обладает некоторой скоростью  $C$ , определяемой скоростями ее атомов;  $C$  уместно называть скоростью поступательного движения молекулы. Если  $M$  — масса молекулы, то величину  $M \frac{C^2}{2}$  можно назвать кинетической энергией поступательного движения молекулы. Анализ показывает, что среднее по времени значение этой энергии также равно  $L$ , т. е. одинаково для всех молекул системы и равно соответствующему среднему значению для отдельного атома.

Величина  $L$  служит, таким образом, всеобщей мерой интенсивности движения молекул в системе. Если две изолированные вначале системы с одинаковым значением  $L$  соединить в одну общую систему, не совершая работы и не подводя тепла (соприкосновение), то для общей системы характеризующая ее величина  $L$  будет такой же, как в обеих первоначальных системах; обмен энергией при соприкосновении не происходит. Но если исходные системы до соприкосновения обладали разными значениями  $L$ , то при соприкосновении должно происходить выравнивание их значений  $L$  и тем самым энергия будет переходить из системы с большим значением  $L$  в систему с

меньшим  $L$ . Следовательно, благодаря этому свойству величину  $L$  можно считать непосредственно мерой температуры системы; действительно, мы скоро увидим, что  $L$  с точностью до числового множителя равна так называемой абсолютной температуре.

Остановимся теперь специально на кинетической теории газов. В твердом и жидком состояниях вещества соседние молекулы должны действовать друг на друга с большой силой, так как эти тела, как явствует из опыта, оказывают значительное сопротивление изменению их объема. В газо- или парообразном состоянии даже соседние молекулы весьма значительно удалены друг от друга; поэтому для такого состояния естественно предполагать, что молекулы вообще движутся свободно и взаимодействуют друг с другом только в тех случаях, когда две молекулы сближаются особенно сильно (соударение). Эти свободно движущиеся молекулы сталкиваются также со стенками сосуда, в котором находится газ, и благодаря этому производят на них давление  $p$ . Это давление можно легко вычислить чисто механическим путем, если известны объем сосуда  $V$ , интенсивность молекулярного движения  $L$  и число молекул газа  $n$  в сосуде. В результате получается

$$p = \frac{2}{3} n \frac{L}{V}.$$

Этот результат содержит два положения, подтверждаемых опытом, а именно:

1. Давление газа при постоянной температуре (постоянной величине  $L$ ) обратно пропорционально объему.
2. Давление газа зависит только от числа, а не от природы молекул, составляющих газ.

Последнее из этих положений можно проверять на опыте в такой степени, в какой методы химии позволяют установить соотношение между числами молекул  $n$ , содержащихся в двух разных газах.

Наконец, наш результат разъясняет нам также взаимосвязь между величиной  $L$  и температурой. В учении о теплоте абсолютная температура  $T$  проще всего определяется как величина, пропорциональная давлению газа при постоянном объеме. Наше соотношение показывает, что это определение справедливо и для величины  $L$ ; поэтому она с точностью до постоянного множителя совпадает с абсолютной температурой. Этот постоянный множитель, как мы сейчас покажем, связан с абсолютным размером молекулы.

*Уравнение  
состояния  
идеального  
газа*

*Молекулярно-  
теоретический  
смысл  
абсолютной  
температуры*

Именно, мы применим наше уравнение к такому количеству граммов химически простого газа, которое равно молекулярному весу (например, к двум граммам водорода); это количество вещества называется грамм-молекулой. Число молекул  $N$  в грамм-молекуле, очевидно, одинаково для всех веществ и является универсальной постоянной, определяющей абсолютный размер молекулы. Наше соотношение для одной грамм-молекулы имеет вид

$$p = \frac{2}{3} \frac{NL}{V}.$$

С другой стороны, опыт дает для грамм-молекулы соотношение

$$p = \frac{RT}{V},$$

где  $R$  — экспериментально найденная постоянная ( $8,3 \cdot 10^7$ ).

Сравнивая оба соотношения, получаем

$$L = \frac{3}{2} \frac{R}{N} T.$$

Тем самым установлена связь величин  $L$  и  $T$ .

Удельная  
теплоемкость  
одноатомных  
газов

Из нашего соотношения для давления газа можно получить один важный результат. По определению,  $L$  равна средней кинетической энергии атома, а следовательно, и средней кинетической энергии молекулы, если молекула одноатомная. Таким образом, величина  $NL$ , или  $\frac{3}{2} RT$ , равна общей кинетической энергии одной грамм-молекулы одноатомного газа и вообще равна общей энергии газа, пока эта энергия зависит от  $T$ , т. е. от интенсивности молекулярного движения. Следовательно, удельная теплоемкость одноатомного газа, отнесенная к одной грамм-молекуле, должна быть равна  $\frac{3}{2} R$ . Этот вывод подтверждается для всех газов, молекулы которых являются, как показывает химия, одноатомными.

До сих пор не требовалось делать какие-либо предположения о природе молекул. Поэтому согласие результатов теории с опытом следует рассматривать как важное подтверждение общих основ теории. Однако изложенное выше не может принести полного удовлетворения по следующей причине. Мы ввели в основы теории допущение, что частицы (атомы или молекулы), движение которых образует теплоту, обладают хотя и очень малыми, но вполне определенными конечными размерами. Однако, с другой стороны, сравнение с опытом результатов теории не позволяет определить истинные массы атомов

и молекул. Сделать это удалось только на основе теории Клаузиуса, объяснившей кинетически три, казалось бы, совершенно разных явления, а именно внутреннее трение, теплопроводность и диффузию. Перейдем к обсуждению этой теории.

При достаточно медленном протекании газа (или же жидкости) по трубке скорость течения будет наибольшей на оси, при приближении к стенке она уменьшается и непосредственно на самой стенке обращается в нуль. Таким образом, внутренние слои скользят относительно внешних слоев, и опыт показывает, что для сохранения этого связанного с постоянным скольжением движения необходимо постоянно затрачивать работу. Эта работа при заданном движении зависит от природы вещества и от его физического состояния; поэтому физики ввели зависящую от физического состояния характеристическую постоянную (коэффициент внутреннего трения), определяющую силу, с которой действуют друг на друга скользящие слои газа. Это сопротивление трения кинетическая теория объясняет следующим образом. Если бы мы могли видеть движение отдельных молекул в трубке, то это движение в каждом малом объеме выглядело бы примерно так, как движение комаров в рое. Наряду с движением отдельных комаров в рое, заметно и движение роя как целого. Только это последнее движение и может заметить наблюдатель, не различающий отдельных комаров. Если рой движется как целое, то, хотя каждый отдельный комар и может двигаться с любой по величине и направлению скоростью, большое число случайно выбранных комаров роя, попадающих в поле зрения, будет двигаться *в среднем* в направлении движения роя.

Рассмотрим же теперь срединную часть трубы, в которой скорость «движения роя» в направлении оси наибольшая. Вследствие молекулярного движения эта срединная часть беспрерывно обменивается молекулами с внешними частями. Но так как вновь приходящие молекулы поступают из частей с менее быстрым «движением роя», то они будут иметь в направлении оси трубы в среднем меньшую скорость, чем это соответствует «движению роя» в срединной части. Следовательно, скорость «движения роя» в срединном слое станет убывать, если мы не позаботимся о поддержании, или, лучше сказать, о постоянном возобновлении «движения роя», применяя внешнее воздействие, например, создавая разность давлений на концах трубы. Понятно, что для поддержания движения необходима постоянная затрата энергии.

*Внутреннее трение в газах*

При математическом исследовании этого явления фундаментальную роль играет понятие, не встречавшееся нам в прежних рассуждениях, а именно понятие «средней длины свободного пробега». Оказывается, что энергия, необходимая для поддержания заданного движения, при прочих равных условиях тем больше, чем длиннее путь, проходимый в среднем молекулой между двумя столкновениями (средняя длина свободного пробега). Теория позволяет вычислить среднюю длину свободного пробега по наблюдаемой величине внутреннего трения, для воздуха при атмосферном давлении она равна примерно одной десятитысячной миллиметра. Длина свободного пробега изменяется обратно пропорционально давлению газа.

В согласии с опытом теория дает поразительный результат: при заданном движении мощность, необходимая для его поддержания, не зависит от давления газа.

*Теплопроводность  
в газах*

Возьмем теперь газ, в котором с высотой изменяется температура, т. е. интенсивность теплового движения. Пусть наверху температура самая высокая, а книзу она постепенно убывает. Как известно, тепловая энергия будет тогда перетекать из верхней части газа в нижнюю; этот процесс называется «теплопроводностью». С точки зрения молекулярной теории теплопроводность объясняется следующим образом. Через горизонтальную плоскость, мысленно проведенную на некоторой высоте в газе, непрерывно перелетают молекулы сверху вниз и снизу вверх. Но молекулы, приходящие сверху, летят из слоев с более интенсивным тепловым движением, чем молекулы, прибывающие снизу. Поэтому первые переносят через плоскость сверху вниз в среднем большую тепловую энергию, чем вторые снизу вверх; разница и есть теплота, проходящая через плоскость.

*Диффузия  
в газах*

Если мы введем в верхнюю часть сосуда водород, а в нижнюю — азот, то, как показывает опыт, произойдет медленное перемешивание (диффузия) двух газов, даже при тщательном устранении движения газов. Этот процесс с точки зрения молекулярной кинетики следует понимать совершенно так же, как теплопроводность. Именно, вследствие теплового движения молекулы обоих газов проходят через заданную плоскость с обеих сторон; но поток молекул будет преобладать с той стороны, где плотность молекул рассматриваемого газа больше.

Между коэффициентами внутреннего трения, теплопроводности и диффузии теория устанавливает соотношения, под-

тверждаемые опытом, по крайней мере приближенно. Это — удивительный успех кинетической теории тепла.

Как уже упоминалось, из коэффициента внутреннего трения (теплопроводности или диффузии) определяется длина свободного пробега молекул. Лошмидт воспользовался этим для первого (приближенного) определения истинных размеров молекул. Он рассуждал так. Длина свободного пробега определяется числом  $n$  молекул в единице объема и длиной  $d$ , равной наименьшему расстоянию между центрами двух молекул при столкновении. По длине свободного пробега просто определяется произведение  $nd^2$ . С другой стороны, ясно, что  $n$  молекул, находящихся в единице объема, займут объем около  $nd^3$ , если они все приблизятся друг к другу настолько, что расстояние между соседними молекулами станет равным  $d$ . Предполагая, что это приближенно реализуется в жидком состоянии (об этом говорит слабая зависимость объема жидкости от температуры), мы должны приближенно приравнять  $nd^3$  объему такого количества вещества в жидком состоянии, которое в газообразном состоянии будет занимать единственный объем при тех условиях, при которых определялась длина свободного пробега. Так как теперь известны величины  $nd^2$  и  $nd^3$ , можно найти по отдельности  $n$  и  $d$ , а значит и число  $N$  молекул в грамм-молекуле, связанное с  $n$  простой формулой. Оказалось, что диаметр самых малых молекул ( $d$ ) составляет несколько десятимиллионных миллиметра и что  $N$  лежит между  $10^{23}$  и  $10^{24}$ . Позднее более точными методами для  $N$  были получены значения, отличающиеся от  $6,8 \cdot 10^{23}$  не больше, чем на 5 процентов.

В большинстве применений кинетической теории газов предполагается, что средняя длина свободного пробега мала по сравнению с размерами тел, ограничивающих газ. Но с меньшим успехом можно рассматривать и такие случаи, когда это предположение уже не выполняется. Если давление газа составляет одну десятитысячную атмосферы (около 0,1 мм ртутного столба), то длина свободного пробега достигает уже 1 мм. В таких случаях законы, которые установлены для свободных пробегов, исчезающе малых по сравнению с характерными размерами тел, уже не будут выполняться. Например, течение газов через трубы происходит так, как будто слой газа, непосредственно прилегающий к стенкам, скользит относительно них со скоростью, которая может быть предсказана теоретически. Особенно просты и интересны законы в том случае,

*Вычисление  
числа  
Лошмидта*

*Случай,  
когда  
средняя  
длина  
свободного  
пробега  
не мала  
по сравнению  
с размерами  
объема,  
заполненного  
газом*



когда длина свободного пробега велика по сравнению с характерным размером сосуда, например по сравнению с диаметром трубки. В этом случае действуют совсем другие законы, чем в обычно рассматриваемом случае, когда длина свободного пробега мала по сравнению с размерами сосуда. Так, например, Кнудсен нашел теоретически и подтвердил экспериментально следующее. Пусть сосуд состоит из двух полых стеклянных шаров, соединенных трубкой, диаметр которой мал по сравнению с длиной свободного пробега. Если в этих полых шарах поддерживать разные температуры так, чтобы вдоль соединительной трубки существовал перепад температур, то в сосуде с более высокой температурой давление будет выше, чем в сосуде с меньшей температурой. Следовательно, в этих случаях законы гидростатики не соблюдаются!

*Приложения  
кинетической  
теории*

Методы и результаты кинетической теории газов оказались плодотворными и за пределами этой теории. Дополняя теорию газов, Ван-дер-Ваальс обратил внимание на собственный объем молекул и на силы притяжения, действующие между ними; он создал теорию, охватывающую, по крайней мере качественно, также и жидкое агрегатное состояние. Рикке и Друде, основываясь на предположении, что в тепловом движении в металлах участвуют свободные электрически заряженные элементарные частицы, создали теорию, объясняющую приближенное постоянство отношения электропроводности металлов к их теплопроводности. Неожиданным подъемом обязана кинетической теории также и теория магнетизма. Обо всем этом мы здесь только упоминаем. Подробнее же мы остановимся на двух проблемах чрезвычайной важности, а именно: на общем объяснении Больцманом сущности необратимых процессов и на достигнутом недавно понимании того, что молекулярная кинетика соответствует опыту только в определенных границах. Эти чрезвычайно важные проблемы вводят нас в круг вопросов, занимающих в настоящее время физиков-теоретиков.

*Броуновское  
движение*

Согласно молекулярно-кинетической теории тепла, законы термодинамики выполняются не точно, а лишь в среднем, так что постоянно встречаются отклонения от них. Так, например, молекулы, отскакивающие от единицы поверхности стенки, ограничивающей газ, производят на нее давление, равное определенному среднему значению. Однако фактическое мгновенное значение давления не будет точно совпадать с этим средним значением, а будет испытывать самые беспоря-

дочные флуктуации, в соответствии с хаотичностью молекулярных движений, обуславливающих давление. Здесь возникает важный вопрос: «Можем ли мы на самом деле наблюдать эти беспорядочные флуктуации, вызванные хаотическим молекулярным движением, или же, вследствие своей малости, они ускользают от наблюдения?» Прямо-таки ошеломляющий ответ гласит, что теория действительно предсказывает существование таких флуктуаций, доступных нашему наблюдению, и что подобные явления наблюдались еще около ста лет назад.

Мы уже видели, что по теории каждая молекула движется как целое с такой скоростью, что ее средняя кинетическая энергия  $L$  равна  $\frac{3}{2} (RT/N)$ . Однако этот результат, как вытекает из его вывода, справедлив не только для молекул, но и для как угодно больших материальных образований, способных двигаться как целое. Из приведенного выше соотношения легко видеть, что скорость этого движения тем меньше, чем больше масса рассматриваемого образования. Частицы размером порядка одной тысячной миллиметра легко наблюдать в микроскоп. Их масса порядка  $10^{-12}$  г. Только что приведенное соотношение дает для средней скорости молекулярного движения при обычной температуре величину  $0,2$  мм/сек, чересчур большую для наблюдения в микроскоп. Но эта скорость все же проявляется. Частица всегда окружена некоторой средой, например жидкостью. Если в некоторый момент частица совершает определенное движение, то вследствие трения в жидкости она очень быстро затормозится. Но вместо этого частица приобретает все новые импульсы благодаря хаотичности молекулярного движения среды. Результатом обоих этих воздействий является в высшей степени беспорядочное движение, скорость которого изменяется по величине и направлению чрезвычайно быстро, причем тем быстрее, чем большую вязкость имеет окружающая частицу среда. Частица указанного выше размера в воде проходит каждую секунду в среднем путь около одной тысячной миллиметра. Таким образом, малые частицы, взвешенные в жидкости, совершают под влиянием хаотического молекулярного движения молекул видимое в микроскоп беспорядочное движение; оно было действительно обнаружено почти 100 лет назад («броуновское движение»).

Броуновское движение имеет большое значение, во-первых, потому, что оно позволяет совсем точно вычислить число  $N$ ,

а следовательно, и абсолютный размер молекул. Ведь величина  $N$  определяет среднюю кинетическую энергию поступательного движения частицы  $L = \frac{3}{2} (RT/N)$ , а эта энергия в свою очередь дает среднюю величину пути, проходимого частицей за одну секунду.

Однако большое принципиальное значение броуновского движения, как уже отмечалось, заключается в том, что в нем становятся доступными непосредственному наблюдению те хаотические элементарные процессы, которые, согласно кинетической теории, составляют теплоту, содержащуюся в веществе. В какой-то мере мы видим в микроскоп непосредственно часть тепловой энергии в форме механической энергии движущихся частиц.

Это явление отчетливо показывает также, что законы феноменологической термодинамики имеют лишь приближенный смысл. Согласно этой теории, наша частица, если она вначале движется поступательно, вследствие трения о жидкость должна была бы быстро остановиться и затем оставаться в покое. Обобщая теорию броуновского движения, мы получаем точное представление о том, насколько велики в среднем вызванные хаотичностью элементарных процессов отклонения состояний произвольных физических систем от тех состояний, в которых эти системы должны застывать в покое, согласно феноменологической термодинамики.

*Старое  
воображение  
против  
кинетической  
теории  
теплоты*

Эти рассуждения подвели нас к вопросу, занимавшему теоретиков со времени установления молекулярной теории, но принципиально решенному только в 70-х годах Больцманом. Механические процессы, к которым мы стремимся свести теплоту с помощью кинетической теории, являются обратимыми. Это значит, что для каждого возможного движения существует другое, при котором материальная точка пробегает те же самые положения с точно такими же скоростями, но в обратной последовательности. В противоположность этому в области тепловых явлений обращенные процессы никогда не наблюдались. Например, если привести в соприкосновение два по-разному нагретых куска металла, то их температуры уравниются. Но если привести в соприкосновение два одинаково нагретых куска металла, то сами по себе они никогда не приобретут разных температур. Из этого, казалось бы, надо сделать вывод о том, что свести тепловые явления к механическим принципиально невозможно, так как, на первый взгляд, сводить необратимые процессы к обратимым нельзя.

Как разрешил это кажущееся противоречие Больцман<sup>1</sup>, мы постараемся показать на примере рассмотренной выше взвешенной частицы. Представим себе настолько большую взвешенную частицу, что ее броуновское движение уже почти незаметно. Какие наибольшие скорости может приобретать такая частица вследствие хаотичности теплового движения? Теория дает на это такой ответ: несмотря на то, что в среднем броуновское движение очень мало, верхней границы для скорости этого движения не существует; напротив, должны встречаться любые, даже очень большие, скорости. Но чем больше рассматриваемая скорость, тем реже она встречается, причем частота появления определенной скорости очень быстро уменьшается с ее величиной. Эту частоту появления данной скорости мы называем ее «вероятностью».

*Ответ  
на возражение  
в духе  
Больцмана*

Если мы внешними средствами сообщим частице значительную скорость  $c$ , то переведем ее этим в состояние с очень малой вероятностью. Как будет изменяться эта скорость за короткое время  $\tau$ , если частица предоставлена самой себе? Согласно кинетической теории, этот эксперимент, если повторять его очень часто, не всегда будет давать одинаковые результаты. В некоторой части опытов по истечении времени  $\tau$  скорость частицы станет больше, чем начальная скорость  $c$  (первый случай); в остальных опытах скорость частицы по истечении  $\tau$  будет меньше  $c$  (второй случай). Однако совершенно очевидно, что второй случай встречается неизмеримо чаще, чем первый; в самом деле, согласно сказанному выше, более низкие скорости частиц, предоставленных самим себе, вообще должны быть более частыми (более вероятными), чем более высокие скорости. Если частица достаточно велика, то эти частоты настолько различны, что наблюдение первого случая практически исключено. Таким образом, Больцман разрешил обсуждаемое противоречие. Он показал, что, согласно кинетической теории, процесс, обратный необратимому тепловому процессу, с точки зрения термодинамики хотя и возможен принципиально, но вероятность того, что он действительно произойдет, практически равна нулю. Итак, по Больцману, усредненные опытные законы создают нам видимость необратимости тепловых процессов.

<sup>1</sup> Это рассуждение выглядит довольно пространным и утонченным. Но изящество и важность обсуждаемого предмета послужат достойной наградой за усилия ума.

Обобщая, мы можем высказать утверждение: изменения состояния изолированной системы происходят так, что (в среднем) за менее вероятными состояниями следуют более вероятные. Ясно, что вероятность состояния должна иметь фундаментальное значение в термодинамике. Действительно, Больцману удалось показать, что энтропия состояния  $S$ , определенная термодинамически, непосредственно связана с вероятностью этого состояния  $W$  соотношением

$$S = \frac{R}{N} \ln W,$$

где  $R$  и  $N$  — введенные ранее постоянные, а  $\ln W$  — натуральный логарифм вероятности состояния.

Это соотношение связывает термодинамику с молекулярной теорией. Оно дает статистические вероятности состояний даже таких систем, для которых мы не в состоянии строить молекулярно-теоретические модели. Таким образом, замечательная идея Больцмана представляет большую ценность для теоретической физики не только потому, что она устранила кажущееся противоречие, но и главным образом потому, что она дает эвристический принцип, значение которого выходит далеко за пределы молекулярной механики.

Из сказанного выше следует, что кинетическая теория тепла содержит в себе значительную долю истины. Но уже несколько лет мы знаем, что молекулярная механика имеет ограниченную область применимости; можно даже сказать, что ее общие основы, строго говоря, никогда не выполняются точно и являются правильными лишь в известном приближении. Поясним кратко это обстоятельство.

*Границы  
применимости  
молекулярной  
механики*

С точки зрения кинетической теории тепла мы должны представлять себе химически простое твердое тело как систему из чрезвычайно большого числа атомов, способных смещаться относительно друг друга, причем каждому такому смещению противодействует значительная сила, возрастающая с увеличением смещения. Представим себе, что мы продолжительное время следим за одним из этих атомов, чтобы выяснить характер совершаемого им движения. Ради простоты будем считать, что все молекулы, за исключением рассматриваемой, удерживаются в своих состояниях равновесия. Тогда они будут противодействовать изменению положения рассматриваемого атома с силой, которая будет тем больше, чем дальше атом отклоняется от своего положения равновесия. Предоставленный сам

себе, атом будет колебаться около своего положения равновесия подобно маятнику. Механическая энергия движущегося таким образом тела состоит не только из кинетической, но и из потенциальной энергии, причем при гармоническом движении (при котором период колебания не зависит от амплитуды) потенциальная энергия в среднем равна кинетической. Последняя же, в соответствии с указанными выше общими законами, равна  $L$ , или  $\frac{3}{2} RT/N$ , так что полная механическая энергия атома в среднем равна  $3RT/N$ ; следовательно, энергия грамм-молекулы должны равняться  $3RT$ . Это рассуждение, конечно, страдает одним недостатком, а именно: оно основывается на допущении, что движения отдельных атомов не влияют друг на друга. Но это допущение не может внести значительных искажений в результат. Приравнивая эту энергию  $3RT$  количеству тепла, которым обладает одна грамм-молекула, мы заключаем, что удельная теплоемкость грамм-молекулы должна равняться  $3R$ , или  $5,97$  *кал.* Это действительно соответствует эмпирическому закону Дюлонга и Пти, который довольно хорошо выполняется при обычных температурах.

Но при низких температурах, вопреки результатам молекулярной механики, значение теплоемкости оказывается меньше. Вблизи абсолютного нуля она даже становится исчезающе малой! Этот результат не удивил теоретиков; ведь они уже знали, что законы излучения нагретых тел не согласуются с молекулярной механикой и что между законами теплового излучения и удельной теплоемкости должна существовать тесная связь. Однако этот результат новейших исследований показывает, что кинетическая молекулярная теория применима к осциллирующим образованиям тем хуже, чем быстрее их колебания и чем ниже температура. Современные физики все без исключения считают, что для быстрых колебательных движений малых масс законы механики не выполняются. Однако, несмотря на все усилия, пока не удалось изменить основы механики так, чтобы они могли удовлетворять опыту и в этой области. Проведенные до сих пор теоретические исследования связаны с теорией излучения Планка; хотя они и дали полезные формулы, но не привели к полному теоретическому пониманию.

**ОТВЕТ НА СТАТЬЮ М. ЛАУЭ  
„ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ  
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ“\***

В упомянутой статье Лауэ излагает математические основы статистики излучения в форме, которая по точности и изяществу не оставляет желать ничего лучшего. Но что касается применения этих основ к теории излучения, то здесь, мне кажется, он стал жертвой опасного заблуждения, которое необходимо исправить. Если бы утверждение Лауэ о том, что коэффициенты Фурье пространственных колебаний в естественном излучении вовсе не обязательно считать статистически независимыми друг от друга, было справедливо, то в самом деле открылся бы весьма перспективный путь для преодоления трудностей теоретического объяснения всех законов, в которые входит постоянная Планка  $h$ . Это обстоятельство и побудило меня рассмотреть данный вопрос в работе, опубликованной пять лет назад совместно с Л. Хопфом<sup>1</sup>.

Результат этой не вполне безупречной по своим доказательствам работы является, по признанию Лауэ, правильным следствием предпосылок, положенных в ее основу. Однако Лауэ оспаривает допустимость главной предпосылки, которую можно сформулировать следующим образом.

Если совершенно неупорядоченное излучение (имеющее статистически независимые коэффициенты Фурье) я получаю путем суперпозиции бесконечно большого числа полностью заданных, вполне согласованных друг с другом компонент таким образом, что при этой суперпозиции фазы компонент выбираются случайно, то естественное излучение будет статистически полностью неупорядоченным.

\* *Antwort auf eine Abhandlung M. v. Laues «Ein Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung auf die Strahlungstheorie».* Ann. Phys., 1915, 47, 879—885.

<sup>1</sup> Статья 21.

Эта главная предпосылка в то время казалась мне очевидной. Но тот факт, что она не разделяется таким опытным специалистом, как Лауэ, доказывает обратное. Поэтому ниже я приведу доказательство, свободное от этой предпосылки и — как я надеюсь — неопровержимо показывающее, что наша волновая теория непременно требует статистической независимости коэффициентов Фурье. Но прежде чем начать это доказательство, я покажу, почему рассуждение во второй и третьей частях статьи Лауэ не имеет, на мой взгляд, доказательной силы.

Лауэ рассматривает излучение большого числа беспорядочно распределенных в слое толщиной  $st$  резонаторов, испускаемое перпендикулярно этому слою. Во второй части своей статьи он предполагает, что все эти резонаторы колеблются одновременно и по одному закону, а в третьей части — что колебания всех резонаторов подчиняются единому статистическому закону, который следует считать заданным. В обоих случаях статистической независимости коэффициентов Фурье разложения результирующего излучения не получается. Однако отсюда, по моему мнению, отнюдь нельзя делать вывод о правомерности гипотезы, что этой независимости не будет также и в *естественном излучении*. Ведь совсем не было сказано, что степень неупорядоченности, вносимая принятым беспорядочным распределением резонаторов по слою толщиной  $st$ , должна быть такой же, как в естественном излучении.

Это вызывает тем большее подозрение, что по результатам вычислений Лауэ степень статистической зависимости двух характеризуемых индексами  $p$  и  $p'$  членов разложения для результирующего излучения существенно определяется величиной

$$\frac{\pi(p - p')\tau}{T},$$

т. е. величиной, зависящей от толщины слоя, тогда как подобная статистическая зависимость для естественного излучения — если бы она существовала — не могла бы иметь ничего общего с конкретным способом создания рассматриваемого излучения.

Поэтому, на мой взгляд, ни один из рассмотренных Лауэ случаев в смысле неупорядоченности нельзя считать равнозначным естественному излучению, так что из его результатов нельзя делать никаких выводов относительно естественного излучения. Я поддерживаю свое прежнее утверждение и постараюсь далее подкрепить его новым доказательством, пользуясь положениями теории вероятностей, изложенными в работе Лауэ.



### § 1. Статистические свойства излучения, получаемого при суперпозициях бесконечно большого числа независимых излучений

Предположим, что каждое из парциальных излучений изображается для промежутка времени от 0 до  $T$  рядом Фурье вида

$$\sum_n \left( a_n^{(v)} \cos 2\pi n \frac{t}{T} + b_n^{(v)} \sin 2\pi n \frac{t}{T} \right), \quad (1)$$

причем коэффициенты ряда удовлетворяют вероятностному закону

$$dW = f^{(v)}(a_1^{(v)}, \dots, a_z^{(v)}, \dots, b_1^{(v)}, \dots, b_z^{(v)}) da_1^{(v)} \dots db_z^{(v)} \dots, \quad (2)$$

и закон этот для каждого индекса  $(v)$ , т. е. для каждого из рассматриваемых парциальных излучений, может быть своим. Пусть еще этот закон приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \overline{a_n^{(v)}} &= \int a_n^{(v)} f^{(v)} da_1^{(v)} \dots db_z^{(v)} = 0, \\ \overline{b_n^{(v)}} &= \int b_n^{(v)} f^{(v)} da_1^{(v)} \dots db_z^{(v)} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Результирующее излучение для промежутка времени от 0 до  $T$  задано рядом

$$\sum_n \left( A_n \cos 2\pi n \frac{t}{T} + B_n \sin 2\pi n \frac{t}{T} \right) = \sum_v \sum_n \left( a_n^{(v)} \cos 2\pi n \frac{t}{T} + b_n^{(v)} \sin 2\pi n \frac{t}{T} \right), \quad (4)$$

откуда следует, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_v a_n^{(v)}, \\ B_n &= \sum_v b_n^{(v)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Какой статистический закон для коэффициентов Фурье  $A_1, \dots, B_z$  следует отсюда?

Из рассмотрения, совершенно аналогичного рассуждениям в первой части работы Лауэ, находим, что искомым статистический закон будет следующим:

$$dW = \text{const } e^{-\sum (\alpha_{mn} A_m A_n + \beta_{mn} B_m B_n + 2\gamma_{mn} A_m B_n)} dA_1 \dots dB_z. \quad (6)$$

Отсюда видно, что суперпозиция бесконечно большого числа парциальных излучений вовсе не гарантирует статистической независимости коэффициентов Фурье. Но закон (6) позволяет, пожалуй, свести проблему статисти-

ческой независимости коэффициентов Фурье к более простой задаче. Ведь эта статистическая независимость будет обеспечиваться тогда и только тогда, когда в показателе экспоненциальной функции будут только квадраты  $A_m$  и  $B_m$  и не будет произведений этих величин; иначе говоря, должно быть:

$$\begin{aligned}\alpha_{mn} &= \beta_{mn} = 0 \text{ при } m \neq n, \\ \gamma_{mn} &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Далее, из равенств (3) и (5) ясно, что в случае статистической независимости должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned}\overline{A_m A_n} &= \overline{B_m B_n} = 0 \text{ при } m \neq n, \\ \overline{A_m B_n} &= 0.\end{aligned}\tag{7a}$$

Поскольку число условий (7a) равно числу условий (7), и все условия (7a) независимы друг от друга, то отсюда следует, что в случае справедливости закона (6) условия (7a) являются *достаточными* для статистической независимости коэффициентов Фурье.

Таким образом, мы приходим к следующему предварительному результату. Так как мы должны предполагать, что статистические свойства естественного излучения при суперпозиции некогерентных парциальных излучений не изменяются, то соотношения (7a) в случае естественного излучения являются достаточными для статистической независимости коэффициентов Фурье.

## § 2. Доказательство статистической независимости коэффициентов Фурье для естественного излучения

Пусть  $F(t)$  — составляющая волнового вектора стационарного естественного излучения, заданная для всех значений времени. Допустим, что  $T$  есть промежуток времени, большой по сравнению с периодом колебания наиболее длинноволновой компоненты, входящей в состав излучения. Предположим, что  $F(t)$  между  $t_0$  и  $t_0 + T$  представляется рядом Фурье

$$\sum_n \left( A_n \cos 2\pi n \frac{t-t_0}{T} + B_n \sin 2\pi n \frac{t-t_0}{T} \right).\tag{4a}$$

Ясно, что коэффициенты Фурье  $A_n$ ,  $B_n$  функции  $F(t)$  будут зависеть от выбора момента времени  $t_0$ . Если разложение в ряд будет произведено для бесконечно большого числа случайно взятых моментов времени, мы получим статистический материал для изучения статистических свойств

коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$ , которое для естественного света является необходимым.

Чтобы найти эти свойства, разложим  $F(t)$  в ряд Фурье в промежутке времени от 0 до  $\vartheta$ , причем  $\vartheta$  означает время, большое по сравнению с  $T$ . Для этого промежутка времени имеем

$$F(t) = \sum_{\nu} \alpha_{\nu} \cos\left(2\pi\nu \frac{t}{\vartheta} + \varphi_{\nu}\right). \quad (8)$$

Выбирая  $t_0$  между  $t = 0$  и  $t = \vartheta - T$ , мы можем выразить коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  через  $t_0$  и коэффициенты  $\alpha_{\nu}$  и  $\varphi_{\nu}$  ряда (8); сначала получаем

$$A_n = \frac{2}{T} \sum_{\nu} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+T} \alpha_{\nu} \cos\left(2\pi\nu \frac{t}{\vartheta} + \varphi_{\nu}\right) \cos\left(2\pi n \frac{t-t_0}{T}\right) dt \right\}, \quad (9)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \sum_{\nu} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+T} \alpha_{\nu} \cos\left(2\pi\nu \frac{t}{\vartheta} + \varphi_{\nu}\right) \sin\left(2\pi n \frac{t-t_0}{T}\right) dt \right\}.$$

Выполняя интегрирование и пренебрегая членами, содержащими множитель  $1/[\pi(\nu/\vartheta + n/T)]$ , по сравнению с членами, содержащими множитель  $1/[\pi(\nu/\vartheta - n/T)]$ , получаем

$$A_n = \sum_{\nu} \alpha_{\nu} \frac{\sin \pi \left( \nu \frac{T}{\vartheta} - n \right) \cos \left( \chi_{\nu n} + 2\pi\nu \frac{t_0}{\vartheta} \right)}{\pi \left( \nu \frac{T}{\vartheta} - n \right)}, \quad (10)$$

$$B_n = - \sum_{\nu} \alpha_{\nu} \frac{\sin \pi \left( \nu \frac{T}{\vartheta} - n \right) \sin \left( \chi_{\nu n} + 2\pi\nu \frac{t_0}{\vartheta} \right)}{\pi \left( \nu \frac{T}{\vartheta} - n \right)}.$$

где введено обозначение:

$$\chi_{\nu n} = \pi \left( \nu \frac{T}{\vartheta} + n \right) + \varphi_{\nu}.$$

Формулы (10) справедливы только для значений  $t_0$  между  $t_0 = 0$  и  $t_0 = \vartheta - T$ , потому что в соответствии с (8) ряд сходится только в промежутке времени  $0 - \vartheta$ . Мы все же позволим себе применить формулу (8) и для интервала  $0 - (\vartheta + T)$ . Тем самым мы заменим в интервале времени от  $\vartheta$  до  $\vartheta + T$  функцию  $F(t)$  значениями  $F(t)$  в интервале от 0 до  $T$ . Вследствие этой замены средние значения в наших дальнейших рассмотрениях будут искажены, но лишь в бесконечно малом, так как промежу-

ток времени  $T$  бесконечно мал по сравнению с  $\vartheta$ . Учитывая это, мы будем применять формулы (10) так, как если бы они выполнялись во всем интервале  $0 < t_0 < \vartheta$ .

Образум теперь с помощью формул (10) среднее значение  $\overline{A_m A_n}$ , т. е. величину

$$\overline{A_m A_n} = \frac{1}{\vartheta} \int_0^{\vartheta} A_m A_n dt_0.$$

В последнее выражение входит интеграл

$$\int_0^{\vartheta} \cos\left(\chi_{\mu m} + 2\pi\mu \frac{t_0}{\vartheta}\right) \cos\left(\chi_{\nu n} + 2\pi\nu \frac{t_0}{\vartheta}\right) dt_0.$$

Вследствие целочисленности  $\mu$  и  $\nu$  он обращается в нуль, если  $\mu \neq \nu$ , и для  $\mu = \nu$  имеет значение  $\frac{\vartheta}{2}(-1)^{m-n}$ . С учетом этого первая формула (10) дает:

$$\begin{aligned} \overline{A_m A_n} &= \frac{(-1)^{m-n}}{2} \sum_{\nu} \alpha_{\nu}^2 \frac{\sin \pi \left(\nu \frac{T}{\vartheta} - m\right) \sin \pi \left(\nu \frac{T}{\vartheta} - n\right)}{\pi^2 \left(\nu \frac{T}{\vartheta} - m\right) \left(\nu \frac{T}{\vartheta} - n\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum \alpha_{\nu}^2 \frac{\sin^2 \pi \nu \frac{T}{\vartheta}}{\pi^2 \left(\nu \frac{T}{\vartheta} - m\right) \left(\nu \frac{T}{\vartheta} - n\right)}. \quad (11) \end{aligned}$$

Априори ясно, что статистическая зависимость может существовать только между компонентами излучения с очень близкими частотами. Значит,  $m$  и  $n$  принадлежат одной и той же узкой области спектра, так же как и те значения  $\nu$ , которые вносят заметный вклад в нашу сумму.

В выражении (11) для  $\overline{A_m A_n}$  дробь, вследствие малости  $T/\vartheta$ , является медленно меняющейся функцией  $\nu$ . Поэтому без заметной ошибки величину  $\alpha_{\nu}^2$  в большом числе последовательных членов можно заменить ее средним значением  $\bar{\alpha}_{\nu}^2$  и вынести затем  $\bar{\alpha}_{\nu}^2$  за знак суммы, так как суммирование вообще распространяется на узкую область спектра. Тогда сумму дробей можно заменить интегралом

$$\overline{A_m A_n} = \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{\nu}^2 \frac{\vartheta}{\pi T} \int \frac{\sin^2 x}{(x - m\pi)(x - n\pi)} dx. \quad (12)$$

Без заметной ошибки интеграл можно брать от  $-\infty$  до  $+\infty$  вместо пределов, определяемых границами упомянутой выше области спектра.

Этот интеграл для  $m = n$  равен  $\pi$ , но обращается в нуль всегда, когда  $m \neq n$  ( $m$  и  $n$  — целые числа)<sup>2</sup>. Тем самым доказано сначала равенство нулю среднего значения  $\overline{A_m A_n}$  (для  $m \neq n$ ); доказательство обращения в нуль  $\overline{B_m B_n}$  (для  $m \neq n$ ) и  $\overline{A_m B_n}$  проводится совершенно аналогично. Из равенства нулю этих средних значений следует высказанная в § 1 статистическая независимость коэффициентов Фурье.

Поступила 24 июля 1915 г.

### Примечание при корректуре

Вместо того, чтобы при вычислении выражения (11) проводить усреднение по большому числу последовательных слагаемых, можно также взять бесконечно много независимых один от другого рядов (8) и проводить усреднение по ним. Преобразуя это усреднение в (11), мы получаем соответственно некоторое среднее значение  $\overline{\alpha_j^2}$  перед знаком суммы. Конечный результат остается, естественно, тем же.

Лауэ в своей статье выражал несогласие с выводом Эйнштейна и Хопфа (статья 21) о статистической независимости коэффициентов Фурье поля естественного излучения. Позже Лауэ опубликовал еще одну статью на ту же тему (Ann. Phys., 1915, 48, 618).

<sup>2</sup> Именно, интеграл равен

$$\frac{1}{(m-n)\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x-m\pi} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x-n\pi} dx \right\}.$$

Каждый из этих двух интегралов равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y} dy = 0.$$

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО МОЛЕКУЛЯРНЫХ ТОКОВ АМПЕРА \*

Из того факта, что всякий как угодно малый кусок магнита также является магнитом, уже давно был сделан вывод, что сами молекулы ферромагнитного вещества должны быть магнитами. Из известных законов Кюри — Ланжевена для парамагнитных тел (например, газообразного кислорода) вытекает также, что эти молекулярные магниты имеют не зависящий от температуры магнитный момент. Предполагая, что это справедливо и для ферромагнитных тел, П. Вейсс развил на основе еще одной простой гипотезы («молекулярного поля») теорию ферромагнетизма, качественно, а частично и количественно, объясняющую эти запутанные явления.

Физическая природа этих молекулярных магнитов оставалась пока неизвестной, хотя большинство теоретиков придерживалось определенного мнения о ней, впервые высказанного Ампером. После же того как Эрстед открыл, что магнитные воздействия вызываются не только магнитами, но и электрическим током, сначала казалось, что эти два способа возникновения магнитных воздействий, или — как мы привыкли говорить сегодня — магнитных полей, в принципе различны. Это положение вещей для физиков, стремящихся к единому пониманию природы, должно было выглядеть неудовлетворительным. Поэтому Ампер уже вскоре после открытия Эрстеда выдвинул свою известную гипотезу, согласно которой магнитное поле, исходящее из намагничиваемых тел, также должно порождаться токами, протекающими, однако, внутри молекул. Когда позднее Г. А. Лоренц свел все электромагнитные действия вещества к движению электрически заряженных частиц (ионов, электронов), он сохранил гипотезу Ампера, видоизменив ее в духе своего молекулярно-теоретического воззрения на все электромагнитные явления таким образом, что молекулярные токи Ампера должны создаваться электронами, движущимися по орбитам

\* *Experimenteller Nachweis der Ampèreschen Molekularströme.* Naturwiss., 1915, 3, 237—238.

вокруг положительно заряженного остатка молекулы или атома. К этому воззрению присоединился также П. Ланжевен в своей основополагающей молекулярно-теоретической работе о пара- и диамагнитных явлениях.

Однако, с другой стороны, это воззрение, удовлетворительное в силу единого объяснения природы источников поля, сталкивалось с значительными трудностями. В пределах возможностей нашего опыта, пара- и ферромагнетизм продолжает существовать при приближении к абсолютному нулю. Следовательно, круговое движение электронов относится к тому типу молекулярного движения, которое продолжается при приближении к абсолютному нулю; кинетическая энергия такого движения обычно называется «нулевой энергией». Большие трудности, которые встречаются при точном построении всех теорий и которые характеризуются «нулевой энергией», достаточно хорошо известны. Сегодня ни один теоретик не скажет слова «нулевая энергия» без полусмущенной, полуиронической усмешки. Эти трудности присущи также и взглядам Ампера на магнетизм, и уже по одной этой причине весьма желательно было экспериментальное решение вопроса о правильности или неправильности гипотезы Ампера<sup>1</sup>. В последние три месяца вместе с де Гааз-Лоренцом я проделал в Имперском физико-техническом институте опыты, по моему мнению, *надежно установившие реальное существование молекулярных токов Ампера*. Эти опыты основаны на следующем рассуждении.

Молекула (или атом), в которой вокруг положительного ядра движется, подобно планете, электрон, обладает, с одной стороны, электромагнитными свойствами замкнутого тока или элементарного магнита, а с другой — *механическими* свойствами волчка; такая система имеет момент количества движения, благодаря которому она стремится сохранить свою ориентацию в пространстве, а при вынужденном изменении ориентации отдает внешней среде вращательный момент. Простое вычисление показывает теперь <sup>2</sup>, что этот момент количества движения ( $m$ ) молекулы связан с ее

<sup>1</sup> Теория Ампера в ее современной, электронной форме сталкивается также с той трудностью, что, согласно электромагнитным уравнениям Максвелла, электроны, совершающие круговое движение, должны терять свою кинетическую энергию вследствие излучения, так что молекулы или атомы со временем должны терять или уже потеряли свой магнитный момент, чего на самом деле, конечно, не происходит.

<sup>2</sup> Если электрон совершает равномерное движение по окружности радиусом  $r$  со скоростью  $v = 2\pi rn$  ( $n$  — число оборотов в секунду), то момент количества движения  $m$  по величине равен  $grv$ , или

$$2\pi nr^2n.$$

По Амперу, эквивалентный магнитный момент  $\mathfrak{M}$  плоского витка с током по величине равен произведению силы тока на ограниченную витком площадь или, так как через данную точку круговой орбиты в секунду проходит электри-

(эквивалентным) магнитным моментом ( $\mathfrak{M}$ ) формулой

$$m = - \frac{2\mu}{\varepsilon} \mathfrak{M} = - 1,13 \cdot 10^{-7} \mathfrak{M}. \quad (1)$$

В этой формуле  $\mu$  означает массу,  $\varepsilon$  — заряд электрона (измеренный в электромагнитных единицах). Отрицательный знак в правой части этого равенства утверждает, что векторы  $m$  и  $\mathfrak{M}$  имеют противоположное направление. Самым важным и неожиданным в формуле (1) является то, что в соотношении, связывающее момент количества движения с магнитным моментом, входит не скорость движения электрона и не форма или размеры его орбиты, а только известное с большой точностью из опытов с катодными лучами отношение  $\varepsilon/\mu$  для электрона. Формула (1) остается справедливой и в том случае, если в молекуле движется по окружности несколько электронов.

Таким образом, по теории Ампера в ее электронной форме молекула с данным магнитным моментом обладает точно известным моментом количества движения. Легко также видеть, что формула (1) выполняется и для тела, состоящего из как угодно большого числа молекул; тогда  $\mathfrak{M}$  означает магнитный момент всего тела, а  $m$  — суммарный момент количества движения всех движущихся по окружностям электронов («внутренний момент количества движения»).

В соответствии с известным законом сохранения момента в динамике, сумма моментов количества движения системы остается постоянной, если на эту систему не действуют внешние вращательные моменты<sup>3</sup>. Следовательно, если изменяется намагниченность тела и связанный с нею приведенным выше соотношением внутренний момент количества движения, то должен появляться другой момент количества движения, точно компенсирующий это изменение. Но этот другой момент количества движения может быть только обычным механическим моментом количества движения; иными словами, тело при изменении своей намагниченности должно при-

.....  
чества  $\varepsilon n$  и площадь орбиты составляет  $\pi r^2$ , этот момент дается выражением

$$\varepsilon n r^2 n.$$

Момент количества движения и магнитный момент оба имеют направление нормали к плоскости орбиты, но вследствие отрицательного заряда электрона — противоположное по знаку. Учитывая это, получаем из двух приведенных выше выражений формулу (1).

<sup>3</sup> Это — известный закон динамики, согласно которому система, не подверженная воздействиям извне, не может сама по себе прийти во вращение или, если она уже вращается, то не может прекратить вращения, но в то же время отдельные части системы (например, электроны) могут при движении передавать свое вращение другим частям системы (например, тяжелым атомам магнита как жесткой системе). Такая передача и является причиной изучаемого нами явления.



ходить во вращение. Проще всего этот требуемый теорией механический эффект изменения намагниченности можно выразить так: изменение намагниченности механически эквивалентно внешнему вращательному моменту  $\mathfrak{D}$  величиной

$$\mathfrak{D} = - \frac{dm}{dt} = 1,13 \cdot 10^{-7} \frac{d\mathfrak{M}}{dt}. \quad (2)$$

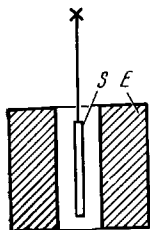


Рис. 1.

Простейшим в принципе методом проверки формулы были бы следующий. Подвесим железный стержень  $S$  вертикально на тонкой нити коаксиально внутри питаемого током соленоида, причем направление тока таково, что соленоид сверху имеет северный полюс. Если мы изменим направление тока на обратное, то стержень должен прийти во вращение (при наблюдении сверху — по часовой стрелке); угловая скорость  $\omega$  этого вращения, соответственно соотношению (2), определяется формулой

$$\omega J = 2 \cdot 1,13 \cdot 10^{-7} \mathfrak{M}, \quad (3)$$

где  $J$  — момент инерции стержня относительно своей оси вращения,  $\mathfrak{M}$  — магнитный момент стержня до или после переключения тока.

Возникающий момент количества движения ( $\omega J$ ) механического вращения магнита согласно формуле (2) равен, следовательно, *изменению* намагниченности, умноженному на постоянный коэффициент  $1,13 \cdot 10^{-7}$ . Множитель 2 в формуле (3) получается потому, что при перемагничении *изменение* намагниченности равно удвоенной *намагниченности*.

С успехом провести опыт этим простым способом было нелегко, в особенности потому, что из-за недостаточно точной симметрии стержня и его подвеса при переключении тока начиналась его боковая раскачка, частично переходившая во вращательные движения, маскировавшие исследуемое вращательное движение. Однако, укрепив стержень на достаточно жесткой стеклянной нити, благодаря чему собственная частота его вращательных колебаний совпадала с частотой переменного тока в катушке  $E$ , мы сумели преодолеть экспериментальные трудности. Используя этот резонансный метод, удалось доказать качественно и количественно (последнее с точностью около 10%) существование вращательного момента в согласии с формулой (2). Более подробно об этих опытах мы сообщим в статье, которая появится в журнале «Verhandlungen Deutsche Physikalische Gesellschaft»<sup>4</sup> примерно в одно время с этой заметкой.

Это — первое сообщение об открытии эффекта, получившего название эффекта Эйнштейна — де Гааза. См. также статья 40—42.

<sup>4</sup> См. статью 40.— *Прим. ред.*

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ТОКОВ АМПЕРА \*

(Совместно с В. де Гаазом)

С тех пор как Эрстед открыл, что магнитные действия вызываются не только постоянными магнитами, но и электрическими токами, существовали два, казалось, совершенно независимых способа создания магнитного поля. Такое положение вещей влекло за собой стремление считать различие в сущности этих двух источников поля лишь кажущимися и побуждало к попыткам обойтись одной-единственной причиной возбуждения магнитного поля. И вот Ампер, вскоре после открытия Эрстеда, выдвинул свою известную гипотезу молекулярных токов, позволявшую объяснить магнитные свойства (парамагнитных и ферромагнитных веществ) токами, циркулирующими в молекулах.

Так же и электронная теория, особенно в том виде, какой придал ей Г. А. Лоренц, — нуждаясь в едином понимании возникновения электромагнитных полей, — в основном придерживалась гипотезы Ампера. Но по этой теории молекулярные токи, как и вообще все электрические токи, создавались движущимися элементарными зарядами.

Несмотря на то, что эти представления о циркулирующих в атоме и молекуле элементарных зарядах (мыслившихся большей частью в виде отрицательных электронов) позволяли придерживаться единой причины происхождения электромагнитного поля, они все же вызывали самые серьезные принципиальные сомнения. Предположение о токах, текущих без сопротивления, должно было вызвать сомнения уже во времена Ампера. Развитие этой гипотезы на основе электронной теории прибавляло еще одно обстоятельство; согласно уравнениям Максвелла циркулирую-

\* *Experimenteller Nachweis der Ampèreschen Molekularströme.* (Mit W. J. de Haas.) *Verhandl. Dtsch. Phys. Ges.*, 1915, 17, 152—170. (Доложено на заседании Немецкого физического общества 19 февраля 1915 г. Распиренный вариант поступил 10 апреля 1915 г.). (Перевод исправлен по голландской публикации. Ср. стр. 378.—Прим. ред.)

щие электроны или системы электронов должны постоянно излучать; поэтому парамагнитный атом должен был бы непрерывно терять свой магнитный момент, чего на самом деле не происходит. Поскольку, кроме того, из закона Кюри — Ланжевена следует, что магнитный момент молекулы не зависит от температуры и, следовательно, существует также при  $T = 0$ , то энергия кругового движения электронов должна бы быть так называемой нулевой энергией — представлением, которое у многих физиков вызывает вполне понятное сопротивление.

Так как доводы за и против гипотезы Ампера тем самым взаимно уравновешиваются и так как в соответствии со сказанным от правильности гипотезы Ампера зависит наше отношение к фундаментальным вопросам теории, излагаемое в дальнейшем экспериментальное доказательство того, что магнитный момент железа обусловлен движущимися по окружностям электронами, будет представлять большую ценность. Возможность этого экспериментального доказательства основывается на том, что в соответствии с теорией всякий движущийся по окружности электрон обладает моментом количества движения, направление которого противоположно вектору его магнитного момента; причем отношение этих моментов имеет вполне определенное значение, не зависящее от геометрических условий опыта и частоты вращения. Магнитная молекула по механическим свойствам подобна волчку, ось которого всегда совпадает с магнитной осью. Если магнитное состояние тела изменяется, то изменяется ориентация этих волчков, а значит, и момент количества движения намагничивающих электронов тела. По закону сохранения момента количества движения этому изменению внутреннего момента количества движения должно соответствовать появление компенсирующего момента другого рода, причем направление и величина этого последнего момента определяются теорией. Последний момент количества движения будет просто механическим моментом количества движения, т. е. тело при изменении своей намагниченности должно приходить во вращение. Это и есть эффект, существование которого будет доказано ниже.

Следует еще отметить, что излагаемый здесь опыт позволит создать новый, точный метод определения отношения  $\epsilon/\mu$  для электронов.

§ 1. *Магнитный момент и момент количества движения молекулы.* Замкнутый ток в смысле своего магнитного дальнего действия эквивалентен, по Амперу, магниту, магнитный момент  $m$  которого равен произведению силы тока  $i$  (в электромагнитных единицах) на площадь  $F$  плоской поверхности, натянутой на контур с током. В нашем случае кругового движения электрона сила тока равна произведению числа оборотов в секунду  $n$  на электрический заряд  $e$  (в электромагнитных единицах) движущейся электрической частицы. Таким образом, имеем

$$m = iF = enF. \quad (1)$$

Этот магнитный момент, являющийся вектором, перпендикулярен плоскости кругового тока. Знак этого вектора совпадает с указанным на рис. 1 или будет противоположным, в зависимости от того, положителен или отрицателен заряд  $\epsilon$ .

Момент количества движения  $\mathfrak{M}$  движущейся по окружности частицы с массой  $\mu$  по величине, как легко показать, определяется соотношением

$$\mathfrak{M} = 2\mu nF. \quad (2)$$

Вектор  $\mathfrak{M}$  по направлению и смыслу всегда совпадает со стрелкой на рис. 1.

Из соотношений (1) и (2) следует:

$$\mathfrak{M} = \frac{2\mu}{\epsilon} m. \quad (3)$$

В соответствии со сказанным соотношение (3) выполняется и в том случае, если оно понимается как векторное уравнение. Если масса, совершающая круговое движение, имеет отрицательный заряд, то  $\epsilon$  следует подставлять в равенство (3) со своим отрицательным знаком.

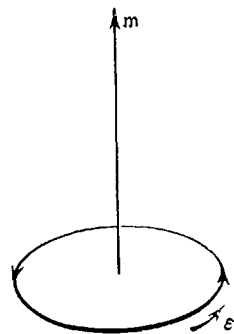


Рис. 1.

Если в молекуле совершают круговое движение несколько элементарных зарядов, по величине равных  $\epsilon$  и имеющих одинаковую массу  $\mu$ , то для молекулы выполняется равенство

$$\sum \mathfrak{M} = \frac{2\mu}{\epsilon} \sum m. \quad (3a)$$

Такое же соотношение справедливо для намагничиваемых тел любой протяженности, если сумму распространить на все движущиеся по окружности электроны, содержащиеся в теле. В этом случае сумма  $\sum \mathfrak{M}$ , которую мы опять будем записывать как  $\mathfrak{M}$ , есть полный момент количества движения электронов тела;  $\sum m$  есть объемный интеграл вектора намагниченности тела, или вектор  $\mathbf{J}$  его полной намагниченности. Мы получаем таким образом фундаментальное для нас соотношение

$$\mathfrak{M} = \frac{2\mu}{\epsilon} \mathbf{J}, \quad (3б)$$

или, если движущимися по кругу элементарными зарядами являются отрицательные электроны,

$$\mathfrak{M} = -1,13 \cdot 10^{-7} \mathbf{J}. \quad (4)$$

§ 2. Следствия из существования момента количества движения при намагниченности. Всякое уменьшение момента количества движения

намагниченного тела сопряжено с появлением вращательного момента  $\mathfrak{D}$  в соответствии с векторным равенством

$$\mathfrak{D} = -\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = 1,13 \cdot 10^{-7} \frac{dJ}{dt}. \quad (5)$$

Это равенство в дальнейшем будет подтверждено экспериментально. Пока мы покажем, что найденный здесь эффект не ускользает от наблюдения, хотя он и мал. Возьмем, к примеру, железный цилиндр радиусом  $R$ , способный вращаться вокруг своей оси; вычислим угловую скорость  $\omega$ , которую он приобретает в соответствии с равенством (5) при полном перемagnetизации вдоль оси. Получаем

$$Q\omega = \int \mathfrak{D} dt = -1,13 \cdot 10^{-7} \cdot 2J_s,$$

где

$$Q = \frac{1}{2} MR^2$$

есть момент инерции цилиндра,

$$J_s = \frac{M}{7,8} \cdot 1100$$

— намагниченность его при насыщении. Выбирая  $R = 0,1$  см, получаем примерно

$$\omega = 0,6 \cdot 10^{-2},$$

т. е. удобную для наблюдения угловую скорость.

Равенство (5) выполняется и в случае, когда изменение вектора намагниченности со временем создается не изменением магнитного состояния тела, а движением (вращением) его. В этом случае, обозначая вектор угловой скорости вращения тела через  $v$ , имеем

$$\frac{dJ}{dt} = [v, J],$$

так что получаем

$$\mathfrak{D} = 1,13 \cdot 10^{-7} [v, J]. \quad (6)$$

Это и есть вращательный момент, эквивалентный тому вращательному моменту в теории волчка, который определяет прецессионное движение. В соответствии с соотношением (6) магнит на маятниковом подвесе должен совершать прецессионное движение наподобие подвешенного на нити крутильного маятника.

Соотношение (6) допускает особенно наглядную интерпретацию. Именно, если тело, намагниченность которого равна  $J$ , поместить в однородном

магнитном поле  $\mathfrak{h}$ , то на него будет действовать вращательный момент

$$- [\mathfrak{h}, \mathcal{J}].$$

Сравнивая это выражение с равенством (6), находим, что вследствие гироскопической природы магнитных молекул вращение тела действует так же, как магнитное поле, выражаемое формулой

$$\mathfrak{h} = -1,13 \cdot 10^{-7} v. \quad (7)$$

В этом смысле можно говорить о магнито-пондеромоторной силе вращения, которая, впрочем, действует не только на тело как целое, но и на его молекулы, т. е. намагничивает.

Этот эффект также можно использовать для проверки теории, хотя и менее просто, чем указанный выше.

Получается также, что вращению Земли соответствует параллельное земной оси магнито-пондеромоторное поле, направленное с севера на юг и обладающее напряженностью порядка  $10^{-11}$ . Возможно, в этом и заключается причина приближенного совпадения магнитной оси и оси вращения Земли.

§ 3. *Описание экспериментального метода.* Соотношение (5) в принципе можно проверить следующим образом. Цилиндр  $Z$  из мягкого железа следует подвесить (рис. 2) на тонкой нити  $F$  так, чтобы его ось была расположена вертикально и совпадала с направлением нити; период колебаний должен составлять несколько секунд. При этом цилиндр  $Z$  должен висеть внутри концентрической катушки  $S$ , посредством которой железный цилиндр можно намагничивать параллельно его оси. При изменении направления тока в катушке  $S$ , т. е. при перемагничивании цилиндра, должны наблюдаться крутильные колебания цилиндра  $Z$ .

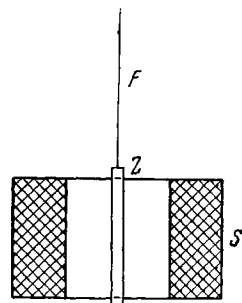


Рис. 2.

Такой метод сопряжен с трудностью, заключающейся в том, что на железный цилиндр со стороны катушки действуют очень большие магнитные силы, распределенные в пространстве не строго симметрично, так что при изменении направления тока цилиндр совершает самые неожиданные движения, и о наблюдении интересующего нас сравнительно малого эффекта не может быть и речи.

Эти трудности можно обойти, используя резонансное усиление эффекта, для чего надо питать катушку  $S$  переменным током и выбрать нить  $F$  так, чтобы крутильные колебания цилиндра происходили с частотой питающего переменного тока.

Колебания вертикально расположенного стерженька под действием вращательного момента  $\mathfrak{D}$  подчиняются уравнению

$$\mathfrak{D} = Q\ddot{\alpha} + \Theta\dot{\alpha} + P\alpha, \quad (8)$$

где  $\alpha$  — переменный угол поворота,  $Q$  — момент инерции,  $\Theta$  — константа кручения подвешивающей нити и  $P$  — (малый) коэффициент трения. Вместо  $\Theta$  и  $P$  мы введем также круговую частоту  $\omega$  (собственную частоту) и декремент затухания  $\kappa$ . Тогда

$$e^{j(\omega + j\kappa)t} \quad (j = \sqrt{-1})$$

будет решением уравнения

$$0 = Q\ddot{\alpha} + \Theta\dot{\alpha} + P\alpha,$$

если (в пренебрежении квадратами  $P$  и  $\kappa$ ) выполняются соотношения

$$\omega = \sqrt{\frac{\Theta}{Q}}, \quad (9)$$

$$\kappa = \frac{P}{2Q}.$$

Чтобы решить уравнение (8), мы должны разложить в ряд Фурье вращательный момент  $\mathfrak{D}$  как функцию времени. Согласно соотношению (5),  $\mathfrak{D}$  имеет такую же фазу, как и  $\frac{dJ}{dt}$ . Если бы намагниченность всегда была пропорциональна току, то значение  $\mathfrak{D}$  изменялось бы синусоидально с опережением фазы питающего тока  $i$  на  $\pi/2$ . Однако, чем больше амплитуда питающего тока, тем сильнее влияет насыщение на форму кривой намагничивания. При очень большой амплитуде  $i$  намагниченность будет переходить почти внезапно от одного значения насыщения к противоположному в моменты времени, с точностью до малого запаздывания фазы совпадающие с моментами перемены направления тока<sup>1</sup>. В этом предельном случае, для которого мы и будем проводить наши вычисления, поведение вращательного момента изображается кривой, представленной на рис. 3, причем для отдельных зубцов в соответствии с соотношением (5) получаем

$$\int \mathfrak{D} dt = \pm 1,13 \cdot 10^{-7} \cdot 2J_s. \quad (10)$$

<sup>1</sup> В том, что при использованных в § 7 для количественной проверки данных это условие выполняется, мы убедились из осциллограммы, снятой с любезной помощью д-ра Роговского (В оригинале ссылка на § 6. Ср. примеч. на стр. 374.—Ред.).

Если же ток в катушке меняется по закону

$$i = A \sin \omega t, \quad (11)$$

то для  $\mathcal{D}$  существует разложение

$$\mathcal{D} = \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \cos n\omega t. \quad (12)$$

В этом разложении нас интересует только первый член, так как только он оказывает влияние на наблюдаемые колебания нашего цилиндра и только он усиливается в резонансе. Умножая равенство (12) на  $\cos \omega t$  и интегрируя по периоду  $T (= \frac{2\pi}{\omega})$ , мы получаем с учетом соотношения (10):

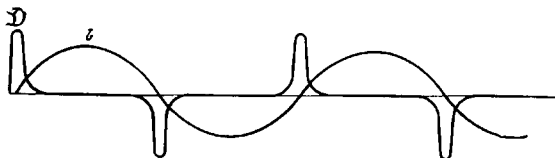


Рис. 3.

$$1,13 \cdot 10^{-7} \cdot 4J_s = B_1 \frac{\pi}{\omega}. \quad (13)$$

В соответствии со сказанным выше уравнение (8) заменяется теперь следующим уравнением:

$$B_1 \cos \omega t = Q\ddot{\alpha} + \Theta\dot{\alpha} + P\alpha, \quad (8a)$$

периодическое решение которого с учетом соотношений (9) принимает вид

$$\alpha = \frac{B_1}{2\kappa Q \omega} \sin \omega t. \quad (14)$$

Таким образом, для амплитуды  $|\alpha|$  угла  $\alpha$ , с учетом соотношения (13), получаем:

$$|\alpha| = \frac{2}{\pi} \cdot 1,13 \cdot 10^{-7} \frac{J_s}{\kappa Q}. \quad (15)$$

Тем самым мы решили задачу для сильных возбуждающих токов. Для дальнейшего необходимо еще раз подчеркнуть, что первый член разложения (12), определяющий ожидаемый по теории вращательный момент, опережает по фазе питающий ток на  $\pi/2$  (см. рис. 3).

§ 4. Экспериментальная установка (рис. 4). Цилиндрический стерженек  $S$  из мягкого железа длиной 7 см и диаметром 1,8 мм подвешивался в вертикальном магнитном переменном поле, создававшемся одинаковыми катушками  $A_1$  и  $A_2$ . Эти катушки удерживались тремя колодками параллельно на расстоянии около 1 см и покоились на треножнике, наклон которого можно было изменять с помощью трех винтов в опорах. Стерженек



*S* подвешивался точно по оси катушек на стеклянной нити *G*, приклеенной в отверстии на верхнем торце стерженька. Стеклянная нить *G* диаметром около 0,2 мм вверху прикреплялась к поперечному стержню, вставленному в широкую латунную трубку *E*, удерживаемую штативом. Для изменения действующей длины подвешивающей нити *G* и для установления резонанса служило следующее приспособление. Широкая трубка *E* внизу имела более узкое горло *D*, внутри которого помещалась передвигаемая вертикально латунная трубка *C*, фиксируемая винтом *P*. Трубка *C* внизу имела зажим *B*, щеки которого прижимались друг к другу латунной пружиной *F*. Припаянная горизонтально к нижнему краю одной из щек поперечная проволочка обеспечивала точность зажима подвешивающей нити на строго определенной высоте. На стерженьке *S* на высоте промежутка между катушками *A*<sub>1</sub> и *A*<sub>2</sub> были укреплены два зеркальца, изготовленные из покровных стекол для микроскопа, которые отражали пучок света на шкалу, располагавшуюся на расстоянии 45 см.

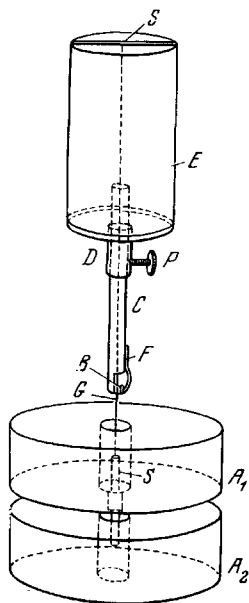


Рис. 4.

Катушки *A*<sub>1</sub> и *A*<sub>2</sub> включались параллельно и имели столько витков, что обеспечивали переменное поле около 50 гс при подключении без балластного сопротивления к зажимам имевшегося у нас генератора переменного тока с напряжением около 120 в.

Еще одна окружающая описанный аппарат вертикальная катушка радиусом около 1 м, питаемая от аккумуляторов, служила для компенсации вертикальной составляющей магнитного поля Земли.

§ 5. *Опыты*. Прежде чем излагать ход опытов, мы должны рассмотреть, какие мешающие эффекты могут встретиться при проведении опытов.

1. На концах стерженька *S* возникают переменные полюсы. На них действует горизонтальная составляющая магнитного поля Земли, вследствие чего с частотой питающего тока появляется переменный вращательный момент, имеющий горизонтальное направление. Соответствующие этому вращательному моменту колебания вокруг горизонтальной оси не достигали заметной величины в наших опытах («эффект 1»).

2. При хаотическом расположении ферромагнитных кристаллов в стерженьке (в соответствии с выводами П. Вейсса о природе ферромагнетизма) следует ожидать, что некоторые кристаллы расположены так, что их нельзя переманить переменным полем. Это означает появление по-

стоянного магнитного момента, который при хаотичности расположения кристаллов с большой вероятностью может обладать значительной горизонтальной составляющей, которая вместе с неизбежной горизонтальной составляющей переменного магнитного поля может возбуждать переменный вращательный момент вокруг вертикали с фазой, совпадающей с фазой питающего тока («эффект 2»).

3. Ось, вокруг которой стерженек совершает свои крутильные колебания, точно не совпадает с осью переменной намагниченности стерженька. Поэтому постоянное горизонтальное магнитное поле должно возбуждать крутильные колебания стерженька. Фаза вращательного момента, возбуждающего эти колебания, совпадает с фазой намагниченности и потому также (при сильных намагничивающих токах) почти совпадает с фазой питающего тока («эффект 3»).

Легко заметить, что возбуждаемые в стерженьке токи Фуко не могут иметь существенного значения для нашего опыта. Эти токи вызывают только некоторое замедление перемагничивания стерженька<sup>2</sup>.

Кроме названных выше — насколько мы можем видеть — не существует других мешающих эффектов, которые обладали бы частотой питающего тока, т. е. испытывали бы в наших опытах резонансное усиление. Поэтому они, как следует из дальнейшего, не могли сказываться в наших опытах.

Когда катушки  $A_1$  и  $A_2$  включались в сеть переменного тока, световой зайчик на шкале оставался абсолютно неподвижным, если только действующая длина нити не выбиралась так, чтобы наступал резонанс между крутильными колебаниями стерженька и переменным магнитным полем. Эта резонансная область при эффективной длине нити около 8 см составляла примерно 1 мм. Чтобы легче находить резонансное положение зажимных щек  $B$ , чтобы иметь уверенность, что мы получили основную, а не высшую гармонику поля, и, наконец, чтобы достаточно точно измерять момент инерции колеблющегося стерженька, мы пользовались следующим приемом.

Мы выдвигали из катушек узел подвески вместе со стерженьком и прикрепляли сургучом на нижнем конце стерженька  $S$  горизонтальный поперечный стержень из меди с моментом инерции 10,7, тогда как момент инерции стерженька  $S$  относительно его геометрической оси был равен 0,0045. Отсюда следует, что после прикрепления поперечного стержня система совершает крутильные колебания с периодом в  $\sqrt{\frac{10,7}{0,0045}} = 48,8$

<sup>2</sup> Кроме того, несущественность токов Фуко была доказана контрольным экспериментом, выполненным с медным стерженьком вместо железного.

раз больше, чем без поперечного стержня. Следовательно, если мы устанавливали зажимы так, чтобы частота с поперечным стержнем составляла около 1 *гц*, то без него эта частота равнялась 48,8 *гц*, что почти совпадает с частотой переменявшегося переменного тока. Таким путем сначала легко можно было находить резонанс. Если затем после вдвигания железного стерженька производилась точная установка на резонанс, то фактически действующий в опытах момент инерции измерялся по частоте тока, а после повторного извлечения стерженька  $S$  определялся по собственной частоте колебаний с подвешенным горизонтальным стержнем из меди. Если частота тока (измеренная резонансным частотомером) была равна 46,2 *гц*, частота колебаний с подвешенным стержнем 1,14 *гц*, то эффективный момент инерции  $Q$  стерженька  $S$  составлял

$$Q = 10,7 \left( \frac{1,14}{46,2} \right)^2 = 0,0070,$$

т. е. был значительно больше вычисленного из геометрических соображений момента инерции  $Q = 0,0045$ . Само собой разумеется, причина здесь в том, что колебания стерженька происходили не точно вокруг его геометрической оси.

Когда включение переменного тока и установка стерженька на резонанс производились без компенсации магнитного поля Земли, крутильные колебания цилиндрика достигали такой величины, что световое пятно на шкале расширялось до 3 *см* (при расстоянии до шкалы 45 *см*). Ширина светового пятна на шкале в дальнейшем всегда будет называться «удвоенным отклонением».

Сначала оказалось, что «эффект 2», т. е. вызванные постоянной горизонтальной намагниченностью колебания, не играет никакой роли. В самом деле, удвоенное отклонение не изменялось, когда изменением наклона оси катушек  $A_1$  и  $A_2$  с помощью винтов в опорах треножника в стерженьке  $S$  возбуждалось переменное магнитное поле с горизонтальной составляющей.

В противоположность этому «эффект 3», т. е. возникновение вращательных моментов вследствие эксцентричного положения магнитных полюсов, был весьма заметным. Удвоенное отклонение изменялось сразу, как только к катушкам подносили постоянный магнит; кроме того, удвоенное отклонение изменялось весьма существенно, если узел подвеса вместе со стерженьками поворачивался вокруг вертикали («азимутальная чувствительность» эффекта).

Этот «эффект 3», как и вообще азимутальная чувствительность наблюдаемого эффекта, должен исчезнуть, если устранить магнитное поле Земли с помощью компенсирующей катушки. Геометрическая установка компенсирующей катушки и определение силы тока, необходимой для ком-

пенсации, производились с помощью земного индуктора. После компенсации магнитного поля Земли оставалось хорошо воспроизводимое удвоенное отклонение 4,5 мм, но его зависимость от азимута полностью исчезала.

Если полученный таким образом эффект был бы тем эффектом, который следует из электронной теории, то фаза возбуждаемого вращательного момента совпадала бы с фазой производной вектора намагниченности ( $d\mathbf{J}/dt$ ) и, следовательно, была бы перпендикулярна фазе намагниченности  $\mathbf{J}$ . Так как переменный вращательный момент, названный выше «эффектом Э», имеет фазу  $\mathbf{J}$  и создается при наложении горизонтального поля, то в соответствии со сказанным, если наблюдаемый нами эффект будет действительно иметь фазу ( $d\mathbf{J}/dt$ ), наблюдаемое удвоенное отклонение никогда не исчезнет при приближении к установке постоянного магнита или при изменении компенсирующего тока. Это оказалось правильным.

Далее, теоретически ожидаемый эффект должен зависеть от силы питающего тока таким же образом, как и намагниченность. Этот вывод при проверке также подтвердился.

Сравним теперь величину экспериментально найденного эффекта с теоретической. Принимая намагниченность железа при насыщении равной 1200 и учитывая, что объем стерженька  $S$  равен 0,16, получаем

$$J_s = 192.$$

При непосредственном наблюдении затухания крутильных колебаний в приложенном переменном поле получилось

$$k = 0,533.$$

Поскольку далее

$$Q = 0,0069,$$

из формулы (15) получается

$$|\alpha| = 0,0036.$$

При расстоянии до шкалы 45 см для двойного отклонения, таким образом, получаем

$$4|\alpha| \cdot 45 = 0,65,$$

в то время как на опыте мы нашли 0,45 см.

По этому поводу надо прежде всего заметить, что вычисленное теоретически значение дает оценку верхней границы эффекта, главным образом потому, что перемагничивание происходит не мгновенно, как это предполагалось в вычислении. Вследствие размагничивающего действия полюсов магнитное поле в катушке должно быть сравнительно большим, чтобы на-

магнитичность при изменении направления принимала сразу же постоянное значение.

§ 6. *Определение фазы*<sup>3</sup>. Мы видели, что вращательный момент на четверть периода отличается по фазе от переменного намагничивания. Далее, из § 3 следует, что путем сравнения фазы эффекта ( $P_1$ ) с фазой переменного тока ( $P_2$ ) мы сможем решить вопрос о том, действительно ли электроны, движущиеся вокруг молекул железа, являются отрицательными. Мы попытались сделать это следующим путем.

Лампа накаливания с отдельной нитью, применявшаяся для считывания шкалы, подсоединялась к источнику переменного тока параллельно катушке с железным сердечником. Когда затем подносили постоянный магнит к лампе, накаленная нить под действием переменных электромагнитных сил приходила в движение, так что наряду с колебаниями, обусловленными вибрацией зеркала, изображение совершало колебания вследствие движения нити лампы.

Наблюдая теперь увеличение или уменьшение амплитуды колебания изображения в результате добавления этого последнего колебания, мы могли сравнить фазу  $P_1$  с фазой новых колебаний. Эта последняя определена фазой светящейся нити, которая, в свою очередь, зависела от фазы тока в ней, в то время как разность между этой фазой и  $P_2$  определялась самоиндукцией катушки. Следовательно, можно было найти фазы  $P_1$  и  $P_2$ .

К сожалению, после завершения наших экспериментов и отъезда одного из нас из Берлина было обнаружено, что при осуществлении этого метода была допущена ошибка, так что мы должны рассматривать эту часть нашего исследования неудавшейся. Однако отрицательный знак заряда электронов, движущихся в атомах, остается весьма вероятным вследствие согласия между величиной наблюдаемого эффекта, с одной стороны, и значением, которое мы вычислили для него, используя отношение заряда к массе ( $e/m$ ), для отрицательных электронов, с другой.

§ 7<sup>4</sup>. *Более точные количественные опыты*. Описанные до сих пор опыты давали вполне удовлетворительное количественное подтверждение теории. Однако хотелось улучшить количественную сторону опытов. Поле катушек было слишком слабым, чтобы при сравнительно малой длине стерженька обеспечивать почти мгновенное перемагничивание его, как мы предполагали в теории. Кроме того, декремент затухания определялся с небольшой точностью. Наконец, можно сомневаться, действительно ли причины затухания правильно описываются в уравнении (8) (линейным членом  $\dot{P}\alpha$ .

<sup>3</sup> § 6 вставлен из английского варианта статьи, в котором он написан заново в связи с ошибкой, отмеченной Г. А. Лоренцом. Исправлена и последняя фраза § 5 (см. стр. 378). — *Прим. ред.*

<sup>4</sup> В немецком тексте это был § 6. — *Прим. ред.*

Прежде всего, чтобы добиться быстрого перемагничивания, мы заменили две катушки  $A_1A_2$  одной-единственной катушкой длиной 62 см (около 100 витков на 1 см длины); эта катушка в наших опытах (сила тока 1,45 а) создавала в середине поле с амплитудным значением 260 гаусс (и, значит, на конце — поле с амплитудой 130 гаусс). Далее, чтобы уменьшить размагничивающее действие полюсов, мы использовали железный стерженек длиной 15 см и диаметром 0,17 см. Для исключения зависимости результата от измерения декрементов затухания и от предположений о законе затухания мы определяли резонансную кривую, т. е. зависимость  $|\alpha|$  от частоты переменного тока при фиксированной длине нити. Зеркало прикреплялось к тонкостенной стеклянной трубке, приклеенной к нижнему торцу стерженька, и несколько выступало из катушки.

Зависимость максимальной амплитуды  $|\alpha|$  от применяемой частоты  $\nu$  получаем из соотношения (13) и уравнения (8а):

$$|\alpha| = \frac{4\lambda}{\pi} \frac{J_s}{\sqrt{(4\pi Q\nu)^2 + P^2}}. \quad (16)$$

Здесь  $\lambda$  — постоянная, которая согласно теории должна быть равна  $2\mu/\epsilon = 1,13 \cdot 10^{-7}$ ,  $J_s$  — магнитный момент намагниченного до насыщения стерженька,  $Q$  — момент инерции, определяющий крутильные колебания стерженька,  $P$  — коэффициент затухания, входящий в дифференциальное уравнение (8а),  $\nu$  — разность между применяемой частотой  $\nu$  и резонансной частотой  $\nu_0$ . При выводе формулы (16) и уравнения (8а) предполагалось, что  $\nu/\nu_0$  и  $P$  — малые величины, квадратами которых можно пренебрегать; это предположение при большой остроте нашего резонанса хорошо выполняется.

Определив из опыта  $|\alpha|$  как функцию  $\nu$ , после исключения величины  $P$ , не представляющей для нас интереса, можно найти  $\lambda$ . Исключение  $P$  проще всего производится с помощью соотношения, справедливого для резонансной амплитуды:

$$|\alpha|_{\max} = \frac{4\lambda}{\pi} \frac{J_s}{\sqrt{P^2}}. \quad (16а)$$

Разрешая, после исключения  $P$ , это соотношение относительно  $\lambda$ , получаем

$$\lambda = \pi^2 \frac{Q}{J_s} |\alpha|_{\max} \nu \sqrt{\frac{b^2}{1 - b^2}}, \quad (17)$$

где сделана подстановка

$$b = \frac{|\alpha|}{|\alpha|_{\max}}.$$

Если резонансная кривая снята, то формула (17) дает значение  $\lambda$  для каждой ординаты  $|\alpha|$ . Если это значение или выражение  $v \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$  окажется постоянным, то тем самым будет доказано, что затухание правильно учитывается в уравнении (8а) линейным членом.

