126

О „КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ“*

Дополнение ко второму изданию работы «Сущность теории относительности»

С момента первого издания этой небольшой книжки в теории относительности были получены некоторые новые результаты. На нескольких из них мы здесь кратко остановимся.

Первым шагом вперед явилось окончательное доказательство существования красного смещения спектральных линий, вызываемого (отрицательным) гравитационным потенциалом в месте возникновения лучей (см. стр. 64). Доказательство стало возможным после открытия так называемых «звезд-карликов», средняя плотность которых превышает плотность воды примерно в 10^4 раз. Для таких звезд (например, темный спутник Сириуса), масса и радиус которых могут быть определены [1], теория предсказывает красное смещение примерно в 20 раз большее, чем у Солнца. И действительно, было показано, что оно имеет ожидаемый порядок величины.

Второе достижение, о котором мы здесь упомянем, связано с законами движения гравитирующего тела. В первоначальной формулировке теории закон движения такого тела вводился как независимое предположение в дополнение к законам гравитационного поля; согласно этому предположению, гравитирующая частица движется по геодезической линии [см. уравнение (90)]. Такой результат следовал из предполагаемой справедливости закона инерции Галилея в случае существования «истинного» гравитационного поля. Теперь показано, что этот закон движения, обобщен-

* *On the «Cosmologic Problem».* The Meaning of Relativity, 2 nd Edition, Princeton, 1945. (См. статью 60. Второе издание „The Meaning of Relativity“ опубликовано в 1945 г.; в нем это дополнение помещено как Приложение I. — *Прим. ред.*)

[1] Масса определяется спектроскопическими методами из данных о движении Сириуса, на который его спутник действует согласно закону Ньютона. Радиус определяется из яркости и из интенсивности излучения на единицу площади, которая может быть определена по температуре его излучения.

ный на случай произвольно большой гравитирующей массы, может быть выведен уже из одних уравнений поля для пустого пространства. Согласно этому выводу, закон движения определяется условием, что поле не может обращаться в бесконечность в точках, лежащих вне масс, создающих поле.

Третье достижение теории связано с так называемой «космологической проблемой». Ввиду важности этого вопроса, а также ввиду того, что дискуссия по этому вопросу ни в коей мере еще не завершена, мы разберем его подробно. К более детальному обсуждению этого вопроса меня побуждает также и то, что в современной его трактовке, как мне кажется, недостаточно подчеркивают наиболее важные узловые моменты этой проблемы.

Грубо сформулировать проблему можно следующим образом. Судя по нашим наблюдениям над неподвижными звездами, мы в достаточной степени уверены, что систему неподвижных звезд, вообще говоря, нельзя рассматривать как некий остров, плавающий в бесконечном пустом пространстве, и что нет чего-либо подобного центру тяжести всего существующего вещества. Более того, мы склоняемся к убеждению, что в пространстве средняя плотность вещества не равна нулю.

Следовательно, возникает вопрос: можно ли эту подсказываемую опытом гипотезу согласовать с общей теорией относительности?

Сначала мы должны сформулировать проблему более точно. Рассмотрим конечную, но настолько большую часть Вселенной, что средняя плотность содержащегося в ней вещества может быть представлена приближенно непрерывной функцией от (x_1, x_2, x_3, x_4). Такое подпространство можно приближенно рассматривать как инерциальную систему (пространство Минковского), к которой мы и будем относить движение звезд. Ее всегда можно выбрать так, чтобы средняя скорость вещества по отношению к этой системе во всех направлениях была равна нулю. Остается (почти беспорядочное) движение отдельных звезд, подобное движению молекул газа. Существенно, что скорости звезд, как это известно из опыта, весьма малы по сравнению со скоростью света. Поэтому можно временно совершенно отвлечься от этого относительного движения и рассматривать звездную материю как облако пыли, в котором нет (беспорядочного) движения частиц друг относительно друга.

Перечисленные условия ни в коей мере не достаточны для того, чтобы сделать задачу вполне определенной. Наиболее радикальным, но простым предположением будет условие, что (естественным образом измеренная) плотность вещества ρ постоянна всюду в (четырехмерном) пространстве, а метрика при соответствующем выборе координат не зависит от x_4 и однородна и изотропна по отношению к x_1, x_2, x_3.

Именно этот случай я сначала считал наиболее естественным для приближенного описания физического пространства в целом, и он рассмотрен на стр. 71 — 74 этой книги. Возражением против такого решения является то, что приходится вводить отрицательное давление, для чего нет никаких физических оснований. Чтобы сделать это решение возможным, я сначала ввел в уравнения вместо указанного давления новый член, разрешенный с точки зрения теории относительности. Измененные таким образом уравнения гравитации записывались следующим образом:

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)+\Lambda g_{ik}+\varkappa T_{ik}=0, \tag{1}$$

где Λ — универсальная постоянная («космологическая постоянная»). Введение этого добавочного члена усложняло теорию и, таким образом, сильно вредило логической простоте. Это могло быть оправдано только трудностью, связанной с почти неизбежным введением конечной средней плотности вещества. Следует заметить, кстати, что и в теории Ньютона существует та же самая трудность.

Выход из этой дилеммы был найден математиком Фридманом[2]. Его результат затем получил неожиданное подтверждение в открытом Хэбблом расширении звездной системы (красное смещение спектральных линий, которое растет линейно с расстоянием). Последующее изложение представляет собой не что иное, как изложение идеи Фридмана.

Четырехмерное пространство, изотропное по отношению к трем измерениям

Наши наблюдения показывают, что видимые нами системы звезд распределены примерно с одинаковой плотностью по всем направлениям. Это приводит нас к предположению, что *пространственная* изотропия системы имеет место для всех наблюдателей и для любого места и времени, лишь бы наблюдатель находился в состоянии покоя относительно окружающего его вещества. С другой стороны, мы более не делаем предположения, что для наблюдателя, находящегося в состоянии покоя относительно окружающего его вещества, плотность вещества остается постоянной во времени. Тем самым мы отказываемся от предположения, что метрика не зависит от времени.

Нам надо теперь найти математическую формулировку условия, что Вселенная всюду изотропна (*в пространственном смысле*). Через каждую точку (четырехмерного) пространства P проходит траектория какой-нибудь частицы (в дальнейшем мы ее для краткости будем называть «геодезической»). Пусть P и Q — две бесконечно близкие точки такой геодези-

[2] Он показал, что из уравнений поля можно получить конечное значение плотности во всем (трехмерном) пространстве, не изменяя этих уравнений *ad hoc*; см. Z. Phys., 1922, 10, 377. (Работа перепечатана в УФН, 80, 447, 1963.—*Прим. ред.*)

ческой. Мы должны тогда потребовать, чтобы выражение для поля было инвариантным относительно любого вращения системы координат, оставляющего неподвижными точки P и Q. Это должно выполняться для произвольного элемента любой геодезической[3].

Приведенное выше условие инвариантности подразумевает, что вся геодезическая лежит на оси вращения и что ее точки остаются на месте при вращении системы координат. Это означает, что решение должно быть инвариантным относительно всех вращений системы координат вокруг ∞^3 геодезических.

Ради краткости мы не будем останавливаться на дедуктивном выводе решения этой задачи. Однако для трехмерного пространства интуитивно кажется очевидным, что метрика, инвариантная относительно вращений вокруг двумерного континуума линий, должна обладать центральной симметрией (при подходящем выборе координат). Здесь оси вращения — радиально расходящиеся прямые, которые из соображений симметрии должны быть геодезическими. Поверхности постоянного радиуса будут тогда поверхностями постоянной (положительной) кривизны, которые всюду перпендикулярны (радиальным) геодезическим. Таким образом, мы на инвариантном языке получаем следующий результат.

Существует семейство поверхностей, ортогональных геодезическим. Каждая из этих поверхностей является поверхностью постоянной кривизны. Отрезки всех геодезических, заключенные между любыми двумя поверхностями семейства, равны.

Замечание. Интуитивно полученный нами результат не является общим, так как поверхности семейства могут обладать постоянной отрицательной кривизной или быть эвклидовыми (нулевая кривизна).

Четырехмерный случай, интересующий нас, совершенно аналогичен. Более того, нет существенной разницы и тогда, когда метрика пространства имеет вид $(-+++)$; необходимо только выбирать радиальные направления временноподобными и, соответственно, направления на поверхностях семейства — пространственноподобными. Оси локальных световых конусов во всех точках лежат на радиальных линиях.

Выбор координат

Вместо четырех координат, в которых пространственная изотропия Вселенной проявляется наиболее ясно, теперь выберем другие координаты, более удобные с точки зрения их физической интерпретации.

[3] Это условие не только накладывает определенные ограничения на метрику, но и требует, чтобы для каждой геодезической существовала такая система координат, в которой поле было бы инвариантно относительно вращений вокруг геодезической.

В качестве временноподобных линий, на которых x_1, x_2 и x_3 постоянны, а меняется только x_4, возьмем геодезические траектории частицы, которыми в случае сферической симметрии являются прямые линии, проходящие через центр. Пусть, далее, x_4 равно метрическому расстоянию от центра. В таких координатах метрика имеет вид

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= dx_4^2 - d\sigma^2 \\ d\sigma^2 &= \gamma_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Величина $d\sigma^2$ определяет метрику на одной из сферических гиперповерхностей. Величины γ_{ik}, принадлежащие различным поверхностям, должны тогда (в силу центральной симметрии) иметь одну и ту же форму на всех гиперповерхностях и отличаться лишь положительным множителем, зависящим только от x_4:

$$\gamma_{ik} = \underset{0}{\gamma_{ik}} G^2, \tag{2а}$$

где $\underset{0}{\gamma}$ зависят только от x_1, x_2 и x_3, а G есть функция только x_4. Тогда

$$\underset{0}{d\sigma^2} = \underset{0}{\gamma_{ik}} dx_i dx_k \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{2б}$$

задает в пространстве трех измерений определенную метрику постоянной кривизны — одну и ту же для всех G.

Такая метрика характеризуется соотношением

$$\underset{0}{R_{iklm}} - B\,(\underset{0}{\gamma_{il}}\underset{0}{\gamma_{km}} - \underset{0}{\gamma_{im}}\underset{0}{\gamma_{kl}}) = 0. \tag{2в}$$

Мы можем выбрать систему координат (x_1, x_2, x_3) так, что элемент длины станет конформно эвклидовым:

$$\underset{0}{d\sigma^2} = A^2\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \text{ т. е. } \underset{0}{\gamma_{ik}} = A^2 \delta_{ik}. \tag{2г}$$

Здесь A — положительная функция, зависящая только от r $(r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Путем подстановки в уравнения мы получаем для A два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{r}\left(\frac{A'}{Ar}\right)' + \left(\frac{A'}{Ar}\right)^2 &= 0 \\ -\frac{2A'}{Ar} - \left(\frac{A'}{A}\right)^2 - BA^2 &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Первому уравнению удовлетворяет значение

$$A = \frac{c_1}{c_2 + c_3 r^2}, \tag{3а}$$

где постоянные пока произвольны. Второе уравнение тогда дает

$$B = 4\frac{c_2 c_3}{c_1^2}. \tag{3б}$$

Относительно постоянных c мы получаем следующее: если A при $r = 0$ должно быть положительным, то c_1 и c_2 имеют один и тот же знак. Так как изменение знака всех трех постоянных не меняет A, мы можем считать c_1 и c_2 положительными. Можно также положить $c_2 = 1$. Более того, так как положительный множитель всегда можно включить в G^2, можно, не нарушая общности, считать, что $c_1 = 1$. Итак, мы можем положить

$$A = \frac{1}{1 + cr^2}; \quad B = 4c. \tag{3в}$$

Теперь возможны три случая:

$c > 0$ (сферическое пространство),

$c < 0$ (псевдосферическое пространство),

$c = 0$ (эвклидово пространство).

При помощи преобразования подобия ($x_i' = ax_i$, де a — постоянная) мы можем далее получить $c = {}^1/_4$ для первого случая и $c = -{}^1/_4$ для второго. Тогда для наших трех случаев соответственно имеем:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{1+\frac{r^2}{4}}; & B &= 1 \\ A &= \frac{1}{1-\frac{r^2}{4}}; & B &= -1 \\ A &= 1; & B &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3г}$$

В сферическом случае «длина окружности» единичного пространства ($G = 1$) равна

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dr}{1+\frac{r^2}{4}} = 2\pi;$$

«радиус» единичного пространства равен 1. Во всех трех случаях функция времени G есть мера изменения со временем расстояния между двумя точками вещества (измеренного в пространственном сечении). В сферическом случае G равно радиусу пространства в момент времени x_4.

Резюме. Гипотеза о *пространственной* изотропии нашей идеализированной Вселенной приводит к следующей метрике:

$$ds^2 = dx_4^2 - G^2A^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \tag{2}$$

где G зависит только от x_4, а A — только от r^2 ($r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$) и где

$$A = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{4} r^2}, \tag{3}$$

а различные случаи характеризуются значениями $\zeta = 1$, $\zeta = -1$ и $\zeta = 0$ соответственно.

Уравнения поля

Мы должны теперь удовлетворить уравнениям поля тяготения, т. е. уравнениям поля без «космологического члена», введенного нами ранее *ad hoc*:

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) + \varkappa T_{ik} = 0. \tag{4}$$

Подставляя выражение для метрики, основанное на предположении о пространственной изотропии, мы получаем после вычисления:

$$\left.\begin{aligned} R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R &= \left(\frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2} + 2\frac{G''}{G}\right) GA\delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3) \\ R_{44} - \frac{1}{2} g_{44} R &= -3\left(\frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2}\right) \\ R_{i4} - \frac{1}{2} g_{i4} R &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\}. \tag{4a}$$

Далее, тензор энергии «пылевидного» вещества записывается в виде

$$T^{ik} = \rho \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}. \tag{4б}$$

Геодезические, вдоль которых движется вещество, представляют собой линии, на которых меняется только x_4; на них $dx_4 = ds$. Для единственной отличной от нуля компоненты мы получаем

$$T^{44} = \rho. \tag{4в}$$

Опуская индексы, мы получаем единственную не равную нулю компоненту T_{ik}

$$T_{44} = \rho. \tag{4г}$$

С учетом этого уравнения поля приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{\zeta}{G^2}+\frac{G'^2}{G^2}+2\,\frac{G''}{G}=0 \\ \frac{\zeta}{G^2}+\frac{G'^2}{G^2}-\frac{1}{3}\,\varkappa\rho=0 \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где ζ/G^2 равно кривизне в пространственном сечении $x_4 = \text{const}$. Так как G во всех случаях является относительной мерой метрического расстояния между двумя материальными точками как функции времени, то G'/G описывает хэббловское расширение. A из уравнений выпадает, как это и должно быть, если решения уравнений гравитации имеют требуемую симметрию. Вычитая одно уравнение из другого, получаем

$$\frac{G''}{G}+\frac{1}{6}\,\varkappa\rho=0. \tag{5а}$$

Так как G и ρ должны быть всюду положительны, G'' везде отрицательна для ρ, отличных от нуля. Поэтому $G(x_4)$ не может иметь ни минимума, ни точки перегиба; кроме того, не существует решения, при котором G было бы постоянно.

Случай нулевой пространственной кривизны ($\zeta = 0$)

Простейшим случаем не равной нулю плотности ρ является случай $\zeta = 0$, когда сечения $x_4 = \text{const}$ не искривлены. Если мы положим $G'/G = h$, то уравнения поля для этого случая запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} 2h'+3h^2=0 \\ 3h^2=\varkappa\rho \end{aligned}\right\}. \tag{5б}$$

Содержащееся во втором уравнении соотношение между постоянной Хэббла h и средней плотностью ρ может быть, по крайней мере по порядку величины, сравнено с экспериментальным. Скорость расширения равна 432 *км/сек* на расстоянии 10^6 *парсек*[4]. Если перевести это число в используемую нами систему единиц (единица длины — 1 *см*, единица времени — время прохождения лучом света расстояния в 1 *см*), то мы получаем

$$h=\frac{432\cdot 10^5}{3{,}25\cdot 10^6\cdot 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60}\left(\frac{1}{3\cdot 10^{10}}\right)^2=4{,}71\cdot 10^{-28}\ \textit{см}^{-1}.$$

[4] По новым данным эта постоянная равна ~ 75 *км/сек* на 10^6 *парсек* или $0{,}8\cdot 10^{-28}$ *см*$^{-1}$ и соответственно плотность, отвечающая случаю нулевой кривизны, стала равна $\sim 2\cdot 10^{-29}$ *г/см*^{3}. Ср. прим. на стр. 398.— *Прим. ред.*

Поскольку, далее [см. формулу (105а)], $\varkappa = 1{,}86\cdot10^{-27}$, то второе из уравнений (5б) дает

$$\rho = \frac{3h^2}{\varkappa} = 3{,}5\cdot10^{-28}\ г/см^3.$$

Это значение по порядку величины согласуется с оценками астрономов (сделанными на основании масс и параллаксов видимых звезд и звездных систем). В качестве примера я цитирую здесь Мак-Витти [5]: «Средняя плотность наверняка не превышает 10^{-27} *г/см*^{3}, а наиболее вероятное ее значение — порядка 10^{-29} *г/см*^{3}».

Вследствие больших трудностей определения этой величины такое согласие для настоящего времени нам представляется удовлетворительным. Поскольку величина h определена с большей точностью, чем ρ, по-видимому, не будет преувеличением утверждать, что определение структуры наблюдаемого нами пространства всецело зависит от более точного определения ρ. Действительно, согласно второму из уравнений (5), пространственная кривизна в общем случае равна

$$\zeta G^{-2} = \frac{1}{3}\varkappa\rho - h^2. \tag{5в}$$

Отсюда следует, что если правая часть этого уравнения положительна, то пространство имеет положительную кривизну; ее величина может быть определена с точностью, с которой известна эта разность. Если правая часть отрицательна, пространство бесконечно. В настоящее время точность определения ρ недостаточна, чтобы из этого соотношения можно было заключить о том, что средняя кривизна пространства (сечение $x_4 = \mathrm{const}$) отлична от нуля.

В случае, когда мы пренебрегаем пространственной кривизной, первое из уравнений (5в) после соответствующего выбора начала отсчета x_4 принимает вид

$$h = \frac{2}{3}\frac{1}{x_4}. \tag{6}$$

Это уравнение имеет особенность при $x_4 = 0$, так что такое пространство либо сжимается и время ограничено сверху величиной $x_4 = 0$, либо оно расширяется и возникает в момент $x_4 = 0$. Последний случай отвечает тому, что реализуется в природе.

Из измеренной величины h мы получаем для продолжительности существования мира величину $1{,}5\cdot10^9$ лет [6]. Этот возраст почти совпадает с возрастом земной коры, получаемым из данных о распаде урана. Этот пара-

[5] G. C. McVittie. Proc. Phys. Soc., 1939, 51, 537.

[6] По современным данным —$13\cdot10^{10}$ лет, так что никакого парадокса не возникает. — *Прим. ред.*

доксальный результат по многим причинам вызвал сомнения в справедливости теории.

Возникает вопрос: может ли эта трудность, возникшая из предположения о практически пренебрежимой пространственной кривизне, быть обойдена введением соответствующей пространственной кривизны? В связи с этим следует обратиться к первому из уравнений (5), которое определяет временну́ю зависимость G.

Решение уравнений в случае неравной нулю пространственной кривизны

Для исследования пространственной кривизны пространственного сечения ($x_4 = \text{const}$) необходимо обратиться к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \zeta G^{-2} + \left[2\,\frac{G''}{G} + \left(\frac{G'}{G}\right)^2\right] = 0 \\ \zeta G^{-2} + \left(\frac{G'}{G}\right)^2 - \frac{1}{3}\varkappa\rho = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Кривизна положительна, если $\zeta = +1$, и отрицательна, если $\zeta = -1$. Первое из этих уравнений можно проинтегрировать. Сначала запишем его в следующей форме:

$$\zeta + 2GG'' + G'^2 = 0. \tag{5г}$$

Рассматривая $x_4\ (= t)$ как функцию G, можем написать

$$G' = \frac{1}{t'}; \qquad G'' = \left(\frac{1}{t'}\right)'\frac{1}{t'}.$$

Обозначив $1/t'$ через $u\,(G)$, получим

$$\zeta + 2Guu' + u^2 = 0 \tag{5д}$$

или

$$\zeta + (Gu^2)' = 0. \tag{5е}$$

Отсюда простым интегрированием получаем

$$\zeta G + Gu^2 = G_0, \tag{5ж}$$

или, так как $u = 1/(dt/dG) = dG/dt$,

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = \frac{G_0 - \zeta G}{G}, \tag{5з}$$

где G_0 — постоянная. Эта постоянная не может быть отрицательной, что становится очевидным, если мы продифференцируем (5з) и учтем, что G'' в соответствии с (5а) отрицательно.