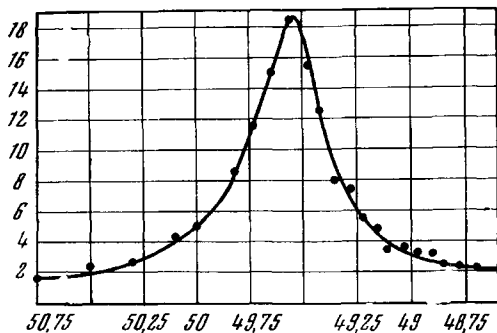


Рис. 5.

Изменение и измерение частоты  $n = n_0 + v$  производилось так. Применявшийся переменный ток получался от установленного в подвале генератора переменного тока, приводившегося в действие мотором постоянного тока, питаемым от аккумуляторной батареи. Параллельно обмотке возбуждения этого мотора мы включали находившееся в экспериментальной комнате регулируемое сопротивление; с помощью его мы могли

по желанию менять в известных пределах возбуждающий ток мотора и тем самым число его оборотов, а также частоту получаемого переменного тока. Ток, протекавший через регулируемое сопротивление, контролировался амперметром, показания которого при прочих фиксированных условиях были функцией частоты получаемого переменного тока. Кроме того, мы использовали резонансный частотомер, позволявший точно фиксировать ряд значений частоты (45, 45,5, 46 и т. д. до 55). Промежуточные значения частоты интерполировались с помощью упомянутого амперметра.

Амплитуда круглых колебаний стерженька снова измерялась объективно с помощью светового указателя, который для обеспечения большей точности имел теперь длину 145 см. На рис. 5 показана наиболее тщательно снятая резонансная кривая, а именно изображена ширина полоски света (в миллиметрах шкалы), обусловленной колебаниями, как функция частоты.

Для проверки формулы (17) может служить таблица, составленная на основе изображенной выше кривой (см. таблицу).

Из последнего столбца этой таблицы видно, что вплоть до отклонения, меньшего 7 мм, кривая достаточно хорошо соответствует теории, так как величина  $v \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$  оказывается примерно постоянной. Тем самым оправдывается введение линейного затухания. При переходе к еще меньшим ординатам эта величина, по-видимому, быстро убывает. Однако следует

Т а б л и ц а

Ордината	$23 \nu$	$b$	$\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$	$23 \nu \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$
15	2,55	0,812	1,32	3,36
12	4,25	0,649	0,853	3,63
9	6,2	0,488	0,560	3,46
7	8,2	0,380	0,413	3,38
5	11,3	0,271	0,280	3,18
4	13,7	0,217	0,222	3,04
3	17,3	0,163	0,165	2,68

заметить, что такие малые отклонения уже нельзя было определять с достаточной уверенностью. При этом положении вещей представляется оправданным брать для вычисления только четыре первых указанных в таблице значения ординат. Из них мы получаем среднюю величину

$$\nu \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}} = 0,128.$$

Далее кривая дает

$$|\alpha|_m = \frac{18,5}{1450,4} = 0,320 \cdot 10^{-2}.$$

Момент инерции нашей колеблющейся системы определялся по влиянию, которое оказывало на собственную частоту добавление малого точно известного дополнительного момента инерции. Собственная частота с дополнительным моментом инерции снова определялась по резонансной кривой. Было получено <sup>5</sup>

$$Q = 0,0126.$$

Наконец, для объемного интеграла намагниченности стерженька при насыщении, принимая плотность намагниченности при насыщении равной 1260, находим значение

$$J_s = 458.$$

<sup>5</sup> Следует отметить, что без стеклянной трубки и зеркальца вычисленный момент инерции  $Q$  стерженька, если бы его форма была строго цилиндрической, был бы равен 0,0102.



С этими данными из формулы (17) получаем:

$$\lambda = 1,11 \cdot 10^{-7},$$

в хорошем согласии с теоретическим значением  $1,13 \cdot 10^{-7}$ . Правда, такое совпадение может быть случайным, так как нашим измерениям надо приписывать точность около 10%; тем не менее доказано, что описанный в начале статьи результат теории кругового движения электронов подтверждается опытом количественно, по крайней мере приближенно.

Описанные опыты были выполнены в Имперском физико-техническом институте. Мы особенно благодарим Варбурга и Гумлиха, а также остальных коллег за их постоянное любезное содействие.

Английский перевод статьи (слегка измененный) опубликован в *Proceedings Akademie van Wetenschappen (Amsterdam)*, 1916, XVIII, 696—711.

Как отмечалось (стр. 374), в немецком тексте статьи была допущена ошибка, отмеченная Лоренцом. Поэтому в английском переводе, опубликованном в Голландии, был вставлен новый § 6. Этот параграф и помещен вместо соответствующей части текста (стр. 164—166 немецкого оригинала) в русский перевод. Для полноты опущенная часть немецкого текста приводится здесь вместе с заметкой Эйнштейна, в которой он исправляет ошибку.

Голландский перевод опубликован в *Verslag. Akademie van Wetenschappen (Amsterdam)*, ser. 4, 1915, 23, 1449—1464.

### Из § 5 немецкого варианта статьи

Из упомянутого ранее факта, что наблюдаемое удвоенное отклонение минимально при исчезающем постоянном горизонтальном магнитном поле, следует, что фаза остающегося после компенсации магнитного поля Земли — вращательного момента, действующего на стерженек, перпендикулярна фазе намагниченности  $J$ . Это соответствует равенству (5). Поэтому приходилось еще определять знак эффекта; для этого применялся следующий способ.

Световой указатель освещался лампой накаливания с ненапряженной металлической нитью; лампа была подключена к источнику переменного тока параллельно с парой катушек. Когда к лампочке подносили постоянный магнит, то под действием электрических сил он начинал колебаться, в результате чего на шкале возникали колебания светового зайчика, которые накладывались на колебания зайчика вследствие крутильных колебаний. Знак эффекта определялся путем следующих двух измерений.

1. Лампочка и катушки питались постоянным током, причем в электрической схеме опыта ничего не менялось; когда южный полюс магнита приближался к лампочке спереди, то отклонение светового пятна на шкале было положительным. Одновременно в катушках возникало поло-

жительное, т. е. направленное вниз, магнитное поле (см. рис. 6).

2. Когда катушки и лампочка питались переменным током, то приближение южного полюса к лампочке спереди вызывало *уменьшение* удвоенного отклонения, которое можно было доводить почти до исчезновения.

Отсюда определить знак проще всего можно с помощью нижеследующей фазовой диаграммы (рис. 7). Ток через лампочку вследствие значительной самоиндукции катушек опережает по фазе ток катушек почти на  $90^\circ$ ; при этом ток через лампочку считался положительным, если его направление было таким, что (при приближении южного полюса спереди) он сдвигал нить лампочки в сторону, соответствующую положительному отклонению на шкале, а ток через катушку считался положительным, если он создавал поле, направленное вниз. Так как нить в лампочке не закреплена и, следовательно (при малом трении), обладает значительно меньшей собственной частотой, чем переменный ток, то фаза колебаний нити противоположна фазе тока через нить. Поскольку фаза колебаний нити, согласно опыту, отклоняется больше чем на  $90^\circ$  от фазы крутильных колебаний, т. е. и от фазы вращательного момента, обязанного исследуемому эффекту, отсюда следует, что фаза последнего изображается сплошной, а не пунктирной, противоположно направленной стрелкой диаграммы.

Тем самым доказано, что вращательный момент эффекта пропорционален величине  $d\mathcal{J}/dt$ , а не  $-d\mathcal{J}/dt$ , т. е. что эффект создается электроотрицательными циркулирующими частицами, а не положительными.

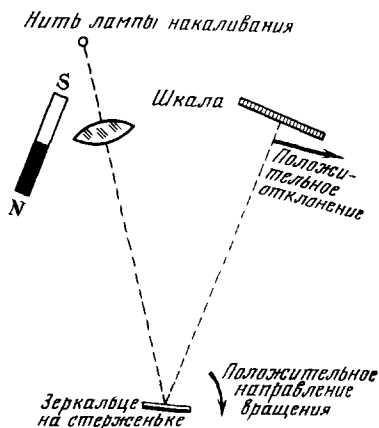


Рис. 6.

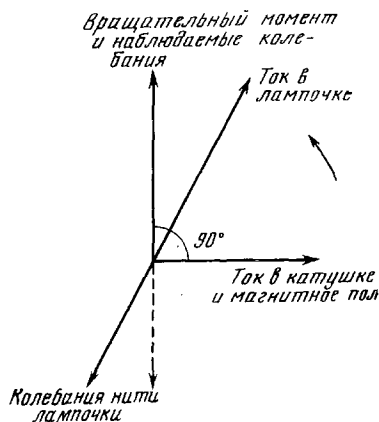


Рис. 7.

**ИСПРАВЛЕНИЕ К НАШЕЙ С В. де ГААЗОМ РАБОТЕ  
„ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО  
МОЛЕКУЛЯРНЫХ ТОКОВ АМПЕРА“\***

Г. А. Лоренц в своем письме обратил мое внимание на ошибку в диаграмме на рис. 7. А именно: стрелка, направленная вверх, конечно, правильно изображает фазу вращательного момента искомого эффекта. Но неверно, что в случае резонанса эта фаза совпадает с фазой колебания, вызываемого этим вращательным моментом [угол  $\alpha$  в уравнении (8a)]. Действительно, в случае точного резонанса фаза  $\alpha$  в соответствии с уравнением (8a) отставала бы на  $\pi/2$  от фазы возбуждающего вращательного момента и, значит, на диаграмме (см. рис. 7) совпадала бы с фазой тока через катушки. Так как нельзя утверждать, что резонанс был точным, то фаза  $\alpha$  может отклоняться от фазы тока через катушки на малый угол (примерно до  $\pi/4$ ) в сторону опережения или запаздывания. Результирующая фаза  $\alpha$  образует с фазой колебания нити тупой угол. Она *может*, как показал опыт, отклоняться от последней фазы на угол, мало отличающийся от  $\pi$ . Однако, несмотря на ошибку в рукописи работы, результат, утверждающий, что фаза вращательного момента изображается стрелкой, направленной вверх, а не вниз,— остается в силе. Доказательство, конечно, было бы изящнее и нагляднее при последовательном включении токовой катушки и нити лампочки.

Поступила 10 мая 1915 г.

\* *Berichtigung zu meiner gemeinsam mit Herrn W. J. de Haas Veröfentlichten Arbeit «Experimenteller Nachweis der Ampèreschen Molekularströme». Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 1915, 17, 203.*

**ЗАМЕЧАНИЕ К НАШЕЙ РАБОТЕ<sup>1</sup>**  
**„ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**  
**МОЛЕКУЛЯРНЫХ ТОКОВ АМПЕРА“\***

(Совместно с В. де Гаазом)

Недавно мы получили от коллеги Берлинера две заметки С. Дж. Барнета, опубликованные в номерах журнала Science от 30 июля и 1 октября 1915 г. Из них ясно вытекает, что еще Максвелл пришел к мысли об исследовании гироскопических свойств магнитов, чтобы проверить этим способом гипотезу Ампера. Барнет пишет: «Опыт, который я недавно описывал в этом журнале, можно рассматривать как видоизменение давнего опыта Максвелла, по-видимому, первым пришедшего к мысли, что магнит должен обладать свойствами волчка, если токи Ампера в нем в самом деле имеют материальную природу, как предполагает современная теория».

Барнет начал свои опыты уже шесть лет назад и теперь сообщает, что они привели к положительному результату. Он поставил задачу обнаружить магнито-пондеромоторные силы, возникающие в железном стержне при его быстром вращении. Экспериментально это несравненно труднее, чем поставленная нами задача обнаружения вращательных моментов, возникающих при изменении намагничивания. Опыты Барнета и наши счастливым образом взаимно дополняют друг друга.

Поступила 15 ноября 1915 г.

---

\* *Notiz zu unserer Arbeit «Experimenteller Nachweis der Ampèreschen Molekularströme».* (Mit W. J. de Haas) Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 1915, 17, 420.

<sup>1</sup> Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 1915, 17, 152—170. (Статья 40).

## ПРОСТОЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА МОЛЕКУЛЯРНЫХ ТОКОВ АМПЕРА \*

Ниже описывается простой опыт, который может служить лекционной демонстрацией доказательства молекулярных токов Ампера. Он представляет собой вариант опытов, выполненных мною совместно с де Гаазом<sup>1</sup>.

Необходимо обнаружить (кажущийся) вращательный момент, приобретаемый железным стерженьком при его перемагничивании вследствие того, что орбиты электронов изменяют ориентацию. Главная трудность для простой демонстрации этого эффекта заключается в том, что чисто магнитные силы, действующие на стерженек в намагничивающем поле, очень велики по сравнению с силами, которые надо измерить. Чтобы по возможности уменьшить эту трудность, стерженек должен подвергаться действию магнитного поля не *длительно*, а только по мере надобности в течение такого короткого времени (около  $1/1000$  секунды), чтобы происходила только перемена знака *остаточной* намагниченности.

Применявшаяся для этого установка в ее последнем варианте изображена (в вертикальном разрезе) на рис. 1. Исследуемый железный стерженек *S* (диаметром 1,4 мм и длиной около 10 см) с приклеенным посередине зеркала подвешивается на кварцевой нити длиной несколько сантиметров и диаметром около 10 мк. Эта кварцевая нить вверху приклеивается к медному стержню с поворотной головкой, проходящей через центр пробки, которая держится на трении. Пробка вставляется в деревянную насадку *R'* к картонному трубчатому каркасу катушек *R*, укрепленному

\* *Ein einfaches Experiment zum Nachweis der Ampereschen Molekularströme.* Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 1916, 18, 173—177. (Доложено на заседании Немецкого физического общества 25 февраля 1915 г.)

<sup>1</sup> A. Einstein, W. de Haas. Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 1915, 17, 152 (Статья 40). Между тем Барнетт [S. Barnett. Phys. Rev., (2), 1915, 6, 171] удалось реализовать эффект, обратный описываемому здесь.

на доске  $H$ , снабженной опорными винтами. На каркасе расположены две (включенных последовательно) катушки  $\Sigma$ , вместе насчитывающие около 4000 витков; между катушками оставлено место для стеклянного окошка (на чертеже не показано), через которое проходит световой луч, служащий для (объективного) наблюдения колебаний стерженька.

Последовательно с парой катушек  $\Sigma$  включается конденсатор емкостью 2 мкф. Этот открытый электрический контур через переключатель и омическое сопротивление от 500 до 1000 ом (предотвращающее электрические колебания) присоединяется к источнику постоянного тока напряжением 120 в. При переключении конденсатор перезаряжается, причем в катушках  $\Sigma$  на короткое время возбуждается магнитное поле, изменяющее знак остаточной намагниченности стерженька. Разумеется, необходимо еще устройство для компенсации земного магнитного поля, например магнит, передвигаемый в горизонтальном направлении на высоте зеркалаца.

Опыт производится следующим образом. Сначала мы компенсируем полностью земное магнитное поле так, что положение покоя стерженька при обоих направлениях его намагниченности в точности то же самое. (То, что этого нельзя достигнуть сразу, объясняется тем, что магнитные полюсы стерженька никогда точно не лежат на оси вращения, и земное поле обычно создает вращательный момент, который должен самым тщательным образом устраняться.)

После этого, поднося на время маленький магнит, сообщаем стерженьку вращательные колебания, при выбранных условиях (период колебания от 1 до 2 секунд) легко наблюдаемые визуально с помощью светового пятна. Теперь при каждом прохождении светового пятна через положение равновесия начнем переключать коммутатор, так что стерженек получает вращательный импульс, вызываемый исследуемым эффектом, в те моменты, когда скорость его вращения максимальна. В результате мы получим легко наблюдаемое усиление или ослабление колебаний. Легко также продемонстрировать, что знак эффекта, как и порядок величины его, соответствует теории.

Необходимо обратить внимание еще на следующие обстоятельства. Существенно, чтобы точка подвеса стерженька находилась по возможности точно на главной оси инерции (оси наименьшего момента инерции). Если

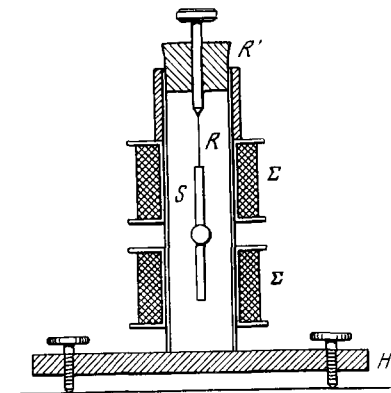


Рис. 1.

этого не будет, то горизонтальные сотрясения аппарата, переходя во вращательные колебания стерженька, будут очень сильно мешать эффекту. Если же стерженек тщательно центрирован, то опыт хорошо удастся без специальной подвески для устранения сотрясений аппарата; для этого последний можно устанавливать, например, на кронштейне, прикрепленном к стене.

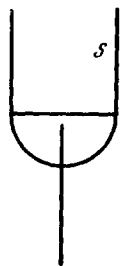


Рис. 2.

Чем хуже центрирован стерженек, тем чувствительнее данная установка к колебаниям земного поля и тем труднее компенсировать земное поле достаточно полно.

Достаточно точное подвешивание стерженька по центру вначале сталкивалось с большими трудностями, в преодолении которых мне любезно оказал помощь г-н Егер. В конце концов к цели привел следующий прямо-таки забавный метод. Стерженек зажимается вертикально (не жестко!) на штативе так, что конец, за который он подвешивается, перевернут вниз. Вертикально под ним, также в перевернутом положении, прикрепляется к штативу соответственно пробка с медной булавкой и кварцевая нить, причем высота тщательно подбирается так, чтобы поднятая (увлажненным пальцем) вверх по прямой линии кварцевая нить уже не касалась плоского торца стерженька (рис. 2). С помощью газовой горелки, сделанной из вытянутой стеклянной трубки, небольшим пламенем нагревается конец *S*, пока к нему не прилипнет подносимый снизу на пальце кусочек канифоли. Канифоль плавится и под действием капиллярных сил образует совершенно симметричную каплю. Если теперь ввести в нее снизу кварцевую нить, она смачивается канифолью и втягивается капиллярными силами в глубь капли до предела и, значит, автоматически центрируется. Теперь стоит только охладить стерженек, и подвес готов. Зеркальце (площадью  $3 \text{ мм}^2$ ), изготовленное из покровного стекла для микроскопа, приклеивается к стерженьку восковым клеем.

Следует далее заметить, что действующие на стерженек вращательные моменты, возбуждаемые чисто магнитным способом вследствие неvertи-кальности и асимметрии поля катушек в сочетании с асимметрией стерженька, не могут быть приняты за исследуемый эффект. В самом деле, поскольку при каждом переключении как поле, так и магнитные полюсы приобретают противоположный знак по сравнению с предшествующим переключением, то результирующий вращательный момент будет все время иметь один знак и, значит, не будет приводить к систематическому усилению или ослаблению колебаний. Впрочем, если эти вращательные моменты будут заметными, их легко устранить регулировкой опорных винтов.

Наконец, надо указать еще на одно обстоятельство, над которым поначалу мне пришлось ломать голову. Эффект, требуемый теорией, до-

статочно велик, чтобы его можно было обнаружить при однократном переключении, начиная с состояния покоя стерженька. Однако в этом случае всегда наблюдается лишь довольно быстрое дрожание стерженька, без заметных крутильных колебаний. Простое рассуждение показывает, что это происходит вследствие эксцентричности подвеса стерженька. Именно, возникает вращательное колебание почти вокруг главной оси инерции, направление которого определяется не кручением нити, а весом стерженька <sup>2</sup>.

Выражаю большую благодарность коллегам Егеру и Орлиху, первому за его дружеское содействие, второму за изготовление описанной выше специальной катушки. Опыт был впервые поставлен с любезного разрешения Варбурга в Имперском физико-техническом институте.

<sup>2</sup> Этот вид колебаний удобно наблюдать на длинном, не очень узком теле, подвешиваемом несимметрично, например, на ножницах, ручка которых подвешивается на нити. Если их слегка ударить в точке подвеса перпендикулярно плоскости лезвий, то наступает рассматриваемое здесь движение.



## ИСПУСКАНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ\*

Когда Планк 16 лет назад создал квантовую теорию, установив свою формулу излучения, он шел следующим путем. Он вычислил среднюю энергию  $\bar{E}$  резонатора как функцию температуры по новым, предложенным им основным правилам квантовой теории и затем определил отсю, а плотность излучения  $\rho$  как функцию частоты  $\nu$  и температуры, пользуясь выведенным им из электродинамики соотношением между плотностью излучения и энергией резонатора  $\bar{E}$ :

$$\bar{E} = \frac{c^3 \rho}{8\pi\nu^2}. \quad (1)$$

Его вывод отличался беспримерной смелостью, но нашел блестящее подтверждение. Подтвердилась не только сама формула излучения и найденное из нее значение элементарного кванта, но и значение  $\bar{E}$ , вычисленное позднее с помощью квантовой теории в исследованиях по удельной теплоемкости. Тем самым подтвердилось и выведенное чисто электродинамическим способом соотношение (1). Однако никого не удовлетворяло, что рассмотрение на основе электродинамики и механики, приводящее к соотношению (1), противоречит основной идее квантовой теории; неудивительно, что и сам Планк, и все теоретики, занимающиеся изучением материи, беспрестанно старались придать теории такой вид, чтобы она покоилась на непротиворечивых предпосылках.

С тех пор как предложенная Бором теория спектров добилась своих замечательных успехов, вряд ли можно сомневаться в том, что основная идея квантовой теории должна быть сохранена. Таким образом, единство

\* *Strahlungs-Emission und-Absorption nach der Quantentheorie.* Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 1916, 18, 318—323.

***Strahlungs-Emission und -Absorption  
nach der Quantentheorie;***

**von A. Einstein.**

(Eingegangen am 17. Juli 1916.)

Als PLANCK vor 16 Jahren die Quantentheorie ins Leben rief, und seine Strahlungsformel aufstellte, schlug er folgenden Weg ein. Er berechnete die mittlere Energie  $\bar{E}$  des Resonators in Funktion der Temperatur nach von ihm neu aufgestellten quantentheoretischen Grundsätzen und bestimmte dann hieraus die Strahlungsdichte  $\rho$  in Funktion der Frequenz  $\nu$  und der Temperatur, indem er auf elektromagnetischem Wege die Beziehung zwischen Strahlungsdichte und Resonatorenenergie  $\bar{E}$  aufstellte:

$$\bar{E} = \frac{c^3 \rho}{8\pi \nu^2} \quad 1)$$

Seine Ableitung war von beispielloser Kühnheit, fand aber glänzende Bestätigung. Es bestätigte sich nicht nur die Strahlungsformel selbst und der aus derselben berechnete Wert des Elementarquantums, sondern auch der für  $\bar{E}$  quantentheoretisch berechnete Wert durch die späteren Untersuchungen über die spezifische Wärme. Es bestätigte sich somit auch die auf rein elektromagnetischem Wege gewonnene Gleichung 1). Unbefriedigend blieb es aber, daß die elektromagnetisch-mechanische Betrachtung, welche zu 1) führt, mit der Grundidee der Quantentheorie nicht vereinbar ist, und es ist nicht verwunderlich, wenn PLANCK selbst und alle Theoretiker, die sich mit der Materie befassen, unaufhörlich bemüht sind, die Theorie so umzugestalten, daß sie auf widerspruchsfreien Voraussetzungen beruht.

Seit die BOHRsche Theorie der Spektren ihre großen Erfolge erzielt hat, scheint es nicht zweifelhaft zu sein, daß die Grundidee der Quantentheorie festgehalten werden muß. Es scheint also die Einheitlichkeit der Theorie dadurch hergestellt werden zu müssen, daß die elektromagnetisch-mechanischen Betrachtungen, welche PLANCK zu der Gleichung 1) führten, durch quantentheoretische Betrachtungen über die Wechselwirkung von

Первая страница статьи А. Эйнштейна  
«Испускание и поглощение излучения по квантовой теории»

теории, по-видимому, должно быть установлено так, чтобы рассмотрение с помощью электродинамики и механики, приведшее Планка к соотношению (1), заменить квантово-теоретическими соображениями о взаимодействии между веществом и излучением. Стремясь к этому, я пришел к следующему выводу, который говорит сам за себя благодаря своей простоте и общности.

## § 1. Резонатор Планка в поле излучения

Поведение монохроматического резонатора в поле излучения в соответствии с классической теорией легко представить себе, пользуясь следующим методом рассуждений, впервые примененным в теории броуновского движения. Предположим, что  $E$  — мгновенное значение энергии резонатора; будем искать энергию по истечении некоторого времени  $\tau$ , большого по сравнению с периодом колебаний резонатора, но все же настолько малого, чтобы относительное изменение  $E$  за время  $\tau$  можно бы считать бесконечно малым. Можно различать два вида изменений энергии резонатора. Во-первых, изменение

$$\Delta_1 E = -A E \tau,$$

обусловленное спонтанным излучением; во-вторых, изменение  $\Delta_2 E$ , связанное с работой, совершаемой над резонатором электрическим полем. Это второе изменение возрастает с ростом плотности излучения, являясь «случайным» по величине и знаку. Рассуждение на основе электродинамики и статистики дает для среднего значения

$$\overline{\Delta_2 E} = B \rho \tau.$$

Постоянные  $A$  и  $B$  можно вычислить известным способом. Мы будем называть  $\Delta_1 E$  изменением энергии вследствие спонтанного излучения,  $\Delta_2 E$  — изменение энергии вследствие индуцированного излучения. Так как усредненное по большому числу резонаторов значение  $E$  не должно зависеть от времени, имеем

$$\overline{E + \Delta_1 E + \Delta_2 E} = \bar{E},$$

или

$$\bar{E} = \frac{B}{A} \rho.$$

Вычисляя для монохроматического резонатора  $A$  и  $B$  известным способом с помощью электродинамики и механики, в результате получаем соотношение (1).

Теперь мы проведем соответствующее рассмотрение на основе квантовой теории, не выдвигая специальных предположений о взаимодействующем с излучением объекте, который мы будем называть в дальнейшем «молекулой».

## § 2. Квантовая теория и излучение

Рассмотрим газ из одинаковых молекул, находящийся в статистическом равновесии с тепловым излучением. Пусть каждая молекула может находиться только в дискретных состояниях  $Z_1, Z_2$  и т. д. со значениями энергии  $\epsilon_1, \epsilon_2$  и т. д. Тогда известным способом, по аналогии со статистической механикой, или прямо из принципа Больцмана, или, наконец, из термодинамических соображений следует, что вероятность  $W_n$  состояния  $Z_n$  и, соответственно, относительное число молекул, находящихся в состоянии  $Z_n$ , составляет

$$W_n = p_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}}, \quad (2)$$

где  $k$  — известная постоянная Больцмана. Здесь  $p_n$  — статистический «вес» состояния  $Z_n$ , т. е. характерная для данного квантового состояния постоянная, не зависящая от температуры газа  $T$ .

Предположим теперь, что молекула может переходить из состояния  $Z_n$  в состояние  $Z_m$ , поглощая излучение определенной частоты  $\nu = \nu_{nm}$ , а из состояния  $Z_m$  в состояние  $Z_n$  — испуская излучение такой же частоты. Изменение энергии вследствие излучения при этом составит  $\epsilon_m - \epsilon_n$ . В общем случае это будет возможно для каждой комбинации двух индексов  $m$  и  $n$ . В тепловом равновесии относительно каждого из этих элементарных процессов должно существовать статистическое равновесие. Следовательно, мы можем ограничиться рассмотрением одного-единственного элементарного процесса, соответствующего одной определенной паре индексов  $(n, m)$ .

В тепловом равновесии при поглощении излучения из состояния  $Z_n$  в состояние  $Z_m$  будет переходить в единицу времени столько же молекул, сколько из состояния  $Z_m$  в состояние  $Z_n$  при испускании излучения. Для этих переходов установим простые гипотезы, причем будем руководствоваться предельным случаем классической теории, кратко охарактеризованным выше.

Также и здесь мы будем различать два типа переходов.

а) *Спонтанное излучение.* Это переход из состояния  $Z_m$  в состояние  $Z_n$  с испусканием излучения с энергией  $\epsilon_m - \epsilon_n$ . Этот переход происходит без внешних воздействий. Едва ли можно представить себе, что он анало-

гичен чему-либо другому, кроме радиоактивного распада. Число переходов в единицу времени положим равным

$$A_m^n N_m,$$

где  $A_m^n$  — некоторая постоянная, принадлежащая комбинации состояний  $Z_m$  и  $Z_n$ , и  $N_m$  — число молекул в состоянии  $Z_m$ .

б) *Индукцированное излучение.* Индуцированное излучение обусловлено излучением, в котором находится молекула; оно пропорционально плотности излучения  $\rho$  соответствующей частоты. В случае резонатора оно может вызывать с равным успехом как уменьшение, так и приращение энергии; поэтому в нашем случае оно может вызывать как переход  $Z_n \rightarrow Z_m$ , так и переход  $Z_m \rightarrow Z_n$ . Число переходов  $Z_n \rightarrow Z_m$  в единицу времени, таким образом, дается выражением

$$B_n^m N_n \rho,$$

а число переходов  $Z_m \rightarrow Z_n$  — выражением

$$B_m^n N_m \rho,$$

где постоянные  $B_n^m$ ,  $B_m^n$  относятся к комбинации состояний  $Z_n$  и  $Z_m$ .

В качестве условия статистического равновесия относительно переходов  $Z_n \rightarrow Z_m$  и  $Z_m \rightarrow Z_n$  получаем, таким образом, уравнение

$$A_m^n N_m + B_m^n N_m \rho = B_n^m N_n \rho. \quad (3)$$

С другой стороны, формула (2) дает

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{p_n}{p_m} e^{\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{kT}}. \quad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) получаем

$$A_m^n p_m = \rho (B_n^m p_n e^{\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{kT}} - B_m^n p_m). \quad (5)$$

Здесь  $\rho$  есть плотность излучения той частоты  $\nu$ , которое испускается или поглощается при переходах  $Z_n \rightarrow Z_m$  или  $Z_m \rightarrow Z_n$ . Для этой частоты наше уравнение дает связь между  $T$  и  $\rho$ . Предполагая, что  $\rho$  при увеличении  $T$  неограниченно растет, мы должны положить

$$B_n^m p_n = B_m^n p_m. \quad (6)$$

Полагая далее для краткости

$$\frac{A_m^n}{B_m^n} = \alpha_{mn}, \quad (7)$$

мы получаем

$$\rho = \frac{\alpha_{mn}}{e \frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{kT} - 1}. \quad (5a)$$

Это и есть соотношение Планка между  $\rho$  и  $T$  с неопределенными пока постоянными. Постоянные  $A_m^n$  и  $B_m^n$  можно было бы вычислить непосредственно, если бы в нашем распоряжении имелись электродинамика и механика, видоизмененные в смысле гипотезы квантов.

То обстоятельство, что  $\alpha_{mn}$  и  $\epsilon_m - \epsilon_n$  могут зависеть не от особого свойства молекулы, а только от соответствующей частоты  $\nu$ , вытекает из того, что плотность  $\rho$  должна быть универсальной функцией  $T$  и  $\nu$ . Далее, из закона смещения Вина следует, что величина  $\alpha_{mn}$  должна быть пропорциональна третьей, а  $\epsilon_m - \epsilon_n$  — первой степени  $\nu$ . В соответствии с этим имеем

$$\epsilon_m - \epsilon_n = h\nu, \quad (8)$$

где  $h$  означает постоянную.

Конечно, я охотно признаю, что три гипотезы, касающиеся спонтанного и индуцированного излучения, вовсе не становятся достоверными результатами оттого, что они ведут к формуле излучения Планка. Однако простота гипотез, общность и непринужденность рассмотрения, а также естественный переход к предельному случаю линейного осциллятора Планка (в смысле классической электродинамики и механики) позволяют мне считать весьма вероятным, что это рассмотрение станет основой будущих теоретических представлений. В пользу этой теории говорит также то, что принятый для спонтанного излучения статистический закон есть не что иное, как закон Резерфорда для радиоактивного распада, и что результат, выражаемый формулами (8) и (5a), тождествен второму постулату теории спектров Бора.

### § 3. Замечание к закону фотохимического эквивалента

Закон фотохимического эквивалента согласуется с нашим выводом следующим образом. Возьмем газ с такой низкой температурой, что тепловое излучение с частотой  $\nu$ , дающее переходы из состояния  $Z_m$  в состояние  $Z_n$ , практически отсутствует.

В соответствии с формулами (2) и (5a) состояние  $Z_m$  будет очень редким по сравнению с состоянием  $Z_n$ , и мы будем предполагать, что вообще почти все молекулы газа находятся в состоянии  $Z_n$ . Пусть теперь кроме рассмотренного нами перехода  $Z_m \rightarrow Z_n$  молекула может подвергаться еще «химическому» элементарному процессу, например, мономолекулярному рас-

паду. Далее предположим, что скорость этого распада велика по сравнению со скоростью (частотой) перехода  $Z_m \rightarrow Z_n$ .

Что будет происходить, если газ облучать излучением соответствующей частоты? Поглощая энергию излучения  $\epsilon_m - \epsilon_n = h\nu$ , молекулы постоянно будут переходить из состояния  $Z_n$  в состояние  $Z_m$ . Только самая незначительная часть этих молекул будет возвращаться в состояние  $Z_n$  благодаря спонтанному или индуцированному излучению. Намного больше таких молекул будет испытывать химический распад, в соответствии с предположением о большей скорости этого процесса. Тогда на одну распадающуюся молекулу практически будет поглощаться энергия излучения  $h\nu$ , как требует закон фотохимического эквивалента.

Существенно при этом, что поглощение света ведет к распаду молекулы не прямо, а через квантовое состояние  $Z_m$ . В соответствии с этим невозможно различить химически активное поглощение излучения от химически неактивного. Поглощение света и химический процесс являются самостоятельными процессами.

Поступила 17 июля 1916 г.

В этой работе высказаны идеи, которые впоследствии привели к возникновению и развитию электроники. В ней впервые были введены коэффициенты Эйнштейна  $A$  и  $B$ .

## К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ \*

Формальное сходство кривой распределения по длинам волн теплового излучения с законом распределения скоростей Максвелла слишком поразительно, чтобы оно могло долго оставаться нераскрытым. Действительно, уже В. Вин в важной теоретической работе, в которой он вывел свой закон смещения

$$\rho = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right), \quad (1)$$

пришел благодаря этому сходству к такому определению формулы излучения, которое сыграло в дальнейшем большую роль. Как известно, он вывел при этом следующую формулу:

$$\rho = \alpha \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \quad (2)$$

которая и сегодня считается правильной в качестве предельного закона для больших значений  $\nu/T$  (формула излучения Вина). Сегодня мы знаем, что никакое рассмотрение, основанное на классической механике и электродинамике, не может привести к правильной формуле излучения и что классическая теория обязательно дает формулу Рэлея

$$\rho = \frac{k\alpha}{h} \nu^2 T. \quad (3)$$

Когда Планк в предположении о дискретных элементах энергии вывел в своем основополагающем исследовании формулу излучения

$$\rho = \alpha \nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (4)$$

\* *Zur Quantentheorie der Strahlung*. Mitt. Phys. Ges. (Zürich), 1916, Nr. 18, 47—62.  
Работа была опубликована также в «Physikalische Zeitschrift» (1917, 18, 121).



из которой как быстрое следствие развилась квантовая теория, рассуждение Вина, которое привело к уравнению (2), естественно, было забыто.

Недавно я нашел применение первоначальному рассмотрению Вина<sup>1</sup>, основанному на главных положениях квантовой теории, к выводу формулы излучения Планка, в котором проявляется связь между максвелловской кривой и кривой распределения по длинам волн. Этот вывод заслуживает внимания не только благодаря своей простоте, но и в особенности потому, что он вносит некоторую ясность в непонятный нам еще процесс испускания и поглощения излучения веществом. Положив в основу некоторые гипотезы об испускании и поглощении излучения молекулами, понятные с точки зрения квантовой теории, я показал, что при температурном равновесии молекулы с состояниями, распределенными в смысле квантовой теории, находятся в динамическом равновесии с излучением Планка; таким путем формула Планка (4) получается поразительно простым и общим способом. Она получается из условия, что требуемое квантовой теорией распределение состояний внутренней энергии молекул должно определяться только поглощением и испусканием излучения.

Однако если принятые гипотезы о взаимодействии излучения и вещества верны, они должны давать больше, чем правильное статистическое распределение *внутренней* энергии молекул. При поглощении и испускании излучения имеет место также передача молекулам *импульса*; это приводит к тому, что благодаря одному лишь взаимодействию излучения с молекулами устанавливается определенное распределение последних по скоростям. Очевидно, оно должно быть таким же, как распределение по скоростям молекул, вытекающее из предположения, что молекулы взаимодействуют только путем взаимных столкновений, т. е. оно должно совпадать с распределением Максвелла. Необходимо потребовать, чтобы средняя кинетическая энергия (на одну степень свободы), которой обладает молекула в поле излучения Планка с температурой  $T$ , была равна  $kT/2$ ; это условие должно выполняться независимо от природы рассматриваемых молекул и от частот излучений, которые они поглощают и испускают. В настоящей статье мы покажем, что в целом это важное требование действительно выполняется; тем самым наши простые гипотезы об элементарных процессах испускания и поглощения получают новую поддержку.

Однако для того, чтобы получить упомянутый результат, требуется некоторое дополнение принятых ранее за основу гипотез, которые относятся исключительно к обмену э н е р г и е й. Возникает вопрос: испыты-

.....  
<sup>1</sup> A. E i n s t e i n. Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 18, 318 (1916) (Статья 43). В настоящем исследовании повторяются рассуждения, приведенные в только что процитированной статье.

вает ли молекула отдачу при поглощении или испускании энергии  $\epsilon$ ? Рассмотрим с точки зрения классической электродинамики, например, спонтанное излучение. Когда тело излучает энергию  $\epsilon$ , оно испытывает отдачу (импульс)  $\epsilon/c$ , если все количество излучения  $\epsilon$  испускается в одном направлении. Но если излучение является пространственно-симметричным процессом, например сферическими волнами, то вообще нет никакой отдачи. Эта возможность играет роль также и в квантовой теории излучения. Если молекула при переходе из одного возможного с точки зрения квантовой теории состояния в другое получает или отдает энергию  $\epsilon$  в виде излучения, то элементарный процесс такого рода можно представить себе либо частично или полностью пространственно-направленным, либо симметричным (ненаправленным). *Оказывается, что к непротиворечивой теории мы придем только в том случае, если все элементарные процессы будем считать полностью направленными.* В этом состоит основной результат последующих рассуждений.

## § 1. Основные гипотезы квантовой теории. Каноническое распределение состояний

Согласно квантовой теории молекула определенного рода, если отвлечься от ее ориентации и поступательного движения, может занимать лишь дискретный набор состояний  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  с внутренними энергиями  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ . Если молекулы такого рода принадлежат газу с температурой  $T$ , то относительная частота  $W_n$  этого состояния  $Z_n$  дается формулой статистической механики, которая соответствует каноническому распределению состояний:

$$W_n = p_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}}. \quad (5)$$

В этой формуле  $k = \frac{R}{N}$  — известная постоянная Больцмана,  $p_n$  — не зависящее от температуры число, характеризующее молекулу и  $n$ -е квантовое состояние; оно может быть названо статистическим «весом» этого состояния. Формулу (5) можно вывести из принципа Больцмана или чисто термодинамическим способом. Равенство (5) является выражением наиболее широкого обобщения максвелловского закона распределения скоростей.

Последние принципиальные успехи квантовой теории относятся к теоретическому отысканию возможных с точки зрения квантовой теории состояний  $Z_n$  и их весов  $p_n$ . Для настоящего принципиального исследования не требуется более детального определения квантовых состояний.

## § 2. Гипотезы об обмене энергией посредством излучения

Пусть  $Z_n$  и  $Z_m$  есть два возможных в смысле квантовой теории состояния молекулы газа, энергии которых  $\varepsilon_n$  и  $\varepsilon_m$  удовлетворяют неравенству

$$\varepsilon_m > \varepsilon_n.$$

Молекула может переходить из состояния  $Z_n$  в состояние  $Z_m$  с поглощением энергии  $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ ; точно так же возможен переход из состояния  $Z_m$  в состояние  $Z_n$  с выделением энергии в виде излучения. Излучение, которое молекула при этом поглощает или испускает, будет иметь характеристическую частоту  $\nu$ , зависящую от рассматриваемой комбинации индексов ( $m, n$ ).

Помимо законов, которые управляют этими переходами, введем некоторые гипотезы, которые получаются посредством переноса соотношений, известных из классической теории для резонатора Планка, в неизвестную еще квантовую теорию.

а) *Спонтанное излучение.* Как известно, согласно Герцу, колеблющийся резонатор Планка излучает энергию независимо от того, возбуждается ли он внешним полем или нет. В соответствии с этим при отсутствии возбуждения внешними факторами молекула может переходить из состояния  $Z_m$  в состояние  $Z_n$  с испусканием энергии излучения  $\varepsilon_m - \varepsilon_n$  с частотой  $\nu$ . Вероятность  $dW$  того, что этот переход действительно произойдет в течение времени  $dt$ , равна

$$dW = A_m^n dt, \tag{A}$$

где  $A_m^n$  означает характеристическую константу для рассматриваемой комбинации индексов.

Принятый статистический закон соответствует радиоактивной реакции, воображаемому элементарному процессу такой реакции, при котором излучаются только  $\gamma$ -лучи. Нет необходимости допускать, что этот процесс не требует времени; это время должно быть лишь пренебрежимо мало по сравнению с тем временем, в течение которого молекула находится в состоянии  $Z_1$ , и т. д.

б) *Индукированное излучение.* Если резонатор Планка находится в поле излучения, то энергия резонатора изменяется благодаря тому, что электромагнитное поле излучения совершает над резонатором работу; эта работа может быть положительной или отрицательной, в зависимости от соотношения фаз резонатора и осциллирующего поля. В соответствии с этим мы введем следующую квантотеоретическую гипотезу. Под действием плотности излучения  $\rho$  с частотой  $\nu$  молекула может переходить из

состояния  $Z_n$  в состояние  $Z_m$ ; при этом молекула принимает энергию излучения  $\epsilon_m - \epsilon_n$  согласно вероятностному закону

$$dW = B_n^n \rho dt. \quad (B)$$

Точно так же допустим, что под действием облучения возможен переход  $Z_m \rightarrow Z_n$ , при котором освобождается энергия излучения  $\epsilon_m - \epsilon_n$ , по вероятностному закону

$$dW = B_m^n \rho dt. \quad (B')$$

В последних равенствах  $B_n^m$  и  $B_m^n$  являются постоянными. Оба процесса мы назовем «изменением состояния под действием излучения».

Спрашивается теперь, какой импульс передается молекуле при рассматриваемом изменении состояния. Начнем с процессов индуцированного излучения. Если пучок лучей определенного направления совершает работу над резонатором Планка, этот пучок теряет соответствующую энергию. Этому переносу энергии, согласно выражению для импульса, соответствует также перенос импульса от пучка лучей к резонатору. Таким образом, последний испытывает действие сил в направлении пучка лучей. Если передаваемая энергия отрицательна, то и действие сил на резонатор имеет соответствующее направление. Очевидно, в случае квантовой гипотезы это означает следующее. Если в результате облучения пучком лучей произойдет процесс  $Z_n \rightarrow Z_m$ , то молекула получит импульс  $(\epsilon_m - \epsilon_n)/c$  в направлении распространения пучка. В результате процесса индуцированного излучения  $Z_m \rightarrow Z_n$  передаваемый импульс имеет такую же величину, но противоположное направление. В случае, когда молекула подвержена одновременному действию нескольких пучков лучей, мы предположим, что полная энергия  $\epsilon_m - \epsilon_n$  элементарного процесса отнимается или прибавляется к о д н о м у из этих пучков, так что и в этом случае молекуле также передается импульс  $(\epsilon_m - \epsilon_n)/c$ .

При потере энергии в результате спонтанного излучения в случае резонатора Планка последний в целом не получает никакого импульса, так как, согласно классической теории, спонтанное излучение имеет вид сферической волны. Однако уже отмечалось, что мы можем прийти к непротиворечивой квантовой теории лишь в том случае, если мы предположим, что процесс спонтанного излучения также является направленным. Тогда в каждом элементарном процессе спонтанного излучения ( $Z_m \rightarrow Z_n$ ) молекуле передается импульс, величина которого равна  $(\epsilon_m - \epsilon_n)/c$ . Если молекула изотропна, то мы должны считать равновероятными все направления спонтанного излучения. В случае неизотропной молекулы мы приходим к такому же утверждению, если ее ориентация меняется с течением времени по законам случая. Впрочем, такого рода предположение нужно принять также и для статистических законов индуцированного излучения (B)

и ( $B'$ ), ибо в противном случае константы  $B_n^m$  и  $B_m^n$  должны были бы зависеть от направления; мы можем избежать этого, приняв изотропность или псевдоизотропность (посредством образования среднего по времени) молекулы.

### § 3. Вывод планковского закона излучения

Найдем теперь ту эффективную плотность излучения  $\rho$ , которая должна существовать для того, чтобы энергетический обмен между излучением и молекулами, осуществляемый по статистическим законам (А), (В) и (В'), не нарушал распределения состояний молекул, которое отвечает распределению (5). Для этого необходимо и достаточно, чтобы за единицу времени в среднем происходило столько же элементарных процессов типа (В), сколько и типа (А) и (В') вместе взятых. В силу (5), (А), (В), (В') это условие дает для элементарных процессов, соответствующих комбинации индексов ( $m, n$ ), уравнение

$$p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} B_n^m \rho = p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} (B_m^n \rho + A_m^n).$$

Примем, далее, что с ростом  $T$  величина  $\rho$  должна стремиться к бесконечности; в таком случае между константами  $B_n^m$  и  $B_m^n$  должно существовать соотношение

$$p_n B_n^m = p_m B_m^n. \quad (6)$$

Тогда в качестве условия динамического равновесия получим из нашего уравнения

$$\rho = \frac{A_m^n / B_m^n}{e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}} - 1}. \quad (7)$$

Это выражение представляет собой зависимость плотности излучения от температуры, согласно закону Планка. Из закона смещения Вина (1) немедленно следует, что

$$\frac{A_m^n}{B_m^n} = \alpha \nu^3 \quad (8)$$

и

$$\varepsilon_m - \varepsilon_n = h\nu, \quad (9)$$

где  $\alpha$  и  $h$  являются универсальными постоянными. Для того чтобы получить численное значение постоянной  $\alpha$ , нужно иметь точную теорию элек-

тродинамических и механических процессов; здесь мы вынуждены пока что ограничиваться рассмотрением предельного рэлеевского случая высоких температур, для которых справедлива в пределе классическая теория.

Соотношение (9) образует, как известно, второе основное правило в теории спектров Бора, о котором после усовершенствования Зоммерфельда и Эпштейна можно уже утверждать, что оно принадлежит к незабываемым основам нашей науки. Как я показал, оно включает также и закон фотохимического эквивалента.

#### § 4. Метод расчета движения молекул в поле излучения

Обратимся теперь к исследованию движений, которые совершают наши молекулы под влиянием излучения. Мы воспользуемся при этом методом, который хорошо известен из теории броуновского движения и неоднократно использовался мною в числовых расчетах движений в пространстве с излучением. Для упрощения расчета мы проведем его лишь для случая движений в одном направлении, в направлении оси  $X$  системы координат. Кроме того, мы ограничимся расчетом среднего значения кинетической энергии поступательного движения, отказавшись, таким образом, от доказательства того, что эти скорости  $v$  распределены по закону Максвелла. Пусть масса  $M$  молекулы достаточно велика, чтобы можно было пренебречь высшими степенями  $v/c$  по сравнению с более низкими; тогда мы можем применить к молекуле обычную механику. Далее, не нарушая общности, мы можем считать, что состояния с индексами  $m$  и  $n$  являются единственными, в которых могут находиться молекулы.

Импульс  $Mv$  молекулы испытывает за короткое время  $\tau$  изменения двух видов. Несмотря на то, что излучение происходит равномерно по всем направлениям, молекула в результате своего движения будет испытывать действие силы, которое вызвано излучением и противодействует движению. Эта сила равна  $Rv$ , где  $R$  означает некоторую константу, которая будет вычислена позже. Эта сила заставила бы молекулу покоиться, если бы беспорядочный характер действия излучения не привел к тому, что за время  $\tau$  молекула получит импульс  $\Delta$  переменного знака и переменной величины; это несистематическое влияние, вопреки сказанному ранее, вызовет определенное движение молекулы. В конце рассматриваемого короткого промежутка времени  $\tau$  импульс молекулы будет иметь значение

$$Mv - Rv\tau + \Delta.$$

Поскольку распределение скоростей должно оставаться постоянным во времени, приведенная величина по своему среднему абсолютному значе-

нию должна быть равна величине  $Mv$ ; средние квадратичные значения обеих величин, взятые за большой промежуток времени или по большому числу молекул, должны быть равны друг другу:

$$\overline{(Mv - Rv\tau + \Delta)^2} = \overline{(Mv)^2}.$$

Поскольку в расчете мы специально выявили систематическое влияние  $v$  на импульс молекулы, мы пренебрежем средним значением  $v\Delta$ . Поэтому, раскрывая левую часть уравнения, получаем

$$\overline{\Delta^2} = 2RM\overline{v^2}\tau. \quad (10)$$

Среднее значение  $\overline{v^2}$ , к которому приводит взаимодействие излучения, имеющего температуру  $T$ , с нашими молекулами, должно быть равно среднему значению  $v^2$ , которое имеет молекула газа при температуре  $T$ , согласно газовым законам кинетической теории газа, ибо в противном случае присутствие нашей молекулы нарушало бы равновесие между тепловым излучением и любым газом с такой же температурой. Следовательно, должно быть

$$\frac{\overline{Mv^2}}{2} = \frac{kT}{2}. \quad (11)$$

Таким образом, соотношение (10) может быть записано в виде:

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = 2RkT. \quad (12)$$

Дальнейшее исследование будет построено следующим образом. С помощью наших гипотез о взаимодействии между излучением и молекулами можно рассчитать  $\overline{\Delta^2}$  и  $R$  для заданного излучения  $[\rho(\nu)]$ . Если затем выразить  $\rho$  как функцию от  $\nu$  и  $T$  в соответствии с формулой Планка (4) и подставить полученный результат в (12), то последнее соотношение должно выполняться тождественно.

## § 5. Вычисление $R$

Пусть молекула рассматриваемого рода равномерно движется со скоростью  $v$  вдоль оси  $X$  системы координат  $K$ . Найдем среднее значение импульса, передаваемого излучением молекуле в единицу времени. Чтобы вычислить его, мы должны описывать излучение в системе координат  $K'$ , которая покоится относительно рассматриваемой молекулы. Ведь наши гипотезы об испускании и поглощении мы сформулировали лишь для покоящейся молекулы. Преобразование к системе  $K'$  много раз приводит-

лось в литературе, особенно точно в берлинской диссертации Мозенгейля. Полноты ради я все же повторю здесь простые рассуждения.

В системе  $K$  излучение изотропно, т. е. определенному бесконечно малому телесному углу  $d\kappa$ , относящемуся к этому направлению излучения, соответствует излучение в области частот  $d\nu$  на единицу объема:

$$\rho d\nu \frac{d\kappa}{4\pi}, \quad (13)$$

где  $\rho$  зависит только от частоты  $\nu$ , но не от направления. Этому приведенному излучению соответствует в системе координат  $K'$  приведенное излучение, которое также характеризуется областью частот  $d\nu'$  и определенным телесным углом  $d\kappa'$ . Объемная плотность этого приведенного излучения равна

$$\rho'(\nu', \varphi') d\nu' \frac{d\kappa'}{4\pi}. \quad (13')$$

Тем самым определено  $\rho'$ . Оно зависит от направления, определяемого известным образом через угол  $\varphi'$  с осью  $X'$  и угол  $\psi'$  проекции на плоскость  $Y' - Z'$  с осью  $Y'$ . Этим углам соответствуют углы  $\varphi$  и  $\psi$ , которые аналогичным образом определяют направление  $d\kappa$  по отношению к  $K$ .

Прежде всего ясно, что между выражениями (13) и (13') должен существовать тот же самый закон преобразования, что и для квадратов амплитуд  $A^2$  и  $A'^2$  некоторой плоской волны соответствующего направления. Следовательно, в выбранном нами приближении

$$\frac{\rho'(\nu', \varphi') d\nu' d\kappa'}{\rho(\nu) d\nu d\kappa} = 1 - 2 \frac{\nu}{c} \cos \varphi, \quad (14)$$

или

$$\rho'(\nu', \varphi') = \rho(\nu) \frac{d\nu}{d\nu'} \frac{d\kappa}{d\kappa'} \left( 1 - 2 \frac{\nu}{c} \cos \varphi \right). \quad (14')$$

Далее, теория относительности дает в выбранном приближении обычные формулы

$$\nu' = \nu \left( 1 - \frac{\nu}{c} \cos \varphi \right); \quad (15)$$

$$\cos \varphi' = \cos \varphi - \frac{\nu}{c} + \frac{\nu}{c} \cos^2 \varphi, \quad (16)$$

$$\psi' = \psi. \quad (17)$$

Из (15) в соответствующем приближении следует

$$\nu = \nu' \left( 1 + \frac{\nu}{c} \cos \varphi' \right).$$



Следовательно, в выбранном приближении имеем также

$$\rho(v) = \rho\left(v' + \frac{v}{c} v' \cos \varphi'\right),$$

или

$$\rho(v) = \rho(v') + \frac{\partial \rho}{\partial v}(v') \frac{v}{c} v' \cos \varphi'. \quad (18)$$

Далее, согласно соотношениям (15), (16) и (17),

$$\frac{dv}{dv'} = 1 + \frac{v}{c} \cos \varphi',$$

$$\frac{d\kappa}{d\kappa'} = \frac{\sin \varphi \, d\varphi \, d\psi}{\sin \varphi' \, d\varphi' \, d\psi} = \frac{d(\cos \varphi)}{d(\cos \varphi')} = 1 - 2 \frac{v}{c} \cos \varphi'.$$

В силу этих двух соотношений и соотношения (18) равенство (14') переходит в следующее:

$$\rho'(v', \varphi') = \left[ (\rho)_{v'} + \frac{v}{c} v' \cos \varphi' \left( \frac{\partial \rho}{\partial v} \right)_{v'} \right] \left( 1 - 3 \frac{v}{c} \cos \varphi' \right). \quad (19)$$

С помощью (19), а также наших гипотез о спонтанном и индуцированном излучениях молекулы, мы можем легко рассчитать среднее значение импульса, передаваемого молекуле в единицу времени. Однако, прежде чем это сделать, мы должны сказать несколько слов в оправдание выбранного способа рассмотрения. Можно возразить, что соотношения (14), (15), (16) основаны на теории Максвелла, которая несовместима с квантовой теорией. Однако это возражение относится больше к форме, чем к существу предмета. В самом деле, какую бы форму ни принимала теория электромагнитных процессов, принцип Допплера и закон аберрации во всяком случае сохраняются, а следовательно, сохраняются и соотношения (15) и (16). Далее, область применимости энергетического соотношения (14) шире области применимости волновой теории; например, согласно теории относительности, этот закон преобразования справедлив также и для плотности энергии массы с бесконечно малой плотностью покоя, движущейся с (квази)световой скоростью. Следовательно, соотношение (19) может претендовать на справедливость в случае любой теории излучения.

Согласно (B), излучение, соответствующее телесному углу  $d\kappa'$ , должно было бы давать в секунду

$$B_n^m \rho'(v', \varphi') \frac{d\kappa'}{4\pi}$$

элементарных процессов индуцированного излучения типа  $Z_n \rightarrow Z_m$ , если бы молекула после каждого такого элементарного процесса тотчас возвращалась обратно в состояние  $Z_n$ . Однако в действительности время

пребывания ее в состоянии  $Z_n$  за секунду, согласно (5), равно

$$\frac{1}{S} p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}},$$

где для краткости мы положили

$$S = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} + p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}. \quad (20)$$

Следовательно, в действительности число таких процессов в секунду составляет

$$\frac{1}{S} p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} B_n^m \rho'(\nu', \varphi') \frac{d\nu'}{4\pi}.$$

При каждом элементарном процессе такого рода атом будет получать в положительном направлении оси  $X$  импульс

$$\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c} \cos \varphi'.$$

Аналогичным образом найдем, исходя из (B), что соответствующее число элементарных процессов индуцированного излучения типа  $Z_m \rightarrow Z_n$  в секунду равно

$$\frac{1}{S} p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} B_m^n \rho'(\nu', \varphi') \frac{d\nu'}{4\pi}$$

и при каждом таком элементарном процессе молекуле передается импульс

$$- \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c} \cos \varphi'.$$

С учетом соотношений (6) и (9) общий импульс, передаваемый молекуле при индуцированном излучении в единицу времени, равен

$$\frac{h\nu'}{cS} p_n B_n^m \left( e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} - e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} \right) \int \rho'(\nu', \varphi') \cos \varphi \frac{d\nu'}{4\pi},$$

где интегрирование проводится по всему телесному углу. Интегрирование с учетом соотношения (19) дает

$$- \frac{h\nu'}{c^2 S} \left( \rho - \frac{1}{3} v \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) p_n B_n^m \left( e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} - e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} \right) v.$$

При этом эффективная частота снова обозначена через  $\nu$  (вместо  $\nu'$ ).

Это выражение, однако, представляет средний импульс, передаваемый в единицу времени молекуле, движущейся со скоростью  $v$ . В самом деле, ясно, что элементарные процессы спонтанного излучения, происходящие

без воздействия внешнего излучения, рассматриваемые в системе  $K'$ , не обладают преимущественным направлением и, следовательно, в среднем не могут передать молекуле никакого импульса. Поэтому в качестве конечного результата нашего рассмотрения мы получим

$$R = \frac{h\nu}{c^2 S} \left( \rho - \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right) P_n B_n^m e^{-\frac{z_n}{kT}} \left( 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right). \quad (21)$$

## § 6. Вычисление $\overline{\Delta^2}$

Намного проще рассчитать влияние нерегулярности элементарных процессов на механическое поведение молекул. Ибо в основу этого расчета можно положить покоящуюся молекулу в приближении, которым мы довольствовались с самого начала.

Пусть какое-то событие приводит к тому, что молекула получает импульс  $\lambda$  в направлении оси  $X$ . Этот импульс в различных случаях имеет различные знаки и разные величины. Однако для  $\lambda$  справедлив такой статистический закон, что среднее значение  $\lambda$  исчезает. Пусть теперь  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  есть значения импульса, которые передаются молекуле в направлении оси  $X$  несколькими действующими независимо друг от друга факторами, так что общий передаваемый импульс  $\Delta$  дается выражением

$$\Delta = \sum \lambda_v.$$

Тогда, если для отдельных  $\lambda_v$  среднее значение  $\bar{\lambda}_v$  исчезает, то

$$\overline{\Delta^2} = \sum \overline{\lambda_v^2}. \quad (22)$$

Если средние значения отдельных импульсов равны друг другу ( $= \bar{\lambda}^2$ ), а  $l$  есть общее число событий, в которых передается импульс, то справедливо следующее соотношение:

$$\overline{\Delta^2} = l \bar{\lambda}^2. \quad (22a)$$

Согласно нашим гипотезам, при каждом процессе спонтанного и индуцированного излучения молекуле передается импульс

$$\lambda = \frac{h\nu}{c} \cos \varphi.$$

При этом  $\varphi$  означает угол между осью  $X$  и некоторым произвольно выбранным направлением. Отсюда получим

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{h\nu}{c} \right)^2. \quad (23)$$

Поскольку мы принимаем, что происходящие процессы вызываются независимыми друг от друга событиями, мы можем применить (22а). Тогда  $l$  есть общее число элементарных процессов, происходящих в единицу времени. Оно вдвое больше числа процессов индуцированного излучения  $Z_n \rightarrow Z_m$  за время  $\tau$ . Таким образом,

$$l = \frac{2}{S} p_n B_n^m e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} \rho \tau. \quad (24)$$

Из равенств (23), (24) и (22) получим

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = \frac{2}{3S} \left( \frac{h\nu}{c} \right)^2 p_n B_n^m e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} \rho. \quad (25)$$

### § 7. Выводы

Чтобы показать теперь, что, согласно нашим основным гипотезам, получаемый молекулами от излучения импульс никогда не нарушает равновесия, нужно лишь подставить в (25) и (21) вместо  $\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau}$  и  $R$  вычисленные значения, после чего в выражении (21) для  $K$  величину

$$\left( \rho - \frac{1}{3} v \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) \left( 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)$$

заменить, согласно (4), на  $\rho h\nu/3kT$ . Тогда сразу видно, что наше фундаментальное соотношение (12) тождественно выполняется.

В результате изложенных соображений мы получили хорошее подтверждение принятым в § 2 гипотезам о взаимодействии между веществом и излучением через процессы поглощения и испускания, соответственно через спонтанное и индуцированное излучения. К этим гипотезам меня привело стремление постулировать такое простейшее квантовотеретическое поведение молекул, которое заменило бы резонатор Планка в классической теории. Из общей квантовой гипотезы для вещества легко следует второе правило Бора [соотношение (9)], а также формула излучения Планка.

Однако самым важным, на мой взгляд, является вывод, касающийся импульса, который передается молекуле при спонтанном и индуцированном излучениях. Если бы одно из наших предположений об импульсах изменилось, следствием этого явилось бы нарушение соотношения (12); едва ли возможно без принятых нами гипотез обеспечить согласие с этим соотношением, требуемым теорией теплоты. Поэтому мы можем считать ниже следующее достаточно надежно доказанным.

Если пучок лучей воздействует на встретившуюся ему молекулу так, что она посредством элементарного процесса получает или отдает в форме излучения некоторое количество энергии  $h\nu$  (индуцированное излучение), то молекула всегда будет получать и импульс  $h\nu/c$  при поглощении энергии — в направлении движения пучка, а при испускании — в противоположном направлении. Если молекула находится под воздействием нескольких направленных пучков лучей, то в элементарном процессе индуцированного излучения принимает участие только один из них; тогда только этот пучок определяет направление получаемого молекулой импульса.

Если молекула теряет энергию без внешнего возбуждения (спонтанное излучение), то этот процесс также является *направленным*. Спонтанного излучения в виде сферических волн не существует. В элементарном процессе спонтанного излучения молекула получает импульс отдачи, величина которого равна  $h\nu/c$ , а направление определяется, согласно современному состоянию теории, лишь «случайностью».

Эти свойства элементарного процесса, требуемые соотношением (12), делают почти неизбежным создание подлинно квантовой теории излучения. Слабость теории заключается, с одной стороны, в том, что она не приводит нас к более тесному объединению с волновой теорией, и, с другой стороны, в том, что время и направление элементарного процесса предоставляются «случаю»; впрочем, я полностью уверен в надежности выбранного метода.

Необходимо привести здесь еще одно общее замечание. Почти все теории теплового излучения основываются на рассмотрении взаимодействия между излучением и молекулами. Однако в общем ограничиваются рассмотрением обмена *энергией*, не учитывая обмена *импульсом*. Это легко оправдывается, ибо малая величина передаваемых излучением импульсов приводит к тому, что в действительности последние почти всегда отступают перед другими факторами, вызывающими движение. Но в *теоретическом* рассмотрении такие малые действия нужно считать равнозначными наряду с бросающимися в глаза переносом энергии посредством излучения, поскольку энергия и импульс непосредственно связаны друг с другом; поэтому теорию можно считать правильной лишь в том случае, если показано, что импульсы, переносимые, согласно этой теории, от излучения к веществу, приводят к таким движениям, которые требует теория тепла.

## К КВАНТОВОМУ УСЛОВИЮ ЗОММЕРФЕЛЬДА И ЭПШТЕЙНА\*

§ 1. *Существующая формулировка.* Теперь вряд ли можно сомневаться в том, что для периодической механической системы с одной степенью свободы выполняется квантовое условие (Зоммерфельда и Дебая):

$$\int p dq = \int p \frac{dq}{dt} dt = nh. \quad (1)$$

При этом интеграл берется по целому периоду движения;  $q$  означает координату,  $p$  — сопряженный ей импульс системы. Кроме того, работы Зоммерфельда по теории спектров бесспорно доказывают, что для систем с несколькими степенями свободы вместо этого *одного* квантового условия должно выступать несколько квантовых условий, в общем случае столько ( $l$ ), сколько степеней свободы имеет система. По Зоммерфельду, эти  $l$  условий должны иметь вид

$$\int p_i dq_i = n_i h. \quad (2)$$

Так как эта формулировка зависит от выбора координат, она может выполняться только при определенном их выборе. Только при условии, что этот выбор правилен и что  $q_i$  — периодические функции времени, система (2) будет содержать определенные высказывания о движении.

Дальнейшим принципиальным прогрессом мы обязаны Эпштейну (и Шварцшильду). Первый основывает свое правило для выбора зоммерфельдовых координат  $q_i$  на теореме Якоби, которая, как известно, состоит в следующем. Допустим, что  $H$  ( $H[q_i, p_i, t]$ ) есть функция Гамильтона, завися-

\* *Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein.* Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 1917, 19, 82—92 (Доложено на заседании Немецкого физического общества 11 мая 1917 г.).

щая от  $q_i$ ,  $p_i$  и  $t$ , которая входит в канонические уравнения

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (3)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (4)$$

Если эта функция не содержит времени  $t$  явно, она тождественна энергии<sup>1</sup>. Если  $J(t, q_1, \dots, q_l, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$  — полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби в частных производных

$$\frac{\partial J}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial J}{\partial q_i}\right) = 0, \quad (5)$$

то решение канонических уравнений имеет вид

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (6)$$

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = p_i. \quad (7)$$

Если  $H$  не содержит времени явно, что мы будем предполагать в дальнейшем, то уравнению (5) можно удовлетворить подстановкой

$$J = J^* - ht, \quad (8)$$

где  $h$  — постоянная и  $J^*$  уже не зависит от времени явно. Тогда вместо (5), (6) и (7) будут выполняться уравнения

$$H\left(q_i, \frac{\partial J^*}{\partial q_i}\right) = h, \quad (5a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J^*}{\partial \alpha_i} &= \beta_i, \\ \frac{\partial J^*}{\partial h} &= t - t_0, \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial q_i} = p_i, \quad (7a)$$

<sup>1</sup> Действительно, в этом случае имеем

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0.$$

причем только первое из уравнений (6а) содержит больше чем  $l - 1$  уравнений, в которых вместо  $a_n$  подставляется постоянная  $h$ , а вместо  $\beta_n$  — постоянная —  $t_0$ .

Но, по Эпштейну, координаты  $q_i$  надо выбирать так, чтобы существовал полный интеграл уравнения (5а) вида

$$J^* = \sum_i J_i(q_i), \quad (8а)$$

где  $J_i$  зависит только от  $q_i$  и не зависит от остальных  $q$ . Тогда квантовые условия Зоммерфельда (2) должны выполняться для этих координат  $q_i$ , если  $q_i$  будут периодическими функциями  $t$ .

При всех больших успехах, достигнутых благодаря предложенному Зоммерфельдом и Эпштейном обобщению квантовых условий для систем с несколькими степенями свободы, оно все же имеет тот недостаток, что нам приходится прибегать к разделению переменных в соответствии с равенством (8), ни в коей мере не связанному собственно с квантовой проблемой. Ниже предлагается небольшое видоизменение условия Зоммерфельда — Эпштейна, устраняющее этот недостаток. Я кратко изложу здесь основные идеи, а затем рассмотрю их более подробно.

§ 2. *Изменная формулировка.* В то время как  $pdq$  для систем с одной степенью свободы является инвариантом, т. е. не зависит от выбора координаты  $q$ , отдельные произведения  $p_i dq_i$  для системы с несколькими степенями свободы уже не будут инвариантами; поэтому квантовое условие (2) не имеет инвариантного характера. Инвариантом является только распространенная на все  $l$  степеней свободы сумма  $\sum_i p_i dq_i$ . Чтобы получить из

этой суммы совокупность инвариантных квантовых условий, можно поступать следующим образом. Рассмотрим  $p_i$  как функции  $q_i$ . На геометрическом языке тогда можно рассматривать  $p_i$  как вектор («ковариантный») в  $l$ -мерном пространстве координат  $q_i$ . Если мы проведем в пространстве  $q_i$  какую-нибудь замкнутую кривую, совсем не обязательно изображающую «траекторию» механической системы, то интеграл по этой кривой

$$\int \sum_i p_i dq_i \quad (9)$$

будет инвариантом. Если  $p_i$  являются некоторыми функциями  $q_i$ , то каждой замкнутой кривой в общем случае соответствует свое значение интеграла (9). Если же вектор  $p_i$  получается из потенциала  $J^*$ , т. е. если выполняются соотношения

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0 \quad (10)$$



и, соответственно,

$$p_i = \frac{\partial J^*}{\partial q_i}, \quad (10a)$$

то интеграл (9) имеет одно и то же значение для всех замкнутых кривых, которые могут быть переведены одна в другую непрерывным преобразованием. Тогда интеграл (9) обращается в нуль для всех кривых, непрерывно стягиваемых в одну точку. Но если рассматриваемое пространство окажется многосвязным, то существуют замкнутые траектории, не стягиваемые в одну точку при непрерывном изменении; тогда  $J^*$  будет не однозначной (а бесконечнозначной) функцией  $q_i$ , и интеграл (9) для такой кривой в общем случае будет отличаться от нуля. Однако в  $q$ -пространстве будет существовать конечное число замкнутых кривых, к которым можно привести все замкнутые кривые этого пространства. Тогда можно написать конечное число уравнений

$$\oint \sum_i p_i dq_i = n_i h \quad (11)$$

в качестве квантовых условий. На мой взгляд, они и должны занять место квантовых условий (2). Мы должны ожидать, что число неприводимых одно к другому уравнений (10) равно числу степеней свободы. Если оно меньше, то перед нами будет случай «вырождения».

Изложенная выше (намеренно схематично) основная идея в дальнейшем будет рассмотрена несколько подробнее.

§ 3. *Наглядный вывод дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби.* Если в координатном пространстве заданы точка  $P$  с координатами  $Q$  и соответствующая скорость, т. е. сопряженные импульсы  $P_i$ , то движение полностью определяется каноническими уравнениями (3) и (4)<sup>2</sup>. Тогда каждой точке траектории  $L$  соответствует определенная скорость, т. е. на  $L$  будут определены импульсы  $p_i$  как функции  $q_i$ . Если мы представим себе, что на  $(l - 1)$ -мерной «поверхности» координатного пространства в каждой его точке  $P$  заданы сопряженные  $Q_i$  и  $P_i$ , то каждой точке будет соответствовать движение с траекторией  $L$  в координатном пространстве. Если  $P_i$  будут на этой поверхности непрерывными функциями  $Q_i$ , то эти траектории будут непрерывно заполнять координатное пространство (или часть его). Через каждую точку ( $q_i$ ) координатного пространства будет проходить определенная траектория; значит, этой точке будут также сопоставлены определенные импульсные координаты  $p_i$ . Тем самым в координатном пространстве  $q_i$  задается векторное поле  $p_i$ . Поставим перед собой задачу найти закон этого векторного поля.

<sup>2</sup> Предполагается, что  $H$  не зависит от времени  $t$  явно.

Рассматривая в системе канонических уравнений (3)  $p_i$  как функции  $q_i$ , мы должны заменить левую часть их на

$$\sum_k \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt},$$

что с учетом уравнения (4) можно также записать в виде

$$\sum_k \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k}.$$

Таким образом, вместо уравнения (3) мы получаем

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0. \quad (12)$$

Это и есть система  $l$  линейных дифференциальных уравнений, которой должны удовлетворять  $p_k$  как функции  $q_k$ .

Спросим теперь, имеется ли такое векторное поле, для которого существует потенциал  $J^*$ , т. е. выполняются условия (10) и (10а). В таком случае уравнение (12) вследствие (10) приняло бы вид

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0.$$

Это уравнение свидетельствует, что  $H$  не зависит от  $q_i$ . Следовательно, потенциальные поля искомого типа существуют, и их потенциал  $J^*$  удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби (5а), а  $J$  — уравнению (5).

Этим самым доказано, что уравнение (3) можно заменить системой уравнений (7а) и (5а) или (7) и (5). Хотя для последующих рассуждений это и не имеет значения, мы покажем ниже, что решения (6а) или (6) удовлетворяют системе уравнений (4). Если после интегрирования (5а) мы выразим  $p_i$  с помощью (7а) как функции  $q_i$ , то уравнение (4) образует систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения  $q_i$  как функций времени. Согласно теории дифференциальных уравнений первого порядка эта система обыкновенных дифференциальных уравнений равносильна дифференциальному уравнению в частных производных

$$\sum_k \frac{\partial \Pi}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

Но последнее удовлетворяется подстановкой

$$\Phi = \frac{\partial J}{\partial \alpha_i},$$

если  $J$  есть полный интеграл уравнения (5). Подставляя же это значение

ф в левую часть уравнения (13), получаем с учетом равенства (7)

$$\sum_k \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial J}{\partial q_k} \right)} \frac{\partial^2 J}{\partial q_k \partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 J}{\partial t \partial \alpha_i},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left\{ H \left( q_k, \frac{\partial J}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial J}{\partial t} \right\};$$

но эти величины в соответствии с равенством (5) обращаются в нуль. Отсюда следует, что соотношения (6) или (6а) являются решением уравнения (4).

§ 4. *Поле  $p_i$  одной-единственной траектории.* Перейдем теперь к весьма существенному пункту, о котором я намеренно умолчал при беглом изложении основной идеи в § 2. В рассуждениях § 3 мы полагали, что поле  $p_i$  производится  $(l - 1)$ -кратным бесконечно большим числом независимых одно от другого движений, которые в пространстве  $q_i$  наглядно изображаются таким же числом траекторий. Представим себе теперь, что мы бесконечно долго наблюдаем за невозмущенным движением некоторой отдельной системы и что в пространстве  $q_i$  мы начертили соответствующую траекторию. При этом возможны два случая.

1. Существует часть пространства  $q_i$ , в которой с течением времени траектория подходит как угодно близко к каждой точке этой  $(l-мерной)$  части пространства.

2. Траекторию можно перевести целиком в континуум с числом измерений меньше  $l$ . Сюда относится как частный случай движение по замкнутой траектории.

Случай 1 более общий; случай 2 получается из него как частный случай. Примером случая 1 может служить движение материальной точки под действием центральной силы, описываемое двумя координатами (например, полярными координатами  $r$  и  $\phi$ ), определяющими положение точки в плоскости траектории. Случай 2 получается, например, если притяжение точно пропорционально  $1/r^2$  и если мы пренебрегаем релятивистскими отклонениями от кеплерова движения; тогда траектория будет замкнутой и ее точки образуют только одномерный континуум. В трехмерном пространстве движение под действием центральных сил всегда относится к случаю 2, так как траекторию можно полностью перевести в двумерный континуум; при трехмерном рассмотрении движение под действием центральных сил всегда надо считать частным случаем движения, определяемого более сложным законом сил (например, законом движения, изучавшимся Эпштейном в теории эффекта Штарка).

Нижеследующее рассуждение относится к общему случаю 1. Рассмотрим элемент  $dt$  пространства  $q_i$ . Через этот элемент траектория рассмот-

ренного движения проходит бесконечно часто. Каждому такому прохождению соответствует система импульсных координат ( $p_i$ ). Априори возможны траектории двух типов, отличающиеся между собой, очевидно, фундаментальным образом.

Тип «а»: системы значений  $p_i$  повторяются, так что элементу объема  $dt$  принадлежит только *конечное* число систем  $p_i$ . В этом случае  $p_i$  можно представить для рассматриваемого движения как одно- или многозначные функции  $q_i$ .

Тип «б»: в рассматриваемом элементе объема встречается бесконечно много систем  $p_i$ . В этом случае  $p_i$  нельзя представить как функции  $q_i$ .

Заметим сразу, что тип «б» исключается квантовым условием (4), сформулированным в § 2. С другой стороны, классическая статистическая механика относится в основном только к типу «б»; ведь только в этом случае микроканонический ансамбль эквивалентен временному ансамблю, отношению к одной системе<sup>3</sup>.

Резюмируя, можно сказать, что применение квантового условия (4) требует, чтобы существовали такие траектории, при которых *отдельная траектория* определяет поле  $p_i$ , для которого существует потенциал  $J^*$ .

§ 5. «Рациональное координатное пространство». Мы уже говорили, что в общем случае  $p_i$  являются многозначными функциями  $q_i$ . В качестве простого примера снова рассмотрим плоское движение точки вокруг жестко закрепленного центра притяжения. При этом точка движется так, что ее расстояние  $r$  от центра притяжения периодически изменяется от минимального  $r_1$  до максимального  $r_2$ . Если взять точку пространства  $q$ , т. е. точку внутри кольца, ограниченного двумя окружностями с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , то с течением времени траектория будет бесконечно часто подходить к ней как угодно близко или — говоря не совсем точно — будет проходить через нее. Но в зависимости от того, на какой части траектории произойдет «прохождение» — с растущим или убывающим радиусом  $r$ , радиальная составляющая скорости будет иметь тот или иной знак;  $p_r$  будут двузначными функциями  $q_r$ .

Связанное с этим неудобство представления лучше всего устраняется известным методом, введенным в теорию функций Риманом. Представим себе, что поверхность кругового кольца двойная и состоит из двух совпадающих кольцеобразных листов, наложенных один на другой. На верхнем листе мы будем изображать части траектории с положительной производной  $dr/dt$ , на нижней — с отрицательной  $dr/dt$ , вместе с соответствующей системой векторов  $p_r$ . Мы будем считать, что по обеим окружностям оба

<sup>3</sup> В микроканонический ансамбль входят системы, имеющие при заданных  $q_i$  любые произвольно взятые  $p_i$  (совместимые с величиной энергии).

листа склеены, так как траектория должна переходить с одного листа на другой всякий раз, когда она касается одной из двух граничных окружностей. Легко заметить, что вдоль этих окружностей  $p_i$  для обоих листов совпадают. На этой двулистной поверхности  $p_i$  являются не только *непрерывными*, но и *однозначными* функциями  $q_i$ ; в этом и состоит смысл введения такой поверхности.

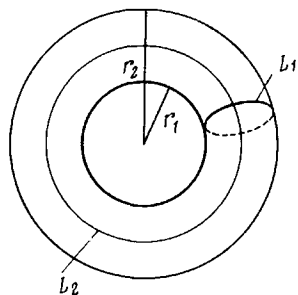


Рис. 1.

На этой двулистной поверхности имеются, очевидно, траектории двух типов, которые при непрерывном изменении не могут быть ни стянуты в одну точку, ни сведены друг к другу. Примеры траекторий каждого типа ( $L_1$  и  $L_2$ ) изображены на рис. 1; части одной траектории, лежащие на нижнем листе, показаны штрихами. Все другие замкнутые кривые можно либо стянуть в одну точку непрерывным изменением на двулистной поверхности, либо после одного или нескольких оборотов привести к типам  $L_1$

и  $L_2$ . Квантовое условие (11) здесь следовало бы применять к линиям обоих типов,  $L_1$  и  $L_2$ .