а) *Пространство положительной кривизны.* G все время остается в интервале $0 \leqslant G \leqslant G_0$. Вид функции G схематически приведен на рис. 1. Радиус G возрастает от 0 до G_0 и затем опять постепенно уменьшается до нуля. Пространственное сечение конечно (сферической формы):

$$\frac{1}{3}\varkappa\rho - h^2 > 0. \qquad (5в)$$

б) *Пространство отрицательной кривизны.*

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = \frac{G_0 + G}{G}.$$

G растет с течением времени от $G = 0$ до $G = +\infty$ (или убывает от $G = \infty$ до $G = 0$). Следовательно, $\frac{dG}{dt}$ монотонно уменьшается от $+\infty$

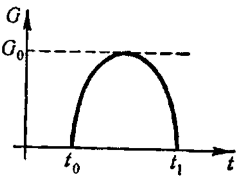

Рис. 1.

Рис. 2.

до 1, как это изображено на рис. 2. Таким образом, этот случай отвечает непрерывному расширению без сжатия. Пространственное сечение бесконечно и мы имеем

$$\frac{1}{3}\varkappa\rho - h^2 < 0. \qquad (5в)$$

Случай плоского пространственного сечения, рассматривавшийся в предыдущем параграфе, является, согласно уравнению (5з), промежуточным между этими случаями:

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = \frac{G_0}{G}. \qquad (5з)$$

Замечание. Случай отрицательной кривизны содержит в качестве предельного случай $\rho = 0$. Для этого случая $\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = 1$ (см. рис. 2). Поскольку тензор кривизны, как показывают вычисления, обращается при этом в нуль, это—случай эвклидовой метрики.

Случай отрицательной кривизны с отличной от нуля плотностью ρ приближается к этому предельному случаю все ближе и ближе, так что с течением времени структура пространства все в меньшей и меньшей степени определяется содержащейся в нем материей.

Из приведенного исследования случая не равной нулю кривизны вытекают следующие выводы. В случае произвольной не равной нулю («пространственной») кривизны, так же как и в случае нулевой кривизны, существует начальное состояние с $G = 0$, соответствующее началу расширения. В этом сечении, следовательно, плотность бесконечна и поле имеет сингулярность. Введение такого рода сингулярности проблематично уже само по себе [7].

Далее оказывается, что введение пространственной кривизны почти не влияет на интервал времени между началом расширения и моментом достижения некоего фиксированного значения $h = G'/G$. Этот промежуток времени можно получить из (5з) с помощью элементарных вычислений, которых мы здесь не приводим. Ограничимся рассмотрением случая расширяющегося пространства с равным нулю ρ. Как отмечалось ранее, это является частным случаем отрицательной пространственной кривизны. Из второго уравнения (5) мы получаем (учитывая обратный знак первого члена)

$$G' = 1.$$

Следовательно (при соответствующем выборе начала отсчета),

$$G = x_4,$$

$$h = \frac{G'}{G} = \frac{1}{x_4}. \tag{6а}$$

Таким образом, этот предельный случай дает для продолжительности расширения с точностью до множителя порядка 1 тот же самый результат, что и случай равной нулю пространственной кривизны [см. соотношение (6)].

Поэтому введение пространственной кривизны не устраняет трудности, о которой говорилось в связи с соотношением (6), а именно то, что отводится слишком короткое время на развитие наблюдаемых в настоящее время звезд и звездных систем.

[7] Необходимо, однако, заметить следующее: существующая релятивистская теория гравитации основывается на разделении понятий «гравитационного поля» и «материи». Поэтому возможно, что эта теория неверна при очень больших плотностях материи, и в единой теории никакой сингулярности не появится.

Распространение метода на случай более общего состояния вещества

Во всех полученных до сих пор решениях существует состояние системы с сингулярной метрикой ($G = 0$) и бесконечной плотностью ρ. Возникает вопрос: не связано ли возникновение сингулярности с тем, что мы рассматриваем вещество в виде облака пыли, которое никак не противодействует конденсации. Не пренебрегли ли мы без всякого на то основания влиянием хаотического движения отдельных звезд?

Можно, например, заменить облако пыли, в котором частицы покоятся друг относительно друга, облаком, частицы которого хаотически движутся друг относительно друга наподобие молекул газа. Такое облако будет сопротивляться адиабатической конденсации, и сопротивление будет возрастать с ростом конденсации. Не будет ли это препятствовать безграничной конденсации? Ниже мы покажем, что такое изменение в описании вещества не изменяет основных черт полученных выше решений.

«Газ частиц», рассматриваемый согласно специальной теории относительности

Рассмотрим рой параллельно движущихся частиц массы m. Сделав надлежащее преобразование, мы можем рассматривать этот рой покоящимся. Пространственная плотность частиц σ тогда инвариантна в смысле специальной теории относительности. По отношению к произвольной лоренцовой системе тензор

$$T^{uv} = m\sigma \frac{dx^u}{ds} \frac{dx^v}{ds} \tag{7}$$

имеет одинаковый смысл (тензор энергии роя). Если таких роев много, то суммированием получаем

$$T^{uv} = m \sum_p \sigma_p \left(\frac{dx^u}{ds}\right)_p \left(\frac{dx^v}{ds}\right)_p . \tag{7a}$$

Мы можем выбрать ось времени лоренцовой системы координат так, чтобы выполнялось условие $T^{14} = T^{24} = T^{34} = 0$. Кроме того, с помощью пространственного вращения можно получить $T^{12} = T^{23} = T^{31} = 0$. Пусть, далее, газ частиц является изотропным. Это означает, что $T^{11} = T^{22} = T^{33} = p$. Эти компоненты, равно как и $T^{44} = u$, — инварианты. Таким образом, инвариант

$$\mathfrak{J} = T^{uv} g_{uv} = T^{44} - (T^{11} + T^{22} + T^{33}) = u - 3p \tag{7б}$$

выражается через u и p.

Из выражения для $T^{\mu\nu}$ следует, что T^{11}, T^{22}, T^{33} и T^{44} положительны; то же самое, следовательно, справедливо и для T_{11}, T_{22}, T_{33} и T_{44}.

Уравнения гравитации записываются теперь в виде

$$\left.\begin{aligned} 1+2GG''+G^2+\varkappa T_{11}&=0\\ -3G^{-2}(1+G'^2)+\varkappa T_{44}&=0 \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Из первого уравнения следует, что и здесь (так как $T_{11}>0$) G'' всегда отрицательна, причем член с T_{11} при данных G и G' может только уменьшить величину G''.

Отсюда мы видим, что учет хаотического движения частиц друг относительно друга не меняет существенно наших результатов.

Резюме и некоторые замечания

1. Введение в уравнения гравитации «космологического члена» хотя и возможно с точки зрения теории относительности, но не является необходимым логически. Как впервые показал Фридман, конечную всюду плотность материи можно согласовать с первоначальной формой уравнений гравитации, если допустить, что метрическое расстояние между двумя материальными точками меняется со временем [8].

2. Одно уже требование *пространственной* изотропии Вселенной приводит к схеме Фридмана. Не вызывает поэтому никаких сомнений, что это наиболее общая схема, дающая решение космологической проблемы.

3. Пренебрегая влиянием пространственной кривизны, можно получить соотношение между средней плотностью и хэбббловским расширением, которое, по порядку величины, подтверждается на опыте.

Для промежутка времени между началом расширения и настоящим временем получается значение порядка 10^9 лет. Малая величина этого времени не согласуется с теориями эволюции неподвижных звезд.

4. Последний результат не меняется с введением пространственной кривизны; на него не влияет также учет хаотического движения звезд и звездных систем друг относительно друга.

5. Делались попытки объяснить хэббловское смещение спектральных линий при помощи механизма, отличного от допплер-эффекта. Известные физические факты, однако, не подтверждают такое объяснение. Согласно этим гипотезам, можно было бы две звезды S_1 и S_2 соединить твердым

---

[8] Если бы хэббловское расширение было открыто во время создания общей теории относительности, космологический член никогда бы не был введен. Его введение в уравнения поля сейчас кажется столь необоснованным потому, что исчезло его единственное оправдание, состоявшее в том, что с его помощью получалось естественное решение космологической проблемы.

стержнем. Монохроматический свет, посланный из S_1 в S_2 и отраженный обратно к S_1, мог бы вернуться с другой частотой (измеренной с помощью часов на S_1), если число длин волн вдоль стержня по пути менялось бы со временем. Это означало бы, что измеренная в локальной системе координат скорость света зависит от времени — результат, противоречащий даже специальной теории относительности. Далее, следует заметить, что световой сигнал, распространяющийся между S_1 и S_2, являлся бы «часами», не находящимися в постоянной связи с часами (например, атомными) на S_1. Это означало бы отсутствие метрики в смысле теории относительности, но такая точка зрения не согласуется и с тем фактом, что в некоторых атомных явлениях проявляется не только «подобие», но и «конгруэнтность» (существование резких спектральных линий, атомных объемов и т. д.).

Приведенные выше рассуждения основаны, впрочем, на волновой теории, и некоторые сторонники упоминавшихся гипотез могут рассматривать процесс изменения частоты света не по волновой теории, а наподобие эффекта Комптона. Предположение о существовании такого процесса без рассеяния представляет собой гипотезу, которая ничем не обоснована с точки зрения современных данных. При этом не удается также объяснить независимость относительного смещения частоты от самой частоты. Поэтому открытое Хэбблом явление нельзя рассматривать иначе, как расширение звездной системы.

6. Предположение о том, что «начало мира» (начало расширения) было всего около 10^9 лет назад, вызывает сомнения как с экспериментальной, так и с теоретической точек зрения. Астрономы склоняются к тому, чтобы рассматривать звезды различных спектральных типов как звезды различных возрастных классов в едином процессе развития. Такой процесс требует гораздо больше времени, чем 10^9 лет, и поэтому эти представления противоречат полученным выше следствиям релятивистских уравнений. Мне кажется, однако, что «теория эволюции» звезд основывается на менее прочном фундаменте, чем уравнения поля.

Теоретические сомнения основываются на том, что в момент, соответствующий началу расширения, метрика сингулярна и плотность ρ бесконечна. В связи с этим следует заметить следующее: современная теория относительности основана на разделении физической реальности на метрическое поле (гравитацию), с одной стороны, и на электромагнитное поле и вещество — с другой. В действительности пространство, вероятно, должно быть единым по своему характеру, и современную теорию следует рассматривать лишь как некий предельный случай. При больших плотностях поля и вещества уравнения поля и даже входящие в них переменные должны терять смысл. Поэтому мы не можем предположить, что уравнения поля остаются справедливыми при больших плотностях поля и материи, и не можем заключить, что «начало расширения» должно означать сингулярность в математическом смысле. Поэтому мы должны иметь в виду, что, может быть, и нельзя распространять уравнения на такие области.

Эти соображения, однако, не меняют вывода, что, с точки зрения развития ныне существующих звезд и звездных систем, «начало мира» действительно соответствует некоторому началу, когда эти звезды и звездные системы еще не существовали как отдельные образования.

7. Однако имеются некоторые наблюдательные данные, говорящие *в пользу* требуемой теорией динамической картины пространства. Почему уран до сих пор существует, несмотря на сравнительно быстрый его распад и несмотря на то, что пока не найдено возможностей его вторичного образования? Почему пространство не заполнено излучением настолько, чтобы сделать ночное небо похожим на раскаленную поверхность? Это старый вопрос, до сих пор еще не нашедший удовлетворительного объяснения с точки зрения стационарной модели Вселенной. Но разбор этих вопросов завел бы нас слишком далеко.

8. Приведенные соображения позволяют думать, что, несмотря на короткое «время жизни», идею расширяющейся Вселенной следует рассматривать серьезно. В этом случае главным становится вопрос, имеет ли пространство положительную или отрицательную кривизну. В связи с этим заметим следующее.

С точки зрения эксперимента, ответ зависит от того, положительно ли выражение $\frac{1}{3}\varkappa\rho - h^2$ (сферический случай) или отрицательно (псевдосферический случай). Это представляется мне наиболее важным вопросом. Экспериментальное его решение при современном состоянии астрономии не представляется невозможным. Поскольку h (постоянная Хэббла) сравнительно хорошо известна, все зависит от возможно более точного определения ρ.

Можно представить себе, что будет доказана сферичность мира (трудно представить себе, что может быть дано доказательство псевдосферичности мира). Это связано с тем, что всегда можно дать нижнюю границу для ρ, но отнюдь не верхнюю. Причина этого кроется в трудности оценки той части ρ, которая связана с астрономически ненаблюдаемой (неизлучающей) материей. Этот вопрос мы разберем более подробно.

Нижнюю границу для ρ (ρ_s) можно определить, учитывая массы только светящихся звезд. Если окажется, что $\rho_s > 3h^2/\varkappa$, то вопрос будет решен в пользу сферического пространства. Если же окажется, что $\rho_s < 3h^2/\varkappa$, то необходимо определить долю неизлучающей материи ρ_d. Мы постараемся показать, что можно определить нижнюю границу для ρ_d/ρ_s.

Рассмотрим астрономический объект, состоящий из большого количества звезд; который с достаточной точностью можно рассматривать как стационарную систему; это может быть, например, шаровое скопление (с известным параллаксом). Из спектроскопически наблюдаемых скоростей можно (при правдоподобных предположениях) определить поле гравитации, а тем самым и массу, которая создает это поле. Вычисленную таким путем массу можно сравнить с массой видимых звезд скопления и найти по крайней мере грубую оценку того, насколько создающие поле массы превышают массу видимых звезд нашего скопления. Таким образом можно оценить ρ_d/ρ_s для каждого звездного скопления.

Так как неизлучающие звезды в среднем меньше излучающих, то вследствие их взаимодействия со звездами скопления они в среднем обладают бо́льшими скоростями, чем более крупные звезды. Следовательно, они будут «испаряться» из звездного скопления быстрее, чем более тяжелые звезды. Поэтому следует ожидать, что относительное количество малых небесных тел внутри звездного скопления будет меньше, чем вне его. Следовательно, мы получаем, что $(\rho_d/\rho_s)_k$ (отношение плотностей внутри звездного скопления) дает нижнюю границу отношения ρ_d/ρ_s для всего пространства. Поэтому для нижней границы полной средней плотности в пространстве мы получаем значение

$$\rho_s\left[1+\left(\frac{\rho_d}{\rho_s}\right)\right].$$

Если эта величина больше, чем $3h^2/\varkappa$, то мы можем заключить, что пространство имеет сферический характер. Что же касается верхней границы ρ, то я не вижу реальных путей для ее определения.

9. Последний, но не менее важный вопрос. Возраст Вселенной в принятом нами смысле наверняка должен превышать возраст земной коры, определяемый из данных о радиоактивных минералах. Поскольку определение возраста по этим минералам со всех точек зрения является достоверным, то предложенная здесь космологическая теория будет опровергнута, если обнаружится, что она противоречит полученным таким методом результатам. В этом случае я не вижу никакого разумного решения.

Приложение II к „Сущности теории относительности" см. статьи 141 (4-е издание) и 146 (5-е издание). „Сущность теории относительности" с двумя приложениями издавалось в Англии (6-е издание Methuen, 1956), в США (5-е издание Princeton University Press, 1956) и в Германии (4-е издание Vieweg & Sohn, 1960).

ОБОБЩЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ *

Любая попытка создания единой теории поля, по моему мнению, должна исходить из группы преобразований, не менее общей, чем группа непрерывных преобразований четырех координат. Мы вряд ли сможем расширять группу в теории, основанной на более узкой группе. Кроме этого, разумно пытаться установить единую теорию путем обобщения релятивистской теории гравитации. Такого рода обобщение, неизвестное, по-видимому, до сих пор, описано ниже.

Когда мы говорим о единой теории, у нас есть две возможных точки зрения, различие между которыми существенно для дальнейшего.

1. Поле выступает как единая ковариантная величина. Приведу в качестве примера объединение электрического и магнитного полей специальной теорией относительности. Это объединение состоит в описании всего рассматриваемого поля как антисимметричного тензора. Группа преобразований Лоренца не позволяет нам разделить это поле на электрическое и магнитное независимо от системы координат.

2. Ни уравнения поля, ни функция Гамильтона не выражаются как сумма нескольких инвариантных частей, но образуют формально единые величины. В нашем примере описания специальной теорией относительности уравнений Максвелла также выполняется (хотя и слабее) этот критерий однородности.

Теория, которую мы будем излагать, является единой в смысле критерия 2, но не критерия 1. Такую теорию следует рассматривать как единую только в некотором ограниченном смысле.

---

* *Generalisation of the Relativistic Theory of Gravitation.* Ann. Math., 46, 1945, 578—584. (Второй частью работы является статья 130.— *Прим. ред.*)

Структура поля и группы

Поле описывается тензором g_{ik} с комплексными компонентами. Эти компоненты должны удовлетворять условию симметрии, которое является естественным обобщением на комплексную область условия симметрии для метрического поля в теории гравитации. Мы назовем это условие «эрмитовой симметрией»:

$$g_{ik} = \overline{g}_{ki}. \tag{1}$$

Компоненты g_{ik} являются непрерывными функциями четырех вещественных координат $x_1, \ldots, x_4$. Из соотношения (1) следует, что g_{ik} расщепляется по формуле

$$g_{ik} = s_{ik} + i a_{ik},$$

где s_{ik} и a_{ik} удовлетворяют условиям

$$s_{ik} = s_{ki},$$

$$a_{ik} = -a_{ki}.$$

Группой преобразований, как и в теории гравитации, остается группа вещественных непрерывных преобразований координат. Относительно этой группы s_{ik} и a_{ik} являются независимыми тензорами. Следовательно, поле в условии (1) нельзя считать единым в смысле критерия (1). С другой стороны, мы увидим, что поле (1) возникает весьма естественным путем. Это, так же как и близость к релятивистской теории гравитации, формально оправдывает, на мой взгляд, теорию поля, излагаемую ниже.

С ковариантным тензором g_{ik} мы можем однозначно связать контравариантный тензор g^{ik} с помощью условия

$$g_{ki} g^{kl} = g_{ik} g^{lk} = \delta_i^l, \tag{2}$$

где δ_i^l — тензор Кронекера. В силу соотношения (1), определитель

$$g = |g_{ik}|$$

вещественен, ибо $\overline{g} = |\overline{g}_{ik}| = |g_{ki}| = |g_{ik}|$. Так же, как в теории гравитации, выберем $g < 0$ вследствие особого характера временноподобной координаты.

Бесконечно малый параллельный перенос

Введем теперь комплексную величину Γ_{ik}^l, которая преобразуется подобно соответствующим величинам в римановой геометрии. По аналогии с соответствующими величинами в римановой геометрии, Γ_{ik}^l должна быть эрмитовой по нижним индексам:

$$\Gamma^l_{ik} = \bar{\Gamma}^l_{ki}. \tag{3}$$

Замечания: $\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki}$ — (чисто мнимый) тензор. Законы преобразования тензоров Γ^l_{ki} и Γ^l_{ik} одинаковы [это верно и для тензора $^1/_2(\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{ki})$]. Свертывая тензор $^1/_2(\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki})$, получаем вектор

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}(\Gamma^b_{ib} - \Gamma^b_{bi}). \tag{4}$$

Из фундаментальных законов следует, что здесь параллельный перенос комплексного вектора не является однозначной операцией при заданных Г. Поэтому введем следующие символы, чтобы устранить неопределенность:

$$\begin{aligned} \delta A^{\overset{i}{+}} &= -\Gamma^i_{st} A^s dx_t, \\ \delta A^{\overset{i}{-}} &= -\Gamma^i_{ts} A^s dx_t, \\ \delta A^{\overset{i}{0}} &= -\frac{1}{2}(\Gamma^i_{st} + \Gamma^i_{ts}) A^s dx_t. \end{aligned} \tag{5}$$

Соответствующие символы вводятся для бесконечно малого параллельного переноса ковариантных тензоров, а также для ковариантного дифференцирования. Например,

$$A^{\overset{i}{+}}_{;k} = A^i_{,k} + A^s \Gamma^i_{sk},$$

$$A_{\underset{-}{i};k} = A_{i,k} - A_s \Gamma^s_{ki}$$

и т. д.

Теперь мы должны определить Г, относящееся к данному полю g_{ik}. Мы полагаем

$$0 = g_{ik;l} = g_{\underset{+-}{ik};l} = g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk}. \tag{6}$$

Для дальнейшего существенно ясно представлять себе, что правая часть в уравнении (6) имеет тензорный характер, даже если уравнение (6) не удовлетворяется. Для тензора Кронекера получим

$$\delta^{\overset{k}{+}}_{\underset{-}{i};l} = \delta^s_i \Gamma^k_{sl} - \delta^k_s \Gamma^s_{il} = 0 = \delta^{\overset{k}{-}}_{\underset{-}{i};l} = \delta^{\overset{k}{0}}_{\underset{0}{i};l}.$$

С другой стороны,

$$\delta^{\overset{k}{+}}_{\underset{-}{i};l} = \Gamma^k_{li} - \Gamma^k_{il} = -\delta^{\overset{k}{-}}_{\underset{+}{i};l} \neq 0.$$

Поэтому при свертывании тензоров под знаком дифференцирования надо внимательно следить за характером индексов. Только для индексов одинакового характера можно переставлять операции свертки и абсолютного дифференцирования.