Ясно, что эти рассуждения обобщаются на все движения, удовлетворяющие условию § 4. По мере надобности фазовое пространство следует представлять себе расщепленным на некоторое число «листьев», продольно связанных  $(l - 1)$ -мерными «плоскостями» так, что на возникающем таким способом образовании  $p_i$  можно считать однозначными и непрерывными (также и при переходе с одного листа на другой) функциями; эту геометрическую вспомогательную конструкцию мы будем называть «рациональным фазовым пространством». Квантовое условие (11) должно относиться ко всем линиям, замкнутым в рациональном координатном пространстве.

Чтобы придать квантовому условию в этой трактовке точный смысл, интеграл  $\int \Sigma p_i dq_i$ , распространенный на все замкнутые траектории

рационального  $q_i$ -пространства, непрерывно переводимые друг в друга, должен иметь одно и то же значение. Доказательство проводится целиком по известной схеме. Пусть  $L_1$  и  $L_2$  (ср. схематическое изображение на рис. 2) будут замкнутые в рациональном  $q_i$ -пространстве кривые, которые при сохранении показанного на схеме направления обхода можно непрерывно перевести друг в друга. Тогда изображенная на рис. 2 кривая будет замкнутой, непрерывно стягиваемой в точку. Отсюда вследствие соотношения (10) вытекает, что интеграл вдоль этой линии равен нулю. Учитывая далее, что интегралы по бесконечно близким соединительным линиям  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  в силу однозначности  $p_i$  в рациональном  $q_i$ -пространстве рав-

ны друг другу, заключаем, что интеграл по  $L_1$  равен интегралу по  $L_2$ . Потенциал  $J^*$  будет бесконечнозначным и в рациональном  $q_i$ -пространстве; но в соответствии с квантовым условием эта многозначность простейшая, какую только можно себе представить. Именно, если  $J^*$  есть *одно* принадлежащее некоторой точке рационального  $q_i$ -пространства значения потенциала, то остальные значения будут равны  $J^* + nh$ , где  $n$  — целое число.

*Дополнение при корректуре.* Дальнейшие размышления показали, что второе из указанных в § 4 условий применимости формулы (11) выполняется всегда автоматически, т. е. действует правило: если движение дает поле  $p_i$ , то последнее с необходимостью имеет потенциал  $J^*$ .

По теореме Якоби всякое движение системы можно получить из полного интеграла  $J^*$  уравнения (5а). Значит, существует по меньшей мере одна функция  $J^*$  координат  $q_i$ , из которой импульсы  $p_i$  рассматриваемого движения системы для каждой точки ее траектории можно получить на основе уравнений

$$p_i = \frac{\partial J^*}{\partial q_i}.$$

Теперь надо вспомнить о том, что  $J^*$  получается с помощью некоторого дифференциального уравнения в частных производных, т. е. с помощью указания, как следует продолжать функцию  $J^*$  в  $q_i$ -пространстве. Таким образом, если мы хотим знать, как изменяется  $J^*$  для системы при ее движении, мы должны считать функцию  $J^*$  продолженной в соответствии с дифференциальным уравнением вдоль траектории (и в ее окрестности). Когда же через некоторый (очень большой) промежуток времени траектория снова окажется в непосредственной близости от точки  $P$ , через которую она уже проходила ранее, то производные  $\partial J^* / \partial q_i$  дадут нам значения импульсов для обоих моментов времени, если мы проинтегрируем  $J^*$  непрерывно по всему промежуточному участку траектории. Вовсе не следует полагать, что при этом продолжении мы снова получим прежние значения  $\partial J^* / \partial q_i$ ; напротив, в общем случае необходимо ожидать, что всякий раз, когда в процессе движения снова приближенно получается рассматриваемая конфигурация координат  $q_i$ , появляется совершенно иная система  $p$ , так что для *бесконечно продолженного* движения вообще невозможно представить  $p_i$  как функции  $q_i$ . Если же  $p_i$  — и, соответственно, конечное число систем значений этих величин — при возврате конфигурации координат повторяются, то  $\partial J^* / \partial q_i$  можно представить в виде функций  $q_i$  для бесконечно продолженного движения. Следовательно, если для бесконечно

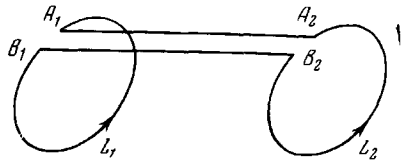


Рис. 2.

продолженного движения существует поле  $p_i$ , то всегда существует также соответствующий потенциал  $J^*$ .

Поэтому можно утверждать следующее. Если существуют  $l$  интегралов  $2l$  уравнений движения вида

$$R_k(q_i, p_i) = \text{const}, \quad (14)$$

где  $R_k$  — алгебраические функции  $p_i$ , то  $\sum_i p_i dq_i$  всегда будет полным дифференциалом, если  $p_i$  выразить через  $q_i$  с помощью уравнения (14). Квантовое условие требует, чтобы интеграл  $\int \sum_i p_i dq_i$  по неприводимой кривой был

кратным величине  $h$ . Это квантовое условие совпадает с условием Зоммерфельда — Эпштейна, если, в частности, каждая импульсная координата  $p_i$  зависит только от соответствующей координаты  $q_i$ .

Если число интегралов типа (14) меньше  $l$ , как, например, в рассмотренном Пуанкаре случае проблемы трех тел, то  $p_i$  не выражаются через  $q_i$  и квантовое условие Зоммерфельда — Эпштейна становится неприменимым даже в указанном здесь несколько обобщенном виде.

## ВЫВОД ТЕОРЕМЫ ЯКОБИ\*

Как известно, канонические уравнения динамики

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (2)$$

где  $H$  в общем случае является функцией координат  $q_i$ , импульсов  $p_i$  и времени  $t$ , могут быть проинтегрированы, если воспользоваться тем, что, согласно Гамильтону и Якоби, существует функция  $J$  от координат  $q_i$  и времени  $t$ , определяемая как решение уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \bar{H} = 0. \quad (3)$$

При этом  $\bar{H}$  получается из  $H$  заменой в выражении для  $H$  импульсов  $p_i$  на производные  $(\partial J / \partial q_i)$ . Если  $J$  есть полный интеграл этих уравнений с постоянными интегрирования  $\alpha_i$ , то система канонических уравнений (1), (2) может быть, вообще говоря, проинтегрирована с помощью уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = p_i, \quad (4)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = \beta_i. \quad (5)$$

\* *Eine Ableitung des Theorems von Jacobi.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, pt. 2, 606—608 (Доложено на заседании Физико-математической секции 22 ноября 1917 г.).



То, что уравнений (3), (4) и (5) достаточно для получения канонических уравнений (1) и (2), проверяется во всех обстоятельных учебниках динамики путем непосредственных вычислений. Напротив, мне не известно ни одного естественного пути, свободного от искусственных приемов, на котором можно было бы перейти от канонических уравнений к системе уравнений (3), (4) и (5) Гамильтона — Якоби. Таким путем может быть следующий.

Если для некоторого определенного момента времени  $t_0$  возьмем координаты  $q_i^0$  и соответствующие импульсы  $p_i^0$  системы, то движение системы будет определяться уравнениями (1) и (2). Это движение я представляю как движение точки в  $n$ -мерном пространстве координат  $q_i$ . Будем считать, например, что в момент времени  $t_0$  для всех точек ( $q_i$ ) координатного пространства заданы импульсы  $p_i$ , подчиняющиеся уравнениям (1) и (2) для соответствующих систем, так, что  $p_i^0$  являются непрерывными функциями координат  $q_i$ ; тогда эти начальные условия, в силу уравнений (1) и (2), определяют движение всех этих точек. Назовем совокупность всех таких движений «полем тока».

Теперь вместо того, чтобы это поле описывать так, чтобы координаты и импульсы каждой точки системы считались заданными функциями времени, согласно уравнениям (1) и (2), я могу также считать заданными величины  $p_i$ , определяющие состояния движения, в каждой точке ( $q_i$ ) как функции времени  $t$ , т. е. координаты  $q$  и время  $t$  рассматривать как независимые переменные. Оба способа представления точно соответствуют двум способам описания движения жидкости в гидродинамике, которые положены в основу лагранжевых и, соответственно, эйлеровых уравнений движения жидкости.

Имея в виду второй способ представления, я должен заменить левую часть уравнения (1) выражением

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_v \frac{\partial p_i}{\partial q_v} \frac{dq_v}{dt},$$

которое, согласно уравнениям (2), можно представить в виде

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_v \frac{\partial H}{\partial p_v} \frac{\partial p_i}{\partial q_v}.$$

Следовательно, в соответствии с уравнением (1) получаем систему уравнений

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_v \frac{\partial H}{\partial p_v} \frac{\partial p_i}{\partial q_v} = 0. \tag{6}$$

Величины  $(\partial H/\partial q_i)$  и  $(\partial H/\partial p_i)$  являются известными функциями координат  $q_i$ , импульсов  $p_i$  и времени  $t$ . Таким образом, система уравнений (6) представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных для компонент  $p_i$  векторов импульсов, описывающих поле тока.

Теперь возникает вопрос, существует ли такое поле тока, в котором вектор импульса обладает потенциалом, так что для него удовлетворяются следующие условия:

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0, \quad (7)$$

$$p_i = \frac{\partial J}{\partial q_i}. \quad (7a)$$

Если условие (7) выполнено, то уравнение (6) принимает форму

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{\nu} \frac{\partial H}{\partial p_{\nu}} \frac{\partial p_{\nu}}{\partial q_i} \right) = 0.$$

Второе слагаемое в левой части этого уравнения представляет собой полную производную  $H$  по координате  $q_i$ . Если обозначить через  $\bar{H}$  функцию координат  $q_i$  и времени  $t$ , которая получается из  $H$ , если в выражении для  $H$  импульсы  $p_i$  выразить через  $q_i$  и  $t$ , то, следовательно, будем иметь

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

или, вводя в соответствии с равенством (7a) потенциал  $J$ ,

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial J}{\partial t} + \bar{H} \right) = 0.$$

Удовлетворить этим уравнениям можно в том случае, если принять, что для  $J$  выполняется уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \bar{H} = 0,$$

которое представляет собой не что иное, как гамильтоновское уравнение (3). Оно вместе с соотношением (7a) и определяет решение уравнения поля тока (6).

К уравнениям (5) мы придем следующим образом. Если  $J$  есть полный интеграл с произвольной постоянной  $\alpha_i$ , то уравнение (3) должно оставаться справедливым, если в выражении для  $J$  величину  $\alpha_i$  заменить на  $\alpha_i +$

+  $d\alpha_i$ . Таким образом, должно иметь место соотношение:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial t \partial \alpha_i} + \sum_v \frac{\partial H}{\partial p_v} \frac{\partial^2 J}{\partial q_v \partial \alpha_i}.$$

В силу уравнения (3), вместо этого можно записать

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_v \frac{dq_v}{dt} \frac{\partial}{\partial q_v} \right) \left( \frac{\partial J}{\partial \alpha_i} \right) = 0.$$

Однако оператор в скобках тождественно совпадает с оператором  $(d/dt)$  — производной по времени в смысле лагранжева способа описания. Следовательно, величина  $(\partial J / \partial \alpha_i)$  для одной системы остается постоянной в течение ее движения; отсюда для описания движения системы материальных точек следует система уравнений в форме (5).

## МОЖНО ЛИ ОПРЕДЕЛИТЬ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО ПОКАЗАТЕЛИ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ТЕЛ ДЛЯ РЕНТГЕНОВЫХ ЛУЧЕЙ? \*

Несколько дней назад я получил от профессора А. Келера (из Висбадена) краткую работу <sup>1</sup>, в которой описано поразительное явление при рентгеновских съемках, которое пока еще не получило объяснения. Репродуцированные снимки — чаще всего изображения частей тела человека — по контурам имеют светлую кайму шириной около 1 мм, в которой пластинка, по-видимому, получила большее облучение, чем в (незатененной) окрестности рентгеновского снимка.

Я хочу обратить внимание специалистов на это явление и добавить, что оно, вероятно, основано на полном внутреннем отражении. В соответствии с классической теорией дисперсии следует ожидать, что показатель преломления  $n$  для рентгеновых лучей близок к единице, но в общем все же отличается от единицы. Показатель преломления  $n$  будет больше или меньше единицы, в зависимости от того, влияние каких электронов преобладает — тех, у которых собственная частота меньше, или тех, у которых она больше частоты рентгеновых лучей. Трудность определения в том и заключается, что разность  $(n - 1)$  очень мала (около  $10^{-4}$ ). Однако легко увидеть, что при почти касательном падении рентгеновых лучей в случае  $n < 1$  должно наступить заметное полное отражение.

Вводя в закон преломления

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = n$$

дополнительные углы  $\psi = 90^\circ - \varphi$  и  $\psi' = 90^\circ - \varphi'$ , причем  $\psi$  и  $\psi'$  очень малы, и полагая

$$n = 1 + \varepsilon,$$

\* *Lassen sich Brechungsexponenten der Körper für Röntgenstrahlen experimentell ermitteln?* Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 1918, 20, 86—87.

<sup>1</sup> A. Köhler. Fortschritte auf dem Gebiet der Röntgenstrahlen, 1916, 24, 236 (ср. Lucas. Gräfe und Sillem. Hamburg).

мы придадим закону преломления следующий вид:

$$\psi'^2 - \psi^2 = \epsilon.$$

Полное внутреннее отражение наступит при отрицательном  $\epsilon$ . Предельный угол  $\bar{\psi}$  полного внутреннего отражения определяется условием  $\psi' = 0$ ; следовательно, получим

$$\bar{\psi} = \sqrt{-\epsilon}.$$

Таким образом, если  $(-\epsilon)$  имеет порядок величины  $10^{-6}$ , то  $\bar{\psi}$  будет порядка  $10^{-3}$ . Значит, вполне возможно, что светлая кайма на снимках Келера обусловлена падающими почти по касательной на объект лучами, которые испытывают малое отклонение благодаря полному внутреннему отражению, причем их действие на пластину добавляется к действию рентгеновых лучей, проходящих мимо объекта.

В случае положительного значения  $\epsilon$  наблюдение менее удобно, так как тогда полное внутреннее отражение на слабо искривленных выступающих частях поверхности тела должно происходить *внутри* тела.

При нашем полном незнании преломления рентгеновых лучей было бы очень желательно, чтобы кто-нибудь из специалистов в области рентгеновских съемок взял на себя труд проверить, действительно ли здесь имеет место полное внутреннее отражение.

*Примечание при корректуре.* В случае  $\epsilon > 0$  при съемках закругленных предметов также должен существовать наблюдаемый краевой эффект вследствие преломления лучей, падающих почти по касательной. Здесь, очевидно, следует ожидать узкую затемненную полосу вдоль края тени (на внутренней стороне геометрической границы тени). Ширина этой полосы определяется величиной  $\sqrt{\epsilon}$ .

Поступила 21 марта 1918 г.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ЧАСТИЧНО ДИССОЦИИРОВАННЫХ ГАЗАХ \*

В то время как наши знания в области химического равновесия заметно расширились, мы еще мало знаем о скоростях реакций в газах. Особенно большая трудность экспериментального исследования скоростей реакций заключается в том, что эти скорости подвергаются каталитическому воздействию твердых стенок. Высокая температура, с которой связано большинство реакций в газах, также создает затруднения, не меньшие, чем ожидаемые высокие значения скорости реакции. Но мне кажется, что все эти трудности можно обойти, определяя скорости реакций косвенно из исследований распространения звука в частично диссоциированных газах.

В том, что подобные исследования могут служить для определения скоростей реакций, легко убедиться следующим образом. Если мы изменим адиабатически объем частично диссоциированного газа настолько быстро, что за время изменения объема химический состав практически не успеет измениться, то газ будет вести себя при этом как обыкновенная смесь. Напротив, изменяя объем настолько медленно, чтобы процесс состоялся практически только из состояний химического равновесия, мы получим другую зависимость давления от плотности, такую, что сжимаемость смеси будет меньше, чем в первом случае. Следовательно, скорость звука в зависимости от частоты должна переходить от начального значения к некоторой предельной величине. При промежуточных частотах реакция будет отставать от сжатия таким образом, что возникнет своего рода отставание во времени кривой давления от кривой плотности с превращением механической работы в теплоту. Ниже приводится предварительное

\* *Schallausbreitung in teilweise dissoziierten Gasen.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1920, 380—385.

исследование распространения звука в частично диссоциированном газе, причем рассматривается только реакция простейшего возможного типа ( $J_2 \rightleftharpoons J + J$ )<sup>1</sup>.

Рассмотрим сначала чисто механическую часть задачи. Дифференциальное уравнение движения (Эйлера) для плоской волны при обычных для теории звука упрощениях имеет вид:

$$-\frac{\partial \pi}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1)$$

При этом  $\pi$  означает малое отклонение давления от равновесного значения  $p$ ,  $\rho$  — плотность (равновесная),  $u$  — смещение частицы газа в направлении оси  $X$  или волнового вектора. Избыток давления  $\pi$  связан с отклонением  $\Delta$  плотности соотношением, в которое входит смещение  $u$ :

$$\Delta = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2)$$

Будем искать закон распространения затухающей плоской синусоидальной волны, полагая

$$\left. \begin{aligned} \pi &= \pi_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{V} \right) + \varphi \right] e^{-\beta x}, \\ \Delta &= \Delta_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{V} \right) \right] e^{-\beta x}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $\pi_0$ ,  $\Delta_0$ ,  $\omega$ ,  $V$ ,  $\varphi$ ,  $\beta$  — вещественные постоянные. Разность фаз  $\varphi$  соответствует энергии диссипации.

Вместо вещественных выражений (3) мы будем использовать обычным способом комплексные выражения

$$\left. \begin{aligned} \pi &= \pi_0 e^{j(\omega t - ax + \varphi)}, \\ \Delta &= \Delta_0 e^{j(\omega t - ax)}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где для сокращения сделана подстановка

$$a = \frac{\omega}{V} - j\beta. \quad (5)$$

Разумеется, для  $u$  надо написать аналогичное выражение. Так как соотношения (1) и (2) представляют собой линейные уравнения с вещественными.....

<sup>1</sup> Экспериментальные исследования рассматриваемого здесь процесса в  $N_2O_4$  были выполнены уже в 1910 г. в лаборатории Нернста (ср. F. Keutel. Berliner Dissertation, 1910). Там уже было указано на зависимость скорости звука от скорости реакции.

ными коэффициентами, то и вещественные части  $\pi$ ,  $\Delta$  и  $u$  сами также удовлетворяют этим уравнениям. Упрощение исследования, достигаемое этим известным из оптики приемом, состоит не только в том, что формулы (4) удобнее дифференцировать, чем (3), но и особенно в том, что в соответствии с формулами (4) имеем

$$\frac{\pi}{\Delta} = \frac{\pi_0}{\Delta_0} e^{j\varphi} = \text{const.} \quad (6)$$

Из (1), (2) и (6) следует уравнение

$$\frac{\pi}{\Delta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (7)$$

отличающееся от обычного волнового уравнения линейных звуковых волн только тем, что в левой части вместо вещественной постоянной  $S^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\text{адиаб.}}$  стоит комплексная постоянная  $\pi/\Delta$ .

Величину  $\pi/\Delta$  следует определить, изучая циклический адиабатический процесс. Из  $\pi/\Delta$  можно затем найти фазовую скорость  $V$  и постоянную затухания  $\beta$ . В самом деле, из уравнения (7) с учетом соотношений (4) и (5) получаем

$$a = \frac{\omega}{V} - j\beta = \omega \left(\frac{\pi}{\Delta}\right)^{-1/2}. \quad (8)$$

Если величина  $\beta^2$  мала по сравнению с  $\omega^2/V^2$ , мы получаем более простое приближенное уравнение

$$V + j \frac{\beta V^2}{\omega} = \left(\frac{\pi}{\Delta}\right)^{1/2}. \quad (8a)$$

Перейдем теперь к вычислению  $\pi/\Delta$ , для чего рассмотрим циклическое адиабатическое изменение объема частично диссоциированного газа. Пусть  $V$  будет объем, а  $\rho$  — плотность частично диссоциированного газа, испытывающего малые изменения во времени своих параметров ( $\Delta V$ ,  $\Delta \rho$ ,  $\Delta p$  и т. д.). Тогда

$$V\rho = mn = \text{const.} \quad (9)$$

Здесь  $m$  означает атомный вес вещества  $J$ ,  $n$  — общее число грамм-молекул ассоциированных и неассоциированных атомов  $J$ . Тогда из уравнения (9) легко выводится соотношение

$$\frac{\pi}{\Delta} = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{1}{\rho} \left[ p - \frac{\Delta(pV)}{\Delta V} \right]. \quad (10)$$



Уравнение состояния нашего газа можно записать в форме

$$pV = RT (n_1 + n_2), \quad (11)$$

где  $n_1$  означает число грамм-молекул  $J_2$ ,  $n_2$  — число грамм-молекул диссоциированного газа  $J$ , так что имеем

$$n = 2n_1 + n_2. \quad (12)$$

Из соотношений (11) и (12) следует

$$\Delta(pV) = R(n_1 + n_2)\Delta T + RT(\Delta n_1 + \Delta n_2),$$

или, с учетом (12) и постоянства  $n$ ,

$$\Delta(pV) = R(n_1 + n_2)\Delta T - RT\Delta n_1. \quad (13)$$

Теперь нам осталось найти два соотношения, позволяющих выразить  $\Delta T$  и  $\Delta n_1$  через  $\Delta V$ ; тогда, вследствие (10), наше вычисление  $\pi/\Delta$  будет закончено. Так как процесс должен быть адиабатическим, то для каждого момента времени должно выполняться равенство

$$CdI - Ddn_1 = -pdV,$$

где  $C$  означает сумму теплоемкостей диссоциированной и недиссоциированной частей,  $D$  — теплоту диссоциации на грамм-молекулу (при постоянном объеме). Таким образом, с допускаемой нами точностью выполняется также уравнение

$$0 = C\Delta T - D\Delta n_1 + p\Delta V. \quad (14)$$

Мы должны еще рассмотреть химическое превращение, происходящее за время  $dt$ . При этом мы сделаем одно предположение о динамике реакции распада, которое в свою очередь будет проверено с помощью наблюдений звука. С формальной точки зрения простейшее, но с кинетической точки зрения вовсе не самое очевидное предположение заключается в том, что реакция распада есть реакция первого порядка, т. е. что в единицу времени в единице объема распадаются

$$\kappa_1 \frac{n_1}{V}$$

молекул  $J_2$ . Ведь эта гипотеза предполагает, что столкновения молекул непосредственно не приводят к распаду. Но вполне возможно, чтобы молекулы с определенной (внутренней) энергией обладали определенной вероятностью распада (как, например, радиоактивные атомы). Или же, возможно, распад молекул вызывается действием излучения, как в по-

следнее время с большой настойчивостью утверждает Ж. Перрен. Если бы распад происходил при столкновении двух молекул  $J_2$  или одной молекулы  $J_2$  с одним атомом  $J$ , то вместо приведенного выше выражения появились бы следующие:

$$\kappa_1 \left( \frac{n_1}{V} \right)^2 \text{ или } \kappa_1 \left( \frac{n_1}{V} \right) \left( \frac{n_2}{V} \right),$$

причем множитель  $\kappa_1$  можно считать не зависящим от концентраций. Все эти возможности мы будем учитывать, сохраняя выражение  $\kappa_1 n_1/V$ , но допуская, что  $\kappa_1$  может зависеть от концентрации молекул обоих типов.

Для скорости рекомбинации мы должны соответственно положить

$$\kappa_2 \left( \frac{n_2}{V} \right)^2.$$

В соответствии с этим для элемента времени  $dt$  мы получим соотношение

$$V \left[ \kappa_1 \frac{n_1}{V} - \kappa_2 \left( \frac{n_2}{V} \right)^2 \right] dt = -dn,$$

или

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} n_1 - \frac{n_2^2}{V} = -\frac{1}{\kappa_2} \frac{dn_2}{dt}. \quad (15)$$

При этом  $\kappa_1/\kappa_2 = \kappa$  есть постоянная закона действующих масс, для которой выполняется известное соотношение

$$\frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{dT} = \frac{D}{RT^2}. \quad (16)$$

Чтобы извлечь пользу из уравнения (15), обратимся к состоянию, бесконечно мало отличающемуся от состояния равновесия. Таким образом, учитывая равенства (16) и (12) и снова применяя обозначения  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $V$  для состояния равновесия (состояния покоя), мы получаем

$$0 = \frac{\kappa D n_1}{RT^2} \Delta T + \left( \kappa + \frac{4n_2}{V} \right) \Delta n_1 + \frac{1}{\kappa_2} \frac{d\Delta n_1}{dt} + \left( \frac{n_2}{V} \right)^2 = 0.$$

Предполагая, что переменные  $\Delta T$ ,  $\Delta n_1$  и  $\Delta V$  испытывают циклические изменения, и дополняя их до комплексных величин, содержащих общий множитель  $e^{j\omega t}$ , мы можем после выполнения дифференцирования в четвертом члене положить

$$0 = \frac{\kappa D n_1}{RT^2} + \left( \kappa + \frac{4n_2}{V} + j \frac{\omega}{\kappa_2} \right) \Delta n_1 + \left( \frac{n_2}{V} \right)^2 \Delta V. \quad (17)$$

Решая систему уравнений (13), (14) и (17), мы получаем  $\Delta T$ ,  $\Delta n_1$  и  $\Delta V$

как функции  $\Delta(pV)$ . Для отношения  $\Delta(pV)/\Delta V$  получим этим способом

$$\frac{-\Delta(pV)}{\Delta V} = \frac{p \left[ + \frac{\kappa D n_1}{T} + R(n_1 + n_2) \left( \kappa - \frac{4n_2}{V} + \frac{j\omega}{\kappa_2} \right) \right] + \left( \frac{n_2}{V} \right)^2 [RD(n_1 + n_2) - CRT]}{C \left( \kappa - \frac{4n_2}{V} + \frac{j\omega}{\kappa_2} \right) + \frac{\kappa D^2 n_1}{RT^2}}. \quad (18)$$

Из (18) и (10) с учетом условия равновесия  $\kappa_1 n_1/V \approx \kappa_2 (n_2/V)^2$  прежде всего следует

$$\frac{\pi}{\Delta} = \frac{p}{\rho} \left( 1 + \frac{\kappa_1 A + jR\omega}{\kappa_1 B + j\bar{c}\omega} \right), \quad (19)$$

где сделаны подстановки

$$\bar{c} = \frac{C}{n_1 + n_2} = \frac{c_1 n_1 + c_2 n_2}{n_1 + n_2}, \quad (20)$$

$$A = \left( 2 \frac{D}{T} - \bar{c} \right) \frac{n_1}{n_1 + n_2} + R \left( 1 - 4 \frac{n_1}{n_2} \right), \quad (21)$$

$$B = \frac{D^2}{RT^2} \frac{n_1}{n_1 + n_2} + \bar{c} \left( 1 - 4 \frac{n_1}{n_2} \right). \quad (22)$$

Формулы (19) и (8) полностью решают нашу задачу. Сначала имеем

$$V_{\omega=0} = \sqrt{\frac{p}{\rho} \left( 1 + \frac{R}{\bar{c}} \right)}. \quad (23)$$

Отсюда можно экспериментально определить  $\bar{c}$  и по известной формуле диссоциации вычислить  $A$  и  $B$ . Далее, из (19) следует

$$\Delta_{\omega=0} = \sqrt{\frac{p}{\rho} \left( 1 + \frac{A}{B} \right)}. \quad (24)$$

Для частот, при которых поглощение звука достаточно мало, получается приближенное уравнение

$$V = \sqrt{\frac{p}{\rho} \left( 1 + \frac{\kappa_1^2 AB + R\bar{c}\omega^2}{\kappa_1^2 B^2 + \bar{c}^2 \omega^2} \right)}, \quad (25)$$

охватывающее (23) и (24) в качестве частных случаев. Оно может служить

для определения  $\kappa_1$ . Наконец, из опытов при разных плотностях газа следует определить, зависит ли  $\kappa_1$  от плотности.

Поступила 29 апреля 1920 г.

В том же томе журнала, на стр. 65 помещено краткое содержание доклада А. Эйнштейна «О моменте инерции молекулы водорода» (*Über das Trägheitsmoment des Wasserstoffmoleküls*), который впоследствии не был опубликован. В этом кратком содержании доклада упоминается теория Тетроде, который впервые получил формулу для химической (энтропийной) постоянной одноатомного газа. (См. Н. Tetrode. Ann. Phys. 1912 38, 434; 39, 255.) Приводим его здесь.

«Если к вращательным степеням свободы молекулы водорода применить теорию Тетроде энтропийной постоянной, то получится формула, которая позволяет точно вычислить момент инерции  $J$  из кривой теплоемкости без использования квантовой теории. При этом получается значение  $J = 0,96 \cdot 10^{-41}$ . Работа будет опубликована позднее».

## ОБ ОДНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ, КАСАЮЩЕМСЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ПРОЦЕССА ИСПУСКАНИЯ СВЕТА \*

Не приходится сомневаться в том, что излучение, испускаемое покоящимся атомом при элементарном (в смысле квантовой теории) процессе, является монохроматическим. В случае же, когда излучающая частица обладает некоторой скоростью относительно системы координат, испускаемое при элементарном процессе излучение должно иметь разную частоту в разных направлениях. Если  $v$  — скорость движения частицы,  $\nu_0$  — частота излучения относительно частицы при элементарном процессе, то в первом приближении должно выполняться соотношение

$$\nu = \nu_0 \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right), \quad (1)$$

где  $\vartheta$  означает угол между направлением движения частицы и рассматриваемым направлением излучения.

С другой стороны, рассматривая фундаментальное для квантовой теории условие частот Бора

$$E_2 - E_1 = h\nu, \quad (2)$$

связывающее изменение энергии атома с частотой испускаемого света, приходится предполагать, что каждому элементарному акту испускания, в том числе и акту излучения *движущегося* атома, можно, по-видимому, приписывать только одну-единственную частоту.

Вопрос о том, что соответствует действительности — следствие волновой теории или вывод, подсказываемый, если не требуемый, квантовой теорией, — можно решить следующим образом (см. схему на рис. 1). Узкий пучок каналовых лучей  $K$ , который служит источником света, собирается линзой  $L_1$  в плоскости щели  $S$ , причем эта щель вырезает небольшую часть этого изображения пучка. Свет, исходящий из каждого эле-

\* *Über ein den Elementarprozeß der Lichtemission betreffendes Experiment.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1921, 882—883 (См. статью 51.— *Ред.*).

мента этого изображения, превращается линзой  $L_2$  в параллельный пучок; точнее говоря, поверхности равной фазы превращаются в плоскости.

Согласно волновой теории возникающий при элементарном акте свет, проходящий через нижний край линзы, должен иметь более короткую длину волны, чем свет, проходящий через верхний край линзы. Появляющиеся за линзой  $L_2$  плоскости равной фазы станут не строго параллельными, а слегка наклоненными одна к другой наподобие веера. Установив за  $L_2$  сфокусированный на бесконечность телескоп, мы увидим в нем изображение щели, причем точно на том же месте, как если бы свет испускался покоящимися частицами. Отдельные точки изображения, соответствующие фазовым плоскостям элементарного процесса, хотя и не будут совпадать, однако все попадут в оптическое изображение щели.

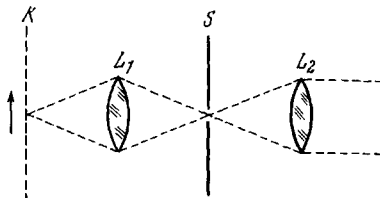


Рис. 1.

Но положение вещей изменится, если между  $L_2$  и телескопом поместить слой диспергирующего вещества, например сероуглерода ( $CS_2$ ). Вследствие дисперсий и зависимости частоты от положения в пространстве плоскости равной фазы, свет внизу будет распространяться медленнее, чем сверху, так что следует ожидать отклонения света, испускаемого движущимися частицами каналовых лучей. Это отклонение, если оно существует, должно легко наблюдаться. Если расстояния  $KL_1$  и  $L_1S$  равны и  $\Delta$  означает расстояние  $SL_2$ ,  $l$  — толщину слоя диспергирующей среды, то угол отклонения  $\alpha$  дается формулой

$$\alpha = \frac{l}{\Delta} \frac{v}{c} \frac{dn}{(dv/v)}, \quad (3)$$

где  $v/c$  — отношение скорости частицы каналовых лучей к скорости света,  $n$  — показатель преломления диспергирующего вещества,  $\nu$  — частота,  $dn$  и  $dv$  — соответствующие приращения этих величин. Для слоя  $CS_2$  толщиной 50 см при  $\Delta = 1$  см ожидаемое отклонение должно составить более  $2^\circ$ .

Напротив, если элементарный акт имеет единственную частоту, то частота света при отдельном элементарном процессе не будет зависеть от направления; требуемого волновой теорией отклонения тогда не будет. Я не буду более подробно обсуждать здесь эту возможность, но только отмечу, что она очень хорошо согласовалась бы с существованием эффекта Доплера, установленным И. Штарком.

К экспериментальному решению поставленного здесь вопроса я приступаю вместе с Гейгером.

Исправление результатов этой работы дано в статье 51.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ К СВЕРХПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛОВ\*

Вряд ли можно позавидовать теоретику — исследователю природы. Его труд судит неумолимый и не очень-то дружелюбный судья—опыт. Опыт никогда не скажет теории «да», но говорит в лучшем случае «может быть», большей же частью — просто «нет». Когда опыт согласуется с теорией, для нее это означает «может быть»; когда же он противоречит ей, объявляется приговор: «нет». Наверное, почти каждая теория сразу после появления получает свое «нет». Здесь мы остановимся кратко на судьбе теорий электропроводности металлов и рассмотрим революционизирующее влияние, которое оказывает на наши представления о электропроводности металлов открытие сверхпроводимости.

Как только было признано, что отрицательное электричество воплощается в субатомных носителях с определенным зарядом и массой (т. е. в электронах), возникло естественное предположение, что проводимость металлов определяется движением электронов. Далее, то обстоятельство, что металлы лучше проводят тепло, чем неметаллы, а также существование закона Видемана — Франца, говорящего о независимости отношения электропроводности чистых металлов к их теплопроводности (при обычной температуре), давали основание считать ответственными и за теплопроводность главным образом те же электроны. Эти соображения привели к созданию электронной теории металлов (Рикке, Друде, Г. А. Лоренц), построенной по образцу кинетической теории газов. Электронная теория предполагала, что в металлах имеются электроны, которые, если отвлечься от столкновений, испытываемых ими время от времени с атомами металла, движутся свободно, обладая средней энергией теплового движения  $\frac{3}{2} kT$ , подобно молекулам газа.

Эта теория добилась поразительного успеха, выразив с замечательной точностью коэффициенты закона Видемана — Франца через отношение

\* *Theoretische Bemerkungen zur Supraleitung der Metalle*. Gedankbook Kammerling Onnes. Leiden, 11 March, 1922, 429—435.

механической массы электрона к его заряду. Она также качественно объяснила термоэлектрические явления, эффект Холла и т. д. И какие бы изменения ни произошли с теорией электропроводности в будущем, всегда, по-видимому, сохранится основа ее основ — гипотеза о том, что электрическая проводимость определяется движением электронов.

Формула Друде для удельного сопротивления металлов  $\omega$  гласит

$$\omega = \frac{2m}{e^2} \frac{u}{nl}, \quad (1)$$

где  $m$  есть масса,  $e$  — заряд электрона,  $u$  — средняя скорость,  $n$  — плотность частиц и  $l$  — длина свободного пробега электронов. К сожалению, в теорию входят три неизвестные функции температуры —  $u$ ,  $n$ ,  $l$ , из которых одна ( $u$ ), в соответствии с кинетической теорией теплоты, должна быть связана с абсолютной температурой соотношением

$$mu^2 = 3kT. \quad (2)$$

Плотность электронов  $n$  должна быть мала по сравнению со средней плотностью атомов, так как иначе непонятно, почему электроны не вносят заметного изменения в удельную теплоемкость металлов.

Насколько основная формула (1) пригодна для объяснения зависимости удельного сопротивления от температуры? Здесь мы сталкиваемся с серьезными трудностями. Согласно соотношению (2), скорость  $u$  должна быть пропорциональной  $\sqrt{T}$ . Заметной температурной зависимости длины свободного пробега  $l$ , на первый взгляд, не должно быть. Число ионизованных атомов  $n$ , напротив, должно быстро возрасть с температурой, так как диссоциация мало диссоциированного вещества быстро растет с  $T$ . Значит, следовало бы думать, что сопротивление чистых металлов быстро убывает с повышением температуры. Но ничего подобного не наблюдается; как известно, сопротивление чистых металлов при высоких температурах возрастает почти пропорционально  $T$ .

Чтобы объяснить этот очевидный факт на основе формулы (1), приходится обращаться к гипотезам: число свободных электронов  $n$  не зависит от температуры; длина свободного пробега электронов обратно пропорциональна корню квадратному из теплосодержания металла. Видоизменив таким образом формулу (1), Камерлинг-Оннес сумел представить свойства металлов в несверхпроводящем состоянии с замечательной точностью. Гипотеза о зависимости длины свободного пробега от теплового возбуждения выглядит не очень странной; можно представить себе, что в невозбужденном металле электрон движется как в пустоте, но что неоднородности, обусловленные тепловыми колебаниями, создают электрические поля, которые отклоняют электроны. Гипотеза о независимости  $n$  от температуры, напротив, весьма сомнительна. Да и предлагаемую зависимость  $l$



от теплосодержания крайне трудно обосновать количественно. Однако успех рассуждений Камерлинг-Оннеса показывает, по-видимому, что сопротивление определяется в основном тепловым возбуждением металла (не электронов). Только таким образом можно объяснить тот факт, что при более высоких температурах сопротивление подчиняется закону

$$\omega = \kappa (T - \vartheta),$$

а не закону

$$\omega = \kappa T$$

и что сопротивление несверхпроводящих металлов при низких температурах перестает зависеть от температуры<sup>1</sup>. Кривизна кривой сопротивления при низких температурах благодаря этому оказывается косвенно связанной с квантовой теорией.

В соответствии с указанным выше представлением, при понижении температуры сопротивление несверхпроводящих металлов должно стремиться к нулю, тогда как в действительности оно стремится к предельному значению, отличному от нуля. Однако Камерлинг-Оннес обнаружил, что это граничное значение сильно зависит от малых количеств примесей. Он нашел также, что эти малые примеси вызывают параллельный сдвиг по вертикали всей кривой сопротивления, т. е. что они создают «аддитивное сопротивление», так что сопротивление чистого однородного металла будет, по всей вероятности, стремиться к нулю. Следует упомянуть, что этот в высшей степени примечательный факт никак не поддается объяснению с помощью формулы (1). Действительно, если мы припишем с этой целью особые свойства столкновениям электронов, то это, как легко показать, приведет к постоянству величины  $1/l$ . Но из постоянства величины  $1/l$  следует не постоянное с температурой сопротивление, а пропорциональное  $u$  (или  $u/n$ ). Однако величину  $u$  нельзя считать независимой от температуры, так как это связано с отказом от единственного достижения теории — объяснения закона Видемана — Франца. По этой же причине трудно объяснить теоретически постоянство сопротивления металлов с примесями при низких температурах.

Из всего сказанного видно, что теория теплового движения электронов оказывается несостоятельной уже в области обычной проводимости, даже без учета сверхпроводимости. С другой стороны, вполне возможно, что закон Видемана — Франца будет получен из какой-то другой теории, объясняющей электропроводность и теплопроводность электронным механизмом.

.....  
<sup>1</sup> Ср., например, Comm. N 142a, Versl. Ak. Amsterdam, Juni 1914 (фиг. 3 для Sn, Cs, Cd) и Suppl. N 34b, Report Third Int. Congr. Refr., Chicago (фиг. 5 для Hg)

Несостоятельность теории стала совершенно явной после открытия сверхпроводимости металлов. То, что сверхпроводимость никак нельзя объяснить тепловым движением электронов, было убедительно доказано Камерлинг-Оннесом в опытах, в которых тонкий слой металла-сверхпроводника, нанесенный на несверхпроводящие проволоки, оставался сверхпроводящим. Казалось бы, электроны из покрытия с течением времени должны проникать в несверхпроводник, и среднее движение, отвечающее электрическому току, будет затухать. А это значит, что система не должна бы быть сверхпроводящей.

Если бы мы захотели приписывать сверхпроводимость свободным электронам, то пришлось бы считать их неучаствующими в тепловом движении, т. е. считать, что отрицательное электричество в сверхпроводнике с током не участвует ни в каком движении, кроме того, которое, составляет электрический ток. Против такого представления говорит не только теория Резерфорда — Бора, согласно которой всюду внутри тела должны действовать сильные электрические поля, но и тот факт, что сверхпроводимость разрушается умеренными магнитными полями. Ведь в эффекте Холла поперечные силы, создаваемые силой Лоренца, должны уравновешиваться накоплением электростатических зарядов на поверхностях, так что магнитное поле не могло бы действовать на электроны.

Поэтому электропроводность следует связывать, по-видимому, с периферийными электронами атома, движущимися вокруг ядер с большой скоростью. Действительно, согласно теории Бора, трудно себе представить, чтобы обращающиеся с большой скоростью периферийные электроны в атомах, например паров ртути, теряли существенную часть своей скорости при сжижении, сопровождаемом сравнительно малыми изменениями энергии. Поэтому при современном состоянии наших знаний дело выглядит так, как будто свободных электронов в металлах нет вообще. Тогда проводимость металла должна заключаться в том, что атомы обмениваются периферийными электронами. Но если какой-нибудь атом получит от соседнего атома электрон, не отдавая приблизительно в то же время свой электрон соседнему атому, то энергия нашего атома должна претерпевать сильные изменения, чего, конечно, не происходит в случае токов в сверхпроводнике, циркулирующих без затраты энергии. Таким образом, представляется неизбежным, что сверхпроводящие токи переносятся замкнутыми цепочками молекул (проводящими цепочками), электроны которых беспрестанно совершают циклический обмен. Поэтому Камерлинг-Оннес сравнивает замкнутые токи в сверхпроводниках с молекулярными токами Ампера.

При нашем явно недостаточном знании законов квантового поведения сложных систем мы очень далеки от того, чтобы воплотить эту довольно неопределенную идею в теорию. Мы можем лишь поставить несколько

вопросов, которые могут быть решены экспериментально. Правда ли, что эта граница между двумя сверхпроводящими металлами никогда не бывает сверхпроводящей? Далее напрашивается мысль, что по этой причине сверхпроводимость до сих пор обнаруживалась только у тех металлов, точка плавления которых лежит при сравнительно низкой температуре, так как примеси в таких металлах могут существовать не в виде истинного раствора, а в виде малых комплексов, которые выделяются при пластическом состоянии металла.

Далее, необходимо иметь в виду, что проводящие цепочки могут пропускать не сколь угодно слабые, а только конечные токи определенной величины, что также можно проверить опытом.

Идея, что проводящие цепочки могут разрушаться магнитным полем, является естественной и даже почти необходимой, так же, как и представление о том, что проводящие цепочки разрушаются тепловым движением, если оно достаточно сильное, а участвующие в нем кванты энергии  $h\nu$  достаточно большие. Таким образом можно понять переход сверхпроводника в нормальный проводник при повышении температуры и, может быть, даже резкую температурную границу сверхпроводимости. Электропроводность при обычной температуре объясняется, возможно, беспрестанном образованием и разрушением проводящих цепочек при тепловом движении.

Это фантазирование можно оправдать только теперешним затруднительным положением теории. Ясно, что для объяснения сверхпроводимости надо искать новые пути. Но не исключено, что проводимость при обычной температуре основывается на сверхпроводимости, беспрестанно разрушаемой тепловым движением.

Эта мысль подсказывается тем, что частота перехода электронов к соседнему атому, возможно, тесно связана с частотой обращения электронов в изолированном атоме. Таким образом, мы приходим к предположению, что элементарные токи отдельных проводящих цепочек должны достигать значительной величины. Если эта идея должна сохранить квантовую причину элементарных токов, то было бы очевидно, что такие цепочки никак не могут содержать разные атомы.

P. S. Указанные в конце предположения, не претендующие, впрочем, на новизну<sup>2</sup>, частично опровергаются важным экспериментом, выполненным в последние месяцы Камерлинг-Оннесом. Именно, он показал, что в месте контакта различных сверхпроводников (свинца и олова) измеримого омического сопротивления не существует.

<sup>2</sup> Ср., например, В. F. H a b e r. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1919, 506.

## К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ \*

В заметке, опубликованной недавно в этом журнале <sup>1</sup>, я предложил оптический эксперимент, для которого, по моим соображениям, волновая теория должна дать иной результат, чем квантовая теория. Рассуждение было таким. Движущаяся в фокальной плоскости линзы частица каналовых лучей испускает свет с эксцентричными поверхностями равной фазы, который при преломлении в линзе превращается в свет с непараллельными плоскостями равной фазы (в «веерообразную» систему плоскостей). Частота, а значит и скорость распространения такого света, есть функция точки. Если мы будем пропускать такой свет через диспергирующую среду, то в ней скорость распространения поверхностей равной фазы будет функцией точки; значит, поверхности равной фазы при прохождении через диспергирующую среду будут поворачиваться, что оптически должно наблюдаться как отклонение света.

Так как Эренфест и Лауэ выразили сомнение в доказательности этого рассуждения, я исследовал распространение света в диспергирующих средах с точки зрения волновой теории более подробно и действительно нашел, что упомянутое рассуждение ведет к неверному результату. Причина этого, как правильно указал Эренфест, состоит в том, что если мы будем следить за гребнем волны, то в диспергирующих средах можем достичь точек, лежащих вне данного пуга волн, и тогда плоскость гребня волны хотя и поворачивается, но физически она уже не существует; вместо нее в другом месте возникает новая плоскость с новой ориентацией.

Наша цель заключается в том, чтобы найти с точки зрения волновой теории точное математическое описание процесса, происходящего в диспергирующей среде. При этом заранее можно ограничиться рассмотре-

\* *Zur Theorie der Lichtfortpflanzung in dispergierenden Medien.* Sitzungsber. preuss Akad. Wiss., Phys.-math., Kl., 1922, 18—22.

<sup>1</sup> Статья 49.

нием двумерных процессов, т. е. таких, при которых составляющие поля не зависят от координаты  $z$ . Мы будем исходить из того, что в отношении чисто синусоидальных волн диспергирующие среды не отличаются от недиспергирующих. Поэтому, если  $\varphi$  означает какую-нибудь функцию, удовлетворяющую волновому уравнению, например,  $z$ -компоненту напряженности электрического поля, то формула

$$\varphi = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{j\left[\omega\left(t - \frac{r}{V}\right) + \alpha\right]} \quad (1)$$

будет решением волнового уравнения для всех  $r$ , больших по сравнению с длиной волны  $2\pi V/\omega = \lambda$ , причем  $\varphi$  означает амплитуду в момент времени  $t$  в точке наблюдения  $(x, y)$ , находящейся на расстоянии  $r$  от фиксированной точки  $(\xi, \eta)$ . Через  $A, \omega, V$  и  $\alpha$  обозначены вещественные постоянные, причем вследствие оптических свойств среды  $\omega$  и  $V$  связаны между собой некоторым соотношением. Всякая аддитивная комбинация решений типа (1), вследствие линейности дифференциальных уравнений, снова есть решение.

Представим себе теперь, что на непрерывной заданной кривой в плоскости  $XU$  располагается непрерывный ряд источников, возбуждающих волны типа (1). Тогда положения источников  $(\xi, \eta)$  следует рассматривать как заданную функцию длины дуги  $s$  на кривой. На достаточном удалении от кривой решением уравнений тогда будет интеграл, взятый по этой кривой,

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \int \frac{A}{\sqrt{r}} e^{jH} ds, \\ H &= \omega\left(t - \frac{r}{V}\right) + \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Величины  $A, \omega, \alpha$  и  $V$  следует считать медленно меняющимися на кривой, так что их изменение при продвижении по кривой на длину волны  $\lambda$  бесконечно мало. Длину волны будем считать малой по сравнению с радиусом кривизны кривой, а этот радиус — малым по сравнению с расстоянием от точки наблюдения  $r$  до точек кривой. Вычисление интеграла (2) приводит к теории распространения света, включающей теорию явлений дифракции Фраунгофера и Френеля в рассмотренном здесь цилиндрическом случае при условии, что величина  $\omega$  постоянна. Если же  $\omega$  зависит от  $s$ , получаются нестационарные решения, в которых ход лучей зависит от времени.

Нас здесь интересует не проблема дифракции, а проблема оптики в пренебрежении дифракцией. Зададим вопрос: какие точки к моменту времени  $t$  будут освещенными и какие нет, и притом без учета явлений диф-

ракции. На этот вопрос легко ответить в случае решений вида (2). Величина  $H$  зависит от выбора точки наблюдения и точки на кривой и в общем случае изменяется быстро, когда точка источника движется по кривой; тогда  $e^{iH}$  будет быстро осциллирующей функцией. Поэтому существенный вклад в интеграл могут вносить только те части кривой, для которых  $\frac{\partial H}{\partial s}$  обращается в нуль. Если в рассматриваемый момент времени такие части кривой для точки наблюдения существуют, то она «освещена», в противном случае она «затемнена».

Выберем теперь в качестве кривой отрезок оси  $X$  между  $\xi = -b$  и  $\xi = +b$  и рассмотрим решение только для точек наблюдения с положительными  $y$ . Если мы будем интересоваться только осью пучка лучей, считая его бесконечно тонким, то достаточно, очевидно, найти условие освещения для середины отрезка ( $\xi = 0$ ). Мы получаем, следовательно, условие для хода лучей

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = 0. \quad (3)$$

В рассматриваемых нами геометрических условиях волновая нормаль, очевидно, направлена по радиус-вектору, проведенному из начала координат в точку наблюдения.

Нас интересует случай пучка в диспергирующей среде, изменяющей направление лучей с постоянной угловой скоростью. Мы будем приближаться к этому случаю шаг за шагом, рассматривая более простые случаи.

1. Цуг волн постоянного направления. Специализируем равенство (2) условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned}$$

Кроме того, с хорошей точностью здесь и в дальнейшем положим

$$r = r_0 - \frac{x}{r_0} \xi, \quad (4)$$

где  $r_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Условие (3) дает

$$x = 0.$$

Таким образом, свет распространяется вдоль оси  $Y$ .

2. Цуг волн переменного направления в недиспергирующей среде. Полагаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} &= \gamma, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$H = (\omega_0 + \gamma\xi) \left( t - \frac{r_0}{V} + \frac{1}{V} \frac{x}{r_0} \xi \right) + \alpha.$$

Скорость  $V$  в этом случае не зависит от частоты  $\omega/2\pi$ . Уравнение (3) дает

$$\gamma \left( t - \frac{r_0}{V} \right) + \frac{\omega_0}{V} \frac{x}{r_0} = 0. \quad (5)$$

В том, что здесь мы действительно имеем дело с лучом переменного направления, можно убедиться следующим образом. Свет, достигающий точки наблюдения к моменту времени  $t$ , проходит начало координат в момент  $t' = t - r_0/V$ . Освещенные точки наблюдения располагаются в направлении

$$\frac{x}{r_0} = -\gamma \frac{V}{\omega_0} t'.$$

Следовательно, это направление изменяется в зависимости от времени  $t'$ . Свет, проходящий через начало координат в определенный момент времени  $t'$ , распространяется прямолинейно.

3. Цуг волн переменного направления в диспергирующей среде. Снова полагаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} &= \gamma, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned}$$

Однако здесь надо учитывать, что  $V$  зависит от  $\omega$ . Полагая  $n = c/V$ , имеем

$$n = n_0 + \frac{dn}{d\omega} d\omega = n_0 + \frac{dn}{d\omega} \gamma \xi,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{c} \left( n_0 + \frac{dn}{d\omega} \gamma \xi \right);$$

таким образом,

$$H = (\omega_0 + \gamma\xi) \left[ t - \frac{1}{c} \left( r_0 - \frac{x}{r_0} \xi \right) \right] \left( n_0 + \frac{dn}{d\omega} \gamma \xi \right) + \alpha.$$

Условие (3) здесь дает

$$\gamma \left[ t - \frac{r_0}{c} \left( n_0 + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) \right] + \frac{\omega_0}{c} n_0 \frac{x}{r_0} = 0. \quad (6)$$

Спросим теперь: что будет происходить с группой волн, пересекающей плоскость  $y = 0$  за короткий промежуток времени вблизи момента  $t = 0$ ? Как известно, такая группа распространяется не со скоростью  $V = c/n$ , но с групповой скоростью

$$V_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}.$$

Для точек наблюдения, освещаемых этой группой волн, должно выполняться соотношение

$$t - \frac{r_0}{V_g} = t - \frac{r_0}{c} \left( n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right).$$

Таким образом, соотношение (6) и в этом случае дает

$$x = 0. \tag{7}$$

Следовательно, группа волн распространяется прямолинейно вдоль оси  $Y$ , и волновая нормаль тоже направлена по оси  $Y$ .

Тем самым показано, что свет, испускаемый движущимися каналовыми лучами, в диспергирующих средах отклонения не испытывает — в противоречии с прежним элементарным рассмотрением. Это показал также и опыт, выполненный Гейгером и Боте в Имперском физико-техническом институте при дружеском содействии Э. Варбурга. В соответствии с результатом этого теоретического рассмотрения, получить из опыта более глубокие заключения о природе элементарного процесса невозможно.

Следует еще заметить, что отклонение света в диспергирующих средах в зависимости от скорости излучающей молекулы привело бы к противоречию со вторым началом термодинамики, на что обратил внимание Лауэ. Но поскольку такого искривления в соответствии с волновой теорией не происходит, вряд ли нужно более подробно останавливаться здесь на этом обстоятельстве.

Считаю своим приятным долгом выразить сердечную благодарность Варбургу, Гейгеру и Боте.

Поступила 27 февраля 1922 г.



## КВАНТОВО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ОПЫТУ ШТЕРНА И ГЕРЛАХА \*

(Совместно с П. Эренфестом)

§ 1. Чтобы установить наличие у атомов магнитного момента и, если он имеется, его ориентацию при прохождении через магнитное поле, О. Штерн и В. Герлах<sup>1</sup> пропускали пучок атомов серебра через магнитное поле. Этот опыт дал очень интересный результат: магнитные моменты всех атомов выстраиваются вдоль силовых линий магнитного поля, причем примерно половина атомов ориентируется по полю, другая половина — против поля. Естественно напрашивается вопрос: как же получается такая ориентация атомов?

§ 2. Прежде всего надо отметить, что при входе в отклоняющее магнитное поле атомы не сталкиваются — последние столкновения между ними происходят в испарительной камере плавильной печи.

Спросим сначала, как вообще меняют свою ориентацию магнитные атомы под действием магнитного поля? Если не учитывать испускания и поглощения света, столкновений и других аналогичных процессов, то атомы в магнитном поле будут прецессировать вокруг направления поля (ларморова прецессия). Если направление поля меняется медленно по сравнению со скоростью прецессии, то угол прецессии сохраняется. Поэтому требуемые квантовой теорией углы прецессии (0 и  $\pi$  для атомов серебра, как показывает опыт Штерна и Герлаха) не могут установиться без внешних воздействий, например, без излучения или столкновений.

§ 3. Наиболее очевидное объяснение опыта состоит на первый взгляд в том, что атомы ориентируются при входе в поле электромагнита в результате обмена излучением. Однако в этом случае атомы должны были бы не только отдавать энергию полю излучения, но и приобретать ее — последнее относится к атомам, ориентирующимся антипараллельно си-

\* *Quantentheoretische Bemerkungen zum Experiment von Stern und Gerlach.* (Mit. P. Ehrenfest). *Zs. Phys.*, 1922, 11, 31—34.

<sup>1</sup> O. Stern, W. Gerlach. *Zs. Phys.*, 9, 349, 1922.

ловым линиям. Чему же равно время релаксации магнитных моментов атомов под действием излучения (при комнатной температуре)? Сравнительно точно это время можно оценить, рассматривая переходы из одних квантовых состояний в другие. Мы ведь знаем, что в подобных случаях время перехода для ансамбля атомов совпадает — по крайней мере по порядку величины — с временем релаксации соответствующей классической модели. В случае прецессии атома, обладающего магнитным моментом, такую модель можно представить в виде магнитного диполя, излучающего при коническом вращении. Если бы на прецессию влияло только *спонтанное излучение*, то время релаксации по порядку величины достигло бы  $10^{11}$  сек (в магнитном поле 10 000 гаусс). Однако если учесть влияние теплового излучения при комнатной температуре («*положительное и отрицательное индуцированное излучение*»<sup>2</sup>), то время релаксации сокращается примерно до  $10^9$  сек.

Во всяком случае эти времена такого порядка, что они не имеют никакого отношения к эксперименту, так как на опыте время релаксации оказывается меньше чем  $10^{-4}$  сек.

§ 4. При попытке преодолеть эту трудность напрашиваются два альтернативных предположения.

А. В действительности механизм таков, что атомы никогда не могут попадать в состояние, в котором они квантуются *не полностью*.

Б. При быстрых воздействиях получаются состояния, не удовлетворяющие квантовым правилам ориентации; релаксация к квантовым состояниям происходит путем спонтанного и индуцированного излучения квантов света, причем скорость реакции гораздо больше, чем при переходах из одних квантовых состояний в другие.

В настоящее время, по-видимому, еще нельзя сделать выбор между этими двумя альтернативами; однако принципиальное различие между ними и характерные трудности, к которым ведет каждая из этих альтернатив, можно выявить отчетливо.

§ 5. О б с у ж д е н и е а л ь т е р н а т и в ы А. 1. Следствия этой альтернативы особенно хорошо проявляются на примере опыта Штерна — Герлаха: в испарительной камере плавильной печи каждый атом серебра полностью квантуется непосредственно после каждого столкновения, и, следовательно, магнитная ось атома ориентируется по магнитному полю в месте столкновения, хотя бы и очень слабому. После своего последнего столкновения атом, проходя через различные части поля, сохраняет свою ориентацию, постоянно следующую направлению направиению поля в соответствующих местах<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> Ср. А. Einstein. Phys. Zs. 1917, 18, 121, § 2 (Статья 44).

<sup>3</sup> Подобное предположение уже было высказано Г. Брейтом во время дискуссии на физическом коллоквиуме в Лейдене.

2. При этом одна часть моментов (одноквантовые моменты) устанавливается параллельно, другая часть — антипараллельно полю, и статистическое распределение определяется температурой и напряженностью поля в испарительном объеме печи, а вовсе не температурой (излучения) и напряженностями поля в пространстве, через которое они пролетают позднее!

3. Поэтому приходится предполагать следующее: даже очень слабые поля должны определять ориентацию непосредственно после столкновения (т. е. после воздействия очень сильных полей). Например, при изменениях направления магнитного поля, как угодно быстрых по сравнению со скоростью ларморовой прецессии, магнитная ось атома должна следовать за направлением поля так же, как и при сколь угодно медленных изменениях. Иначе говоря, при произвольно быстром изменении внешних условий механической системы она должна приходиться в такое же конечное состояние, как и при бесконечно медленном (адиабатическом) изменении внешних условий. В том, что это приводит к нарушению уравнений механики, можно легко убедиться на конкретных примерах <sup>4</sup>.

§ 6. О б с у ж д е н и е а л ь т е р н а т и в ы · Б. 1. Для опыта Штерна — Герлаха получилась бы следующая картина: в испарительном объеме печи магнитная ось атома непосредственно после столкновения ориентируется произвольно по отношению к слабому магнитному полю в месте столкновения. Ориентация возникает при инфракрасном облучении, а именно при спонтанном излучении и при положительном и отрицательном индуцированном излучении, с установлением параллельно и антипараллельно полю. При этом существенно предположение, что таким переходом из *неквантовых* в квантовые состояния соответствуют вероятности перехода, по порядку величины намного большие, чем вероятности перехода из *квантовых* состояний в квантовые <sup>5</sup>. После последнего столкновения ориентация атома при пролете через различные области поля меняется квазиадиабатически с изменением направления поля, и возникающие при этом ничтожные угловые отклонения от поля исчезают благо-

<sup>4</sup> Вот мысленный пример: как известно, адиабатическое сокращение длины нити тяжелого маятника изменяет частоту  $\nu$  и энергию  $\epsilon$  так, что правило квантования выполняется. Если же укоротить нить быстро, например при вертикальном положении, то  $\nu$  увеличивается, тогда как энергия, согласно механике, сохраняется. Следовательно, альтернатива «А» требует затраты работы, необъяснимой механически.

Второй пример: магнитный атом в слабом магнитном поле. При бесконечно медленном повороте поля (бесконечно медленном по сравнению со скоростью прецессии) магнитная ось атома в соответствии с законами механики следует за направлением поля. Если то же самое происходит при быстром изменении направления поля, то должно наблюдаться изменение вращательного момента, непонятное с точки зрения механики.

<sup>5</sup> В соответствии с временем релаксации  $10^{-4}$  сек вместо  $10^9$  сек.

даря чрезвычайно слабому обмену излучением в инфракрасной области частот (еще более низких, чем частота прецессии).

2. Статистическое распределение между параллельной и антипараллельной полю ориентациями и в этом случае определялось бы в основном температурой и напряженностью поля в плавильной печи!

3. Согласно альтернативе «Б», одноатомный пар, атомы которого обладают магнитным моментом, будет излучать и поглощать в магнитном поле в области частот, более низких частоты прецессии, следовательно, при соответствующем выборе магнитного поля в области электрических волн.

4. Альтернатива «Б» отличается тем, что переход в квантовые состояния зависит в ней от возможности спонтанного и индуцированного излучения. Следовательно, она приводит к принципиальному различию между системами чисто механическими и системами, способными излучать. Например, ось вращения симметричного тяжелого волчка могла бы принимать квантованные направления по отношению к полю тяжести только при условии, что волчок несет соответствующий электрический заряд. Если же гипотезу «Б» относительно установления ориентации попытаться обобщить на общий случай переходов в квантовые состояния, допуская, например, что и колебания кристаллической решетки, и вращения молекулы самопроизвольно переходят к квантовым траекториям только при наличии соответствующих электрических зарядов, то возникает очевидное противоречие с опытными данными по теплоемкости, например, алмаза и газообразного водорода ( $H_2$ ).

§ 7. Перечисленные трудности показывают, насколько несовершенны обе рассмотренные выше попытки объяснить результаты опыта Штерна — Герлаха. Идею Бора о том, что в сложных полях вообще не существует точного квантования, мы здесь не рассматривали.

Лейден — Берлин, май — июнь 1922 г.

Поступила 21 августа 1922 г.

**ЗАМЕЧАНИЕ К ЗАМЕТКЕ В. АНДЕРСОНА  
„НОВОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА  
СОЛНЕЧНОЙ КОРОНЫ“\***

Выраженная в названной заметке точка зрения, что отклонение света в окрестности Солнца может вызываться электронным газом, представляется мне недостаточно обоснованной. Не разбирая совсем вопрос о том, возможно ли равновесие рассмотренного автором типа и является ли электронный газ с такой плотностью достаточно прозрачным, можно утверждать, что эта гипотеза не может объяснить отклонение света, так как она приводит к отклонению, имеющему обратный знак.

Андерсон (Astron. Nachr., 1923, 218, 251) связывал непрерывный спектр солнечной короны со свободными электронами. Он сделал также попытку объяснить отклонение света в поле Солнца его преломлением в электронном газе. Эйнштейн в этой и последующей (статья 57) статьях обращает внимание на то, что показатель преломления электронного газа меньше единицы.

.....

\* *Bemerkung zu der Notiz von W. Anderson «Eine neue Erklärung des kontinuierlichen Koronaspektrums».* Astron. Nachr., 1923, 219, 19.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРА КАНАЛОВ В ФИЛЬТРАХ \*

(Совместно с Г. Мюзамом)

Точного метода для определения проницаемости фильтров до сих пор не существует. Мембранные фильтры (Бехгольд, де Хэн) калибруются по скорости протекания воды, твердые фильтры (Чемб. рлен, Беркефельд, Пукал и др.) — по их проницаемости для коллоидных частиц, размеры которых приблизительно известны. Такая калибровка является, конечно, очень грубой, вследствие непредвиденных ошибок, вносимых адсорбцией, а также и потому, что действительные размеры частиц эталонных веществ (сывороточного альбумина, гемоглобина и т. д.) неизвестны.

Ниже указывается надежный и легко осуществляемый метод определения наибольшего размера, который может иметь частица органического или живого вещества, прошедшая через фильтр. Фильтр, изготовленный из пористого материала, можно рассматривать как стенку, пронизанную каналами различной ширины. Проницаемость каждого канала определяется его самым узким местом. Поперечник же самого узкого места самого узкого канала легко определить с помощью явлений капиллярности. Действительно, если вначале заполнить канал жидкостью, а затем вытеснить ее сжатым воздухом, то необходимо преодолеть капиллярную силу, если жидкость смачивает стенки канала. В круглом сечении избыточное давление, необходимое для преодоления капиллярных сил, равно  $2\sigma/r$ , причем  $\sigma$  означает капиллярную постоянную,  $r$  — радиус канала. Чтобы полностью вытеснить жидкость, необходимо приложить давление  $2\sigma/r_{\min}$ , где  $r_{\min}$  означает радиус канала в самом узком месте. Если пластина пронизана в поперечном направлении большим числом каналов, заполненных первоначально жидкостью, то воздух начнет проходить через пластину только при таком давлении, при каком он проникает через ка-

\* *Experimentelle Bestimmung der Kanalweite von Filtern.* (Mit H. Mühsam). Dtsch. Med. Wochenschr., 1923, 49, 1012—1013.

нал с наибольшим размером узкого места. Если  $r_0$  — радиус узкого места самого широкого канала, то избыточное давление, необходимое для проникновения воздуха, составит  $2\sigma/r_0$ . Легко видеть, что этот результат существенно не изменится, если каналы образуют решетку. Радиус канала  $r_0$  определяет границу фильтрации; для краткости мы будем называть  $2r_0$  «размером фильтра».

Мы определили экспериментально «размер» глиняного фильтра, применяемого для некоторых бактериологических целей. Схема нашей установки изображена на рис. 1. Глиняный фильтр имел форму полого сосуда. Он был присоединен к плангу со сжатым воздухом и погружен в стеклянный сосуд, наполненный эфиром. Эфир был взят потому, что он имеет капиллярную постоянную, примерно в четыре раза меньшую, чем вода.

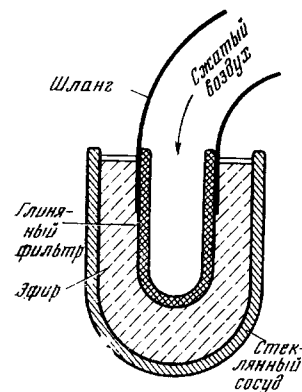


Рис. 1.

Специальными опытами мы убедились, что поры глиняного сосуда после погружения его в жидкость заполняются очень быстро. Таким образом, смачивание стенок каналов заведомо происходит.

Наблюдалось появление в эфире пузырьков, образуемых воздухом, прошедшим через глиняный фильтр. Пузырьки появлялись при избыточном давлении, равном примерно одной атмосфере.

Пренебрегая тем, что поперечное сечение канала (в самом узком месте последнего), возможно, отличается от круга, мы можем положить

$$p = \frac{2\sigma}{r_0} = \frac{4\sigma}{2r_0},$$

причем приближенно следует взять  $p = 10^6$ ,  $\sigma = 18$ . Тогда получаем:

$$2r_0 = 6,72 \cdot 10^{-4}.$$

«Размер фильтра» составил, следовательно, около  $6,7 \text{ мк}^1$ .

<sup>1</sup> С другой стороны, определяя с помощью закона Пуазейля ширину каналов фильтров из экспериментально определенного вязкого сопротивления фильтров и экспериментально найденного общего объема каналов в предположении, что фильтр имеет неизвестное число одинаковых каналов с постоянным поперечным сечением, мы получаем значение, большее примерно в десять раз. Это и неудивительно, так как в действительности поперечное сечение канала весьма непостоянно. Напротив, при измерении с помощью капиллярности получается как раз та ширина фильтра, которая определяет процесс фильтрования.

Описанный здесь метод становится неудобным, если дело идет о значительно более мелкопористых фильтрах. Например, если бы было

$$2r_0 = 10^{-6} \text{ см} \left( = \frac{1}{100} \text{ мк} \right),$$

то для измерения пришлось бы применять избыточное давление в 72 атмосферы. Применяя вместо эфира жидкую углекислоту, постоянная капиллярности которой при обыкновенной температуре по порядку величины равна 1, указанный здесь метод можно распространить на фильтры с более тонкими порами.



## К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РАДИАЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ \*

(Совместно с П. Эренфестом)

В опубликованной недавно в этом журнале <sup>1</sup> работе о совместимости формулы излучения Планка с квантовой теорией рассеяния на свободно движущихся электронах В. Паули предложил интересный статистический закон для вероятности возможных, согласно теории Комптона и Дебая, элементарных актов рассеяния квантов в (изотропном) поле излучения. При этом речь идет об элементарном процессе рассеяния, при котором, с одной стороны, в результате столкновения квант переходит из элемента телесного угла  $d\kappa$  и элементарного интервала частот  $dv$  в элемент телесного угла  $d\kappa'$  и элементарный интервал частот  $dv'$ . С другой стороны, электрон при таком процессе переводится из трехмерного элемента пространства скоростей (или импульсов)  $d\omega$  в другой элемент  $d\omega'$ , совершенно отличающийся от первого таким образом, что законы сохранения импульса и энергии при этом переходе выполняются. Для вероятности таких «переходов определенного рода» Паули предложил гипотетический статистический закон

$$dW = (A\rho + B\rho\rho') dt. \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  и  $\rho'$  означают плотности излучения, соответствующие частотам  $\nu$  и  $\nu'$ , тогда как  $A$  и  $B$  — величины, зависящие от выбора элементарных интервалов, но не зависящие от  $\rho$  ( $\nu$ ). Паули показал, что если статистический закон этого вида выполняется, то электронный газ с максвелловским распределением скоростей остается в статистическом равновесии с излучением, подчиняющимся формуле Планка при одинаковой температуре.

.....  
\* *Zur Quantentheorie des Strahlungsgleichgewichts.* (Mit P. Ehrenfest). Zs. Phys., 1923, 19, 301—306.

<sup>1</sup> W. Pauli. Zs. Phys., 1923, 18, 272.— *Прим. ред.*

Парадоксальным в этом соотношении выглядит второе слагаемое в скобках, в соответствии с которым количество элементарных актов рассеяния на электроны (квазипокоящемся) в единицу времени пропорционально не просто плотности излучения, а зависит еще от плотности излучения  $\rho'$  такой частоты  $\nu'$ , которую имеет квант, изменившийся в результате элементарного акта. Однако Паули показал, что при отбрасывании этого члена вместо формулы излучения Планка для теплового равновесия получается формула Вина, и Паули усматривает в этом члене квантово-теоретическое выражение тех свойств излучения, которые в волновой теории проявляются в виде интерференционных флуктуаций.

Один из нас в опубликованной ранее работе<sup>2</sup> указал статистические элементарные законы для поглощения и испускания света атомом Бора, из которых следует формула излучения Планка. Поставим теперь задачу найти связь предложенных ранее элементарных законов с соотношением (1) так, чтобы основы обоих рассмотрений получались с единой и более общей точки зрения. На самом деле оказывается, что таким способом можно прийти к более глубокому пониманию взаимодействия между излучением и материальными частицами. При последующем изложении мы будем, исходя из первоначальных элементарных законов, шаг за шагом обобщать эти законы.

§ 1. *Первоначальные статистические гипотезы и их связь с формулой излучения Планка*<sup>3</sup>. Рассмотрим молекулу (или атом), обладающую определенными квантовыми состояниями  $Z$ . Пусть  $Z$  и  $Z^*$  будут два таких состояния с энергией соответственно  $\epsilon$  и  $\epsilon^*$  ( $\epsilon^* > \epsilon$ ), которые могут переходить одно в другое, получая или отдавая квант  $\epsilon^* - \epsilon = h\nu$ . Пусть эта молекула находится в изотропном поле излучения, спектральная плотность которого  $\rho$  пока пусть остается произвольной функцией  $\nu$ . Переходы между состояниями  $Z$  и  $Z^*$  должны определяться следующими вероятностными законами.

1. Для перехода находящейся в состоянии  $Z$  молекулы в состояние  $Z^*$  после поглощения кванта  $h\nu$  (положительное индуцированное излучение)

$$dW = b\rho dt. \quad (2)$$

2. Для перехода находящейся в состоянии  $Z^*$  молекулы в состояние  $Z$  с испусканием кванта  $h\nu$  под действием поля излучения (отрицательное индуцированное излучение)

$$dW = b\rho dt. \quad (3)$$

<sup>2</sup> A. Einstein. Phys. Zs., 1917, 18, 121 (Статья 44).

<sup>3</sup> Этот параграф не содержит ничего нового по сравнению с цитированной выше статьей.

3. Для перехода находящейся в состоянии  $Z^*$  молекулы в состояние  $Z$  при испускании кванта  $h\nu$  без влияния поля излучения (спонтанное излучение)

$$dW = a dt. \quad (4)$$

Суммарная вероятность перехода  $Z^* \rightarrow Z$  для молекулы, находящейся в  $Z^*$ , следовательно, будет

$$dW = (a + b\rho) dt. \quad (5)$$

При этом статистические веса или вероятности всех квантовых состояний принимаются равными единице. Мы предполагаем, что квантовые состояния с более высоким весом можно представить в виде совокупности нескольких разных дискретных квантовых состояний с одинаковой энергией.

Если в поле излучения имеется много таких молекул, то число  $n$  молекул, находящихся в состоянии  $Z$ , связано с числом  $n^*$  молекул в состоянии  $Z^*$  формулой Больцмана

$$\frac{n^*}{n} = e^{-\frac{\epsilon^* - \epsilon}{kT}} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \quad (6)$$

Чтобы это распределение не изменялось при рассматриваемом нами способе обмена излучением, в соответствии с соотношениями (2) и (5), должно выполняться условие

$$nb\rho = n^*(a + b\rho). \quad (7)$$

Из равенств (6) и (7) следует

$$\rho = \frac{\frac{a}{b}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (8)$$

т. е. формула излучения Планка, если только коэффициенты  $a$  и  $b$  всегда будут удовлетворять соотношению

$$\frac{a}{b} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}. \quad (9)$$

§ 2. Распространение этого рассмотрения на случай, когда молекулы могут двигаться свободно. Прежде всего сделаем замечание, необходимое для понимания последующего и встречающееся также у Паули. Для вывода, изложенного в § 1, несущественно, что молекула может иметь только дискретные состояния или значения энергии. Ведь если плотность состояний — непрерывная функция в фазовом пространстве, то мы вправе заметить состояния  $Z$ ,  $Z^*$  равновероятными, априори бесконечно малыми областями состояний, между которыми возможен радиационный пере-

ход при соблюдении условия  $\varepsilon^* - \varepsilon = h\nu$ . Тогда будут выполняться соотношения того же вида, что и равенства (2) — (4). Так как выполняется также соотношение (6), то в нашем рассмотрении ничего существенного не изменится.

Далее, если рассматриваемая молекула анизотропна, то исследуемый элементарный процесс или его вероятность будет также зависеть от ориентации молекулы и от направления и поляризации пучка света, взаимодействующего с молекулой в упомянутом процессе. Для таких элементарных процессов и «обратных» им рассуждения § 1 снова остаются в силе. Однако при этом необходимо учитывать одно обстоятельство, на которое мы пока не обращали внимания и которое мы теперь рассмотрим.

Переход  $Z^* \rightarrow Z$  нельзя рассматривать просто как обращение во времени процесса  $Z \rightarrow Z^*$ . Дело не только в том, что в этом случае во втором процессе квант испускался бы в направлении, противоположном тому, которое он имел бы в первом процессе, так что оба процесса в смысле влияния на статистическое равновесие не могли бы взаимно уравниваться. Ведь в некоторых случаях, например, когда на атом водорода наложено постоянное магнитное поле, по теории Бора обратных переходов из  $Z$  в  $Z^*$  не существует вообще. Поэтому в нашем рассмотрении мы должны *предполагать* для каждого перехода  $Z \rightarrow Z^*$  существование перехода  $Z^* \rightarrow Z$ , такого, что при первом процессе поглощается квант того же направления и вообще тождественный тому кванту, который испускается во втором процессе. Для переходов, определенных таким образом, статистические законы, указанные в § 1, должны выполняться.

Перейдем теперь к случаю, когда молекулы могут двигаться, изменяя свою скорость в результате процесса излучения. В этом случае состояние молекулы определяется компонентами скорости ее центра тяжести, а области состояний  $Z$  и  $Z^*$  — элементарными интервалами компонент скоростей. Тогда  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^*$  представляют собой значения полной энергии, включающей кинетическую энергию. Элементарные процессы определенного рода в этом случае всегда будут происходить только при взаимодействии с излучением в определенном телесном угле. Разумеется, постоянные  $a$  и  $b$  и здесь зависят от выбора рассматриваемого элементарного процесса. Если для всех элементарных процессов определенного рода соотношение (9) соблюдается, то температурное равновесие обеспечивается всегда, какой бы ни была зависимость  $a$  от конкретного выбора элементарного процесса.

§ 3. *Распространение статистических элементарных законов на случай, когда в элементарном процессе участвуют несколько квантов.* Для элементарного процесса рассеяния характерно, что в нем участвуют два кванта — падающий и рассеянный, причем они имеют разные направления и в общем случае (при движущихся рассеивающих молекулах, атомах или электронах) также разную частоту. Чтобы охватить та-

кие процессы и показать их связь с формулой излучения, мы обобщим схему § 1. Допустим, что в рассмотренном элементарном процессе молекула может поглощать кванты света  $h\nu_1, h\nu_2, \dots$  и испускать кванты  $h\nu'_1, h\nu'_2, \dots$ , причем и те и другие входят в пучки света определенного, для каждого кванта особого направления. Соответствующие значения плотности излучения будем обозначать  $\rho_1, \rho_2, \dots$  и  $\rho'_1, \rho'_2, \dots$ . Каждому такому частичному процессу поглощения или испускания сопоставим коэффициенты  $a_1 b_1, a_2 b_2, \dots$  и соответственно  $a'_1 b'_1, a'_2 b'_2, \dots$ .

Обобщая соответственно формулы (2) и (5), положим для этого процесса

$$dW = \prod b_1 \rho_1 \cdot \prod (a'_1 + b'_1 \rho'_1) dt, \quad (10)$$

причем произведение берется по индексам 1, 2, 3..., а коэффициенты  $a_1 b_1$  априори зависят не только от рассматриваемых равновероятных состояний молекулы, между которыми происходит элементарный процесс, но от элементарного телесного угла и элементарного интервала частот, к которым принадлежат отдельные световые кванты.

Вероятность «обратного» процесса определяется тогда формулой

$$dW = \prod (a_1 + b_1 \rho_1) \cdot \prod b'_1 \rho'_1 dt. \quad (11)$$

При этом

$$\varepsilon^* - \varepsilon = \sum h\nu_1 - \sum h\nu'_1, \quad (12)$$

и, следовательно, при термодинамическом равновесии

$$\frac{n^*}{n} = e^{-\frac{\sum h\nu_1 - \sum h\nu'}{kT}}, \quad (13)$$

где  $n^*$  и  $n$  — числа молекул, находящихся в состояниях с более высокой и, соответственно, более низкой энергией. Для радиационного равновесия здесь получается, в соответствии с формулами (10) и (11), условие

$$n \cdot \prod b_1 \rho_1 \prod (a'_1 + b'_1 \rho'_1) = n^* \prod (a_1 + b_1 \rho_1) \prod b'_1 \rho'_1. \quad (14)$$

Покажем, что для формулы излучения Планка это условие выполняется, если только  $a$  и  $b$  удовлетворяют соотношению (9).