Специальный выбор свойств симметрии Γ и дифференцирования в уравнении (6) оправдывается следующим. Если образовать выражение, эрмитово-сопряженное правой части уравнения (6) (иначе говоря, переставить местами индексы i и k, а затем перейти к комплексно-сопряженному выражению), то получим

$$\bar{g}_{ki,\,l} - g_{si}\bar{\Gamma}^{s}_{kl} - \bar{g}_{ks}\bar{\Gamma}^{s}_{li}$$

или

$$g_{ik,\,l} - g_{is}\Gamma^{s}_{lk} - g_{sk}\Gamma^{s}_{il},$$

т. е. уравнение (6) (или, скорее, его правая часть) совпадает со своей эрмитово-сопряженной формой. Это необходимо для того, чтобы для заданного поля величины Γ были определены однозначно (но не переопределены).

Если уравнение (6) умножить на g_{ik} и свернуть, то с учетом равенств (2) получим

$$\frac{g_{,\,l}}{g} - (\Gamma^{i}_{il} + \Gamma^{i}_{li}) = 0. \tag{7}$$

Левая часть уравнения (7) обладает векторными свойствами, независимо от того, удовлетворяется уравнение (7) или нет.

Если уравнение (6) умножить на $-\,g^{it}g^{sk}$ и просуммировать по i и k, то, благодаря равенству

$$g^{it}g_{ik,\,l} + g^{it}_{,\,l}g_{ik} = 0,$$

вытекающему из (2), получим

$$0 = g^{st}_{,\,l} + g^{bt}\Gamma^{s}_{bl} + g^{sb}\Gamma^{t}_{lb} = g^{\overset{s}{+}\overset{t}{-}}_{;\,l}\,. \tag{6a}$$

Основное отличие обобщенной теории от чистой теории гравитации в смысле определения Γ заключается в том, что уравнения, которые определяют Γ через поле g, нельзя решить простым способом.

Кроме понятия тензора существенно понятие тензорной плотности. Если, например, A^i — тензор (1-го ранга), то

$$\mathfrak{A}^i = \sqrt{-g}\,A^i$$

представляет собой тензорную плотность с соответствующим законом преобразования.

В результате дифференцирования мы получаем, например,

$$A^{\overset{i}{+}}_{;k} = A^i_{,k} + A^a\Gamma^i_{ak}.$$

Если это равенство умножить на $\sqrt{-g}$, то получим, что

$$(\mathfrak{A}^{\overset{i}{+}}_{;k}) \equiv \mathfrak{A}^i_{,k} + \mathfrak{A}^a\Gamma^i_{ak} - \frac{1}{2}\mathfrak{A}^i\frac{g_{,k}}{g} \qquad (6б)$$

является тензорной плотностью, которую мы определили как ковариантную производную $\mathfrak{A}^{\overset{i}{+}}_{;n}$ от $\mathfrak{A}^i$. В последнем члене этого равенства принимается во внимание свойство плотности $\mathfrak{A}^i$. Аналогичное выражение справедливо при дифференцировании всех тензорных плотностей. В частности, для скалярной плотности $\mathfrak{r}$:

$$\mathfrak{r}_{;l} = \mathfrak{r}_{,l} - \frac{1}{2}\mathfrak{r}\frac{g_{,l}}{g}.$$

Если мы положим $\mathfrak{r} = \sqrt{-g}$, то ковариантная производная обращается в нуль. Если же положить $\mathfrak{g}^{ik} = \sqrt{-g}g^{ik}$, то

$$\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;l} = \mathfrak{g}^{ik}_{,l} + \mathfrak{g}^{ak}\Gamma_{ak} + \mathfrak{g}^{ia}\Gamma^k_{la} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{ik}\frac{g_{,l}}{g} = 0, \qquad (6в)$$

где равенство (6в) следует из (6б) и из определения тензорной плотности.

Кривизна

Начнем с выражения для параллельного переноса, отвечающего, например, первому из уравнений (5). Путем переноса комплексного вектора вдоль границы бесконечно малого (плоского) элемента поверхности получается (комплексный) тензор кривизны, как и в теории вещественных полей.

Таким образом получается комплексный тензор кривизны

$$\Gamma^i_{kl,m} - \Gamma^i_{km,l} - \Gamma^i_{al}\Gamma^a_{km} + \Gamma^i_{am}\Gamma^a_{kl}. \qquad (8)$$

Свертывая его по индексам i и m, мы получаем тензор

$$\Gamma^a_{kl,a} - \Gamma^a_{kl}\Gamma^l_{al} - \Gamma^a_{ka,l} + \Gamma^a_{kl}\Gamma^b_{ab}. \qquad (9)$$

Взяв среднее значение этого тензора и подвергнув его эрмитову сопряжению, мы получим эрмитов тензор

$$R_{ik} = \Gamma^a_{ik,a} - \Gamma^a_{ib}\Gamma^b_{ak} - \frac{1}{2}(\Gamma^a_{ia,k} + \Gamma^a_{ak,i}) + \frac{1}{2}(\Gamma^b_{ab} + \Gamma^b_{ba})\Gamma^a_{ik}. \qquad (10)$$

Вывод уравнений поля

Теперь нашей целью является получение уравнений поля, совместимых с нашими определениями (6). Мы найдем их, используя метод, уже известный из теории гравитации. Введем на время g_{ik} и Γ^l_{ik} в качестве независимых переменных поля, не предполагая, что они связаны уравнением (6). Из этих величин и их производных мы построим плотность функции Гамильтона $\mathfrak{H}$, интеграл от которой будет варьироваться независимо от g и Γ. $\mathfrak{H}$ выбирается так, чтобы варьирование по Γ приводило к уравнению (6). Тогда варьирование по g даст собственно уравнения поля.

Функция Гамильтона

Построим сначала новый тензор, вычитая некоторый тензор S_{ik} из R_{ik}. Согласно уравнению (7),

$$S_{i} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}(\Gamma^a_{ia} + \Gamma^a_{ai})$$

является вектором. Из него мы построим тензор $S_{\underset{+}{i};k}(=S_{ik})$, полагая

$$S_{ik} = [(\ln\sqrt{-g})_{,i,k} - (\ln\sqrt{-g})_{,a}\Gamma^a_{ik}] - \\ - \left[\frac{1}{2}(\Gamma^a_{ia} + \Gamma^a_{ai})_{,k} - \frac{1}{2}(\Gamma^b_{ab} + \Gamma^b_{ba})\Gamma^a_{ik}\right]. \qquad (11)$$

Мы получим

$$\overset{*}{R}_{ik} = R_{ik} - S_{ik} = \Gamma^a_{ik,a} - \Gamma^a_{ib}\Gamma^b_{ak} - (\ln\sqrt{-g})_{,i,k} + (\ln\sqrt{-g})_a\Gamma^a_{ik}. \qquad (12)$$

Отсюда, умножая на тензорную плотность $\mathfrak{g}^{ik}$, получаем плотность функции Гамильтона

$$\mathfrak{H} = \overset{*}{R}_{ik}\mathfrak{g}^{ik}. \qquad (13)$$

Уравнения поля

Варьирование интеграла от $\mathfrak{H}$ по Γ^a_{ik} и $\mathfrak{g}^{ik}$ после интегрирования по частям дает

$$\delta\int\mathfrak{H}d\tau = \int[(-\mathfrak{A}^{ik}_a)\,\delta\Gamma^a_{ik} + G_{ik}\delta\,\mathfrak{g}^{ik}]\,d\tau. \qquad (14)$$

Для $\mathfrak{U}_a^{ik}$, в силу равенств (12) и (13), мы получим

$$\mathfrak{U}_a^{ik} = \mathfrak{g}^{ik}_{,a} + \mathfrak{g}^{bk}\Gamma^i_{ba} + \mathfrak{g}^{ib}\Gamma^k_{ab} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{ik}\frac{g_{,a}}{g} = \mathfrak{g}^{ik}_{;a}. \qquad (14а)$$

Варьирование по $\mathfrak{g}^{ik}$ приводит сначала к выражению

$$\overset{*}{R}_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} - [\mathfrak{g}^{rs}_{,r,s} + (\Gamma^a_{rs}\mathfrak{g}^{rs})_{,a}]\,\delta(\ln\sqrt{-g}),$$

где

$$\frac{\delta g}{g} \equiv g^{ik}\delta g_{ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\mathfrak{g}^{ik}\delta g_{ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}[\delta(4\sqrt{-g}) - g_{ik}\delta g^{ik}]$$

или

$$\frac{\delta g}{g} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} \equiv 2\delta(\ln\sqrt{-g}).$$

Используя это выражение, получаем в качестве результата варьирования по g

$$G_{ik} \equiv \overset{*}{R}_{ik} - \frac{1}{2\sqrt{-g}}[\mathfrak{g}^{rs}_{,r,s} + (\Gamma^a_{rs}\mathfrak{g}^{rs})_{,a}]\,g_{ik}. \qquad (14б)$$

Тогда уравнения поля, следующие из нашего вариационного принципа, таковы:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{U}_a^{ik} &= 0, \\ G_{ik} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Первая система эквивалентна уравнению (6). Вторую систему можно преобразовать, используя первую. Именно, из уравнения (6) получаем

$$\mathfrak{g}^{as}_{;s} = 0 = \mathfrak{g}^{as}_{,s} + \mathfrak{g}^{bs}\Gamma^a_{bs} + \mathfrak{g}^{ab}\Gamma^s_{sb} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{as}\frac{g_{,s}}{g}$$

или, в силу уравнения (7),

$$\mathfrak{g}^{as}_{,s} + \mathfrak{g}^{bs}\Gamma^a_{bs} - \mathfrak{g}^{ab}\Gamma_b = 0$$

[здесь Γ_b имеет тот же смысл, что и в уравнении (4)]. Точно так же из уравнения

$$\mathfrak{g}^{sa}_{;s} = 0 = \mathfrak{g}^{sa}_{,s} + \mathfrak{g}^{ba}\Gamma^s_{bs} + \mathfrak{g}^{sb}\Gamma_{sb} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{sa}\frac{g_{,s}}{g}$$

следует

$$\mathfrak{g}^{sa}_{,s} + \mathfrak{g}^{sb}\Gamma^a_{sb} + \mathfrak{g}^{ba}\Gamma_b = 0.$$

Поэтому мы получаем

$$\mathfrak{g}^{rs}_{,rs} + (\Gamma^a_{rs}\mathfrak{g}^{rs})_{,a} = (\mathfrak{g}^{ab}\Gamma_b)_{,a} = -(\mathfrak{g}^{ba}\Gamma_b)_{,a} = (\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ab}}\Gamma_b)_{,a}, \qquad (16)$$

где $\mathfrak{g}^{\overset{ab}{\vee}}$ означает антисимметричную (мнимую) часть $\mathfrak{g}^{ab}$. Следовательно, мы можем написать

$$G_{ik} = \overset{\bullet}{R}_{ik} - \frac{1}{2\sqrt{-g}} (\mathfrak{g}^{ab}\Gamma_b)_{,a} g_{ik}. \tag{14в}$$

Уравнения поля, таким образом, можно выписать в явном виде:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= g_{\underset{+-}{ik};\,l} = g_{ik,\,l} - g_{ak}\Gamma^a_{il} - g_{ia}\Gamma^a_{lk},\\ 0 &= G_{ik} = \Gamma^a_{ik,\,a} - \Gamma^a_{ib}\Gamma^b_{ak} - (\ln\sqrt{-g})_{,\,i,\,k} + (\ln\sqrt{-g})_{,\,a}\Gamma^a_{i,\,k} -\\ &\qquad - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{-g}} (\mathfrak{g}^{ab}\Gamma_b)_{,\,a} g_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{15б}$$

Последний член в выражении для G_{ik} обращается в нуль в случае вещественного поля. Остаток тождествен с однократно свернутым тензором кривизны.

Уравнения совместны, поскольку они выведены из принципа Гамильтона; они связаны четырьмя (вещественными) тождествами, которые можно вывести известным методом.

На вопрос, имеют ли эти уравнения физический смысл, ответить трудно. Можно было бы считать, что антисимметричная часть g_{ik} связана с электромагнитным полем, хотя бы для бесконечно малых полей. Однако исследование уравнений первого приближения показывает, что они слабее, чем уравнения Максвелла. Для того чтобы задать эти поля, достаточно лишь потребовать их регулярности во всем пространстве. Физическая проверка теории зависит от построения точных решений (если среди них есть регулярные). Это — трудная задача. Однако теория кажется достаточно естественной, чтобы оправдать даже бо́льшие усилия.

Добавление при корректуре

Рассмотрение полученных уравнений поля наводит на мысль о введении четырех уравнений:

$$\gamma_s = 0.$$

Это можно сделать, если существуют четыре добавочных тождества между этими уравнениями и уравнениями поля (15б), выведенными из функции Гамильтона. В этом случае однократно свернутая кривизна (9) обладает эрмитовой симметрией, последний член во втором уравнении (15б) обращается в нуль и правая часть этих уравнений поля становится тождественной с однократно свернутой кривизной (9). Я действительно смог установить такие тождества. Однако пояснения этого пункта откладываются до отдельной статьи, поскольку их смысл связан с новым методом вывода уравнений поля.

Поступила 19 июня 1945 г

В этой статье изложен новый (четвертый) вариант единой теории поля. К предыдущим вариантам (теория Вейля с неинтегрируемой длиной, пятимерная теория Калуцы, абсолютный параллелизм) Эйнштейн больше не возвращался. Все последние его надежды связываются с обобщением свойств метрического тензора g_{ik}, которые занимают его до последних работ (статьи 144—146).

ВЛИЯНИЕ РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА НА ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ, ОКРУЖАЮЩИЕ ОТДЕЛЬНЫЕ ЗВЕЗДЫ *

(Совместно с Э. Страусом)

Постановка задачи

В теории относительности гравитационное поле вблизи отдельной звезды обычно описывается центрально-симметричным статическим решением уравнений поля, которое впервые было установлено Шварцшильдом. Эти поля с увеличением расстояния от порождающих их масс асимптотически переходят в пространство Эвклида (или, точнее, Минковского). Они, так сказать, вложены в «плоское» пространство. С другой стороны, мы знаем, что реальное пространство расширяется и что при существовании отличной от нуля средней плотности материи уравнения поля должны содержать такое расширение.

Таким образом, граничные условия, на которых основано решение Шварцшильда, непригодны для реальной звезды. В частности, граничные условия, пригодные для расширяющегося пространства, зависят от времени. Поэтому априори можно ожидать, что поле, окружающее одиночную звезду, существенно зависит от времени.

Задача о временно́й зависимости поля представляет особый интерес, так как такое зависящее от времени поведение могло бы играть существенную роль в теории материи. В этой связи высказывались предположения, что могут существовать соотношения, связывающие космические и атомные константы.

Исследование, проведенное ниже, показало, что расширение пространства не влияет на структуру гравитационного поля отдельной звезды и что поле является статическим, хотя и в ограниченной окрестности.

* *Influence of the Expansion of Space on the Gravitation Fields, Surrounding the Individual Stars* (With E. Straus). Rev. Modern Phys., 17, 1945, 120—124. (В текст внесены поправки в соответствии со статьей 129.— *Прим. ред.*)

Метод

Как обычно в космологических решениях, исходим из пространственно постоянной плотности материи (в отсутствие давления). Метрика тогда имеет вид

$$ds^2 = \frac{-T^2}{(1+rz/2)^2}\delta_{ik}dx_i dx_k + dt^2, \tag{A}$$

где

$$r = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2);$$

T — функция только времени t. Сферический случай соответствует $z = 1$, псевдосферический — $z = -1$, пространственно плоский — $z = 0$. Рис. 1 иллюстрирует сферический случай $z = 1$; каждая из двух окружностей заменяет трехмерное пространственное сечение четырехмерного континуума. Частица, в момент t_1 находившаяся в точке P_1, а в момент t_2 — в точке P_2, всегда находится на одной и той же радиальной линии на нашем рисунке. Пространственные координаты в соотношении (A) выбраны так, чтобы для фиксированной частицы они не зависели от времени t («космические координаты»). В конформно эвклидовом представлении началом пространственных координат служит произвольно выбранная точка.

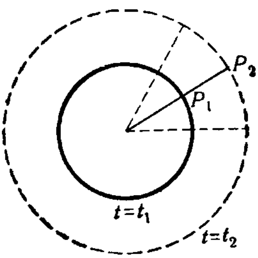

Рис. 1.

Мы рассмотрим теперь область G, вырезанную из континуума следующим образом. Рассмотрим все (двумерные) сферы с постоянным радиусом P, не зависящим от времени (в «космических координатах»), построенные вокруг начала координат в каждом временно́м сечении. Внутренность всех этих сфер образует четырехмерную область G. Рассмотрим метрическое поле в этой области G, заменяя его на поле, источник которого (описываемый сингулярностью метрического поля) сосредоточен в (пространственном) начале координат $x_1=x_2=x_3=0$. Вне сингулярности это поле должно удовлетворять уравнениям для пустого пространства: $R_{ik} = 0$. При $r = P$ это поле должно непрерывно переходить в первоначальное поле (A). При этом переходе компоненты g_{ik} и их первые производные должны оставаться непрерывными.

Решение этой задачи дает поле во всем континууме; внутри области G оно порождается сосредоточенной массой, вне области G — равномерно распределенной материей. Кроме того, ясно, что в остальных сферических областях вне G поле можно тем же методом заменить на поле, порождаемое точечной массой. Продолжая этот процесс замены, можно получить такое поле, что вся метрика будет порождена точечными массами, а не непрерывным распределением материи.

Возможность получения строгого решения этим методом достигается той ценой, что во избежание математических осложнений мы не допускаем, чтобы вырезанные области перекрывались. Это требует введения бесконечного числа точечных масс со все меньшими массами, чтобы можно было заменить весь континуум полем, порожденным дискретными точечными массами.

Однако этот недостаток нас мало беспокоит. Мы можем ограничиться рассмотрением лишь того случая, когда внутренняя часть области G заменена полем, порожденным точечной массой, расположенной в пространственном центре области, и сшить это решение непрерывно (при всех значениях t) с решением, порожденным непрерывно распределенным веществом на границе области G.

I. Уравнения поля внутри области G и граничные условия для перехода в остальное пространство с однородной плотностью материи

Общее центрально-симметричное поле можно привести к (конформно-эвклидовой, необязательно статической) форме [1]

$$ds^2 = -e^{\mu}\delta_{ik}dx_i dx_k + e^{\nu}dt^2 \qquad i, k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где μ и ν — функции r и t. Теперь уравнения поля $R_{ik} = 0$ $(i, k=1, 2, 3, 4)$ принимают вид

$$\mu_{rr} + \nu_{rr} - \frac{1}{2}(\mu_r^2 - \nu_r^2) - \mu_r\nu_r = 0, \tag{2.1}$$

$$r\left(\mu_{rr} + \frac{1}{2}\mu_r^2 + \frac{1}{2}\mu_r\nu_r\right) + \\ + \left(2\mu_r + \frac{1}{2}\nu_r\right) - \frac{1}{2}e^{\mu-\nu}\left(\mu_{tt} + \frac{3}{2}\mu_t^2 - \frac{1}{2}\mu_t\nu_t\right) = 0, \tag{2.2}$$

$$2\mu_{rt} - \mu_t\nu_r = 0, \tag{2.3}$$

$$r\left(\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 + \frac{1}{2}\mu_r\nu_r\right) + \frac{3}{2}\nu_r - \frac{3}{2}e^{\mu-\nu}\left(\mu_{tt} + \frac{1}{2}\mu_t^2 - \frac{1}{2}\mu_t\nu_t\right) = 0; \tag{2.4}$$

здесь индексы обозначают дифференцирование.

---

[1] В дальнейшем индексы всегда будут принимать значения 1, 2, 3.

Как установлено выше, остальная часть пространства с однородным распределением вещества является полем с постоянной пространственной кривизной, которое в конформно эвклидовом представлении описывается соотношением

$$ds^2 = \frac{-T^2}{(1+zr/2)^2}\delta_{ik}dx_i dx_k + dt^2,$$

где z и T имеют тот же смысл, что и ранее.

Наши граничные условия заключаются теперь в том, что поле (1) при $r = P$ должно непрерывно, вместе с первой производной переходить в поле (3) [2]; иначе говоря, при $r = P$

$$e^{\mu} = T^2/(1+zr/2)^2, \tag{4.1}$$

$$\mu_r e^{\mu} = -zT^2/(1+zr/2)^3, \tag{4.2}$$

$$e^{\nu} = 1, \tag{4.3}$$

$$\nu_r e^{\nu} = 0. \tag{4.4}$$

Из этих уравнений можно найти значения μ, ν, μ_r, ν_r, μ_t, ν_t, μ_{rt} и μ_{tt}, при $r = P$. Если подставить эти значения в уравнения (2), то получим (при $r = P$)

$$\mu_{rr} + \nu_{rr} - \frac{z^2}{2c^2} = 0, \tag{2.1.1}$$

$$r\left(\mu_{rr} + \frac{z^2}{2c}\right) - \frac{2z}{c} - \frac{1}{c^2}(TT'' + 2T'^2) = 0, \tag{2.2.1}$$

$$r\nu_{rr} - (3/c^2)\,TT'' = 0, \tag{2.4.1}$$

где $c = 1 + \frac{1}{2}zr$. [Уравнение (2.3) выполняется тождественно.] Если исключить μ_{rr} и ν_{rr} из этих уравнений, то получим

$$TT'' + \frac{1}{2}T'^2 = -z/2. \tag{5}$$

Путем дифференцирования получается

$$2T'T'' + TT''' = 0. \tag{5.1}$$

Интегрируя это, получаем

$$T^2T'' = -k/2. \tag{5.2}$$

[2] Эти граничные условия всегда достаточны, но не всегда *необходимы*, так как может случиться, что разрывность функций g_{ik} или их первых производных обусловлена разрывностью соответствующих систем координат, а не разрывностью полей. В нашем случае такая возможность устранена применением конформно-эвклидового представления для обоих полей.