Если мы положим

$$\frac{b_1 \rho_1}{a_1 + b_1 \rho_1} e^{-\frac{h\nu_1}{kT}} = f_1 \text{ и т. д.,}$$

$$\frac{b'_1 \rho'_1}{a'_1 + b'_1 \rho'_1} e^{-\frac{h\nu'_1}{kT}} = f'_1 \text{ и т. д.,}$$

то условие (14) принимает вид

$$\frac{f_1 f_2 \dots}{f'_1 f'_2 \dots} = 1. \quad (14a)$$

Но так как для формулы излучения Планка с учетом условия (9) все множители  $f$  равны 1, то соотношение (14a) и тем самым (14) выполняется. Следовательно, обобщенный элементарный закон (10) совместим с формулой излучения Планка.

Чтобы из формулы (10) получить элементарный закон Паули для рассеяния излучения на электронах, необходимо лишь учесть, что оба произведения в этом случае сводятся к одному-единственному множителю, так что имеем формулу

$$dW = b\rho (a + b\rho'),$$

с точностью до обозначений совпадающую с формулой (1).

Поступила 16 октября 1923 г.

## ПРЕДЛАГАЕТ ЛИ ТЕОРИЯ ПОЛЯ ВОЗМОЖНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КВАНТОВОЙ ПРОБЛЕМЫ? \*

### § 1. Общая часть

Большие успехи, достигнутые квантовой теорией за неполную четверть века с момента ее зарождения, не могут скрыть от нас тот факт, что логическое основание этой теории все еще отсутствует. Мы также знаем, что это основание не может заключаться в простом дополнении к классической механике и электродинамике; ведь закон равномерного распределения энергии, вытекающий из классической механики, и следующие из классической электродинамики законы, касающиеся энергетических свойств излучения, стоят в непримиримом противоречии с фактами. Стоит лишь вспомнить о вырождении теплоемкости при низких температурах и о вторичных явлениях, сопровождающих поглощение и рассеяние коротковолнового излучения (эффект Комптона).

Перед лицом фактов, охватываемых квантовыми правилами, можно сомневаться в том, что последовательное дальнейшее развитие существующих теорий позволит преодолеть трудности. Суть этих теорий, известных под названиями: механика, электродинамика Максвелла — Лоренца, теория относительности, заключается в том, что они имеют дело с дифференциальными уравнениями, однозначно определяющими процессы в пространственно-временном четырехмерном континууме при условии, что эти процессы известны для некоторого пространственно-подобного сечения. В однозначном определении временного хода процесса с помощью дифференциальных уравнений в частных производных и заключается метод, позволяющий нам удовлетворять закону причинности. В свете существую-

\* *Bietet die Feldtheorie Möglichkeiten für die Lösung des Quantenproblems?* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1923, 359—364. (Доложено 13 декабря 1923 г.)

щих трудностей приходится сомневаться, что реальные процессы можно описывать дифференциальными уравнениями. Более того, возникает сомнение в том, может ли всегда без исключений выполняться закон причинности в четырехмерном континууме пространства и времени. С точки зрения теории познания все эти сомнения законны и, в свете существующих глубоких трудностей, вполне понятны. Но прежде чем рассматривать столь далеко идущие возможности, мы должны проверить, действительно ли из всех известных нам исследований и фактов следует, что нельзя ограничиться дифференциальными уравнениями в частных производных. Каждому, кто почувствует удивительную уверенность, с которой волновая теория объясняет геометрически столь запутанные явления интерференции и дифракции света, будет трудно поверить, будто дифференциальное уравнение в частных производных в конце концов непригодно для описания реальных фактов.

Рассматривая критически теорию Максвелла — Лоренца, мы видим, что ее фундамент состоит из двух формально слабо связанных частей, а именно из дифференциальных уравнений электромагнитного поля и из уравнений движения (положительных и отрицательных) электронов. Явления дифракции и интерференции, превосходно подтверждаемые опытом, формально определяются в основном одними лишь уравнениями поля, а процессы поглощения, которые теория не может воспроизводить в согласии с опытом, определяются, напротив, главным образом законом движения электрона. Поэтому напрашивается (часто высказываемая) мысль, что уравнения поля необходимо сохранить, а от уравнений движения электронов следует отказаться<sup>1</sup>. Это, конечно, привело бы к тому, что в существующей теории не удалось бы сохранить локализацию энергии в поле. Эту теоретическую возможность мы не будем далее рассматривать по той простой причине, что до сих пор не видно никакого пути для получения новых законов движения электронов. Попытка Ми дополнить уравнения поля таким образом, чтобы они выполнялись и внутри электронов, пока не дала никаких полезных результатов. Этот метод сам по себе мог бы привести к объединению основ теории, сделав излишними особые уравнения движения для электронов. Однако решить квантовую проблему на этом пути также едва ли возможно; это будет показано далее в рассуждении, которое, на мой взгляд, приведет нас к самому важному пункту всей проблемы.

Согласно существующим в настоящее время теориям, начальное состояние системы можно выбрать произвольно; дифференциальные уравне-

<sup>1</sup> Основы механики сами по себе уже противоречат квантовым явлениям (несостоятельность закона равномерного распределения). Поэтому от уравнений движения материальной точки следует отказаться независимо от того, можно ли сохранить теорию поля или нет.



ния определяют затем развитие процесса во времени. Согласно нашим знаниям о квантовых состояниях, особенно тем, которые приобретены в результате развития теории Бора за последнее десятилетие, эта черта классической теории не соответствует действительности. Начальное состояние электрона, движущегося вокруг ядра водорода, нельзя выбрать произвольно: этот выбор должен быть согласован с квантовыми условиями. Вообще говоря, не только развитие во времени, но и начальные состояния подчиняются определенным законам.

Можно ли это свойство процессов природы, которому мы, по-видимому, должны придавать всеобщее значение, описать теорией, основанной на дифференциальных уравнениях в частных производных? Конечно, можно; мы должны только сделать, чтобы уравнения были «переопределены» относительно переменных поля. Другими словами, число дифференциальных уравнений должно быть больше, чем число определяемых ими переменных поля. (В случае общей теории относительности число независимых уравнений должно было бы быть больше, чем число переменных поля, уменьшенное на 4, так как вследствие свободного выбора координат в этой теории 4 переменных поля не определяются уравнениями.) Геометрия Римана показывает нам прекрасный пример переопределенности, имеющей, по-видимому, прямое отношение и к нашей проблеме. Требуя, чтобы все компоненты риманова тензора кривизны  $R_{ik,lm}$  обращались в нуль, мы получаем евклидово пространство, полностью определенное и вообще не нуждающееся в «начальных условиях». В континууме четырех измерений при этом получают 20 алгебраически независимых уравнений, которым удовлетворяют 10 коэффициентов  $g_{\mu\nu}$  квадратичной метрической формы.

Аналогично мы попытаемся внести переопределенность в уравнения электромагнитного и гравитационного полей, ограничивая возможности следующими условиями:

1. Уравнения должны быть общековариантными и в них должны входить только компоненты метрического поля  $g_{\mu\nu}$  и компоненты электрического поля  $\varphi_{\mu\nu}$ .

2. Искомая система должна обязательно содержать уравнения, удовлетворяющие теории гравитации и теории Максвелла, а именно:

$$R_{ii} = -\kappa T_{ii},$$

$$T_{ii} = -\varphi_{i\alpha}\varphi_i^\alpha + \frac{1}{4}g_{ii}\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta},$$

где  $R_{ii}$  — тензор кривизны второго ранга.

3. Искомая система уравнений, переопределяющая поле, во всяком случае должна допускать статическое центрально-симметричное реше-

ние, описывающее, согласно этим уравнениям, положительный или отрицательный электрон.

Если при выполнении этих трех условий удастся в достаточной степени переопределить единое поле с помощью дифференциальных уравнений, то можно надеяться, что этими уравнениями будут одновременно определяться и механические свойства особых точек (электронов) таким образом, что начальные состояния поля и особых точек также будут подчиняться ограничительным условиям.

Если только вообще возможно решить квантовую проблему с помощью дифференциальных уравнений, то можно надеяться прийти к цели этим путем. Ниже я изложу свои попытки в этом направлении, не утверждая, что установленные мной уравнения действительно имеют физический смысл. Мои усилия достигнут цели уже в том случае, если заинтересуют математиков и убедят их, что предлагаемый здесь путь является преодолимым и его обязательно нужно пройти до конца. Как всегда в общей теории относительности, и в этом случае из уравнений трудно получить такие выводы, которые можно было бы сопоставлять с достоверными результатами опыта, в частности, относящимися к квантовой теории.

## § 2. Вывод переопределенной системы уравнений

Будем исходить из переопределенной системы уравнений

$$R_{ik, lm} = \Psi_{ik, lm}. \tag{1}$$

В этой системе

$$R_{ik, lm} = g_{ij} R_{k, lm}^j = g_{ij} \left( \frac{\partial \Gamma_{kl}^j}{\partial x_m} + \frac{\partial \Gamma_{km}^j}{\partial x_l} - \Gamma_{sl}^j \Gamma_{km}^\sigma + \Gamma_{sm}^j \Gamma_{kl}^\sigma \right)$$

означает риманов тензор кривизны (как обычно, с обратным знаком),  $\Psi_{ik, lm}$  — некоторый тензор, однородный и второй степени относительно компонент электрического поля  $\Phi_{\mu\nu} \left( \equiv \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} \right)$ , обладающий такими же свойствами симметрии, как и  $R_{ik, lm}$ . Этого мы добиваемся, приравнявая  $\Psi_{ik, lm}$  линейной комбинации тензоров

$$\Phi'_{ik, lm} = \Phi_{ik} \Phi_{lm} + \frac{1}{2} (\Phi_{il} \Phi_{km} - \Phi_{im} \Phi_{kl}), \tag{2}$$

$$\Phi''_{ik, lm} = g_{il} \Phi'_{km} + g_{km} \Phi'_{il} - g_{im} \Phi'_{kl} - g_{kl} \Phi'_{im}, \tag{3}$$

$$\Phi'''_{ik, lm} = (g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl}) \Phi', \tag{4}$$

причем в равенствах (3) и (4) введены сокращенные обозначения

$$g^{km} \Phi'_{ik, lm} = \Phi'_{il}, \quad (5)$$

$$g_{il} \Phi'_{il} = \Phi'. \quad (6)$$

Таким образом, имеем

$$\Psi_{ik, lm} = A' \Phi'_{ik, lm} + A'' \Phi''_{ik, lm} + A''' \Phi'''_{ik, lm}. \quad (7)$$

По причинам, которые скоро станут ясными, мы выберем определенные значения постоянных:

$$\left. \begin{aligned} A' &= -2, \\ A'' &= +\frac{2}{3}, \\ A''' &= -\frac{1}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

Сделаем следующее замечание о свойствах системы уравнений (1). Умножая ее на  $g^{il}$  и суммируя по индексам  $i, l$ , мы получаем уравнения

$$R_{km} = -\left(\frac{1}{4} g_{km} \Phi_{\alpha\beta} \Phi^{\alpha\beta} - \Phi_{k\alpha} \Phi_m^\alpha\right). \quad (8)$$

Это — известные уравнения поля общей теории относительности, содержащие также уравнения Максвелла, для случая, когда, кроме гравитационного поля, существует только электромагнитное поле. Система (8), как известно, имеет центрально-симметричное статическое решение <sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} ds^2 &= f^2 dt^2 - [h^2 dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \cos^2 \vartheta d\psi^2)], \\ f^2 &= \frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{2r^2}, \\ \Phi_{4\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\pm e}{r} \right), \\ \Phi_{23} &= \Phi_{31} = \Phi_{12} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Это решение, имеющее особую точку (или особую мировую линию) и представляющее отрицательный или положительный электрон, в соответствии с содержащимися в нем постоянными  $m$  (весомой массой) и  $e$  (электрической массой) мы будем обозначать символом

$$L(m, e). \quad (10)$$

<sup>2</sup> Н. W e y l. Raum, Zeit, Materie, § 32 (5-е издание вышло в 1923 г.— *Ред.*).

Искомая переопределенная система уравнений поля также должна обладать решением  $L(m, \varepsilon)$ .

Сами уравнения (1) еще не могут составлять искомую систему уравнений. В самом деле, согласно этим уравнениям, метрическое поле в отсутствие электрического поля с необходимостью является эвклидовым. Поэтому уже решение Шварцшильда  $L(m, 0)$  не удовлетворяет системе (1). Напротив, в результате вычислений я убедился в том, что электрон «без массы» описывается системой (1), т. е. что  $L(0, \varepsilon)$  удовлетворяет системе (1). По этой причине мне кажется, что искомые уравнения, переопределяющие поле, следует выводить путем обобщения системы (1). Для этого напрашивается следующий путь. Вводя локальную «геодезическую» систему координат, легко показать, что ковариантные производные риманова тензора  $R_{ik, lm}$  удовлетворяют тождеству (полученному Бианки)

$$0 \equiv R_{ik, lm; n} + R_{ik, mn; l} + R_{ik, nl; m}. \quad (11)$$

Отсюда следует, что система (1) содержит более общие уравнения:

$$\Psi_{ik, lmn} = \Psi_{ik, lm; n} + \Psi_{ik, mn; l} + \Psi_{ik, nl; m} = 0. \quad (12)$$

По-моему, существует определенная вероятность, что уравнения (12), в сочетании с вытекающими также из системы (1) уравнениями современной общей теории относительности (8), представляют искомую переопределенную систему уравнений для полного поля.

Однако вследствие слишком большой сложности вычислений мне не удалось доказать, что решение  $L(m, \varepsilon)$  удовлетворяет системе уравнений (12). Но это выглядит вполне вероятным, так как решения  $L(0, \varepsilon)$  и  $L(m, 0)$  удовлетворяют системе (12). Именно,  $L(m, 0)$  есть решение системы (12) в отсутствие электрического поля, а  $L(0, \varepsilon)$  — решение системы (1). Умножая систему (12) на  $g^{il}g^{km}$  и суммируя по индексам  $iklm$ , мы получаем уравнения Максвелла.

Итак, существует определенная вероятность того, что система (12) в сочетании с уравнениями (8) приводит к искомой переопределенности полного поля. Возникают следующие вопросы.

Удовлетворяет ли решение  $L(m, \varepsilon)$  системе уравнений (12)?

Определяет ли система уравнений (12) и (8) механические свойства особенностей?

Соответствуют ли следствия из системы уравнений (12) и (8) тому, что мы знаем из квантовой теории?

Два последних вопроса предъявляют большие требования к математике, желающему решить их; необходимо изобретать приближенные методы для решения проблемы движения. Однако то обстоятельство, что здесь, по-видимому, заложена возможность для подлинно научного обоснования

квантовой теории, оправдывает все усилия. В заключение следует еще раз подчеркнуть, что для меня самой главной в этом сообщении является идея о переопределенности; я охотно соглашаюсь, что уравнения (12) выведены не так строго, как можно было бы желать.

*Дополнение при корректуре.* Ответ на первый из поставленных вопросов уже получен. Д-р Громмер прямым вычислением показал, что решение  $L(m, \epsilon)$  удовлетворяет системе уравнений (12).

Работа написана в период, когда Эйнштейн начал усиленно работать над разными вариантами единой теории поля (т. II, статья 72 и более поздние). Она не находится в прямой связи с каким-либо конкретным вариантом единой теории поля и лишь характеризует отношение автора к появлявшимся в то время новым квантовым идеям.

## ОТВЕТ НА ЗАМЕЧАНИЕ В. АНДЕРСОНА \*

В том, что электронный газ должен быть оптически эквивалентным веществу с отрицательным показателем преломления, при современном состоянии наших знаний сомневаться не приходится, так же, как и в том, что электронный газ эквивалентен веществу с исчезающе малой собственной частотой. Из уравнения движения

$$\varepsilon X = \mu \frac{d^2x}{dt^2}$$

электрона с электрическим зарядом  $\varepsilon$  и массой  $\mu$  для синусоидального колебательного процесса с частотой  $\nu$  получается уравнение

$$\varepsilon X = -(2\pi\nu)^2 \mu x.$$

Учитывая, что  $\varepsilon x$  есть «момент» колеблющегося электрона, мы получаем для поляризации  $p = n\varepsilon x$  электронного газа, содержащего  $n$  электронов в единице объема, значение

$$p = -\frac{\varepsilon^2 n}{\mu (2\pi\nu)^2} X.$$

Отсюда следует, что кажущаяся диэлектрическая проницаемость равна

$$D = 1 + \frac{4\pi p}{X} = 1 - \frac{\varepsilon^2 n}{\mu \nu^2}.$$

В этом случае  $\sqrt{D}$  есть показатель преломления, во всяком случае меньший 1. При таком положении вещей нет необходимости рассматривать количественные соотношения.

Следует еще заметить, что сравнение электронного газа с металлом незаконно, так как в случае свободных электронов отсутствует фундаментальная для теории металлов «сила трения»; поведение электронов обусловлено только их инерцией и воздействием электрического поля.

Берлин, 15 апреля 1924 г.

Продолжая дискуссию (ср. ст. 53), Андерсон (Astron. Nachr. 1923, 220, 206) выразил сомнение в правильности формулы для показателя преломления электронного газа, что и повлекло за собой ответ Эйнштейна.

\* Antwort auf eine Bemerkung von W. Anderson. Astron. Nachr., 1924, 221, 329—330.

## ЭКСПЕРИМЕНТ КОМПТОНА \*

### Существует ли наука ради самой науки?

Существует ли наука ради самой науки? На этот вопрос с одинаковой решительностью можно ответить и «да» и «нет», смотря по тому, как его понимать. Ученые должны служить науке ради самой науки, не задумываясь о ее практических результатах. Иначе, потеряв из виду фундаментальные закономерности, наука захирела бы. Она не выполняла бы также и своей великой просветительной миссии, заключающейся в том, чтобы пробуждать и поддерживать в массах стремление к познанию причинных связей. Но эта великая миссия — быть хранительницей одного из самых ценных идеалов человечества — показывает также, до какой степени наука может существовать ради самой науки. Сообщество ученых можно уподобить органу тела всего человечества, который питается его кровью и выделяет жизненно важный гормон, необходимый всем частям этого тела, чтобы оно не погибло. Это вовсе не значит, что каждый человек должен до пресыщения пичкать себя ученостью и разными научными фактами, как это часто бывает в школах. Не поможет в решении научных вопросов и широкая гласность. Но каждому мыслящему человеку надо предоставить возможность познакомиться с большими научными проблемами его времени, даже если его положение в обществе не позволяет ему посвятить значительную долю своего времени и сил размышлениям над теоретическими проблемами. Только выполняя и эту важную задачу, наука приобретает, с точки зрения общества, права на существование.

С этой точки зрения я и хочу рассказать далее о важном эксперименте, касающемся света, или *электромагнитного излучения*, и выполненном примерно год назад американским физиком Комптоном. Чтобы понять полно-

.....  
\* *Das Komptonsche Experiment. Ist die Wissenschaft um ihrer selbst willen da* Berliner Tageblatt, No. 159, 20, April, 1924.

стью значение эксперимента, мы должны представить себе то чрезвычайно странное положение, в котором находится теперь учение об излучении.

До первой половины XIX века в оптике имели дело главным образом с отражением и преломлением света (с зеркалами и системами линз). До этого времени придерживались в основном ньютоновской корпускулярной, или эмиссионной, теории света. Согласно этой теории, свет состоит из корпускул, движущихся в однородной среде равномерно и прямолинейно, но на граничных поверхностях в общем случае резко изменяющих направление движения. На этом основном представлении была построена действительно совершенная теория, охватывавшая почти все известные к тому времени явления, в частности и явления, происходящие в телескопе и микроскопе.

Когда же около ста лет назад ближе познакомились с явлениями интерференции и дифракции света (и с поляризацией света), основную гипотезу Ньютона о природе света пришлось заменить в корне отличающейся от нее гипотезой о волновой природе света, которая была предложена Гюйгенсом уже за полтора столетия до этого. Согласно этой гипотезе, свет представляет собой упругие волны, распространяющиеся в пространстве (или в эфире) во все стороны наподобие того, как расходятся волны на поверхности воды (в двух измерениях) из точки, в которой эта поверхность приводится в колебание. Только эта теория смогла объяснить, почему луч света, пройдя через очень малое отверстие, распространяется по всем направлениям. Только эта теория сумела объяснить, каким образом в частях пространства, куда может дойти свет, из-за явлений интерференции или дифракции возникают темные места, или каким образом несколько пучков света, соединяясь, могут локально взаимно погашаться. Волновая теория объяснила сложнейшие явления дифракции и интерференции прямо-таки с астрономической точностью, и убеждение в ее правильности скоро стало непоколебимым, как скала.

Волновая теория подверглась модификации, но вместе с тем получила еще более твердое обоснование благодаря исследованиям Фарадея и Максвелла, лишившим волновое поле света механического характера. Максвелловская теория электричества и магнетизма включила в себя и волновую теорию света, ничего не меняя в ее формальном содержании. Эта теория устанавливает количественные связи между оптическими и электрическими свойствами пустого пространства, а также весомых тел, и сокращает число независимых гипотез, на которых основывается волновая оптика. Тем самым физика к концу века, казалось, навсегда получила фундамент, на котором можно было бы строить все ее разделы, включая механику.

Но случилось иначе. Из работ Планка о законе излучения, испускаемого нагретыми телами, вытекало, что теория не в состоянии объяснить этот закон. Не удавалось также объяснить опытные факты о том, что воздействие света качественно зависит не от его интенсивности, а только от цве-



та. Это выглядело как парадокс и никак не увязывалось с основной идеей волновой теории. Представим себе, что где-нибудь в открытом море рождаются гигантские волны, распространяющиеся во все стороны от центра своего зарождения. Естественно, что гребни возникающих при этом волн будут тем ниже, чем дальше они уйдут от центра своего зарождения. Представим себе теперь, что около той части моря, в которой возникают такие волны, до их возникновения находились корабли одинаковой величины. Что будет происходить, когда к ним будут подходить волны? Корабли вблизи от источника волн будут опрокинуты или разрушены; с кораблями же, достаточно удаленными от источника волн, ничего страшного не произойдет; они лишь испытают безвредную качку. Следовало думать, что и молекулы под действием излучения будут вести себя подобно кораблям, застигнутым морскими волнами. Будут молекулы подвергаться химическим изменениям или нет, должно было бы зависеть не только от длины волны, но и от интенсивности действующего света; но этого-то опыт и не подтверждает.

Ввиду такой несостоятельности общей теории была выдвинута *гипотеза световых квантов*. Сохраняя глубокое уважение к волновой теории, завоевывала почву рабочая гипотеза, согласно которой излучение имеет такие энергетические свойства, как если бы оно состояло из корпускул, энергия которых зависит от частоты (цвета) излучения, причем эта энергия пропорциональна частоте. Корпускулярная теория света Ньютона снова ожила, хотя в области геометрических свойств света она оказалась полностью несостоятельной.

Итак, теперь мы имеем две теории света, обе необходимые и — как приходится признать сегодня — существующие без всякой логической взаимосвязи, несмотря на двадцать лет колоссальных усилий физиков-теоретиков. Квантовая теория света сделала возможной теорию атома Бора и объяснила так много фактов, что она должна содержать значительную долю истины. В этом положении чрезвычайную важность приобретает вопрос о том, в какой степени частицам света, или квантам, следует приписывать свойства сварядов.

Попадая в препятствие, снаряд не только передает ему энергию, но и сообщает импульс в направлении своего движения. Происходит ли то же самое с квантами света? На этот вопрос уже давно отвечали «да» из теоретических соображений, и опыт Комптона доказал правильность этого ответа. Чтобы понять этот эксперимент, надо ближе познакомиться с механизмом процесса, известного как «рассеяние»; этим процессом объясняется, например, голубой цвет неба.

Когда электромагнитная волна встречается связанную с атомом заряженную элементарную частицу (электрон), то переменное электрическое поле волны сообщает атому колебательное движение. В результате этого

атом, со своей стороны, испускает (подобно антенне беспроводного телеграфа) во все стороны волны той же частоты, причем энергия этих волн черпается из первоначальной волны. Это приводит к тому, что свет, проходя через среду с такими частицами, рассеивается (по крайней мере частично) во все стороны, и притом тем сильнее, чем короче длина волны первичного света. Так интерпретирует рассеяние волновая теория.

По-иному интерпретирует этот процесс квантовая теория. Согласно этой теории, квант света сталкивается с электроном, изменяя свое направление и вместе с тем сообщая электрону скорость. Значит, кинетическая энергия, передаваемая при этом столкновении электрону, должна отниматься у сталкивающегося кванта, так что рассеянный квант будет иметь меньшую энергию, а значит — на языке волновой теории — и меньшую частоту, чем падающее излучение. Более строгое рассуждение показывает, что изменение частоты рассеянного кванта можно вычислить точно. Относительное изменение частоты для видимого света крайне мало, но для жесткого рентгеновского излучения, представляющего собой не что иное, как очень коротковолновый свет, оно вполне заметно.

Комптон нашел, что рентгеновский свет, рассеянный соответствующими веществами, действительно испытывает изменение частоты, требуемое квантовой (но не волновой) теорией. Это можно объяснить следующим образом. Согласно теории Резерфорда — Бора, каждый атом обладает некоторым числом электронов, связанных с ним настолько слабо, что при соударении с квантом рентгеновских лучей они ведут себя как свободные. Следовательно, для этого рассеянного света справедливо приведенное выше рассуждение. Положительный результат опыта Комптона показывает, что излучение ведет себя так, как если бы оно состояло из дискретных корпускул, не только в смысле передачи энергии, но и в смысле передачи количества движения.

## К ТЕОРИИ РАДИОМЕТРИЧЕСКИХ СИЛ \*

На основе схематических предположений о механизме молекулярного движения в газах приближенно вычисляются силы, действующие в потоке тепла на тела, размеры которых малы по сравнению с длиной свободного пробега  $\lambda$ , а также на краевые зоны тел, больших по сравнению с  $\lambda$ .

Теория сил и разностей давлений в газах, обусловленных разностями температур, удовлетворительно объяснена Кнудсенем для случая, когда длина свободного пробега велика по сравнению с характерными размерами сосудов. Напротив, для случая, когда длина свободного пробега по порядку величины такая же или меньше, чем эти размеры, полной ясности в вопросе о причине термических сил не существует. Ниже я проведу в основном качественное рассмотрение господствующих здесь закономерностей, учитывая количественные соотношения только по порядку величины. Хотя это рассмотрение и является довольно элементарным, оно помогло мне устранить неясности, и я буду надеяться, что это краткое изложение принесет пользу и читателям.

§ 1. *Тела, малые по сравнению с длиной свободного пробега, в потоке тепла.* Представим себе сначала в бесконечном пространстве газ, в котором в положительном направлении оси  $X$  имеется стационарный однородный поток тепла. Молекулярное движение мы будем рассматривать упрощенно, приписывая всем молекулам одну и ту же скорость  $u$  с точностью до малых разностей, необходимых для упрощенного учета потока тепла. Кроме того, вычисления будем производить так, как будто молекулы движутся только вдоль осей координат. Длину свободного пробега  $\lambda$  будем считать постоянной. Все эти упрощения могут ввести в наши формулы только несущественные ошибки в численных коэффициентах, качественно не нарушая существенных взаимосвязей.

\* Zur Theorie der Radiometerkräfte. Zs. Phys., 1924, 27, 1—6.

Рассмотрим прежде всего движение молекул через перпендикулярный оси  $X$ , малый по сравнению с длиной свободного пробега  $\lambda$  элемент поверхности величиною  $\sigma$ . Поток вещества должен отсутствовать. Поэтому в обоих направлениях за секунду через  $\sigma$  проходят в точности одинаковые числа молекул, а именно:

$$\frac{1}{6} n \sigma u \quad (1)$$

молекул, где  $n$  означает число молекул в единице объема. Чтобы учесть наличие потока тепла, мы должны предположить, что скорость молекул  $u_+$  в положительном направлении оси  $X$  несколько больше  $u$ , а противоположно направленная скорость  $u_-$  — соответственно несколько меньше  $u$ . Поток тепла  $\sigma f$  через элемент поверхности будет

$$\sigma f = \frac{1}{6} n \sigma u \left( \frac{m}{2} u_+^2 - \frac{m}{2} u_-^2 \right). \quad (2)$$

Учитывая соотношение

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} \kappa T,$$

а также то обстоятельство, что молекулярные скорости  $u_+$  и  $u_-$  определяются температурами в местах последнего столкновения ( $\lambda$  — длина свободного пробега), вместо (2) получаем

$$f = -\frac{n}{2} \kappa \lambda u \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2a)$$

Рассмотрим теперь вместо элемента поверхности малую пластинку с поверхностью  $\sigma$ . Молекулы, падающие на нее в направлении оси  $X$ , создают избыточный импульс  $K$  в положительном направлении оси  $X$ :

$$K = \frac{1}{6} n \sigma u (m u_+ - m u_-). \quad (3)$$

Пренебрегая тем, что молекулы, покидающие тело после столкновения с ним, передают ему дополнительный импульс, составляющий известную часть только что вычисленного импульса, мы можем приравнять  $K$  силе, действующей на тело. Из равенств (2) и (3) с учетом того, что  $u_+$  и  $u_-$  мало отличаются от  $u$ , получаем

$$K = \frac{\sigma f}{u} = -\frac{1}{2} p \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \sigma, \quad (3a)$$

где  $p$  — давление газа. В этой формуле, как и в (2),  $f$  означает, разумеется, только ту часть потока тепла, которая обусловлена поступательным движением молекулы

Если частица свободна, эта сила  $K$  будет сообщать ей движение вдоль оси  $X$  в положительном направлении. Чтобы определить скорость  $v$  этого движения, мы должны вычислить силу трения  $K'$ , действующую на частицу со стороны газа, когда частица движется в нем со скоростью  $v$ . Эта сила трения возникает главным образом потому, что тело в среднем сообщает каждой сталкивающейся с ним молекуле импульс  $mv$ . Выполняя соответствующие элементарные вычисления, получаем

$$K' = -\frac{4}{3} n s u m v. \quad (4)$$

Приравнявая  $K$  и  $-K'$ , находим

$$v = \frac{1}{4} \frac{f}{RTn} = -\frac{1}{8} u \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{4} \frac{f}{p}. \quad (5)$$

Эти скорости, не зависящие от размеров частиц, пока длина свободного пробега намного больше этих размеров, могут быть довольно заметными. При  $\lambda = 0,1$  см и  $\partial T/\partial x = 30$ ,  $T = 300^\circ$  в водороде ( $H_2$ ) получаем  $v$  около 1 м/сек, а при обычном давлении и прочих равных условиях — около 0,1 мм/сек.

Эти силы играют решающую роль, например, при осаждении инея, а также в электрических аппаратах для очистки воздуха от дыма.

§ 2. *Малое отверстие в тонкой стенке, перпендикулярной потоку тепла.* Перейдем теперь к явлению, обратному только что рассмотренному. Рассуждения § 1 основывались главным образом на том, что внутри покоящегося газа на элемент поверхности с обеих сторон попадают равные числа молекул. Другими словами, внутри теплопроводящего газа выполняется условие равенства потоков молекул. Вычисленная сила, действующая на одну пылинку, определялась тем, что равные числа молекул, падающих на переднюю и заднюю стороны пылинки, передавали ей неодинаковый импульс.

Теперь этому «равенству потоков» внутри газа противостоит «равенство давлений» на стенки, ограничивающие объем газа. Действительно, хорошо известно и легко доказывается, что даже при неравномерном распределении температур в газе на единицу поверхности должны действовать одинаковые силы давления, если рассматриваемые части стенок достаточно велики по сравнению со средней длиной свободного пробега, имеют достаточно равномерно распределенную температуру и разделены друг от друга газовым промежутком, во всех своих измерениях достаточно большим по сравнению с длиной свободного пробега. Тогда будут применимы понятия и законы гидростатики сплошных сред.

Пусть в рассматриваемом газе находится плоская пластинка, ориентированная перпендикулярно потоку тепла и, следовательно, параллельная

плоскости  $YZ$ . Предположим, что она велика по сравнению с длиной свободного пробега и что расстояния от ее края до стенок также велики по сравнению с  $\lambda$ . Тогда, несмотря на наличие потока тепла, давление будет всюду постоянным.

Допустим, что каждая молекула, попадающая на пластинку со стороны отрицательных  $x$ , имеет скорость  $u_n$  и затем покидает пластинку в сторону отрицательных  $x$  со скоростью  $u$ . Пусть в единицу времени на единичной поверхности происходит  $v_n$  таких столкновений. Пусть  $u_p$ ,  $u$  и  $v_p$  означают соответствующие величины для другой стороны пластинки. При этом предполагается, что молекулы покидают после столкновения обе стороны пластинки с одинаковыми скоростями. Тогда условием равенства давлений будет

$$\frac{p}{m} = v_n(u + u_n) = v_p(u + u_p). \quad (6)$$

Далее, поток тепла на обеих сторонах пластинки должен быть одинаковым, что выражается равенством:

$$\frac{2f}{m} = v_n(u_n^2 - u^2) = v_p(u^2 - u_p^2). \quad (7)$$

В результате деления второго из этих двух соотношений на первое получаем

$$\frac{2f}{p} = u_n - u = u - u_p. \quad (8)$$

Подставляя это в (6) и заменяя  $(v_p + v_n)/2$  на  $v$ , а  $v$  на  $nv/6$ , получаем

$$v_p - v_n = \frac{1}{6} \frac{nf}{p}. \quad (9)$$

Если в пластинке имеется отверстие площадью  $\sigma$ , малое по сравнению с длиной свободного пробега, то, очевидно, в направлении убывающих  $x$  в единицу времени должно проходить на  $(v_p - v_n)$  молекул *больше*, чем в обратном направлении, и, значит, существует пронизывающий отверстие (обратный) поток молекул, интенсивность которого равна  $v_p - v_n$ , а эффективная скорость определяется соотношением

$$v_p - v_n = -nv. \quad (10)$$

Из соотношений (9) и (10) следует

$$v = -\frac{1}{6} \frac{f}{p}. \quad (10a)$$

Это равенство соответствует равенству (5).

§ 3. *Причина известных радиометрических сил в более плотных газах.* Полученные результаты относятся главным образом к области законов газа Кнудсена, в котором эффективные размеры тел малы по сравнению с длиной свободного пробега. Однако они дают также ключ к пониманию известных радиометрических явлений в более плотных газах.

Предположим, что внутри газа перпендикулярно потоку тепла располагается пластинка, размеры которой велики по сравнению с длиной свободного пробега  $\lambda$ . Расстояния от стенок сосуда до любого края пластинки пусть также будут большими по сравнению с  $\lambda$ . Тогда на достаточно большом удалении от края пластинки на самой пластинке будет соблюдаться равенство давлений, а на достаточном расстоянии вне пластинки будут выполняться изученные в § 1 условия, когда малое по сравнению с  $\lambda$  тело испытывает силу давления  $\frac{sf}{u}$ .

На краях пластинки будет происходить постепенный переход между этими двумя состояниями газа, причем ширина переходной области по порядку величины равна  $\lambda$ . Таким образом, на единицу длины края пластинки будет действовать сила, по порядку величины равная

$$K = \frac{f\lambda}{u} = -\frac{1}{2} p \frac{\lambda^2}{T} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (11)$$

пока размеры пластинки велики по сравнению с длиной свободного пробега.

Случай пластинки, нагреваемой с одной стороны, рассматривается аналогично, так как и здесь должна существовать краевая зона шириной  $\lambda$ , в которой равенство давлений на обе стороны пластинки не соблюдается. В этом случае, впрочем, мало пригодном для количественной проверки, я нашел для силы, действующей на единицу длины края, выражение

$$K = -p\lambda \frac{\Delta T}{T}, \quad (11a)$$

которое, разумеется, также справедливо только по порядку величины.

Другая причина радиометрических сил заключается в скорости скольжения, сообщаемой газу стенкой в присутствии тангенциального градиента температуры. Это явление, теоретически открытое еще Максвеллом и независимо обнаруженное Кнудсеном, в настоящее время рассматривается Геттнером и Черны.

Поступила 21 июля 1924 г.

**ПРИМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ С. Н. БОЗЕ  
„ЗАКОН ПЛАНКА  
И ГИПОТЕЗА СВЕТОВЫХ КВАНТОВ“ \***

Вывод формулы Планка, предложенный Бозе, является, по моему мнению, большим достижением. Использованный им метод дает также квантовую теорию идеального газа, которую я изложу в другом месте <sup>1</sup>.

Эйнштейн с большим интересом встретил статью «Закон Планка и гипотеза световых квантов», присланную ему С. Н. Бозе из университета в Дакке (Восточный Пакистан). Он перевел ее на немецкий язык и направил 2 июля 1924 года в редакцию *Zeitschrift für Physik*, где она и была опубликована (*Zs. Phys.*, 1924, 26, 178—181).

Работа Бозе настолько близко примыкает к статьям Эйнштейна, что почти органически в них включается. Поэтому в виде исключения она приводится здесь целиком.

.....

\* *Anmerkung zu S. N. Bose Abhandlung «Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese».*  
*Zs. Physik*, 1924, 26, 181.

<sup>1</sup> Ср. статьи 62—64.— *Прим. ред.*



Daraus folgt zunächst

$$p_r^s = B^s e^{-\frac{r h \nu^s}{\beta}}$$

Da aber

$$A^s = \sum_r B^s e^{-\frac{r h \nu^s}{\beta}} = B^s \left(1 - e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}\right)^{-1},$$

so ist

$$B_s = A^s \left(1 - e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}\right).$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned} N^s &= \sum_r r p_r^s = \sum_r r A^s \left(1 - e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}\right) e^{-\frac{r h \nu^s}{\beta}} \\ &= \frac{A^s e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf den oben gefundenen Wert von  $A^s$  ist also

$$E = \sum_s \frac{8 \pi h \nu^s{}^3 d\nu^s}{c^3} V \frac{e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}}.$$

Mit Benutzung der bisherigen Resultate findet man ferner

$$S = k \left[ \frac{E}{\beta} - \sum_s A^s \lg \left(1 - e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}\right) \right],$$

woraus mit Rücksicht darauf, daß  $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$ , folgt, daß  $\beta = kT$ . Setzt man dies in obige Gleichung für  $E$  ein, so erhält man

$$E = \sum_s \frac{8 \pi h \nu^s{}^3}{c^3} V \frac{1}{e^{\frac{h \nu^s}{kT}} - 1} d\nu^s,$$

welche Gleichung Plancks Formel äquivalent ist.

(Übersetzt von A. Einstein.)

Anmerkung des Übersetzers. Boses Ableitung der Planckschen Formel bedeutet nach meiner Meinung einen wichtigen Fortschritt. Die hier benutzte Methode liefert auch die Quantentheorie des idealen Gases, wie ich an anderer Stelle ausführen will.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

## Закон Планка и гипотеза световых квантов

С. Н. Бозе

Формула Планка для распределения энергии в излучении черного тела служит исходным пунктом для квантовой теории, которая за 20 лет своего развития принесла богатые плоды во всех областях физики. Со времени первой публикации этого закона в 1901 году не раз предлагались разные способы его вывода. Теперь признано, что фундаментальные предпосылки квантовой теории несовместимы с законами классической электродинамики. Во всех прежних выводах использовалось соотношение

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} E,$$

т. е. соотношение между плотностью излучения и средней энергией осциллятора, и делалось предположение о числе степеней свободы эфира, входящем в это уравнение (первый множитель в правой части). Но этот множитель можно было получить только из классической теории. В этом и заключается неудовлетворительный пункт во всех выводах, и неудивительно, что предпринимаются все новые попытки найти вывод, свободный от этого логического недостатка.

Удивительно изящный вывод был предложен Эйнштейном. Осознав логический недостаток всех предыдущих выводов, Эйнштейн попытался вывести формулу независимо от классической теории. Исходя из очень простых предположений относительно обмена энергией между молекулами и полем излучения, он нашел соотношение

$$\rho_\nu = \frac{\alpha_{mn}}{e \frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{kT} - 1}.$$

Однако чтобы привести эту формулу в согласие с формулой Планка, ему пришлось воспользоваться законом смещения Вина и принципом соответствия Бора. Закон Вина основывается на классической теории, а принцип соответствия предполагает, что квантовая теория в определенных предельных случаях должна переходить в классическую.

Во всех случаях, на мой взгляд, выводы представляются недостаточно оправданными логически. Напротив, гипотеза световых квантов в сочетании со статистической механикой (в том виде, в каком она была приспособлена Планком для нужд квантовой теории) является, по-моему, достаточной для вывода закона независимо от классической теории. Ниже я кратко изложу метод вывода.

Предположим, что излучение заключено в объеме  $V$ , а полная энергия излучения равна  $E$ . Пусть имеются кванты разных сортов, числа которых равны  $N_s$ , а энергии  $h\nu_s$  ( $s$  изменяется от 0 до  $\infty$ ). Тогда полная энергия будет

$$E = \sum_s N_s h\nu_s = V \int \rho_\nu d\nu. \quad (1)$$

Решение проблемы сводится тогда к нахождению чисел  $N_s$ , определяющих  $\rho_\nu$ . Если мы сумеем указать вероятность для каждого распределения, характеризуемого произвольным числом  $N_s$ , то решение будет определено условием, что эта вероятность должна быть максимальной при сохранении дополнительного условия (1). Найдем теперь эту вероятность.

Квант обладает импульсом ( $h\nu_s/c$ ), направление которого совпадает с направлением распространения кванта. Мгновенное состояние кванта характеризуется его координатами  $x, y, z$  и сопряженными импульсами  $p_x p_y p_z$ ; эти шесть величин можно рассматривать как координаты точки в 6-мерном пространстве, причем мы имеем соотношение

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{h^2 \nu^2}{c^2},$$

вследствие которого названная точка вынуждена оставаться на цилиндрической поверхности, определяемой частотой кванта. В этом смысле интервалу частот  $d\nu_s$  принадлежит фазовый объем

$$\int dx dy dz dp_x dp_y dp_z = V \cdot 4\pi \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 \frac{h d\nu}{c} = 4\pi \frac{h^3 \nu^2}{c^3} V d\nu.$$

Если мы разделим весь фазовый объем на ячейки размером  $h^3$ , то интервалу частот  $d\nu$ , следовательно, будет принадлежать  $4\pi V \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$  ячеек. О способе этого разбиения ничего определенного сказать нельзя. Однако полное число ячеек можно рассматривать как число возможных расположений кванта в данном объеме. Чтобы учесть поляризацию, необходимо, вероятно, умножить это число на 2, так что для числа ячеек, принадлежащих интервалу  $d\nu$ , мы получаем

$$8\pi V \frac{\nu^2 d\nu}{c^3}.$$

Теперь уже просто вычислить термодинамическую вероятность состояния (определенного макроскопически). Пусть  $N^s$  означает число квантов в интервале частот  $d\nu^s$ . Каким числом способов можно распределить эти кванты по ячейкам, соответствующим интервалу частот  $d\nu^s$ ? Пусть  $p_0^s$  означает число пустых ячеек,  $p_1^s$  — число ячеек, содержащих один квант,  $p_2^s$  — число ячеек, содержащих два кванта и т. д. Тогда число возможных распределений будет

$$\frac{A^s!}{p_0^s! p_1^s! \dots},$$

где

$$A^s = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} d\nu^s,$$

а число квантов в интервале  $d\nu^s$  есть

$$N^s = 0 \cdot p_0^s + 1 \cdot p_1^s + 2 p_2^s \dots$$

Вероятность состояния, определяемого всеми  $p_r^s$ , очевидно, есть

$$\prod_s \frac{A^s!}{p_0^s \cdot p_1^s! \dots}.$$

Учитывая, что числа  $p_r^s$  можно считать большими, мы имеем

$$\ln W = \sum_s A^s \ln A^s - \sum_s \sum_r p_r^s \ln p_r^s,$$

причем

$$A^s = \sum_r p_r^s.$$

Это выражение должно иметь максимум при дополнительных условиях

$$E = \sum_s N^s h\nu^s; \quad N^s = \sum_r r p_r^s.$$

Выполняя варьирование, находим условия

$$\begin{aligned} \sum_s \sum_r \delta p_r^s (1 + \ln p_r^s) &= 0, & \sum_s \delta N^s h\nu^s &= 0, \\ \sum_r \delta p_r^s &= 0, & \delta N^s &= \sum_r r \delta p_r^s. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\sum_s \sum_r \delta p_r^s (1 + \ln p_r^s + \lambda^s) + \frac{1}{\beta} \sum_s h\nu^s \sum_r r \delta p_r^s = 0.$$

Отсюда сначала получаем

$$p_r^s = B^s e^{-\frac{r h\nu^s}{\beta}}.$$

Но так как

$$A^s = \sum_r B^s e^{-\frac{r h\nu^s}{\beta}} = B^s \left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right)^{-1},$$

то

$$B^s = A^s \left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right).$$

Далее имеем

$$N^s = \sum_r r p_r^s = \sum_r r A^s \left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right) e^{-\frac{r h\nu^s}{\beta}} = \frac{A^s e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}}.$$

Учитывая найденное выше значение  $A^s$ , получаем

$$E = \sum_s \frac{8\pi h (\nu^s)^3 d\nu^s}{c^3} V \frac{e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}}.$$

Используя предыдущие результаты, находим далее

$$S = k \left[ \frac{E}{\beta} - \sum_s A^s \ln \left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right) \right],$$

откуда с учетом того, что  $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$ , вытекает, что  $\beta = kT$ . Подставляя это значение  $\beta$  в выражение для  $E$ , получаем соотношение

$$E = \sum_s \frac{8\pi h (\nu^s)^3}{c^3} V \frac{1}{e^{\frac{h\nu^s}{kT}} - 1} d\nu^s,$$

эквивалентное формуле Планка.

Следующая статья Бозе «Тепловое равновесие в поле излучения в присутствии вещества» (*Zs. Phys.*, 1924, 27, 384—392), в которой он попытался определить абсолютное значение вероятностей поглощения излучения, вызвала возражения Эйнштейна (см. статью 61). В этих возражениях существенную роль играет принцип соответствия с классической теорией, который Эйнштейн очень часто использует.

## ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ С. Н. БОЗЕ „ТЕПЛОВОЕ РАВНОВЕСИЕ В ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПРИСУТСТВИИ ВЕЩЕСТВА“ \*

Я считаю гипотезу Бозе о вероятности элементарных процессов излучения неправильной по следующим причинам.

Для статистического равновесия между одним боровским стационарным состоянием и другим, согласно Бозе, существует соотношение

$$\frac{n_r}{g_r} \frac{N_\nu}{A_\nu + N_\nu} = \frac{n_s}{g_s}.$$

Отсюда следует, что вероятности переходов  $r \rightarrow s$  и  $s \rightarrow r$  должны быть пропорциональными соответственно левой или правой части этого соотношения. Следовательно, вероятности перехода для *одной* молекулы должны относиться как  $\frac{N_\nu}{A_\nu + N_\nu} : 1$  (если, ради простоты, мы приравняем единице статистические веса обоих состояний). Большее получить из условия термодинамического равновесия нельзя. Согласно предложенной мной гипотезе, эти вероятности должны быть пропорциональными  $N_\nu$  (т. е. плотности излучения) и  $A_\nu + N_\nu$ , согласно гипотезе Бозе, — пропорциональными  $\frac{N_\nu}{A_\nu + N_\nu}$  и 1.

Согласно последней гипотезе, внешнее излучение хотя и может вызвать переход из состояния  $Z_r$  с меньшей энергией в состояние  $Z_s$  с большей энергией, но оно не вынуждает обратный переход из  $Z_s$  в  $Z_r$ . Однако это противоречит общепризнанному принципу, что классическая теория должна быть предельным случаем квантовой теории. В соответствии же с последней поле излучения может передавать резонатору как положительную, так

\* *Bemerkung zu S. N. Boses Abhandlung «Wärmegleichgewicht im Strahlungsfeld bei Anwesenheit von Materie». Zs. Phys., 1924, 27, 392—393.*

и отрицательную энергию (в зависимости от фазы), и притом оба эти случая равновероятны. Следовательно, вероятности обоих переходов должны зависеть от плотности излучения, т. е. от  $N_\nu$ , в противоположность гипотезе Бозе. Вопрос о том, в какой мере квантовая теория в пределе переходит в классическую, подробно рассмотрен Планком в последнем издании его книги по теории излучения.

Кроме того, согласно гипотезе Бозе, холодное тело должно обладать поглощательной способностью, зависящей от плотности излучения (убывающей с плотностью). Тела в холодном состоянии должны поглощать «невиновское» излучение слабее, чем менее интенсивное излучение, подчиняющееся формуле Вина. Если бы это было так, то это уже давно было бы найдено в инфракрасном излучении нагретых тел — источников света.

## КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ОДНОАТОМНОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА \*

Квантовой теории одноатомного идеального газа, свободной от произвольных предположений, до сих пор не существует. Этот пробел заполняется ниже на основе нового метода, предложенного Бозе и примененного им для исключительно интересного вывода формулы излучения Планка <sup>1</sup>.

Развиваемый здесь вслед за Бозе путь можно охарактеризовать следующим образом. Фазовое пространство некоторого элементарного объекта (в рассматриваемом случае — одноатомной молекулы), отнесенное к заданному (трехмерному) объему, делится на «ячейки» объемом  $h^3$ . Если имеется большое число элементарных образований, то их микроскопическое распределение, рассматриваемое в термодинамике, характеризуется тем, как размещаются по этим ячейкам элементарные образования. «Вероятность» некоторого макроскопически определенного состояния (в смысле Планка) равна числу разных микроскопических состояний, которыми может реализоваться данное макроскопическое состояние. Энтропия макроскопического состояния, а также статистические и термодинамические свойства системы определяются затем по формуле Больцмана.

### § 1. Ячейки

Фазовый объем для некоторой области координат  $x, y, z$  и соответствующих импульсов  $p_x, p_y, p_z$  одноатомного газа выражается интегралом

$$\Phi = \int dx dy dz dp_x dp_y dp_z. \quad (1)$$

\* *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl., 1924, 261—267.

<sup>1</sup> В о с е. Zs. Phys., 1924, 26, 178—181. (См. приложение к статье 60.)



Если  $V$  есть объем, в котором находятся молекулы, то фазовый объем всех состояний, энергия которых  $E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$  меньше некоторой определенной величины  $E$ , дается формулой

$$\Phi = V \cdot \frac{4}{3} \pi (2mE)^{3/2}. \quad (1a)$$

Таким образом, число ячеек  $\Delta s$ , принадлежащих некоторой элементарной области энергии  $\Delta E$ , дается формулой

$$\Delta s = 2\pi \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} \Delta E. \quad (2)$$

Для любого сколь угодно малого отношения  $\Delta E/E$  всегда можно выбрать такое значение  $V$ , что  $\Delta s$  будет очень большим числом.

## § 2. Вероятность состояния и энтропия

Определим теперь макроскопическое состояние газа.

Пусть в объеме  $V$  находится  $n$  молекул с массой  $m$ . Из них  $\Delta n$  молекул пусть обладают значениями энергии между  $E$  и  $E + \Delta E$ . Они распределяются по  $\Delta s$  ячейкам. Из этих  $\Delta s$  ячеек

- $p_0 \Delta s$  ячеек будут пустыми,
- $p_1 \Delta s$  ячеек будут содержать по одной молекуле,
- $p_2 \Delta s$  ячеек — по две молекулы и т. д.

Тогда вероятности  $p_r$ , относящиеся к  $s$ -й ячейке, будут, очевидно, функциями числа ячеек  $s$  и целочисленного индекса  $r$ , и потому далее они обозначаются символом  $p_r^s$ . Для всех  $s$ , очевидно, выполняется условие

$$\sum_r p_r^s = 1. \quad (3)$$

При данном значении  $p_r^s$  и фиксированном  $\Delta n$  число возможных распределений  $\Delta n$  молекул в рассматриваемой энергетической области равно

$$\frac{\Delta s!}{\prod_{r=0}^{r=\infty} (p_r^s \Delta s)!},$$

что в соответствии с формулой Стирлинга и соотношением (3) можно заметить на

$$\frac{1}{\prod_r (p_r^s)^{\Delta s p_r^s}}. \quad (4)$$

Это выражение также можно записать в виде произведения по всем  $r$  и  $s$ :

$$\frac{1}{\prod_{rs} (p_r^s)^{p_r^s}}. \quad (4)$$

Если распространить произведение на все значения  $s$  от 1 до  $\infty$ , то формула (4) дает, очевидно, общее число *комплексий*, или вероятность в смысле Планка, для (макроскопического) состояния газа, определенного величинами  $p_r^s$ . Для энтропии  $S$  этого состояния формула Больцмана дает

$$S = -\kappa \sum_{sr} (p_r^s \ln p_r^s). \quad (5)$$

### § 3. Термодинамическое равновесие

В состоянии термодинамического равновесия энтропия  $S$  максимальна, причем наряду с уравнением (3) должны выполняться дополнительные условия, а именно, условия, что общее число атомов  $n$  и их полная энергия  $E$  должны иметь определенные заданные значения. Эти условия выражаются, очевидно, двумя соотношениями<sup>2</sup>

$$n = \sum_{sr} r p_r^s, \quad (6)$$

$$\bar{E} = \sum_{sr} E^s r p_r^s, \quad (7)$$

где  $E^s$  означает энергию молекулы, находящейся в  $s$ -й ячейке фазового пространства. Из формулы (1а) легко получаются следствия, что

$$E^s = cs^{\frac{2}{3}}, \quad (8)$$

$$c = (2m)^{-1} h^2 \left( \frac{4}{3} \pi V \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

Варьируя по переменным  $p_r^s$ , мы находим, что при соответствующем выборе постоянных  $\beta^s$ ,  $A$  и  $B$  должны выполняться соотношения

$$p_r^s = \beta^s e^{-\alpha^s r}, \quad (9)$$

$$\alpha^s = A + Bs^{\frac{2}{3}}.$$

<sup>2</sup> В самом деле, величина  $n^s = \sum_r r p_r^s$  и есть среднее число молекул, попадающих в  $s$ -ю ячейку.

При этом, в соответствии с условием (3), для  $\beta^s$  получается выражение

$$\beta^s = 1 - e^{-\alpha^s}. \quad (10)$$

Отсюда получаем прежде всего формулу для среднего числа молекул в ячейке

$$\begin{aligned} n^s &= \sum_r r p_r^s = \beta^s \sum_r r e^{-\alpha^s r} = -\beta^s \frac{d}{d\alpha^s} \left( \sum_r e^{-\alpha^s r} \right) = \\ &= -\beta^s \frac{d}{d\alpha^s} \left( \frac{1}{1 - e^{-\alpha^s}} \right) = \frac{1}{e^{\alpha^s} - 1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Итак, соотношения (6) и (7) принимают вид

$$n = \sum_s \frac{1}{e^{\alpha^s} - 1}, \quad (6a)$$

$$\bar{E} = c \sum_s \frac{s^{3/2}}{e^{\alpha^s} - 1}. \quad (7a)$$

Вместе с формулой

$$\alpha^s = A + B s^{3/2}$$

эти соотношения определяют постоянные  $A$  и  $B$ . Тем самым закон макроскопического распределения состояний для термодинамического равновесия определяется полностью.

Подставляя результаты этого параграфа в формулу (5), получаем для энтропии в состоянии равновесия следующее выражение

$$S = -\kappa \left\{ \sum_s [\ln(1 - e^{-\alpha^s})] - An - \frac{B}{c} \bar{E} \right\}. \quad (12)$$

Перейдем теперь к вычислению температуры системы. Для этого мы применим равенство, определяющее энтропию, к бесконечно малому нагреванию при постоянной плотности; тогда получим

$$d\bar{E} = T dS = -\kappa T \left\{ \sum_s \frac{d\alpha^s}{1 - e^{-\alpha^s}} - n dA - \frac{\bar{E}}{c} dB - Bd \left( \frac{\bar{E}}{c} \right) \right\},$$

что с учетом соотношений (9), (6) и (7) дает

$$d\bar{E} = \kappa T B d \left( \frac{\bar{E}}{c} \right) = \kappa T \frac{B}{c} d\bar{E},$$

или

$$\frac{1}{\kappa T} = \frac{B}{c}. \quad (13)$$

Тем самым и температура неявно выражена через энергию и остальные заданные величины. Из соотношений (12) и (13) следует также выражение для свободной энергии системы

$$F = \bar{E} - TS = \kappa T \left\{ \sum_s \ln(1 - e^{-\alpha^s}) - A n \right\}. \quad (14)$$

Отсюда для давления газа  $p$  получается выражение

$$p = - \frac{\partial F}{\partial V} = - \kappa T \frac{\bar{E}}{c} \frac{\partial B}{\partial V} = - \bar{E} \frac{\partial \ln c}{\partial V} = \frac{2}{3} \frac{\bar{E}}{V}. \quad (15)$$

Таким образом, получается замечательный результат: соотношение между кинетической энергией и давлением оказывается точно таким же, как в классической теории, где оно выводится с помощью теоремы вириала.

#### § 4. Классическая теория как предельный случай

Пренебрегая единицей по сравнению с  $e^{\alpha^s}$ , мы получаем результаты классической теории; ниже мы покажем, при каких условиях это пренебрежение допустимо. Согласно соотношениям (11), (9) и (13), среднее число  $n^s$  молекул в ячейке в этом случае дается выражением

$$n^s = e^{-\alpha^s} = e^{-A} e^{-\frac{E^s}{\kappa T}}. \quad (11a)$$

Следовательно, число молекул с энергией в элементарной области  $dE^s$ , согласно соотношению (8), дается выражением

$$\frac{3}{2} c^{-\frac{3}{2}} e^{-A} e^{-\frac{E}{\kappa T}} E^{\frac{1}{2}} dE, \quad (11b)$$

в согласии с классической теорией. Соответственно, уравнение (6) при тех же пренебрежениях дает

$$e^A = \pi^{\frac{3}{2}} h^{-3} \frac{V}{n} (2m\kappa T)^{\frac{3}{2}}. \quad (12)$$

Для газообразного водорода при атмосферном давлении эта величина составляет около  $6 \cdot 10^4$ , т. е. значительно больше единицы. Следовательно, здесь классическая теория еще является очень хорошим приближением. Однако с ростом плотности и уменьшением температуры ошибка заметно увеличивается, и для гелия вблизи критического состояния становится довольно заметной; впрочем, в таком случае уже нельзя говорить об идеальном газе.

Вычислим теперь энтропию для нашего предельного случая из соотношения (12). Заменяя в (12)  $\ln(1 - e^{-\alpha^s})$  на  $-e^{-\alpha^s}$ , а эту величину на  $-\frac{1}{e^{\alpha^s} - 1}$  и учитывая формулу (6а), получаем

$$S = \nu R \ln \left[ e^{\frac{5}{2}} \frac{V}{h^3 n} (2\pi m \kappa T)^{\frac{3}{2}} \right],$$

где  $\nu$  — число грамм-молекул,  $R$  — универсальная газовая постоянная. Этот результат для абсолютной величины энтропии согласуется с известными результатами квантовой статистики.

Согласно изложенной здесь теории, для идеальных газов выполняется теорема Нернста. Правда, к очень низким температурам наши формулы непосредственно неприменимы, так как при их выводе мы предполагали, что при изменении  $s$  на величину порядка единицы величины  $p_r^s$  изменятся пренебрежимо мало. Однако легко показать, что при абсолютном нуле энтропия должна обратиться в нуль. В самом деле, при абсолютном нуле все молекулы будут находиться в первой ячейке; но для этого состояния существует лишь одно-единственное распределение в смысле нашего подсчета. Отсюда непосредственно следует справедливость нашего утверждения.

### § 5. Отклонение от уравнения состояния газа классической теории

Наши результаты в отношении уравнения состояния содержатся в следующих соотношениях:

$$n = \sum_s \frac{1}{e^{\alpha^s} - 1}, \quad (18) \text{ [ср. (6а)]}$$

$$\bar{E} = \frac{3}{2} pV = c \sum_s \frac{s^{\frac{3}{2}}}{e^{\alpha^s} - 1}, \quad (19) \text{ [ср. (7а) и (15)]}$$

$$\alpha^s = A + \frac{cs^{\frac{3}{2}}}{\kappa T}, \quad (20) \text{ [ср. (9) и (13)]}$$

$$c = \frac{E^s}{\frac{2}{s^3}} = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{4}{3} \pi V \right)^{-\frac{2}{3}}. \quad (21) \text{ [ср. (8)]}$$

Преобразуем и обсудим теперь эти результаты. Из рассуждений § 4 вытекает, что величина  $e^{-A}$ , которую мы обозначим через  $\lambda$ , меньше единицы.

Она является мерой «вырождения» газа. Теперь мы можем формулы (18) и (19) записать в виде двойных сумм

$$n = \sum_{s\tau} \lambda^\tau e^{-\frac{cs^{3/2}\tau}{\kappa T}}, \quad (18a)$$

$$E = c \sum_{s\tau} s^{\frac{2}{3}} \lambda^\tau e^{-\frac{cs^{3/2}\tau}{\kappa T}}, \quad (19a)$$

причем по  $\tau$  следует суммировать от 1 до  $\infty$  для всех  $s$ .

Сумму по  $s$  мы можем вычислить, заменяя суммирование интегрированием от 0 до  $\infty$ . Это допустимо вследствие медленного изменения с  $s$  показательной функции. Таким образом, мы получаем

$$n = \frac{3}{4} \frac{V\pi}{c} \left(\frac{\kappa T}{c}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{\tau} \tau^{-\frac{3}{2}} \lambda^\tau, \quad (18б)$$

$$\bar{E} = c \frac{9}{8} \frac{V\pi}{c} \left(\frac{\kappa T}{c}\right)^{\frac{5}{2}} \sum_{\tau} \tau^{-\frac{5}{2}} \lambda^\tau. \quad (19б)$$

Соотношение (18б) определяет параметр вырождения  $\lambda$  как функцию  $V$ ,  $T$  и  $n$ , а соотношение (19б) — энергию, а вместе с тем и давление газа.

Начнем общее обсуждение этих соотношений с того, что найдем функцию, выражающую сумму в соотношении (19б) через сумму в (18б). Делением второго из этих соотношений на первое вообще получаем

$$\frac{\bar{E}}{n} = \frac{3}{2} \kappa T \frac{\sum_{\tau} \tau^{-\frac{5}{2}} \lambda^\tau}{\sum_{\tau} \tau^{-\frac{3}{2}} \lambda^\tau}. \quad (22)$$

Таким образом, средняя энергия молекулы газа при заданной температуре (и заданном давлении) всегда меньше классического значения, причем подавляющий множитель тем меньше, чем больше параметр вырождения  $\lambda$ . Этот параметр в соответствии с формулами (18б) и (21) сам является известной функцией  $(V/n)^{2/3} mT$ .

Если параметр настолько мал, что можно пренебречь величиной  $\lambda^2$  по сравнению с единицей, то мы получаем

$$\frac{\bar{E}}{n} = \frac{3}{2} \kappa T \left[ 1 - 0,0318 h^3 \frac{n}{V} (2\pi m \kappa T)^{-3/2} \right]. \quad (22a)$$

Теперь рассмотрим еще, каким образом квантовые эффекты влияют на распределение Максвелла. Разлагая выражение (11) в ряд по степеням  $\lambda$  с учетом соотношения (20), получаем

$$n^s = \text{const } e^{-\frac{E^s}{\kappa T}} \left( 1 + \lambda e^{-\frac{E^s}{\kappa T}} + \dots \right). \quad (23)$$

Выражение в скобках дает квантовые поправки к распределению Максвелла. Отсюда видно, что медленные молекулы по сравнению с быстрыми встречаются чаще, чем в случае распределения Максвелла.

В заключение я хочу обратить внимание на один парадокс, который мне не удалось объяснить. С помощью изложенного здесь метода не представляет труда рассмотреть также случай смеси двух разных газов. В этом случае каждый сорт молекул имеет свои особые «ячейки». Отсюда следует аддитивность энтропий компонент смеси. Таким образом, каждая компонента в смысле энергии молекул, давления и статистического распределения ведет себя так, как будто в объеме смеси находится она одна. Смесь из  $n_1$  молекул одного сорта и  $n_2$  молекул другого, в которой молекулы первого и второго сортов отличаются друг от друга как угодно мало (особенно в отношении масс молекул  $m_1, m_2$ ), при данной температуре имеет иное давление и иное распределение состояний, чем простой газ с числом молекул  $n_1 + n_2$ , обладающий практически той же массой молекул и находящийся в том же объеме. Однако это представляется почти невозможным. (Ср. статья 63, § 8.—*Ред.*).

Опубликована 20 сентября 1924 г

## КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ОДНОАТОМНОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. ВТОРОЕ СООБЩЕНИЕ\*

В статье, опубликованной недавно в этом журнале<sup>1</sup>, была изложена теория «вырождения» идеального газа, основанная на методе, предложенном С. Бозе для вывода формулы Планка. Эта теория представляет особый интерес потому, что она основана на гипотезе о далеко идущем формальном сходстве газа и излучения. Согласно этой теории, вырожденный газ отличается от газа статистической механики подобно тому, как излучение по закону Планка — от излучения по закону Вина. Если серьезно отнестись к выводу формулы Планка методом Бозе, то нельзя обойти и эту теорию идеального газа; ведь допуская, что излучение можно рассматривать как газ из квантов, мы обязаны признать, что аналогия между газом из квантов и газом из молекул должна быть полной. Цитированная выше статья будет дополнена ниже рядом новых соображений, на мой взгляд, усиливающих интерес к ее предмету. Для удобства я пишу это сообщение как продолжение цитированной статьи.

### § 6. Насыщенный идеальный газ

В теории идеального газа представляется естественным требование, чтобы объем и температуру некоторой массы газа можно было задавать произвольно. Тогда теория определяет энергию и, соответственно, давление газа. Однако при исследовании уравнения состояния, определяемого фор-

\* Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1925, 3—14.

<sup>1</sup> A. Einstein. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1924. 261 (Статья 62)



мулами (18), (19), (20) и (21), выясняется, что при заданном числе молекул  $n$  и заданной температуре  $T$  объем газа нельзя сделать как угодно малым. В самом деле, соотношение (18) требует, чтобы для всех  $s$  выполнялось условие  $\alpha^s \geq 0$ , означающее, в соответствии с формулой (20), что  $A \geq 0$ . Это значит, что в справедливом для этого случая соотношении (18б) величина  $\lambda (= e^{-A})$  должна принимать значения между 0 и 1. Поэтому из формулы (18б) следует, что в таком газе при заданном объеме  $V$  число молекул может быть не больше, чем

$$n = \frac{(2\pi m \kappa T)^{3/2} V}{h^3} \sum_s \tau^{-\frac{3}{2}}.$$

Но что будет происходить, если при этой температуре увеличивать (например, путем изотермического сжатия) плотность вещества  $n/V$ ?

Я утверждаю, что в этом случае некоторое число молекул, все возрастающее с общей плотностью, переходит в 1-е квантовое состояние (с нулевой кинетической энергией), тогда как остальные молекулы распределяются соответственно параметру  $\lambda = 1$ . Следовательно, это утверждение состоит в том, что происходит нечто аналогичное изотермическому сжатию пара в объеме, соответствующем насыщению. Наступает разделение: одна часть «конденсируется», а оставшаяся образует «насыщенный идеальный газ» ( $A = 0, \lambda = 1$ ).

То, что обе части действительно находятся в термодинамическом равновесии, мы увидим, убедившись в совпадении функций Планка  $\Phi = S - \frac{E + pV}{T}$  на грамм-молекулу для «конденсированного» вещества и для насыщенного идеального газа. Для «конденсированного» вещества  $\Phi$  исчезает потому, что  $S, E$  и  $V$  по отдельности обращаются в нуль<sup>2</sup>. Для «насыщенного газа», в соответствии с формулами (12) и (13), для  $A = 0$  прежде всего имеем

$$S = - \kappa \sum_s \ln(1 - e^{-\alpha^s}) + \frac{\bar{E}}{T}. \tag{25}$$

Сумму можно заменить на интеграл, который преобразуется путем интегрирования по частям. В результате получаем

$$\sum_s = - \int_0^\infty s \frac{e^{-\frac{cs^2/3}{\kappa T}}}{1 - e^{-\frac{cs^2/3}{\kappa T}}} \frac{2}{3} \frac{cs}{\kappa T} ds,$$

<sup>2</sup> «Конденсированная» часть вещества не требует особого объема, поскольку она не дает вклада в давление.

или, в соответствии с равенствами (8), (11) и (15),

$$\sum_s = -\frac{2}{3} \int_0^{\infty} n_s E^s ds = -\frac{2}{3} \frac{\bar{E}}{\kappa T} = -\frac{pV}{\kappa T}. \quad (26)$$

Таким образом, из уравнений (25) и (26) для «насыщенного идеального газа» получается

$$S = \frac{\bar{E} + pV}{T}$$

или — как и требуется для сосуществования насыщенного идеального газа с конденсированным веществом —

$$\Phi = 0. \quad (27)$$

Итак, мы приходим к следующему результату.

В соответствии с полученным уравнением состояния идеального газа при каждой температуре существует максимальная плотность движущихся молекул. При превышении этой плотности лишние молекулы становятся неподвижными («конденсируются» без участия сил притяжения). Паразитально то, что «насыщенный идеальный газ» представляет как состояние с максимально возможной плотностью подвижных молекул, так и состояние с такой плотностью, при которой газ находится в термодинамическом равновесии с «конденсатом». Таким образом, аналога «пересыщенного пара» для идеального газа не существует.

### **§ 7. Сравнение развитой теории газа с теориями, основанными на гипотезе о взаимной статистической независимости молекул газа**

Эренфест и другие коллеги порицают теорию излучения Бозе и мою теорию идеального газа за то, что в этих теориях кванты и, соответственно, молекулы трактовались не как статистически взаимно независимые объекты, причем на это обстоятельство в наших статьях специально не указывалось. Это совершенно верно. Считая кванты статистически взаимно независимыми в смысле их локализации, мы получаем закон излучения Вина; рассматривая аналогичным образом молекулы газа, мы получаем классическое уравнение состояния идеальных газов, даже если в остальном будем поступать совершенно так же, как Бозе и я. Теперь я сопоставлю оба способа рассмотрения для газов, чтобы отчетливо выявить различие и чтобы удобно было сравнивать наши результаты с результатами теории независимых молекул.

Согласно обеим теориям, число «ячеек»  $z_v$ , принадлежащих бесконечно малой области энергии молекул  $\Delta E$  (ниже называемой «элементарной областью»), дается формулой

$$z_v = 2\pi \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} \Delta E.$$

Состояние газа (макроскопическое) определяется тем, что указывается, сколько молекул  $n_v$  находится в каждой такой бесконечно малой области. Надо рассчитать число  $W$  возможностей реализации (планковская вероятность) определенного таким образом состояния.

а) По Бозе.

Состояние микроскопически определяется тем, что указывается, сколько молекул находится в каждой ячейке (комплексия). Число комплексий для  $v$ -й бесконечно малой области тогда будет

$$\frac{(n_v + z_v - 1)!}{n_v! (z_v - 1)!}. \quad (28)$$

Образуя произведение по всем бесконечно малым областям, получаем общее число комплексий одного состояния и отсюда, по теореме Больцмана, энтропию

$$S = \kappa \sum_v \{ (n_v + z_v) \ln (n_v + z_v) - n_v \ln n_v - z_v \ln z_v \}. \quad (29a)$$

Легко видеть, что при этом способе вычисления распределение молекул по ячейкам не считается статистически независимым. Это связано с тем, что случаи, называемые здесь «комплексиями», согласно гипотезе о независимом распределении отдельных молекул по ячейкам, нельзя было бы считать равновероятными. Подсчет этих «комплексий» с разной вероятностью в случае фактической статистической независимости молекул не привел бы к правильному значению энтропии. Таким образом, формула косвенно выражает известную гипотезу о взаимном влиянии молекул пока совершенно загадочной природы, обуславливающим как раз статистическую равновероятность случаев, называемых здесь «комплексиями».

б) По гипотезе о статистической независимости молекул.

Состояние микроскопически определяется тем, что для каждой молекулы указывается, в какой ячейке она находится (комплексия). Сколько комплексий принадлежит одному макроскопически определенному состоянию? Данное число молекул  $n_v$  можно распределить по  $z_v$  ячейкам  $v$ -й элементарной области

$$z_v^{n_v}$$

различными способами. Если распределение молекул по элементарным

областям осуществляется уже известным образом, то это даст всего

$$\prod_{\nu} (z_{\nu}^{n_{\nu}})$$

разных распределений молекул по всем ячейкам. Чтобы получить число комплексов в определенном выше смысле, эту величину необходимо еще умножить на число

$$\frac{n!}{\prod n_{\nu}!}$$

возможных сопоставлений всех молекул элементарным областям при данном  $n_{\nu}$ . Тогда принцип Больцмана дает для энтропии выражение

$$S = \kappa \left\{ n \ln n + \sum_{\nu} (n_{\nu} \ln z_{\nu} - n_{\nu} \ln n_{\nu}) \right\}. \quad (29б)$$

Первый член этого выражения зависит не от выбора макроскопического распределения, а только от общего числа молекул. Поэтому при сравнении энтропий различных макроскопических состояний он играет роль несущественной константы, и мы можем его отбросить. Мы *должны* опустить его, если — как обычно в термодинамике — хотим, чтобы энтропия при заданном внутреннем состоянии газа была пропорциональной числу молекул. Следовательно, мы должны положить

$$S = \kappa \sum_{\nu} n_{\nu} (\ln z_{\nu} - \ln n_{\nu}). \quad (29в)$$

Отбрасывание множителя  $n!$  в выражении для  $W$  в случае газов обычно обосновывается тем, что комплексы, возникающие при простой перестановке молекул одного типа, нельзя рассматривать как различные и потому их следует считать только *один раз*.

Найдем теперь для обоих случаев максимум  $S$  при дополнительных условиях

$$\bar{E} = \sum E_{\nu} n_{\nu} = \text{const},$$

$$n = \sum n_{\nu} = \text{const}.$$

В случае «а» получается

$$n_{\nu} = \frac{z_{\nu}}{e^{\alpha + \beta E_{\nu}} - 1}, \quad (30а)$$

что с точностью до обозначений совпадает с формулой (13). В случае «б»

получается

$$n_\nu = z_\nu e^{-\alpha - \beta E_\nu} \quad (30б)$$

При этом в обоих случаях  $\beta kT = 1$ .

Видно, далее, что в случае «б» получается закон распределения Максвелла. Квантовая структура здесь не проявляется (по крайней мере, при не бесконечно большом общем объеме газа). Теперь нетрудно видеть, что случай «б» несовместим с теоремой Нернста. В самом деле, чтобы для этого случая вычислить значение энтропии при абсолютном нуле, необходимо найти  $S$  по формуле (29в) при абсолютном нуле. При этом все молекулы будут находиться в первом квантовом состоянии. Таким образом, мы должны положить

$$\begin{aligned} n_\nu &= 0 \text{ при } \nu \neq 1, \\ n_1 &= n, \\ z_1 &= 1. \end{aligned}$$

Тогда формула (29в) для  $T = 0$  дает

$$S = -n \ln n. \quad (31)$$

Итак, в случае вычисления по методу «б» получается противоречие с теоремой Нернста. Напротив, вычисление по методу «а» приводит к согласию с теоремой Нернста, в чем можно убедиться непосредственно, вспоминая, что при абсолютном нуле в смысле этого метода существует только одна комплексия ( $W = 1$ ). В соответствии со сказанным метод «б» ведет либо к противоречию с теоремой Нернста, либо к невыполнению условия, чтобы энтропия при данном внутреннем состоянии была пропорциональна числу молекул. По этой причине я полагаю, что методу «а» (т. е. статистическому подходу Бозе) следует отдавать предпочтение, хотя преимущество этого метода и нельзя считать доказанным априори. Этот результат со своей стороны подкрепляет убеждение в глубоком родстве сущностей излучения и газа, поскольку тот метод статистического рассмотрения, который приводит к формуле Планка, в применении к идеальным газам обеспечивает согласие теории газа с теоремой Нернста.

## § 8. Флуктуационные свойства идеального газа

Пусть заполненный газом объем  $V$  сообщается с бесконечно большим объемом того же газа. Предположим далее, что оба объема разделены стенкой, пропускающей только молекулы с энергией в бесконечно узкой обла-

сти  $\Delta E$ , но отражающей молекулы, имеющие иную кинетическую энергию. Представление о такой стенке аналогично понятию о квазимонохроматической прозрачной стенке в теории излучения. Возникает вопрос о флуктуации  $\Delta_\nu$  числа молекул  $n_\nu$ , принадлежащих энергетической области  $\Delta E$ . При этом будем предполагать, что молекулы различных энергетических областей внутри объема  $V$  не обмениваются энергией, вследствие чего флуктуации чисел молекул, относящихся к энергиям вне  $\Delta E$ , не могут происходить.

Пусть  $n_\nu$  — среднее значение числа молекул, относящихся к  $\Delta E$ ,  $n_\nu + \Delta_\nu$  — мгновенное значение. Тогда формула (29a) дает значение энтропии как функции  $\Delta_\nu$  причем в выражение для  $S$  вместо  $n_\nu + \Delta_\nu$  следует подставлять  $n_\nu$ .

Сохраняя квадратичные члены, получаем

$$S = \bar{S} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \Delta_\nu} \Delta_\nu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial \Delta_\nu^2} \Delta_\nu^2.$$

Для бесконечно большой подсистемы выполняется аналогичное соотношение, а именно

$$S^0 = \bar{S}^0 - \frac{\partial S^0}{\partial \Delta_\nu} \Delta_\nu.$$

Квадратичный член здесь является относительно бесконечно малым в силу относительно бесконечно большого объема подсистемы. Обозначая полную энтропию символом  $\Sigma (= S + S^0)$ , получаем  $\frac{\partial \Sigma}{\partial \Delta_\nu} = 0$ , поскольку в среднем существует равновесие. Складывая эти равенства, получаем для полной энтропии соотношение

$$\Sigma = \bar{\Sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\Sigma}}{\partial \Delta_\nu^2} \Delta_\nu^2. \quad (32)$$

Отсюда, согласно принципу Больцмана, получаем для вероятности  $\Delta_\nu$  закон:

$$dW = \text{const} \cdot e^{-\frac{\Sigma}{k}} d\Delta_\nu = \text{const} \cdot e^{-\frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \bar{\Sigma}}{\partial \Delta_\nu^2} \Delta_\nu^2} d\Delta_\nu.$$

Отсюда для среднего квадрата флуктуаций имеем

$$\overline{\Delta_\nu^2} = \frac{k}{\left( -\frac{\partial^2 \bar{\Sigma}}{\partial \Delta_\nu^2} \right)}. \quad (33)$$

Учитывая соотношение (29а), находим

$$\overline{\Delta_v^2} = n_v + \frac{n_v^2}{z_v}. \quad (34)$$

Этот закон флуктуаций оказывается совершенно аналогичным закону флуктуаций квазимонохроматического излучения Планка. Запишем его в виде

$$\left( \frac{\overline{\Delta_v}}{n_v} \right)^2 = \frac{1}{n_v} + \frac{1}{z_v}.$$

Выражение для среднего квадрата относительной флуктуации молекул указанного выше типа имеет два слагаемых. Если бы молекулы были взаимно независимыми, в этом выражении имелось бы одно первое слагаемое. К нему прибавляется часть среднего квадрата флуктуаций, абсолютно независимая от средней плотности молекул и определяемая только элементарной областью  $\Delta E$  и объемом. В случае излучения эта часть соответствует интерференционным флуктуациям. Ей можно придать соответствующий смысл и в газе, сопоставляя газу некоторый процесс излучения и вычисляя интерференционные флуктуации последнего. Я рассмотрю это толкование подробнее, так как думаю, что здесь речь идет не только о простой аналогии.