Подставляя это выражение для T^2T'' в уравнение (5), получаем

$$T'^2 = (k - zT)/T.$$

Этот результат согласуется с решением уравнений поля в случае постоянной в пространстве плотности материи (космологическая проблема).

II. Приближенное решение уравнений поля и граничные условия для области, достаточно близкой к границе G

В качестве первого приближения в области, близкой к границе области G, мы положим

$$e^{-\mu} = -T^{*2} + \sigma,$$

$$e^{\nu} = 1 + \tau,$$

где $\sigma = a_1 r^{-1/2} + a_2 r$; $\tau = b_0 + b_1 r^{-1/2} + b_2 r$; a_i, b_i и T^* — функции времени t. Здесь σ и τ — малые первого порядка. Далее мы примем, что дифференцирование по t увеличивает порядок малости на $^1/_2$.

В этих формулах, помимо члена, который не зависит от r, содержится член, пропорциональный $r^{-1/2}$ и соответствующий полю точечной массы, вложенному в эвклидово пространство. Кроме того, формулы содержат член, пропорциональный r, который соответствует регулярной части поля. Этот член появляется благодаря тому, что в данном случае в эвклидово пространство ничего не вкладывалось.

Теперь, если пренебречь членами более высокого порядка, уравнения поля (2) примут следующий вид:

$$\sigma_{rr} - T^{*2}\tau_{rr} = 0, \tag{2.1.2}$$

$$2r\sigma_{rr} + 4\sigma_r - T^{*2}\tau_r + 2T^{*2}(2T^{*\prime 2} + T^* T^{*\prime\prime}) = 0, \tag{2.2.2}$$

$$\frac{T^{*\prime}}{T^*}(T^{*2}\tau_r - 2\sigma_r) + \sigma_{rt} = 0, \tag{2.3.2}$$

$$r\tau_{rr} + \frac{3}{2}\tau_r - 3T^* T^{*\prime\prime} = 0. \tag{2.4.2}$$

Выделяя члены с одинаковыми степенями r, получаем

$$a_1 = T^{*2}, \tag{6.1}$$

$$4a_2 - T^* b_2 + 2T^{*2}(2T^{*\prime 2} + T^{*\prime} T^{*\prime}) = 0, \tag{6.2}$$

$$\frac{T^{*\prime}}{T^{*}}(T^{*2}b_1-2a_1)+a_1'=0, \tag{6.3}$$

$$\frac{T^{*\prime}}{T^{*}}(T^{*2}b_2-2a_2)+a_2'=0, \tag{6.4}$$

$$b_2-2T^{*}T^{*\prime\prime}=0 \tag{6.5}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} a_1 &= k_1T^{*}, \\ a_2 &= -T^{*2}T^{*\prime 2}, \\ b_1 &= k_1T^{*-1}, \\ b_2 &= 2T^{*}T^{*\prime\prime}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Если пренебречь высшими степенями P, то граничные условия (4) принимают вид

$$T^{*2}-k_1T^{*}P^{-1/2}+T^{*2}T^{*\prime 2}P=T^2-zT^2P, \tag{4.1.1}$$

$$\frac{1}{2}k_1T^{*}P^{-3/2}+T^{*2}T^{*\prime 2}=-zT^2, \tag{4.2.1}$$

$$b_0+k_1T^{*-1}P^{-1/2}+2T^{*}T^{*\prime\prime}P=0, \tag{4.3.1}$$

$$-\frac{1}{2}k_1T^{*-1}P^{-3/2}+2T^{*}T^{*\prime\prime}=0. \tag{4.3.2}$$

Отсюда следует, что T^{*} отличается от T только членами первого порядка и что постоянная k в уравнении (5.3) в первом приближении дается формулой $k=(-k_1/2)\,P^{-3/2}$. В этом случае уравнения (4) удовлетворяются.

Наше поле описывается так:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (-T^{*2}+k_1T^{*}r^{-1/2}-T^{*2}T^{*\prime 2}r)\,\delta_{ik}\,dx_idx_k+ \\ &+(1+b_0+k_1T^{*-1}r^{-1/2}+2T^{*}T^{*\prime\prime}r)\,dt^2=[-T^{*2}+k_1T^{*}r^{-1/2}- \\ &-T^{*}(k-zT^{*})\,r]\,\delta_{ik}dx_idx_k+[1+b_0+k_1T^{*-1}r^{-1/2}-kT^{*-1}r]\,dt^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим это решение для бесконечно малого интервала времени вблизи $t=t_0$ и преобразуем его так, чтобы оно осталось конформно-эвклидовым, а коэффициент при $\delta_{ik}dx_idx_k$ стал равным -1 с точностью до бесконечно малых членов («локальные координаты»). Тогда мы приходим (пренебрегая меньшими членами) к соотношению

$$ds^2 = (-1 + k_1 r'^{-1/2})\,\delta_{ik}dx_i dx_k + (1 + k_1 r'^{-1/2})\,dt'^2. \tag{7.1}$$

Этот результат заслуживает внимания, так как он полностью описывает статическое поле, тождественное в первом приближении полю Шварцшильда.

Этот результат подтверждает, что поле внутри области G точно совпадает с полем Шварцшильда.

III. Доказательство того, что решение внутри области G можно преобразовать в статическое поле Шварцшильда

Статическое поле Шварцшильда в его конформно-эвклидовой форме задается соотношением

$$ds^2 = -a^4\delta_{ik}dx'_i dx'_k + \frac{b^2}{a^2}dt'^2, \tag{8}$$

где

$$a = 1 + \frac{m}{r'^{1/2}}, \qquad b = 1 - \frac{m}{r'^{1/2}}.$$

Общее преобразование, оставляющее это поле центрально-симметричным, будет

$$x'_i = Ux_i, \qquad t' = Vt, \tag{9}$$

где U, V — функции r, t.

Поле, описываемое соотношением (8), принимает теперь вид

$$ds^2 = -a^4U^2\delta_{ik}dx_i dx_k + \left[-2a^4U_r(U + rU_r) + \frac{b^2}{a^2}V_r^2\right]x_i x_k dx_i dx_k +$$
$$+\left[-a^4U_t(U + 2rU_r) + \frac{b^2}{a^2}V_rV_t\right]x_i dx_i dt + \left[-2ra^4U_t^2 + \frac{b^2}{a^2}V_t^2\right]dt^2, \tag{8.1}$$

где

$$a = 1 + \frac{m}{r^{1/2}U}, \qquad b = 1 - \frac{m}{r^{1/2}U}.$$

Наша цель теперь — показать, что можно подобрать такие функции U и V, что соотношение (8.1) примет вид (1) и граничные условия (4) будут удовлетворены. Когда мы докажем это, то будем знать, что поле Шварцшильда можно преобразовать в решение нашей задачи, если не выходить за пределы области G, и, поскольку граничные условия обеспечивают единственность решения, наша теорема будет доказана.

Чтобы наше поле описывалось линейным элементом вида (1), должны выполняться уравнения

$$-2a^4U_r(U+rU_r)+(b^2/a^2)V_r^2=0, \tag{10.1}$$

$$-a^4U_t(U+2rU_r)+(b^2/a^2)V_rV_t=0. \tag{10.2}$$

Тогда поле Шварцшильда описывается линейным элементом вида

$$ds^2=-a^4U^2\delta_{ik}dx_idx_k+[-2ra^4U_t^2+(b^2/a^2)V_t^2]\,dt^2. \tag{8.2}$$

Граничными условиями при $r=P$ будут

$$a^4U^2=T^2/c^2, \tag{4.1.2}$$

$$\partial/\partial r\,(a^2U)=(\partial/\partial r)\,(T/c), \tag{4.2.2}$$

$$-2ra^4U_t^2+(b^2/a^2)V_t^2=1, \tag{4.3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}[-2ra^4U_t^2+(b/a^2)V_t^2]=0, \tag{4.4.2}$$

где для сокращения введены обозначения: $c=1+zr/2$ и $a=1-zr/2$.

Эти соотношения образуют четыре граничных условия для уравнений (10). Из теорем существования для дифференциальных уравнений известно, что уравнения (10) вместе с граничными условиями (4.1.2) и (4.3.2) имеют единственное[3] решение. Чтобы доказать существование функций U и V, удовлетворяющих всем уравнениям (10) и условиям (4), мы должны показать, что условия (4.2.2) и (4.4.2) следуют из уравнений (10) и условий (4.1.2), (4.3.2).

Из (10.2) следует

$$V_r=\frac{a^6}{b^2}\frac{U_t}{V_t}(U+2rU_r); \tag{10.3}$$

подставляя это выражение для V_r в уравнение (10.1), получаем

$$-2U_r(U+rU_r)+\frac{a^6}{b^2}\cdot\frac{U_t^2}{V_t^2}(U+2rU_r)^2=0. \tag{10.4}$$

Граничные условия (4) требуют при $r=P$

$$T=a^2cU; \tag{11.1}$$

$$U_t=\frac{T'}{abc},\qquad U_t^2=\frac{k-za^2cU}{a^4b^2c^3U}; \tag{11.2}$$

[3] Не считая того, что в значение V на границе входит произвольная постоянная.

$$U_r = \frac{2mr^{-3/2} - zU}{2bc},$$

$$U + rU_r = (2U - zmr^{1/2})/2bc, \qquad U + 2rU_r = \frac{adU}{bc}; \tag{11.3}$$

$$V_t^2 = \frac{a^2}{b^2}(1 + 2ra^4U_t^2) = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{2rk + cU\,(b^2c^2 - 2zra^2)}{b^2c^3U}; \tag{11.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(V_t^2) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{a^2}{b^2}(1 + 2ra^4U_t^2)\right]. \tag{11.5}$$

Если уравнения (11.2) — (11.4) подставить в уравнение (10.4), то получим выражение, которое обращается в нуль тождественно по U, если

$$k = 2m\left(1 + \frac{zP}{2}\right)^3 P^{-3/2}. \tag{12}$$

Таким образом, в этом случае уравнение (4.2.2) следует из уравнений (10) и условий (4.1.2) и (4.3.2).

Если затем уравнения (10.3) и (11.5) подставить в уравнение

$$V_r \frac{\partial}{\partial r}(V_t^2) - V_t \frac{\partial}{\partial t}(V_r^2) = 0 \tag{13}$$

то, приняв во внимание значение k в (12), получим (при $r = P$)

$$\frac{a^7\,dU}{b^3c}\,\frac{U_t}{V_t}\,\frac{\partial}{\partial r}(V_t^2) - V_t\,\frac{\partial}{\partial U}(V_r^2)\,U_t = 0,$$

или

$$\frac{a^7\,dU}{b^3c}\,\frac{\partial}{\partial r}(\ln V_t^2) - \frac{\partial}{\partial U}(V_r^2)^2 = 0,$$

что снова является тождеством относительно U. Следовательно, условие (4.4.2) также является следствием уравнений (10) и условий (4.1.2) и (4.3.2). Наше предположение, таким образом, подтвердилось.

Заключение

Поле точечной массы внутри области G, вложенное в расширяющееся пространство, является, если рассматривать его в «локальных координатах», статическим полем, задаваемым решением Шварцшильда. Зависимость от времени, вводимая расширением, не нарушает независимости решения от времени. Зависящей от времени становится граница области G, где поле Шварцшильда переходит в поле, порожденное однородно распределенной материей.

129

ПОПРАВКИ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К НАШЕЙ РАБОТЕ „ВЛИЯНИЕ РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА НА ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ, ОКРУЖАЮЩИЕ ОТДЕЛЬНЫЕ ЗВЕЗДЫ“ *

(Совместно с Э. Страусом)

Макс Уаймен обратил наше внимание на несколько ошибок в формулах во второй части нашей работы [1]. Эти ошибки произошли вследствие изменения обозначений при окончательной подготовке рукописи. Это объясняет, почему они не повлияли на окончательные результаты.

Исправления, которые необходимо сделать, таковы. На стр. 627 на строке 10 вместо e^{μ} должно быть $e^{-\mu}$; на строке 12 — вместо $\tau = b_1 r^{-1/2} + \ldots$ должно быть $\tau = b_0 + b_1 r^{-1/2} + \ldots$. В уравнении (2.4.2) вместо $-\,^3/_2\,\tau_r$ должно стоять $+\,^3/_2\tau_r$; в уравнении (4.3.1) вместо $k_1 T^{*-1} P^{-1/2}$ должно стоять $b_0 + k_1 T^{*-1} P^{-1/2}$; в уравнении (7) к коэффициенту при dt^2 должен быть добавлен член b_0. На стр. 628, на строке 2 снизу вместо $+1$ следует читать -1.

Мак-Витти обратил наше внимание на работы его и Иернфельта [2], которые, к сожалению, нам были неизвестны. Они уже пришли к заключению, что расширение и кривизна пространства не влияют на поле вблизи отдельной звезды.

Однако мы думаем, что наша работа не была лишней, так как рассмотрение задачи в ней значительно проще и можно яснее увидеть ее смысл. Упрощение достигнуто следующим приемом: вместо введения неравномерного распределения материи во всем пространстве мы заменили лишь пылевидную материю внутри пространственной области G со сферической

* *Corrections and additional Remarks to our Paper: «The Influence of the Expansion of Space on the gravitational Fields surrounding the individual Stars»* (With E. Straus). Rev. Modern Phys., 18, 1946, 148—149.

[1] В переводе работы (статья 128) эти ошибки исправлены.— *Прим. ред.*

[2] McVittie. M. N. R. A. S., 1932, 92, 499—518; 1933, 93, 325—339; G. Järnefelt. Ann. Acad. Sci., Fenn., A1, 1942, 12, 3—38; Ann. Acad. Sci. Fenn., A40, 1940, 3; Ark. mat. astron. phys., 27A, 1940, 15.

границей массой, расположенной в центре этой сферы, или, скорее, сингулярностью, описывающей эту массу.

Из доказательства того, что полученное таким путем поле можно преобразовать в поле Шварцшильда, следует, что внутри звезды и в некоторой ее окрестности все свойства таковы, как если бы звезда была вложена в нерасширяющееся пространство, лишенное кривизны.

После публикации нашей работы нам стало ясно, что всякое нестатическое центрально-симметричное решение уравнений поля можно преобразовать в решение Шварцшильда. Ниже мы дадим набросок доказательства [3].

Покажем сначала, что если μ не зависит от времени при каком-либо значении $r (r = \rho)$, то это решение можно преобразовать в статическое решение. Из уравнения (2.3) мы видим, что $\mu_{rt} = 0$ при $r = \rho$.

Дифференцируя уравнение (2.3) последовательно по r, мы видим, что при $r = \rho$ и при всех n

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n}{\partial r^n}\mu = 0.$$

Следовательно, $\mu_t \equiv 0$ при всех r.

С учетом этого уравнение (2.2) принимает вид

$$r\left(\mu_{rr} + \frac{1}{2}\mu_r^2 + \frac{1}{2}\mu_r\nu_r\right) + \left(2\mu_r + \frac{1}{2}\nu_r\right) = 0,$$

или

$$\nu_r = -(4\mu_r + 2r\mu_{rr} + r\mu_r^3)/(1 + r\mu_r).$$

Следовательно, ν_r не зависит от t, и ν имеет вид

$$\nu = F(r) + \varphi(t).$$

Теперь наше решение будет

$$ds^2 = -e^{\mu(r)}\delta_{ik}\,dx_i\,dx_k + e^{F(r)}e^{\varphi(t)}\,dt^2.$$

Если новую временную координату выбрать такой, чтобы $dt' = e^{\varphi/2}dt$, то решение примет вид

$$ds^2 = -e^{\mu(r)}\delta_{ik}\,dx_i\,dx_k + e^{F(r)}\,dt'^2.$$

Это решение является статическим. Поскольку известно, что единственным центрально-симметричным решением является поле Шварцшильда, то мы к нему и приходим.

[3] Впоследствии мы заметили, что эта теорема уже была доказана Биркгофом в его книге «Theory of Relativity and Modern Physics», Cambridge, 1923, 253—256.

Теперь мы должны показать, что заданное решение уравнений поля (2) можно преобразовать таким образом, чтобы μ при фиксированном r ($r=\rho$) было независимым от t. Из преобразования (9) мы видим, что

$$\exp[\mu^*(r, t)] = \exp[\mu(U^2 r, V)]\, U^2$$

с новым коэффициентом при $-\delta_{ik}\, dx_i\, dx_k$. Мы хотим выбрать U и V так, чтобы уравнение (10) удовлетворялось и чтобы при $r=\rho$ выполнялось уравнение

$$\mu^*_t(\rho, t) = 0$$

или

$$\mu(U^2\rho, V) + 2\ln U = c. \tag{A}$$

Это — функциональное уравнение с двумя переменными U и V, которое, вообще говоря, имеет бесконечно много решений.

Мы должны показать, что уравнения (10) совместны с этим граничным условием. Уравнение (10.4) можно записать в виде

$$U_r^2\left(-2r + 4r^2 e^{(\mu-\nu)}\frac{U_r^2}{V_t^2}\right) + U_r\left(-2U + 4rUe^{(\mu-\nu)}\frac{U_t^2}{V_t^2}\right) + e^{(\mu-\nu)}U\frac{U_t^2}{V_t^2} = 0$$

или

$$\left(U_r + \frac{1}{2r}U\right)^2 + \frac{U^2}{4r^2}\left(-1 + 2re^{(\mu-\nu)}\frac{U_t^2}{V_t^2}\right)^{-1} = 0. \tag{Б}$$

Это уравнение можно разрешить относительно U_r, если

$$-1 + 2re^{\mu-\nu}\frac{U_t^2}{V_t^2} < 0. \tag{В}$$

Но из уравнения (8.2) мы имеем

$$e^{\nu^*} = -2re^{\mu}U_t^2 + e^{\nu}V_t^2 = -e^{\nu}V_t^2\left(-1 + 2re^{\mu-\nu}\frac{U_t^2}{V_t^2}\right).$$

Поэтому неравенство (В) удовлетворяется, и уравнение (Б) можно разрешить относительно U_r. Мы знаем теперь, что после того, как мы определили $U(\rho, t)$ и $V(\rho, t)$ так, чтобы удовлетворялось граничное условие (А), можно найти $U_r(\rho, t)$ из уравнения (Б) и $\partial^n U/\partial r^n(\rho, t)$ путем дифференцирования уравнения (Б) и исключения V_{rt} с помощью уравнений (10.1) и (10.2).

Определив U, мы сразу определяем V из уравнения (10.1) и граничного условия (А). Таким образом показано, что каждое центрально-симметричное решение описывает поле Шварцшильда.

Мы опустили, конечно, какое-либо обсуждение вопроса о существовании истинных решений при граничных условиях (А) или о сходимости разложения U в ряд Тейлора, которое мы получили из уравнения (Б).

Заключительное замечание. В космологической теории до сих пор принималось, что звездное вещество можно заменять непрерывно распределенной «пылевидной» материей. Исследования Мак-Витти, Иернфельта и наши оправдывают это предположение. Если его считать верным, то теорема о тождестве каждого динамического центрально-симметричного решения с решением Шварцшильда уже ведет к заключению, что свойства мира планет такие же, как если бы не существовало ни космического расширения, ни кривизны.

ОБОБЩЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ. II*

(Совместно с Э. Страусом)

В предыдущей работе [1] один из нас развил общерелятивистскую теорию; в этой теории:

1. Используется группа вещественных преобразований четырех координат $(x_1,\ldots,x_4)$.

2. Зависимыми переменными служат компоненты тензора g_{ik}, который принят комплексным и эрмитово-симметричным. В. Паули заметил, что в развитой на этой основе теории ограничение случаем эрмитово-симметричного g_{ik} не является необходимым.

3. Как было отмечено в добавлении при корректуре, представляется естественным принять, что поле удовлетворяет уравнениям

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}\left(\Gamma^a_{ia} - \Gamma^a_{ai}\right) = 0. \tag{1}$$

Утверждалось, но не доказывалось, что существуют тождества, позволяющие присоединить эти уравнения, не делая систему переопределенной. Однако это утверждение было основано на ошибке. Введение уравнения (1) требует другого вывода уравнений поля из первоначальных уравнений и (небольшого) изменения новых уравнений по сравнению с уравнениями поля, полученными в первой работе.

Здесь сохраняется математический формализм теории за исключением изменения правил абсолютного дифференцирования тензорных плотностей. Предполагается, что в остальном формализм известен.

....

* *Generalization of the relativistic Theory of Gravitation. II* (With E. Straus). Ann. Math., 47, 1946, 731—741.

[1] A. Einstein. Ann. Math., 1945, 46, 578. (Статья 127.— *Ред.*)

§ 1. Бесконечно малый параллельный перенос фундаментального тензора. Абсолютное дифференцирование плотностей

Для теории характерна связь между g_{ik} и Γ^a_{ik}. Она задается соотношением

$$(g_{\underset{+}{i}\,\underset{-}{k};\,a}\equiv)\, g_{ik,\,a}-g_{sk}\Gamma^s_{ia}-g_{is}\Gamma^s_{ak}=0. \tag{2}$$

Это определение Γ через g обладает следующим свойством: если тензору g_{ik} соответствует параллельный перенос Γ^a_{ik}, согласно соотношению (2), то тензору $\tilde{g}_{ik}=g_{ki}$ соответствует $\tilde{\Gamma}^a_{ik}=\Gamma^a_{ki}$.

Доказательство. Если образовать левую часть соотношения (2) для $\tilde{g}_{ik}$ и $\tilde{\Gamma}^a_{ik}$, то получим

$$\tilde{g}_{ik,\,a}-\tilde{g}_{sk}\tilde{\Gamma}^s_{ia}-\tilde{g}_{is}\tilde{\Gamma}^s_{ak}.$$

Если ввести здесь g и Γ в соответствии с приведенным определением и переставить последние два члена, то получим

$$g_{ki,\,a}-g_{si}\Gamma^s_{ka}-g_{ks}\Gamma^s_{ai}.$$

Это выражение, согласно нашему предположению, обращается в нуль, поскольку оно превращается в левую часть равенства (2), если мы переставим свободные индексы i и k.

Замечание. Только что установленное свойство не имеет ничего общего с предположением, что g_{ik} и Γ^a_{ik} эрмитовы по индексам i и k. Эти величины можно считать вещественными, но несимметричными; тогда число независимых компонент g и Γ равно числу компонент в случае эрмитовой симметрии. Таким способом приходим к теории, которая отличается от ранее развитой лишь знаками некоторых членов.

Абсолютное дифференцирование тензорных плотностей

Если левую часть соотношения (2) умножить на $\frac{1}{2}\, g^{ik}$, то получим [2] вектор

$$\frac{(\sqrt{-g})_{,\,a}}{\sqrt{-g}}-\frac{1}{2}\,(\Gamma^s_{as}+\Gamma^s_{sa}). \tag{2.1}$$

[2] См. цитированную выше работу.

Умножив последнее выражение на $\sqrt{-g}$, мы получаем векторную плотность

$$(\sqrt{-g})_{,a}-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,(\Gamma^{s}_{as}+\Gamma^{s}_{sa}).$$

Мы определяем ее как ковариантную производную $(\sqrt{-g})_{;a}$ от скалярной плотности $\sqrt{-g}$. Соответственно мы определяем ковариантную производную от каждой скалярной плотности ρ:

$$\rho_{;a}=\rho_{,a}-\rho\frac{1}{2}(\Gamma^{s}_{as}+\Gamma^{s}_{sa}). \tag{3}$$

Отсюда известным способом получаются правила дифференцирования для всех тензорных плотностей, например,

$$\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}_{;a}=\mathfrak{g}^{ik}_{,a}+\mathfrak{g}^{sk}\Gamma^{i}_{sa}+\mathfrak{g}^{is}\Gamma^{k}_{as}-\mathfrak{g}^{ik}\frac{1}{2}(\Gamma^{s}_{as}+\Gamma^{s}_{sa}). \tag{3.1}$$

Можно легко показать, что уравнения

$$g^{\underset{+-}{ik}}_{;l}=0,\qquad g^{\underset{-+}{ki}}_{;l}=0,\qquad \mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}_{;l}=0$$

здесь также эквивалентны.

Когда соотношение (2) удовлетворяется, правило дифференцирования тензорных плотностей соответствует определенному раньше. Для контравариантной тензорной плотности мы получаем

$$\mathfrak{A}^{\underset{+}{i}}_{;a}=\mathfrak{A}^{i}_{,a}+\mathfrak{A}^{s}\Gamma^{i}_{sa}-\mathfrak{A}^{i}\frac{1}{2}(\Gamma^{s}_{as}+\Gamma^{s}_{sa})$$

и для дивергенции

$$\mathfrak{A}^{\underset{+}{a}}_{;a}=\mathfrak{A}^{a}_{,a}+\mathfrak{A}^{a}\Gamma_{a}, \tag{3.2}$$

а также

$$\mathfrak{A}^{\underset{-}{a}}_{;a}=\mathfrak{A}^{a}_{,a}-\mathfrak{A}^{a}\Gamma_{a}. \tag{3.3}$$

Здесь мы видим, насколько естественно ограничивать поле уравнением (1). В самом деле, в правых частях равенств (3.2) и (3.3) каждый член имеет тензорный характер; согласно же уравнению (1), остается лишь один член.

Есть и другие формальные поводы для постулирования уравнений (1), которые следует упомянуть здесь. Как и в теории с симметричным метрическим тензором g_{ik}, свернутый один раз тензор кривизны играет важную роль. Свертка тензора кривизны

$$R^i_{klm} \equiv \Gamma^i_{kl,m} - \Gamma^i_{al}\Gamma^a_{km} - \Gamma^i_{km,l} + \Gamma^i_{am}\Gamma^a_{kl}$$

по индексам i и k обращается в нуль тождественно в первоначальной теории гравитации.

Здесь же мы получаем тензор

$$R^a_{alm} = \Gamma^a_{al,m} - \Gamma^a_{am,l},$$

который, вообще говоря, не обращается в нуль, даже если соотношение (2) удовлетворено. Именно, если мы преобразуем правую часть этого равенства, используя вытекающее из (2.1) соотношение

$$(\Gamma^a_{al} + \Gamma^a_{la})_{,m} - (\Gamma^a_{am} + \Gamma^a_{ma})_{,l} \equiv 0, \qquad (2.2)$$

то получим

$$R^a_{alm} \equiv -(\Gamma_{l,m} - \Gamma_{m,l}).$$

Этот тензор, вообще говоря, отличен от нуля, но он обратится в нуль, когда поле будет удовлетворять уравнению (1). Если мы свернем тензор кривизны R^i_{klm} по индексам i и m, то получим тензор

$$R_{kl} \equiv R^a_{kla} \equiv \Gamma^a_{kl,a} - \Gamma^a_{kl}\Gamma^l_{al} - \Gamma^a_{ka,l} + \Gamma^a_{kl}\Gamma^l_{al}.$$

Последний тензор, вообще говоря, неэрмитов, т. е. он не переходит сам в себя при замене Γ на $\widetilde{\Gamma}$ и перестановке индексов k и l. (В дальнейшем мы будем пользоваться термином «эрмитов» в этом смысле.) Для антиэрмитовой части мы получим

$$2\overset{*}{R}_{kl} = -\Gamma_{ka,}{}^{a}_{l} + \Gamma^a_{al,k} + 2\Gamma^a_{kl}\Gamma_a;$$

это выражение с учетом соотношения (2.2) принимает вид

$$\overset{*}{R}_{kl} = -\frac{1}{2}(\Gamma_{\underset{+}{k};\,l} + \Gamma_{l;\,\underset{-}{k}}).$$

Следовательно, антиэрмитова часть R_{kl} обращается в нуль, когда удовлетворены соотношения (1) и (2).

Нетрудно было бы привести дополнительные доводы, чтобы показать, что уравнения (1) соответствуют используемой структуре пространства. Однако сказанного достаточно. Теперь наша задача — найти совместные уравнения поля (на основе вариационного принципа) таким образом, чтобы в их число входили уравнения (1) и соотношения (2).

Сначала сделаем другое формальное замечание, чтобы подготовить вывод уравнений поля. Если из выражения (3.1) мы вычислим свертки

$\overset{ia}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;a}$ и $\overset{ai}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;a}$, то после вычитания будем иметь

$$\frac{1}{2}\left(\overset{ia}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;a}-\overset{ai}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;a}\right)\equiv\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ia}}_{,a}-\mathfrak{g}^{\underline{ia}}\Gamma_a, \tag{3.4}$$

где $\mathfrak{g}^{\underline{ia}}$ — симметричная и $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ia}}$ — антисимметричная части $\mathfrak{g}^{ia}$. Следовательно, если соотношение (2) удовлетворено, мы получим тождество

$$(\mathfrak{g}^{\underline{ia}}\Gamma_a)_{,i}\equiv 0. \tag{3.5}$$

Поэтому, уравнения (1) удовлетворяют благодаря (2) скалярному тождеству. Из (3.4) мы видим, что соотношения (1) и (2) включают в себя уравнение

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ia}}_{;a}=0. \tag{3.6}$$

§ 2. Гамильтониан. Уравнения поля

Выберем теперь гамильтониан

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{g}^{ik}P_{ik}+\mathfrak{A}^i\Gamma_i+b_i\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ia}}_{,a},$$

где P_{ik} — симметризованный тензор кривизны:

$$P_{ik}=\Gamma^a_{ik,a}-\frac{1}{2}(\Gamma^a_{ia,k}+\Gamma^a_{ak,i})-\Gamma^a_{ib}\Gamma^b_{ak}+\Gamma^a_{ik}\Gamma^b_{\underline{ab}}.$$

Варьирование производится по переменным $\mathfrak{g}^{ik}$, Γ^a_{ik}, $\mathfrak{A}^i$, b_i, которые играют роль независимых переменных поля, причем две последние (чисто мнимые) величины играют роль лагранжевых множителей. [Выполнение соотношений (1) и (2) заранее не предполагается.]

Варьирование по $\mathfrak{A}^i$ и b_i приводит к уравнениям:

$$\Gamma_i=0, \tag{4}$$

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ia}}_{,a}=0. \tag{5}$$

Для варьирования по Γ мы используем метод, предложенный Палатини для случая симметричных g и Γ. Легко проверить, рассматривая варьирование по Γ интеграла от $\mathfrak{H}$ (при $\delta\Gamma$, обращающейся в нуль на пределах интегрирования), что

$$\delta P_{ik}=(\delta\overset{a}{\Gamma}{}^{0}_{\underset{+\,-}{i,k}})_{;a}-\frac{1}{2}(\delta\Gamma^a_{\underset{+}{ia}})_{;k}-\frac{1}{2}(\delta\Gamma^a_{\underset{-}{ak}})_{;i}.$$

Имеем

$$0 = -\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;\,a} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{\overset{is}{+-}}_{;\,s}\,\delta^k_a + \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{\overset{sk}{+-}}_{;\,s}\delta^i_a +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{is}\Gamma_s\delta^k_a - \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{sk}\Gamma_s\delta^i_a + \frac{1}{2}\,\mathfrak{A}^i\delta^k_a - \frac{1}{2}\,\mathfrak{A}^k\delta^i_a.$$

Вторая строка в уравнении (6) равна нулю в силу (4). Если мы свернем уравнение (6) сначала по k и a, затем по i и a, то получим два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{g}^{\overset{is}{+-}}_{;\,s} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{\overset{si}{+-}}_{;\,s} + \frac{3}{2}\,\mathfrak{A}^i = 0, \\ &\mathfrak{g}^{\overset{si}{+-}}_{;\,s} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{\overset{is}{+-}}_{;\,s} - \frac{3}{2}\,\mathfrak{A}^i = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

Складывая эти два уравнения, получаем

$$\mathfrak{g}^{\overset{is}{+-}}_{;\,s} + \mathfrak{g}^{\overset{si}{+-}}_{;\,s} = 0. \tag{6.2}$$

Уравнение (3.4), которое основано на определении ковариантной производной, приводит с учетом (4) и (5) к уравнению

$$\mathfrak{g}^{\overset{is}{+-}}_{;\,s} - \mathfrak{g}^{\overset{si}{+-}}_{;\,s} = 0. \tag{3.7}$$

Следовательно, $\mathfrak{g}^{\overset{is}{+-}}_{s}$ и $\mathfrak{g}^{\overset{si}{+-}}_{;\,s}$ обращаются в нуль, и поэтому уравнение (6.1) включает в себе обращение $\mathfrak{A}^i$ в нуль. Поэтому уравнение (6) сводится к уравнению

$$\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;\,a} = 0. \tag{6.3}$$

Согласно (3.4), уравнение (5) содержится в уравнениях (4) и (6.3).

Варьирование по $\mathfrak{g}^{ik}$ интеграла от $\mathfrak{H}$ дает

$$P_{ik} - \frac{1}{2}(b_{i,\,k} - b_{k,\,i}) = 0, \tag{7}$$

или отдельно для членов одинаковой симметрии:

$$P_{\underline{ik}} = 0, \tag{7.1}$$

$$P_{\underset{\vee}{ik}} - \frac{1}{2}(b_{i,\,k} - b_{k,\,i}) = 0, \tag{7.2}$$

или, после исключения вспомогательных переменных b,

$$P_{\underset{\vee}{ik},\, l} + P_{\underset{\vee}{kl},\, i} + P_{\underset{\vee}{li},\, k} = 0. \tag{7.3}$$

Собирая результаты варьирования, мы получаем уравнения поля [которые несколько отличаются от уравнений (15б) первой работы]:

$$\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;\,a} = 0, \tag{8.1}$$

$$\Gamma_i = 0, \tag{8.2}$$

$$P_{\underline{ik}} = 0, \tag{8.3}$$

$$P_{\underset{\vee}{ik},\, l} + P_{\underset{\vee}{kl},\, i} + P_{\underset{\vee}{li},\, k} = 0. \tag{8.4}$$

Вывод этих уравнений из вариационного принципа (с вещественным $\mathfrak{H}$) гарантирует их совместность.

Если мы сравним эту систему уравнений с системой уравнений предыдущей работы, то увидим, что уравнение (8.2) вводится ценой ослабления уравнений, которые получены из тензора кривизны. Из уравнений (8.4) только три независимы, тогда как в первоначальной формулировке теории было шесть независимых уравнений. Кроме того, порядок производных в последнем уравнении возрос на единицу. Введение последнего члена в гамильтониан, приведшее к этому возрастанию порядка производной, необходимо для выполнения уравнения (8.1), которое является единственным разумным определением Γ через g.

При рассмотрении уравнений (8) возникает вопрос, нельзя ли заменить уравнения (8.3) и (8.4) более сильными:

$$P_{ik} = 0. \tag{9}$$

Вопрос о справедливости такого уравнения доставил нам много беспокойства. Это уравнение было бы, очевидно, справедливо, если уравнения (9), (8.1) и (8.2) удовлетворяли бы трем независимым тождествам. Предположение о существовании таких тождеств подкрепляется тем фактом, что для бесконечно слабых полей такие добавочные тождества существуют.

Именно, если положить (пренебрегая особыми свойствами времени), что

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \gamma_{ik},$$

и пренебречь квадратом γ по сравнению с единицей, то уравнения (8.1), (8.2) и (9) можно заменить на линеаризованные уравнения:

$$\gamma_{ik,\, a} - \Gamma^k_{ia} - \Gamma^i_{ak} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\Gamma^s_{is} - \Gamma^s_{si}\right) = 0,$$

$$\Gamma^s_{ik,\, s} - \frac{1}{2}\Gamma^s_{is,\, k} - \frac{1}{2}\Gamma^s_{sk,\, i} = 0.$$

Первое уравнение разрешим относительно Г:

$$\Gamma^a_{ik} = \frac{1}{2}(-\gamma_{ki,a} + \gamma_{ia,k} + \gamma_{ak,i});$$

тогда второе уравнение даст

$$(G_i \equiv)\, \gamma_{\underset{\vee}{i}a,a} = 0,$$

а третье, с учетом последнего,—

$$(G_{ik} \equiv)\, -\gamma_{ki,aa} + \gamma_{ia,ak} + \gamma_{ak,ai} - \gamma_{aa,ik} = 0.$$

Последнее антисимметризованное уравнение, в силу уравнения $G_i = 0$, можно заменить на

$$(U_{\underset{\vee}{ik}} \equiv)\, \gamma_{\underset{\vee}{ik},aa} = 0.$$

У нас теперь имеется тождество

$$U_{\underset{\vee}{ik},k} - G_{i,kk} \equiv 0.$$

Если бы этому тождеству, справедливому для уравнений бесконечно слабых полей, соответствовало и тождество для строгих уравнений, то введение более сильного уравнения (9) было бы оправдано. Систематическое исследование показало, что такого строгого тождества не существует.

Возникает вопрос, нельзя ли, несмотря на отсутствие такого тождества, рассмотреть все же уравнение (9). На это также следует ответить отрицательно по соображениям, которые можно использовать и в других случаях.

Допустим, что у нас есть система уравнений $G = 0$, для которой существует *строгое* тождество, линейное и однородное по G. Это тождество символически можно записать в виде

$$L\,(G) \equiv 0,$$

где L — оператор, линейный и однородный по G. Теперь L и G можно разложить по степеням переменных поля и их производных:

$$(L_0 + L_1 + \ldots)(G_1 + G_2 + \ldots) \equiv 0;$$

после этого тождество распадается на тождества по степеням переменных пóля. Первые два тождества будут

$$L_0(G_1) \equiv 0,$$

$$L_0(G_2) + L_1(G_1) \equiv 0.$$

Предположим теперь, что нам известно параметрическое решение для G в переменных пóля g:

$$G(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \ldots) = 0,$$

или

$$(G_1 + G_2 \ldots)(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \ldots) = 0,$$

или

$$G_1(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \ldots) + G_2(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \ldots) + \ldots = 0.$$

Эти уравнения должны удовлетворяться тождественно относительно ε. Это дает два первые уравнения:

$$G_1(\varepsilon g_1) = 0 \qquad \text{или} \quad G_2(g_1) = 0$$

(линейное по g) и

$$G_1(\varepsilon^2 g_2) + G_2(\varepsilon g_1) = 0 \text{ или } G_1(g_2) + G_2(g_1) = 0.$$

Используем теперь наше тождество. Так как $L_0(G_1) \equiv 0$, то, применяя оператор L_0 ко второму уравнению, получаем

$$L_0(G_2(g_1)) = 0. \tag{а}$$

Это — уравнение второй степени по g. Поскольку мы видели ранее, что

$$L_0(G_2) + L_1(G_1) \equiv 0, \tag{б}$$

мы знаем, что это квадратное уравнение следует из линейных уравнений

$$G_1(g_1) = 0.$$

Если в первом приближении существует линейное тождество, которому не соответствует строгого тождества (как в случае наших уравнений), то мы выводим уравнения (а) как и раньше. Однако поскольку тождество (б), вообще говоря, не выполняется, это уравнение (а) не будет больше следствием линеаризованных уравнений поля $G_1(g_1) = 0$. Поэтому существуют добавочные уравнения для первого приближения. В случае рассматриваемых нами уравнений поля они построены так, что каждый их член представляет собой произведение симметричных и антисимметричных величин $g(\gamma_{ik})$ (или производных этих величин).

Если мы интерпретируем симметричные γ_{ik} как выражения, описывающие гравитационное поле, а $\gamma_{\underset{\vee}{ik}}$ — как выражения, описывающие электромагнитное поле, то в первом приближении для поля получим зависимость электрического поля от гравитационного, которую нельзя согласовать с нашими физическими факторами. Поэтому рассматривавшееся усиление уравнений (8) принять нельзя.

Линеаризованные уравнения, которым, согласно (8), удовлетворяет антисимметричное (электромагнитное) поле, имеют вид

$$\gamma_{\underset{\vee}{ik},\, k} = 0,$$

$$(\gamma_{\underset{\vee}{ik},\, l} + \gamma_{\underset{\vee}{kl},\, i} + \gamma_{\underset{\vee}{li},\, k})_{,\, ss} = 0.$$

Если бы во втором уравнении выражение в скобках само обращалось в нуль, то мы получили бы уравнения Максвелла в пустом пространстве, решения которых удовлетворяют нашим уравнениям. Последние кажутся слишком слабыми. Это, однако, не является возражением против теории, поскольку мы не знаем, каким решениям линеаризованных уравнений соответствуют строгие решения, регулярные во всем пространстве. С самого начала ясно, что в непротиворечивой теории поля, которая претендует на полноту (в противоположность, например, чисто гравитационной теории), должны рассматриваться лишь те решения, которые регулярны во всем пространстве. Вопрос о существовании таких (нетривиальных) решений еще не ясен.

§ 3. Условия для g_{ik}, вытекающие из уравнения (2)

Мы хотим теперь исследовать, каким условиям должны удовлетворять величины g_{ik}, чтобы уравнения (2) определяли Г однозначно и без особенностей.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: $g_{\underline{ik}} = s_{ik}$, $g_{\underset{\vee}{ik}} = a_{ik}$. Мы можем преобразовать координаты так, чтобы $s_{ik} = s_i\delta_{ik}$ (по индексу i суммирования нет). Тогда уравнение (2) принимает вид

$$a_{sk}\Gamma^s_{ia} + a_{is}\Gamma^s_{ak} + s_k\Gamma^k_{ia} + s_i\Gamma^i_{ak} = g_{ik,\,a} \tag{2.3}$$

(по i, k суммирование не производится). Если положить $i = a = k$, то получим

$$2s_i\Gamma^i_{ii} = g_{ii,\,i}. \tag{2.4}$$

Следовательно, должно выполняться условие

$$s_i \neq 0, \tag{10}$$

или, другими словами, в каждой точке для определителя $|s_{ik}|$ выполняется неравенство

$$|s_{ik}| \neq 0. \tag{10.1}$$

Этот результат важен, так как из него следует существование светового конуса с одинаковой всюду сигнатурой. Тем самым разделение линейных элементов на временноподобные и пространственноподобные всегда выполнимо.