Каким образом материальной частице или системе материальных частиц можно сопоставить (скалярное) волновое поле — показал Л. де Бройль в своей работе, заслуживающей всяческого внимания<sup>3</sup>. Материальной частице с массой  $m$  прежде всего сопоставляется частота  $\nu_0$  в соответствии с формулой

$$mc^2 = h\nu_0. \quad (35)$$

Допустим теперь, что частица покоится относительно галилеевой системы отсчета  $K'$ , в которой пусть происходит всюду синхронный колебательный процесс с частотой  $\nu_0$ . Тогда относительно системы отсчета  $K$ , в которой система  $K'$  движется вместе с массой  $m$  со скоростью  $v$  вдоль (положительного направления) оси  $X$ , распространяется волна вида

$$\sin \left( 2\pi\nu_0 \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

<sup>3</sup> Louis de Broglie. Thèses. Musson et Co. Paris, 1924. В этой диссертации имеется также очень интересная геометрическая интерпретация квантовых правил Бора—Зоммерфельда.

Частота  $\nu$  фазовая скорость  $V$  этой волны даются, следовательно, формулами

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (36)$$

$$V = \frac{c^2}{v}. \quad (37)$$

Тогда, как показал де Бройль,  $\nu$  в то же время является и групповой скоростью этого волнового процесса. Интересно также, что энергия частицы  $mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , согласно формулам (35) и (36), равна точно  $h\nu$ , в соответствии с основным соотношением квантовой теории.

Теперь легко видеть, что таким способом можно сопоставить газу скалярное волновое поле; прямым вычислением я убедился в том, что  $1/z$ , есть средний квадрат флуктуаций этого волнового поля, что соответствует исследованной нами выше энергетической области  $\Delta E$ .

Эти соображения проливают свет на парадокс, о котором упоминалось в конце моего первого сообщения. Чтобы два пуга волн могли в заметной степени интерферировать, они должны обладать почти одинаковыми значениями  $V$  и  $\nu$ . Для этого, в соответствии с формулами (35), (36) и (37), необходимо, чтобы оба газа обладали почти совпадающими значениями  $\nu$  и  $m$ . Поэтому волновые поля, сопоставляемые двум газам с заметно отличающимися массами молекул, не могут давать заметной интерференции друг с другом. Отсюда можно заключить, что, согласно изложенной здесь теории, энтропия газовой смеси складывается из энтропий ее компонент точно так же, как и в классической теории, по крайней мере пока молекулярные веса компонент хоть сколько-нибудь отличаются друг от друга.

### § 9. Замечание о вязкости газов при низких температурах

Как говорилось выше, можно полагать, что каждому движению соответствует волновое поле, подобно тому, как в оптике волновое поле излучения соответствует движению световых квантов. Это волновое поле — пока еще неизвестной физической природы — в принципе должно оказывать свое влияние на движение. Так, пучок молекул газа, проходя через отверстие, должен испытывать дифракцию, аналогичную дифракции луча света. Для того чтобы такое явление можно было наблюдать, длина волны  $\lambda$  должна быть сравнимой с размерами отверстия. Для скоростей, малых по сравне-



нию со скоростью света  $c$ , из формул (35), (36) и (37) следует

$$\lambda = \frac{V}{v} = \frac{h}{mv}. \quad (38)$$

Для молекул газа, движущихся с тепловыми скоростями, эта длина волны  $\lambda$  всегда чрезвычайно мала, в большинстве случаев даже значительно меньше диаметра молекул  $\sigma$ . Отсюда прежде всего следует, что нечего и думать о наблюдении этой дифракции на реальных отверстиях или экранах.

Однако оказывается, что при низких температурах для газообразного водорода и гелия  $\lambda$  по порядку величины равна  $\sigma$ , что должно, в соответствии с теорией, сказываться на коэффициенте вязкости.

Ведь если пучок молекул, движущихся со скоростью  $v$ , встречает еще одну молекулу, которую мы будем считать для простоты неподвижной, то это можно сравнить со случаем, когда цуг волн с длиной волны  $\lambda$  попадает на диск диаметром  $2\sigma$ . При этом происходит дифракция (Фраунгофера), тождественная той, которая наблюдалась бы на отверстии того же размера. Большие углы отклонения встречаются только при условии, что  $\lambda$  одного порядка с  $\sigma$  или больше. Таким образом, в этом случае, кроме требуемых механикой отклонений при столкновениях, будут происходить почти так же часто и необъяснимые пока механически отклонения молекул, уменьшающие длину свободного пробега. Следовательно, вблизи такой температуры внезапно наступает довольно резкое падение вязкости с уменьшением температуры. Оценка этой температуры по условию  $\lambda = \sigma$  дает для  $H_2$  и He соответственно  $56^\circ$  и  $40^\circ$  K. Конечно, это очень грубые оценки; однако их можно уточнить. Речь идет здесь о новом объяснении экспериментальных данных по температурной зависимости коэффициента вязкости водорода, полученных П. Гюнтером по инициативе Нернста, для объяснения которых Нернст уже предпринимал квантово-теоретическое рассмотрение<sup>4</sup>.

## § 10. Уравнение состояния насыщенного идеального газа. Замечания о теории уравнения состояния газов и электронной теории металлов

В § 6 было показано, что для идеального газа, находящегося в равновесии с «конденсированным веществом», параметр вырождения равен 1. В этом случае концентрация, энергия и давление подвижной части молекул, согласно соотношениям (186), (22) и (15), определяются только тем-

<sup>4</sup> W. N e r n s t. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1919, VIII, 118; P. G ü n t h e r. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1920, XXXVI, 720.

пературой  $T$ . Следовательно, выполняются соотношения

$$\eta = \frac{n}{NV} = \frac{2,615}{N h^3} (2\pi m \kappa T)^{3/2} = 1,12 \cdot 10^{-18} (MRT)^{3/2}, \quad (39)$$

$$\frac{\bar{E}}{n} = \frac{1,348}{2,615} \kappa T, \quad (40)$$

$$p = \frac{1,348}{2,615} RT \eta. \quad (41)$$

При этом введены обозначения:  $\eta$  — концентрация в молях,  $N$  — число молекул в моле,  $M$  — масса моля (молекулярный вес). С помощью равенства (39) можно показать, что значения плотности, при которых соответствующий идеальный газ был бы насыщенным, в реальных газах не достигаются. Однако критическая плотность гелия приблизительно лишь в пять раз меньше, чем плотность насыщения  $\eta$  идеального газа той же температуры и того же молекулярного веса. Для водорода это отношение равно примерно 26. Так как реальные газы существуют при плотностях, приближающихся по порядку величины к плотности насыщения, и так как согласно уравнению (41) вырождение существенно влияет на давление, то, если излагаемая теория правильна, в уравнении состояния должны проявляться заметные квантовые эффекты; в частности, необходимо исследовать, можно ли объяснить таким образом отклонения от закона соответственных состояний Ван-дер-Ваальса<sup>6</sup>.

Впрочем, следует также ожидать, что упомянутое в предыдущем параграфе явление дифракции, приводящее при низких температурах к кажущемуся увеличению истинного объема молекул, будет оказывать влияние и на уравнение состояния.

Имеется случай, когда природа в основном реализует насыщенный идеальный газ, а именно случай электронов проводимости внутри металлов. Как известно, электронная теория металлов количественно объясняет отношение электропроводности к теплопроводности с удивительной точностью (формула Друде — Лоренца) в предположении, что внутри металлов существуют свободные электроны, проводящие как электричество, так и тепло. Однако, несмотря на такой большой успех этой теории, в настоящее время она не считается правильной, между прочим потому, что не могла объяснить тот факт, что электроны не вносят заметного вклада в удельную теплоемкость металлов. Но эта трудность отпадает, если положить в основу изложенную здесь теорию газов. Именно, из равенства (39) следует, что концентрация насыщения (подвижных) электронов при обычной тем-

<sup>6</sup> Позднее при сравнении с опытом я нашел, что это не так. Искомый эффект маскируется молекулярными взаимодействиями иного рода.

пературе составляет около  $5,5 \cdot 10^{-6}$ , так что в тепловую энергию могла бы вносить вклад лишь исчезающе малая часть электронов. При этом средняя тепловая энергия на один участвующий в тепловом движении электрон равна примерно половине средней энергии по классической молекулярной теории. Если же существуют даже очень малые силы, удерживающие неподвижные электроны в состоянии покоя, то понятно также, что эти электроны не участвуют в электропроводности. Возможно даже, что исчезновение этих слабых сил связи при очень низких температурах является причиной сверхпроводимости. Термоэлектродвижущие силы на основе этой теории остаются вообще непонятными, пока электронный газ рассматривается как идеальный. Конечно, в основу такой электронной теории металлов надо было бы положить не максвелловское распределение по скоростям, а распределение насыщенного идеального газа, согласно изложенной здесь теории; из соотношений (8), (9) и (11) для этого частного случая получается

$$dW = \text{const} \cdot \frac{E^{1/2} dE}{e^{\frac{E}{kT}} - 1}. \quad (42)$$

При анализе этой теоретической возможности мы наталкиваемся на ту трудность, что для объяснения наблюдаемых значений электропроводности и теплопроводности металлов вследствие очень малой объемной плотности электронов, которые, согласно полученным нами результатам, участвуют в тепловом движении, приходится предполагать очень большие значения длины свободного пробега (порядка  $10^{-3}$  см). К тому же на основе этой теории не представляется возможным понять поведение металлов по отношению к инфракрасному излучению (отражение, излучение).

## § 11. Уравнение состояния ненасыщенного газа

Рассмотрим теперь подробнее отклонение уравнения состояния идеального газа от классического уравнения состояния в ненасыщенной области. Для этого мы снова обратимся к соотношениям (15), (186) и (196).

Положим для краткости

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=\infty} \tau^{-\frac{3}{2}} \lambda^{\tau} = y(\lambda),$$

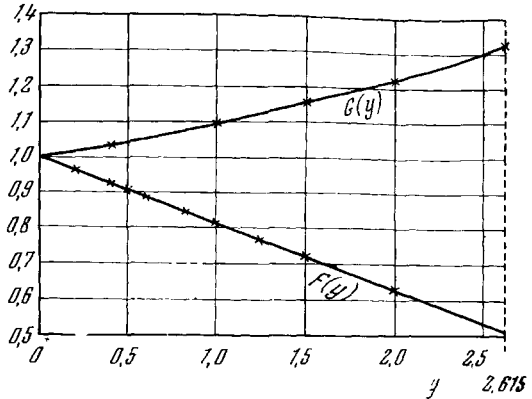
$$\sum_{\tau=1}^{\tau=\infty} \tau^{-\frac{5}{2}} \lambda^{\tau} = z(\lambda),$$

и поставим задачу — выразить  $z$  как функцию  $y$  [ $z = \Phi(y)$ ]. Решение этой задачи, за которое я благодарю Я. Громмера, основывается на следующей общей теореме (Лагранжа).

При выполненном в нашем случае условии, что  $y$  и  $z$  при  $\lambda = 0$  обращаются в нуль и что  $y$  и  $z$  в некоторой окрестности абсолютного нуля суть регулярные функции  $\lambda$ , для достаточно малых  $y$  существует ряд Тейлора

$$z = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left( \frac{d^{\nu}z}{dy^{\nu}} \right)_{\lambda=0} \frac{y^{\nu}}{\nu!}, \quad (43)$$

Рис. 1.



причем коэффициенты можно выразить через функции  $y(\lambda)$  и  $z(\lambda)$  по рекуррентной формуле

$$\frac{d^{\nu}(z)}{dy^{\nu}} = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{d^{\nu-1}z}{dy^{\nu-1}} \right) \frac{dy}{d\lambda}. \quad (44)$$

Таким образом в нашем случае получается сходящееся до  $\lambda=1$  и удобное для вычислений разложение

$$z = y - 0,1768y^2 - 0,0034y^3 - 0,0005y^4.$$

Введем теперь обозначение

$$\frac{z}{y} = F(y).$$

Тогда для ненасыщенного идеального газа, т. е. от  $y = 0$  до  $y = 2,615$ , выполняются соотношения

$$\frac{\bar{E}}{n} = \frac{3}{2} \kappa T F(y), \quad (19в)$$

$$p = RT \eta F(y), \quad (22в)$$

причем введено обозначение

$$y = \frac{h^3}{(2\pi m \kappa T)^{3/2}} \frac{n}{V} = \frac{h^3 N \eta}{(2\pi M R T)^{3/2}}. \quad (18в)$$

Из соотношения (19в) для удельной молярной теплоемкости при постоянном объеме  $c_v$  получаем

$$c_v = \frac{3}{2} R \left[ F(y) - \frac{3}{2} y F'(y) \right] = \frac{3}{2} R G(y).$$

Для большей наглядности мы приводим графики функций  $F(y)$  и  $G(y)$  (см. рис. 1).

Учитывая приблизительно линейное поведение  $F(y)$ , получаем для  $p$  хорошее приближенное уравнение:

$$p = RT\eta \left[ 1 - 0,186 \frac{h^3 N^4 \eta}{(2\pi MRT)^{3/2}} \right]. \quad (22г)$$

Декабрь 1924 г.

В этих двух работах (статьи 62 и 63) положено начало статистики Бозе — Эйнштейна. Здесь впервые указано на явление, получившее название бозе-эйнштейновской конденсации.

Эйнштейн первый оценил величие идеи де Бройля и указал на существование дифракционных явлений для газовых молекул и на их роль в рассеянии молекул. Это — первое указание на связь квантовомеханических эффектов с макроскопическими кинетическими коэффициентами вязкости и электропроводности металлов.

Паули (в сб. Albert Einstein: Philosopher, Scientist. Ed by P. A. Schilpp, N.-Y., 1951, p. 156) вспоминает, что еще в 1924 г. на физической конференции в Инсбруке Эйнштейн предложил искать явления дифракции и интерференции в молекулярных пучках.

Русский перевод работ напечатан в УФН, 1965, 86, 381, 387.

## К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА\*

Предложенный Бозе вывод формулы излучения Планка, который основан на последовательном применении гипотезы о световых квантах, недавно побудил меня разработать квантовую теорию идеального газа<sup>1</sup>. Эта теория кажется справедливой, если исходить из убеждения, что световой квант (отвлекаясь от его поляризационных свойств) по существу отличается от одноатомной молекулы только тем, что масса покоя кванта исчезающе мала. Однако, поскольку предположение о такой аналогии никоим образом не одобряется всеми исследователями, поскольку, далее, примененный Бозе и мной статистический метод ни в коей мере не является бесспорным, но кажется обоснованным лишь апостериори, благодаря успеху в случае излучения, я попытался найти еще другие, по возможности свободные от произвольных гипотез соображения, касающиеся квантовой теории идеального газа. Эти соображения будут изложены ниже. Они образуют действительную опору выдвинутой ранее теории, хотя полученные результаты и не представляют полной замены такой теории. Речь идет здесь о том, чтобы перенести в область теории газов соображения, которые по методу и результату в значительной степени сходны с соображениями, приводящими в области теории излучения к закону смещения Вина.

.....  
\* *Zur Quantentheorie des idealen Gases*, Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1925, 23, 18—25.

<sup>1</sup> A. E i n s t e i n. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1924, 261. (Статья 62).

## § 1. Постановка задачи

Пусть для идеального газа заданы молярный объем  $V$ , температура  $T$  и масса молекулы  $m$ . Спрашивается, каким будет статистический закон распределения скоростей, аналог закона распределения Максвелла. Следовательно, будем искать соотношение типа

$$dn = \rho(L, \kappa T, V, m) \frac{V dp_1 dp_2 dp_3}{h^3}. \quad (1)$$

Здесь через  $dn$  обозначается число молекул, для которых компоненты импульса  $p_1, p_2, p_3$  в прямоугольных координатах лежат в пределах интервалов  $dp_1, dp_2, dp_3$ , а через  $L$  — кинетическая энергия молекулы  $[\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)]$ ; вследствие естественного условия изотропности  $p_1, p_2, p_3$  могут входить в  $\rho$  лишь в комбинации  $L$ . Функция  $\rho$  является неизвестной заранее функцией данных четырех переменных. Если функция плотности  $\rho$  известна, то, разумеется, известно также и уравнение состояния, поскольку нет сомнения, что для получения давления достаточен механический расчет столкновений молекул со стенкой. Напротив, мы не можем предполагать, что столкновения молекул друг с другом происходят по законам механики; в противном случае мы, естественно, пришли бы к максвелловскому закону распределения скоростей и к классическому уравнению состояния газа.

## § 2. Почему классическое уравнение состояния не подходит для квантовой теории?

Начиная с первых работ Планка по квантовой теории, под величиной  $W$  в формуле Больцмана

$$S = \kappa \ln W$$

понимают некоторое *целое число*. Оно показывает, сколькими дискретными способами (в смысле квантовой теории) может быть осуществлено рассматриваемое состояние с энтропией  $S$ . И хотя в большинстве случаев сейчас невозможно теоретически рассчитать  $W$ , не внося произвола, все же эта точка зрения приводит к убеждению, что  $S$  не содержит произвольной аддитивной постоянной, но полностью определена в смысле квантовой теории и всегда положительна. Благодаря теореме Нернста, это толкование Планка становится почти необходимым. А именно, при абсолютном нуле прекращается беспорядок, вызываемый тепловым движением, и рассматриваемое состояние может быть реализовано только одним способом ( $W = 1$ ). Это непосредственно означает, что выполняется теорема Нернста ( $S = 0$  при  $T = 0$ ).

Такое простое объяснение теоремы Нернста, основанное на толковании Планком принципа Больцмана, свидетельствует об общей справедливости этого толкования. В частности, оно приводит нас к пониманию того факта, что энтропия не может стать отрицательной.

Согласно классическому уравнению состояния идеального газа, энтропия одной грамм-молекулы содержит аддитивный член  $R \ln V$ , который определяет ее зависимость от объема при постоянной температуре. Путем уменьшения  $V$  этот член можно сделать как угодно большой отрицательной величиной, так что сама энтропия станет отрицательной. Правда, эти значения  $V$  для реальных газов значительно ниже критического объема этих газов, так что из этого не следует делать вывода о достижении отрицательных значений энтропии для реальных газов. Однако можно быть уверенным в том, что допущение воображаемого газа, который ближе к идеальному, чем действительно встречающиеся в природе, не может привести к нарушению общих законов термодинамики. Но, как уже было сказано, согласно классическому уравнению состояния, отрицательные значения энтропии должны встречаться в принципиально реализуемых состояниях. Поэтому классическое уравнение состояния мы в принципе должны отбросить и рассматривать его как предельный закон, подобно закону излучения Вина.

### § 3. Рассмотрение на основе анализа размерностей. Метод, используемый в дальнейшем

Из формулы (1) следует, что  $\rho$  является безразмерной величиной. Отсюда можно сделать некоторые выводы о структуре функции  $\rho$ , если допустить, что  $\rho$  не содержит никаких других размерных констант, кроме постоянной Планка  $h$ . В таком случае известным способом можно вывести, что  $\rho$  должно иметь вид

$$\rho = \Psi \left( \frac{L}{\kappa T}, \frac{m \left( \frac{V}{N} \right)^{2/3} \kappa T}{h^2} \right), \quad (2)$$

где  $\Psi$  является неизвестной универсальной функцией двух безразмерных переменных. При этом функция  $\Psi$  подчиняется условию

$$\frac{V}{h^3} \int \rho d\Phi = N, \quad (3)$$

где

$$d\Phi = \int_L^{L+dL} dp_1 dp_2 dp_3 = 2\pi (2m)^{3/2} L^{1/2} dL. \quad (4)$$



Других результатов из рассмотрения размерностей получить нельзя. Однако функцию  $\Psi$  двух переменных можно, не вводя сколько-нибудь сомнительных гипотез, определить так, что неопределенной останется только функция *одной* переменной. Это можно достигнуть двумя независимыми способами на основе двух утверждений.

1. Энтропия газа не изменяется при бесконечно медленном адиабатическом сжатии.

2. В идеальных газах при наличии внешнего статического поля консервативных сил существует также стационарное состояние, при котором всюду господствует искомое распределение скоростей.

Оба эти утверждения должны иметь силу, если пренебречь эффектом столкновений молекул друг с другом. Правда, в силу принципиального пренебрежения столкновениями речь идет о двух предположениях, которые нельзя доказать; однако они очень естественны, и, кроме того, их справедливость становится вероятной благодаря тому, что оба они приводят к одинаковым результатам и в предельном случае, когда несущественны квантовые эффекты, ведут к распределению Максвелла.

#### § 4. Адиабатическое сжатие

Пусть газ заключен в сосуд, имеющий форму параллелепипеда, со сторонами  $l_1, l_2, l_3$ . Примем, что распределение по скоростям является изотропным, а в остальном — произвольно. Пусть столкновения со стенками являются упругими. Тогда распределение состояний не изменяется со временем. Оно дается выражением

$$dn = \frac{V}{h^3} \rho d\Phi, \quad (5)$$

где  $\rho$  — любая заданная функция от  $L$ .

Если стенки сдвигать бесконечно медленно адиабатически так, чтобы

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V}, \quad (6)$$

то распределение остается изотропным, т. е. имеет вид (5). Как же оно при этом изменяется?

Если через  $|p_1|$  обозначить абсолютное значение  $p_1$  молекулы, то, применяя закон упругого столкновения, получаем

$$\Delta |p_1| = - |p_1| \frac{\Delta l_1}{l_1}. \quad (7)$$

Аналогичные уравнения справедливы и для  $\Delta/p_2$  и  $\Delta/p_3$ . Поэтому с учетом (7) получим:

$$\Delta L = \frac{1}{m} (|p_1| \delta |p_1| + \dots) = -\frac{2}{3} L \frac{\Delta V}{V}. \quad (8)$$

Затем из соотношения (4) следует, что

$$\Delta d\Phi = 2\pi (2m)^{3/2} \left( L^{1/2} \Delta dL + \frac{1}{2} L^{-1/2} \Delta L dL \right)$$

или, согласно (8),

$$\Delta d\Phi = -d\Phi \frac{\Delta V}{V} \quad (9)$$

и также

$$\Delta (V d\Phi) = 0. \quad (10)$$

Во всех этих формулах  $\Delta$  означает изменения, которые претерпевают при адиабатическом изменении объема рассматриваемые величины.

При адиабатическом изменении объема число  $dN$  молекул, рассматриваемых в распределении (5), не изменяется. Отсюда

$$0 = \Delta dn = \Delta (V \rho d\Phi),$$

или вследствие (10)

$$\Delta \rho = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь энтропию газа, для которого распределение состояний дается выражением (5). При этом примем, что эта энтропия аддитивно складывается из частей, которые соответствуют отдельным энергетическим областям  $dL$ . В теории излучения эта гипотеза аналогична предположению о том, что энтропия излучения аддитивно складывается из квазимонохроматических составных частей. Она эквивалентна предположению, что для молекул со скоростями в разных интервалах можно ввести полупроницаемые стенки<sup>2</sup>. Согласно этой гипотезе, мы должны приписать газу, молекулы которого распределены изотропно и имеют импульсы в интервале  $d\Phi$ , энтропию

$$\frac{dS}{\kappa} = \frac{V}{h^3} s(\rho, L) d\Phi, \quad (12)$$

где  $s$  обозначает пока неизвестную функцию двух переменных.

При адиабатическом сжатии, которое было рассмотрено выше, эта энтропия должна оставаться неизменной, и, таким образом,

$$\Delta dS = 0,$$

<sup>2</sup> Полупроницаемые стенки такого рода можно представить себе реализуемыми посредством консервативного силового поля.

или вследствие равенств (7) и (10)

$$0 = \Delta s = \frac{\partial s}{\partial \rho} \Delta \rho + \frac{\partial s}{\partial L} \Delta L.$$

Отсюда, с учетом (11), следует, что

$$\frac{\partial s}{\partial L} = 0, \quad (13)$$

и  $s$  является, таким образом, функцией одного  $\rho$ .

Условимся теперь, что газ находится в термодинамическом равновесии в отношении распределения скоростей. Тогда энтропия

$$\frac{S}{\kappa} = \frac{V}{h^3} \int s d\Phi$$

должна иметь максимум по отношению ко всякому варьированию  $\rho$ , которое удовлетворяет двум условиям:

$$\delta \left\{ \frac{V}{h^3} \int \rho d\Phi \right\} = 0,$$

$$\delta \left\{ \frac{V}{h^3} \int L \rho d\Phi \right\} = 0.$$

Выполняя варьирование, мы приходим к условию

$$\frac{ds}{d\rho} = AL + B, \quad (14)$$

где  $A$  и  $B$  не зависят от  $L$ . Но так как  $s$  (и, следовательно, также  $\partial s/\partial \rho$ ) является функцией только  $\rho$ , это уравнение можно разрешить относительно  $\rho$ :

$$\rho = \Psi(AL + B), \quad (15)$$

где  $\Psi$  является неизвестной функцией. Разумеется,  $A$  и  $B$  могут зависеть от  $\kappa T$ ,  $V/N$ ,  $m$  и  $h$ .

Величину  $A$  можно определить, применяя формулу энтропии к бесконечно малому изопикническому нагреву газа. Если через  $E$  обозначить энергию газа, а через  $D$  — то изменение, которое имеет место при этом процессе, то прежде всего получим

$$DE = TdS = \frac{V}{h^3} \int LD\rho d\Phi = \frac{V\kappa T}{h^3} \int Ds d\Phi.$$

Так как вследствие (14)

$$Ds = D\rho (AL + B)$$

и вследствие неизменности числа молекул

$$\int D\rho d\Phi = 0,$$

то мы имеем

$$\int LD\rho d\Phi (1 - \kappa T A) = 0,$$

или

$$A = \frac{1}{\kappa T}.$$

Таким образом, вместо соотношения (15) получим

$$\rho = \Psi \left( \frac{L}{\kappa T} + B \right). \quad (15a)$$

### § 5. Газ в консервативном силовом поле

Газ находится в динамическом равновесии под действием консервативного силового поля. Пусть потенциальная энергия  $\Pi$  молекулы является функцией положения,  $\rho$  пусть снова является молекулярной плотностью, относящейся к приведенному шестимерному фазовому пространству. Пренебрежем опять столкновениями молекул и примем, что движение отдельной молекулы во внешнем силовом поле подчиняется классической механике. Требование стационарности движения приводит тогда к условию

$$\sum_i \left( \frac{\partial (\rho \dot{x}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\rho \dot{p}_i)}{\partial p_i} \right) = 0. \quad (16)$$

Отсюда, если принять во внимание уравнения движения молекулы

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{1}{m} p_i, \\ \dot{p}_i &= - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

обычным способом находим

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0. \quad (16a)$$

Таким образом, функция  $\rho$  постоянна вдоль траектории. Кроме того, поскольку благодаря изотропности равновесного распределения  $\rho$  может содержать  $p_i$  только в комбинации  $L$ ,  $\rho$  может быть представлено в виде

$$\rho = \Psi^*(L + \Pi). \quad (17)$$

Так как в различных точках рассматриваемого газа существуют равновесные распределения, которым соответствуют различные значения  $V$  при одной и той же температуре, равенство (17) выражает одновременно форму зависимости плотности распределения  $\rho$  в фазовом пространстве от  $V$  (так как  $\Pi$  является функцией  $V$ ).

### § 6. Выводы, касающиеся уравнения состояния идеального газа

Запишем подробно результаты двух последних параграфов, имея в виду проблему уравнения состояния; вместо (15а) и (17) мы должны тогда написать

$$\rho = \Psi \left( h, m, \frac{L}{\kappa T} + B \right), \quad (15б)$$

$$\rho = \Psi^* (h, m, \kappa T, L + \Pi). \quad (17а)$$

Здесь  $L$ ,  $B$  и  $\Pi$  — неизвестные пока универсальные функции  $h$ ,  $m$ ,  $\kappa T$ ,  $V$ . При таком способе записи  $\Psi$  и  $\Psi^*$  являются безразмерными *универсальными* функциями. Каждый из этих результатов показывает теперь, что уравнение (2), полученное из рассмотрения размерностей, должно быть уточнено следующим образом:

$$\rho = \Psi \left( \frac{L}{\kappa T} + \chi \left( \frac{m \left( \frac{V}{N} \right)^{3/4} \kappa T}{h^2} \right) \right). \quad (18)$$

Здесь  $\Psi$  и  $\chi$  — две универсальные функции соответствующих безразмерных переменных. Обе функции  $\Psi$  и  $\chi$  связаны друг с другом согласно условию (3), так что результат содержит в действительности только неизвестную функцию  $\Psi$ , ибо из (2), (3) и (4) следует соотношение

$$\int_{x=0}^{x=\infty} \Psi(x + \chi) x^{1/2} dx = \frac{Nh^3}{2\pi (2m\kappa T)^{3/2} V}. \quad (19)$$

Если функция  $\Psi$  задана, то для каждого значения  $\chi$  можно вычислить правую часть этого равенства; разрешая последнее соотношение относительно  $\chi$ , получаем  $\chi$  как функцию правой части. Тем самым проблема фактически сводится к нахождению функции  $\Psi$ .

### § 7. Отношение этого результата в классической теории, а также и предложенной мной теории идеального газа

Исследуем случай, когда константа  $h$  не входит в закон распределения. Введем сокращенные обозначения

$$u = \frac{h^3 N}{(m\kappa T)^{3/2} V}, \quad v = \frac{L}{\kappa T}.$$

Из равенств (1) и (18) следует, что  $h$  исчезает из выражения для  $dn$  лишь в том случае, если  $(1/u) \Psi$  не зависит от  $u$ . В этом случае назовем эту функцию  $\bar{\Psi}(v)$ . Тогда при надлежащем выборе функции  $\Phi$  будет выполняться уравнение вида

$$\Psi(v + \Phi(u)) = u \bar{\Psi}(v). \quad (20)$$

Если это уравнение прологарифмировать и дважды продифференцировать (по  $u$  и по  $v$ ), то легко убедиться, что  $\ln \Psi$  должен быть линейной функцией. В этом случае  $\Phi$  также легко получить. Оказывается, что в действительности  $\Psi$  должно быть экспоненциальной функцией (максвелловское распределение скоростей).

Классической теории соответствует формула

$$\Psi(v) = e^{-v}, \quad (21)$$

а разработанной мной теории — формула

$$\Psi(v) = \frac{1}{e^v - 1}. \quad (22)$$

Следовательно, вместо экспоненциальной функции с отрицательным показателем появляется функция распределения Планка<sup>3</sup>. То, что формула (22) в отличие от (21) удовлетворяет теореме Нернста, я показал в недавно опубликованной работе<sup>4</sup>.

Благодаря настоящему исследованию достигнуты две цели. Во-первых, найдено общее условие (формула (18)), которому должна удовлетворять всякая теория идеального газа. Во-вторых, из предыдущего следует, что выведенное мной уравнение состояния не нарушается в результате адиабатического сжатия или наложения консервативного силового поля.

Русский перевод работы был перепечатан в УФН, 1965, 86, 397.

<sup>3</sup> Это легко следует из равенств (18), (20), (21) цитированной выше статьи.

<sup>4</sup> См. статью 63. — *Прим. ред.*

## ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ П. ИОРДАНА „К ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ КВАНТОВ“\* 1

Показано, что гипотезы, на которых автор статьи основывает свою статистическую теорию элементарных процессов превращения света, несовместимы с существованием коэффициента поглощения.

В упомянутом выше остроумном исследовании П. Иордан предпринял попытку опровергнуть выдвинутое мною теоретическое утверждение, согласно которому при каждом элементарном процессе испускания и поглощения происходит передача импульса излучающему или поглощающему атому, по величине равная  $h\nu/c$ . Рассуждения П. Иордана с логической стороны выглядят совершенно безупречными. Как же получилось, что автор пришел к результатам, полностью отвергнутым в моей прежней работе? Предпринятая автором в § 6 его статьи попытка указать причину несоответствия мне представляется не совсем удачной. Поэтому ниже я постараюсь показать, в чем причина того, что автор получил формулу Планка, не пользуясь гипотезой «направленного излучения», т. е. упомянутой выше передачей импульса молекуле при каждом элементарном процессе.

Я утверждаю, что к этому результату автор пришел на основе одной гипотезы об элементарном процессе, которую я даже и не рассматривал ввиду того, что она противоречит данным опыта в области поглощения света. Эта гипотеза высказана в § 5 в уравнениях (12), (13), (18) и (18').

Чтобы показать яснее, в чем здесь дело, я ограничусь частным случаем неподвижной молекулы. Элементарный процесс заключается в поглощении или испускании энергии  $h\nu$ . Но эта энергия уходит или приходит не по одному какому-то направлению, а имеет определенное угловое распределе-

\* *Bemerkung zu P. Jordans Abhandlung «Zur Theorie der Quantenstrahlung». Zs. Phys., 1925, 31, 784—785.*

1 P. Jordan. Zs. Phys., 1924, 30, 297.

ние  $\sigma$  по направлениям, не зависящее от распределения излучения по направлениям. Для испускания света эту гипотезу можно принять, не вступая в противоречие с опытом; однако она несовместима с нашими знаниями о законах поглощения.

Ради наглядности я конкретизирую функцию  $\sigma$  следующим образом: каждый процесс поглощения пусть заключается в захвате половины кванта, приходящего к атому в положительном направлении оси  $X$ , и половины кванта, падающего на атом в отрицательном направлении оси  $X$ . Соответствующие этим двум направлениям плотности монохроматического излучения пусть будут  $\rho_+$  и  $\rho_-$ . Тогда закон для вероятности акта поглощения, в соответствии с формулой (18'), будет

$$W = b e^{1/2 \ln \rho_+ + 1/2 \ln \rho_-} = b \sqrt{\rho_+ \rho_-}.$$

Когда излучение попадает на молекулу вообще только в *одном* направлении, например в положительном направлении оси  $X$ , то  $\rho_- = 0$ , и поглощения не происходит вовсе. Если и  $\rho_+$ , и  $\rho_-$  отличаются от нуля, но не равны друг другу, то каждый из двух рассматриваемых пучков света будет ослабляться вследствие поглощения не в одинаковое число раз, а лишь на одинаковую абсолютную величину.

Если бы вещества в нашем опыте были построены из таких молекул, то не имело бы никакого смысла говорить о коэффициенте поглощения света с некоторыми заданными характеристиками.

Ясно, что молекула, подобная только что рассмотренной, вообще никогда не получала бы импульс при элементарном процессе и что, таким образом, при движении в поле теплового излучения она в среднем не испытывала бы и никакого трения.

Все это связано с тем, что автор гипотезы не считает независимыми процессы поглощения света из пучков разных направлений. Однако такое предположение необходимо, чтобы прийти к согласию с основными опытными фактами, касающимися поглощения. Вводя такое предположение, мы с необходимостью приходим к результату, что при каждом элементарном процессе поглощения или излучения молекуле передается импульс, равный по абсолютной величине  $h\nu/c$ .

Поступила 22 января 1925 года.

Иордан постулирует довольно общую зависимость поглощения и испускания света от направления [формулы (18) и (18') его работы]. Если это распределение является остронаправленным (Nadelstrahlung), то его способ вывода формулы Планка совпадает с эйнштейновским.



## ПРЕДЛОЖЕНИЕ ОПЫТА, КАСАЮЩЕГОСЯ ПРИРОДЫ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ПРОЦЕССА ИЗЛУЧЕНИЯ\*

Согласно классической волновой теории, способность к интерференции монохроматического света, испускаемого каким-либо атомом, объясняется тем, что электрически заряженные массы совершают в нем гармонические колебания с той же частотой, что и испущенный свет. В соответствии с уравнениями Максвелла процесс излучения происходит так, что каждой волне соответствует пространственное распределение колеблющихся электрических зарядов атома, которые создают эту волну. Таким образом, периодичность колебания атома оказывается причиной упорядоченности, которая, по-видимому, существует между разными частями испущенного пучка волн (интерференционные явления).

Но, с другой стороны, в соответствии с квантовой теорией частота света связана с энергией, излучаемой в элементарном процессе. Согласно же первоначальной теории спектров Бора невозможно предполагать, что существует движение электронов с частотой, равной частоте света. Против существования периодического движения электрона, производящего вторичное рассеянное излучение в смысле классической волновой теории, особенно убедительно говорит эффект Комптона. Напрашивается представление о том, что синусоидальный характер соответствующего элементарному процессу волнового поля (как это проявляется в явлениях интерференции) вообще обусловлен не излучающим электроном или атомом, а закономерностями самого пространственно-временного континуума.

Ниже я указываю эксперимент, *отрицательный* результат которого был бы несовместим с классической волновой теорией. Этот эксперимент я задумал давно. Но только работа Е. Руппа<sup>1</sup>, на которую обратил мое

\* *Vorschlag zu einem die Natur des elementaren Strahlungs-Emissionsprozesses betreffenden Experiment.* Naturwiss., 1926, 14, 300—301.

<sup>1</sup> E. R u p p. Ann. Phys., 1926, 79, 1.

внимание Гротриан, дала мне уверенность в том, что эксперимент действительно можно успешно осуществить на практике. Основная идея эксперимента заключается в следующем.



Рис. 1.

Свет квазимонохроматического источника  $L$  падает на заслонку  $S$ , которая попеременно то открывается на время  $\tau$ , то закрывается. Тогда возникает периодическая последовательность цугов волн, как показано на рис. 1, так что  $ст$  — длина отдельного цуга волн, а также последующего пробела. Если образованный таким образом цуг волн изучать с помощью интерферометра Майкельсона, меняя разности хода, то классическая оптика требует, чтобы интерференционные полосы появлялись в том случае, если величина  $ст$  содержится в разности хода двух отдельных цугов четное целое число раз; эти полосы должны исчезать для разностей хода, содержащих величину  $ст$  нечетное целое число раз.

Если представления классической теории испускания света в основном правильны, то цуг волн описанного выше типа будет создаваться излучением атома в канальных лучах в установке, схема которой приведена на рис. 2. Отчетливое изображение отдельного атома из пучка канальных лучей, движущегося со скоростью  $v$  в направлении стрелки, создается линзой  $G$  в плоскости проволочной решетки, причем толщина каждой проволочки и промежутки между ними составляют около  $0,10 \text{ м.м.}$  Свет, прошедший через решетку, собирается другой линзой в параллельный пучок и затем исследуется на интерферометре. Тогда, в соответствии с классической оптикой, должна возникнуть указанная выше картина интерференционных полос в зависимости от разности хода. Для убедительности опыта необходимо, чтобы изображения всех частиц, образующих канальные лучи, располагались достаточно точно в плоскости проволочной решетки и чтобы размер изображения не превосходил  $0,1 \text{ м.м.}$  Если мы обозначим через  $\Delta$  толщину проволочки или промежутки между ними, то длина отдель-

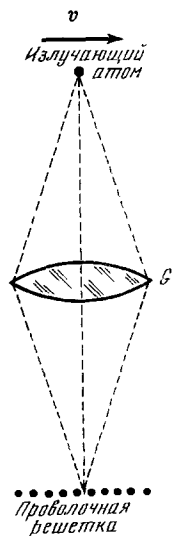


Рис. 2.

ного цуга волн будет равна  $c(\Delta/\nu)$ , что для наиболее быстрых водородных каналовых лучей, исследованных Руппом (30 000  $\text{e}$ ), составляет 6 см. Поскольку при разности хода 16 см Рупп еще наблюдал интерференционные полосы, то достигнутая этим автором точность будет вполне достаточной для предлагаемого опыта.

Если опыт даст отрицательный результат (или если присутствие решетки не будет оказывать влияния на интерференционные полосы) и если исключить возможность когерентного излучения разными атомами каналовых лучей, то опыт покажет, что способность излучения к интерференции не имеет ничего общего с собственным периодом излучающего атома.

Берлин, 16 марта 1926 г.

В этой работе поставлен вопрос о том, как происходит процесс излучения: мгновенно, согласно корпускулярной теории, или занимает некоторый промежуток времени, как это требует волновая теория. Хотя Эйнштейн склоняется к первому предположению, в следующей статье (статья 67) он под влиянием опытов Руппа приходит к противоположному выводу. (Достоверность опытов Руппа впоследствии подвергалась серьезным сомнениям.)

Эти сомнения были им изложены в более популярной форме в докладе, прочитанном в Берлинском университете 23 февраля 1927 г. Так как текст доклада не был опубликован, в настоящем издании помещено его краткое изложение (статья 68). В докладе, сделанном 4 ноября 1931 г. (статья 71), Эйнштейн на основе соотношения неопределенностей доказывает невозможность одновременного измерения момента времени акта излучения и его энергии.

## ОБ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ СВЕТА, ИСПУСКАЕМОГО КАНАЛОВЫМИ ЛУЧАМИ\*

До сих пор я полагал, что опыты со светом, испускаемым канальовыми лучами, могут дать результаты, не согласующиеся с результатами классической волновой теории<sup>1</sup>. Ниже я хочу привести простые соображения, почти исключющие возможность несостоятельности классической волновой теории в рассматриваемой области явлений. Эти соображения представляют определенный интерес также потому, что они позволяют легко предсказывать ожидаемые интерференционные явления. В излагаемых далее рассуждениях волновая теория используется лишь в той степени, в какой она хорошо подтверждена на опыте.

Я буду исходить из следующего утверждения, в правильности которого едва ли можно сомневаться: протяженный однородный покоящийся источник света с точки зрения оптики всегда можно заменить на равный ему, параллельно сдвинутый покоящийся источник света. Конечно, это положение соответствует действительности лишь в той мере, в какой размеры источника света не сказываются на опыте. Его справедливость проявляется, например, в том, что интерференционные явления в тонких пленках совершенно не зависят от расстояния источника света до интерференционного прибора.

Рассмотрим теперь однородный канальный луч в пустоте. В системе координат  $K'$ , движущейся вместе с частицей, она представляет собой покоящийся источник света. В экспериментальной установке, впервые построенной Вином для изучения ослабления свечения канальных лучей

\* *Über die Interferenzeigenschaften des durch Kanalstrahlen emittierten Lichtes.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1926, 334—340. (Доложено 8 июля 1926 г.)

<sup>1</sup> Ср., например, мою заметку «Предложение опыта, касающегося природы элементарного процесса излучения». *Naturwiss.*, 1926, 14, 300—301. (Статья 66).

(вследствие ослабления вдоль каналового луча), такой источник света не является однородным; однако для интерференционных свойств испускаемого света это несущественно. В соответствии со сделанным выше утверждением этот источник света, покоящийся относительно  $K'$ , можно заменить параллельно сдвинутым, тоже покоящимся в системе  $K'$ , источником. В «покоящейся» системе координат  $K$  это означает, что мы можем сдвигать каналовой луч параллельно самому себе, не оказывая влияния на испускаемый им свет. Но отсюда следует также, что каналовой луч по своим

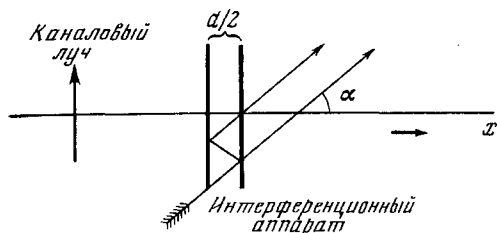


Рис. 1.

оптическим свойствам можно мысленно заменить бесконечно удаленным лучом той же природы и той же скорости.

Это позволяет нам легко предсказывать интерференционные свойства света, испускаемого каналовым лучом, так как свет от бесконечно удаленного каналового луча, посылаемый в расположенную на конечном расстоянии оптическую систему,

можно, очевидно, заменить светом системы непрерывно распределенных покоящихся источников соответствующего цвета.

Предположим, что рассматриваемый каналовой луч параллелен оси  $Y$  некоторой системы координат. Мысленно заменим его лучом, пересекающим ось  $X$  в отрицательной бесконечности, и ограничимся направлениями распространения, почти параллельными плоскости  $XU$ . Если собственная частота частицы каналового луча равна  $\nu_0$ , то свет, испускаемый под углом  $\alpha$  к оси  $X$ , в первом приближении имеет частоту  $\nu = \nu_0 (1 + \frac{\nu}{c} \sin \alpha)$ . Мы можем проводить вычисления так, как будто источники

света, соответствующие углу  $\alpha$ , покоятся в бесконечности и обладают частотой  $\nu$ . Кроме того, интенсивность света можно считать не зависящей от  $\alpha$ , если ограничиваться малыми углами  $\alpha$ , что мы и будем делать.

Тем самым всякая задача дифракции сводится к задаче дифракции с покоящимися источниками света. Теперь в общих чертах обсудим некоторые подобные задачи. Пусть интерференционный прибор образован двумя полупрозрачными параллельными плоскими зеркалами, расстояние между которыми равно  $d/2$ . Предположим, что наблюдения проводятся визуально или с помощью установленного на бесконечность телескопа (см. рис. 1). Формально это связано с тем, что без оптических приборов позади интерференционного прибора мы наблюдаем возбуждение в плоскости, расположенной в бесконечности ( $x = \infty$ ) перпендикулярно оси  $X$ .

*Случай 1.* Между каналовым лучом и интерференционным аппаратом не ставится ничего, что может отклонять свет.

Разность фаз между двумя лучами наибольшей интенсивности для угла  $\alpha$  составляет

$$\frac{d \cos \alpha}{\lambda_0 \left(1 - \frac{v}{c} \sin \alpha\right)},$$

если каналовые лучи и отражающие плоскости будут точно перпендикулярны оси  $X$ . Для достаточно малых  $\alpha$  это равно

$$\frac{d}{\lambda_0} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{v}{c}\right)^2\right].$$

Таким образом, движение частицы каналового луча приводит просто к сдвигу интерференционной картины на угол  $+(v/c)$ . Это дает нам удобный метод измерения скорости каналового луча.

Так же просто рассматривается случай, когда между каналовым лучом и интерференционным прибором помещается оптическая система, эквивалентная установленному на бесконечность телескопу и увеличивающая угол в  $z$  раз. В этом случае угловое смещение интерференционной картины будет в  $1/z$  раз больше, чем в предыдущем.

*Случай 2.* Между каналовым лучом и интерференционным аппаратом помещена линза или система линз с фокусным расстоянием  $f$ .

Линза или система линз дает перпендикулярно оси  $X$  изображение фиктивного каналового луча, удаленного в бесконечность, эквивалентное покоящемуся источнику света. Ординате  $y$  этого изображения соответствует длина волны  $\lambda_0 \left(1 - \frac{v}{c} \alpha\right)$ , причем  $\alpha = y/f$ , и, значит, длина волны  $\lambda_0 \left(1 - \frac{v}{c} \frac{y}{f}\right)$ . Действие двух зеркал можно учесть, полагая, что этот источник света при отражении раздваивается; получаемое таким образом второе изображение находится на расстоянии  $-d$  по оси абсцисс от первого, так что каждая пара точек источников света с одинаковой ординатой  $y$  будет когерентной.

Если оба эти источника были бы монохроматическими, то все соответственные пары точек давали бы в бесконечности одну и ту же интерференционную картину. Ведь для этого требуется только, чтобы точки всех пар имели одинаковые расстояния, *измеренные в длинах волн*. Так как это не имеет места, то в бесконечности не может возникнуть отчетливой интерференционной картины.

Полная интерференция вызывается тем, что при отражении от интерференционных зеркал получаются изображения, наклоненные друг к другу под углом  $\beta$  в соответствии со схемой на рис. 2. Угол  $\beta$  определяется

условием, что  $\frac{d - \beta y}{\lambda_0 \left(1 - \frac{v}{c} \frac{y}{f}\right)}$  не зависит от  $y$ . Таким образом, должно выполняться равенство  $\beta = \frac{v}{c} \frac{d}{f}$ . Такой поворот

отраженного виртуального источника света вокруг точки пересечения с осью  $X$  можно осуществить, наклоняя отражающие плоскости под углом  $\beta/2$  друг к другу. Чтобы поворот отраженной картины происходил вокруг точки ее пересечения с осью  $X$ , необходимо во всяком случае, чтобы эта точка лежала

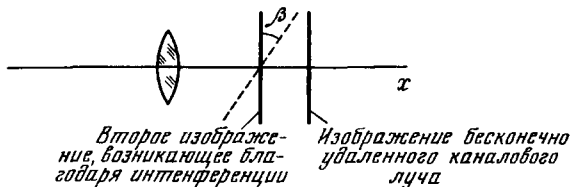


Рис. 2.

на отражающей поверхности, повернутой на угол  $\beta/2$ .

Лучше всего этот результат можно проверить с помощью интерферометра Майкельсона. Схема опыта могла бы быть такой (см. рис. 3).

Линза  $L$  поставлена так, что бесконечно удаленный предмет (над зеркалом  $S_0$ ) она изображает в плоскости отражения  $S_1$ . Зеркала  $S_1$  и  $S_2$  установлены так, что в сфокусированном на бесконечность телескопе  $F$  видны интерференционные кольца, если применяется покоящийся источник света. Пусть  $l$  — оптическая разность хода<sup>2</sup>. Применим теперь в качестве источника света канальный луч  $K$ . Тогда интерференционные кольца исчезнут. Однако они должны появиться снова, если зеркало  $S_1$  повернуть вокруг  $A$  по стрелке на угол  $\beta/2$ .

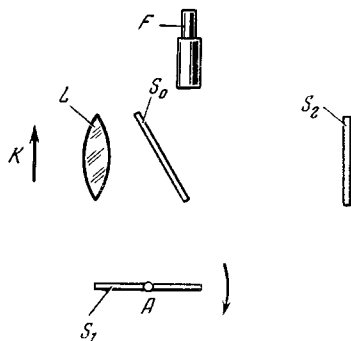


Рис. 3.

Разумеется, этот результат нуждается в экспериментальной проверке, хотя приведенное выше рассмотрение уже говорит о большой вероятности его существования. Значение этого результата теории света видно из следующего рассуждения. Результат остается справедливым и тогда, когда удаление канального луча  $K$  от линзы равно фокусному расстоянию последней; в этом случае он допускает особенно наглядное истолкование. В телескопе  $F$  могут интерферировать

<sup>2</sup> Пусть  $l$  будет положительна, если зеркало  $S_1$  расположено дальше зеркала  $S_2$ .

только те части цуга волн, которые встречаются одновременно и в одинаковом направлении. Но эти волны выходят из луча  $K$  (вследствие наклона  $S_1$ ) из двух точек, расстояние между которыми равно  $f\beta$ , или  $v/cd$ . Поэтому едва ли можно сомневаться в том, что они испускаются в разные моменты времени одной частицей, движущейся со скоростью  $v$ . Отсюда следовало бы заключить, что поле, определяющее интерференцию, не может быть создано мгновенно, как это утверждает квантовая теория; напротив, для получения интерференционного поля, по-видимому, остается справедливой волновая теория, что соответствует толкованию Бора и Гейзенберга <sup>3</sup>.

Случай 3. Между каналовым лучом и интерференционным аппаратом помещена щель или решетка.

Случай, когда каналовые лучи проходят мимо щели шириной  $b$ , первым привлек мое внимание к рассматриваемой здесь

проблеме. Представим себе частицу каналовых лучей, проходящую мимо щели  $b$  непосредственно за перегородкой  $S$  (см. рис. 4). Время прохождения равно  $b/v$ , а длина цуга волн, проходящего через перегородку, согласно волновой теории, равна  $b(c/v)$ . Если интерференционный аппарат создает разность хода  $d$ , равную или большую  $b(c/v)$ , то не должно наблюдаться никакой интерференции. Однако в правильности этого заключения я сомневался, так как на основе квантовой теории я предполагал, что свет, испускаемый каналовыми лучами в элементарных актах в определенном направлении, должен быть строго монохроматическим. Я думал, что свойства испускаемого света не могут определяться тем, что элементарный акт излучения происходит в щели шириной  $b$ , поскольку полагал, что и возникновение волнового поля также надо сводить к мгновенному акту. То, что это несовместимо с основным предположением данной работы, было раньше показано на примере случая 2. Здесь это можно показать еще более отчетливо.

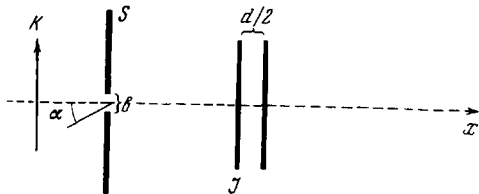


Рис. 4.

<sup>3</sup> В особенности нельзя согласиться с тем, что квантовый процесс излучения, энергетически определяемый положением, временем, направлением и величиной энергии, определяется этими величинами также и в своих геометрических характеристиках. Приемлемым в толковании Бора, Крамерса и Слэтера, по-видимому, является только то, что эти авторы хотели бы отказаться от строгого выполнения законов сохранения. (Речь идет об известной статье: N. Bohr, H. A. Kramers, J. C. Slater. Phil. Mag., 1924, 47, 785; Zs. Phys. 1924, 69, 24, в которой авторы выдвинули гипотезу о несохранении энергии в элементарных процессах. — Ред.)



Возникает вопрос о свойствах света, достигшего оси из бесконечно удаленной точки, в зависимости от разности хода  $d$ . Чтобы ответить на него, снова мысленно отодвинем канальный луч в бесконечность и заменим его покоящимися источниками света с частотой  $\nu_0(1 + \frac{v}{c} \alpha)$ , учитывая при этом дифракцию на щели. Предположим, что щель широкая, но не бесконечно широкая по сравнению с длиной волны  $\lambda_0$ . Согласно теории дифракции интенсивность света, отклонившегося вследствие дифракции в положительном направлении оси  $X$  при угле падения  $\alpha$ , пропорциональна величине

$$\left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi b}{\lambda} \alpha \right)}{\left( \frac{\pi b}{\lambda} \alpha \right)} \right]^2.$$

В этом выражении, не внося существенной ошибки,  $\lambda$  можно заменить на  $\lambda_0$ . Однако необходимо учитывать, что замена  $\lambda$  на  $\lambda_0$  оказывает сильное влияние на результат интерференционного процесса с разностью хода  $d$ . Монохроматический свет, прошедший через интерференционный прибор в перпендикулярном направлении, за прибором имеет интенсивность, пропорциональную величине

$$\cos^2 \frac{\pi d}{\lambda}.$$

В этом выражении существенна зависимость величины  $\lambda$  от  $\alpha$ . Зависимость от  $d$  интенсивности света, достигшего  $x = \infty$ , в соответствии со сказанным определяется интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi b}{\lambda_0} \alpha \right)}{\left( \frac{\pi b}{\lambda_0} \alpha \right)^2} \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \right) d\alpha,$$

причем

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 - \frac{v}{c} \alpha \right).$$

Если отвлечься от несущественного постоянного множителя, вычисление интеграла дает

$$1 + \left( 1 - \frac{d}{b} \frac{v}{c} \right) \cos \frac{\pi d}{\lambda_0}$$

или 1, в зависимости от того, выполняется неравенство  $d < \frac{2bc}{v}$  или неравенство  $d > \frac{2bc}{v}$ .

Таким образом, в последнем случае нельзя увидеть никаких интерференционных полос. В первом же случае относительная величина интерферирующей части излучения дается линейной функцией

$$1 - \frac{v}{bc} d.$$

Следовательно, относительная интерференция с увеличением разности хода линейно спадает до нуля. Этот результат основывается главным образом на результате теории дифракции на щели.

Если наше утверждение о том, что параллельный сдвиг источника света не сказывается на явлении интерференции, правильно, то в противоположность моему первоначальному ожиданию этот результат будет справедливым и при излучении каналowymi частицами, проходящими непосредственно за щелью.

Я покажу теперь, что этот результат точно соответствует волновой теории, согласно которой частица каналowych лучей испускает свет как осциллятор Герца. В соответствии с этой теорией отдельная частица каналowych лучей, проходя мимо щели, испускает через нее пучок волн с частотой  $\nu_0$  в положительном направлении оси  $X$ . Продолжительность процесса испускания равна  $b/v$ . Интерференционный прибор создает из этого пучка волн два пучка с одинаковой амплитудой, разделенных во времени интервалом  $d/c$ . Значит, оба пучка волн интерферируют в рассматриваемом месте только в течение времени  $\frac{b}{v} - \frac{d}{v}$  и только для таких малых  $d$ , когда эта величина положительна. В этом случае интеграл по времени от квадрата возбуждения в некоторой точке оси  $X$  пропорционален

$$2 \int_0^{d/c} \cos^2(2\pi\nu_0 t) dt + \int_0^{\frac{b}{v} - \frac{d}{v}} \left[ \cos(2\pi\nu_0 t) + \cos\left\{2\pi\nu_0\left(t - \frac{d}{c}\right)\right\} \right]^2 dt.$$

Так как это выражение пропорционально полной интенсивности света в рассматриваемой точке, то при вычислении интеграла мы получаем с точностью до несущественного множителя опять значение

$$1 + \left(1 - \frac{d}{b} \frac{v}{c}\right) \cos\left(\pi \frac{d}{\lambda_0}\right),$$

что полностью совпадает с приведенным выше результатом.

При аналогичном исследовании правильной решетки вместо монотонного линейного спада получилось бы периодическое линейное уменьшение и нарастание интенсивности интерференции. Если  $b/d$  означает толщину штрихов решетки, а также расстояние между штрихами, то разности

хода для наибольшей и наименьшей способности к интерференции определяются уравнениями

$$d_{\text{макс.}} = 2n \frac{bc}{v}, \quad d_{\text{мин.}} = (2n + 1) \frac{bc}{v},$$

где  $n$  — целое положительное число (включая нуль).

**Результат.** Если утверждение о том, что параллельное смещение протяженного источника света не влияет на интерференцию, правильно, то интерференционные явления, наблюдаемые с однородными каналowymi лучами, происходят в соответствии с классической теорией испускания света, т. е. так, как если бы частицы каналowych лучей были осцилляторами Герца. В этом случае проявления квантовой структуры света ожидать не следует.

### Дополнение

Изложенная выше работа написана 26 мая и послужила Е. Руппу путеводной нитью для опытов, описанных в статье <sup>4</sup>, следующей за данной работой. Эти опыты полностью подтвердили результаты теории.

Опыт, предложенный Эйнштейном, и его критика Н. Бором обсуждались в 1933 г. Л. И. Мандельштамом в лекциях по избранным вопросам оптики (см. Л. И. Мандельштам. Полное собрание трудов, т. V. М., 1950, лекции 1, 8 и 9.). Существо возражений сводится к тому, что обе точки зрения — квантовая и волновая — приводят, при последовательном их развитии, к одинаковым результатам.

<sup>4</sup> E. R u p p. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1926, 341. — *Прим. ред.*

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ К ВОПРОСУ О ВОЗНИКНОВЕНИИ СВЕТА \*

Теория света в последние десятилетия столкнулась со многими трудностями, пока еще непреодоленными. Мы не очень далеко продвинулись в понимании этих вопросов, но подробное обсуждение их в более широкой аудитории представляется все же оправданным, учитывая некоторые новые важные результаты.

В конце прошлого столетия казалось, что электромагнитная волновая теория Максвелла позволяет полностью понять процесс возникновения света и что эта теория справедлива также для явлений поглощения и испускания света. Затем, 27 лет назад Планк своей теорией излучения, как выразился Эйнштейн, посадил физикам в ухо большую блоху, которая, впрочем, была сначала еще маленькой, так что многие не замечали ее. Планк нашел, что необходимо ввести новую физическую величину, чтобы, решая проблему излучения, получить разумную формулу для плотности излучения; это и была знаменитая величина  $h$ . В природе эта величина играет весьма реальную роль, так как излучение возникает или исчезает только в виде квантов величиной  $h\nu$ . Когда мы ударяем в колокол, то он звучит тем сильнее, чем сильнее удар; он приобретает большую или меньшую энергию. В процессе же излучения все не так: к светящемуся объекту энергию можно подводить не любыми порциями, а только не менее одного кванта; только целое число этих квантов поглощается или испускается объектом, способным светиться. Это было также доказано прямым опытом Франка и Герца. Формула излучения Планка ведет к тому, что процессы испускания и поглощения света не могут происходить так, как это предполагалось в соответствии с волновой теорией. Согласно кванто-

\* *Theoretisches und Experimentelles zur Frage der Lichtentstehung*. Zs. angew. Chemie, 1927, 40, 546. (Изложение доклада на собрании Физико-математического рабочего сообщества в Берлинском университете 23 февраля 1927 г.— *Прим. ред.*)

вой теории процесс излучения содержит в себе нечто внезапное, скачкообразное. В последние годы для подтверждения теоретических выводов были получены веские доказательства, например, так называемый эффект Комптона, предсказанный сначала теоретически Дебаем и Комптоном и подтвержденный Комптоном на опыте. Эффект Комптона, в котором частота света при его рассеянии на электронах сдвигается к красному концу спектра, с точки зрения классической волновой теории понять невозможно<sup>1</sup>. Новые экспериментальные исследования, проведенные Боте в области эффекта Комптона, также говорят о том, что свет имеет дискретный и, стало быть, корпускулярный характер. Однако другие свойства света — его геометрические свойства и интерференционные явления — не могут быть объяснены квантовой теорией, и проблема принципиального характера, с которой мы встречаемся теперь в области световых явлений, заключается в том, чтобы показать, что истинная сущность света описывается корпускулярной теорией, или что правильна волновая теория, а квантовый характер является лишь кажущимся, или же, наконец, что сущности света способствуют обе теории и что свет обладает как квантовыми, так и волновыми свойствами.

Теперь стараются найти синтез обеих теорий, однако пока это сформулировать математически не удалось. Последние достижения в физике света достигнуты благодаря тому, что мы снова отошли от корпускулярной теории и сделали шаг, обратный тому, который привел от волновой теории к корпускулярной (Эйнштейн указывает здесь на работы де Бройля и Шредингера). Эйнштейн старается придумать такие опыты, которые позволят нам решить, в какой мере пригодна корпускулярная и в какой — волновая теория света. Наиболее неприятный конфликт между двумя представлениями о сущности света заключается в следующем. Согласно корпускулярному представлению процесс испускания и поглощения должен быть мгновенным, т. е. время его очень мало по сравнению с периодом светового колебания. По волновой же теории, как она воплощена в электродинамике, испускание света — длительный процесс, т. е. если атом излучает спектральную линию, то для создания волны необходимы сотни тысяч или миллионы колебаний. Сегодня энергетические свойства излучения можно объяснить не иначе, как квантовым представлением. С другой стороны, интерференционные явления света можно объяснить только в том случае, если процесс излучения происходит в течение более длительного времени. Эйнштейном предложены опыты для доказательства того, что упорядоченность света, проявляющаяся в интерференционных явлениях, связана с его волновой природой; нельзя предполагать, что излучающие частицы испускают в пространство совершенно неупорядоченные кванты,

<sup>1</sup> Ср. статью 58. — *Прим. ред.*

а упорядоченность возникает потом под влиянием каких-то пока еще неизвестных упорядочивающих свойств пространства. Эти опыты должны показать, что интерференционные явления действительно говорят в пользу волновой теории. В институте профессора Ленарда в Гейдельберге д-ром Рушпом были выполнены обстоятельные опыты, подтвердившие, что интерференция и испускание света являются процессами, требующими времени.

В заключение Эйнштейн указал, что при объяснении световых явлений надо резко разграничивать энергетические свойства и явления, относящиеся к геометрическим свойствам. Природа не требует от нас выбора между квантовой и волновой теорией, а требует только синтеза обеих теорий, что физиками пока еще не достигнуто.

## ЗАМЕЧАНИЕ О КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ\*

### ВЫСТУПЛЕНИЕ В ДИСКУССИИ НА 5-м СОЛЬВЕЕВСКОМ КОНГРЕССЕ

Я должен принести извинения, что выступаю в дискуссии, не внося существенного вклада в развитие квантовой механики. Все же я хотел бы сделать несколько общих замечаний.

К квантовой теории можно подходить с двух точек зрения, по-разному оценивающих область применимости теории. Именно эти точки зрения я и хотел бы рассмотреть на простом примере.

Пусть  $S$  — экран, в котором проделано небольшое отверстие  $O$  (см. рис. 1), и пусть  $P$  — фотопленка, имеющая форму полусферы большого радиуса. Предположим, что электроны падают на экран  $S$  в направлении, указанном стрелками. Часть этих электронов пройдет через отверстие  $O$ . Так как отверстие мало, а электроны обладают скоростью, они равномерно распределяются по всем направлениям и воздействуют на пленку.

Общим для обеих точек зрения на квантовую теорию является описание процесса как волн де Бройля, почти нормально падающих на экран  $S$  и испытывающих дифракцию на отверстии  $O$ . По другую сторону отверстия  $O$  возникают сферические волны, достигающие пленки  $P$ . Их интенсивность на поверхности  $P$  определяет меру волн, дошедших до рассматриваемого участка пленки.

Теперь мы можем охарактеризовать обе точки зрения.

1. *Первая точка зрения.* Волны де Бройля — Шредингера соответствуют не одному электрону, а облаку электронов, распределенному в

\* *Electrons et photons. Rapports et discussions du cinquieme Conseil de physique-Bruxelles du 24 au 29 octobre 1927 sous les auspices de l'Institut International de physique Solvay, p. 253—256. Paris, Gautier-Villars et Cie, editeurs 1928.*

пространстве. Квантовая теория ничего не говорит об отдельных процессах. Она дает информацию лишь относительно бесконечного множества элементарных процессов.

2. *Вторая точка зрения.* Квантовая теория претендует на полное описание отдельных процессов. Каждая частица, падающая на экран, не характеризуется положением и скоростью, а описывается пакетом волн де Бройля — Шредингера, имеющим малую протяженность и малый разброс по направлениям. Этот волновой пакет дифрагирует и после дифракции его части попадают на пленку  $P$ .

Согласно первой, чисто статистической точке зрения,  $|\psi|^2$  выражает вероятность того, что в рассматриваемом участке пространства, например, в том месте, где находится пленка, имеется *одна* из частиц электронного облака.

Согласно второй точке зрения,  $|\psi|^2$  выражает вероятность того, что *определенная* частица в рассматриваемый момент времени находится в заданном месте (например, там, где расположена пленка). Теория, таким образом, рассматривает отдельные процессы и претендует на полное описание всех фактов и закономерностей.

Вторая точка зрения гораздо радикальнее первой в том смысле, что она содержит все результаты, которые получаются в теории, основанной на первой точке зрения; в то же время обратное утверждение неверно. Только в силу второй точки зрения из теории следует, что законы сохранения выполняются и для элементарных процессов. Только в силу второй точки зрения теория сумела объяснить результат эксперимента Гейгера и Бете. Только она позволила объяснить, почему в камере Вильсона капельки, образующиеся при пролете  $\alpha$ -частицы, располагаются почти вдоль прямых.

Все же я не могу не высказать некоторые возражения против второй точки зрения. Рассеянные волны, достигшие пленки  $P$ , не имеют никакого избранного направления. Если считать, что  $|\psi|^2$  задает просто вероятность пребывания некоторой частицы в данный момент времени на рассматриваемом участке пленки, то отсюда бы следовало, что *один и тот же* элементарный процесс оказывает действие в *двух или многих* местах пленки. Однако интерпретация, согласно которой  $|\psi|^2$  выражает вероятность того, что *определенная* частица находится во вполне определенном месте, предполагает совершенно особый механизм действия на расстоянии, не позволяющий волнам, непрерывно распределенным в пространстве, оказывать свое действие одновременно в *двух* участках пленки.

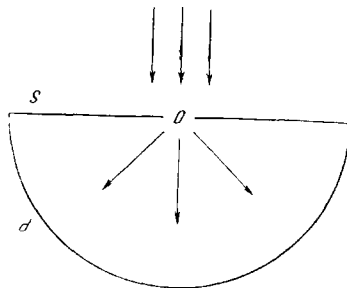


Рис. 1.



Я считаю, что это возражение не снимается тем, что волна Шредингера описывает не только процесс распространения, но и позволяет указывать положение частицы во время этого процесса. Думаю, что у де Бройля были основания для попыток в этом направлении. Если оперировать только с волнами Шредингера, то вторая интерпретация  $|\psi|^2$ , насколько я понимаю, приводит к противоречию с постулатом относительности.

Я хотел бы еще кратко указать на два обстоятельства, свидетельствующие против второй точки зрения. Эта точка зрения тесно связана с многомерным представлением (конфигурационное пространство), ибо только такой способ представления делает возможной интерпретацию  $|\psi|^2$ , отвечающую второй точке зрения. Мне кажется, что против такого представления имеются принципиальные возражения. В самом деле, в таком представлении двум конфигурациям одной системы, отличающимся лишь перестановкой двух одинаковых частиц, отвечают две различные точки (конфигурационного пространства), что не согласуется с новыми результатами статистики. Кроме того, своеобразие сил, действующих лишь на малых пространственных расстояниях, выражается в конфигурационном пространстве менее естественно, чем в пространстве трех или четырех измерений.

24—29 октября 1927 года на 5-м Сольвеевском конгрессе состоялась дискуссия по основам квантовой механики. В трудах конгресса сохранилось только выступление Эйнштейна в прениях по докладу Н. Бора «Квантовый постулат и новое развитие атомистики». Споры Эйнштейна с Бором (в которых принимал участие П. Эренфест) сыграли большую роль в понимании законов квантовой механики.

Дискуссия по основам квантовой механики подробно описана в статье Бора, помещенной в сборнике «Albert Einstein: Philosopher, Scientist», ed by P. A. Schilpp, N. Y., 1951. Ее перевод помещен в журнале «Успехи физических наук», 1958, т. 66, стр. 571, а также в сборнике: Н. Бор. Атомная физика и человеческое познание. М., 1961, стр. 51.

## ПОЗНАНИЕ ПРОШЛОГО И БУДУЩЕГО В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ\*

(Совместно с Р. Толменом и Б. Подольским)

Известно, что законы квантовой механики ограничивают возможности точного предсказания будущей траектории частицы. Тем не менее иногда предполагается, что квантовая механика допускает точное описание траектории частицы в прошлом.

В настоящей заметке мы обсудим простой мысленный эксперимент, который покажет, что возможность описания траектории одной частицы в прошлом должна привести к таким предсказаниям относительно будущего поведения второй частицы, которые не допускает квантовая механика. Отсюда будет сделан вывод о том, что законы квантовой механики на самом деле включают в себя неопределенность в описании событий прошлого, которая аналогична неопределенности в предсказании событий будущего. Для рассматриваемого случая будет также показано, что эта неопределенность в описании прошлого возникает из-за ограниченности знаний, которые могут быть получены при измерении импульса.

Рассмотрим изображенный на рис. 1 небольшой ящик  $B$ , содержащий некоторое количество одинаковых термически возбужденных частиц и снабженный двумя маленькими отверстиями, которые закрываются шторкой  $S$ . Шторка устроена так, что может автоматически открываться на короткое время и затем снова закрываться; число частиц в ящике выбрано таким, что могут осуществляться случаи, когда одна частица покидает ящик и движется на прямом отрезке  $SO$ , а вторая частица, благодаря упругому отражению от эллипсоидального отражателя  $R$ , движется по более длинному пути  $SRO$ . Для определения полной энергии вылетевших частиц ящик точно взвешивают до и после того, как шторка открывается; наблюдатель в точке  $O$  снабжен средствами для наблюдения — часами для

\* *Knowledge of Past and Future in Quantum Mechanics.* (With R. C. Tolman and B. Podolsky.) *Phys. Rev.*, 1931, 37, 780—781.

измерения времени прихода частиц и неким прибором для измерения импульса. Кроме того, расстояния  $SO$  и  $SRO$  предварительно точно измеряются, причем расстояние  $SO$  достаточно велико, чтобы ход часов в точке  $O$  не возмущался гравитационными эффектами, связанными со взвешиванием ящика, а расстояние  $SRO$  очень велико, чтобы сделать возможным точное повторное взвешивание ящика до прихода второй частицы.

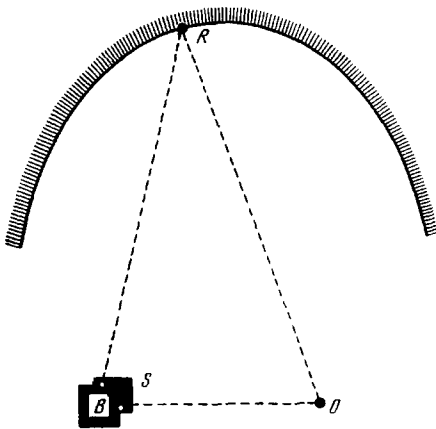


Рис. 1.

Предположим теперь, что наблюдатель в точке  $O$  измеряет импульс первой частицы, пока она движется по пути  $SO$ , и затем измеряет время ее прихода. Конечно, последнее измерение, выполненное, например, с помощью рассеяния гамма-луча, изменит импульс неизвестным образом. Тем не менее, зная импульс частицы в прошлом и, следовательно, также ее прошлую скорость и энергию, оказалось бы возможным рассчитать, исходя из известного времени прихода первой частицы, время, когда должна была открыться шторка, а из известной потери содержавшейся в ящике энергии при открывании шторки вычислить энергию и скорость второй частицы. Далее, оказалось бы возможным предсказать заранее как

энергию, так и время прихода второй частицы — парадоксальный результат, поскольку энергия и время являются величинами, которые в квантовой механике не коммутируют.

Объяснение кажущегося парадокса заключается в том, что движение первой частицы в прошлом не может быть точно определено, как предполагалось вначале. Действительно, мы вынуждены прийти к заключению, что не существует метода измерения импульса частицы, не изменяющего его величины. Например, анализ наблюдения с помощью эффекта Доплера в инфракрасном свете, отраженном от приближающейся частицы, показывает, что хотя он и позволяет определить импульс частицы как до, так и после столкновения со световым квантом, но оставляет неопределенным момент времени, когда происходит столкновение с квантом. Таким образом, хотя скорость первой частицы в нашем примере и можно было бы определить как до, так и после взаимодействия с инфракрасным светом, точное же положение на пути  $SO$ , в котором происходит изменение скорости, определить невозможно (последнее необходимо для того, чтобы получить точное время, когда была открыта шторка).

Отсюда следует сделать вывод, что принципы квантовой механики должны включать неопределенность в описании событий прошлого, которая аналогична неопределенности в предсказании событий будущего. Нужно также отметить, что хотя и возможно измерить импульс частицы и такое измерение дополнить измерением положения, однако это не даст достаточной информации для полного восстановления ее траектории в прошлом, поскольку было показано, что не существует метода, который позволял бы измерять импульс частицы, не изменяя его величины. Наконец, особенно интересно отметить удивительное следствие, заключающееся в том, что законы квантовой механики фактически накладывают ограничения на локализацию во времени макроскопических явлений, таких, как открывание и закрывание шторки.

**О СООТНОШЕНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ\***

Открытое Гейзенбергом<sup>1</sup> соотношение неопределенностей утверждает, что координату и скорость частицы определить с одинаковой точностью невозможно и что точно можно определить только одну из этих двух величин — координату или скорость. Чем точнее определяется одна величина, тем менее точной будет другая. Представим себе ящик с автоматически открывающимся и закрывающимся клапаном, причем на ящике имеются еще часы; при открывании клапана из ящика выходит луч монохроматического света, представляющий собой пуг из примерно 100 длин волн, который отражается от зеркала, расположенного на известном расстоянии (в несколько световых лет), и затем возвращается к месту наблюдения. Энергию (цвет) выходящего света можно определить путем взвешивания ящика до и после выхода из него пуга волн, время выхода определяется по часам. На примере этого в высшей степени остроумного мысленного эксперимента Эйнштейн показывает, что с помощью измерений в месте наблюдения невозможно предсказать одновременно цвет и время прибытия света. Только *одно* измерение — времени *или* цвета — можно произвести точно, и притом, по Эйнштейну, сразу после выхода света из ящика можно решить, какое из этих двух измерений мы хотим произвести. Американский физик Толмен обобщил этот мысленный эксперимент таким образом, что и для прошедшего точно можно делать только одно из этих двух высказываний.

Этот доклад особенно интересен в связи со статьями 66 и 67 (и докладом — статья 68), в которых Эйнштейн обсуждал тот же вопрос с совсем других — классических — позиций.

.....  
\* *Über die Unbestimmtheitsrelation*. Zs. angew. Chemie, 1932, 45, 23. (Сокращенное изложение доклада на Физическом коллоквиуме в Берлине 4 ноября 1931 г. — *Прим. ред.*)

<sup>1</sup> Ср. W. Heisenberg. Zs. angew. Chemie, 1930, 43, 853.

## ПОЛУВЕКТОРЫ И СПИНОРЫ \*

(Совместно с В. Майером)

При всем том громадном значении, которое приобрело в молекулярной физике понятие спинора, введенное Паули и Дираком, нельзя утверждать, что математический анализ этих понятий уже сейчас удовлетворяет нашим требованиям. Поэтому П. Эренфест и один из нас энергично настаивали на том, чтобы сосредоточить усилия для восполнения этого пробела. Эти усилия привели к результатам, которые, по нашему мнению, удовлетворяют всем требованиям ясности и естественности и не содержат непрозрачных искусственных приемов. При этом оказалось необходимым, как будет показано в дальнейшем, ввести величины нового рода — «полувекторы», которые содержат в себе спиноры, но обладают гораздо более прозрачными трансформационными свойствами. В предлагаемой работе мы сознательно ограничились изложением чисто формальных связей, чтобы продемонстрировать математический формализм во всей его чистоте.

Существо проводимых в этой работе рассуждений может быть изложено следующим образом. Каждое вещественное преобразование Лоренца  $\mathfrak{D}$  может быть однозначно разложено на два специальных преобразования Лоренца  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$ , коэффициенты преобразования которых  $b_k^i$  и  $c_k^i$  являются комплексно сопряженными, причем преобразования  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$  образуют группы  $(\mathfrak{B})$  и  $(\mathfrak{C})$ , изоморфные группе преобразований Лоренца  $(\mathfrak{D})$ . Полувекторы представляют собой величины с четырьмя комплексными компонентами, которые при каждом преобразовании Лоренца подвергаются соответствующему  $\mathfrak{B}$ - или  $\mathfrak{C}$ -преобразованию. Имеется специальный полувектор, который характеризуется известными условиями симметрии и имеет только две (вместо четырех) *независимые друг от друга* (комплексные) компоненты. Это обстоятельство позволяет ввести величины только с двумя (комплексными) компонентами, а именно спиноры Дирака.

\* *Semivektoren und Spinoren.* (Mit W. Mayer). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. 1932, 522—550. (Доложено 10 ноября 1932 г.)

## § 1. Вращение и преобразование Лоренца

Введем в пространстве  $R_4$  специальной теории относительности декартовы координаты (не обязательно прямоугольные). Метрический тензор ( $g_{ik}$ ) имеет постоянные компоненты, которые по отношению к рассматриваемым в дальнейшем преобразованиям (преобразования Лоренца в широком смысле) являются численными инвариантами.

Рассмотрим в выбранной системе координат векторное преобразование:

$$\lambda^{i'} = a_k^i \lambda^k, \quad (1)$$

и назовем его «вращением», если оно «сохраняет длину», т. е. если справедливо равенство:

$$g_{ik} \lambda^{i'} \lambda^{k'} = g_{ik} \lambda^i \lambda^k.$$

Отсюда для коэффициентов  $a_k^i$  получаем условие

$$g_{ik} a_p^i a_q^k = g_{pq}. \quad (2)$$

С другой стороны, пусть

$$x^{i'} = \alpha_k^i x^k \quad (3)$$

есть преобразование координат с постоянными коэффициентами  $\alpha_k^i$ ; для компонент  $\lambda^i$  и, соответственно,  $g_{ik}$  справедливы соотношения:

$$\lambda^{i'} = \alpha_k^i \lambda^k, \quad (4)$$

$$g'_{ik} \alpha_p^i \alpha_q^k = g_{pq}. \quad (5)$$

Преобразования (3), оставляющие  $g_{ik}$  неизменными, назовем «лоренцовыми преобразованиями». Согласно соотношению (5), матрица  $(\alpha_k^i)$  некоторого лоренцова преобразования удовлетворяет условию (2), выведенному для вращения. Это позволяет нам заменить лоренцово преобразование вращением с той же матрицей и изучать вместо лоренцовых преобразований вращения. Целесообразность этого приема состоит в том, что матрица вращения носит тензорный характер.