Если сигнатура выбрана, как обычно, в теории относительности, то систему координат можно далее специализировать так, чтобы

$$s_{ik} = s\eta_{ik} \quad \left(s > 0 \text{ и } \eta_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{при } i = 1, 2, 3 \\ -\delta_{ik} & \text{при } i = 4 \end{cases}\right).$$

С помощью преобразования Лоренца мы можем также добиться равенства нулю в выбранной точке всех a_{ik}, за исключением $a_{12} = -a_{21}$ и $a_{34} = -a_{43}$. Введем обозначения: $a_{12} = a_1\varepsilon_{12}$, $a_{34} = a_2\varepsilon_{34}$; примем также, что индексы, обозначаемые большими латинскими буквами, принимают значения 1, 2, а греческие индексы — значения 3, 4.

Рассмотрим сначала уравнения:

$$a_1(\varepsilon_{SK}\Gamma^S_{IA} + \varepsilon_{IS}\Gamma^S_{AK}) + s(\Gamma^K_{IA} + \Gamma^I_{AK}) = g_{IK,\,A}, \tag{2.5}$$

где все индексы равны 1, 2 и не все A, I, K совпадают. Мы получим тогда шесть уравнений с шестью неизвестными [исключая компоненты Γ^A_{AA}, которые мы взяли из соотношения (2.2)] с определителем:

$$\begin{array}{ll|cccccc} & \Gamma = & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{21} \\ \hline (A, I, K) = & (1, 1, 2) & s & 0 & 0 & s & a_1 & 0 \\ & (1, 2, 1) & 0 & s & 0 & s & 0 & -a_1 \\ & (1, 2, 2) & -a_1 & a_1 & 0 & 0 & s & s \\ & (2, 1, 1) & s & s & 0 & 0 & -a_1 & a_1 \\ & (2, 1, 2) & a_1 & 0 & s & 0 & s & 0 \\ & (2, 2, 1) & 0 & -a_1 & s & 0 & 0 & s \end{array} = -4s^2(s^2 + a_1^2)^2.$$

Аналогичным образом определитель уравнений

$$a_2(\varepsilon_{\sigma\varkappa}\Gamma^\sigma_{\iota\alpha} + \varepsilon_{\iota\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\varkappa}) + s(\eta_{\sigma\varkappa}\Gamma^\sigma_{\iota\alpha} + \eta_{\sigma\iota}\Gamma^\sigma_{\alpha\varkappa}) = g_{\iota\varkappa,\,\alpha}$$

равен

$$4s^2(-s^2 + a_2^2)^2.$$

Следовательно,

$$(s^2 + a_1^2)(-s^2 + a_2^2) \neq 0 \tag{11}$$

или

$$g = |g_{ik}| \neq 0. \tag{11.1}$$

Мы знаем теперь, что g^{ik} существует (факт, который до сих пор мы молчаливо предполагали). В самом деле,

$$\begin{aligned} g^{IK} &= \frac{1}{s^2 + a_1^2}(s\delta_{IK} + a_1\varepsilon_{IK}), \\ g^{\iota\varkappa} &= \frac{1}{-s^2 + a_2^2}(-s\eta_{\iota\varkappa} + a_2\varepsilon_{\iota\varkappa}). \end{aligned} \tag{12}$$

Тогда, если в трех уравнениях

$$g_{sk}\Gamma^s_{il} + g_{is}\Gamma^s_{lk} = g_{ik,\,l},$$

$$g_{sl}\Gamma^s_{ki} + g_{ks}\Gamma^s_{il} = g_{kl,\,i},$$

$$g_{si}\Gamma^s_{lk} + g_{ls}\Gamma^s_{ki} = g_{li,\,k}$$

мы умножим первое на $g^{ml}g^{ak}$, второе — на $-g^{ka}g^{ml}$ и третье — на $g^{lm}g^{ka}$ и сложим, то получим

$$(g^{ak}g^{ml}g_{is}+g^{ka}g^{lm}g_{si})\,\Gamma^{s}_{lk}=g^{ml}g^{ak}g_{ik,\,l}+g^{lm}g^{ka}g_{li,\,k}-g^{ml}g^{ka}g_{kl,\,i}. \qquad (2.7)$$

Рассмотрим сначала случай

$$s=\sigma,\quad l=L,\quad k=K,\quad i=\iota,\quad m=M,\quad a=A.$$

Используя формулы (12), приводим левую часть равенства (2.7) к следующему виду:

$$\frac{2s}{(s^2+a_1^2)^2}\,[(s^2\delta_{AK}\delta_{ML}+a_1^2\varepsilon_{AK}\varepsilon_{ML})\,\eta_{\iota\sigma}+a_1a_2\,(\delta_{AK}\varepsilon_{ML}+$$

$$+\,\delta_{ML}\varepsilon_{AK})\,\varepsilon_{\iota\sigma}]\,\Gamma^{\sigma}_{LK}. \qquad (2.8)$$

Тогда

$$\begin{array}{r|cccccccc}
\Gamma= & \Gamma^3_{11} & \Gamma^3_{12} & \Gamma^3_{21} & \Gamma^3_{22} & \Gamma^4_{11} & \Gamma^4_{12} & \Gamma^4_{21} & \Gamma^4_{22} \\
\hline
(i,\,A,\,M)=(3,\,1,\,1) & s^2 & 0 & 0 & a_1^2 & 0 & a_1a_2 & a_1a_2 & 0 \\
(3,\,1,\,2) & 0 & s^2 & -a_1^2 & 0 & -a_1a_2 & 0 & 0 & a_1a_2 \\
(3,\,2,\,1) & 0 & -a_1^2 & s^2 & 0 & -a_1a_2 & 0 & 0 & a_1a_2 \\
(3,\,2,\,2) & a_1^2 & 0 & 0 & s^2 & 0 & -a_1a_2 & -a_1a_2 & 0 \\
(4,\,1,\,1) & 0 & -a_1a_2 & -a_1a_2 & 0 & -s^2 & 0 & 0 & -a_1^2 \\
(4,\,1,\,2) & a_1a_2 & 0 & 0 & -a_1a_2 & 0 & -s^2 & a_1^2 & 0 \\
(4,\,2,\,1) & a_1a_2 & 0 & 0 & -a_1a_2 & 0 & a_1^2 & -s^2 & 0 \\
(4,\,2,\,2) & 0 & a_1a_2 & a_1a_2 & 0 & -a_1^2 & 0 & 0 & -s^2
\end{array}\quad\times$$

$$\times\,\frac{(2s)^8}{(s^2+a_1^2)^{16}}=\begin{vmatrix} s^2 & a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_2 \\ a_1^2 & s^2 & -a_1a_2 & -a_1a_2 \\ a_1a_2 & -a_1a_2 & -s^2 & a_1^2 \\ a_1a_2 & -a_1a_2 & a_1^2 & -s^2 \end{vmatrix}^2\cdot\frac{(2s)^8}{(s^2+a_1^2)^{16}}=$$

$$=\frac{(2s)^8}{(s^2+a_1^2)^{16}}\,[(s^2-a_1^2)^2+4a_1^2a_2^2]^2,$$

что дает нам условие

$$(s^2 - a_1^2)^2 + 4a_1^2a_2^2 \neq 0; \tag{13}$$

иными словами, одновременно не могут выполняться равенства

$$a_1 = \pm s \text{ и } a_2 = 0.$$

Мы сразу видим, что определители уравнений для $\Gamma^{s}_{\lambda K}$ и $\Gamma^{s}_{L\varkappa}$ равны

$$\frac{(2s)^8}{(s^2 + a_1^2)^4 (-s^2 + a_2^2)^8} [(s^2 - a_1^2)^2 + 4a_1^2a_2^2]^2,$$

и по этой причине они не приводят к новым неравенствам.

Аналогично, определитель уравнений для $\Gamma^{s}_{\lambda\varkappa}$ равен

$$\frac{(2s)^8}{(-s^2 + a_2^2)^{12}} [(s^2 + a_2^2)^2 + 4a_1^2a_2^2]^2,$$

что дает нам условие

$$(s^2 + a_2^2)^2 + 4a_1^2a^2 \neq 0; \tag{14}$$

иначе говоря, одновременно не могут выполняться равенства

$$a_2 = \pm is \text{ и } a_1 = 0.$$

Соответственно, определители уравнений для $\Gamma^{\sigma}_{\lambda K}$ и $\Gamma^{\sigma}_{L\varkappa}$ равны

$$\frac{(2s)^8}{(-s^2 + a_2^2)^4 (s^2 + a_1^2)^8} [(s^2 + a_2^2)^2 + 4a_1^2a_2^2]^2,$$

что опять не приводит к новым условиям.

Если ввести ковариантные выражения (скалярные плотности)

$$I_1 = |s_{ik}|,$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\, \varepsilon^{ijkl} \varepsilon^{i'j'k'l'} s_{ii'} s_{jj'} a_{kk'} a_{ll'},$$

$$I_3 = |a_{ik}|,$$

то мы сможем объединить условия (10), (11), (13) и (14) следующим образом.

Необходимыми и достаточными условиями существования единственного и не имеющего особенностей решения уравнений (2) являются

$$I_1 \neq 0, \tag{А}$$

$$g = I_1 + I_2 + I_3 \neq 0, \tag{Б}$$

$$(I_1 - I_2)^2 + I_3 \neq 0. \tag{В}$$

Из условий (А) и (Б) в случае, имеющем физический смысл, следуют неравенства:

$$|g_{ik}|<0 \text{ и } |s_{ik}|<0,$$

где последнее обеспечивает существование невырожденного «светового конуса» в каждой точке. Условие (В) констатирует, что равенства $I_1 = I_2$ и $I_3 = 0$ ни в одной точке не могут одновременно выполняться. Чтобы не допустить этого, достаточно, например, всюду в пространстве ограничить антисимметричное поле неравенством

$$|I_1|>|I_2|$$

($||$ означает абсолютную величину).

Поступила 24 января 1946 г.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ*

Излагаемый здесь вывод закона эквивалентности, который ранее не был опубликован, имеет два преимущества. Несмотря на то, что приходится пользоваться специальным принципом относительности, этот вывод не требует применения формального аппарата теории, а лишь опирается на три ранее известных закона.

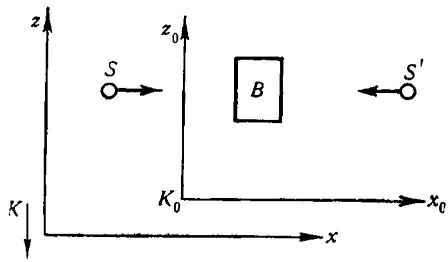

Рис. 1.

(1) Закон сохранения импульса.
(2) Выражение для давления излучения, т. е. для импульса волнового пакета, движущегося в заданном направлении.
(3) Известное выражение для аберрации света (влияние движения Земли на видимое положение неподвижных звезд — закон Брэдли).

Рассмотрим теперь следующую систему. Пусть тело B покоится сво-

* *Elementary Derivation of the Equivalence of Mass and Energy.* Techn. J. (Haifa), 1946, V, 16—17. [Статья опубликована также в Sci. Publ. Hebrew Techn. Coll., 1947, 2 (на еврейском языке — иврите) и в сборнике Conceptions scientifiques, morales et sociales, Paris, 1952 (на французском языке). — *Ред.*].

бодно в пространстве относительно системы отсчета K_0. Два волновых пакета S, S', с энергией $E/2$ каждый, движутся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси x_0 и поглощаются телом B. В результате этого поглощения энергия тела B возрастает на E. При этом тело B остается в покое по отношению к системе K_0 вследствие симметрии.

Теперь мы рассмотрим этот же процесс относительно системы отсчета K, движущейся по отношению к системе K_0 с постоянной скоростью v в отрицательном направлении оси z_0. По отношению к системе K этот процесс описывается следующим образом: тело B движется в положительном направлении оси z со скоростью v. Направления двух волновых

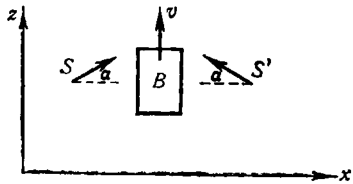

Рис. 2.

пакетов составляют в системе K угол α с осью x. Согласно закону аберрации, в первом приближении $\alpha = \frac{v}{c}$, где c — скорость света. Из рассмотрения процесса в системе K_0 мы знаем, что скорость тела B остается неизменной при поглощении волновых пакетов S и S'.

Применим теперь закон сохранения импульса нашей системы относительно направления z в системе отсчета K.

I. Пусть M — масса тела B *до поглощения*; тогда Mv представляет собой выражение для импульса тела B (согласно классической механике). Каждый волновой пакет имеет энергию $E/2$ и, следовательно, согласно известному следствию из теории Максвелла, импульс $E/2c$. Строго говоря, это импульс волнового пакета S по отношению к системе отсчета K_0. Однако, когда скорость v мала по сравнению с c, импульс по отношению к системе K остается тем же, с точностью до величины второго порядка малости ($\frac{v^2}{c^2}$ по сравнению с 1). Составляющая этого импульса по оси z равна $\frac{E}{2c}\sin\alpha$, или с достаточной точностью (если пренебречь величинами более высоких порядков малости) $\frac{E}{2c}\alpha$, или $\frac{E}{2}\frac{v}{c^2}$. Поэтому составляющие по оси z импульса волновых пакетов S и S', вместе взятых, равны

$E\frac{v}{c^2}$. Таким образом полный импульс системы до поглощения равен

$$Mv+\frac{E}{c^2}\cdot v.$$

II. Пусть M' — масса тела B *после поглощения.* Мы заранее учитываем здесь возможность увеличения массы при поглощении энергии E (это необходимо для того, чтобы окончательный результат наших вычислений был непротиворечивым). Тогда импульс системы после поглощения будет равен

$$M'v.$$

Применим, наконец, закон сохранения импульса к направлению оси z. Это дает соотношение

$$Mv+\frac{E}{c^2}v=M'v$$

или

$$M'-M=\frac{E}{c^2}.$$

Это соотношение выражает закон эквивалентности энергии и массы. Увеличение энергии на E связано с увеличением массы на $\frac{E}{c^2}$. Поскольку энергия обычно определяется с точностью до аддитивной постоянной, мы можем выбрать последнюю так, что

$$E=Mc^2.$$

$E = mc^2$: НАСТОЯТЕЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА НАШЕГО ВРЕМЕНИ *

Чтобы понять принцип эквивалентности массы и энергии, мы должны обратиться к двум законам сохранения (или «баланса»), игравшим независимо один от другого выдающуюся роль в дорелятивистской физике. Мы имеем в виду законы сохранения энергии и импульса. Первый из них, выдвинутый Лейбницем еще в XVII в., рассматривался в XIX в. по существу как следствие принципов механики.

Рассмотрим, например, маятник, который качается между точками A и B. В этих точках его масса m расположена выше наиболее низкой точки траектории C на величину h (см. рис. 1). С другой стороны, в точке

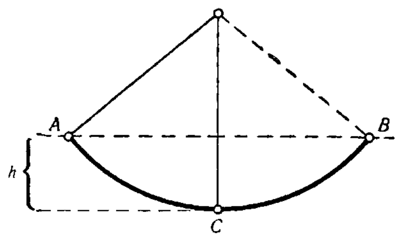

Рис. 1.

C разность высот исчезает, но вместо этого масса приобретает скорость v. Дело обстоит так, как если бы разность высот могла бы целиком превращаться в скорость, и наоборот. Точное соотношение должно иметь вид

* $E=mc^2$: *The most urgent Problem of our Time*. Sci. Illustr., I, 1946, 16—17 (Перевод выполнен по перепечатке этой статьи в сб.: A. Einstein. «Out of my later years». Французский перевод опубликован в сб. Conceptions scientifiques, morales et sociales, Paris, 1952. — *Прим. ред.*).

$mgh = \frac{m}{2} v^2$, где g — ускорение силы земного тяготения. Интересно, что это соотношение не зависит ни от длины маятника, ни от пути, по которому движется масса.

Значение этого факта заключается в том, что в процессе колебания нечто сохраняется и это нечто есть энергия. В точках A и B это энергия положения, или «потенциальная» энергия; в точке C это энергия движения, или «кинетическая» энергия. Если такой взгляд справедлив, то сумма $mgh + m\frac{v^2}{2}$ должна иметь одно и то же значение при любом положении маятника, если под h понимать высоту массы m над C, а под v — скорость в этой же точке траектории маятника. И эта сумма действительно сохраняется. Обобщение этого принципа приводит нас к закону сохранения механической энергии. Но что происходит, когда трение останавливает маятник?

Ответ дает изучение тепловых явлений. Анализ этих явлений, основанный на предположении, что тепло есть неуничтожаемая субстанция, перетекающая из более горячего тела в более холодное, приводит нас казалось бы к закону «сохранения тепла». С другой стороны, с незапамятных времен было известно, что тепло может создаваться трением, как, например, при добывании огня трением палочек у индейцев. Физики долго не могли объяснить этот способ «добывания» тепла. Их трудности были преодолены лишь тогда, когда было установлено, что на создание любого заданного количества тепла нужно затратить в точности пропорциональное количество механической энергии. Таким образом мы приходим к принципу «эквивалентности работы и тепла». В нашем маятнике, например, механическая энергия благодаря трению постепенно превращается в тепло.

Таким образом, законы сохранения механической и тепловой энергии слились в единый закон. Это привело физиков к мысли о возможности дальнейшего расширения закона сохранения энергии — применительно к химическим и электромагнитным процессам и вообще ко всем процессам. Оказалось, что в нашей физической системе именно полная сумма энергий остается постоянной независимо от характера возможных превращений.

Теперь о принципе сохранения массы. Масса определяется как противодействие тела ускорению (инертная масса). Она измеряется также весом тела (тяжелая масса). То обстоятельство, что два столь различные определения приводят к одному и тому же значению массы тела, само по себе является поразительным. Согласно принципу сохранения (а именно, масса остается неизменной при любых физических или химических превращениях), масса является существенной (ввиду своей неизменности) характеристикой материи. Нагревание, плавление, испарение, образование химических соединений не должны изменять полной массы.

Физики считали этот принцип справедливым еще несколько десятилетий тому назад. Однако он оказался несостоятельным перед лицом специальной теории относительности. Поэтому он слился с законом сохранения энергии, подобно тому, как примерно шестьюдесятью годами раньше закон сохранения механической энергии объединился с законом сохранения тепла. Мы могли бы сказать, что закон сохранения энергии, поглотив ранее закон сохранения тепла, включил теперь в себя и принцип сохранения массы и управляет всем единолично.

Эквивалентность массы и энергии принято выражать (хотя это и не совсем точно) формулой $E = mc^2$, где c — скорость света, составляющая около 186 000 *миль/сек*, E — энергия, содержащаяся в покоящемся теле, m — его масса. Энергия, соответствующая массе m, равна этой массе, умноженной на квадрат чудовищно большой скорости света, т. е. на единицу массы приходится огромное количество энергии.

Но если каждый грамм вещества содержит столь большое количество энергии, то почему это обстоятельство так долго оставалось незамеченным? Ответ достаточно прост: до тех пор пока энергия не выходит наружу, она остается незамеченной. Дело обстоит так же, как со сказочно богатым человеком, который никогда не тратит ни цента: никто не может сказать, насколько он богат.

Мы можем теперь разрешить это соотношение относительно m и сказать, что увеличение энергии тела на величину E должно сопровождаться увеличением его массы на величину E/c^2. Я легко могу сообщить некоторому телу энергию, нагрев, например, его на десять градусов. Так почему же никогда не замечалось увеличения массы, или увеличения веса, связанного с этим изменением? Дело в том, что в приращении массы огромный множитель c^2 входит в знаменатель дроби. Увеличение массы слишком мало, чтобы его можно было измерить непосредственно даже самыми чувствительными весами.

Чтобы увеличение массы было измеримым, изменение энергии, приходящееся на единицу массы, должно быть невероятно большим. Нам известно только одно явление, где освобождается такого порядка количество энергии в расчете на единицу массы; это — радиоактивный распад. Схематически процесс идет следующим образом: атом с массой M расщепляется на два атома с массами M' и M'', которые разлетаются с огромной кинетической энергией. Если мы остановим эти атомы, т. е. заберем у них энергию движения, то они в совокупности будут обладать гораздо меньшей энергией, чем исходный атом. Согласно принципу эквивалентности, суммарная масса $M' + M''$ продуктов распада должна быть несколько меньше, чем первоначальная масса M распадающегося атома, что противоречит старому принципу сохранения массы. Относительная разность этих масс составляет примерно десятую долю процента.