Каждое высказывание относительно «вращения»  $(\alpha_k^i)$  эквивалентно высказыванию о лоренцовом преобразовании  $(\alpha_k^i)$  с той же матрицей.

Еще одно замечание о смысле поднятия и опускания индексов (тензорной операции) с помощью матрицы преобразования  $(\alpha_k^i)$ . Мы хотим показать его на общем примере пространства Римана  $R_n$ .

Пусть

$$x'_i = x'_i(x_1, \dots, x_n) \quad (6)$$

представляет собой точечное преобразование. Для компонент  $\lambda^i$  контравариантного вектора в некоторой точке справедливо соотношение:

$$\lambda^{i'} = \alpha^i_{k'} \lambda^k \quad \left( \alpha^i_{k'} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_{k'}} \right), \quad (7)$$

У величин  $\alpha^i_{k'}$  индекс  $i$  относится к системе  $x'_i$  с метрическим тензором  $g'_{ik}$ , а индекс  $k'$  — к системе  $x_i$  с метрическим тензором  $g_{ik}$ . Принимая это во внимание, мы можем поднимать и опускать индексы в соотношении (7):

$$\lambda'_{i'} = \alpha_{ik'} \lambda^k \quad (\alpha_{ik'} = g'_{i'r} \alpha^r_{k'}), \quad (7a)$$

$$\lambda'_{i'} = \alpha^k_{i'} \lambda_k \quad (\alpha^k_{i'} = g'_{i'r} g^{ks} \alpha^r_s), \quad (7б)$$

$$\lambda^{i'} = \alpha^{ik'} \lambda_k \quad (\alpha^{ik'} = g^{ks} \alpha^i_s). \quad (7в)$$

Иначе говоря, в соотношении (7) содержатся все правила преобразования компонент вектора ( $\lambda$ ), если только принять во внимание правило поднятия и опускания индексов у  $\alpha^i_{k'}$ .

Для преобразования Лоренца, естественно,  $g'_{ik} \equiv g_{ik}$ .

## § 2. Разложение антисимметричного тензора второго ранга в $R_4$

Хотя рассуждения этих параграфов справедливы для общего пространства Римана  $R_4$ , мы ограничимся в основном псевдоевклидовым пространством специальной теории относительности, которые мы отнесем к прямоугольной системе координат. Тогда метрический тензор ( $g_{ik}$ ) имеет компоненты

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (8)$$



В пространстве  $R_4$ , как известно, имеется ковариантный, антисимметричный по всем индексам тензор четвертого ранга<sup>1</sup>

$$t_{iklm} = \sqrt{g} \eta_{iklm}, \quad (9)$$

причем  $\eta_{1234} = 1$ ,  $g = |g_{ik}|$ , или, в контравариантном представлении,

$$t^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{g}} \eta^{iklm}, \quad (\eta^{iklm} = \eta_{iklm}). \quad (10)$$

При этом для специального выбора системы координат в соответствии с (8) мы полагаем:

$$\sqrt{g} = +i \quad (11)$$

(ограничение чистыми вращениями).

Теперь с каждым антисимметричным тензором второго ранга  $h_{ik}$ , который не обязательно будет вещественным, мы можем связать также антисимметричный тензор ( $h_{ik}^*$ )

$$\left. \begin{aligned} h_{ik}^* &= \frac{1}{2} \sqrt{g} \eta_{iklm} h^{lm} \\ h^{ik*} &= \frac{1}{2\sqrt{g}} \eta^{iklm} h_{lm} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

В более подробной записи это обозначает:

$$h_{12}^* = \sqrt{g} h^{34}, \dots, h_{34}^* = \sqrt{g} h^{12}, \quad (12a)$$

$$h^{12*} = \frac{1}{\sqrt{g}} h_{34}, \dots, h^{34*} = \frac{1}{\sqrt{g}} h_{12}. \quad (12b)$$

<sup>1</sup> *Пример.* Если образовать детерминант, то из формул преобразования для  $g_{ik}$ , как известно, следует,

$$\sqrt{g'} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)} \sqrt{g}.$$

С другой стороны,

$$t'_{iklm} = \frac{\partial x_p}{\partial x'_i} \frac{\partial x_q}{\partial x'_k} \frac{\partial x_r}{\partial x'_l} \frac{\partial x_s}{\partial x'_m} \sqrt{g} \eta_{pqrs} = \sqrt{g} \eta_{iklm} \frac{\partial(x_1 \dots x_4)}{\partial(x'_1 \dots x'_4)}.$$

Из обоих равенств следует подлежащее доказательству равенство  $t'_{iklm} = \sqrt{g'} \eta_{iklm}$ . И далее

$$t^{pqrs} = \sqrt{g} g^{pi} g^{qk} g^{rl} g^{sm} \eta_{iklm} = \sqrt{g} \frac{1}{g} \eta_{pqrs} = \frac{1}{\sqrt{g}} \eta_{pqrs}.$$

Отсюда следует:

$$(h_{ik}^*)^* = h_{ik}. \quad (13)$$

Если существуют такие антисимметричные тензоры  $h_{ik}$ , что  $h_{ik}^* = \alpha h_{ik}$ , то для них, согласно соотношению (13),  $\alpha^2 = 1$ .

Назовем такой тензор специальным тензором *первого рода* и обозначим его через  $u_{ik}$ , если выполняется условие:

$$u_{ik}^* = u_{ik}. \quad (14)$$

Точно так же равенство

$$v_{ik}^* = -v_{ik} \quad (15)$$

должно определять специальный антисимметричный тензор *второго рода*. Во всех последующих выражениях мы будем обозначать тензоры, обладающие этим свойством симметрии, буквами  $u$  и  $v$ . В подробной записи это означает:

$$u_{12} = \sqrt{g} u^{34}, \dots, \quad u_{34} = \sqrt{g} u^{12}, \quad (14a)$$

$$v_{12} = -\sqrt{g} v^{34}, \dots, \quad v_{34} = -\sqrt{g} v^{12}, \quad (15a)$$

или, при нашем специальном выборе системы координат,

$$u_{12} = -iu^{34}, \dots, \quad u_{34} = iu_{12}, \quad (14б)$$

$$v_{12} = iv^{34}, \dots, \quad v_{34} = -iv_{12}. \quad (15б)$$

Из соотношений (14), (15) и (12), или также из (14б) и (15б), следует, что  $v_{ik}$  является комплексно сопряженным  $u_{ik}$ .

Произвольный антисимметричный тензор  $h_{ik}$  может быть разложен по схеме:

$$h_{ik} = \frac{1}{2} (h_{ik} + h_{ik}^*) + \frac{1}{2} (h_{ik} - h_{ik}^*). \quad (16)$$

Здесь  $h_{ik} + h_{ik}^*$  является  $u_{ik}$ -тензором, а  $h_{ik} - h_{ik}^* = v_{ik}$ -тензором, так что равенство (16) представляет собой однозначное разложение общего антисимметричного тензора второго ранга на  $u$ - и  $v$ -тензоры<sup>2</sup>.

Если  $h_{ik}$  — вещественный тензор, то  $h_{ik}^*$  будет чисто мнимым, а  $h_{ik} + h_{ik}^*$  — комплексно сопряженным  $h_{ik} - h_{ik}^*$ . Специальные тензоры первого (и, соответственно, второго) рода образуют линейное пространство:  $\alpha u_{ik} + \alpha' u'_{ik}$  принадлежит вместе с  $u_{ik}$  и  $u'_{ik}$  к множеству  $u_{ik}$ .

<sup>2</sup> Доказательство однозначности основано на том, что из соотношения  $u_{ik} + v_{ik} = 0$  следует обращение в нуль  $u_{ik}$  и  $v_{ik}$ .

Каждый тензор  $u_{ik}$  может быть выражен через линейную комбинацию трех надлежащим образом выбранных  $u_{ik}$ ; в наших специальных координатах (естественно, по отношению к выбранной системе координат) для представления можно использовать  $u_{ik}$ , определенные следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l}
 u_{ik}; \text{ отличны от нуля} \quad (\text{естественно, что} \\
 \text{1} \quad \text{лишь } u_{12} = -iu_{34} = 1 \quad \begin{array}{l} u_{21}, u_{43} \text{ также} \\ \text{1} \quad \text{1} \\ \text{не равны нулю} \end{array} \\
 \\
 u_{ik}; \text{ отличны от нуля} \\
 \text{2} \quad \text{лишь } u_{23} = -iu_{14} = 1 \\
 \\
 u_{ik} \text{ отличны от нуля} \\
 \text{3} \quad \text{лишь } u_{31} = -iu_{24} = 1
 \end{array} \right\} \quad (14в)$$

Так как в представлении

$$u_{ik} = \alpha u_{ik} + \alpha u_{ik} + \alpha u_{ik}$$

$\begin{matrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 11 & 22 & 33 \end{matrix}$

$\alpha$  могут быть комплексными, то пространство  $u_{ik}$  шестимерно. Все это справедливо, естественно, и для пространства  $v_{ik}$ . В нашей системе координат мы можем определить

$$v_{ik} = \bar{u}_{ik} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (15в)$$

и с их помощью получать линейные представления общего  $v_{ik}$ .

### § 3. Разложение группы Лоренца

Рассмотрим, снова, как и в § 1, отображение, сохраняющее длину (вращение)

$$\lambda^{i'} = a^i_k \lambda^k.$$

Для него, согласно (2),

$$\delta^i_k = a^i_p a^p_k. \quad (17)$$

Отсюда следует, что детерминант  $|a^i_p|$  отличен от нуля; таким образом, для каждого вращения существует обратное. Далее, из определения следует, что наложение двух вращений также является вращением. Следовательно, мы можем говорить о группе вращений ( $\mathfrak{D}$ ), группе Лоренца. От-

дельные элементы группы (вращения) могут быть комплексными ( $a_k^i$  — комплексны).

Если положить

$$a_k^p = (a^{-1})_k^p, \quad (18)$$

то из равенства (17) следует:

$$a_p^i (a^{-1})_k^p = \delta_k^i. \quad (17a)$$

Следовательно,  $a_{ki}$  есть вращение, обратное  $a_{ik}$ .

Рассмотрим теперь бесконечно малое вращение:

$$a_k^i = \delta_k^i + \varepsilon_k^i$$

или

$$a_{ik} = g_{ik} + \varepsilon_{ik}, \quad (19)$$

которое отличается от тождественного вращения ( $g_{ik}$ ) на бесконечно малую величину  $\varepsilon_{ik}$ , причем произведением двух  $\varepsilon$  будем пренебрегать. Подставляя это выражение в равенство (17), получаем условие

$$\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}. \quad (20)$$

Соотношение (19) и (20) определяют общее бесконечно малое вращение.

Теперь мы можем расщепить антисимметричный тензор ( $\varepsilon_{ik}$ ) согласно равенству:

$$\varepsilon_{ik} = u_{ik} + v_{ik}, \quad (21)$$

где ( $u_{ik}$ ) и ( $v_{ik}$ ) — (бесконечно малые) специальные антисимметричные тензоры первого и, соответственно, второго родов в смысле определений § 2. Если  $\varepsilon_{ik}$  — вещественный тензор, то  $u_{ik}$  и  $v_{ik}$  являются комплексно сопряженными ( $v_{ik} = \bar{u}_{ik}$ ).

Представление (21) отвечает разложению бесконечно малого вращения (19) на два вращения:

$$g_{ik} + \varepsilon_{ik} = (g_{ip} + u_{ip})(g_k^p + v_k^p), \quad (22)$$

где вместо  $\delta_k^p$  записано  $g_k^p$ .

Соответствует ли такому разложению бесконечно малых элементов группы вращений (соответственно, группы Лоренца) определенное разложение также и конечных элементов этих групп?

Допустим на время, что это так. В этом случае, если имеется некоторое вращение ( $a_{ik}$ ), то можно было бы найти два вращения ( $b_{ik}$ ) и ( $c_{ik}$ ), связанных с вращением ( $a_{ik}$ ) так, что:

$$a_{ik} = b_{ip}c_k^p. \quad (\alpha)$$

При этом  $b_{ik}$  (и соответственно,  $c_{ik}$ ) образовывали бы некоторую подгруппу группы вращений (группы Лоренца), которая, кроме того, в силу соответствия, задаваемого равенством (α), была бы изоморфна группе Лоренца. Задаваемое равенством (α) соответствие  $b_{ik}$  и  $a_{ik}$  будет символически обозначаться через  $a_{ik} \rightarrow b_{ik}$ .

Другое преобразование Лоренца

$$a'_{ik} = b'_{ip} c^p_k \quad (\beta)$$

приводит к аналогичному соответствию

$$a'_{ik} \rightarrow b'_{ik}.$$

Согласно условию изоморфизма, произведению преобразований Лоренца должно быть приписано соответствующее произведение  $b$ -преобразований согласно схеме:

$$a_{ir} a^r_k \rightarrow b_{ir} b^r_k.$$

(Аналогично для подгруппы  $c_{ik}$ .)

В силу равенств (α) и (β) должно также существовать разложение

$$a_{ir} a^r_k = (b_{ip} b^p_r) (c^r_q c^q_k) \quad (\gamma)$$

и, совершенно естественно, вместе с этим выполняться равенство:

$$a_{ir} a^r_k = (b_{ip} c^p_r) (b^r_q c^q_k). \quad (\delta)$$

Равенства (γ) и (δ) выполняются тогда и только тогда, когда

$$b^p_r c^r_q = c^p_r b^r_q, \quad (\epsilon)$$

т. е. когда каждое  $b$ -вращение перестановочно с каждым  $c$ -вращением. В случае, если существует разложение (α) нужного вида, должно выполняться условие (ε). Кроме того, оно должно соответствовать разложению бесконечно малых вращений типа (22).

В соответствии с этим мы определим  $(b_{ik})$  таким образом, что (ε) выполняется, если вместо  $c_{ik}$  подставить бесконечно малое вращение (22):

$$c_{ik} = g_{ik} + v_{ik}.$$

Таким образом, мы получаем условие для  $b_{ik}$ :

$$b_{ip} (\delta^p_k + v^p_k) = (g_{ip} + v_{ip}) b^p_k, \quad (23)$$

или

$$b_{ip}v_k^p = v_{ip}b_k^p, \quad (23a)$$

при любом выборе тензора второго рода  $(v_{ik})$ , введенного равенствами (15) и, соответственно, (15б).

Решения (23а), для которых  $|b_{ik}| \neq 0$ , образуют группу; в самом деле, вместе с  $b_{ip}$  и  $b_{ip}'$  с величинами  $v_{ik}$  перестановочно и произведение  $b_{ip}b_k^p'$ , а его детерминант отличен от нуля. Далее, множество этих решений содержит тождественное преобразование  $g_{ik}$ , и вместе с  $b_{ik}$  существует обратный элемент  $(b^{-1})_{ik}$ , который также является решением (23а)<sup>3</sup>.

Нашей задачей является установление структуры элементов этой группы, которую мы обозначим через  $(\mathfrak{B}')$ . Найденные для этого правила мы снова выведем для координатной системы, в которой  $g_{ik}$  задается таблицей (8). Вследствие тензорного характера (23а) результат не будет зависеть от специального выбора координат.

В используемой координатной системе входящие в (23а) самые общие величины  $v_{ik}$  могут быть представлены в виде линейной комбинации определенных в (15в) величин  $v_{ik}$ . Таким образом, если (23а) выполняется для каждого из этих трех тензоров, то это соотношение справедливо и для любого  $v_{ik}$ .

Итак, мы подставляем в (23а) сначала  $v_{ik} (v_{12} = iv_{34} = 1)$ .

Результат для  $i, k = 1, \dots, 4$  можно представить в виде следующих таблиц:

$i$	$k$	$b_{ik}$	$i$	$k$	$b_{ik}$	$i$	$k$	$b_{ik}$
1	1	$b_{12} = -b_{21}$	1	2	$b_{11} = b_{22}$	2	3	$b_{24} = -ib_{13}$
2	2		2	1		3	2	
3	3	$b_{34} = -b_{43}$	1	3	$b_{14} = ib_{23}$	2	4	$b_{14} = ib_{23}$
4	4		3	1		4	2	
			1	4	$b_{24} = -ib_{13}$	3	4	$b_{33} = -b_{44}$
			4	1		4	3	

Так как соотношения, определяющие  $v_{ik}$ , получаются из соотношений, определяющих  $v_{ik}$ , циклической перестановкой индексов 1, 2, 3, то  $v_{ik}$ ,

<sup>3</sup> Это доказывается путем умножения соотношения (23а) на  $(b^{-1})_q^i (b^{-1})_r^k$ .

будучи подставленными в (23а), дают соотношения, которые получаются из предыдущих таблиц циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Для каждого соотношения (например,  $b_{1p}v_{11}^{p1} = v_{1p}b^{p1}$ ) между  $v_{ik}$  существует одно циклически связанное с ним соотношение (здесь  $b_{2p}v_{22}^{p2} = v_{2p}b^{p2}$ ) для  $v_{ik}$ , которое дает соотношение между  $b_{ik}$ , получающееся из первого циклической перестановкой индексов 1, 2, 3.

Мы получаем таким путем соотношения:

$$\begin{aligned} b_{23} &= -b_{32}, & b_{22} &= b_{33}, & b_{42} &= ib_{13}, & b_{43} &= -ib_{12}, \\ b_{14} &= -b_{41}, & b_{24} &= ib_{31}, & b_{34} &= -ib_{21}, & b_{11} &= -b_{44}. \end{aligned}$$

Величины  $v_{ik}$  дают, соответственно:

$$\begin{aligned} b_{31} &= -b_{13}, & b_{33} &= b_{11}, & b_{43} &= ib_{21}, & b_{41} &= -ib_{23}, \\ b_{24} &= -b_{42}, & b_{34} &= ib_{12}, & b_{14} &= -ib_{32}, & b_{22} &= -b_{44}. \end{aligned}$$

Подставляя  $b_{11} = b_{22} = b_{33} = -b_{44} = b$ , получаем, с учетом равенств (14б), следующий результат, объединяющий все эти соотношения:

$$b_{ik} = bg_{ik} + u_{ik}. \tag{24}$$

Итак, в соотношении (24) выражена структура самого общего перестановочного с  $v_{ik}$  тензора  $b_{ik}$ . Так как самые общие  $u_{ik} (\equiv \alpha u_{11} + \alpha u_{22} + \alpha u_{33})$  содержат три комплексных параметра, то  $b_{ik}$  содержит четыре таких параметра.

Мы хотим установить форму обратных (24) элементов  $(b^{-1})_{ik}$ . К совокупности тензоров  $b_{ik}$  принадлежат также (при  $b = 0$ )  $u_{ik}$ ; а значит, в совокупности  $b_{ik}$ , которая образует группу  $(\mathfrak{B}')$ , содержатся также и  $u_{ir}u_k^r$ .

Но так как выражение  $u_{ir}u_k^r$  симметрично по индексам  $i$  и  $k$ , то должно выполняться соотношение

$$u_{ir}u_k^r = \alpha g_{ik}. \tag{24a}$$

При этом с помощью свертывания можно показать, что

$$\alpha = \frac{1}{4} u_{ir}u^{ri}. \tag{24б}$$

Мы полагаем теперь для обратного элемента:

$$(b^{-1})_{ik} = b'g_{ik} + c'u_{ik}.$$

Из равенства

$$g_{il} = b_{ik}(b^{-1})^k{}_l = (bg_{ik} + u_{ik})(b'g_i^k + c'u_i^k) = (bb' + c'\alpha)g_{il} + (bc' + b')u_{il}$$

следует:

$$b' = \frac{b}{b^2 + \frac{1}{4}u_{ik}u^{ik}}, \quad c' = -\frac{1}{b^2 + \frac{1}{4}u_{ik}u^{ik}}.$$

Итак, для обратных элементов получаем:

$$(b^{-1})_{ik} = \frac{1}{b^2 + \frac{1}{4}u_{ik}u^{ik}}(bg_{ik} - u_{ik}) = \frac{1}{b^2 + \frac{1}{4}u_{ik}u^{ik}}b_{ki}. \quad (25)$$

Преобразование  $b_{ik}$  не является, вообще говоря, «вращением». Именно, умножение на  $b^{kl}$  дает, если использовать определение обратных элементов:

$$b_{ik}b^{kl} = \delta_i^l \left( b^2 + \frac{1}{4}u_{ik}u^{ik} \right).$$

Согласно условию (2),  $b_{ik}$  только тогда определяет вращение (преобразование Лоренца), когда входящие в (24) параметры удовлетворяют условию

$$b^2 + \frac{1}{4}u_{ik}u^{ik} = 1. \quad (26)$$

Совокупность вращений в группе  $(\mathfrak{B}')$  образуется пересечением обеих групп,  $(\mathfrak{B}')$  и  $(\mathfrak{B})$  (группы вращений). Это пересечение, которое само является группой, обозначим через  $(\mathfrak{B})$ .

Инфинитезимальный элемент группы  $(\mathfrak{B}')$ , согласно соотношению (24), в легко понятных обозначениях имеет вид:

$$g_{ik}(1 + \delta b) + \delta u_{ik}. \quad (27)$$

Инфинитезимальный элемент  $(\mathfrak{B})$  удовлетворяет, вследствие условия (26), добавочному условию

$$(1 + \delta b)^2 + \frac{1}{4}\delta u_{ik}\delta u^{ik} = 1$$

или

$$\delta b = 0.$$

Поэтому он имеет вид:

$$g_{ik} + \delta u_{ik}, \quad (28)$$

в согласии с соотношением (22), которое является нашим исходным пунктом в разложении инфинитезимальных элементов (только там вместо  $\delta u_{ik}$  записано  $u_{ik}$ ).



Точно так же, как (23а) приводит к группе  $(\mathfrak{B}')$ , соотношение

$$c_{ip}u_k^p = u_{ip}c_k^p \quad (29)$$

приводит к группе  $(\mathfrak{C}')$  с элементами  $c_{ik}$ . Поскольку каждый  $\bar{v}_k^p$  является некоторым  $u_k^p$ , так что оба могут быть связаны друг с другом соотношением  $\bar{v}_k^p = u_k^p$ , а соотношения (29) можно рассматривать как комплексно сопряженные (23а), их решения являются комплексно сопряженными решениям (23а). Из соотношения (24) вытекает, что решением (29) будет:

$$c_{ik} = c g_{ik} + v_{ik}. \quad (30)$$

Вместо (26) появляется добавочное условие (необходимое и достаточное) того, чтобы преобразование являлось вращением:

$$c^2 + \frac{1}{4} v_{ik}v^{ik} = 1. \quad (31)$$

Формулы (30) и (31) определяют элемент группы вращений  $(\mathfrak{C})$ , принадлежащий пересечению групп  $(\mathfrak{C}')$  и  $(\mathfrak{B})$  (группа вращений). Бесконечно малый элемент  $(\mathfrak{C})$ , согласно (28), имеет вид:

$$g_{ik} + \delta v_{ik}. \quad (32)$$

Мы ограничимся теми (собственными) вещественными преобразованиями Лоренца  $a_k^i$ , которые допускают разложение на *вещественные* бесконечно малые преобразования.

Они образуют, очевидно, подгруппу группы Лоренца, для элементов которой (§ 4) справедливо разложение  $a_k^i = b_p^i \bar{b}_k^p$ .

Эта подгруппа, единственная, которой мы будем заниматься в дальнейшем, содержит всегда только одно из двух преобразований Лоренца ( $a_k^i$ ) и  $(-a_k^i)$ .

Когда мы будем в дальнейшем говорить о группе Лоренца  $(\mathfrak{D})$ , мы будем иметь в виду эту подгруппу группы всех вещественных преобразований Лоренца.

<sup>4</sup> Вещественное преобразование Лоренца ( $a_k^i$ ) разлагается либо на  $(b_p^i \bar{b}_k^p)$ , либо на  $(-b_p^i \bar{b}_k^p)$ . Из (§ 4)  $a_k^i = b_p^i c_k^p$  следует  $b_p^i c_l^p = \bar{b}_p^i \bar{c}_l^p = \bar{c}_p^i \bar{b}_l^p$ , и далее (§ 4)  $b_p^i = \pm \bar{c}_p^i$ .

#### § 4. Связь между введенными группами

Покажем сначала, что любой элемент группы  $(\mathfrak{B}')$  перестановочен с каждым элементом группы  $(\mathfrak{C}')$ . В самом деле

$$b_{ik}c_l^k = b_{ik}(cg_l^k + v_l^k) = cb_{il} + b_{ik}v_l^k = cb_{il} + v_{ik}b_l^k = (cg_{ik} + v_{ik})b_l^k = c_{ik}b_l^k.$$

Так как «произведение» вращения из  $(\mathfrak{C})$  и вращения из  $(\mathfrak{B})$

$$a_{il} = b_{ik}c_l^k \quad (33)$$

содержит  $3 + 3 = 6$  комплексных параметров, ровно столько, сколько содержит их общее (не вещественное) вращение, то можно предположить, что любое вращение может быть представлено в виде такого произведения. Для бесконечно малых вращений это было показано в § 3. Но любое вращение может быть представлено в виде последовательности бесконечно малых вращений, а каждое из них как произведение бесконечно малого вращения  $\mathfrak{B}$  и некоторого вращения  $\mathfrak{C}$ .

Так как мы при этом знаем, что любое  $\mathfrak{B}$  перестановочно с любым  $\mathfrak{C}$ , то мы можем таким образом произвести перестановки вращений, представленных через бесконечно малые вращения  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$ , чтобы сначала по очереди следовали все вращения  $\mathfrak{B}$ , затем все вращения  $\mathfrak{C}$ . Если в этом представлении объединить все вращения  $\mathfrak{B}$  в одно и то же проделать с вращениями  $\mathfrak{C}$ , то для произвольно выбранного вращения  $\mathfrak{D}$  получится расщепление такого вида:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Если заданное (собственное) преобразование Лоренца вещественно то можно выбрать вещественным каждое из бесконечно малых вращений, из которых построено данное. Получающиеся в результате их расщепления  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$  будут комплексно сопряженными, так же как и получающиеся от их соединения конечные вращения (преобразования Лоренца)  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$ .

Вследствие перестановочности  $b_{ik}$  и  $c_{ik}$  соответствие элементов групп  $(\mathfrak{B})$  и  $(\mathfrak{C})$ , заданное соотношением (33),

$$a_{il} \rightarrow b_{il}, \quad a_{il} \rightarrow c_{il},$$

является изоморфизмом. Доказательство следует из рассуждений предыдущего параграфа.

Наряду с разложением

$$a_{il} = b_{ir}c_l^r$$

всегда существует разложение

$$a_{il} = (-b_{ir})(-c_l^r).$$

Существуют ли для  $a_{il}$  еще какие-либо разложения рассматриваемого вида? Мы утверждаем, что не существуют, и прежде всего для  $a_{il} = g_{il}$ .

Из соотношения

$$g_{il} = b_{ik} c_l^k \quad (33a)$$

следует, если умножить его на  $b_r^i$  (поскольку  $b_{ik} b_r^i = g_{kr}$ ),

$$b_{lr} = c_{rl},$$

или

$$b g_{lr} + u_{lr} = c g_{rl} + v_{rl}.$$

Отсюда сразу следует, что  $b = c$ ;  $u_{lr} = v_{rl} = 0$ . Далее, подставляя в (33a), получаем, что  $b^2 = 1$ . Итак,  $b = c = \pm 1$ . Этим доказано наше утверждение для  $a_{il} = g_{il}$ ; существует единственное разложение рассматриваемого вида для  $a_{il} = g_{il}$ :

$$g_{il} = (\pm g_{ik})(\pm g_l^k).$$

Пусть теперь  $a_{ik}$  будет произвольным лоренцовым вращением и

$$b_{ik} c_l^k = b'_{ik} c_l^{k'}$$

будут двумя представлениями  $a_{il}$ . Умножая на  $b_p^i c_q^l$  и учитывая основное свойство вращений, получаем:

$$g_{pq} = (b'_{ik} b_p^i)(c_l^{k'} c_q^l) = [(b^{-1})'_{ki} b_p^i] [c_l^{k'} (c^{-1})_q^l].$$

Последнее как раз является разложением  $g_{pq}$  на  $\mathfrak{B}$ - и  $\mathfrak{C}$ -вращения. Согласно только что доказанному положению,

$$(b^{-1})'_k b_p^i = c'_{kl} (c^{-1})_p^l = \pm g_{kp}.$$

Отсюда следует, после умножения на  $b_r^{k'}$  (и соответственно на  $c_p^r$ )

$$\left. \begin{aligned} b_{rp} &= \pm b'_{rp}, \\ c'_{kr} &= \pm c_{kr} \end{aligned} \right\}$$

(оба соотношения имеют один и тот же знак). Этим наше утверждение доказано.

С точностью до знака соответствие  $\mathfrak{B}$ , а также  $\mathfrak{C}$  группе  $\mathfrak{D}$  является однозначным.

*Замечание.* Проведенное разложение лоренцовых вращений справедливо лишь для чистых вращений  $|a_k^i| = \pm 1$ , но никак не для отражений,

так как только *чистое* вращение может быть образовано из бесконечно малых вращений. Элементы  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$  во всех случаях являются чистыми вращениями.

### § 5. Полувекторы и их инварианты

Мы ввели в пространстве специальной теории относительности прямоугольные декартовы координаты. Преобразование координат, переводящее эти системы друг в друга, является преобразованием Лоренца

$$x'_i = a^i_k x^k \quad (a^i_p a_{iq} = g_{pq}).$$

Контравариантный (соответственно, ковариантный) вектор  $\lambda^i$  (соответственно,  $\lambda_i$ ) определяется в этом случае своим законом преобразования:

$$\begin{aligned} \lambda^{i'} &= a^{i'}_k \lambda^k, \\ \lambda'_i &= a^k_i \lambda_k \quad (a^k_i = g_{ip} g^{kq} \alpha^p_q). \end{aligned}$$

соответственно

Однако, преобразование Лоренца, переводящее систему  $x$  в систему  $x'$ , может быть записано как произведение преобразований  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{B}$ :

$$a_{ik} = b^p_i c_{pk},$$

причем  $b^p_i$  и  $c_{pk}$  определены с точностью до знака.

Величины  $b_{ik}(c_{ik})$  образуют в совокупности подгруппу группы Лоренца, которая, в смысле сопоставления:

$$a_{ik} \rightarrow b_{ik},$$

изоморфна группе Лоренца.

Все это дает нам возможность определить новые тензорные образования (первого и более высоких рангов), определяемые преобразованиями  $b_{ik}$  (соответственно  $c_{ik}$ ) группы ( $\mathfrak{B}$ ) (соответственно  $\mathfrak{C}$ ). Именно, пусть контравариантный полувектор *первого рода*, который мы запишем в виде  $\bar{\rho}^s$ , будет иметь в системе  $x'$  компоненты:

$$\bar{\rho}^{s'} = b_i^s \bar{\rho}^i. \quad (34)$$

Аналогично, для контравариантных полувекторов второго рода положим:

$$\bar{\sigma}^{s'} = c_i^s \bar{\sigma}^i. \quad (35)$$

Так как  $a^i_k$  является вещественным преобразованием Лоренца, то

$$c_i^s = \bar{b}_i^s.$$

Отсюда следует, что комплексно сопряженный контравариантный полувектор первого рода является контравариантным полувектором второго рода и наоборот.

Так как  $(b_i^s)$  и  $(c_i^s)$  сами являются преобразованиями Лоренца, то метрический тензор  $g_{ik}$  также будет полутензором 1-го рода (и 2-го рода) с инвариантными относительно этих преобразований компонентами. Следовательно, мы можем использовать его для сравнения полувекторов, а также для поднятия и опускания индексов полу- (и смешанных) тензоров.

Теперь мы в состоянии вывести из равенств (34) и (35) преобразования для ковариантного полувектора  $\rho_s$  (соответственно  $\sigma_s$ ):

$$\rho'_s = b_s^t \rho_t \quad (b_s^t = g_{su} g^{tv} b_v^u), \quad (36)$$

$$\sigma'_s = c_s^t \sigma_t \quad (c_s^t = g_{su} g^{tv} c_v^u). \quad (37)$$

Мы должны, правда, заметить, что вследствие свободы выбора знака у  $b_{ik}$  и  $c_{ik}$  (при заданном  $a_{ik}$ ) возникает двузначность закона преобразования полутензоров. Однако, как легко видеть, для ковариантности уравнений, в которые входят полутензоры, это не имеет никакого значения.

Так как  $b_{ik}$  соответствует некоторому *специальному* преобразованию Лоренца, то можно ожидать, что кроме  $g_{st}$  имеются еще другие (полу-)тензоры первого рода, численно инвариантные относительно преобразований. Какой из них является простейшим?

Чтобы найти его, нам нужно вернуться к соотношению (23а), которое определяет группу ( $\mathfrak{B}$ ):

$$b_i^p v_{pk} = v_{ip} b_k^p,$$

где  $v_{ip}$  означает самый общий антисимметричный тензор второго рода. Так как  $b_{ik}$ , будучи вращениями, удовлетворяют соотношению:

$$b_k^p b_q^k = \delta_q^p,$$

то, следовательно:

$$v_{iq} = b_i^p b_q^k v_{pk}. \quad (38)$$

Но это означает, что  $v_{iq}$  — численно инвариантный полутензор первого рода.

Численные инварианты  $cg_{st} + v_{st}$  характеризуют  $\mathfrak{B}$ -преобразования полностью, так как для вращений  $b_i^p$  соотношения (23а) и (38) эквивалентны.

Для двух полувекторов первого рода  $\lambda^s$  и  $\mu^{\bar{s}}$ , наряду с инвариантами

$$g_{st} \lambda^s \mu^{\bar{t}}, \quad (39)$$

существуют еще инварианты, характеристические для этих величин,

$$v_{st} \lambda^s \mu^{\bar{t}}. \quad (40)$$

Если подставить в выражение (40) (в прямоугольных декартовых координатах) по очереди  $v_{\alpha}^{-}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), то получатся инварианты:

$$\left. \begin{aligned} v_{1st} \lambda^s \mu^{\bar{t}} &= (\lambda^{\bar{1}} \mu^{\bar{2}} - \lambda^{\bar{2}} \mu^{\bar{1}}) - i(\lambda^{\bar{3}} \mu^{\bar{4}} - \lambda^{\bar{4}} \mu^{\bar{3}}) \\ v_{2st} \lambda^s \mu^{\bar{t}} &= (\lambda^{\bar{2}} \mu^{\bar{3}} - \lambda^{\bar{3}} \mu^{\bar{2}}) - i(\lambda^{\bar{1}} \mu^{\bar{4}} - \lambda^{\bar{4}} \mu^{\bar{1}}) \\ v_{3st} \lambda^s \mu^{\bar{t}} &= (\lambda^{\bar{3}} \mu^{\bar{1}} - \lambda^{\bar{1}} \mu^{\bar{3}}) - i(\lambda^{\bar{2}} \mu^{\bar{4}} - \lambda^{\bar{4}} \mu^{\bar{2}}) \end{aligned} \right\}, \quad (41)$$

которые вместе с инвариантом

$$g_{st} \lambda^s \mu^{\bar{t}} = \lambda^{\bar{1}} \mu^{\bar{1}} + \lambda^{\bar{2}} \mu^{\bar{2}} + \lambda^{\bar{3}} \mu^{\bar{3}} - \lambda^{\bar{4}} \mu^{\bar{4}} \quad (41a)$$

характеризуют полувекторы первого рода.

Совершенно аналогично (уже из факта комплексной сопряженности полутензоров первого и второго рода) следует, что относительно преобразований  $\mathfrak{C}$  полутензоры второго рода  $g_{st}$  и общий тензор  $\mu_{st}$  численно инвариантны. Это свойство характеризует подгруппу ( $\mathfrak{C}$ ) группы вращений ( $\mathfrak{D}$ ).

Если между двумя полувекторами первого рода ( $\mu$ ) и ( $\lambda$ ) существует соотношение:

$$\rho \mu_s = v_{st} \lambda^{\bar{t}} \quad (\rho - \text{скаляр}), \quad (42)$$

то вследствие инвариантности  $v_{st}$  оно будет независимым от координатной системы численным соотношением между их компонентами. Например, в прямоугольной системе координат может существовать одно из следующих имеющих смысл (инвариантных) соотношений (если подставить по очереди  $v_1, v_2, v_3$ ):

$$\rho \mu_{\bar{1}} = \lambda^{\bar{2}}, \quad \rho \mu_{\bar{2}} = -\lambda^{\bar{1}}, \quad \rho \mu_{\bar{3}} = -i \lambda^{\bar{4}}, \quad \rho \mu_{\bar{4}} = i \lambda^{\bar{3}}, \quad (42a)$$

$$\rho\mu_{\bar{2}} = \lambda^{\bar{3}}, \quad \rho\mu_{\bar{3}} = -\lambda^{\bar{2}}, \quad \rho\mu_{\bar{1}} = -i\lambda^{\bar{4}}, \quad \rho\mu_{\bar{4}} = i\lambda^{\bar{1}}, \quad (42б)$$

$$\rho\mu_{\bar{3}} = \lambda^{\bar{1}}, \quad \rho\mu_{\bar{1}} = -\lambda^{\bar{3}}, \quad \rho\mu_{\bar{2}} = -i\lambda^{\bar{4}}, \quad \rho\mu_{\bar{4}} = i\lambda^{\bar{2}}. \quad (42в)$$

Аналогично получаются соотношения для полувекторов *второго* рода, если заменить  $v_{s\bar{i}}$  на  $u_{s\bar{i}}$  [в соотношениях, аналогичных (42)] и, соответственно,  $i$  на  $-i$  [в соотношениях, аналогичных (42а), (42б), (42в)].

### § 6. Тензор $E_{\alpha\bar{s}\bar{i}}$

Мы попытаемся в этом параграфе найти *смешанные* тензоры, обладающие *численной инвариантностью* относительно преобразований, соответствующих их индексам.

Смешанного тензора второго ранга ( $t_s, t_{i\bar{s}}, t_{\bar{r}\bar{s}}$ ), обладающего свойством численной инвариантности, не существует. Простейший смешанный инвариантный тензор имеет структуру  $E_{r\bar{s}\bar{i}}$ ; он третьего ранга (относительно первого индекса — обычный тензор, относительно второго — полутензор первого рода, относительно третьего — полутензор второго рода).

Для вывода нам опять необходимы прямоугольные декартовы координаты. Вследствие требуемой инвариантности для любого преобразования Лоренца справедливо соотношение:

$$E_{r\bar{s}\bar{i}} = a_r^l b_s^m c_i^n E_{l\bar{m}\bar{n}}. \quad (43)$$

Вследствие

$$a_r^l = b_r^p c_p^l$$

справедливо также соотношение

$$E_{r\bar{s}\bar{i}} = b_r^p b_s^m c_p^l c_i^n E_{l\bar{m}\bar{n}}. \quad (43а)$$

Инвариантность  $E$  проявляется также и при обратных преобразованиях, так что справедливо и соотношение:

$$E_{r\bar{s}\bar{i}} = a_r^l b_s^m c_i^n E_{l\bar{m}\bar{n}}. \quad (43б)$$

Тот факт, что  $b_s^m$  и  $c_i^n$  могут быть заменены соответственно на  $-b_s^m$  и  $-c_i^n$ , не оказывает никакого влияния на справедливость соотношения (43).

Мы хотим теперь определить из (43) форму  $E_{r\bar{s}\bar{t}}$ . Опустим штрихи, обозначавшие значение полуиндексов, так как у тензора  $E$  род индекса определяется его местом.

Если  $a_r^l$  само выбрано как  $\mathfrak{B}$ -преобразование, то справедливы соотношения  $a_r^l = b_r^l$ ,  $c_t^n = \delta_t^n$ , так что из (43) можно получить:

$$E_{rst} = b_r^l b_s^m E_{lmt}. \quad (44)$$

Точно так же для  $a_r^l = c_r^l$ ,  $b_s^m = \delta_s^m$  из (43) следует:

$$E_{rst} = c_r^l c_t^n E_{lsn}. \quad (44a)$$

Умножая равенство (44) на  $b_n^s$ , получаем

$$E_{rst} b_n^s = b_r^l E_{lnt} = b_{rs} E_{nt}. \quad (44б)$$

Соотношения (44) и (44а), в свою очередь, имеют следствием (43а), а значит и (43), так что они эквивалентны (43).

Из (44б) следует, что относительно индексов  $r$  и  $s$  тензор  $E_{rst}$  должен иметь форму<sup>5</sup>

$$E_{rst} = g_{rs} a_{(t)} + v_{rs(t)}. \quad (45)$$

Аналогично, из (44а) следует:

$$E_{rst} = g_{rt} b_{(s)} + u_{rt(s)}. \quad (45а)$$

Оба эти соотношения содержат в свою очередь соотношения (44) и (44а), являющиеся следствием (43), и потому эквивалентны (43). Если в (45) и (45а) подставить  $r = s = t$  (естественно, не суммируя по ним), то получим  $a_{(s)} = b_{(s)}$ . Далее следует (всегда без суммирования):

$$E_{rrr} = g_{rr} a_{(r)}, \quad E_{rrs} = g_{sr} a_{(r)}, \quad E_{rsr} = g_{rr} a_{(s)} \quad (46)$$

и далее

$$E_{rst} + E_{srt} = 2g_{rs} a_{(t)}, \quad E_{rst} + E_{tsr} = 2g_{rt} a_{(s)}.$$

Из каждого из этих соотношений следует при  $r \neq s$ ,  $s = t$ :

$$E_{rs} = -g_{ss} a_r \quad (r \neq s). \quad (46а)$$

<sup>5</sup> Ср. (38) и последующие замечания.



У нас еще отсутствуют  $E_{rts}$  с неравными индексами. Если  $r, s, t$  все различны и  $w$  — четвертый, отличный от всех трех индексов, то из (45) следует

$$E_{rst} = v_{rs(t)} = -\frac{1}{2} \sqrt{g} \eta_{rstw} v_{(t)}^{tw} = \mp \sqrt{g} E_{(t)}^{tw} = \pm \sqrt{g} a^{(w)} = -\sqrt{g} \eta_{rstw} a^{(w)}, \quad (47)$$

причем

$$a^{(w)} = g^{wz} a_{(z)}.$$

Те же соотношения дали бы (45а). Собирая все вместе, получаем:

$$E_{rst} = g_{rs} a_{(t)} + g_{rt} a_{(s)} - g_{st} a_{(r)} - \sqrt{g} \eta_{rstw} a^{(w)}. \quad (48)$$

Численно инвариантный тензор  $E_{rst}$ , как будет сейчас показано, удовлетворяет соотношениям (45) и (45а). Величины  $a_{(t)}$  представляют собой четыре произвольно выбранные постоянные; если они вещественны, то  $E_{rst}$  и  $E_{rst}$  — комплексно сопряженные величины.

Покажем теперь, что, согласно соотношению (45), выражение:

$$E_{rst} - g_{rs} a_{(t)} = (g_{rt} g_{sw} - g_{st} g_{rw} - \sqrt{g} \eta_{rstw}) a^{(w)}$$

обладает теми же свойствами симметрии относительно индексов  $r, s$ , что и тензор  $v_{rs}$ . А именно, если  $a_{rs}$  — любой антисимметричный тензор, то  $a_{rs} - a_{rs}^*$ , согласно § 2, будет некоторым  $v_{rs}$ , так что выполняется равенство:

$$v_{rs} = a_{rs} - \frac{\sqrt{g}}{2} \eta_{rstw} a^{tw},$$

или, если подставить  $a_{rs} = (g_{rt} g_{sw} - g_{st} g_{rw}) a^{tw}$ :

$$v_{rs} = (g_{rt} g_{sw} - g_{rw} g_{st} - \sqrt{g} \eta_{rstw}) a^{tw}.$$

Сравнение показывает, что  $E_{rst} - g_{rs} a_{(t)}$  является некоторым  $v_{rs}$ , что и требовалось доказать. Аналогично проводится доказательство того, что (48) удовлетворяет условию (45а).

### § 7. Простейшая система дифференциальных уравнений для полувекторов

Значение смешанного тензора  $E_{rst}$  состоит в том, что с помощью его можно связывать между собой тензоры различного рода. Рассмотрим один пример такой связи, положив предварительно в основу пространство  $R_4$

специальной теории относительности, отнесенное к декартовым координатам.

Из некоторого полувектора первого рода  $\chi^s$  и полувектора второго рода  $\bar{\psi}^{\bar{t}}$  можно образовать обычный вектор:

$$A_r = E_{rs}^r \chi^s \bar{\psi}^{\bar{t}}, \quad (49)$$

В частности, в качестве полутензора второго рода можно выбрать комплексно сопряженную  $\chi$  величину ( $\psi^{\bar{t}} = \bar{\chi}^{\bar{t}}$ ):

$$A_r = E_{rs}^r \chi^s \bar{\chi}^{\bar{t}}. \quad (49a)$$

Выбор числового параметра  $a_{(w)}$  в выражении для  $E$  остается здесь (так же, как и в последующих формулах) совершенно произвольным. Для двух полувекторов этого рода (полей таких векторов) можно, далее, образовать следующие линейные системы ковариантных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} E_{s\bar{t}}^r \frac{\partial \chi^s}{\partial x_r} &= \alpha \psi_{\bar{t}}, \\ E_{s\bar{t}}^r \frac{\partial \bar{\psi}^{\bar{t}}}{\partial x_r} &= \beta \chi_s, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где  $\alpha, \beta$  — постоянные. Можно показать, что при исключении одного из полувекторов из уравнений (50) возникает система уравнений, построенная аналогично уравнению Шредингера<sup>6</sup>.

Мы можем, далее, естественным образом ограничить систему (50), выбирая в качестве  $\psi$  комплексно сопряженную к полувектору  $\chi$  величину. Тогда получается система

$$E_{s\bar{t}}^r \frac{\partial \chi^s}{\partial x_r} = \alpha \bar{\chi}_{\bar{t}}. \quad (51)$$

Мы можем в некотором смысле говорить о неправильном [уравнение (50)] и правильном [уравнение (51)] расщеплении «уравнения Шредингера»<sup>7</sup>.

Поднятие и опускание индексов во всех этих уравнениях осуществляется с помощью метрических тензоров  $g_{st}, g_{s\bar{t}}, g_{\bar{s}t}$ .

<sup>6</sup> Это основано на легко доказываемом соотношении

$$E_s^{kr} E^{hps} + E_s^{hr} E^{kps} \equiv 2g^{hk} g^{rp} a_{(t)} a^{(t)}.$$

<sup>7</sup> Это уравнение, дополненное электромагнитными членами, по-видимому, неприемлемо в теории электрона, поскольку оно изменяется при добавлении градиента к электрическому потенциалу.

В этих уравнениях прежде всего неприятно поражает присутствие в выражении для  $E$  четырех произвольных констант  $a_{(x)}$ , от выбора которых зависит структура системы уравнений. Позднее будет явно показано, что этот недостаток сам собою исчезает при введении дираковских спинорных величин.

### § 8. Построение полувеличин в $R_4$ общей теории относительности

В дальнейшем полувеличины в пространстве  $R_4$  будут отнесены к определенному в каждой точке произвольно ориентированному ортогональному нормированному реперу, который может быть описан «смешанным» тензором

$$h_{\alpha i}. \tag{52}$$

Если  $A^i$  — контравариантный вектор, то

$$A_\alpha = h_{\alpha i} A^i \tag{53}$$

представляет тот же самый вектор, отнесенный к выбранному четырехмерному реперу (тетраподу). В дальнейшем греческие индексы будут всегда относиться к тетраподу, а латинские — к общей системе координат. В этом случае справедливо соотношение:

$$g_{ik} = h_{\alpha i} h_{\beta k} g^{\alpha\beta} = h_{1i} h_{1k} + h_{2i} h_{2k} + h_{3i} h_{3k} - h_{4i} h_{4k}. \tag{54}$$

Для нормы вектора ( $A$ ) имеем в этом случае формулу:

$$g_{ik} A^i A^k = g^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta,$$

где

$$g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, вращению (изменению) репера ( $h_i^{\alpha'} = a_\beta^\alpha h_i^\beta$ ) соответствует преобразование Лоренца локального вектора согласно равенству

$$A^{\alpha'} = a_\beta^{\alpha'} A^\beta. \tag{55}$$

Наряду с локальными векторами введем полувеличины  $\chi_\mu, \psi_\sigma$ , которые преобразуются как локальные вектора только при вращении репера

по закону

$$\chi'_\sigma = b_\sigma^\mu \chi'_\mu, \quad (55a)$$

$$\psi'_\tau = c_\tau^\nu \psi'_\nu, \quad (55b)$$

причем

$$a_\alpha^\beta = b_\alpha^\gamma c_\gamma^\beta \quad (56)$$

представляет собой, в соответствии с § 3, разложение преобразования Лоренца. Полувекторы как локальные векторы определяются локальным метрическим тензором  $g_{\alpha\beta}(g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}, g_{\alpha\bar{\beta}})$ , который является численно инвариантным при преобразованиях  $b_\alpha^\gamma, c_\beta^\gamma$ .

Введение тензора

$$E_{\sigma\bar{\tau}}^r = h_\alpha^r E_{\sigma\bar{\tau}}^\alpha \quad (57)$$

позволяет с помощью нашего тензора  $E$  (§ 6) перенести дифференциальные уравнения (50) и (51) в схему общей теории относительности

$$\left. \begin{aligned} E_{\sigma\bar{\tau}}^r \bar{\chi}_{;r}^\sigma &= \alpha \psi_{\bar{\tau}}, \\ E_{\sigma\bar{\tau}}^r \psi_{;r}^\sigma &= \beta \chi_{\sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$$E_{\sigma\bar{\tau}}^r \bar{\chi}_{;r}^\sigma = \alpha \bar{\chi}_{\bar{\tau}}. \quad (59)$$

Обозначенные точкой с запятой ковариантные производные для полувеличин в этих уравнениях<sup>8</sup> должны быть прежде всего установлены так, чтобы

$$g_{\sigma\bar{\tau};i} = 0, \quad (60)$$

$$g_{\sigma\bar{\tau};i} = 0. \quad (60a)$$

Тогда и только тогда можно поднимать и опускать индексы, стоящие под знаком дифференцирования.

Естественно, что включение теории полутензоров в схему общей теории относительности лишь тогда можно считать завершенным, когда установлены правила абсолютного дифференцирования всех величин. Это может

<sup>8</sup> Легко показать, что эта система уравнений инвариантна (обладает тензорным характером) как относительно греческих индексов (вращение репера), так и относительно латинских индексов (преобразование координат), если вместе с численной инвариантностью  $E$  относительно вращения репера принять во внимание и тензорный характер  $h_{\alpha r}$ .

быть сделано лишь при помощи следующих постулатов (А) — (Г); при этом мы будем пользоваться обозначениями

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha; r} &= \lambda_{\alpha, r} - \lambda_{\beta} \Gamma_{\alpha r}^{\beta}, \\ \psi_{\sigma; r} &= \psi_{\sigma, r} - \psi_{\beta} \Gamma_{\sigma r}^{\beta}, \\ \chi_{\sigma; r} &= \chi_{\sigma, r} - \chi_{\beta} \bar{\Gamma}_{\sigma r}^{\beta}. \end{aligned} \quad (61)$$

Здесь величина  $\bar{\Gamma}$  — выбрана комплексно сопряженной  $\Gamma$  с тем, чтобы комплексно сопряженные полувекторы после дифференцирования оставались комплексно сопряженными.

(А) Соотношение (53) между координатным вектором и локальным вектором не может быть нарушено при дифференцировании, откуда следует:

$$0 = h_{\alpha i; k} \left( = h_{\alpha i, k} - h_{\alpha r} \left\{ \begin{matrix} r \\ ik \end{matrix} \right\} - h_{\beta i} \Gamma_{\alpha k}^{\beta} \right), \quad (62)$$

или

$$P_{\gamma \alpha k} = h_{\gamma}^i \left( h_{\alpha i, k} - h_{\alpha r} \left\{ \begin{matrix} r \\ ik \end{matrix} \right\} \right). \quad (62a)$$

Из равенства (62) и  $g_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^i h_{\beta i}$  (ортонормированный репер) следует  $g_{\alpha\beta; k} = 0$ , а отсюда — антисимметрия  $P$  по первым двум индексам:

$$P_{\gamma \alpha k} = -P_{\alpha \gamma k}. \quad (62b)$$

(Б) Этот постулат уже принят выше в соотношениях (60) и (60a) и дает аналогично (63б) условие

$$\Gamma_{\tau \sigma r} = -\Gamma_{\sigma \tau r}. \quad (62в)$$

(В) Ковариантная производная инвариантного полутензора первого (соответственно второго) рода  $v_{\sigma\tau}^-$  (соответственно  $u_{\sigma\tau}^{==}$ ) должна обращаться в нуль<sup>9</sup>

$$0 = v_{\sigma\tau; k}^- = -v_{\alpha\tau} \Gamma_{\sigma k}^{\alpha} - v_{\sigma\alpha} \Gamma_{\tau k}^{\alpha}.$$

Это дает

$$v_{\sigma\alpha} \Gamma_{\tau k}^{\alpha} = \Gamma_{\sigma k}^{\alpha} v_{\alpha\tau},$$

или

$$v_{\sigma\alpha} \Gamma_{\tau k}^{\alpha} = \Gamma_{\sigma\alpha k} v_{\tau}^{\alpha}. \quad (62г)$$

Сравнение равенств (62г) с (23а) показывает, что  $\Gamma$  должно обладать

<sup>9</sup> Для облегчения набора мы опускали черточки над индексами в тех случаях, когда это не приводило к неясности.

структурой некоторого  $(b_{ik})$  и, далее, вследствие антисимметрии (62в) и вследствие соотношения (24) структурой некоторого  $(u_{ik})$  относительно греческих индексов. [Ср. формулы (14), (14а) и (14б).]

Тогда получается, что  $\bar{\Gamma}$  относительно первых двух индексов должно обладать структурой соответствующего  $v_k$  (комплексно сопряженного).

Чтобы это было видно яснее, мы будем в дальнейшем писать:

$$U_{\tau(k)}^{\alpha} \text{ вместо } \Gamma_{\tau k}^{\alpha},$$

$$V_{\tau(k)}^{\alpha} \text{ вместо } \bar{\Gamma}_{\tau k}^{\alpha}.$$

(Г) Ковариантная производная численно инвариантного локального тензора  $E$  должна обращаться в нуль:

$$0 = E_{\alpha\sigma\tau; k} = -(E_{\beta\sigma\tau} P_{\alpha k}^{\beta} + E_{\alpha\beta\tau} \Gamma_{\sigma k}^{\beta} + E_{\alpha\sigma\beta} \bar{\Gamma}_{\tau k}^{\beta}). \quad (62д)$$

Однако вследствие (45), (45а) тензор  $E$  имеет структуру  $(c_{ik})$  относительно двух первых индексов и структуру  $(b_{ik})$  — относительно первого и третьего индексов. Потому и оказывается возможным применить перестановочные правила (23а) и (29) и получить преобразованные уравнения:

$$E_{\alpha\beta\tau} \Gamma_{\sigma k}^{\beta} = E_{\alpha\beta\tau} U_{\sigma(k)}^{\beta} = U_{\alpha\beta(k)} E_{\sigma\tau}^{\beta} = -E_{\beta\sigma\tau} \Gamma_{\alpha k}^{\beta},$$

$$E_{\alpha\sigma\beta} \bar{\Gamma}_{\tau k}^{\beta} = E_{\alpha\sigma\beta} V_{\tau(k)}^{\beta} = V_{\alpha\beta(k)} E_{\sigma\tau}^{\beta} = -E_{\beta\sigma\tau} \bar{\Gamma}_{\alpha k}^{\beta}.$$

Это дает, после подстановки в (62д):

$$E_{\beta\sigma\tau} (P_{\alpha k}^{\beta} - \Gamma_{\alpha k}^{\beta} - \bar{\Gamma}_{\alpha k}^{\beta}) = 0. \quad (62е)$$

Но отсюда получается<sup>10</sup>:

$$P_{\beta\alpha k} = \Gamma_{\beta\alpha k} + \bar{\Gamma}_{\beta\alpha k}. \quad (62ж)$$

Итак,  $\Gamma$  получается из  $P$  (при фиксированном третьем индексе) *однозначным* разложением, которое полностью отвечает рассмотренному в § 1 [см. равенство (16)] разложению антисимметричного тензора второго ранга. Величины  $P$  можно опять-таки выразить (62) через символы Римана — Кристоффеля  $\{\}$  и  $h_{\alpha i}$ . Величины  $h_{\alpha i}$  (16 величин) определяются через  $g_{ik}$  с точностью до 6 произвольных функций, что соответствует произволу в ориентации реперов в каждой точке пространства  $R_4$ .

<sup>10</sup> А именно, умножая (62е) на  $E_{\nu\rho}^{\tau}$  и принимая во внимание получающуюся из (48) формулу (см. примечание 6 на стр. 555)

$$E_s^{kr} E^{ips} + E_s^{kp} E^{irs} = 2g^{ik} g^{rp} a_{(t)}^{(t)} a^{(t)}.$$

Этим достигается введение полувекторов в схему общей теории относительности.

*Замечание.* В квантовой теории важную роль играет оператор  $(\alpha + i\epsilon\varphi_a)$ , где  $\varphi_a$  — электрический потенциал. Чтобы рассмотреть его, введем временно наряду с употреблявшимися до сих пор производными, обозначаемыми точкой с запятой перед индексом (;), производную, обозначаемую чертой перед индексом (|), которая для обычных (координатных и локальных) векторов совпадает с производной (·). Введем для полувекторов обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\bar{\sigma}|k} &= \psi_{\bar{\sigma},k} - \psi_{\bar{\alpha}} \Delta_{\sigma k}^{\alpha}, \\ \chi_{\bar{\sigma}|k} &= \chi_{\bar{\sigma},k} - \chi_{\bar{\alpha}} \bar{\Delta}_{\sigma k}^{\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

где

$$\Delta_{\sigma k}^{\alpha} = \Gamma_{\sigma k}^{\alpha} + i\epsilon\delta_{\sigma}^{\alpha}\varphi_k. \quad (63a)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\bar{\sigma}|k} &= \psi_{\bar{\sigma};k} - i\epsilon\psi_{\bar{\sigma}}\varphi_k, & \psi_{|k}^{\bar{\sigma}} &= \psi_{;k}^{\bar{\sigma}} + i\epsilon\psi^{\bar{\sigma}}\varphi_k, \\ \chi_{\bar{\sigma}|k} &= \chi_{\bar{\sigma};k} + i\epsilon\chi_{\bar{\sigma}}\varphi_k, & \chi_{|k}^{\bar{\sigma}} &= \chi_{;k}^{\bar{\sigma}} - i\epsilon\chi^{\bar{\sigma}}\varphi_k. \end{aligned} \right\} \quad (63b)$$

Теперь вместо уравнений (58) выступают те же самые уравнения, у которых только (·)-производная заменена (|)-производной.

Как и для (·)-производной, для (|)-производной оказываются справедливыми соотношения

$$E_{\bar{\sigma}\bar{\tau}|k}^{\alpha} = 0, \quad E_{|k}^{\alpha\bar{\sigma}\bar{\tau}} = 0.$$

Если ввести аналогично тому, как это делали Инфельд и Ван дер-Верден<sup>11</sup>, вещественный «вектор тока»

$$\mathfrak{J}^{\alpha} = E_{\sigma\tau}^{\alpha} \chi^{\sigma} \bar{\chi}^{\tau} + E^{\alpha\sigma\tau} \bar{\psi}_{\sigma} \psi_{\tau}$$

и образовать его дивергенцию  $\mathfrak{J}^{\alpha}_{;a} (= \mathfrak{J}^{\alpha}|_a)$ , то эта дивергенция обращается в нуль только при  $\alpha + \bar{\beta} = 0$ . (Предполагается, что  $a_{(t)}$  вещественны.)

<sup>11</sup> Авторы уже месяц назад любезно прислали нам для ознакомления отпечаток своей работы «Волновое уравнение электрона в общей теории относительности», которая будет вскоре опубликована. [См. L. Infeld, B. L. van der Waerden, *sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.*, 1933, 380. — *Ред.*] В этой работе сделана попытка записать уравнение Дирака в общековариантном виде, некоторым, отличным от нашего, способом, без введения полувекторов

### § 9. Специальные полувекторы (спиноры)

Мы еще не закончили теорию полувекторов, так как имеются, как мы хотим сейчас показать, специальные полувекторы, имеющие только две независимые компоненты. (Мы будем пользоваться при этом прямоугольными локальными координатами.)

Сначала покажем это на примере полувекторов первого рода и воспользуемся для образования специальных полувекторов уже много раз употреблявшимся инвариантным тензором<sup>12</sup>

$$v_{1\sigma\tau} \quad (v_{12} = iv_{34} = 1).$$

С его помощью мы можем каждому полувектору  $\lambda_{\bar{\sigma}}$  сопоставить «вектор со звездочкой»  $\lambda_{\bar{\sigma}}^*$ , согласно правилу

$$v_{\sigma\tau} \lambda_{\bar{\sigma}} = \lambda_{\bar{\sigma}}^*.$$

Подробнее:

$$\lambda_{\bar{1}}^* = \lambda_{\bar{2}}; \quad \lambda_{\bar{2}}^* = -\lambda_{\bar{1}}; \quad \lambda_{\bar{3}}^* = i\lambda_{\bar{4}}; \quad \lambda_{\bar{4}}^* = i\lambda_{\bar{3}}.$$

Это в свою очередь имеет следствием соотношение

$$(\lambda_{\bar{\sigma}}^*)^* = -\lambda_{\bar{\sigma}}. \quad (64)$$

Введем полувекторы  $\lambda_{\bar{\sigma}}$ , для которых  $\lambda_{\bar{\sigma}}^*$  пропорциональны  $\lambda_{\bar{\sigma}}$ . Положим в равенстве  $\lambda_{\bar{\sigma}}^* = \rho \lambda_{\bar{\sigma}}$ , в соответствии с соотношением (64),  $\rho = \pm i$ . Назовем полувектор  $\lambda_{\bar{\sigma}}$   $\alpha$ -полувектором и будем обозначать его как  $\lambda_{\bar{\sigma}}^{\alpha}$ , если

$$\lambda_{\bar{\sigma}}^{\alpha} = +i\lambda_{\bar{\sigma}};$$

аналогично, назовем полувектор  $\lambda_{\bar{\sigma}}$   $\beta$ -полувектором, если

$$\lambda_{\bar{\sigma}}^{\beta} = -i\lambda_{\bar{\sigma}}.$$

В развернутой записи оба эти соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{\bar{2}}^{\alpha} &= i\lambda_{\bar{1}}^{\alpha}, \\ \lambda_{\bar{4}}^{\alpha} &= \lambda_{\bar{3}}^{\alpha}, \end{aligned} \quad (64a)$$

<sup>12</sup> Если выбрать, например,  $v_{\bar{2}}$  то этому будет соответствовать лишь другая нумерация векторов тетрапода.



и

$$\lambda_{\beta}^{-2} = -i\lambda_{\beta}^{-1},$$

$$\lambda_{\beta}^{-4} = -\lambda_{\beta}^{-3}.$$

Теперь видно, что абсолютное (·) дифференцирование, так же как (|)-дифференцирование, оставляет неизменным характер  $\alpha$ - и  $\beta$ -полувекторов соответственно.

Каждый полувектор первого рода допускает аддитивное однозначное разложение на  $\alpha$ -полувектор и  $\beta$ -полувектор первого рода.

Аналогичным образом можно посредством численно инвариантного тензора ( $u$ ) ввести специальные полувекторы второго рода, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} \alpha\text{-полувекторы 2-го рода: } \lambda_{\alpha}^{-1} &= -i\lambda_{\alpha}^{-1}, \\ \lambda_{\alpha}^{-4} &= \lambda_{\alpha}^{-3}; \\ \beta\text{-полувекторы 2-го рода: } \lambda_{\beta}^{-2} &= i\lambda_{\beta}^{-1}, \\ \lambda_{\beta}^{-4} &= -\lambda_{\beta}^{-3}. \end{aligned} \tag{65}$$

Обозначения выбраны так, что любой комплексно сопряженный  $\alpha$ -полувектор (соответственно  $\beta$ -полувектор) одного рода является  $\alpha$ -полувектором (соответственно  $\beta$ -полувектором) другого рода.

Хотя  $\alpha$ - и  $\beta$ -полувекторы являются полувекторами двух различных типов симметрии (как, например, симметричные и антисимметричные обычные тензоры второго ранга) они (в противоположность последним) могут быть легко переведены друг в друга простым алгебраическим преобразованием, и потому представляют собой, в некотором смысле, единый тип тензора (как, например, обычные ковариантные и контравариантные тензоры)<sup>13</sup>.

Действительно, если образовать с помощью тензоров  $v$  (соответственно  $v$ ), определенных равенствами (14в) и (15в) полувектор<sup>2</sup>

$$\bar{v}_{\alpha}^{-2} \psi_{\beta}^{\tau},$$

то он окажется  $\alpha$ -полувектором (который мы назовем  $\chi_{\alpha}$ ). Наоборот, при-

<sup>13</sup> Как мы покажем позднее, соотношение между  $\alpha$ - и  $\beta$ -полувекторами в дираковской схеме спинорных величин сводится к тождествам.

менение  $v$  к  $\alpha$ -полу вектору дает  $\beta$ -полу вектор. Это можно вывести из соотношения

$$\chi_{\alpha}^{-} = v_{\sigma\tau}^{-} \psi_{\beta}^{\tau} \quad (66)$$

в силу равенства [см. (24а), (24б)]:

$$v_{\sigma\tau}^{-} v_{\rho}^{\sigma} = g_{\tau\rho}^{-}.$$

Доказательство соотношения (66) следует из равенства, определяющего  $v$ :

$$v_{23} = iv_{14} = +1,$$

если принять во внимание свойства симметрии  $\beta$ -полу вектора.

Аналогично  $\alpha$ - и  $\beta$ -векторы второго рода могут быть связаны между собой с помощью  $v$ , комплексно сопряженного  $u$ .

Из всего изложенного выше следует, что каждое полу векторное уравнение допускает однозначное расщепление на  $\alpha$ - и  $\beta$ -уравнения. Таким образом, естественно вместо *общих* полувеличин и, соответственно, полууравнений, рассмотреть те два типа симметрии ( $\alpha$ ) и, соответственно, ( $\beta$ ), которые, согласно только что доказанному, представляют в сущности один и единственный специальный тип.

Для образования дифференциальных уравнений нам необходимы выражения вида:

$$E_{\sigma\tau}^r \psi; r \quad \text{и} \quad h^{\alpha r} E_{\alpha\sigma\tau} \psi; r.$$

Как расщепляются такие выражения, когда мы образуем их для некоторого  $\alpha$ - и, соответственно,  $\beta$ -вектора? Это становится ясным только после изучения характера выражения  $E_{\varepsilon\sigma\tau} \psi^{\varepsilon}$  ( $= E_{\varepsilon\tau}^{\sigma}$ ) относительно индекса  $\tau$ <sup>14</sup>. Можно, естественно, расщепить (однозначно)  $E$ -тензор относительно индексов  $\sigma$  и  $\tau$  следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon\sigma\tau} &= E_{\varepsilon\sigma\tau}^{\alpha} + E_{\varepsilon\sigma\tau}^{\beta} = \quad (\text{Расщепление относительно индекса } \sigma) \\ &= (E_{\varepsilon\sigma\tau}^{\alpha\alpha} + E_{\varepsilon\sigma\tau}^{\alpha\beta}) = (E_{\varepsilon\sigma\tau}^{\beta\alpha} + E_{\varepsilon\sigma\tau}^{\beta\beta}) \quad (\text{Расщепление обеих частей} \\ &\quad \text{относительно индекса } \tau). \end{aligned}$$

<sup>14</sup> Тензор с полуиндексами в любом случае может быть естественным образом расщеплен на тензоры  $\alpha$ - и  $\beta$ -типа.

Введем теперь расщепление <sup>15</sup>

$$\left. \begin{aligned} E &= E_1 + E_2, \\ E &= E_{\alpha\beta}^{\varepsilon\sigma\tau} + E_{\beta\alpha}^{\varepsilon\sigma\tau}, \\ E &= E_{\alpha\alpha}^{\varepsilon\sigma\tau} + E_{\beta\beta}^{\varepsilon\sigma\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Легко обнаружить, что скалярное произведение двух  $\alpha$ -полувекторов (соответственно двух  $\beta$ -полувекторов) равно нулю. Отсюда можно заключить, что величина  $E_{\varepsilon\sigma\tau}^1 \psi^\sigma$  по отношению к  $\tau$  имеет  $\alpha$ - и, соответственно,  $\beta$ -характер, если  $\psi$  является  $\alpha$ - и, соответственно,  $\beta$ -полувектором. Наоборот,  $E_{\varepsilon\sigma\tau}^2 \psi^\sigma$  делает из  $\alpha$ -величины  $\psi$   $\beta$ -величину относительно индекса  $\tau$  и из  $\beta$ -величины  $\psi$   $\alpha$ -величину. Как выражается это расщепление через постоянные  $a_{(w)}$ , которые входят в выражение для  $E$  линейно? Чтобы узнать это, мы вычислим  $E_{\varepsilon\sigma\tau}^1 \psi^\sigma$  и  $E_{\varepsilon\sigma\tau}^2 \psi^\sigma$ ; по нашему определению для  $E$  и  $E$  существуют следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} E_{\varepsilon\sigma\tau}^1 \psi_\beta^\sigma &= \left\{ \begin{array}{l} \chi_{\varepsilon\tau} \text{ для } E = E_1, \\ \chi_{\varepsilon\tau} \text{ для } E = E_2, \end{array} \right\} \\ E_{\varepsilon\sigma\tau}^2 \psi_\alpha^\sigma &= \left\{ \begin{array}{l} \chi_{\varepsilon\tau} \text{ для } E = E_1, \\ \chi_{\varepsilon\tau} \text{ для } E = E_2. \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Для нашей цели нужно исследовать последние соотношения при  $\varepsilon = 1$ . Левая часть первой системы (68) при  $\tau = 1, \dots, 4$  равна:

$$\left. \begin{aligned} (a_1 - ia_2) \psi_\beta^1 + (a_3 + a_4) \psi_\beta^3 \\ (a_2 + ia_1) \psi_\beta^1 + (-ia_4 - ia_3) \psi_\beta^3 \\ (a_3 + a_4) \psi_\beta^1 + (-a_1 + ia_2) \psi_\beta^3 \\ (a_4 + a_3) \psi_\beta^1 + (-ia_2 + a_1) \psi_\beta^3. \end{aligned} \right\} \quad (68a)$$

<sup>15</sup> Четыре специальных  $E$ -тензора, возникающих при расщеплении общего  $E$ -тензора, являются численными инвариантами, так как они составлены из инвариантов  $E$  и  $v$ . Они имеют общий вид (48) при определенном выборе  $a_{(t)}$ .

Чтобы это было величиной  $\chi_{\beta}^{\bar{\tau}}$ , должно выполняться, согласно (65), равенство  $a_3 + a_4 = 0$ . Последнее равенство, таким образом, является необходимым условием для  $E_1$ .

Соответствующие выражения (при  $\varepsilon = 1, \tau = 1, \dots, 4$ ) для левой части второй системы (68) получаются из (68а), если изменить знаки вторых членов во всех скобках. Рассуждение, аналогичное приведенному выше, даст тогда для  $E_1$  дополнительное условие  $a_3 - a_4 = 0$ .

Итак,  $E_1$  характеризуется  $a_3 = a_4 = 0$ . Аналогично, для  $E_2$  при помощи соответствующих соображений получается из (68), (68а) условие  $a_1 = a_2 = 0$ .

Мы можем теперь дополнить разложение  $E$  и, соответственно,  $E_2$ , произведенное во втором и третьем равенствах (67).

А именно:  $E_{\varepsilon\sigma\tau}$  является некоторым  $E_1$  ( $a_3 = a_4 = 0$ ) особой природы:

$$E_{\varepsilon\sigma\tau} \Psi^{\alpha} = 0.$$

Если обозначить через  $A_1, A_2$  соответствующие постоянные  $a_1, a_2$  в выражении для  $E_{\varepsilon\sigma\tau}$ , то из системы, соответствующей (68а) (не выписанной здесь), следует  $A_1 + iA_2 = 0$ .

Аналогично, для второго слагаемого  $E_1$  ( $E_{\varepsilon\sigma\tau}$ ) получаются четыре постоянные  $B_1, B_2, 0, 0$ , причем  $B_1 - iB_2 = 0$ . Из равенств  $a_1 = A_1 + B_1$  и  $a_2 = A_2 + B_2$  получается:

$$A_1 = \frac{a_1 - ia_2}{2}, \quad B_1 = \frac{a_1 + ia_2}{2}.$$

Аналогичное исследование можно провести для расщепления  $E_2$ . Так для четырех тензоров  $E$  получим

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon\sigma\tau} &= \frac{a_1 - ia_2}{2} E_{\varepsilon\sigma\tau}(1, i, 0, 0), \\ E_{\varepsilon\sigma\tau} &= \frac{a_1 + ia_2}{2} E_{\varepsilon\sigma\tau}(1, -i, 0, 0), \\ E_{\varepsilon\sigma\tau} &= \frac{a_3 + ia_4}{2} E_{\varepsilon\sigma\tau}(0, 0, 1, 1), \\ E_{\varepsilon\sigma\tau} &= \frac{a_3 - ia_4}{2} E_{\varepsilon\sigma\tau}(0, 0, 1, -1), \end{aligned} \tag{69}$$

где  $E$  ( $a_1, a_2, a_3, a_4$ ) обозначает зависимость  $E$  от четырех постоянных  $a_{(w)}$ .

Самый общий  $E$ -тензор допускает, согласно равенствам (69), линейное представление через четыре специальных  $E$ -тензора (69), которые полностью определены их  $\alpha$ - и  $\beta$ -характером (с точностью до несущественных множителей). Эти четыре полностью определенных специальных  $E$ -тензора могут согласно (66) переводить  $\alpha$ -,  $\beta$ -полу векторы друг в друга<sup>16</sup>; последние тем самым играют роль одного единственного тензора (так же как в обычной теории тензоров контравариантный тензор является лишь иной записью ковариантного тензора). Таким образом, мы можем говорить о полностью определенном  $E$ -тензоре (но по отношению к специальным полувекторам). Теперь мы можем записать уравнения (58) для специальных ( $\alpha$ ,  $\beta$ )-полу векторов, используя выражения для  $E_{\alpha\beta}^{\varepsilon\sigma\tau}$ ,  $E_{\beta\alpha}^{\varepsilon\sigma\tau}$

$$\left. \begin{aligned} E_{\alpha\beta}^{\varepsilon\sigma\tau} \chi_{\beta}^{\sigma} &= \alpha \psi_{\beta}^{\varepsilon\tau}, \\ E_{\beta\alpha}^{\varepsilon\sigma\tau} \psi_{\beta}^{\varepsilon\tau} &= \beta \chi_{\alpha}^{\sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

где

$$E_{\alpha\beta}^{\varepsilon\sigma\tau} = h^{\lambda r} E_{\lambda\sigma\tau}^{\varepsilon\alpha\beta}. \quad (71)$$

### § 10. Связь со спинорами

Так как специальные полу векторы ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) имеют только две независимые компоненты, то каждому такому полу вектору  $\lambda_{\alpha}^{\sigma}$  можно поставить в соответствие величину нового рода только с двумя компонентами,  $\alpha$ -спинор первого рода, в качестве компонент которого возьмем:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\alpha}^1 (= -i\lambda_{\alpha}^2) &= p_{\alpha}^1, \\ \lambda_{\alpha}^3 (= \lambda_{\alpha}^4) &= p_{\alpha}^2. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

<sup>16</sup> Величины  $E_{\alpha\beta}^{\varepsilon\sigma\tau}$ , . . . , которые с точностью до постоянного множителя равны заданным соотношениями (69) величинам, могут быть определены так, что при выполнении соответствующих  $\mu$ - или  $\nu$ -операций [аналогичных (66)], они переходят непосредственно друг в друга. При выводе уравнений удобно ввести  $E$ -тензоры, нормированные именно таким образом.

Точно так же  $\beta$ -полу вектору первого рода  $\bar{v}_\beta$  поставим в соответствие  $\beta$ -спинор первого рода  $q$ :

$$\left. \begin{aligned} v_\beta (= i v_2) &= q_1, \\ v_\beta (= -v_4) &= q_2. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Положение индексов у величин  $p$  и  $q$  будет оправдано ниже. Совершенно аналогичным образом введем  $\alpha$ - и  $\beta$ -спиноры второго рода. Из определения следует при этом, что комплексно сопряженные  $\alpha$ - и  $\beta$ -спиноры первого рода являются соответственно  $\alpha$ - и  $\beta$ -спинорами второго рода.

Если образовать выражение:

$$g^{\sigma\tau} \lambda_{\sigma\beta} v_{\tau\alpha} = 2(p^1 q_1 + p^2 q_2), \quad (73)$$

то в нем можно найти обоснование сделанного нами выбора расположения индексов. Благодаря этому появляется возможность опускать значки  $\alpha$  и  $\beta$ .

Образует для двух  $\alpha$ -величин  $\lambda_\alpha$  и  $\mu_\alpha$  инвариант

$$v^{\sigma\tau} \lambda_{\sigma\alpha} \mu_{\tau\alpha} = 2i(p^1 r^2 - p^2 r^1), \quad (74)$$

где  $r$  — спинор, соответствующий полу вектору  $\mu$ . Из (74) следует, что

$$\eta_{\sigma\tau} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (75)$$

является (ковариантным) спин-тензором, который обычно используется в теории спиноров как «метрический тензор». Из соотношения (74) следует далее, что преобразования всех спиноров унимодулярны.

Как видно, теория спиноров получается из теории полу векторов. Однако вследствие более простого закона преобразования полу векторы, по-видимому, более предпочтительны, чем спиноры.

Пять работ (статьи 72—75) относятся к последнему периоду работы Эйнштейна над развитием квантовой механики. Неудовлетворенный самими основами этой работы, он так и не смог принять нового описания физического мира, полемике с которым он отдал свои последние силы (статьи 76—79).

## УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ ПОЛУВЕКТОРОВ\*

(Совместно с В. Майером)

### СОДЕРЖАНИЕ

**В в е д е н и е.** Краткий обзор теории полувекторов и спиноров, развитой в предыдущей работе.

§ 1. Вывод наиболее общей функции Гамильтона и получающихся из нее обобщенных уравнений Дирака для полувекторов.

§§ 2—6. Последовательное преобразование этих уравнений к каноническому виду, содержащему только три произвольные постоянные.

§ 4. Получение волн де Бройля, соответствующих уравнениям Дирака для покоящихся частиц, и отвечающих им плотностей тока.

§ 7. Сводка результатов и замечание об их физическом содержании.

### Введение<sup>1</sup>. Краткий обзор теории полувекторов и полутензоров<sup>2</sup>

В этой работе приводятся необходимые сведения из теории полувекторов в той степени, в какой это необходимо читателям для понимания. В соответствии с объемом настоящей работы мы ограничиваемся пространством специальной теории относительности. Введя прямоугольные декартовы координаты ( $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = 1$ , остальные  $g_{ik} = 0$ ), мы

\* *Die Diracgleichungen für Semivektoren.* (Mit W. Mayer.) Proc. Acad. Wet. (Amsterdam), 1933, 36, 497—516. (Доложено на заседании 27 мая 1933 г.)

<sup>1</sup> См. A. Einstein, W. Mayer. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1932, 522. (Статья 72.)