Сейчас мы не можем реально измерять вес отдельного атома. Однако существуют косвенные методы, позволяющие точно измерить веса атомов. Мы можем также определить кинетические энергии, передаваемые продуктам распада M' и M''. Таким образом, оказалось возможным провести проверку и подтвердить соотношение эквивалентности. Кроме того, этот принцип позволяет нам рассчитать заранее по известным с большой точностью атомным весам, какое именно количество энергии должно выделиться при любом интересующем нас атомном распаде. Конечно, этот принцип ничего не говорит о том, когда (или каким образом) произойдет распад.

Происходящие события можно проиллюстрировать на нашем примере с богачом. Атом M — это богатый скупец, который при жизни не расстается с деньгами (с энергией). Но по завещанию он передает свое состояние сыновьям M' и M'' при условии, что они выделят для общества некую малую часть, меньшую одной тысячной всего имущества (энергии или массы). Сыновья владеют вместе несколько меньшим состоянием, чем владел отец (суммарная масса $M' + M''$ немного меньше, чем масса M радиоактивного атома). Но часть, переданная обществу, хотя и относительно мала, все же настолько огромна (если рассматривать ее как кинетическую энергию), что несет с собой большую угрозу зла. Предотвращение этой угрозы стало настоятельной проблемой современности.

133

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ: СУЩНОСТЬ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Математика оперирует исключительно с отношениями между понятиями, не принимая во внимание их связь с опытом. Физика также имеет дело с математическими понятиями, однако эти понятия приобретают физическое содержание лишь в том случае, когда их связь с объектами опыта четко определена. Так, в частности, обстоит дело с понятиями движения, пространства, времени.

Теория относительности — это физическая теория, основанная на последовательной физической интерпретации трех указанных понятий. Название «теория относительности» связано с тем, что движение, с точки зрения возможного опыта, всегда представляется как движение одного тела относительно другого (например, автомобиля относительно дороги или Земли относительно Солнца и неподвижных звезд). Движение никогда не наблюдается как «движение по отношению к пространству», иначе говоря, как «абсолютное движение». «Принцип относительности» в наиболее широком смысле состоит в следующем утверждении: все физические явления имеют такой характер, что не дают основания вводить понятие «абсолютного движения», или, более коротко, но менее точно, «абсолютного движения не существует».

Казалось бы мы мало что можем почерпнуть из такого рода отрицательного утверждения. Однако в действительности оно сильно ограничивает круг (мыслимых) законов природы. В этом смысле можно провести аналогию между теорией относительности и термодинамикой. Последняя также основана на отрицательном утверждении: «вечный двигатель невозможен».

....

* *Relativity: Essence of the Theory of Relativity.* Amer. People Encycl., 1949, XVI, Chicago.

Построение теории относительности включает в себя два этапа: построение «специальной теории относительности» и «общей теории относительности». Последняя предполагает справедливость первой в предельном случае и является ее последовательным обобщением.

А. Специальная теория относительности

Физическая интерпретация пространства и времени в классической механике. Геометрия, с физической точки зрения, представляет собой совокупность законов, согласно которым взаимно покоящиеся твердые тела можно располагать друг относительно друга (например, треугольник состоит из трех стержней, концы которых постоянно соприкасаются). Предполагается, что при такой интерпретации аксиомы Эвклида справедливы. «Пространство» в этом понимании представляет собой бесконечное твердое тело (или решетку), к которому отнесены положения всех прочих тел (тело отсчета). Аналитическая геометрия (Декарта) использует в качестве тела отсчета, представляющего пространство, три взаимно-перпендикулярных жестких стержня, вдоль которых измеряются каким-то способом «координаты» (x, y, z) точек пространства, определяемые как ортогональные проекции (с помощью жесткого масштаба).

Одновременность. Физика имеет дело с «событиями» в пространстве и времени. Каждому событию помимо трех пространственных координат x, y, z принадлежит временна́я координата t. Предполагается, что последняя измеряется часами (идеальным периодическим процессом) пренебрежимо малых размеров. Эти часы C следует считать покоящимися в одной из точек системы координат, например в начале координат ($x = y = z = 0$). Тогда время события, происшедшего в точке $P(x, y, z)$, определяется как показание часов, одновременное с событием. Здесь понятие «одновременности» предполагалось имеющим физический смысл без специального определения. Это — неточность, и она кажется безобидной лишь потому, что с помощью света (скорость которого практически бесконечна с точки зрения повседневного опыта) одновременность пространственно разделенных событий, казалось бы, можно установить непосредственно.

Специальная теория относительности устраняет эту неточность, вводя физическое определение одновременности с помощью световых сигналов. Время t события P есть показание часов C в момент прибытия светового сигнала, пришедшего от события, за вычетом времени, необходимого световому сигналу для преодоления расстояния до часов. Введение такой поправки основано на предположении (постулате) о постоянстве скорости света.

Это определение сводит понятие одновременности пространственно удаленных событий к понятию одновременности событий, происходящих в одном и том же месте (совпадение событий), а именно: к одновременности прибытия светового сигнала в C и отсчета времени часами C.

Инерциальные системы и принцип постоянства скорости света. Классическая механика основана на принципе Галилея: тело находится в состоянии равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не воздействуют на него. Это утверждение не может быть справедливо для произвольно движущихся систем координат. Оно может претендовать на справедливость только для так называемых «инерциальных систем». Инерциальные системы движутся прямолинейно и равномерно друг относительно друга. Классическая физика претендует на справедливость своих законов лишь относительно всех инерциальных систем (специальный принцип относительности).

Теперь легко понять дилемму, которая привела к специальной теории относительности. Опыт и теория постепенно создали убеждение, что свет в пустом пространстве всегда распространяется с одной и той же скоростью и независимо от своего цвета и состояния движения источника света (принцип постоянства скорости света — в дальнейшем мы будем называть его «L-принципом»). Элементарные интуитивные соображения казалось бы говорят, что один и тот же луч света не может двигаться с одной и той же скоростью c по отношению ко всем системам координат. Казалось бы L-принцип противоречит специальному принципу относительности.

Однако это противоречие оказывается лишь кажущимся и основано на заблуждении относительно абсолютного характера времени или, скорее, одновременности удаленных событий. Мы видим, что координаты события x, y, z и t можно в данный момент определить лишь по отношению к некоторой избранной системе координат (инерциальной системе). Преобразование координат события x, y, z, t, которое следует выполнить при переходе от одной инерциальной системы к другой, нельзя осуществить, не пользуясь определенными физическими предположениями. Однако нижеследующий постулат оказывается достаточным для решения этой проблемы: L-принцип выполняется во всех инерциальных системах (приложение специального принципа относительности к L-принципу). Определенные таким образом и линейные по x, y, z, t преобразования называются преобразованиями Лоренца. Эти преобразования формально характеризуются требованием, чтобы выражение $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$, составленное из разностей координат dx, dy, dz, dt двух бесконечно близких событий, было инвариантом (т. е., чтобы при преобразованиях оно переходило в то же самое выражение, образованное из разностей координат в новой системе).

С помощью преобразований Лоренца специальный принцип относительности может быть сформулирован следующим образом: законы природы инвариантны относительно преобразований Лоренца (т. е. закон природы не должен измениться, если отнести его к новой инерциальной системе при помощи преобразования Лоренца для x, y, z, t).

Основные результаты специальной теории относительности. Специальная теория относительности привела к ясным физическим представлениям о пространстве и времени и в связи с этим к выяснению того, как ведут себя движущиеся масштабы и часы. Она устранила понятие абсолютной одновременности, а также понятие мгновенного действия на расстоянии в смысле Ньютона. Она показала, как нужно изменить уравнения движения при рассмотрении движений со скоростью, не очень малой по сравнению со скоростью света. Она разъяснила формально структуру уравнений Максвелла для электромагнитного поля; в частности, она позволила понять внутреннее единство электрического и магнитного полей. Она объединила законы сохранения импульса и энергии в единый закон и продемонстрировала эквивалентность массы и энергии. С формальной точки зрения, то, что было достигнуто специальной теорией относительности, можно охарактеризовать следующим образом. Она в общем виде указала роль, которую играет мировая постоянная c (скорость света) в законах природы, и продемонстрировала существование тесной связи между тем, как в эти законы входят пространственные координаты, с одной стороны, и время — с другой.

Б. Общая теория относительности

В одном фундаментальном пункте специальная теория относительности осталась верна основам классической механики; а именно, она сохранила утверждение, что законы природы справедливы только по отношению к инерциальным системам. Круг «допустимых» (т. е. оставляющих форму законов природы неизменной) преобразований координат ограничивается исключительно (линейными) преобразованиями Лоренца. Действительно ли это ограничение основано на физических фактах? Нижеследующие соображения убедительно говорят об обратном.

Принцип эквивалентности. Тело обладает инертной массой (противодействующей ускорению) и тяжелой массой (определяющей вес тела в заданном гравитационном поле; например, на поверхности Земли). Эти две величины, столь существенно различные по их определению, как показывает эксперимент, измеряются одним и тем же числом. Должна существовать более глубокая причина этого обстоятельства. Этот факт можно описать иначе: в гравитационном поле ускорения различных масс одинаковы. Или, наконец, можно сказать так: в гравитационном поле тела ведут себя так же, как и в его отсутствие, если в последнем случае в качестве системы отсчета используется равномерно ускоренная система координат (а не инерциальная система).

В последнем случае, по-видимому, нет оснований отказываться от следующей интерпретации. Система рассматривается как «покоящаяся» и «кажущееся» гравитационное поле в ней рассматривается как «истинное». Такое гравитационное поле, «порожденное» ускорением системы координат, было бы, очевидно, бесконечно протяженным и не могло бы создаваться гравитирующими массами, сосредоточенными в конечном объеме. Однако если нашей целью является построение теории полевого типа, это обстоятельство не может помешать нам. При такой интерпретации инерциальные системы теряют свое особое значение и мы находим «объяснение» равенству тяжелой и инертной масс (одно и то же свойство материи проявляется либо как вес, либо как инерция, в зависимости от способа описания).

Если рассуждать формально, то, допуская системы координат, движущиеся ускоренно по отношению к исходным «инерциальным» системам, мы допускаем нелинейные преобразования координат и, следовательно, существенно расширяем идею инвариантности, т. е. принцип относительности.

Тщательный анализ с учетом результатов специальной теории относительности показывает, что при таком обобщении координаты нельзя уже интерпретировать как результаты измерений. Лишь разности координат в совокупности с полевыми величинами, описывающими гравитационное поле, определяют измеримые расстояния между событиями.

Коль скоро пришлось принять нелинейные преобразования координат как переход между двумя эквивалентными системами, то проще всего, по-видимому, требовать допустимости всех непрерывных преобразований координат (они образуют группу), т. е. считать допустимыми произвольные криволинейные системы координат, в которых поля описываются регулярными функциями (общий принцип относительности).

Гравитация в общей теории относительности. Теперь нетрудно понять, почему общий принцип относительности (на основе принципа эквивалентности) привел к теории тяготения. Существует частный случай пространства, физическую структуру которого (поле) мы можем предполагать точно известной, основываясь на специальной теории относительности. Это случай пустого пространства, в котором нет ни электромагнитных полей, ни вещества. Оно полностью определяется своим «метрическим» свойством: пусть dx_0, dy_0, dz_0, dt_0 — разности координат двух бесконечно близких точек (событий); тогда величина

$$ds^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 - dt_0^2 \tag{1}$$

может быть измерена и ее значение не зависит от конкретного выбора инерциальной системы. Если в этом пространстве ввести новые координаты x_1, x_2, x_3, x_4 посредством преобразования общего вида, то величина ds^2 для этой же пары точек будет иметь вид

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{2}$$

(здесь подразумевается суммирование по i и k от 1 до 4), причем $g_{ik} = g_{ki}$. Тогда величины g_{ik}, которые образуют «симметричный тензор» и являются непрерывными функциями $x_1, \ldots, x_4$, описывают, согласно «принципу эквивалентности», частный случай гравитационного поля [а именно, поле, которое можно вновь преобразовать к виду (1)]. Если воспользоваться работами Римана по метрическим пространствам, то свойства такого рода поля g_{ik} можно точно охарактеризовать («условием Римана»).

Однако мы ищем условия, которым удовлетворяют гравитационные поля «общего» вида. Естественно предположить, что их так же можно описать, как тензорные поля типа g_{ik}, которые, вообще говоря, не допускают преобразования линейного элемента к виду (1), т. е. удовлетворяют не условию Римана, а более слабым условиям, также не зависящим, подобно условию Римана, от выбора координат (т. е. инвариантным относительно преобразования общего вида). Простые формальные соображения приводят к более слабым условиям, которые тесно связаны с условием Римана. Эти условия и являются искомыми уравнениями для чисто гравитационного поля (в отсутствие вещества и электромагнитных полей).

Экспериментальные подтверждения общей теории относительности. Уравнения небесной механики Ньютона могут быть получены из этих уравнений как приближенные и, кроме того, можно найти малые поправки, которые описывают некоторые наблюдавшиеся на опыте эффекты (отклонение луча света гравитационным полем звезды, влияние гравитационного потенциала на частоту испущенного света, медленное вращение эллиптических орбит планет — смещение перигелия Меркурия). Кроме того, эти уравнения объясняют «разбегание» галактических систем, которое проявляется в красном смещении света, испускаемого этими системами.

Общая теория относительности пока еще неполна в том смысле, что общий принцип относительности может быть применен удовлетворительным образом только к гравитационным полям, но не ко всему полю. Нам до сих пор неизвестно, какой математический аппарат следует применять для описания всего поля в пространстве и каковы те общие инвариантные законы, которым подчиняется это поле. По-видимому, можно быть уверенным в одном: общий принцип относительности окажется необходимым и эффективным орудием в решении проблемы единого поля.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ*

В этой статье мы дадим новое изложение обобщенной теории тяготения, более ясное, чем то, которое было дано ранее [1]. Нашей целью является получение теории полного поля путем обобщения понятий и методов релятивистской теории тяготения.

1. Структура поля

В теории тяготения поле описывается симметричным тензором g_{ik}, т. е. $g_{ik} = g_{ki}$ $(i, k = 1, \ldots, 4)$, где g_{ik} — вещественные функции $x_1, \ldots, x_4$.

В обобщенной теории полное поле описывается эрмитовым тензором. Свойство симметрии (комплексного) тензора g_{ik} можно записать в виде

$$g_{ik} = \bar{g}_{ki}.$$

Если g_{ik} разложить на его вещественную и мнимую части, то первая будет представлять собой симметричный тензор $(g_{\underline{ik}})$, а вторая — антисимметричный тензор $(g_{\underset{\vee}{ik}})$. Величины g_{ik} по-прежнему являются функциями вещественных переменных $x_1, \ldots, x_4$.

Естественность, с формальной стороны, такого обобщения симметричного тензора хорошо видна в следующем рассуждении: из ковариантного вектора A_i можно образовать путем умножения симметричный ковариантный тензор $A_i A_k$. Произвольный симметричный тензор 2-го ранга может быть получен из таких тензоров, если составить их сумму

* *Generalized Theory of Gravitation.* Rev. Mod. Phys., 1948, **20**, 35—39.

[1] A. Einstein. Ann. Math., 1945, 46, 578; A. Einstein a. E. Straus, Ann. Math., 1946, 47, 731. (Статьи 127 и 130. — *Ред.*)

с вещественными коэффициентами

$$g_{ik} = \sum_{\alpha} \underset{\alpha}{c} \underset{\alpha}{A_i} \underset{\alpha}{A_k}.$$

Аналогичным образом из комплексного вектора A_i можно образовать эрмитов тензор $A_i\overline{A}_k$ (он остается неизменным при перестановке i и k и одновременном комплексном сопряжении). Тогда мы получим представление для произвольного эрмитова тензора 2-го ранга

$$g_{ik} = \sum_{\alpha} \underset{\alpha}{c} \underset{\alpha}{A_i} \underset{\alpha}{\overline{A}_k},$$

где $\underset{\alpha}{c}$ — как и прежде, вещественные постоянные.

Определитель $g = | g_{ik} |$ ($\neq 0$) веществен. Доказательство:

$$| g_{ik} | = | g_{ki} | = | \overline{g}_{ik} | = \overline{| g_{ik} |}.$$

Как и в случае вещественных полей, мы можем сопоставить ковариантному тензору g_{ik} контравариантный тензор g^{ik}, полагая

$$g_{is}g^{ls} = \delta_i^l \text{ (или } g_{si}g^{sl} = \delta_i^l),$$

где δ_i^l — тензор Кронекера. Здесь существен порядок индексов, так как $g_{is}g^{sl}$ не равно δ_i^l. В дальнейшем важную роль играет тензорная плотность $\mathfrak{g}^{ik} = g^{ik}(g)^{\frac{1}{2}}$.

С точки зрения теории групп, введение эрмитова тензора несколько произвольно, поскольку каждая из аддитивных компонент $\underline{g_{ik}}$ и $\overset{\vee}{g_{ik}}$ имеет тензорный характер. Однако этот произвол до некоторой степени оправдывается тем, что, как и в случае вещественных полей, здесь существует естественный способ сопоставления параллельных переносов эрмитову тензору g_{ik}; это и оправдывает утверждение о естественности введения эрмитова тензора g_{ik}.

2. Бесконечно малые параллельные переносы, абсолютное дифференцирование и кривизна

В теории вещественных полей мы задаем бесконечно малый параллельный перенос вектора A^i или A_i в виде

$$\begin{aligned} \delta A^i &= -\Gamma^i_{st} A^s dx^t, \\ \delta A_i &= \Gamma^s_{it} A_s dx_t \end{aligned} \tag{1}$$

соответствующим образом вводятся бесконечно малые параллельные переносы также и для тензоров более высокого ранга.

Второе из равенств (1) связано с условием

$$0 = \delta(\delta_i^k) = (\delta_i^s \Gamma_{sl}^k - \delta_s^k \Gamma_{il}^s)\, dx^l.$$

Из равенств (1) обычным путем мы получаем тензорные свойства величины

$$dA^i - \delta A^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x_t} + A^s \Gamma_{st}^i\right) dx^t,$$

что приводит к определению ковариантного дифференцирования:

$$A^i_{;\,t} = \frac{\partial A^i}{\partial x_t} + A^s \Gamma_{st}^i,$$

$$A_{i;\,t} = \frac{\partial A^i}{\partial x_t} - A_s \Gamma_{it}^s. \qquad (2)$$

Чтобы получить ковариантную производную тензора g_{ik}, напишем

$$A_{i;\,l} = \frac{\partial A_i}{\partial x_l} - A_s \Gamma_{il}^s,$$

$$A_{k;\,l} = \frac{\partial A_k}{\partial x_l} - A_s \Gamma_{kl}^s;$$

умножая первое равенство на A_k, а второе — на A_i и складывая их, получаем

$$A_i A_{k;\,l} + A_k A_{i;\,l} = (A_i A_k)_{;\,l} = (A_i A_k)_{,\,l} - (A_s A_k)\Gamma_{il}^s - (A_i A_s)\Gamma_{kl}^s.$$

Поскольку тензор g_{ik} может быть представлен в виде суммы таких тензоров, то

$$g_{ik;\,l} = g_{ik,\,l} - g_{sk}\Gamma_{il}^s - g_{is}\Gamma_{kl}^s.$$

Компоненты Γ, в свою очередь, определяются компонентами g и их первыми производными из требования равенства нулю ковариантной производной от g_{ik}:

$$0 = g_{ik,\,l} - g_{sk}\Gamma_{il}^s - g_{is}\Gamma_{kl}^s. \qquad (3)$$

Так как g_{ik} симметричен, то эти соотношения представляют собой лишь 40 уравнений для 64 компонент Г. Для полного определения Г следует использовать единственно возможное инвариантное алгебраическое условие, а именно, условие симметрии:

$$\Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{ki}. \qquad (4)$$

Теперь мы обобщим это рассмотрение на случай комплексных величин, сохраняя определение параллельного переноса (1). Однако в связи с этим возникает некоторое осложнение. Если в уравнении, определяющем параллельный перенос комплексного вектора,

$$\delta A^i = \Gamma^s_{it} A_s \, dx^t$$

(где, в общем случае, компоненты Г тоже комплексны), перейти к комплексно сопряженным величинам:

$$\overline{\delta A_i} = \overline{\Gamma^s_{it}} \, \overline{A_s} \, dx^t,$$

то мы получаем уравнение, также определяющее параллельный перенос; однако этот последний может отличаться от первого параллельного переноса. В соответствии с этим мы определим два вида параллельных переносов:

$$\left.\begin{aligned} \delta A^i_+ &= -\Gamma^i_{st} A^s \, dx^t, \\ \delta A_{\underset{+}{i}} &= \Gamma^s_{it} A_s \, dx^t \end{aligned}\right\} \qquad (1а)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \delta A^i_- &= -\overline{\Gamma^i_{st}} A^s \, dx^t, \\ \delta A_{\underset{-}{i}} &= \overline{\Gamma^s_{it}} A_s \, dx^t \end{aligned}\right\} \qquad (1б)$$

и соответственно, два вида ковариантного дифференцирования: $A^{\overset{i}{+}}_{;t}$, $A_{\underset{+}{i};t}$ и $A^{\overset{i}{-}}_{;t}$, $A_{\underset{-}{i};t}$, по формулам (2). Из (1а) и (1б) получаем

$$\overline{\delta A^{\overset{i}{-}}} = \delta A^{\overset{i}{+}} \text{ и } \overline{\delta A^{\overset{i}{+}}} = \delta A^{\overset{i}{-}}.$$

Для того чтобы сопряженные векторы имели сопряженные переносы и производные, необходимо при переходе к сопряженным векторам изменить характер переноса или дифференцирования, т. е. перейти к сопряженному Г. Для получения ковариантной производной от эрмитова тензора запишем по аналогии со случаем вещественных величин

$$A_{\underset{+}{i};\, l} = \frac{\partial A_i}{\partial x_l} - A_s \Gamma^s_{il},$$

$$\overline{A}_{k;\, l} = \frac{\partial \overline{A}_k}{\partial x_l} - \overline{A}_s \overline{\Gamma^s_{kl}}.$$

Отсюда, как и ранее, получаем

$$A_i \overline{A}_{\underset{-}{k};\, l} + \overline{A}_k A_{\underset{+}{i};\, l} = (A_{\underset{+}{i}} A_{\underset{-}{k}})_{;\, l} = (A_i A_k)_{,\, l} - (A_s \overline{A}_k)\Gamma^s_{il} - (A_i \overline{A}_s)\overline{\Gamma^s_{kl}},$$

и, поскольку тензор g_{ik} может быть представлен в виде суммы таких тензоров, находим

$$g_{\underset{+-}{ik};\, l} = g_{ik,\, l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\overline{\Gamma^s_{kl}}.$$

Аналогом требования (3) является требование обращения в нуль этой ковариантной производной:

$$0 = g_{\underset{+-}{ik};\, l} = g_{ik,\, l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\overline{\Gamma^s_{kl}}. \tag{3a}$$

Эти уравнения эрмитовы по индексам i, k (т. е. переходят сами в себя при перестановке индексов i и k и комплексном сопряжении) и потому их недостаточно для определения комплексных Г. По аналогии с условием (4) мы имеем единственное инвариантное алгебраическое условие эрмитовости:

$$\Gamma^l_{ik} = \overline{\Gamma^l_{ki}}. \tag{4a}$$

Поэтому вместо (3а) мы можем написать равенство

$$0 = g_{\underset{+-}{ik};\, l} = g_{ik,\, l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk}, \tag{3б}$$

содержащее как (3а), так и (4а).