<sup>2</sup> Мы с благодарностью отмечаем здесь, что эти исследования мы предприняли по настойчивому требованию Эренфеста дать логически простой и прозрачный анализ спиноров.

определим тензоры  $c_{\sigma\tau}$ , где  $\sigma$  и  $\tau = 1 \dots 4$ , вида

$$c_{\sigma\tau} = c g_{\sigma\tau} + v_{\sigma\tau}, \quad (1)$$

причем антисимметричные  $v_{\sigma\tau}$  удовлетворяют определяющему соотношению ( $v$ -уравнению)<sup>3</sup>

$$v_{\sigma\tau} = -\frac{1}{2} \sqrt{g} \eta_{\sigma\tau\mu\nu} v^{\mu\nu}, \quad g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (1')$$

Так как  $\sqrt{g} = i$ , то в соответствии с соотношением (1') величины  $v_{\sigma\tau}$  являются комплексными тензорами и, как показывает далее (1'), полностью определяются своими тремя компонентами (например,  $v_{12}$ ,  $v_{13}$ ,  $v_{14}$ ). Самые общие тензоры  $c_{\sigma\tau}$ , определенные соотношением (1), содержат четыре комплексных постоянных.

Поскольку величины  $c_{\sigma\tau}$  комплексные, то кроме них существуют сопряженные величины  $\bar{c}_{\sigma\tau}$ , которые, однако, отличаются от величин  $c_{\sigma\tau}$ , так как в соответствии с (1')  $\bar{v}_{\sigma\tau}$  удовлетворяют соотношению

$$\bar{v}_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \eta_{\sigma\tau\mu\nu} \bar{v}^{\mu\nu} (\sqrt{g} = -\sqrt{g}). \quad (1'')$$

Для двух заданных величин  $c$  ( $c_{\sigma\tau}$  и  $\bar{c}_{\sigma\tau}$ ) существует фундаментальное правило перестановки:

$$c_{\sigma\tau} \bar{c}_{\rho}^{\tau'} = \bar{c}_{\sigma\tau} c_{\rho}^{\tau'}. \quad (2)$$

Однако соотношение (2) является еще более содержательным. Если  $\bar{c}_{\sigma\tau} = \bar{c}' g_{\sigma\tau} + \bar{v}_{\sigma\tau}$  есть самый общий  $\bar{c}$ -тензор, то совокупность тензоров  $c_{\sigma\tau}$ , для которых выполняется соотношение (2) и которые, следовательно, удовлетворяют правилу перестановки относительно любого  $c$ -тензора, совпадает с совокупностью только таких тензоров.

Но отсюда следует, что произведение  $c_{\sigma\tau} \bar{c}_{\rho}^{\tau'}$  двух  $c$ -тензоров ( $c_{\sigma\tau}$ ,  $\bar{c}_{\rho}^{\tau'}$ ) снова есть  $c$ -тензор. Из соотношения (1) видно, что наряду с  $c_{\sigma\tau}$   $c$ -тензором является также  $\bar{c}_{\sigma\tau} = c_{\tau\sigma}$ . Таким образом, вместе с  $c_{\sigma\tau}$   $c$ -тензором будут также величины  $c_{\sigma\tau} \bar{c}_{\rho}^{\sigma}$ , и вследствие симметрии их по  $\tau$  и  $\rho$  должно вы-

<sup>3</sup> Тензор  $\eta_{\sigma\tau\mu\nu}$  антисимметричен по всем индексам и  $\eta_{1234} = 1$ .  $T_{\sigma\tau\mu\nu} = \sqrt{g} \eta_{\sigma\tau\mu\nu}$  и  $T^{\sigma\tau\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \eta_{\sigma\tau\mu\nu}$  обладают тензорным характером.



полняться, в соответствии с (1), равенство

$$c_{\sigma\tau} c_{\rho}^{\sigma} = \Phi g_{\tau\rho}.$$

Производя суммирование ( $\tau = \rho$ ) и определяя  $\Phi$ , получаем важную формулу

$$c_{\sigma\tau} c_{\rho}^{\sigma} = \left(\frac{1}{4} c_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta}\right) g_{\tau\rho}. \quad (3)$$

Если  $|c_{\sigma\tau}| = \Delta$  означает определитель  $c_{\sigma\tau}$ , то формула (3) дает

$$\Delta^2 = \left(\frac{1}{4} c_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta}\right)^4. \quad (4)$$

Таким образом, обращение в нуль определителя  $|c_{\alpha\beta}|$ , соответствующее «вырождению  $c_{\alpha\beta}$ », характеризуется также условием  $c_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta} = 0^4$ .

Если смотреть на величины  $c_{\alpha\beta}$  как на комплексную матрицу преобразования, то в соответствии с формулой (3) они представляют собой вращение с одновременным растяжением<sup>5</sup>. Это приводит нас к следующему правилу составления «произведения»:

$$a_{\sigma\rho} = c_{\sigma\tau} \bar{c}_{\rho}^{\tau}. \quad (5)$$

В силу соотношения (2) величины  $a_{\sigma\rho}$  вещественны ( $\bar{a}_{\sigma\rho} = a_{\rho\sigma}$ ); полагая далее  $c_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta} = 4\Phi$ , мы сразу получаем из (2), (3) и (5)

$$a_{\alpha\mu} a_{\nu}^{\sigma} = \bar{\Phi} g_{\mu\nu}. \quad (5')$$

Величины  $a_{\sigma\rho}$ , рассматриваемые как матрица преобразования, определяют вещественное лоренцово вращение с одновременным растяжением. Если  $\Phi = 1$ , то  $c_{\sigma\tau}$  определяют комплексное и  $a_{\sigma\tau}$  — вещественное лоренцово вращение. Можно также доказать, что, наоборот, всякое вещественное лоренцово вращение  $a_{\sigma\rho}$ , если оно может быть получено из инвариантности величин  $g_{\sigma\tau}$  при вещественном бесконечно малом вращении (тогда мы будем называть его собственным вращением), имеет представление (5). С точностью до тривиального [наряду с (5)] равенства  $a_{\sigma\rho} = (-c_{\sigma\tau})(-\bar{c}_{\rho}^{\tau})$ , это представление единственное, если  $c_{\sigma\tau}$  также определяют лоренцово вращение.

<sup>4</sup> Точное соотношение между  $\Delta$  и  $c_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta}$  имеет вид

$$\Delta = - \left(\frac{1}{4} c_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta}\right)^2. \quad (4')$$

<sup>5</sup> Мы будем говорить тогда кратко об «обобщенном» преобразовании Лоренца.

Между элементами  $a_{\sigma\tau}$  группы собственных лоренцовых вращений и элементами лоренцовых вращений  $c_{\alpha\beta}$  ( $c_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta} = 4$ ) существует поэтому сопоставление  $a_{\sigma\tau} \rightleftharpoons c_{\sigma\tau}$ , определяемое соотношением (5).

Но такое сопоставление, как опять видно из (2), есть изоморфизм; это является математической основой для введения полувекторов и полутензоров.

Если мы произведем преобразование Лоренца над декартовыми координатами

$$x'_i = a_i^k x_k, \quad (6)$$

то полувектор «первого рода»  $\rho_{\bar{\alpha}}$  по определению преобразуется по закону<sup>6</sup>

$$\rho'_{\bar{\alpha}} = \bar{c}_{\bar{\alpha}}^{\beta} \rho_{\bar{\beta}}, \quad (6')$$

а полувектор «второго рода»  $\sigma_{\bar{\alpha}}$  по закону

$$\sigma'_{\bar{\alpha}} = c_{\bar{\alpha}}^{\beta} \sigma_{\bar{\beta}}. \quad (6'')$$

При этом между  $a_i^k$  и преобразованием Лоренца  $c_{\bar{\alpha}}^{\beta}$  существует соотношение (5).

Сопряженной величиной для полувектора одного рода, по определению, является полувектор другого рода.

Если  $C_{\sigma\tau}$  есть некоторый  $c$ -тензор и  $c_{\sigma\tau}$  — лоренцов  $c$ -тензор ( $c_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta} = 4$ ), то в соответствии с формулой (3) из равенства

$$C_{\sigma\tau} \bar{c}_{\rho}^{\tau} = \bar{c}_{\sigma\tau} C_{\rho}^{\tau} \quad (2')$$

после умножения на  $\bar{c}_v^{\beta}$  следует

$$C_{\sigma\nu} = \bar{c}_{\sigma}^{\tau} \bar{c}_v^{\rho} C_{\tau\rho}. \quad (7)$$

Сравнение с (6') показывает, что всякая величина  $c_{\sigma\tau}$ , рассматриваемая как полутензор первого рода, численно инвариантна. Пользуясь нашими обозначениями полуиндексов, мы можем также сказать кратко: величины  $C_{\bar{\tau}\bar{\alpha}}$  — численные инварианты.

В частности, это относится к величинам  $g_{\bar{\sigma}\bar{\tau}}$  ( $c_{\sigma\tau}$ , матрица преобразования полувектора есть матрица лоренцова преобразования).

<sup>6</sup> Индекс (греческий) с одной чертой характеризует полувеличину первого рода, индекс с двумя чертами — полувеличину второго рода.

Там, где характер индекса сохраняется (как пространственного индекса или полуиндекса первого или второго рода), черту (две черты) над соответствующим индексом дальше мы будем опускать.

Так же доказывается, что  $C_{\sigma\tau}^{\bar{\sigma}\bar{\tau}}$  и, в частности  $g_{\sigma\tau}^{\bar{\sigma}\bar{\tau}}$ , инвариантны. («Поднятие» и «опускание» полуиндексов производится с помощью метрического тензора  $g_{\sigma\tau} = g_{\bar{\sigma}\bar{\tau}} = g_{\sigma\tau}^{\bar{\sigma}\bar{\tau}}$  пространства  $R_4$ .)

Кроме этих численно инвариантных тензоров второго ранга выступают в качестве простейшего такого же тензора фундаментальный  $E$ -тензор третьего ранга,  $E^{r\bar{\sigma}\bar{\tau}}$ , зависящий от четырех постоянных  $a_{(t)}$ .

Он имеет вид

$$E_{r\bar{s}\bar{t}} = g_{rs} a_{(t)} + g_{rt} a_{(s)} - g_{st} a_{(r)} - \sqrt{g} \eta_{rstw} a^{(w)}, \quad a^w = g^{wt} a_{(t)}. \quad (8)$$

Если величины  $a_{(t)}$  вещественны, то формула (8) дает

$$\bar{E}_{r\bar{s}\bar{t}} = E_{r\bar{t}\bar{s}} \quad (\text{вещественные } a_{(t)}). \quad (9)$$

В настоящей работе исследуется самая общая система линейных уравнений первого порядка для двух полувекторов  $\psi_{\bar{\sigma}}$  и  $\chi_{\bar{\sigma}}$ :

$$\left. \begin{aligned} E^{r\bar{\sigma}\bar{\rho}} (\chi_{\bar{\rho},r} - i\varepsilon \chi_{\bar{\rho}} \Phi_r) &= c^{\bar{\sigma}\bar{\rho}} \psi_{\bar{\rho}}, \\ E^{*r\bar{\sigma}\bar{\rho}} (\psi_{\bar{\sigma},r} - i\varepsilon \psi_{\bar{\sigma}} \Phi_r) &= -c^{\bar{\sigma}\bar{\rho}} \chi_{\bar{\rho}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(Здесь  $E$  имеет постоянные  $a_{(t)}$ ,  $E^*$  — постоянные  $a_{(t)}^*$ .) Эта система получается варьированием самой общей возможной функции Гамильтона (§ 1). В уравнениях (10)  $\Phi_r$  означает векторный потенциал электромагнитного поля.

## § 1. Функция Гамильтона и уравнения поля

Гамильтониан полного поля имеет вид

$$H = H_1 + H_2 + H_3,$$

где  $H_1$  означает скаляр метрической кривизны,  $H_2$  — скаляр электромагнитного поля ( $\Phi_{\alpha\beta} \Phi^{\alpha\beta}$ ) и  $H_3$  — искомый нами скаляр, зависящий от электромагнитного векторного потенциала  $\Phi_r$  и двух полувекторов  $\psi_{\bar{\sigma}}$  и  $\chi_{\bar{\sigma}}$ . При этом скаляр  $H_3$  довольно жестко определяется следующими условиями.

а) Он должен быть вещественным.

б) Он должен содержать названные величины таким образом, чтобы результирующая система уравнений была по отношению к полувеличинам линейной и первого порядка, а также существенно определяла только антисимметричные производные  $\Phi_r$  ( $\Phi$ -условие).

Эти два условия приводят сначала к следующей форме  $H_3$ , причем мы пока ограничимся специальной теорией относительности. (Это ограниче-

ние, в соответствии с результатами нашей прежней работы, несущественно, поскольку там было показано, как надо составлять общековариантные выражения.) Если  $A, B$  — вещественные постоянные, то

$$H_3 = E_{\sigma\tau}^i (\psi_{,i}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_i) \bar{\psi}^\tau + \bar{E}_{\sigma\tau}^i (\bar{\psi}_{,i}^\sigma + i\varepsilon\bar{\psi}^\sigma\varphi_i) \psi^\tau + \left. \begin{aligned} &+ iA [E_{\sigma\tau}^i (\psi_{,i}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_i) \bar{\psi}^\tau - \bar{E}_{\sigma\tau}^i (\bar{\psi}_{,i}^\sigma + i\varepsilon\bar{\psi}^\sigma\varphi_i) \psi^\tau] + \\ &+ E_{\sigma\tau}^{i*} (\bar{\chi}_{,i}^\sigma + i\varepsilon\bar{\chi}^\sigma\varphi_i) \chi^\tau + \bar{E}_{\sigma\tau}^{i*} (\chi_{,i}^\sigma - i\varepsilon\chi^\sigma\varphi_i) \bar{\chi}^\tau + \\ &+ iB [E_{\sigma\tau}^{i*} (\bar{\chi}_{,i}^\sigma + i\varepsilon\bar{\chi}^\sigma\varphi_i) \chi^\tau - \bar{E}_{\sigma\tau}^{i*} (\chi_{,i}^\sigma - i\varepsilon\chi^\sigma\varphi_i) \bar{\chi}^\tau] + \\ &+ C_{\sigma\tau} \psi^\sigma \bar{\chi}^\tau + \bar{C}_{\sigma\tau} \bar{\psi}^\sigma \chi^\tau. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При этом важно отметить, что «ф-условие» (инвариантность  $H_3$  относительно поочередной замены  $\varphi, \psi^\sigma, \chi^\sigma$  на  $\varphi + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}, \psi^\sigma e^{i\alpha}, \chi^\sigma e^{i\alpha}$ ) позволяет ввести только *одну-единственную* постоянную  $\varepsilon$ .

Если  $a_{(t)} = \alpha_t + i\beta_t$  и  $a_{(t)}^* = \alpha_t^* + i\beta_t^*$  означают систему постоянных в  $E$  и  $E^*$  соответственно, то выполняются равенства

$$E_{\sigma\tau}^i = E_{\sigma\tau}^i(\alpha) + iE_{\sigma\tau}^i(\beta) \quad \text{и} \quad \bar{E}_{\sigma\tau}^i = E_{\tau\sigma}^i(\alpha) - iE_{\tau\sigma}^i(\beta).$$

Тогда две первые строки соотношения (1) принимают вид:

$$\begin{aligned} &E_{\sigma\tau}^i(\alpha) (\psi_{,i}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_i) \bar{\psi}^\tau + E_{\tau\sigma}^i(\alpha) (\bar{\psi}_{,i}^\sigma + E\bar{\psi}^\sigma\varphi_i) \psi^\tau + \\ &+ [E_{\sigma\tau}^i(\beta) (\psi_{,i}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_i) \bar{\psi}^\tau - E_{\tau\sigma}^i(\beta) (\bar{\psi}_{,i}^\sigma + i\varepsilon\bar{\psi}^\sigma\varphi_i) \psi^\tau] i + \\ &+ iA [E_{\sigma\tau}^i(\alpha) (\psi_{,i}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_i) \bar{\psi}^\tau - E_{\tau\sigma}^i(\alpha) (\bar{\psi}_{,i}^\sigma + i\varepsilon\bar{\psi}^\sigma\varphi_i) \psi^\tau] - \\ &- A [E_{\sigma\tau}^i(\beta) (\psi_{,i}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_i) \bar{\psi}^\tau + E_{\tau\sigma}^i(\beta) (\bar{\psi}_{,i}^\sigma + i\varepsilon\bar{\psi}^\sigma\varphi_i) \psi^\tau]. \end{aligned}$$

Первая и последняя строки при вариации не дают ничего, а потому могут быть отброшены, но две другие строки, если положить

$$\gamma_t = \beta_t + A\alpha_t,$$

дают

$$i [E_{\sigma\tau}^i(\gamma) (\psi_{,i}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_i) \bar{\psi}^\tau - E_{\sigma\tau}^i(\psi_{,i}^\sigma + i\varepsilon\bar{\psi}^\sigma\varphi_i) \bar{\psi}^\sigma].$$

Значит, без ограничения общности, вместо выражения (1) в качестве дополнительного гамильтониана (с точностью до множителя  $i$ ) можем взять

$$\left. \begin{aligned} &E_{\sigma\tau}^i (\psi_{,i}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_i) \bar{\psi}^\tau - E_{\sigma\tau}^i \psi^\sigma (\bar{\psi}_{,i}^\tau + i\varepsilon\bar{\psi}^\tau\varphi_i) - E_{\sigma\tau}^{i*} (\bar{\chi}_{,i}^\sigma + i\varepsilon\bar{\chi}^\sigma\varphi_i) \chi^\tau + \\ &+ E_{\sigma\tau}^{i*} \chi^\sigma (\chi_{,i}^\tau - i\varepsilon\chi^\tau\varphi_i) + C_{\sigma\tau} \psi^\sigma \bar{\chi}^\tau - \bar{C}_{\sigma\tau} \bar{\psi}^\sigma \chi^\tau, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где постоянные в  $E$  и  $E^*$  теперь вещественны. Ниже они опять будут обозначаться буквами  $a$  и  $a^*$ . Варьируя функцию (2) по  $\psi$  и  $\chi$ ,

мы получаем «уравнения Дирака»<sup>7</sup>

$$\left. \begin{aligned} E_{\sigma\tau}^i (\psi_{\sigma,i}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_i) &= + \bar{C}_{\tau\sigma} \chi^\sigma, \\ E_{\sigma\tau}^{i*} (\chi_{\sigma,i}^\tau - i\varepsilon\chi^\tau\varphi_i) &= - C_{\tau\sigma} \psi^\tau. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Вектор тока получается из выражения (2) варьированием по  $\varphi_i$  и имеет вид

$$J^i = E_{\sigma\tau}^i \psi^\sigma \bar{\psi}^\tau + E_{\sigma\tau}^{i*} \bar{\chi}^\sigma \chi^\tau. \quad (4)$$

Как следствие из системы уравнений (3) должно выполняться равенство

$$J_{,i}^i = 0. \quad (5)$$

### § 2. Уравнения Дирака

Система уравнений (3) § 1

$$\left. \begin{aligned} E^{\sigma\tau} (\psi_{\sigma,r} - i\varepsilon\psi_\sigma\varphi_r) &= \bar{C}^{\tau\rho} \chi_\rho, \\ E^{\tau\sigma*} (\chi_{\tau,r} - i\varepsilon\chi_\tau\varphi_r) &= - C^{\rho\sigma} \psi_\rho, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

наряду с постоянной  $\varepsilon$  имеет 8 вещественных постоянных  $a_i$ ,  $a_i^*$  в  $E$  и еще четыре комплексных постоянных ( $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{14}$ ), определяющих величины  $C^{\rho\sigma}$  в правой части. Всего, кроме  $\varepsilon$ , получается 16 вещественных постоянных.

Но это число постоянных можно значительно уменьшить, заменяя величины  $\chi_\tau$  на величины  $\underline{\chi}_\nu$  с помощью невырожденного  $\bar{c}_\tau^\nu$ -преобразования

$$\chi_\tau = \bar{c}_\tau^\nu \underline{\chi}_\nu, \quad (2)$$

и величины  $\psi_\sigma$  на величины  $\underline{\psi}_\mu$  с помощью невырожденного  $\bar{c}_\tau^{\mu}$ -преобразования

$$\psi_\sigma = c_\sigma^{\mu} \underline{\psi}_\mu. \quad (3)$$

Из функции Гамильтона (2) § 1 видно, что при этом  $E$  переходит в  $\underline{E}$ :

$$\underline{E}_{\mu\nu}^i = E_{\sigma\tau}^i c_\mu^\sigma \bar{c}_\nu^{\tau} \quad (4)$$

и  $E^*$  — в  $\underline{E}^*$ :

$$\underline{E}_{\mu\nu}^{i*} = E_{\sigma\tau}^{i*} c_\mu^\sigma \bar{c}_\nu^{\tau}. \quad (4')$$

<sup>7</sup> В этих уравнениях существенно появление инвариантных относительно преобразования множителей  $C$  в правой части.

<sup>8</sup> Разумеется,  $\underline{E}$  также является инвариантом, т. е. величиной, однотипной величине  $E$ .

Какие преобразования величин  $a$  в  $\tilde{a}$  и  $a^*$  в  $\tilde{a}^*$  соответствуют преобразованиям  $E$  (4) или (4')?

Подставляя в соотношение

$$E_{\mu}^{i\tau'} = E^{i\sigma\tau} c_{\mu\sigma} \quad (5)$$

поочередно значения 1, 1, 1; 2, 2, 2; 3, 3, 3 и 4, 4, 4 для  $i, \mu, \tau$ , мы сразу получаем

$$a'_i = c_{ik} a^k, \quad (5')$$

где  $a, a'$  — значения постоянных в  $E, E'$ . Совершенно аналогично из соотношения

$$E_{\nu}^{i\sigma'} = E^{i\sigma\tau'} \bar{c}_{\nu\tau} \quad (6)$$

следует соотношение

$$a''_i = \bar{c}_{ik} a^{k'}. \quad (6')$$

Тем самым выполняется уравнение

$$E_{\sigma\nu}^i = E^{i\mu\tau} c_{\sigma\mu} \bar{c}_{\nu\tau} \quad (7)$$

вместе с соотношением

$$a''_i = \bar{c}_{ik} c_j^k a^j. \quad (7')$$

Таким образом, преобразование (7) с учетом постоянных  $a$  в  $E$  порождает «обобщенное» вещественное преобразование Лоренца.

Поэтому, говоря о «псевдовекторе» ( $a_i$ ) вместо системы четырех постоянных ( $a_i$ ), мы имеем в виду это обстоятельство.

Таким же образом, по-видимому, целесообразно говорить о пространственно-подобных и временно-подобных  $E^{i\sigma\tau}$ , причем тензор  $E$  можно называть пространственно-подобным или временно-подобным, если псевдовектор ( $a_i$ ) является соответственно пространственно-подобным или временно-подобным. Мы говорим также о вырожденном тензоре  $E$ , когда соответствующий псевдовектор является нулевым вектором ( $a_i a^i = 0$ ). Так как в соотношении (7') мы имеем дело с собственным (обобщенным) преобразованием Лоренца, то с помощью  $c_{\sigma\mu}$ -преобразования (7) мы можем привести пространственно-подобный тензор  $E$  к виду  $E^{i\sigma\tau}(1, 0, 0, 0)^9$  ( $a^i = \delta_1^i$ ) и временно-подобный тензор  $E$  — к виду  $E^{i\sigma\tau}(0, 0, 0, 1)$  или  $E^{i\sigma\tau}(0, 0, 0, -1) = -E^{i\sigma\tau}(0, 0, 0, 1)$  ( $a^i = \delta_4^i$ ). Вырожденный тензор  $E$  в этой работе мы не рассматриваем.

<sup>9</sup> Обозначение  $E^{i\sigma\tau}(a^1, a^2, a^3, a^4)$  подразумевает, что в скобках указываются значения «контравариантных»  $a^i$

Таким образом, следует различать три главных случая.

I.  $E$  и  $E^*$  в выражении (2), § 1 пространственно-подобны;

II.  $E$  и  $E^*$  в выражении (2), § 1 временно-подобны;

III.  $E$  — пространственно-подобен,  $E^*$  — временно-подобен.

Мы рассматриваем в работе подробно случай (I), а при аналогичных исследованиях случаев (II) и (III) в соответствующем месте скажем, почему они, по нашему мнению, не встречаются в физических задачах.

### § 3. Главный случай: $E$ и $E^*$ пространственно-подобны. Первое приведение

Система уравнений (1) § 2 теперь выглядит так:

$$E^{r\sigma\tau} (\psi_{\sigma, r} - i\varepsilon\psi_{\sigma}\varphi_r) = \bar{C}^{\tau\rho}\chi_{\rho}, \quad (1)$$

$$E^{r\sigma\tau} (\chi_{\tau, r} - i\varepsilon\chi_{\tau}\varphi_r) = -C^{\rho\sigma}\psi_{\rho},$$

причем обе величины  $E$  равны  $E(1, 0, 0, 0)$ , и эта система содержит кроме постоянной  $\varepsilon$  еще только четыре независимых комплексных постоянных ( $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}$ ).

Преобразование  $\psi_{\sigma}$  в  $\tilde{\psi}_{\sigma}$

$$\tilde{\psi}_{\sigma} = c_{\sigma}^{\mu}\psi_{\mu}, \quad (2)$$

как сразу видно из уравнений (1) или из функции Гамильтона (2), § 1, дает для первого тензора  $E^{r\sigma\tau}$  в (1) и, соответственно, для  $C^{\rho\sigma}$  новые значения

$$\tilde{E}_{\mu\nu}^{\tau} = E_{\sigma\tau}^r c_{\mu}^{\sigma} \bar{c}_{\nu}^{\tau}, \quad (3)$$

$$\tilde{C}_{\mu\tau} = C_{\sigma\tau} C_{\mu}^{\sigma}, \quad (3')$$

тогда как тензор  $E^{r\sigma\tau}$  во втором уравнении системы (1) остается неизменным.

Новые значения  $\underline{a}$  в  $\tilde{E}$  получаются из соотношения (3) по формулам (7) и (7') § 2:

$$\underline{a}^r = c_j^k \bar{c}_k^r a^j. \quad (4)$$

Теперь, не отказываясь от общей формы уравнений (1) с  $E(1, 0, 0, 0)$ , мы можем применить для дальнейшего приведения постоянных те обобщенные преобразования Лоренца  $c_j^k$ , которые преобразуют  $\underline{a}^j(1, 0, 0, 0)$  в  $a^j(\pm 1, 0, 0, 0)$ .

Наше требование для  $c_j^k$  приводит к уравнениям  $\underline{a}^r = c_{jk} \bar{c}^{kr} a^j$ :

$$\left. \begin{aligned} \pm 1 &= c_{11} \bar{c}^{11} + c_{12} \bar{c}^{21} + c_{13} \bar{c}^{31} + c_{14} \bar{c}^{41} \\ 0 &= c_{11} \bar{c}^{12} + c_{12} \bar{c}^{22} + c_{13} \bar{c}^{32} + c_{14} \bar{c}^{42}, \\ 0 &= c_{11} \bar{c}^{13} + c_{12} \bar{c}^{23} + c_{13} \bar{c}^{33} + c_{14} \bar{c}^{43}, \\ 0 &= c_{11} \bar{c}^{14} + c_{12} \bar{c}^{24} + c_{13} \bar{c}^{34} + c_{14} \bar{c}^{44}. \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

Выразим  $c_{ik}$  в этой системе через следующие четыре величины

$$c_{11} = a, \quad c_{23} = b, \quad c_{34} = c, \quad c_{42} = d. \quad (5)$$

Тогда вследствие свойств симметрии  $c^{ik}$  имеем

$$c_{12} = ic, \quad c_{13} = id, \quad c_{14} = -ib, \quad c_{22} = c_{33} = -c_{44} = a. \quad (5')$$

Подставляя значения (5) и (5') в уравнения (4), получаем

$$\pm 1 = a\bar{a} + b\bar{b} - c\bar{c} - d\bar{d}, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= a\bar{c} - c\bar{a} - b\bar{d} + d\bar{b}, \\ 0 &= a\bar{d} - d\bar{a} - c\bar{b} + b\bar{c}, \\ 0 &= a\bar{b} - b\bar{a} + d\bar{c} - c\bar{d}. \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

Обсудим сначала систему уравнений (6'). Если

$$a : b \neq \bar{a} : \bar{b}, \quad (7)$$

то комплексные числа  $c$  и  $d$  можно выразить через  $a$  и  $b$

$$c = pa + qb, \quad d = ra + sb; \quad p, q, r, s \text{ — вещественны.} \quad (8)$$

Тогда система (6') дает

$$q + r = 0, \quad s - p = 0, \quad 1 + rq - sp = 0 \quad (9)$$

и, значит,

$$1 - r^2 - s^2 = 0. \quad (9')$$

Следовательно, можно положить  $r = \cos\alpha$ ,  $s = \sin\alpha$ ,  $p = \sin\alpha$ ,  $q = -\cos\alpha$  и, в соответствии с этим,

$$c = a\sin\alpha - b\cos\alpha, \quad d = a\cos\alpha + b\sin\alpha. \quad (10)$$



Из равенств (10), в противоречие с уравнением (6), следует

$$a\bar{a} + b\bar{b} - c\bar{c} - d\bar{d} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, с необходимостью имеем:

$$\frac{a}{b} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \lambda,$$

где  $\lambda$ , конечно, вещественная величина. Поэтому из последнего уравнения (6') следует

$$\frac{c}{d} = \frac{\bar{c}}{\bar{d}} = \mu$$

с вещественным  $\mu$ . Тогда два первых уравнения (6') сводятся к  $(\mu\lambda - 1) \times (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0$  и  $(\lambda + \mu)(b\bar{d} - \bar{b}d) = 0$ ; так как равенства  $\mu\lambda = 1$  и  $\mu = -\lambda$  одновременно не могут выполняться, то должно быть

$$\frac{b}{d} = \frac{\bar{b}}{\bar{d}}.$$

В соответствии с этим единственным решением уравнений (6') будет

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = \frac{d}{d}. \quad (12)$$

Комплексные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  в соответствии с (12) должны быть расположены на одном луче в комплексной плоскости Гаусса. Направление этого луча в соответствии с уравнением (6) остается произвольным.

Рассмотрим далее такие  $c_{\tau\nu}$ , для которых  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  вещественны:

$$c_{11}, c_{23}, c_{34}, c_{42} \text{ — вещественны.} \quad (13)$$

Но для каждой величины  $c_{\tau\nu}$ , удовлетворяющей условию (13), а, значит, и системе (6'), уравнение (6) дает

$$\pm 1 = c_{11}c^{11} + c_{23}c^{23} + c_{34}c^{34} + c_{42}c^{42} = \frac{1}{4} c_{\alpha\beta}c^{\alpha\beta}. \quad (13')$$

Следовательно, такие величины  $c_{\sigma\tau}$ , сами по себе или умноженные на  $i$ , определяют комплексное преобразование Лоренца.

Теперь справедливы две следующие теоремы:

I. Если  $c_{\tau k}$  и  $c_{\tau k}$  — две величины  $c$ , удовлетворяющие условию (13), то и их произведение  $c_{\tau k} c_{\tau}^k$  тоже будет такой величиной  $c$ .

II. Каждая величина  $C_{\tau\rho}$  имеет однозначное разложение

$$C_{\tau\rho} = C_{\tau\rho} + iC_{\tau\rho}, \quad (14)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  удовлетворяют условию (13).

Подставляя теперь в соотношение (2)  $c_{\tau}^{\mu} = \delta_{\tau}^{\mu} e^{i\alpha}$ , мы не изменяем  $E$  в (3), а только умножаем  $c^{\rho\tau}$  на  $e^{i\alpha}$  в (3'). Это значит, что в системе уравнений (1)  $C^{\rho\tau}$  можно заменить на  $C^{\rho\tau} e^{i\alpha}$ . Если формула (14) дает разложение  $C_{\tau\rho}$  правой части уравнения (1) на  $C_1$  и  $C_2$ , обладающее свойством (13), то аналогичное разложение для  $\underline{C}_{\tau\rho}$  будет иметь вид:

$$\underline{C}_{\tau\rho} = C_{\tau\rho} e^{i\alpha} = (C_{1\tau\rho} \cos \alpha - C_{2\tau\rho} \sin \alpha) + i(C_{1\tau\rho} \sin \alpha + C_{2\tau\rho} \cos \alpha). \quad (14')$$

Таким образом,

$$\underline{C}_{1\tau\rho} = C_{1\tau\rho} \cos \alpha - C_{2\tau\rho} \sin \alpha. \quad (15)$$

Если теперь при любом выборе  $\alpha$  величины  $\underline{C}_1$  вырождены, т. е. всегда выполняется равенство

$$\underline{C}_{1\tau\rho} \underline{C}_1^{\tau\rho} = 0, \quad (16)$$

то с необходимостью выполняются также равенства

$$C_{1\tau\rho} C_1^{\tau\rho} = C_{2\tau\rho} C_2^{\tau\rho} = C_{1\tau\rho} C_2^{\tau\rho} = 0. \quad (17)$$

Но тогда, в соответствии с соотношением (14), величины  $C_{\tau\rho}$  также будут вырожденными.

Следовательно, предполагая, что величины  $C_{\tau\rho}$  невырождены:

$$C_{\tau\rho} C^{\tau\rho} \neq 0, \quad (18)$$

мы знаем, что (возможно, при разрешенных изменениях  $C_{\tau\rho}$ ) величины  $C_{1\tau\rho}$  также невырождены. Тогда в соотношениях (2), (3) и (3') можно положить

$$c_{\mu}^{\sigma} = \rho C_{1\mu}^{\sigma}, \quad (19)$$

причем вещественная величина  $\rho$  определяется из уравнения (13'), принимающего вид

$$\pm 4 = \rho^2 C_{1\alpha\beta} C^{\alpha\beta}. \quad (20)$$

В соответствии с (3') и (14) имеем

$$\underline{C}_{\mu\tau} = \rho (C_{1\sigma\tau} + i C_{2\sigma\tau}) C_{1\mu}^{\sigma} = \rho \left[ \pm \frac{1}{\rho^2} g_{\tau\mu} + i C_{2\sigma\tau} C_{1\mu}^{\sigma} \right] = \pm \frac{1}{\rho} g_{\tau\mu} + i C_{3\tau\mu}. \quad (21)$$

В зависимости от того, какой знак берется в уравнении (20) [а, значит, и в (13')], в уравнении (3) воспроизводится  $E$  или же получается  $\underline{E} = -E$ .

Таким образом, благодаря равенствам (21) мы добились того, что в правой части системы уравнений (1) коэффициенты

$$C_{23}, C_{34}, C_{42}$$

стали чисто мнимыми. При этом система (1) либо сохраняет свою форму, либо заменяется на следующую систему

$$\left. \begin{aligned} E^{r\sigma\tau} (\psi_{\sigma, r} - i\varepsilon\psi_{\sigma}\varphi_r) &= \bar{C}^{\tau\rho} \chi_{\rho}, \\ E^{r\sigma\tau} (\chi_{\tau, r} - i\varepsilon\chi_{\tau}\varphi_r) &= C^{\rho\sigma} \psi_{\rho}, \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

с вектором тока

$$I^k = E^{k\sigma\tau} \bar{\chi}_{\sigma} \chi_{\tau} - E^{k\sigma\tau} \psi_{\sigma} \bar{\psi}_{\tau}. \quad (1'')$$

Тем самым главный случай распадается на подслучаи I и I' и, кроме  $\varepsilon$ , в системе остается еще пять постоянных.

Для того чтобы выявить различие между системами уравнений (1) и (1'), мы рассмотрим в следующем параграфе те их решения, которые соответствуют волнам де Бройля покоящихся частиц.

#### § 4. Волны де Бройля для главного случая § 3

Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} E^{r\sigma\tau} (\chi_{\tau, r} - i\varepsilon\chi_{\tau}\varphi_r) &= + C^{\rho\sigma} \psi_{\rho}, \\ E^{r\sigma\tau} (\psi_{\sigma, r} - i\varepsilon\psi_{\sigma}\varphi_r) &= - \bar{C}^{\tau\rho} \chi_{\rho}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

в которой

$$E = E(1, 0, 0, 0)$$

и притом еще

$$b = C^{23}, \quad c = C^{34} \quad \text{и} \quad d = C^{42} \text{ — вещественны.}$$

Этот случай полностью соответствует тому, в котором указанные  $C^{23}$ ,  $C^{34}$ ,  $C^{42}$  являются чисто мнимыми, так как величины  $C$  в уравнении (1) можно умножить на  $e^{i\alpha}$ . Мы проведем более простое вычисление благодаря указанному выше предположению о вещественности.

Затем мы подставим в уравнение (1) волну де Бройля при равном нулю электромагнитном потенциале

$$\chi_{\tau} = \alpha_{\tau} e^{ivx_4}, \quad \psi_{\sigma} = \beta_{\sigma} e^{ivx_4}, \quad (2)$$

и получим

$$\left. \begin{aligned} i\nu\alpha_\tau E^{4\sigma\tau} &= C^{\rho\sigma} \beta_\rho, \\ -i\nu\beta_\sigma E^{4\sigma\tau} &= \bar{C}^{\tau\rho} \alpha_\rho, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

или подробно ( $C^{12} = ic$ ,  $C^{13} = -ia$ ,  $C^{14} = ib$ ,  $C^{11} = C^{22} = C^{33} = -C^{44} = a$ ):

$$\left. \begin{aligned} -i\nu\alpha_4 &= a\beta_1 + ic\beta_2 + id\beta_3 - ib\beta_4, \\ \nu\alpha_3 &= -ic\beta_1 + a\beta_2 - b\beta_3 + d\beta_4, \\ -\nu\alpha_2 &= id\beta_1 + b\beta_2 + a\beta_3 - c\beta_4, \\ -i\nu\alpha_1 &= ib\beta_1 - d\beta_2 + c\beta_3 - a\beta_4, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} i\nu\beta_4 &= \bar{a}\alpha_1 + ic\alpha_2 + id\alpha_3 - ib\alpha_4, \\ \nu\beta_3 &= -ic\alpha_1 + \bar{a}\alpha_2 + b\alpha_3 - d\alpha_4, \\ -\nu\beta_2 &= -id\alpha_1 - b\alpha_2 + \bar{a}\alpha_3 + c\alpha_4, \\ i\nu\beta_1 &= i\beta\alpha_1 + d\alpha_2 - c\alpha_3 - \bar{a}\alpha_4. \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

Исключая  $\alpha_i$ , получаем, наконец,

$$\left. \begin{aligned} (-\nu^2 - a\bar{a} - b^2 + c^2 + d^2)\beta_1 - i(\bar{a} - a)c\beta_2 - i(\bar{a} - a)d\beta_3 - \\ - i(\bar{a} - a)\beta_4 &= 0, \\ i(\bar{a} - a)c\beta_1 + (-\nu^2 - a\bar{a} - b^2 + c^2 + d^2)\beta_2 + (\bar{a} - a)b\beta_3 + \\ + (\bar{a} - a)d\beta_4 &= 0, \\ i(\bar{a} - a)d\beta_1 - (\bar{a} - a)b\beta_2 + (-\nu^2 - a\bar{a} - b^2 + c^2 + d^2)\beta_3 - \\ - (\bar{a} - a)c\beta_4 &= 0, \\ i(\bar{a} - a)b\beta_1 - (\bar{a} - a)d\beta_2 + (\bar{a} - a)c\beta_3 - (-\nu^2 - a\bar{a} - b^2 + \\ + c^2 + d^2)\beta_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Матрицей системы (5), очевидно, является матрица  $c_{\sigma\tau}$ ; значит, ее определитель с точностью до знака равен квадрату  $\frac{1}{4} c_{\sigma\tau} c^{\sigma\tau}$ , или

$$(\nu^2 + a\bar{a} + B^2)^2 + (\bar{a} - a)^2 B^2, \quad B^2 = b^2 - c^2 - d^2. \quad (6)$$

Следовательно, решением системы (5) является невырожденный полу-

вектор<sup>10</sup>  $\beta^\sigma \neq 0$  тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$0 = (v^2 + a\bar{a} + B^2)^2 + (\bar{a} - a)^2 B. \quad (7)$$

Так как  $(\bar{a} - a)^2 < 0$ , то  $B^2 > 0$ . Таким образом, мы получаем условие

$$b^2 > c^2 + d^2. \quad (8)$$

Полагая далее  $a = \alpha + i\beta$ , придадим уравнению (7) вид

$$v^2 + \alpha^2 + \beta^2 + B^2 = \pm 2B\beta \quad (9)$$

и, таким образом, получаем

$$v^2 + \alpha^2 + (\beta \pm B)^2 = 0. \quad (10)$$

Следовательно, в этом случае волн де Бройля не существует.

В случае I', § 3 вместо уравнений (4) появляется система, в которой правая часть второго из уравнений системы (1) меняет знак на противоположный. Одновременно вектор тока имеет вид (1') § 3.

Вычисление показывает, что во второй системе уравнение (3) и в системе (4') изменяются знаки левых частей, что затем снова приводит к системе (5), но с  $-v^2$  вместо  $+v^2$ .

Условие (8) при этом сохраняет силу: тогда как вместо равенства (10) теперь получается

$$v^2 = \alpha^2 + (\beta \pm B)^2. \quad (11)$$

Таким образом, существуют волны де Бройля с двумя численно различными  $v$ , если только  $\beta$  и  $B$  не обращаются в нуль.

Эти результаты позволяют предполагать, что возможно еще одно приведение системы уравнений (1'), так как из пяти оставшихся постоянных, по всей вероятности, только две имеют физический смысл. Нам удалось доказать, что это предположение правильно.

Рассмотрим «каноническое представление» системы (1'), в котором

$$C_{34} = C_{42} = 0,$$

$C_{11}$  — чисто мнимая, а  $C_{23}$  — вещественная величина.

.....

<sup>10</sup> И притом самый общий спин-вектор типа, заданного (при данном  $v$ ) уравнениями (5). При этом спин-вектор определяется как полуторектор  $\beta^\sigma$ , для которого выполняется условие  $c_{\tau\sigma}\beta^\sigma = 0$  (конечно, с невырожденной матрицей  $c_{\tau\sigma}$ ).

Если подставим в уравнения (4)  $c$  и  $d = 0$ , то система (4) распадется на

$$\left. \begin{aligned} -i\nu\alpha_4 &= a\beta_1 - ib\beta_4, \\ -i\nu\alpha_1 &= ib\beta_1 - a\beta_4, \\ \nu\alpha_3 &= a\beta_2 - b\beta_3, \\ -\nu\alpha_2 &= b\beta_2 + a\beta_3, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} -i\nu\beta_4 &= \bar{a}\alpha_1 - ib\alpha_4, \\ -i\nu\beta_1 &= ib\alpha_1 - \bar{a}\alpha_4, \\ -\nu\beta_3 &= \bar{a}\alpha_2 + b\alpha_3, \\ \nu\beta_2 &= -b\alpha_2 + \bar{a}\alpha_3. \end{aligned} \right\} \quad (12')$$

При этом знаки в системе (12') изменены в соответствии с системой (1') § 3. Исключая  $\alpha$ , мы получаем отсюда

$$\left. \begin{aligned} (\nu^2 - a\bar{a} - b^2)\beta_1 + i(\bar{a} - a)b\beta_4 &= 0, \\ i(\bar{a} - a)b\beta_1 + (\nu^2 - a\bar{a} - b)\beta_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} (\nu^2 - a\bar{a} - b^2)\beta_2 + (\bar{a} - a)b\beta_3 &= 0, \\ -(\bar{a} - a)b\beta_2 + (\nu^2 - a\bar{a} - b^2)\beta_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13')$$

Существуют два корня  $\nu^2$ , для которых выполняется условие<sup>11</sup>

$$\nu^2 - a\bar{a} - b^2 = \pm i(\bar{a} - a)b. \quad (14)$$

Вместе с (13) это дает  $\beta_1 \pm \beta_4 = 0$ ,  $i\beta_2 \pm \beta_3 = 0$  и

$$\beta_4 = \mp \beta_1, \quad \beta_3 = \mp i\beta_2. \quad (15)$$

Тогда из уравнений (12) мы получаем

$$\left. \begin{aligned} -i\nu\alpha_1 &= (ib \pm a)\beta_1, \\ -i\nu\alpha_4 &= (a \pm ib)\beta_1, \\ \nu\alpha_3 &= (a \pm ib)\beta_2, \\ -\nu\alpha_2 &= (b \mp ia)\beta_2, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

и, значит,

$$\alpha_4 = \pm \alpha_1, \quad \alpha_3 = \mp i\alpha_2. \quad (16')$$

Для плотности тока

$$I^4 = E^{4\sigma\tau} \bar{\alpha}_\sigma \alpha_\tau - E^{4\sigma\tau} \bar{\beta}_\sigma \beta_\tau$$

<sup>11</sup> В дальнейшем оба случая будут рассматриваться совместно, и там, где оба знака стоят один над другим, верхний знак относится к первому, а нижний — ко второму из корней ( $\nu_1$  или  $\nu_2$ ).

после некоторых вычислений мы получаем

$$I^4 = \mp 4 (\bar{\beta}_2 \beta_2 + \beta_1 \bar{\beta}_1). \quad (17)$$

Таким образом, мы получили важный результат, что плотности электрических зарядов, соответствующие двум  $\nu$ , имеют противоположные знаки. Соответственно этому, двум весомым массам (в обычной интерпретации) сопоставляются электрические заряды противоположного знака. Теперь уместно рассказать о двух других главных случаях II и III § 2. Главный случай II, в котором также имеются две волны де Бройля, с физической точки зрения отпадает потому, что в нем плотность тока всегда имеет один знак; это привело бы к теории электромагнитного поля, в которой плотности электрических зарядов всегда имели бы один знак.

В главном случае III существует только одна волна де Бройля.

### § 5. Дальнейшее приведение уравнения Дирака

Пока мы добились того, чтобы правые части уравнений Дирака содержали величины  $C_{\sigma\tau}$  в форме

$$C_{23}, C_{34}, C_{42} \text{ — чисто мнимые.}$$

При этом в величины  $E$  в левых частях в качестве постоянных входят значения  $a^i = \delta_i^i$ .

В этом параграфе будет показано, что, кроме того, величину  $C_{11}$  можно сделать вещественной.

В соответствии с рассуждениями § 3 мы воспользуемся одной величиной  $c^{\sigma\tau}$ , в которой с точностью до общего множителя  $e^{i\alpha}$  компоненты (1,1), (2,3), (3,4) и (4,2) вещественны.

$$\left. \begin{aligned} c^{\sigma\tau} &= c^{\sigma\tau} e^{i\alpha}, \\ c_{11}, c_{23}, c_{34}, c_{42} &\text{ — вещественны.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В соответствии с соотношением (3') § 3 имеем

$$\underline{c}_{\mu\tau} = C_{\sigma\tau} c_{\mu}^{\sigma} = C_{\sigma\tau} c_{\mu}^{\sigma} e^{i\alpha}. \quad (2)$$

Величины  $C_{\sigma\tau}$  мы запишем в установленном выше виде с вещественным коэффициентом  $A$

$$C_{\sigma\tau} = A g_{\sigma\tau} + i C_{\sigma\tau}, \quad (3)$$

где  $C_{\sigma\tau}$  уже удовлетворяют условиям вещественности:

$$C_{11}, C_{23}, C_{34}, C_{42} \text{ — вещественны.} \quad (4)$$

Для  $\underline{C}_{\tau\mu}$  мы сделаем аналогичное предположение

$$\underline{C}_{\tau\mu} = \underline{A}g_{\tau\mu} + iC_{\tau\mu}, \quad (5)$$

где теперь в дополнение к условию вещественности  $C_{11}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{34}$  и  $C_{42}$  должно еще выполняться равенство

$$C_{11} = 0. \quad (6)$$

Оказывается, что в предположении

$$C_{11} \neq 0, \quad A \neq 0, \quad C_{23}^2 - C_{34}^2 - C_{42}^2 > 0$$

можно найти  $c_{\mu}^{\sigma} e^{i\alpha}$  соответственно уравнениям (2) и (1)

Подставляя величины (3) и (5) в (2), мы получаем

$$\begin{aligned} \underline{A}g_{\tau\mu} + iC_{\mu\tau} &= (Ag_{\sigma\tau} + iC_{\sigma\tau})c_{\mu}^{\sigma} (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \\ &= (Ag_{\sigma\tau} \cos \alpha - C_{\sigma\tau} \sin \alpha)c_{\mu}^{\sigma} + i(Ag_{\sigma\tau} \sin \alpha + C_{\sigma\tau} \cos \alpha)c_{\mu}^{\sigma}. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как разложение указанного выше условия вещественности на  $c$ -величины однозначно, то

$$\underline{A}g_{\tau\mu} = (Ag_{\sigma\tau} \cos \alpha - C_{\sigma\tau} \sin \alpha)c_{\mu}^{\sigma}, \quad (8)$$

$$C_{\mu\tau} = (Ag_{\sigma\tau} \sin \alpha + C_{\sigma\tau} \cos \alpha)c_{\mu}^{\sigma}. \quad (8')$$

Положим

$$c_{\mu}^{\sigma} c_{\rho}^{\mu} = \phi \delta_{\rho}^{\sigma}. \quad (9)$$

Так как мы ищем только  $c$ , то условие  $\phi \neq 0$  является предположением, которое будет оправдано позднее. Умножая соотношение (8) на  $c_{\rho}^{\mu}$ , мы получаем

$$\frac{1}{\phi} \underline{A}c_{\rho\tau} = Ag_{\rho\tau} \cos \alpha - C_{\rho\tau} \sin \alpha. \quad (10)$$

Для соотношения (8') имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi} \underline{A}C_{\mu\tau} &= (Ag_{\sigma\tau} \sin \alpha + C_{\sigma\tau} \cos \alpha)(Ag_{\mu}^{\sigma} \cos \alpha - C_{\mu}^{\sigma} \sin \alpha) = \\ &= A^2 g_{\tau\mu} \sin \alpha \cos \alpha - C_{\sigma\tau} C_{\mu}^{\sigma} \sin \alpha \cos \alpha + AC_{\mu\tau} \cos^2 \alpha - AC_{\tau\mu} \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Вследствие условия (6)  $(C_{11} = 0$  и  $C_{\sigma\tau} C_{\mu}^{\sigma} = \frac{1}{4} C_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} g_{\tau\mu})$  получаем

$$0 = \left( A^2 - \frac{1}{4} C_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} \right) \sin \alpha \cos \alpha + AC_{11} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad (12)$$



или

$$0 = \left( A^2 - \frac{1}{4} C_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta} \right) \sin 2\alpha + 2AC_{11} \cos 2\alpha. \quad (12')$$

Это дает искомый угол  $\alpha$ , которым задается правая часть уравнения (10), а значит и  $c_{\rho\tau}$  с точностью до множителя.

При сделанных предположениях о  $A$  и  $C_{\sigma\tau}$  оказывается, что величины  $c_{\rho\tau}$  невырождены.

Квадратичное условие (13), § 3 дает тогда

$$\frac{1}{4} c_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta} = \pm 1 \text{ и, следовательно, } \phi = I \text{ в (9),} \quad (13)$$

так как оба подслучая нашего главного случая I вследствие различного поведения по отношению к волнам де Бройля не преобразуются друг в друга. (Одна волна де Бройля  $\psi$  при наших  $c$ -преобразованиях, конечно, продолжает существовать.)

Наконец, уравнение (13) служит для определения множителя  $A$  в равенстве (10).

В следующем параграфе будет выполнено *приведение к нормальной форме*: в уравнении Дирака останутся только две постоянные — *вещественная*  $C_{11}$  и *чисто мнимая*  $C_{23}$ .

## § 6. Нормальная форма уравнений Дирака

Последняя полученная форма  $C^{\sigma\tau}$  в правой части уравнений Дирака отличалась тем, что в ней

$$C^{11} \text{ — чисто мнимая, } C^{23}, C^{34}, C^{42} \text{ — вещественны.} \quad (1)$$

Попытаемся теперь определить две величины  $c$ , т. е.  $c$  и  $\tilde{c}$ , соответствующие условиям (13) и (13') § 3 и удовлетворяющие равенствам

$$c_{\alpha\beta} C^{\beta\tau} = \tilde{C}_{\alpha\beta} \tilde{c}^{\beta\tau}, \quad (2)$$

где для  $C$  и  $\tilde{C}$  выполняются условия вещественности (1) и кроме того  $\tilde{C}_{34} = \tilde{C}_{42} = 0$ .

Так как для  $c$  и  $\tilde{c}$  выполняются квадратичные соотношения (13'), § 3

$$\frac{1}{4} c_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta} = \pm \frac{1}{4} \tilde{c}_{\alpha\beta} \tilde{c}^{\alpha\beta} = \pm 1, \quad (3)$$

то после умножения на  $\tilde{c}_{\gamma\tau}$  мы получаем из (2)

$$\tilde{C}_{\alpha\gamma} = \pm c_{2\beta} \tilde{c}_{\gamma\tau} C^{\beta\tau}. \quad (4)$$

Таким образом, пока выполняется соотношение (2), мы можем с помощью одновременного преобразования обеих полувеличин переходить от уравнений Дирака с  $C_{\rho\tau}$  к уравнениям с  $\tilde{C}_{\rho\tau}$ .

Система (2) будет снова выполняться для всех комбинаций значений индексов ( $\tau, \alpha$ ), если она выполняется для значений (1,1), (1,2), (1,3), (1,4). Это дает четыре уравнения

$$\left. \begin{aligned} c_{11}C^{11} + c_{12}C^{21} + c_{13}C^{31} + c_{14}C^{41} &= \tilde{C}_{11}\tilde{c}^{11} + \tilde{C}_{12}\tilde{c}^{21} + \tilde{C}_{13}\tilde{c}^{31} + \tilde{C}_{14}\tilde{c}^{41}, \\ c_{21}C^{11} + c_{22}C^{21} + c_{23}C^{31} + c_{24}C^{41} &= \tilde{C}_{21}\tilde{c}^{11} + \tilde{C}_{22}\tilde{c}^{21} + \tilde{C}_{23}\tilde{c}^{31} + \tilde{C}_{24}\tilde{c}^{41}, \\ c_{31}C^{11} + c_{32}C^{21} + c_{33}C^{31} + c_{34}C^{41} &= \tilde{C}_{31}\tilde{c}^{11} + \tilde{C}_{32}\tilde{c}^{21} + \tilde{C}_{33}\tilde{c}^{31} + \tilde{C}_{34}\tilde{c}^{41}, \\ c_{41}C^{11} + c_{42}C^{21} + c_{43}C^{31} + c_{44}C^{41} &= \tilde{C}_{41}\tilde{c}^{11} + \tilde{C}_{42}\tilde{c}^{21} + \tilde{C}_{43}\tilde{c}^{31} + \tilde{C}_{44}\tilde{c}^{41}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Преобразуя уравнения (5) с помощью  $c$ -соотношений

$$\left. \begin{aligned} c^{12} &= -ic^{34}, \quad c^{13} = -ic^{42}, \quad c^{14} = ic^{23}, \\ c^{11} &= c^{22} = c^{33} = -c^{44}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

мы получаем

$$\left. \begin{aligned} c_{11}C^{11} - c_{34}C^{34} - c_{42}C^{42} - c_{23}C^{23} &= \tilde{C}_{11}\tilde{c}^{11} - \tilde{C}_{34}\tilde{c}^{34} - \tilde{C}_{42}\tilde{c}^{42} - \tilde{C}_{23}\tilde{c}^{23}, \\ ic_{34}C^{11} + ic_{11}\tilde{C}^{34} + ic_{23}C^{42} + ic_{42}C^{23} &= -i\tilde{C}_{34}\tilde{c}^{11} + i\tilde{C}_{11}\tilde{c}^{34} + i\tilde{C}_{23}\tilde{c}^{42} + i\tilde{C}_{42}\tilde{c}^{23}, \\ -ic_{42}C^{11} - ic_{23}C^{34} + ic_{11}C^{42} - i_{34}C^{23} &= -i\tilde{C}_{42}\tilde{c}^{11} - i\tilde{C}_{23}\tilde{c}^{34} + i\tilde{C}_{11}\tilde{c}^{42} - i\tilde{C}_{34}\tilde{c}^{23}, \\ ic_{23}C^{11} + ic_{42}C^{34} - ic_{34}C^{42} + ic_{11}C^{23} &= i\tilde{C}_{23}\tilde{c}^{11} + i\tilde{C}_{42}\tilde{c}^{34} - i\tilde{C}_{34}\tilde{c}^{42} + i\tilde{C}_{11}\tilde{c}^{23}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Вследствие условий вещественности система распадается на две системы

$$\left. \begin{aligned} c_{11}C_{11} &= \tilde{C}_{11}\tilde{c}_{11}, \\ c_{34}C_{11} &= \tilde{C}_{11}\tilde{c}_{34}, \\ c_{42}C_{11} &= \tilde{C}_{11}\tilde{c}_{42}, \\ c_{23}C_{11} &= \tilde{C}_{11}\tilde{c}_{23}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{34}C_{34} + c_{42}C_{42} - c_{23}C_{23} &= \tilde{C}_{34}\tilde{c}_{34} + \tilde{C}_{42}\tilde{c}_{42} - \tilde{C}_{23}\tilde{c}_{23}, \\ c_{11}C_{34} + c_{23}C_{42} - c_{43}C_{23} &= \tilde{C}_{34}\tilde{c}_{11} + \tilde{C}_{23}\tilde{c}_{42} - \tilde{C}_{42}\tilde{c}_{23}, \\ c_{23}C_{34} - c_{11}C_{42} - c_{34}C_{23} &= -\tilde{C}_{42}\tilde{c}_{11} + \tilde{C}_{23}\tilde{c}_{34} - \tilde{C}_{34}\tilde{c}_{23}, \\ c_{42}C_{34} - c_{34}C_{42} - c_{11}C_{23} &= -\tilde{C}_{23}\tilde{c}_{11} + \tilde{C}_{42}\tilde{c}_{34} - \tilde{C}_{34}\tilde{c}_{42}. \end{aligned} \right\} \quad (8')$$

Если потребовать

$$C_{11} = \tilde{C}_{11}, \quad (9)$$

то из уравнений (8) следует

$$c_{\alpha\beta} = \tilde{c}_{\alpha\beta}. \quad (10)$$

[Вследствие соотношений (3) можно было бы положить  $c_{\alpha\beta} = \pm \tilde{c}_{\alpha\beta}$ , но, фиксируя (9), мы получаем (10).]

Так как  $c_{\alpha\beta}c^{\alpha\beta} = \tilde{c}_{\alpha\beta}\tilde{c}^{\alpha\beta}$ , то с преобразованием уравнений от  $C$  к  $\tilde{C}$  связано либо одновременное изменение, либо отсутствие изменения знака  $E$  (в обоих уравнениях). Конечно, это ничего не меняет в типе систем Дирака. Учитывая равенство (10), мы получим из уравнений (8'):

$$\left. \begin{aligned} -c_{23}(C_{23} - \tilde{C}_{23}) + c_{34}(C_{34} - \tilde{C}_{34}) + c_{42}(C_{42} - \tilde{C}_{42}) &= 0, \\ c_{11}(C_{34} - \tilde{C}_{34}) + c_{23}(C_{42} + \tilde{C}_{42}) - c_{42}(C_{23} + \tilde{C}_{23}) &= 0, \\ c_{11}(C_{42} - \tilde{C}_{42}) - c_{23}(C_{34} + \tilde{C}_{34}) + c_{34}(C_{23} + \tilde{C}_{23}) &= 0, \\ c_{11}(C_{23} - \tilde{C}_{23}) + c_{34}(C_{42} + \tilde{C}_{42}) - c_{42}(C_{34} + \tilde{C}_{34}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Чтобы эта система выполнялась при  $c_{\sigma\tau} \neq 0$ , определитель системы (11) должен обращаться в нуль. Этот определитель ( $\Delta$ ) есть

$$\Delta = - [(C_{23}^2 - \tilde{C}_{23}^2) - (C_{34}^2 - \tilde{C}_{34}^2) - (C_{42}^2 - \tilde{C}_{42}^2)]^2. \quad (12)$$

Мы удовлетворим уравнению  $\Delta = 0$ , полагая

$$\tilde{C}_{23}^2 = C_{23}^2 - C_{34}^2 - C_{42}^2, \quad \tilde{C}_{34} = \tilde{C}_{42} = 0. \quad (13)$$

Тогда для  $c_{\sigma\tau}$  из уравнений (11) легко получаем  $c_{\sigma\tau} c^{\sigma\tau} \neq 0$ . Итак, вычисленные значения  $c_{\sigma\tau}$ ,  $\tilde{c}_{\sigma\tau}$  и  $\tilde{C}_{\sigma\tau}$  удовлетворяют системе уравнений (4), и получается нормальная форма<sup>12</sup>.

<sup>12</sup> Мы совершили бы приведение уравнений Дирака для полувекторов также и другим способом, если бы в качестве первого шага заменили  $C_{\sigma\tau}$  в функции Гамильтона  $H_3$  на  $g_{\sigma\tau}$  с помощью  $s$ -преобразования. Тогда мы получили бы только восемь вещественных постоянных  $a_i$ , или  $a_i^*$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) в величине  $E$  или  $E^*$  соответственно.

Всякое дальнейшее преобразование  $\psi_\sigma = c_\sigma^\alpha \psi_\alpha$ ,  $\bar{\chi}^\sigma = c_\beta^{\sigma'} \bar{\chi}^{\beta'}$  величин  $\psi_\sigma$ ,  $\bar{\chi}_\sigma$  в  $\underline{\psi}_\sigma$ ,  $\bar{\chi}_\sigma$  должно тогда оставлять инвариантным выражение  $\underline{\psi}_\sigma \bar{\chi}^\sigma$ . Это дает условие  $\tilde{c}_\beta^{\sigma'} c_\sigma^\alpha = \delta_\beta^\alpha$ , т. е. матрицы преобразований  $\psi$  и  $\chi$  являются взаимно обратными.

Второй шаг приводит затем одну величину  $E$  в  $H_3$  к нормальной фор-

### § 7. Резюме и физические замечания

Выше мы изложили теорию поля, в которой наряду с метрическими и электромагнитными полевыми величинами появились две новые полевые величины — полуторы  $\psi$  и  $\chi$ . В функцию Гамильтона кроме скаляра кривизны и скаляра электромагнитного поля вошел аддитивно скаляр, образованный из  $\psi$  и  $\chi$  и их первых производных. Наряду с уравнениями гравитации и уравнениями Максвелла, дополненными плотностью электрического тока, появилась система обобщенных уравнений Дирака для полуторов.

Оказалось, что 17 произвольных постоянных, первоначально имевшихся в этой системе уравнений, можно свести к трем вещественным постоянным, а именно  $\epsilon$ ,  $a$  и  $b$ . В результате получались нормальные уравнения (1') и (1''), § 3. В этих нормальных уравнениях четыре постоянных  $a_1, \dots, a_4$  имеют значения (1, 0, 0, 0) и (ковариантная) матрица  $C_{\sigma\tau}$  правой части имеет вид

$$\begin{vmatrix} ia & 0 & 0 & -ib \\ 0 & ia & b & 0 \\ 0 & -b & ia & 0 \\ ib & 0 & 0 & -ia \end{vmatrix}.$$

В предельном случае, когда можно пренебречь электромагнитным полем, уравнения допускают два решения особого рода, соответствующих покоящимся элементарным частицам, причем частоты волн де Бройля и, соответственно, массы частиц определяются уравнениями

$$\nu_1^2 = (a + b)^2, \quad \nu_2^2 = (a - b)^2.$$

.....  
ме, например к  $E(1, 0, 0, 0)$ , если она «пространственная». Но это допускает еще все преобразования этой величины  $E$  в самое себя, т. е. все  $c$ -преобразования, для которых  $\chi_i = c_i^j c_j^k \chi_k$  означает вращение вокруг оси  $\chi_1$ .

Если постоянные в  $E^*$  обозначить через  $a^{*k}$ , то при таком вращении «вектор»  $a^{*k}$  испытывает поворот вокруг оси  $\chi_1$ .

Поэтому можно получить окончательную форму, в которой, например, отличны от нуля только первая и четвертая «компоненты»  $a^{*k}$ .

В зависимости от того, будет ли при этом величина  $E^*$  пространственно-или временно-подобной, должно выполняться одно из неравенств

$$(a_1^*)^2 - (a_4^*)^2 \geq 0.$$

Полученная таким образом нормальная форма полностью эквивалентна нашей, но из соображений симметрии мы предпочитаем нормальную форму, полученную нами.

Электрические заряды, соответствующие этим двум волнам де Бройля, имеют противоположные знаки. Тем самым, по-видимому, впервые дается объяснение тому, что существуют две электрически заряженные элементарные частицы с разными массами и электрическими зарядами противоположного знака. Существенно далее, что в уравнения входит только одна-единственная постоянная с размерностью электрического заряда, с точностью до универсального множителя равная  $e$ . Это связано, очевидно, с тем, что (по абсолютной величине) имеется только один электрический элементарный заряд.

То, что в качестве константы, определяющей массу, наряду с положительными значениями  $\nu$  получаются также и отрицательные  $\nu$ , связано, возможно, с кажущимся появлением «положительных электронов», которые следовало бы, во всяком случае, понимать как электроотрицательные частицы с отрицательной механической массой. Согласно этой теории, соответствующее положение следовало бы ожидать и для протонов.

Ясно, что к такой теории поля нельзя применить борновскую вероятностную интерпретацию  $\psi$ -поля. Следовательно, вопрос о том, допускает ли вообще такая теория непротиворечивую интерпретацию атомистической структуры материи, остается пока открытым.

# РАСЩЕПЛЕНИЕ НАИБОЛЕЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ ДЛЯ ПОЛУВЕКТОРОВ НА СПИНОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКОВСКОГО ТИПА \*

(Совместно с В. Майером)

В предыдущей работе <sup>1</sup> мы показали, что наиболее общие полувекторные уравнения простейшего типа приводятся к канонической форме, содержащей только три произвольные постоянные.

Далее было показано, что волна де Бройля в такой системе распадается на два типа волн спинорного характера, естественно ассоциируемых с электроном или протоном. Теперь мы покажем, что такое расщепление не ограничивается волнами де Бройля, а представляет весьма общее свойство системы уравнений. Именно, эта система распадается на две системы спиноров (16) и (17), к которым следует добавить электрические члены в соответствии с (13), (13'). Единственная связь между системами (16) и (17) обеспечивается общностью векторного потенциала электромагнитного поля  $\varphi_r$ ; в соответствии с этим спинорные поля электронов и протонов с точностью до их электродинамического взаимодействия совершенно независимы друг от друга. Согласно уравнению (18), это утверждение справедливо и для плотности тока. Напротив, поля волн де Бройля для отдельных частиц одинакового типа отделить друг от друга аналогичным способом в рамках теории поля нельзя.

Уравнения Дирака в их канонической форме

$$\begin{aligned} E_{\sigma\tau}^r (\psi_{,r}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_r) &= \bar{C}_{\tau\rho}\chi^\rho, \\ E_{\sigma\tau}^r (\chi_{,r}^\tau - i\varepsilon\chi^\tau\varphi_r) &= C_{\rho\sigma}\psi^\rho, \end{aligned} \quad (1)$$

\* *Spaltung der natürlichsten Feldgleichungen für Semi-Vektoren in Spinor-Gleichungen vom Diracschen Typus.* (Mit W. Mayer). Proc. Akad. van Wetenschappen (Amsterdam), 1933, 36, pt. 2, 615—619.

<sup>1</sup> A. Einstein, W. Mayer. Proc. Akad. van Wetenschappen (Amsterdam), 36, pt. 1, 497. (Статья 73.)

где

$$E = E(1, 0, 0, 0), \quad C_{\rho\sigma} = iag_{\rho\sigma} + bv_{\rho\sigma} \quad (1')$$

и

$$v_{\rho\sigma} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

могут быть расщеплены простейшим способом на две системы спинорного характера.

С помощью только что написанного численно инвариантного полутензора первого рода  $v_{\rho\sigma}$  каждому полувектору первого рода  $\eta^{\bar{\nu}}$  можно сопоставить «вектор со звездочкой»  $\eta^{\star\bar{\nu}}$  соотношением

$$\eta_{\mu}^{\star} = v_{\mu\nu} \eta^{\bar{\nu}}. \quad (3)$$

С помощью равенства  $v_{\tau\sigma} v_{\rho}^{\sigma} = -g_{\tau\rho}$  легко показать, что

$$(\eta_{\mu}^{\star})^{\star} = -\eta_{\mu}^{\star}. \quad (3')$$

Это значит, что существуют полувекторы, с точностью до множителя равные своим «полувекторам со звездочкой». Согласно уравнению (3') этот множитель может быть только  $\pm i$ . Соответственно этому существует два типа таких полувекторов:  $\alpha$ -спинор, обозначаемый  $\rho_{\alpha}^{\bar{\mu}}$  и определяемый уравнением

$$\rho_{\alpha}^{\bar{\mu}} = i\rho_{\alpha}^{\bar{\mu}},$$

или

$$\rho_{\alpha}^{\bar{\mu}} = -iv_{\mu\nu} \rho_{\alpha}^{\bar{\nu}}, \quad (4)$$

и  $\beta$ -спинор, определяемый уравнением

$$\tau_{\beta}^{\bar{\mu}} = -i\tau_{\beta}^{\bar{\mu}}$$

или

$$\tau_{\beta}^{\bar{\mu}} = iv_{\mu\nu} \tau_{\beta}^{\bar{\nu}}. \quad (4')$$

В подробной записи эти соотношения имеют вид:

$$\rho_{\alpha}^{\bar{1}} = \rho_{\alpha}^{\bar{4}}, \quad \rho_{\alpha}^{\bar{3}} = i\rho_{\alpha}^{\bar{2}}; \quad \tau_{\beta}^{\bar{1}} = -\tau_{\beta}^{\bar{4}}, \quad \tau_{\beta}^{\bar{3}} = -i\tau_{\beta}^{\bar{2}}. \quad (5)$$

Совершенно аналогично  $\alpha$ -или  $\beta$ -спиноры второго рода  $\bar{\rho}_{\alpha}^{\bar{\mu}}, \bar{\tau}_{\beta}^{\bar{\mu}}$  определяются соотношениями, комплексно сопряженными (4), (4') и (5):

$$\bar{\rho}_{\alpha}^{\bar{1}} = \bar{\rho}_{\alpha}^{\bar{4}}, \quad \bar{\rho}_{\alpha}^{\bar{3}} = -i\bar{\rho}_{\alpha}^{\bar{2}}, \quad \bar{\tau}_{\beta}^{\bar{1}} = -\bar{\tau}_{\beta}^{\bar{4}}, \quad \bar{\tau}_{\beta}^{\bar{3}} = i\bar{\tau}_{\beta}^{\bar{2}}. \quad (5')$$

Полувектор, комплексно сопряженный  $\alpha$ -и, соответственно,  $\beta$ -спинору первого рода, вместе с тем является спинором второго рода и, наоборот.

Нетрудно доказать (образуя «векторы со звездочкой»), что

а) сумма  $\alpha$ -спинора и  $\beta$ -спинора равна нулю только тогда, когда  $\alpha$ -спинор и  $\beta$ -спинор равны нулю. Из (5), (5') также доказывается, что  
б) скалярное произведение двух  $\alpha$ - и, соответственно,  $\beta$ -спиноров обращается в нуль.

Далее, каждый полувектор  $\eta_{\bar{\sigma}}$  можно разложить (в соответствии со сказанным однозначно) на  $\alpha$ -спинор  $\eta_{\bar{\sigma}} - i\eta_{\bar{\sigma}}^*$  и  $\beta$ -спинор  $\eta_{\bar{\sigma}} + i\eta_{\bar{\sigma}}^*$  (спинорный характер доказывается образованием «векторов со звездочкой»):

$$2\eta_{\bar{\sigma}} = (\eta_{\bar{\sigma}} - i\eta_{\bar{\sigma}}^*) + (\eta_{\bar{\sigma}} + i\eta_{\bar{\sigma}}^*). \quad (6)$$

Так же как и полувектор  $\eta_{\bar{\sigma}}$  в соотношении (6), каждый полутензор допускает расщепление на  $\alpha$ - и  $\beta$ -спиноры (по отношению к каждому из своих полундексов). Так, в очевидных обозначениях, имеем:

$$E_{\sigma\tau}^r = (E_{\alpha\alpha}^r + E_{\beta\beta}^r) + (E_{\alpha\beta}^r + E_{\beta\alpha}^r). \quad (7)$$

Покажем теперь, что в разложении (7) для  $E = E(1, 0, 0, 0)$  выражение во второй скобке в правой части равно нулю. В самом деле, из вида  $E(1, 0, 0, 0)$  и определяющих  $\alpha$ ,  $\beta$ -соотношений (5) и (5') следует, что для любых  $\rho_{\beta}^{\bar{\sigma}}$ ,  $\pi_{\alpha}^{\bar{\tau}}$  и, соответственно,  $\rho_{\alpha}^{\bar{\sigma}}$ ,  $\pi_{\beta}^{\bar{\tau}}$

$$E_{\sigma\bar{\tau}}^r \rho_{\beta}^{\bar{\sigma}} \pi_{\alpha}^{\bar{\tau}} = 0, \quad (8)$$

$$E_{\sigma\bar{\tau}}^r \rho_{\alpha}^{\bar{\sigma}} \pi_{\beta}^{\bar{\tau}} = 0. \quad (8')$$

[Соотношение (8) сразу доказывается для  $r = 1$ , и тем самым (8) выполняется для  $r = 1, \dots, 4$ .]

Умножая соотношение (7) на  $\rho_{\beta}^{\bar{\sigma}} \pi_{\alpha}^{\bar{\tau}}$ , в силу уравнения (6) получаем:

$$E_{\alpha\beta\bar{\sigma}\bar{\tau}}^r \rho_{\beta}^{\bar{\sigma}} \pi_{\alpha}^{\bar{\tau}} = 0. \quad (9)$$

Но тем самым  $E_{\alpha\beta\bar{\sigma}\bar{\tau}}^r \rho_{\beta}^{\bar{\sigma}} \pi_{\alpha}^{\bar{\tau}}$  обращается в нуль для произвольных полувекторов  $\rho_{\beta}^{\bar{\sigma}} = \rho_{\alpha}^{\bar{\sigma}} + \rho_{\beta}^{\bar{\sigma}}$ ,  $\pi_{\alpha}^{\bar{\tau}} = \pi_{\alpha}^{\bar{\tau}} + \pi_{\beta}^{\bar{\tau}}$  и, следовательно,  $E_{\alpha\beta\bar{\sigma}\bar{\tau}}^r = 0$ . Точно так же



доказывается, что и  $E_{\sigma\tau}^r = 0$ . Вместо уравнения (7) имеем теперь

$$E_{\sigma\tau}^r = E_{\alpha\alpha}^r + E_{\beta\beta}^r. \quad (7')$$

Следовательно,  $E_{\sigma\tau}^r \psi^\sigma$  по отношению к  $\tau$  является  $\beta$ -тензором [ $E_{\sigma\tau}^r \psi^\sigma = 0$  в соответствии с (6)] и т. д. Учитывая, что  $C_{\rho\sigma}$ ,  $\bar{C}_{\rho\sigma}$  не меняют  $\alpha$  и, соответственно,  $\beta$ -характера полувеличины, и полагая

$$\psi^\sigma = \psi_\alpha^\sigma + \psi_\beta^\sigma, \quad \chi^\tau = \chi_\alpha^\tau + \chi_\beta^\tau, \quad (10)$$

получаем, что система (1) распадается на две системы:

$$\left. \begin{aligned} E_{\sigma\tau}^r (\psi_{\alpha,r}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_r) &= \bar{C}_{\tau\rho}\chi_\beta^\rho, \\ E_{\sigma\tau}^r (\chi_{\beta,r}^\tau - i\varepsilon\chi^\tau\varphi_r) &= C_{\rho\sigma}\psi_\alpha^\rho, \end{aligned} \right\} (11) \quad \left. \begin{aligned} E_{\sigma\tau}^r (\psi_{\beta,r}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_r) &= \bar{C}_{\tau\rho}\chi_\alpha^\rho, \\ E_{\sigma\tau}^r (\chi_{\alpha,r}^\tau - i\varepsilon\chi^\tau\varphi_r) &= C_{\rho\sigma}\psi_\beta^\rho. \end{aligned} \right\} (11')$$

Вследствие уравнений (1) и определяющих соотношений (4) имеем

$$C_{\rho\sigma}\psi_\alpha^\rho = i(a-b)\psi_\alpha^\sigma, \quad C_{\rho\sigma}\psi_\beta^\rho = i(a+b)\psi_\beta^\sigma, \quad (12)$$

а также

$$\bar{C}_{\tau\rho}\chi_\alpha^\rho = -i(a+b)\chi_\alpha^\tau, \quad \bar{C}_{\tau\rho}\chi_\beta^\rho = -i(a-b)\chi_\beta^\tau. \quad (12')$$

Итак, мы получаем систему уравнений Дирака в окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned} E_{\sigma\tau}^r (\psi_{\alpha,r}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_r) &= -i(a-b)\chi_\beta^\tau, \\ E_{\sigma\tau}^r (\chi_{\beta,r}^\tau - i\varepsilon\chi^\tau\varphi_r) &= i(a-b)\psi_\beta^\sigma, \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{\sigma\tau}^r (\psi_{\beta,r}^\sigma - i\varepsilon\psi^\sigma\varphi_r) &= -i(a+b)\chi_\alpha^\tau, \\ E_{\sigma\tau}^r (\chi_{\alpha,r}^\tau - i\varepsilon\chi^\tau\varphi_r) &= i(a+b)\psi_\alpha^\sigma. \end{aligned} \right\} (13')$$

Если образовать систему уравнений, комплексно сопряженную (13'), то после замены  $\chi_\alpha^\sigma$  на  $\psi_\alpha^\sigma$ ,  $\bar{\psi}_\beta^\sigma$  на  $\chi_\beta^\sigma$ ,  $a+b$  на  $a-b$  и  $\varepsilon$  на  $-\varepsilon$  она окажется тождественной системе (13).

Как и следовало ожидать, обе системы действительно различаются только значением массы и знаком  $\varepsilon$ . Вектор тока

$$I^r = E_{\sigma\tau}^r \psi^\sigma \bar{\psi}^\tau - E_{\sigma\tau}^r \bar{\chi}^\sigma \chi^\tau, \quad (14)$$

в силу соотношения (8), также имеет совершенно аналогичное  $\alpha$ ,  $\beta$ -расщепление:

$$\varepsilon I^r = \varepsilon (E_{\sigma\tau}^r \psi_{\alpha}^{\sigma} \bar{\psi}_{\alpha}^{\tau} - E_{\sigma\tau}^r \bar{\chi}_{\beta}^{\sigma} \chi_{\beta}^{\tau}) + (-\varepsilon) (E_{\sigma\tau}^r \bar{\chi}_{\alpha}^{\sigma} \chi_{\alpha}^{\tau} - E_{\sigma\tau}^r \psi_{\beta}^{\sigma} \bar{\psi}_{\beta}^{\tau}), \quad (15)$$

причем вследствие уравнений (13) дивергенция каждого тока обращается в нуль независимо. Записывая в подробной форме уравнения (13), опуская электромагнитные потенциалы и выражая третьи и четвертые компоненты через вторые и первые [с помощью равенств (5) и (5')], получаем систему уравнений Дирака

$$\left. \begin{aligned} (\psi_{,1}^1 - \psi_{,4}^1) + (\psi_{,2}^2 + i\psi_{,3}^2) &= -i(a-b)\chi^1, \\ (\psi_{,2}^1 - i\psi_{,3}^1) - (\psi_{,1}^2 + \psi_{,4}^2) &= -i(a-b)\chi^2, \\ (\chi_{,1}^1 + \chi_{,4}^1) + (\chi_{,2}^2 + i\chi_{,3}^2) &= i(a-b)\psi^1, \\ (\chi_{,2}^1 - i\chi_{,3}^1) - (\chi_{,1}^2 - \chi_{,4}^2) &= i(a-b)\psi^2, \end{aligned} \right\} \text{ для } \psi = \psi_{\alpha}, \chi = \chi_{\beta}, \quad (16)$$

и, соответственно, из уравнений (13') получаем

$$\left. \begin{aligned} (\psi_{,1}^1 + \psi_{,4}^1) + (\psi_{,2}^2 - i\psi_{,3}^2) &= -i(a+b)\chi^1, \\ (\psi_{,2}^1 + \psi_{,3}^1) - (\psi_{,1}^2 - \psi_{,4}^2) &= -i(a+b)\chi^2, \\ (\chi_{,1}^1 - \chi_{,4}^1) + (\chi_{,2}^2 - i\chi_{,3}^2) &= i(a+b)\psi^1, \\ (\chi_{,2}^1 + \chi_{,3}^1) - (\chi_{,1}^2 + \chi_{,4}^2) &= i(a+b)\psi^2 \end{aligned} \right\} \text{ для } \psi = \psi_{\beta}, \chi = \chi_{\alpha}. \quad (17)$$

Однако это разложение не означает, что теория полуторов оказывается излишней, поскольку она в своей окончательной (простейшей) формулировке сводится к чисто спинорной системе. В самом деле, даже не учитывая (указанной в более ранних работах) возможности включения в общую теорию относительности, для которой чисто спинорная теория представляется искусственной, с точки зрения теории спиноров непонятно, почему в природе существуют как раз *две* элементарные инертные массы с одинаковым (с точностью до знака) электрическим зарядом.

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛУВЕКТОРОВ КАК ОБЫЧНЫХ ВЕКТОРОВ С ОСОБЫМ ХАРАКТЕРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ\*

(Совместно с В. Майером)

До сих пор полувекторы и спиноры строились в общей теории относительности и в пространстве Римана таким образом: в каждой точке многообразия вводилась локальная ортогональная система координат, относительно которой и определялись полувекторы. Эта система координат, в свою очередь, описывалась в гауссовской координатной системе матрицей  $(h_{\alpha\beta})$ , где греческие индексы относятся к локальной системе, а латинские — к гауссовской системе координат<sup>1</sup>.

Поскольку вектор  $(a)$ , согласно соотношению

$$a^\sigma = h_\sigma^\alpha a^\alpha \quad (a^\alpha = h_\alpha^\sigma a^\sigma),$$

может быть произвольно отнесен как к гауссовской системе, так и к локальной системе, до сих пор считалось, что полувекторы могут быть описаны только в локальной системе, но не непосредственно в гауссовской системе.

В предлагаемой работе будет показано, что полувекторы можно отнести также и прямо к гауссовской системе. Это осуществляется при помощи величин, которые ведут себя относительно преобразований координат как обычные векторы, но отличаются от них другим характером дифференцирования. При этом оказывается, что закон дифференцирования определяется не одной только метрикой, но также и некоторым произвольно выбранным «абсолютным параллелизмом», хотя содержание дифференциальных соотношений, например уравнений Дирака, фактически от этого выбора не зависит.

\* *Darstellung der Semi-Vektoren als gewöhnliche Vektoren von besonderem Differentiations Charakter.* (Mit W. Mayer.) *Ann. of Math.*, 1934, 35, 104—110.

<sup>1</sup> A. Einstein, W. Mayer. *Semivektoren und Spinoren.* *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.* 1932, 522. (Статья 72.)

Мы вовсе не хотим утверждать, что развиваемое здесь представление следует предпочесть тому, которое характеризуется явным введением ортогонального 4-репера — тетрапода —  $(h_{\sigma s})$ . Тем не менее интересно показать на примере, что некоторая величина определяется не только законом преобразования, но точно так же, например, законом абсолютного дифференцирования.

В цитированной работе «Полувекторы и спиноры» при построении этих величин в пространстве  $R_4$  общей теории относительности мы ввели некоторый тетрапод, который ставит в соответствие каждому локальному вектору  $\rho^s$  обычный пространственный вектор  $\rho^s$ :

$$\rho_s = h_{\sigma s} \rho^\sigma, \quad \rho_\sigma = h_{\sigma s} \rho^s. \quad (1)$$

Как и в цитируемой работе — мы предполагаем, что читатель знаком с ней — греческие индексы относятся к нормированному локальному реперу, латинские — к координатам в пространстве  $R_4$ .

Для тетрапода  $h_{\sigma s}$  справедливы нормировочные соотношения

$$h_s^\sigma h_{\sigma t} = g_{st}, \quad h_{\sigma s} h_t^\sigma = g_{st}, \quad (2)$$

$$g_{st} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (2')$$

Так же как и для локального вектора, мы можем при помощи (комплексного) нормированного 4-репера  $k_{\sigma s}^-$  поставить в соответствие каждому (локальному) полуовектору (первого рода)  $\psi^\sigma$  некоторый пространственный полуовектор  $\psi_s^-$ :

$$\psi_s^- = k_{\sigma s}^- \psi^\sigma, \quad \psi_\sigma^- = k_{\sigma s}^- \psi^s. \quad (3)$$

По отношению к преобразованию координат,  $k_{\sigma s}^-$ , а вместе с ним и  $\psi_s^-$ , ведут себя, как обычные векторы; при изменении тетрапода:

$$h_{\sigma s}' = a_\sigma^\tau h_{\tau s}, \quad a_\sigma^\tau \text{ — лоренцовское вращение} \quad (4)$$

$k_{\sigma s}^-$  изменяется по закону

$$k_{\sigma s}' = b_\sigma^\tau k_{\tau s}^-, \quad (5)$$

где соотношение

$$a_\sigma^\tau = b_\sigma^\rho \bar{b}_\rho^\tau \quad (6)$$

представляет собой разложение лоренцова вращение на два с характеристиками  $b$  и  $\bar{b}$ . Отсюда следует, что пространственный полуовектор  $\psi_s^-$  не изменяется при таких вращении.

Вследствие принятой нормировки репера  $k_{\sigma\bar{s}}$  для пространственного метрического полутензора справедливо соотношение:

$$g_{\bar{s}\bar{\tau}} = k_{\sigma\bar{s}} k_{\rho\bar{\tau}} g^{\sigma\rho}, \quad (7)$$

$$g_{\sigma\bar{\rho}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

что означает:

$$g_{\bar{s}\bar{\tau}} \equiv g_{s\tau}; \quad (8)$$

метрический тензор  $g_{s\tau}$  относится также и к полувеличинам.

При таком способе описания между пространственными полувеличинами и обычными векторами не существует никакого различия по отношению к преобразованию координат. Различие проявляется прежде всего при образовании ковариантных производных. Как бы ни был выбран трехиндексный символ, из (3) следует:

$$\psi_{\bar{s};r} = k_{\sigma\bar{s};r} \psi^{\sigma} + k_{\sigma\bar{s}} \psi^{\sigma}_{;r}. \quad (9)$$

Теперь можно говорить о полувекторе  $\psi$  так же просто, как если бы ковариантные и контравариантные, локальные и пространственные индексы представляли лишь различные возможности его записи. Но тогда высказывания  $\psi_{\bar{s};r} = 0$  и  $\psi^{\sigma}_{;r} = 0$  должны быть полностью эквивалентны. Так будет в том и только в том случае, если

$$k_{\sigma\bar{s};r} = k_{\sigma s;r} - \Gamma_{\sigma r}^{\tau} k_{\tau\bar{s}} - \Gamma_{\bar{s}r}^{\bar{w}} k_{\sigma\bar{w}} = 0. \quad (10)$$

Так как [см. формулу (24) цитированной работы] трехиндексная величина  $\Gamma_{\sigma r}^{\tau}$  известна для локального полувектора, то соотношение (10) определяет соответствующую величину  $\Gamma_{\bar{s}r}^{\bar{w}}$  для пространственного полувектора. Из соотношения (10) можно заключить, что эти величины не затрагиваются изменением (5) репера<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Если  $\psi'_{\sigma} = b_{\sigma}^{\tau} \psi_{\tau}$  — преобразование полувектора при вращении репера, то уравнение  $b_{\sigma;r}^{\tau} = 0$  дает закон преобразования трехиндексного символа при вращении репера. Если производную записать в виде:  $k_{\sigma s|r} = k_{\sigma s;r} - \Gamma_{\sigma r}^{\tau} k_{\tau s}$ , то из соотношения (α)  $\dots k'_{\sigma\bar{s}} = b_{\sigma}^{\tau} k_{\tau\bar{s}}$  следует, что всегда  $k'_{\sigma s|r} = b_{\sigma}^{\tau} k_{\tau s}$ . Кроме того  $b_{\sigma|r}^{\tau} \equiv b_{\sigma;r}^{\tau} = 0$ .

Итак, вместе с соотношением (α) справедливо равенство  $k'_{\sigma\bar{s}|r} = b_{\sigma}^{\tau} k_{\tau\bar{s}|r}$ , откуда следует вышеупомянутое утверждение.

Теперь из соотношений (10) и (7) следует:

$$g_{sr; k}^- = g_{sr, k}^- - \Gamma_{sk}^{\bar{p}} g_{pr}^- - \Gamma_{rk}^{\bar{p}} g_{sp}^- = 0. \quad (11)$$

Так как благодаря равенству (8) справедливо также:

$$g_{sr; k} = g_{sr, k} - \left\{ \begin{matrix} P \\ sk \end{matrix} \right\} g_{pr} - \left\{ \begin{matrix} P \\ rk \end{matrix} \right\} g_{sp} = 0, \quad (11')$$

то выражение (разность обоих верхних равенств)

$$\left\{ \begin{matrix} P \\ sk \end{matrix} \right\} - \Gamma_{sk}^p = A_{sk}^p \quad (12)$$

симметрично относительно индексов  $p$  и  $s$ .

В цитированной работе мы ввели особый антисимметрический полутензор  $v_{\sigma\tau}^-$ , который определяется соотношением

$$v_{\sigma\tau}^- = \frac{i}{2} \eta_{\sigma\tau k\lambda}^- v^{\bar{k}\bar{\lambda}}, \quad (13)$$

и остается инвариантом относительно вращений тетрапода. Производные полуветров были выбраны при этом так, что выполнялось уравнение

$$v_{\sigma\tau; r}^- = 0 \quad (14)$$

для постоянного во всех точках  $v_{\sigma\tau}^-$ .

Исследуем соотношения, связанные с (13) и (14), для соответствующего пространственного полутензора:

$$v_{\bar{h}\bar{j}} = k_{\bar{h}}^{\bar{\sigma}} k_{\bar{j}}^{\bar{\tau}} v_{\sigma\tau}^- \quad (v^{\bar{k}\bar{\lambda}} = k_{\bar{r}}^{\bar{k}} k_{\bar{s}}^{\bar{\lambda}} v^{\bar{r}\bar{s}}). \quad (15)$$

Умножая (13) на  $k_{\bar{h}}^{\bar{\sigma}} k_{\bar{j}}^{\bar{\tau}}$ , получаем<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} v_{\bar{h}\bar{j}} &= -\frac{i}{2} \eta_{\sigma\tau k\lambda}^- k_{\bar{h}}^{\bar{\sigma}} k_{\bar{j}}^{\bar{\tau}} k_{\bar{r}}^{\bar{k}} k_{\bar{s}}^{\bar{\lambda}} v^{\bar{r}\bar{s}} = \\ &= -\frac{i}{2} \sqrt{-g} \eta_{\bar{h}\bar{j}\bar{r}\bar{s}}^- v^{\bar{r}\bar{s}} = -\frac{1}{2} \sqrt{g} \eta_{\bar{h}\bar{j}\bar{r}\bar{s}} v^{\bar{r}\bar{s}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Соотношение (16) имеет тот же характер, что и соотношение (13), так что, благодаря соотношению (10), из (15) следует:

$$v_{\bar{h}\bar{j}; r}^- = k_{\bar{h}}^{\bar{\sigma}} k_{\bar{j}}^{\bar{\tau}} v_{\sigma\tau}^-; r. \quad (17)$$

$v_{\bar{h}\bar{j}; r}^- = 0$  для любого  $v_{\sigma\tau}^-$ , для которого справедливо (14).

<sup>3</sup> Определитель  $|k_{\bar{h}}^{\bar{\sigma}}|$  всегда равен  $\pm \sqrt{-g}$ , где корень положителен. Мы выбираем только такие реперы, для которых этот определитель равен  $+\sqrt{-g}$ .

До сих пор мы выбирали репер  $k_{\sigma\bar{s}}$ , который позволяет связать с локальным полутором некоторый пространственный полутор; естественно, что от этого выбора зависит получаемый пространственный полутор, который при изменении репера вращается определенным образом. Особый характер этого вращения мы обсудим позднее.

Если мы хотим найти простое выражение для пространственного тензора  $E_{i\bar{s}\bar{t}}$ , связанного с  $E_{\alpha\sigma\bar{\tau}}$ , то целесообразно выбрать репер  $k_{\sigma\bar{s}}$  особым образом, а именно, путем специального вращения (4), (5) добиться совпадения реперов  $h$  и  $k$ .

Мы можем воспользоваться этим частным случаем

$$h_{\sigma\bar{s}} = k_{\sigma\bar{s}} \tag{\alpha}$$

при вычислении, так как пространственные величины (вектор, полутор) остаются неизменными после их образования при последующих вращениях репера [которые, конечно, нарушают соотношение (α)]. Прежде чем вычислить  $E_{i\bar{s}\bar{t}}$ , мы хотим связать с входящим в  $E_{\alpha\sigma\bar{\tau}}$  псевдовектором  $a^{\bar{\tau}}$  пространственный псевдовектор  $a_i$  с помощью соотношения

$$a_{\bar{t}} = h_{\bar{t}\bar{\tau}} a^{\bar{\tau}}, \quad h_{\bar{t}\bar{\tau}} = h_{\tau t}. \tag{18}$$

Знак  $\sim$  над индексом напоминает, что псевдовектор не испытывает никакого изменения при вращении репера (6):

$$a^{\bar{\tau}} = a^{\tau},$$

т. е. ведет себя как (упорядоченная) система четырех инвариантов. Запишем тензор  $E_{\bar{\tau}\bar{\sigma}\alpha}$  в следующей форме:

$$E^{\alpha\sigma\bar{\tau}} = E^{\alpha\sigma\tau\rho} a_{\rho}, \tag{19}$$

где

$$E^{\alpha\sigma\tau\rho} = g^{\alpha\sigma} g^{\tau\rho} + g^{\alpha\tau} g^{\sigma\rho} - g^{\alpha\rho} g^{\sigma\tau} + i\eta^{\alpha\sigma\tau\rho}. \tag{20}$$

Тензор

$$E_{i\bar{s}\bar{t}} = h_{\alpha i} k_{\sigma\bar{s}} \bar{k}_{\bar{t}} E^{\alpha\sigma\bar{\tau}},$$

так что, используя соотношение (α):

$$E_{i\bar{s}\bar{t}} = h_{\alpha i} h_{\sigma\bar{s}} h_{\bar{t}\bar{\tau}} E^{\alpha\sigma\bar{\tau}} = h_{\alpha i} h_{\sigma\bar{s}} h_{\bar{t}\bar{\tau}} E^{\alpha\sigma\tau\rho} a_{\rho} = E_{i\bar{s}\bar{t}\rho} a^{\rho}, \tag{21}$$

где

$$E_{i\bar{s}\bar{t}\rho} = g_{i\bar{s}} g_{\bar{t}\rho} + g_{i\bar{t}} g_{\bar{s}\rho} - g_{i\rho} g_{\bar{s}\bar{t}} - \sqrt{g} \eta_{i\bar{s}\bar{t}\rho}. \tag{21'}$$

В формулах (21) и (21') выясняется, что пространственный  $E$ -тензор получается из пространственной метрики точно так же, как получается из формулы (19), (20) локальный  $E$ -тензор из локальной метрики. Так как

локальный псевдовектор остается неизменным при изменении репера (и координат), то его ковариантную производную мы можем определить, не используя (отличных от нуля) трехиндексных величин:

$$a_{\tau;r}^{\sim} = a_{\tau,r}^{\sim} = \frac{\partial a^{\tau}}{\partial x_r}. \quad (22)$$

Из соотношения (18) следует теперь при любом выборе трехиндексного символа:

$$a_{\tau;r}^{\sim} = h_{\tau t}^{\sim} a_{t;r}^{\sim} + h_{\tau t;r}^{\sim} a^t. \quad (23)$$

Псевдовектор можно описывать как пространственный или локальный псевдовектор, если трехиндексные величины для пространственного псевдовектора выбрать соответственно условию:

$$h_{\tau t;r}^{\sim} = h_{\tau t,r}^{\sim} - \Delta_{\tau r}^s h_{\tau s}^{\sim} = 0. \quad (24)$$

Умножая это соотношение на  $h^{\tau k}$ , мы получаем эти величины в форме

$$\Delta_{\tau r}^{\tilde{k}} = h^{\tau k} h_{\tau t;r}^{\sim}, \quad (25)$$

т. е. в форме известных «скобок», которые через репер  $h$  определяют абсолютный параллелизм. Вместо равенств (23) справедливо соотношение

$$a_{\tau;r}^{\sim} = h_{\tau t}^{\sim} a_{t;r}^{\sim}. \quad (25')$$

Если  $a^{\tau}$  — постоянна, то  $a_{\tau}^{\sim}$  обладает свойством абсолютного параллелизма:  $a_{\tau;r}^{\sim} = 0$ .

Теперь нам осталось определить трехиндексный символ  $\Gamma_{sr}^{\bar{p}}$  для производных пространственных полувеличин. Для этого воспользуемся соотношениями:

$$h_{\tau t;k} = h_{\tau t,k} - \{tk\} h_{\tau r} - P_{\tau k}^{\sigma} h_{\sigma t} = 0, \quad (26)$$

$$h_{\tau t;k}^{\bar{p}} = h_{\tau t,k}^{\bar{p}} - \Gamma_{tk}^{\bar{p}} h_{\tau r} - \Gamma_{\tau k}^{\bar{\sigma}} h_{\sigma t} = 0, \quad (26')$$

$$h_{\tau t;k}^{\bar{\sigma}} = h_{\tau t,k}^{\bar{\sigma}} - \bar{\Gamma}_{tk}^{\bar{p}} h_{\tau r} - \bar{\Gamma}_{\tau k}^{\bar{\sigma}} h_{\sigma t}. \quad (26'')$$

Здесь  $P_{\tau k}^{\sigma}$  — трехиндексный символ для производной локального вектора; для этих величин, антисимметричных по отношению к  $\sigma$  и  $\tau$ , справедливо  $u, v$ -разложение [формула (24) цитированной работы]:

$$P_{\sigma\tau k} = \Gamma_{\sigma\tau k} + \bar{\Gamma}_{\sigma\tau k}. \quad (27)$$



Из двух первых соотношений (26) и из (27) следует:

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ tk \end{matrix} \right\} - \Gamma_{ik}^{\bar{r}} h_{\tau r} = - \left[ P_{\tau k}^{\sigma} - \Gamma_{\tau k}^{\bar{\sigma}} \right]_{\sigma t} = - \bar{\Gamma}_{\tau k}^{\sigma} h_{\sigma t}, \quad (28)$$

и, соответственно,

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ tk \end{matrix} \right\} - \bar{\Gamma}_{ik}^s = - \bar{\Gamma}_{\tau k}^{\sigma} h_{\sigma t} h^{\tau s} = V_{t(k)}^s. \quad (28')$$

Так как  $\bar{\Gamma}_{\tau k}^{\sigma}$  ведет себя алгебраически как  $V$ -тензор по индексам  $\sigma, \tau$ , то это справедливо и по отношению к соответствующим индексам  $s, t$  в левой части равенства (28'), что и отмечено обозначением  $V_{t(r)}^s$ .

Из двух последних соотношений (26) и равенства (27) следует далее:

$$2h_{\tau t, k} - (\Gamma_{ik}^{\bar{r}} + \bar{\Gamma}_{ik}^{\bar{r}}) h_{\tau r} - P_{\tau k}^{\sigma} h_{\sigma t} = 0; \quad (29)$$

комбинируя это уравнение еще раз с первым соотношением (26), получаем в результате:

$$h_{\tau t, k} + \left[ \left\{ \begin{matrix} r \\ tk \end{matrix} \right\} - \Gamma_{ik}^{\bar{r}} - \bar{\Gamma}_{ik}^{\bar{r}} \right] h_{\tau r} = 0. \quad (30)$$

Наконец, из (30) и (24) следует:

$$\left[ \left\{ \begin{matrix} r \\ tk \end{matrix} \right\} + \Delta_{ik}^{\bar{r}} - \Gamma_{ik}^{\bar{r}} - \bar{\Gamma}_{ik}^{\bar{r}} \right] h_{\tau r} = 0. \quad (31)$$

Итак,

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ tk \end{matrix} \right\} - \Delta_{\tau k}^{\tilde{s}} = \left[ \left\{ \begin{matrix} s \\ tk \end{matrix} \right\} - \Gamma_{ik}^{\bar{s}} \right] + \left[ \left\{ \begin{matrix} s \\ tk \end{matrix} \right\} - \bar{\Gamma}_{ik}^{\bar{s}} \right] = V_{t(k)}^s + U_{t(k)}^s. \quad (32)$$

Соотношение (32) представляет, таким образом, разложение антисимметричного по индексам  $s, t$  тензора  $\left\{ \begin{matrix} s \\ tk \end{matrix} \right\} - \Delta_{ik}^s$  на  $u$ - и  $v$ -компоненты. При этом равенство (28') определяет величину  $\Gamma_{ik}^s$  простейшим образом. Выбранный  $h$ -репер входит в вычисление только через трехиндексный символ  $\Delta_{ik}^s$  для соответствующего этому реперу «абсолютного параллелизма».

Но и последний не имеет никакого значения для структуры уравнений Дирака<sup>4</sup>, поскольку при изменении этого абсолютного параллелизма полу- и псевдовекторы испытывают определенные преобразования, так что уравнения Дирака остаются выполненными.

В заключение мы хотим найти преобразования, которым подвергается пространственный псевдовектор и, соответственно, пространственный полутор при изменении локального репера и абсолютного параллелизма.

<sup>4</sup> A. Einstein, W. Mayer. Proc. Akad. Wet. (Amsterdam), 1933. 36, 497. (Статья 72.)

Для этого мы воспользуемся нашими знаниями о поведении соответствующих локальных величин. При вращении репера:

$$h'_s{}^\sigma = a_\tau^\sigma h_s^\tau \quad (33)$$

(где  $a_\tau^\sigma$  — лоренцово вращение, а соотношение

$$a_\tau^\sigma = b_\lambda^\sigma \bar{b}_\tau^\lambda \quad (34)$$

представляет собой соответствующее  $b$ ,  $\bar{b}$ -разложение) пространственный вектор

$$\rho_l = h_l^\sigma \rho_\sigma \quad (35)$$

не изменяется. Пространственный псевдовектор

$$a_{\bar{l}} = h_l^\sigma a_{\bar{\sigma}} \quad (a_{\bar{\sigma}} = h_\sigma^l a_{\bar{l}}) \quad (36)$$

вследствие равенства  $a_{\bar{\sigma}}^{\bar{l}} = a_{\bar{\sigma}}^{\bar{l}}$  подвергается лоренцову вращению, которое задается уравнениями:

$$a_{\bar{l}}^{\bar{k}} = h_l^\sigma a_{\bar{\sigma}}^{\bar{k}} = h_l^\sigma h_\sigma^k a_{\bar{k}}^{\bar{k}} = A_l^k a_{\bar{k}}^{\bar{k}}, \quad (37)$$

$$A_l^k = h_l^\sigma h_\sigma^k = a_\tau^\sigma h_l^\tau h_\sigma^k. \quad (37')$$

Так как

$$\rho_{\bar{l}} = h_l^\sigma \rho_{\bar{\sigma}} \quad (38)$$

— пространственный полутор, то для  $\rho_{\bar{l}}$  справедливы равенства:

$$\rho_{\bar{l}}^{\bar{k}} = h_l^\sigma \rho_{\bar{\sigma}}^{\bar{k}} = (a_\tau^\sigma h_l^\tau) (b_\mu^\alpha \rho_{\bar{\mu}}^\alpha) = b_\alpha^\sigma \bar{b}_\tau^\alpha b_\sigma^\mu h_l^\tau \rho_{\bar{\mu}}^\alpha = \bar{b}_\tau^\mu h_l^\tau \rho_{\bar{\mu}}^\alpha = \bar{b}_\tau^\mu h_l^\tau h_\mu^k \rho_{\bar{k}}^\alpha = \bar{B}_l^k \rho_{\bar{k}}^\alpha, \quad (39)$$

где

$$B_l^k = b_\tau^\sigma h_l^\tau h_\sigma^k \quad (39')$$

является  $B$ -преобразованием, связанным преобразованием Лоренца  $A_l^k$  (37'). В самом деле, это следует из равенств:

$$B_l^k \bar{B}_k^r = (b_\tau^\mu h_l^\tau h_\mu^k) (\bar{b}_\beta^\alpha h_k^\beta h_\alpha^r) = b_\tau^\beta \bar{b}_\beta^\alpha b_\sigma^\mu h_l^\tau h_\mu^k h_\alpha^r = b_\tau^\beta \bar{b}_\beta^\alpha h_l^\tau h_\alpha^r = a_\tau^\alpha h_l^\tau h_\alpha^r = A_l^r. \quad (40)$$

Соотношения  $A_{l,r}^k = 0$  позволяют сделать заключение о преобразовании трехиндексных символов для производной пространственного полутора и псевдовектора.

## МОЖНО ЛИ СЧИТАТЬ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛЬНОСТИ ПОЛНЫМ?\*

(Совместно с Б. Подольским и Н. Розеном)

В полной физической теории существует определенный элемент, соответствующий каждому элементу реальности. Достаточным условием реальности той или иной физической величины является возможность предсказания ее с достоверностью, не нарушая системы. В квантовой механике в случае двух физических величин, описываемых некоммутирующими операторами, знание одной из этих величин делает невозможным знание другой. Тогда, либо 1) описание реальности в квантовой механике с помощью волновой функции является неполным, либо 2) эти две физические величины не могут одновременно обладать реальностью. Рассмотрение проблемы предсказания поведения некоторой системы на основе измерений, выполненных над другой системой, которая предварительно взаимодействовала с рассматриваемой, приводит к результату, что если утверждение «1» неверно, то утверждение «2» также неверно. Таким образом, это приводит к заключению, что описание физической реальности с помощью волновой функции является неполным.

### 1

При анализе физической теории необходимо учитывать различие между объективной реальностью, которая не зависит ни от какой теории, и теми физическими понятиями, с которыми оперирует теория. Эти понятия вводятся в качестве элементов, которые должны соответствовать объективной реальности, и с помощью этих понятий мы и представляем себе эту реальность.

Для суждения об успехе физической теории мы можем задать себе два вопроса: 1) Правильна ли теория? и 2) Является ли даваемое теорией описание полным? Только в том случае, если на оба эти вопроса можно дать положительные ответы, концепции теории могут быть признаны удовлетворительными. Первый вопрос — о правильности теории — ре-

\* *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be considered complete?*  
(With B. Podolsky and N. Rosen). *Phys. Rev.*, 1935, 47, 777—780.,

шается в зависимости от степени согласия между выводами теории и человеческим опытом. Этот опыт, который только и позволяет нам делать заключение о действительности, в физике принимает форму эксперимента и измерения. Мы хотим рассмотреть здесь, имея в виду квантовую механику, второй из поставленных выше вопросов.

Какой бы смысл ни вкладывался в термин «*полное описание*», от всякой полной теории, как нам кажется, необходимо требовать следующее: *каждый элемент физической реальности должен иметь отражение в физической теории*. Мы будем называть это условием полноты. Таким образом, на второй вопрос легко ответить, если мы сможем выяснить, что является элементами физической реальности.

Элементы физической реальности не могут быть определены при помощи априорных философских рассуждений; они должны быть найдены на основе результатов экспериментов и измерений. Однако для наших целей нет необходимости давать исчерпывающее определение реальности. Мы удовлетворимся следующим критерием, который считаем разумным. *Если мы можем, без какого бы то ни было возмущения системы, предсказать с достоверностью (т. е. вероятностью, равной единице) значение некоторой физической величины, то существует элемент физической реальности, соответствующий этой физической величине*. Нам кажется, что этот критерий, хотя он далеко не исчерпывает всех возможных способов распознавания физической реальности, по крайней мере, дает нам один из таких способов, коль скоро выполняются сформулированные в нем условия. Этот критерий, рассматриваемый не как необходимое, а только лишь как достаточное условие реальности, находится в согласии как с классическим, так и с квантовомеханическим представлением о реальности.

Чтобы проиллюстрировать нашу мысль, рассмотрим квантовомеханическое описание поведения частицы, имеющей одну степень свободы. Основное понятие — это понятие *состояния*, которое по предположению полностью характеризуется волновой функцией  $\psi$ . Последняя является функцией переменных, выбранных для описания поведения частицы. Каждой физически наблюдаемой величине  $A$  ставится в соответствие оператор, который можно обозначить той же буквой.

Если  $\psi$  есть собственная функция оператора  $A$ , т. е., если

$$\psi' \equiv A\psi = a\psi \quad (1)$$

где  $a$  — число, то физическая величина  $A$  имеет с достоверностью значение  $a$ , коль скоро частица находится в состоянии  $\psi$ . Если  $\psi$  удовлетворяет уравнению (1), то, согласно нашему критерию реальности, для частицы в состоянии  $\psi$  существует элемент физической реальности, соответствующий

щий физической величине  $A$ . Пусть, например,

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} p_0 x}, \quad (2)$$

где  $h$  — постоянная Планка,  $p_0$  — некоторое постоянное число и  $x$  — независимая переменная. Так как оператор, соответствующий количеству движения частицы, имеет вид

$$p = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3)$$

то мы получаем:

$$\psi' = p\psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial x} = p_0 \psi. \quad (4)$$

Таким образом, в состоянии, которое определяется уравнением (2), количество движения имеет с достоверностью значение  $p_0$ . Значит, в этом случае имеет смысл говорить, что количество движения частицы в состоянии  $\psi$  реально.

С другой стороны, если уравнение (1) не выполняется, мы больше не можем говорить о том, что физическая величина  $A$  имеет определенное значение. Так обстоит дело, например, с координатой частицы. Оператор  $q$ , соответствующий координате, есть оператор умножения на независимую переменную. Таким образом,

$$q\psi = x\psi \neq a\psi. \quad (5)$$

Согласно квантовой механике, мы только можем сказать, что относительная вероятность того, что измерение координаты даст результат, лежащий между  $a$  и  $b$ , равна

$$P(a, b) = \int_a^b \bar{\psi} \psi dx = \int_a^b dx = b - a. \quad (6)$$

Так как эта вероятность не зависит от  $a$ , а зависит только от разности  $b - a$ , мы видим, что все значения координаты равновероятны.

Итак, для частицы в состоянии  $\psi$  [формула (2)] определенного значения координаты предсказать нельзя, а его можно получить только путем непосредственного измерения. Такое измерение вызовет, однако, возмущение частицы, и, таким образом, изменит ее состояние. После того как координата будет определена, частица уже не будет больше находиться в состоянии, задаваемом формулой (2). Обычно в квантовой механике из этого делается следующий вывод: *если количество движения частицы известно, то ее координата не имеет физической реальности.*

В квантовой механике доказывается и более общее положение: если операторы, соответствующие двум физическим величинам, скажем  $A$  и  $B$ , не коммутируют, т. е. если  $AB \neq BA$ , то точное знание одной из этих величин исключает точное знание другой. Кроме того, каждая попытка экспериментально определить вторую величину будет менять состояние таким образом, что уничтожит знание первой.

Из этого следует, что или 1) квантовомеханическое описание реальности посредством волновой функции неполно или 2) когда операторы, соответствующие двум физическим величинам, не коммутируют, эти две величины не могут одновременно быть реальными. Ибо, если бы обе они одновременно были реальными, и следовательно, имели определенные значения, то эти значения должны были бы по условию полноты содержаться в полном описании. Значит, если бы волновая функция обеспечивала полное описание реальности, то оно должно было бы включать эти значения, и их можно было бы предсказывать. Так как это не имеет места, то мы остаемся перед сформулированной выше альтернативой.

В квантовой механике обычно предполагается, что волновая функция действительно дает полное описание физической реальности для системы в состоянии, которому она соответствует. На первый взгляд это предположение вполне приемлемо, так как информация, которая может быть получена из знания волновой функции, кажется точно соответствующей той, которую можно получить при помощи измерений, не изменяя состояния системы. Мы покажем, однако, что это предположение вместе с данным выше критерием реальности приводит к противоречию.

## 2

Для этой цели вообразим себе, что имеются две системы I и II, которым мы даем взаимодействовать от момента времени  $t = 0$  до  $t = T$ , после чего между обеими частями уже не происходит никакого взаимодействия. Кроме того, мы предположим, что состояния обеих систем до  $t = 0$  были известны. Мы можем тогда вычислить с помощью уравнения Шредингера состояние объединенной системы I + II во всякий последующий момент времени, в частности для любого  $t > T$ . Обозначим соответствующую волновую функцию через  $\Psi$ . Мы не можем, однако, вычислить того состояния, в котором каждая из двух систем останется после взаимодействия. Согласно квантовой механике, это состояние может быть найдено только с помощью последующих измерений, путем процесса, известного под названием «редукции волнового пакета». Рассмотрим сущность этого процесса.

Пусть  $a_1, a_2, a_3, \dots$  — собственные значения некоторой физической величины  $A$ , относящейся к системе I, и  $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), \dots$  — соответ-

ствующие собственные функции, причем  $x_1$  обозначает совокупность переменных, которые служат для описания первой системы. Тогда  $\Psi$ , рассматриваемая как функция от  $x_1$ , может быть выражена в виде ряда

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \quad (7)$$

где  $x_2$  обозначает переменные, которые служат для описания второй системы. Здесь величины  $\psi_n(x_2)$  должны рассматриваться просто как коэффициенты разложения  $\Psi$  в ряд по ортогональным функциям  $u_n(x)$ . Предположим теперь, что величина  $A$  измерена, причем найдено, что она имеет значение  $a_k$ . Отсюда выводят заключение, что после измерения первая система остается в состоянии, описываемом волновой функцией  $u_k(x_1)$ , тогда как вторая система — в состоянии с волновой функцией  $u_k(x_2)$ . Это и есть процесс редукции волнового пакета: волновой пакет, задаваемый бесконечным рядом (7), сводится к одному члену  $\psi_k(x_2) u_k(x_1)$ .

Последовательность функций  $u_n(x_1)$  определяется выбором физической величины  $A$ . Если вместо нее мы выбрали бы другую величину, скажем  $B$ , имеющую собственные значения  $b_1, b_2, b_3, \dots$  и собственные функции  $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), \dots$ , мы бы получили вместо соотношения (7) разложение

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) v_s(x_1), \quad (8)$$

где величины  $\varphi_s(x_2)$  представляют собой новые коэффициенты. Если теперь измеряется величина  $B$ , причем она оказывается равной  $b_r$ , то мы заключаем, что после измерения первая система остается в состоянии, которое описывается функцией  $v_r(x_1)$ , а вторая система остается в состоянии, которое описывается функцией  $\varphi_r(x_2)$ .

Мы видим поэтому, что в результате двух различных измерений, произведенных над первой системой, вторая система может оказаться в двух разных состояниях, описываемых различными волновыми функциями. С другой стороны, так как во время измерения эти две системы уже не взаимодействуют, то в результате каких бы то ни было операций над первой системой во второй системе уже не может получиться никаких реальных изменений. Это, конечно, является лишь другой формулировкой того, что понимается под отсутствием взаимодействия между двумя системами. Таким образом, *одной и той же реальности* (вторая система после взаимодействия с первой) *можно сопоставить две различные функции* (в нашем примере  $\psi_k$  и  $\varphi_r$ ).

Но ведь может случиться, что две волновые функции  $\psi_k$  и  $\varphi_r$  являются собственными функциями двух некоммутирующих операторов, соответ-

вующих некоторым физическим величинам  $P$  и  $Q$ . Что такой случай действительно возможен, лучше всего можно показать на примере. Предположим, что две системы являются двумя частицами и что функция  $\Psi(x_1, x_2)$  равна

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i}{h}(x_1 - x_2 + x_0)p} dp, \quad (9)$$

где  $x_0$  — некоторая постоянная. Пусть величиной  $A$  будет количество движения первой частицы; тогда, как мы знаем из уравнения (4), ее собственные функции, соответствующие собственному значению  $p$ , будут

$$u_p(x_1) = e^{\frac{2\pi i}{h} px_1}. \quad (10)$$

Так как мы имеем здесь случай непрерывного спектра, разложение (7) переписется в виде

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp, \quad (11)$$

где

$$\psi_p(x_2) = e^{-\frac{2\pi i}{h}(x_2 - x_0)p}. \quad (12)$$

Но  $\psi_p$  является собственной функцией оператора

$$P = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad (13)$$

соответствующей собственному значению количества движения второй частицы —  $p$ . С другой стороны, если величина  $B$  есть координата первой частицы, то ее собственной функцией, соответствующей собственному значению  $x$ , будет

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x), \quad (14)$$

где  $\delta(x_1 - x)$  — известная дельта-функция Дирака. Соотношение (8) в этом случае принимает вид

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1) dx, \quad (15)$$

где

$$\varphi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i}{h}(x - x_2 + x_0)p} dp = h\delta(x - x_2 + x_0). \quad (16)$$



Но  $\varphi_x$  является собственной функцией оператора

$$Q = x_2, \quad (17)$$

соответствующей собственному значению  $x + x_0$  координаты второй частицы. Так как

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi i}, \quad (18)$$

то мы показали, что, вообще говоря, возможен случай, когда  $\psi_k$  и  $\varphi_r$  являются собственными функциями двух некоммутирующих операторов, соответствующих двум физическим величинам.

Вернемся теперь к общему случаю, к которому относятся соотношения (7) и (8). Мы предположим, что  $\psi_k$  и  $\varphi_r$  действительно являются собственными функциями некоторых некоммутирующих операторов  $P$  и  $Q$ , причем  $\psi_k$  соответствует собственному значению  $p_k$ , а  $\varphi_r$  соответствует собственному значению  $q_r$ . В таком случае, измерив  $A$  и  $B$ , мы сможем предсказать с достоверностью и без какого бы то ни было возмущения второй системы либо значение величины  $P$  (т. е.  $p_k$ ), либо значение величины  $Q$  (т. е.  $q_r$ ). Согласно нашему критерию реальности, в первом случае мы должны считать элементом реальности величину  $P$ , а во втором случае элементом реальности будет величина  $Q$ . Но, как мы видели, обе волновые функции  $\psi_k$  и  $\varphi_r$  относятся к одной и той же реальности.

Выше мы показали, что или 1) квантовомеханическое описание реальности посредством волновой функции не является полным или 2) если операторы, соответствующие двум физическим величинам, не коммутируют, эти две величины не могут одновременно обладать реальностью. Исходя затем из предположения, что волновая функция действительно дает полное описание физической реальности, мы пришли к выводу, что две физические величины с некоммутирующими операторами могут быть реальными одновременно. Таким образом, отрицание «1» приводит к отрицанию единственного остающегося предположения «2». Итак, мы вынуждены заключить, что квантовомеханическое описание физической реальности посредством волновых функций не является полным.

На это заключение можно было бы возражать, основываясь на том, что наш критерий реальности не является достаточно ограничивающим. Действительно, мы бы не пришли к нашему заключению, если бы настаивали на том, что две или больше физических величины могут одновременно считаться элементами реальности *только в том случае, если их можно одновременно измерить или предсказать*. С этой точки зрения величины  $P$  и  $Q$  одновременно не обладают реальностью, поскольку предсказать можно либо  $P$ , либо  $Q$ , но не  $P$  и  $Q$  одновременно. Здесь реальность  $P$  и  $Q$  ставится в зависимость от процесса измерения, производимого над первой

системой, хотя этот процесс никоим образом не влияет на вторую систему. Никакое разумное определение реальности не должно, казалось бы, допускать этого.

Хотя мы и показали, что волновая функция не дает полного описания физической реальности, мы оставили открытым вопрос о том, существует ли такое описание или нет. Мы думаем, однако, что такая теория возможна.

Поступила 25 марта 1935 г.

Статья в русском переводе опубликована в журнале «Успехи физических наук» (1936, 16, стр. 436). Вместе с этой статьей под тем же заголовком опубликована вступительная статья В. А. Фока и ответ Нильса Бора.

**КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТЬ\***

В этой статье я хочу кратко и элементарно изложить, почему я не считаю метод квантовой механики в принципе удовлетворительным. Однако в то же время я хочу заметить, что никоим образом не собираюсь отрицать того, что эта теория представляет выдающийся, в известном смысле даже окончательный, шаг в физическом познании. Мне представляется, что эта теория будет содержаться в более поздней примерно так, как геометрическая оптика в волновой оптике: связи останутся, но основа будет развита и, соответственно, заменена более широкой.

**I**

Свободную частицу в некоторый момент времени я представляю себе описываемой (полно в смысле квантовой механики) пространственно ограниченной  $\psi$ -функцией. Согласно такому представлению, частица не имеет ни точно определенного количества движения (импульса), ни точно определенного положения в пространстве.

В каком смысле должен я теперь представлять себе то, что это описание отражает действительно конкретное положение дел? Мне представляются возможными два близких понимания, которые мы и сопоставим:

а) В действительности (свободная) частица имеет определенное положение в пространстве и определенный импульс, если даже они в том же индивидуальном случае не могут быть одновременно установлены путем измерения. Согласно этому толкованию,  $\psi$ -функция дает *неполное* описание реального положения вещей.

\* *Quanten-Mechanik und Wirklichkeit. Dialectica*, 1948, II, 320—323.

Это толкование не является общепринятым у физиков. Его принятие привело бы к тому, что от физики потребовалось бы дать, наряду с неполным, полное описание положения вещей и найти законы такого описания. Этим были бы подорваны теоретические рамки квантовой механики.

б) Частица не имеет в действительности ни определенного импульса, ни определенного положения в пространстве; описание с помощью  $\psi$ -функции является в принципе полным описанием. Точное местоположение частицы, которое я получаю в результате его измерения, не может быть интерпретировано как местоположение частицы *до* измерения. Точная локализация, которая обнаруживается при измерении, будет проявляться только через неизбежное (не несущественное) воздействие измерения. Результат измерения зависит не только от реального положения частицы, но также и от принципиально неполного знания природы механизма измерения. Аналогично обстоит дело и в том случае, когда измеряется импульс или некоторая другая относящаяся к частице наблюдаемая величина. Это, пожалуй, наиболее предпочтительная у физиков современная интерпретация; следует признать, что в рамках квантовой механики только она естественным образом согласуется с эмпирическими фактами, выраженными в принципе неопределенности Гейзенберга.

Согласно этому толкованию, две различные (не только тривиально)  $\psi$ -функции описывают всегда две различные реальные ситуации (например, частицы с точно определенным положением в пространстве и, соответственно, частицы с точно определенным импульсом).

Сказанное справедливо, с необходимыми изменениями, также и для описания систем, состоящих из многих материальных точек. Здесь мы признаем также (в смысле интерпретации I „б“), что  $\psi$ -функция полностью описывает реальное положение вещей и что две (существенно) различные функции описывают две различные ситуации и тогда, когда они при проведении полного измерения приводят к совпадающим результатам; в этом случае совпадение результатов измерения будет отчасти приписано неполностью известному влиянию измерительного устройства.

## II

Если спросить, что характерно для мира физических идей, независимо от квантовой теории, то прежде всего бросается в глаза следующее: понятия физики относятся к реальному внешнему миру, т. е. они предполагают идеи о вещах, требующих независимого от воспринимających субъектов «реального существования» (тела, поля и т. д.); эти идеи, с другой стороны, приводятся в возможно более верное соответствие с чувственными восприятиями. Характерным для этих физических объектов явля-

ется, далее, то что они мыслятся распределенными некоторым образом в пространственно-временном континууме. Существенным для этого распределения вводимых в физику объектов является требование существования вещей в некоторый определенный момент времени независимо друг от друга, поскольку они «находятся в различных частях пространства». Без признания такой независимости существования («бытия как такового») пространственно отдаленных друг от друга объектов, которое берет свое начало от обыденного мышления, было бы невозможно физическое мышление в привычном для нас смысле. Без такого чистого обособления было бы неясно также, как могли формулироваться и проверяться физические законы. Теория поля довела этот принцип до крайности, локализовав в (четырёхмерных) бесконечно малых пространственных элементах лежащие в ее основе независимо друг от друга существующие объекты, а также постулированные для них элементарные законы.

Для относительной независимости пространственно отдаленных объектов ( $A$  и  $B$ ) характерна следующая идея: внешнее влияние  $A$  не имеет никакого *непосредственного* влияния на  $B$ ; это известно как «принцип близкодействия», который последовательно применяется только в теории поля. Полное упразднение этого основного положения сделало бы невозможной идею о существовании (квази-) замкнутых систем и вместе с тем установление эмпирически проверяемых законов в привычном для нас смысле.

### III

Я утверждаю, что квантовая механика в ее интерпретации (I, б<sup>а</sup>) не совместима с основным положением II.

Рассмотрим физическую систему  $S_{12}$ , которая состоит из двух подсистем:  $S_1$  и  $S_2$ . Обе эти подсистемы в прошлом могли находиться в физическом взаимодействии. Но мы рассматриваем их в момент времени  $t$ , когда это взаимодействие уже отсутствует. Вся система описывается полностью (в смысле квантовой механики)  $\psi$ -функцией  $\psi_{12}$  с координатами  $q_1, \dots$ , и, соответственно,  $q_2, \dots$ , обеих подсистем [ $\psi_{12}$  будет представляться не как произведение вида  $\psi_1(q_1, \dots) \psi_2(q_2, \dots)$ , но только как сумма таких произведений]. В момент времени  $t$  обе подсистемы пространственно разделены друг от друга настолько, что  $\psi_{12}$  только тогда отлично от 0, когда  $q_1, \dots$  принадлежит ограниченной пространственной области  $R_1$  и  $q_2, \dots$  — отдаленной от  $R_1$  пространственной области  $R_2$ .

В этом случае  $\psi$ -функции отдельных подсистем  $S_1$  и  $S_2$  прежде всего неизвестны и вообще не существуют. Но методы квантовой механики позволяют определить  $\psi_2$  системы  $S_2$  из  $\psi_{12}$ , если к тому же имеется в смысле квантовой механики полное измерение подсистемы  $S_1$ . Из определенной

таким образом первоначальной функции  $\psi_{12}$  системы  $S_{12}$  получают  $\psi$ -функцию  $\psi_2$  подсистемы  $S_2$ .

В этом определении, однако, имеет существенное значение то, какого рода полное (в квантовомеханическом смысле) измерение подсистемы  $S_1$  предпринимается, т. е. какую наблюдаемую мы измеряем. Если, например,  $S_1$  — одна-единственная частица, то нам позволено измерить ее координаты, или компоненты ее импульса. Сообразно этому выбору мы получаем для  $\psi_2$  другого рода представление, а именно такое, при котором в зависимости от выбора измерения системы  $S_1$  следуют различного рода (статистические) предсказания о дополнительных предпринимаемых измерениях в  $S_2$ . С точки зрения интерпретации I „б“, это означает, что сообразно выбору полного измерения в  $S_1$  создаются относительно  $S_2$  различные реальные ситуации, которые описываются разного рода  $\psi_2$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_2$  и т. д.

С точки зрения *только* квантовой механики это не представляет никакой трудности. Сообразно особому выбору измерения в  $S_1$ , создается именно различная реальная ситуация, и нет необходимости поступать так, чтобы в той же самой системе  $S_2$  одновременно сопоставлялись две или больше различные  $\psi$ -функции  $\psi_2$ ,  $\psi_2, \dots$

Однако иначе обстоит дело в том случае, когда пытаются одновременно с принципами квантовой механики придерживаться принципа II о самостоятельном существовании имеющегося в двух разобренных частях пространства  $R_1$  и  $R_2$  реального положения вещей. В нашем примере именно полное измерение в  $S_1$  означает физическое вмешательство, которое касается только пространства  $R_2$ . Но такое вмешательство не может непосредственно оказать влияние на физическую реальность в отдаленной части пространства  $R_2$ . Из этого следовало бы, что каждое высказывание относительно  $S_2$ , которое мы могли бы получить на основе полного измерения в  $S_1$ , для системы  $S_2$  должно было бы иметь значение также тогда, когда вообще никакого измерения в  $S_1$  не производилось. Это означало бы, что для  $S_2$  должны были бы быть справедливыми одновременно все высказывания, которые можно было бы вывести из положения о  $\psi_2$  или  $\psi_2$  и т. д. Это, конечно, невозможно, когда  $\psi_2$ ,  $\psi_2$  и т. д. означают отличное друг от друга реальное положение вещей в  $S_2$ , т. е. когда вступают в конфликт с интерпретацией I „б“  $\psi$ -функции.

Мне кажется, не подлежит сомнению, что физики, которые считают квантовомеханический способ описания принципиально окончательным, будут на эти соображения реагировать следующим образом: они откажутся от требования II о независимом существовании имеющихся в различных областях пространства физических реальностей; они могут с полным правом сослаться на то, что квантовая теория явно нигде не применяет это требование.

Я соглашаюсь с этим, но хочу заметить, что, когда я рассматриваю известные мне физические явления и, в особенности, те из них, которые так успешно изучаются с помощью квантовой механики, то я все же нигде не нахожу факта, который казался бы мне достаточно основательным, чтобы отказаться от требования II. Поэтому я склонен думать, что следовало бы рассматривать описание квантовой механики в смысле I, а "как неполное и не прямое описание реальности, которое позже будет заменено опять полным и прямым.

Во всяком случае нужно, по моему мнению, остерегаться того, чтобы при отыскании единой основы для всей физики догматически опираться на схему современной теории.

Русский перевод статьи опубликован в журнале «Вопросы философии» за 1957 год (№ 3, стр. 126—128). В этом же номере журнала помещен перевод предисловия Эйнштейна к книге М. Джэммера «Понятие пространства» (см. том IV).

## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ПО ПОВОДУ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ОСНОВ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ \*

Своеобразие современной ситуации в квантовой механике состоит, по-моему, в том, что сомнениям подвергается не математический аппарат теории, а физическая интерпретация ее утверждений. Каково отношение  $\psi$ -функции к конкретной единичной ситуации, т. е. к индивидуальному состоянию некоторой отдельно взятой системы? Иными словами: что говорит  $\bar{\psi}$ -функция об (индивидуальном) «реальном состоянии»?

Прежде всего можно усомниться в том, что такой вопрос вообще имеет какой-либо смысл. Действительно, можно встать на такую точку зрения: «реальное» есть только результат отдельного наблюдения, а не то, что объективно существует в пространстве и времени независимо от акта наблюдения. Принимая эту чисто позитивистскую точку зрения, можно, очевидно, не думать о том, как понимать «реальное состояние» в рамках квантовой теории. Тогда попытки ответить на поставленный вопрос напоминают борьбу с призраками.

Но эта чисто позитивистская точка зрения — если ее проводить последовательно — имеет один непоправимый недостаток: она ведет к тому, что следует считать лишенными смысла вообще все словесные высказывания. Вправе ли мы говорить, что описание отдельного результата наблюдений имеет смысл и, соответственно, что оно истинно или ложно? Разве не может такое описание основываться на обмане чувств или на ощущениях, которые можно было бы истолковать как воспоминания о сновидениях или как галлюцинации? Имеет ли вообще какой-либо объективный смысл различие между ощущениями наяву и во сне? В конце концов, «реальными» остаются только ощущения некоего «я» без какой-либо возможности что-нибудь сказать о них. В самом деле, понятия, применяемые в высказываниях, при чисто позитивистском анализе все без исключений оказываются лишенными смысла.

\* *Elementare Überlegungen zur Interpretation der Grundlagen der Quanten-Mechanik*. В сб. «Scientific Papers, presented to Max Born», 1953, Edinburgh: Oliver & Boyd, 33—40.



В действительности же применяемые в наших высказываниях независимые понятия и системы понятий являются творением человека, созданными им орудиями, оправдание и ценность которых основываются исключительно на том, что они позволяют «с пользой» упорядочить ощущения (оправданность). Иначе говоря, применение этих орудий оправдано, поскольку понятия позволяют «объяснить»<sup>1</sup> ощущения.

Только с точки зрения этой оправданности и следует выносить суждение об обоснованности понятий и систем понятий. Это относится также и к понятиям «физическая реальность», «реальность внешнего мира», «реальное состояние системы». Априори нет оснований считать эти понятия логически необходимыми или запрещать их; это решает только оправданность. За этими словами-символами кроется целая программа, которая безусловно служила основой развития физического мышления вплоть до создания квантовой теории: все должно сводиться к мысленным пространственно-временным объектам и к закономерным связям между этими объектами. В таком описании нет ничего, что было бы связано с эмпирическими знаниями об этих объектах. Например, Луне в каждый данный момент времени приписывается положение в пространстве (относительно некоторой системы координат), независимо от того, наблюдается это положение или нет. Этот способ описания и подразумевают, когда говорят о физическом описании «реального внешнего мира», каким бы ни был выбор элементарных понятий (материальные точки, поле и т. д.), положенных в основу такого описания.

Физики не подвергали серьезным сомнениям обоснованность этой программы, пока казалось, что все фигурирующие при таком описании понятия в принципе можно установить эмпирически в каждом отдельном случае. Иллюзорность подобных представлений убедительно показал Гейзенберг на примере квантовых явлений.

После его работ понятие «физической реальности» стало проблематичным и возник вопрос, что же собственно пытается описывать теоретическая физика (с помощью квантовой механики) и к чему относятся открываемые ею закономерности. На этот вопрос отвечают по-разному.

Чтобы подойти к ответу на этот вопрос, посмотрим, что говорит квантовая механика о макросистемах, т. е. о таких объектах, которые мы можем «воспринимать непосредственно». Мы знаем, что такие объекты и законы, управляющие ими, описываются классической физикой с большой, хотя и не сколь угодно высокой, точностью. Мы не сомневаемся, что такие объекты в каждый момент времени занимают некоторое реальное

.....  
<sup>1</sup> В основе словесного родства слов «правда» и «оправдываться» лежит родство по существу; не следует понимать это утверждение только в утилитарном смысле.

положение (место) и обладают некоторой скоростью (импульсом), т. е. они находятся в некотором *реальном состоянии* (все это в приближении, обусловленном квантовой структурой).

Спросим теперь: включает ли в себе квантовая механика (с вытекающими из нее ограничениями на точность) то реальное описание движения макроскопических тел, которое дает классическая механика? Если же на этот вопрос нельзя просто ответить «да», то в каком смысле об этом можно говорить? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим следующий конкретный пример.

### Специальный пример

Рассмотрим систему, состоящую из шарика диаметром около 1 мм, который движется вперед и назад (вдоль оси  $X$  некоторой системы координат) между двумя параллельными стенками (расстояние между которыми составляет примерно 1 м). Пусть столкновения шарика со стенками будут идеально упругими. Теперь будем описывать стенки в этой идеализированной макроскопической системе круто возрастающим потенциалом, выражение для которого зависит только от координат материальных точек, образующих шарик. Пусть нам удалось сделать так, что в процессе отражения не устанавливается никакой связи между координатой центра тяжести шарика  $x$  и его «внутренними» координатами (включая угловые). Этим мы достигаем того, что для наших целей положение шарика (с точностью до его радиуса) может описываться одной координатой  $x$ .

С точки зрения квантовой механики здесь речь идет о процессе с точно заданной энергией. Тогда волна де Бройля ( $\psi$ -функция) будет гармонической по времени. Кроме того, она будет отлична от нуля только между  $x = -l/2$  и  $x = +l/2$ . Вне этого отрезка  $\psi$ -функция равна нулю. Вследствие же непрерывности  $\psi$ -функции она должна обращаться в нуль в конечных точках отрезка, т. е. при  $x = \pm l/2$ .

Следовательно,  $\psi$ -функция является стоячей волной, которую можно представить на этом отрезке в виде суперпозиции двух гармонических волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\psi = \frac{1}{2} A e^{i(at-bx)} + \frac{1}{2} A e^{i(at+bx)}, \quad (1)$$

или

$$\psi = A e^{iat} \cos(bx). \quad (1a)$$

Из равенства (1a) легко видеть, что множитель  $A$  в обоих равенствах должен быть одинаковым, если мы хотим удовлетворить граничным условиям на концах отрезка. Не ограничивая общности, множитель  $A$  можно

взять вещественным. Согласно уравнению Шредингера, величина  $b$  полностью определяется массой  $m$ . Будем считать, что множитель  $A$  нормирован обычным способом.

Для правомерности сравнения этого примера с соответствующей задачей классической механики мы должны еще предположить, что длина волны де Бройля  $2\pi/b$  мала по сравнению с  $l$ .

Прежде всего, примем, как обычно, вероятностную интерпретацию  $\psi$ -функции, предложенную Борном:

$$W = \int \psi \bar{\psi} dx = A^2 \int \cos^2 (bx) dx.$$

Это — вероятность того, что координата  $x$  центра тяжести шарика лежит в заданном интервале  $\Delta x$ . Она равна просто  $\text{const} \cdot \Delta x$  — отвлекаясь от волновой «тонкой структуры», физическая реальность которой несомненна.

Как обстоит теперь дело с вероятностью значений импульса (скорости) шарика? Эту вероятность можно найти с помощью преобразования Фурье волновой функции  $\psi$ . Если бы формула (1) была справедлива при всех  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то она и была бы искомым рядом Фурье. Тогда импульс имел бы два равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку определенных значения, обладающих равной вероятностью. Поскольку же оба цуга волн ограничены, каждый из них дает интеграл Фурье с тем более узким спектральным интервалом, чем большее число волн де Бройля укладывается на длине  $l$ . Это происходит потому, что для импульса возможны только два почти в точности равных по величине, но противоположных по знаку значения — согласующихся при этом со значениями в классическом случае, — и притом с одинаковой вероятностью.

Таким образом, с точностью до малых отклонений, обусловленных квантовой структурой, эти два статистических результата и есть то, что удовлетворяет «временному ансамблю» в случае классической теории. Следовательно, в этом отношении теория вполне удовлетворительна.

Но теперь возникает вопрос: может ли эта теория дать реальное описание отдельного события? На этот вопрос следует ответить: «нет». При этом существенно, что здесь речь идет о «макросистеме». Действительно, в случае макросистемы мы уверены, что она в каждый момент времени находится в «реальном состоянии», правильно (приближенно) описываемом классической механикой. Следовательно, отдельная макросистема рассматриваемого нами типа в каждый момент времени имеет почти определенную координату центра тяжести и — по крайней мере, усредненный по малому промежутку времени — почти определенный импульс (имеющий также определенный знак). Ни одно из этих двух значений нельзя получить из  $\psi$ -функции (1). Из нее можно получить (с помощью статистической интерпретации Борна) только такие результаты, которые относятся к *статистическому ансамблю* систем рассматриваемого типа.

То обстоятельство, что для рассматриваемой системы не всякая  $\psi$ -функция, удовлетворяющая уравнению Шредингера, приближенно соответствует реальному описанию в смысле классической механики, особенно четко проявляется при рассмотрении  $\psi$ -функции, являющейся суперпозицией двух решений типа (1) с частотами (или энергиями), существенно отличающимися друг от друга. В самом деле, такой суперпозиции вообще не соответствует ни один реальный случай в классической механике (она соответствует статистическому ансамблю таких реальных случаев в духе интерпретации Борна).

Обобщая сказанное, мы приходим к выводу: квантовая механика описывает ансамбль систем, но не отдельные системы. В этом смысле описание отдельной системы с помощью  $\psi$ -функции является неполным;  $\psi$ -функция не описывает реальное состояние такой системы.

*Примечание.* Против этого заключения можно возразить следующим образом. Рассмотренный нами случай строгой монохроматичности  $\psi$ -функции является предельным, и для него требование соответствия с задачей классической механики, возможно, окажется в виде исключения неправильным. Если взять конечный, хотя и малый интервал частот, то при соответствующем выборе амплитуд и фаз  $\psi$ -функций, участвующих в суперпозиции, можно получить  $\psi$ -функцию, которая будет приблизительно соответствовать определенной координате и определенному импульсу. Почему бы не попытаться рассматривать только такие  $\psi$ -функции и считать, что разрешенные  $\psi$ -функции описывают отдельные системы?

Такую возможность следует отвергнуть уже по той причине, что определенные значения координат в таком описании можно сохранить не для любых значений времени.

То обстоятельство, что уравнение Шредингера вместе с интерпретацией Борна не приводит к описанию реальных состояний отдельных систем, пробуждает, естественно, стремление к поискам теории, свободной от этого ограничения.

Пока в этом направлении были предприняты две попытки, причем обе основывались на использовании уравнения Шредингера и отказе от интерпретации Борна. Первая попытка восходит к де Бройлю; недавно ее с большим остроумием развивал Бом.

Подобно тому, как в своем первоначальном исследовании Шредингер пришел к волновому уравнению из рассмотрения аналогии с классической механикой (линеаризация уравнения Якоби аналитической механики), при выводе уравнения движения отдельной квантовой системы, описываемой решением уравнения Шредингера, следует исходить из той же аналогии. Правило заключается в следующем. Волновая функция  $\psi$  приводится к виду

$$\psi = Re^{iS}.$$

Так из  $\psi$  получаются две (вещественные) функции координат,  $R$  и  $S$ . Тогда, дифференцируя  $R$  по координатам, можно найти импульсы, или скорости, системы как функции времени, если координаты рассматриваемой отдельной системы в некоторый момент времени заданы.

Равенство (1а) показывает, что в нашем случае  $\partial S/\partial x$ , а значит и скорость, тождественно равны нулю. Такое возражение против этой теоретической попытки, выдвинутое, впрочем, еще четверть века назад Паули, применительно к нашему примеру является особенно веским. Обращение скорости в нуль противоречит разумному требованию, что в случае макросистемы движение приблизительно должно соответствовать классической механике.

Вторая попытка прийти к описанию реального состояния отдельной системы на основе уравнения Шредингера недавно была предпринята самим Шредингером. Его идея, если говорить коротко, заключается в следующем. Функция  $\psi$  сама является реальностью и не нуждается в интерпретации Борна. Атомистических образований, о которых до сих пор должно было что-то говорить  $\psi$ -поле, не существует вообще, по крайней мере как локализованных объектов. В применении к нашей макросистеме это означает: макроскопическое тело, как таковое, не существует вообще; во всяком случае не существует — хотя бы приблизительно — таких вещей, как положение его центра тяжести в данный момент времени. Следовательно, здесь также нарушается требование, чтобы квантовомеханическое описание движения макросистемы приблизительно соответствовало описанию классической механики.

Результат нашего рассмотрения сводится к следующему. Единственной приемлемой пока интерпретацией уравнения Шредингера является статистическая интерпретация, данная Борном. Однако она не описывает реального состояния отдельной системы, а только позволяет делать статистические высказывания об ансамблях систем.

По моему мнению, в принципе неверно класть в основу физики такие теоретические представления, поскольку нельзя отказаться от возможности объективного описания отдельной *макросистемы* (от описания «реального состояния») без того, чтобы физическая картина мира в известной степени «скрылась в тумане». В конце концов, кажется, неизбежным представление, что физика должна стремиться к описанию реального состояния отдельной системы. Природу в целом можно рассматривать только как отдельную (однократно существующую) систему а не как «ансамбль систем».

## ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЯХ\*

Я хочу предпослать нашей работе<sup>1</sup>, написанной совместно с г-жой Б. Кауфман и предназначенной для этого сборника, несколько слов на том единственном языке, на котором я могу говорить свободно. Это — слова извинения. Они должны объяснить, почему несмотря на то, что в сравнительно молодом возрасте я с восхищением воспринял гениальное открытие де Бройлем внутренней связи между дискретными квантовыми состояниями и резонансными состояниями, я все же непрестанно предпринимал попытки найти другой путь, следуя по которому можно было бы дать иной метод решения загадки квантов или, по крайней мере, способствовать подготовке такого решения. В основе этих попыток лежит чувство глубокой неудовлетворенности принципиального характера, которую вызывают у меня основания статистической квантовой теории. Я абсолютно уверен, что и сам де Бройль отнюдь не чужд этого чувства. Это ясно видно из одной его работы двадцатых годов, в которой он предпринял попытку так дополнить квантовую механику, чтобы она давала полное описание конфигурации системы в зависимости от времени в рамках понятий классической механики (материальная точка, потенциальная энергия). В последнее время к этой идее, не зная о работе де Бройля, пришел Д. Бом (теория волны-пилота).

Я несколько не сомневаюсь, что современная квантовая теория (точнее, «квантовая механика») дает наиболее полное совпадение с опытом, коль скоро в основу описания в качестве элементарных понятий положены понятия материальной точки и потенциальной энергии. Однако то, что

\* *Einleitende Bemerkungen über Grundbegriffe.* В сборнике «Louis de Broglie, physicien et penseur». Paris, 1953, стр. 4—14. (В этом же сборнике напечатан также французский перевод статьи, стр. 5—15.— *Прим. ред.*)

<sup>1</sup> Имеется в виду работа А. Эйнштейна и Б. Кауфман «О современном состоянии общей теории гравитации», опубликованной в том же сборнике (стр. 321—342). См. т. II, статья 143.— *Прим. ред.*

я считаю неудовлетворительным в этой теории, состоит в интерпретации, которую дают « $\psi$ -функции». Во всяком случае, в основе моего понимания лежит положение, решительно отвергаемое наиболее крупными современными теоретиками:

*Существует нечто вроде «реального состояния» физической системы, существующего объективно, независимо от какого бы то ни было наблюдения или измерения, которое в принципе можно описать с помощью имеющихся в физике средств. [Какие адекватные средства следует применять для этого, и, следовательно, какими фундаментальными понятиями следует воспользоваться, на мой взгляд, пока неизвестно. (Материальная точка? Поле? Какое-либо другое средство описания, которое надо еще найти?)].* Этот тезис о реальности сам по себе не имеет ясного смысла ввиду своего «метафизического» характера, он носит лишь *программный* характер. Однако все люди, в том числе и теоретики, занимающиеся квантовой механикой, твердо придерживаются этого положения о реальности до тех пор, пока не обсуждаются основы квантовой механики. Никто, например, не сомневается в том, что центр тяжести Луны в некоторый наперед заданный момент времени занимает вполне определенное положение даже в том случае, если нет никакого (реального или потенциального) наблюдателя. Если же отбросить этот произвольный тезис о реальности, рассматриваемый в чисто логическом плане, то будет весьма трудно избежать солипсизма. В силу сказанного я отнюдь не стыжусь сделать понятие «реального состояния физической системы» центральным пунктом своих рассуждений.

Теперь нет никаких сомнений в том, что  $\psi$ -функция является некоторым способом описания «реального состояния». Вопрос состоит лишь в том, полно или неполно такое описание реального состояния. Всякий раз, когда пытаются дать ответ на этот вопрос, сталкиваются с некоторыми трудностями.

Первое предположение: описание полно. В этом случае, согласно уравнению Шредингера, тело, на которое не действуют никакие силы, плавает в пространстве, занимая тем менее определенное положение (относительно инерциальной системы), чем медленнее оно движется, будучи предоставленным самому себе. Но последующее наблюдение с помощью света позволяет почти точно указать его положение. Если бы описание с помощью  $\psi$ -функции действительно было полным описанием системы, мы должны были бы заключить, что найденное нами вначале почти точное положение тела представляет собой следствие наблюдения, но не существует до этих наблюдений. Однако это заключение противоречит интуиции, если речь идет о каком-нибудь макроскопическом теле, а не об электроны или атоме. (То обстоятельство, что создание большой неопределенности положения для тела значительной массы по этой теории требует длительного промежутка времени, не может помочь, поскольку эти промежутки не столь уж велики

даже для тел, которые еще можно считать микроскопическими.) С точки зрения этой теории не может представиться и такой случай, когда положение тела в начальный момент времени *должно быть* задано почти точно.

Поэтому описание системы с помощью  $\psi$ -функции приходится считать неполным описанием реальных состояний. Имеются и другие соображения, которые приводят к тому же заключению. Аппарат квантовой теории таков, что  $\psi$ -функция одной подсистемы некоторой полной системы, состоящей из двух подсистем, изменяется в зависимости от характера (полного) измерения, производимого над второй подсистемой. Так происходит даже в том случае, если обе подсистемы к тому времени, когда производится измерение, оказываются разделенными в пространстве. Если бы  $\psi$ -функция давала *полное* описание реального состояния, то это бы означало, что измерение, производимое над второй подсистемой, оказывает влияние на реальное состояние первой подсистемы. Это соответствовало бы существованию какой-то непосредственной связи между двумя пространственно разделенными объектами. Однако этот случай также отвергается интуицией. Таким образом, и в этом случае приходят к выводу, что описание состояния с помощью  $\psi$ -функции следует считать неполным.

Второе предположение: описание с помощью  $\psi$ -функции неполно. В этом случае приходится прийти к выводу о том, что должно существовать некоторое более полное описание. Кроме того, высказывается мнение, что в подлинных законах природы должны фигурировать данные полного, а отнюдь не неполного описания. Трудно также удержаться от подозрения, что статистический характер теории обусловлен, по-видимому, неполнотой описания и не имеет никакого отношения к природе вещей.

Подобные соображения вполне могли бы сыграть определенную роль и при разработке «теории волны-пилота». Во всяком случае эта теория обходит указанные выше трудности. Сам Л. де Бройль недавно показал, почему он отказался от этого выхода. Теория броуновского движения, в основу которой положены классическая механика и закон осмотического давления, вряд ли могла служить исходным пунктом для создания молекулярно-кинетической теории, если бы теория броуновского движения хронологически предшествовала последней. Мне кажется, что статистическая квантовая теория столь же мало пригодна в качестве исходного пункта для построения более полной теории.

Следующие соображения еще более укрепили меня в этом мнении. Статистическая квантовая теория отчасти обязана своим возникновением тому обстоятельству, что кажущиеся сколь угодно малыми воздействия могут привести к конечным изменениям состояния системы. Например, комптон-эффект показывает, что дуг волн произвольно малой амплитуды и конечной протяженности может передать некоторую конечную энергию электрону. Дело обстоит так, как если бы слабое поле могло бы вызвать



не непосредственно перенос конечного количества энергии, а создавало бы лишь небольшую вероятность такого переноса. Но чтобы вероятность какого-то изменения можно было рассматривать как истинное изменение состояния электрона, следует придать смысл «квантовому состоянию», которое в данном случае представляет собой суперпозицию индивидуальных состояний электронов с различной энергией; при этом каждому из этих состояний отвечает некоторая амплитуда вероятности. Таким образом, появляется возможность сопоставить действие слабого поля малому изменению амплитуды вероятности, т. е. «состояния», и тем самым математически свести кажущийся дискретным процесс с конечной скоростью изменения к непрерывному изменению амплитуды вероятности.

Ценой, которую приходится платить за такое сведение одного процесса к другому, служит введение реальных состояний, включающих в себя бесконечно большое число состояний с различной энергией. Необходимость этой жертвы вызвана тем, что мы надеемся постичь физическую природу взаимодействия (в данном случае — слабое и ограниченное в пространстве волновое поле). Это связано с тем, что в квантовой механике сохраняется классическое понятие силы и, соответственно, потенциальной энергии, и только закон движения заменяется чем-то совсем новым. Совершенство математического аппарата теории и ее значительный успех скрывают от нашего взора тяжесть тех жертв, которые приходится приносить для этого.

Однако мне кажется, что в конце концов выяснится, что вместо действующей силы и, соответственно, потенциальной энергии (или — в случае комптон-эффекта — волнового поля) следует принять нечто, обладающее атомистической структурой в том же смысле, что и сам электрон. Тогда вообще не будет «слабых полей» и, соответственно, сил как действующего начала, так же как не существует смешанных состояний.

Еще одно последнее замечание: мои усилия пополнить общую теорию относительности путем обобщения уравнений гравитации были предприняты отчасти в связи с предположением о том, что, по-видимому, разумная общая релятивистская теория поля, возможно, могла бы дать ключ к более совершенной квантовой теории. Это — скромная надежда, но никак не убеждение. Имеются веские аргументы против мнения, что описание реальности, основанное на дифференциальных уравнениях (теория поля), может, вообще говоря, согласоваться с атомистическим характером реальности. Однако эти соображения, насколько я могу судить, не являются обязательными, и у нас до сих пор вообще нет никакого другого пути для формулировки общерелятивистских законов.

Статья (вместе со статьей 143 из т. II) напечатана в сборнике, изданном в ознаменование 60-летнего юбилея Луи де Бройля. Это последнее опубликованное высказывание Эйнштейна в его споре с квантовой физикой, одним из создателей которой был он сам.

# СОДЕРЖАНИЕ

От редакции	5
<b>1901 г.</b>	
1. Следствия из явлений капиллярности	7
<b>1902 г.</b>	
2. О термодинамической теории разности потенциалов между металлами и полностью диссоциированными растворами их солей и об электрическом методе исследования молекулярных сил	18
3. Кинетическая теория теплового равновесия и второго начала термодинамики	34
<b>1903 г.</b>	
4. Теория основ термодинамики	50
<b>1904 г.</b>	
5. К общей молекулярной теории теплоты	67
<b>1905 г.</b>	
6. Новое определение размеров молекул	75
7. Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света	92
8. О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты	108
<b>1906 г.</b>	
9. К теории броуновского движения	118
10. К теории возникновения и поглощения света	128

**1907 г.**

---

11. Теория излучения Планка и теория удельной теплоемкости 134
12. Поправка к моей работе «Теория излучения Планка и т. д.» 144
13. О границе применимости теоремы о термодинамическом равновесии и о возможности нового определения элементарных квантов 145
14. Теоретические замечания о броуновском движении 149

**1908 г.**

---

15. Новый электростатический метод измерения малых количеств электричества 152
16. Элементарная теория броуновского движения 155

**1909 г.**

---

17. К современному состоянию проблемы излучения 164
18. К современному состоянию проблемы излучения 180
19. О развитии наших взглядов на сущность и структуру излучения 181

**1910 г.**

---

20. Об одной теореме теории вероятностей и ее применении в теории излучения 196
21. Статистическое исследование движения резонатора в поле излучения 205
22. Теория опалесценции в однородных жидкостях и жидких смесях вблизи критического состояния 216
23. Теория квантов света и проблема локализации электромагнитной энергии 237
24. О пондеромоторных силах, действующих на ферромагнитные проводники с током, помещенные в магнитное поле 240

**1911 г.**

---

25. Замечание к закону Этвеша 242
26. Связь между упругими свойствами и удельной теплоемкостью твердых тел с одноатомными молекулами 247

27. Замечание к моей работе: «Связь между упругими свойствами и удельной теплоемкостью...» 251
28. Замечания к работам П. Герца: «О механических основах термодинамики» 252
29. Элементарное рассмотрение теплового движения молекул в твердых телах 253

**1912 г.**

30. Термодинамическое обоснование закона фотохимического эквивалента 266
31. Дополнение к моей работе «Термодинамическое обоснование закона фотохимического эквивалента» 272
32. Ответ на замечание И. Штарка «О применении элементарного закона Планка...» 276
33. К современному состоянию проблемы удельной теплоемкости 277

**1913 г.**

34. Некоторые аргументы в пользу гипотезы о молекулярном возбуждении при абсолютном нуле 314
35. Термодинамический вывод закона фотохимического эквивалента 323

**1914 г.**

36. К квантовой теории 328

**1915 г.**

37. Теоретическая атомистика 336
38. Ответ на статью М. Лауэ «Теорема теории вероятностей и ее применение к теории излучения» 352
39. Экспериментальное доказательство молекулярных токов Ампера 359
40. Экспериментальное доказательство существования молекулярных токов Ампера 363
41. Замечание к нашей работе «Экспериментальное доказательство молекулярных токов Ампера» 381

**1916 г.**

42. Простой эксперимент для доказательства молекулярных токов Ампера 382

43. Испускание и поглощение излучения по квантовой теории 386  
 44. К квантовой теории излучения 393

**1917 г.**

---

45. К квантовому условию Зоммерфельда и Эпштейна 407  
 46. Вывод теоремы Якоби 417

**1918 г.**

---

47. Можно ли определить экспериментально показатели преломления тел для рентгеновых лучей? 421

**1920 г.**

---

48. Распространение звука в частично диссоциированных газах 423

**1921 г.**

---

49. Об одном эксперименте, касающемся элементарного процесса испускания света 430

**1922 г.**

---

50. Теоретические замечания к сверхпроводимости металлов 432  
 51. К теории распространения света в диспергирующих средах 457  
 52. Квантово-теоретические замечания к опыту Штерна и Герлаха 442

**1923 г.**

---

53. Замечание к заметке В. Андерсона «Новое объяснение непрерывного спектра солнечной короны» 446  
 54. Экспериментальное определение размера каналов в фильтрах 447  
 55. К квантовой теории радиационного равновесия 450  
 56. Предлагает ли теория поля возможности для решения квантовой проблемы? 456

**1924 г.**

57. Ответ на замечание В. Андерсона 463  
58. Эксперимент Комптона 464  
59. К теории радиометрических сил 468  
60. Примечание к статье С. Н. Бозе «Закон Планка и гипотеза световых квантов» 473  
61. Замечание к статье С. Н. Бозе «Тепловое равновесие в поле излучения в присутствии вещества» 479  
62. Квантовая теория одноатомного идеального газа 481

**1925 г.**

63. Квантовая теория одноатомного идеального газа. Второе сообщение 489  
64. К квантовой теории идеального газа 503  
65. Замечание к статье П. Иордана «К теории излучения квантов» 512

**1926 г.**

66. Предложение опыта, касающегося природы элементарного процесса излучения 514  
67. Об интерференционных свойствах света, испускаемого каналовыми лучами 517

**1927 г.**

68. Теоретические и экспериментальные соображения к вопросу о возникновении света 525

**1928 г.**

69. Замечание о квантовой теории 528

**1931 г.**

70. Познание прошлого и будущего в квантовой механике 531

**1932 г.**

71. О соотношении неопределенностей 534  
72. Полувекторы и спиноры 535

**1983 г.**

73. Уравнения Дирака для полувекторов 568  
74. Расщепление наиболее естественных уравнений поля для полувекторов на спинорные уравнения дираковского типа 591

**1984 г.**

75. Представление полувекторов как обычных векторов с особым характером дифференцирования 596

**1985 г.**

76. Можно ли считать квантовомеханическое описание физической реальности полным? 604

**1948 г.**

77. Квантовая механика и действительность 612

**1953 г.**

78. Элементарные соображения по поводу интерпретации основ квантовой механики 617  
79. Вводные замечания об основных понятиях 623

**АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН**

**Собрание научных трудов**

**Том III**

*Утверждено к печати*

*редколлекцией серии «Классики науки»*

Редактор *С. И. Ларин*

Редактор издательства *Е. М. Кляус*

Художник *А. Я. Михайлов*

Технический редактор *Н. Д. Новичкова*

Сдано в набор 12/VIII 1966 г. Подписано к печати 21/X 1966 г.  
Формат 70×90<sup>1/16</sup>. Печ. л. 39,5 + 1 вкл. = 46,23 усл. печ. л.  
Уч.-изд. л. 33,3. Тираж 32 000 экз. Изд. № 1467/66.  
Тип. заказ № 1191

Цена 3 р.

Издательство «Наука».  
Москва, К-62, Подсосенский пер., д. 21

2-я типография издательства «Наука».  
Москва, Г-99, Шубинский пер., д. 10