Абсолютное дифференцирование векторных плотностей. Если равенство (3б) умножить на $\frac{1}{2}\, g^{ik}$ и просуммировать по i и k, то получим векторное уравнение

$$\frac{1}{(g)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (g)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_l} - \frac{1}{2}(\Gamma^a_{al} + \Gamma^a_{la}) = 0,$$

или, короче,

$$\frac{\partial (g)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_l} - (g)^{\frac{1}{2}} \Gamma^a_{\underline{la}} = 0. \tag{3в}$$

Величина $(g)^{\frac{1}{2}}$ представляет собой скалярную плотность, а левая часть равенства (3в) — векторную плотность. Последнее справедливо также и в том случае, если заменить $(g)^{\frac{1}{2}}$ произвольной скалярной плотностью ρ. Поэтому мы введем в качестве ковариантной производной скалярной плотности ρ величину:

$$\rho_{;\,l} = \rho_{,\,l} - \rho \Gamma^a_{\underline{la}}. \tag{5}$$

Это позволяет ввести абсолютное дифференцирование тензорных плотностей.

Пример. Если умножить правую часть равенства

$$A^i_{+;\,l} = A^i_{,\,l} + A^s \Gamma^i_{sl}$$

на скалярную плотность ρ, то получается тензорная плотность.

$$(\rho A^i)_{,\,l} + (\rho A^s)\, \Gamma^i_{sl} - A^i \rho_{,\,l};$$

вводя векторную плотность $\mathfrak{A}^i = \rho A^i$, последнее выражение можно записать в виде

$$\mathfrak{A}^i_{,\,l} + \mathfrak{A}^s \Gamma^i_{sl} - \mathfrak{A}^i \frac{\rho_{,\,l}}{\rho},$$

или, согласно формуле (5),

$$(\mathfrak{A}^i_{,\,l} + \mathfrak{A}^s \Gamma^i_{sl} - \mathfrak{A}^i \Gamma^a_{\underline{la}}) - \mathfrak{A}^i \rho_{;\,l}.$$

Поскольку последний член в этом выражении представляет собой тензорную плотность, выражение в скобках также является тензорной плотностью, которую мы можем определить, как ковариантную производную $\overset{i}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;\,l}$ векторной плотности $\mathfrak{A}^i$

$$\overset{i}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;\,l} = \mathfrak{A}^i_{,\,l} + \mathfrak{A}^s \Gamma^i_{sl} - \mathfrak{A}^i \Gamma^a_{\underline{la}}. \tag{6}$$

Аналогичным образом можно определить ковариантные производные произвольных тензорных плотностей. Они отличаются от ковариантной производной тензора последним членом типа $-\mathfrak{A}^i\, \Gamma^a_{\underline{la}}$.

Точно так же, как и в случае вещественных полей, выражение (3а) можно привести к контравариантному виду; следует, однако, проявлять осторожность в отношении порядка индексов. Мы получаем эквивалентные уравнения

$$0 = g^{\underset{+-}{ik}}_{;\,l} = g^{ik}_{,l} + g^{sk}\Gamma^{i}_{sl} + g^{is}\Gamma^{k}_{ls} \tag{3г}$$

или, после введения контравариантной тензорной плотности $\mathfrak{g}^{ik} = g^{ik}(g)^{\frac{1}{2}}$,

$$0 = \mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}_{;\,l} = \mathfrak{g}^{ik}_{,l} + \mathfrak{g}^{sk}\Gamma^{i}_{sl} + \mathfrak{g}^{is}\Gamma^{k}_{ls} - \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^{s}_{\underline{ls}}. \tag{3д}$$

Уравнения (3а), (3г) и (3д) эквивалентны.

Кривизна. Изменение, которое претерпевает вектор при параллельном переносе вдоль границы бесконечно малого элемента площади, имеет векторный характер. Это приводит к тензору кривизны также и в случае нашего обобщенного поля. Мы стоим здесь перед выбором: использовать «+»-перенос или «—»-перенос; результаты обоих видов переносов, впрочем, являются комплексно сопряженными, так что достаточно рассмотреть перенос *одного* из этих видов.

Мы получаем тензор

$$R^{i}_{klm} = \Gamma^{i}_{kl,m} - \Gamma^{i}_{km,l} - \Gamma^{i}_{al}\Gamma_{km} + \Gamma^{i}_{am}\Gamma^{a}_{kl} \tag{7}$$

и соответствующий свернутый (по индексам i и m) тензор

$$\overset{*}{R}_{kl} = \Gamma^{a}_{kl,a} - \Gamma^{a}_{ka,l} - \Gamma^{a}_{kb}\Gamma^{b}_{al} + \Gamma^{a}_{kl}\Gamma^{b}_{ab}. \tag{8}$$

Существует также отличная от нуля свертка по i и k, дающая тензор

$$\Gamma^{a}_{al,m} - \Gamma^{a}_{am,l}. \tag{9}$$

Однако мы не будем пользоваться этим тензором. Тензор $\overset{*}{R}_{kl}$ неэрмитов. Образуем эрмитов тензор $R_{ik} = \frac{1}{2}(\overset{*}{R}_{ik} + \overline{\overset{*}{R}_{ki}})$. При этом мы получаем

$$R_{ik} = \Gamma^{a}_{ik,a} - \frac{1}{2}(\Gamma^{a}_{ia,k} + \Gamma^{a}_{ak,i}) - \Gamma^{a}_{ib}\Gamma^{b}_{ak} + \Gamma^{a}_{ik}\Gamma^{b}_{\underline{ab}}. \tag{8а}$$

3. Принцип Гамильтона. Уравнение поля

В случае вещественного симметричного поля уравнения поля получаются проще всего следующим образом. В качестве функции Гамильтона используем скалярную плотность

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik}. \tag{10}$$

Если варьировать объемный интеграл от $\mathfrak{H}$ независимо по Γ и $\mathfrak{g}$, то (в случае вещественных полей) варьирование по Γ дает уравнения (3), а варьирование по $\mathfrak{g}$ — уравнения $R_{ik} = 0$. Если применить тот же метод к рассматриваемому случаю комплексного поля (где плотность $\mathfrak{H}$ попрежнему вещественна), то возникает осложнение, поскольку варьирование по Γ не дает непосредственно уравнений (3а), которые мы в любом случае хотим сохранить. Варьирование по Γ дает

$$-\{\mathfrak{g}^{ik}_{,a} + \mathfrak{g}^{sk}\Gamma^{i}_{sa} + \mathfrak{g}^{is}\Gamma^{k}_{as} - \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^{b}_{\underline{ab}}\} + \frac{1}{2}\{\mathfrak{g}^{is}_{,s} + \mathfrak{g}^{st}\Gamma^{i}_{st} - \mathfrak{g}^{is}\Gamma^{a}_{\underset{\vee}{sa}}\}\delta^{k}_{a} +$$
$$+ \frac{1}{2}\{\mathfrak{g}^{sk}_{,s} + \mathfrak{g}^{st}\Gamma^{k}_{st} + \mathfrak{g}^{sk}\Gamma^{a}_{\underset{\vee}{sa}}\}\delta^{i}_{a} + \frac{1}{2}\{\mathfrak{g}^{is}\Gamma^{a}_{\underset{\vee}{sa}}\delta^{k}_{a} - \mathfrak{g}^{sk}\Gamma^{a}_{\underset{\vee}{sa}}\delta^{i}_{a}\}. \tag{11}$$

Первая скобка представляет собой $\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}_{;a}$; вторая и третья скобки являются свертками этой величины. Если бы не было четвертой скобки, то уравнение (11) означало бы обращение $\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}_{;a}$ в нуль, т. е. выполнение уравнения (3а). Это повлекло бы, однако, обращение в нуль величины $\Gamma^{a}_{\underset{\vee}{sa}}$, для чего в настоящее время нет оснований. Затруднение можно разрешить следующим образом. Выделим мнимую часть уравнения (11):

$$-\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}_{,a} - \mathfrak{g}^{\underset{-}{sk}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{sa}} - \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{sk}}\Gamma^{i}_{\underline{sa}} - \mathfrak{g}^{\underset{-}{is}}\Gamma^{k}_{\underset{\vee}{as}} - \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}\Gamma^{k}_{\underline{as}} + \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}\Gamma^{b}_{\underline{ab}} +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s}\delta^{k}_{a} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{sk}}_{,s}\delta^{i}_{a} = 0.$$

Свертывая это уравнение по k и a, получаем

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} + \mathfrak{g}^{\underset{-}{is}}\Gamma^{a}_{\underset{\vee}{sa}} = 0. \tag{11а}$$

Отсюда мы можем заключить, что необходимым и достаточным [2] усло-

[2] Это справедливо для всех точек, если мы потребуем, чтобы компоненты Γ были непрерывными и однозначно определялись уравнениями (3б), ибо в этом случае определитель $|\mathfrak{g}^{is}|$ нигде не может обратиться в нуль.

вием обращения в нуль величины $\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{as}}$ является обращение в нуль $\mathfrak{g}^{\overset{\vee}{is}}_{,s}$. Чтобы это условие удовлетворялось *тождественно*, достаточно принять

$$\mathfrak{g}^{\overset{\vee}{is}} = \mathfrak{g}^{ist}_{,t}, \tag{12}$$

где $\mathfrak{g}^{ist}$ — тензорная плотность, антисимметричная по всем трем индексам. Это равносильно требованию, чтобы тензорная плотность $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}$ выводилась из «векторного потенциала». Поэтому подставим в функцию Гамильтона тензорную плотность

$$\mathfrak{g}^{ik} = \mathfrak{g}^{\underline{ik}} + \mathfrak{g}^{ikl}_{,l} \tag{13}$$

и проварьируем независимо по компонентам Γ, $\mathfrak{g}^{\underline{ik}}$ и $\mathfrak{g}^{ikl}$. При этом варьирование по Γ дает уравнения (3а), как было показано ранее. Варьирование по другим величинам дает уравнения

$$R_{\underline{ik}} = 0, \tag{14}$$

$$R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0. \tag{15}$$

Кроме того, имеем уравнения

$$\mathfrak{g}^{\overset{+-}{ik}}_{;l} = 0 \quad \text{или} \quad \mathfrak{g}_{\underset{+-}{ik};l} = 0, \tag{3a}$$

$$\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}} = 0, \tag{16}$$

$$\mathfrak{g}^{\overset{\vee}{is}}_{,s} = 0 \quad \text{или} \quad \mathfrak{g}^{\overset{\vee}{is}} = \mathfrak{g}^{ist}_{,t}. \tag{17}$$

Как следует из (3а), обе системы (16) и (17) тождественны; для доказательства этого достаточно убедиться, что из (3а) следует равенство

$$\mathfrak{g}^{\overset{\vee}{is}}_{,s} - \mathfrak{g}^{\underline{is}}\Gamma^{t}_{\underset{\vee}{st}} = 0.$$

Поэтому система уравнений поля не ослабляется, если отбросить уравнение (17).

Это замечание существенно по следующей причине. В то время, как в приведенном выводе уравнений особое внимание уделялось плотности $\mathfrak{g}^{ik}$, а не тензору g_{ik} (или g^{ik}), в окончательной результирующей системе уравнений можно не проводить различия между этими величинами.

Мы видим, далее, что в силу уравнений (16) тензор (9) сводится к выражению $\Gamma^{a}_{\underline{al},m} - \Gamma^{a}_{\underline{am},l}$, которое равно нулю в силу (3в).

Изложенный здесь вывод обладает, по сравнению с предыдущим, тем преимуществом, что в нем использован принцип Гамильтона без краевых условий. Такой же характер носит вывод уравнений Максвелла из вариационного принципа в специальной теории относительности, где (с мнимой временно́й координатой) функцией Гамильтона является $\mathfrak{H} = \varphi_{\underset{\vee}{ik}}\varphi_{\underset{\vee}{ik}}$. Если положить $\varphi_{\underset{\vee}{ik}} = \varphi_{i,k} - \varphi_{k,i}$ и проварьировать по φ_i, то одна система уравнений ($\varphi_{\underset{\vee}{ik},k} = 0$) получится непосредственно, а другая — путем исключения φ_i. Этот метод соответствует использованному выше. Однако можно избежать введения потенциала φ_i, добавив вместо этого систему уравнений

$$\varphi_{\underset{\vee}{ik},l} + \varphi_{\underset{\vee}{kl},i} + \varphi_{\underset{\vee}{li},k} = 0$$

в качестве краевых условий для $\varphi_{\underset{\vee}{ik}}$ при варьировании. Это соответствует использованию в предыдущей статье соотношения $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0$ в качестве краевого условия при варьировании. Введенное там краевое условие $\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0$ можно было опустить.

Замечания

Для сохранения специального характера локальных пространственноподобных и временноподобных направлений существенно, чтобы индекс инерции величины $g_{\underline{ik}}dx^idx^k$ был всюду одинаков, т. е. чтобы определитель $|g_{\underline{ik}}|$ нигде не обращался в нуль. Действительно, это может быть выведено из требования, чтобы Г-поле было конечным и всюду определялось уравнениями (3а). Мой ассистент дал следующее простое доказательство этого утверждения.

Если бы определитель $|g_{\underline{ik}}|$ обращался в нуль в точке P, то существовал бы отличный от нуля вектор ξ^s такой, что $g_{\underline{is}}\xi^s = 0$.

Рассмотрим теперь вещественную часть уравнения (3а):

$$g_{\underline{ik},l} - g_{\underline{sk}}\Gamma^s_{\underline{il}} - g_{\underline{is}}\Gamma^s_{\underline{lk}} - g_{\underset{\vee}{sk}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{il}} - g_{\underset{\vee}{is}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{lk}} = 0.$$

Если это уравнение (в точке P) умножить на $\xi^i\xi^k\xi^l$ и просуммировать по i, k, l, то второй и третий члены обратятся в нуль по определению вектора ξ, а четвертый и пятый — в силу антисимметричности величины Г. Поэтому существует линейная комбинация уравнений (3а), не содержащая компонент Г. Следовательно, в такой точке компоненты Г становятся либо бесконечными, либо не вполне определенными, что противоречит нашему требованию.

Относительно физической интерпретации величин заметим, что антисимметричная плотность $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ikl}}$ играет роль электромагнитного векторного потенциала, а тензор $g_{\underset{\vee}{i}k,l}+g_{\underset{\vee}{k}l,i}+g_{\underset{\vee}{l}i,k}$ — роль плотности тока. Последняя величина является «дополнением» контравариантной векторной плотности с (тождественно) равной нулю дивергенцией.

Выше мы рассматривали комплексные поля. Однако существует теоретическая возможность, что величины g_{ik} и Γ^l_{ik} вещественны, хотя и несимметричны. Таким образом, можно получить теорию, окончательные формулы которой соответствуют формулам развитой выше теории. Э. Шредингер также положил в основу своей аффинной теории (т. е. теории, основанной на компонентах Г как на фундаментальных величинах поля) вещественные поля. Поэтому здесь я хочу привести некоторые формальные соображения в пользу комплексных полей.

Эрмитов тензор g_{ik} может быть образован из векторов согласно схеме $g_{ik}=\Sigma \underset{\alpha}{c} \underset{\alpha}{A_i} \underset{\alpha}{\overline{A}_k}$. Существенным здесь является то обстоятельство, что, используя *один* комплексный вектор A_i, можно составить эрмитов тензор $A_i\overline{A}_k$, что является близкой аналогией случая симметричных вещественных полей. Однако нельзя составить из векторов несимметричный вещественный тензор, который был бы столь же похож на комплексный.

Рассмотрим теперь величины Γ^l_{ik}, несимметричные по нижним индексам. Для них мы получаем как в вещественном, так и в комплексном случае присоединенные («сопряженные») величины $\widetilde{\Gamma}^l_{ik}=\Gamma^l_{ki}$. В комплексном случае мы сопоставляли параллельному переносу вектора

$$\delta A^i=-\Gamma^i_{st}A^s\,dx^t$$

параллельный перенос комплексно сопряженного ему вектора

$$\delta\overline{A^i}=-\overline{\Gamma^i_{st}}\,\overline{A^s}\,dx^t\,.$$

Следовательно, в случае комплексных полей присоединенный перенос соответствует присоединенным объектам, тогда как в случае вещественных полей такого присоединенного объекта не существует.

135

О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

(Совместно с Л. Инфельдом)

1. **Введение.** Гравитационное поле проявляется в движении. Поэтому проблема определения движения тел только из уравнений поля имеет фундаментальное значение. Эта задача была впервые решена около десяти лет назад; тогда были выведены уравнения движения для двух частиц [1]. Вскоре после этого было предложено более общее и простое решение этой проблемы [2].

Льюисон указал нам, что из нашего приближенного метода не следует, что уравнения поля могут быть разрешены в произвольно высоком приближении. Это в самом деле так. Мы считаем, что настоящая работа не только снимает эту трудность, но и дает новое и более глубокое понимание проблемы движения. С логической точки зрения настоящая теория значительно проще и яснее старой. Но, как всегда, мы должны платить за эти логические упрощения более громоздкими вычислениями.

Обсуждаемый вопрос изложен здесь с самого начала, так что знание предыдущих работ не предполагается. Чтобы облегчить чтение настоящей работы тем, кто изучал предыдущие статьи, мы используем здесь в основном те же обозначения, что и прежде.

Начнем с некоторых общих замечаний.

Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля.

* *On the Motion of Particles in General Relativity Theory* (With L. Infeld). Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.

[1] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann. Ann. Math., 1938, 39, 65 (Статья 117.— *Ред.*)

[2] A. Einstein, L. Infeld. Ann. Math., 1940, 41, 455. (Статья 120.— *Ред.*)

В механике Ньютона частицы изображаются как сингулярности скалярного поля φ, которое удовлетворяет уравнению Лапласа всюду вне сингулярностей. Ввиду того, что классическое уравнение линейно, поле может быть разложено на парциальные поля, каждое из которых создается одной частицей. Каждая частица *находится* в поле всех других частиц. Построение теории завершается установлением уравнения движения, которое выражает пропорциональность ускорения градиенту поля, взятому со знаком минус; коэффициент пропорциональности является универсальной константой. Таким образом классическая физика постулирует уравнения движения независимо от уравнений поля. Массы источников поля предполагаются независящими от времени. Законы движения предполагаются справедливыми в инерциальной системе. Поэтому пространство-время выступает как независимая физическая реальность. Слабость концепции такого пространственно-временнóго фона в классической теории была отмечена уже Ньютоном.

Если сравнить эту ситуацию с той, которую мы находим в общей теории относительности в ее первоначальной формулировке, то обнаружим поразительные сходства и различия. Уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

заменяется гравитационным уравнением:

$$R_{kl} = 0,$$

которое, однако, в противоположность классическому уравнению удовлетворяет общему принципу относительности. Классический принцип инерции становится в релятивистской теории принципом геодезической, справедливым для частицы с бесконечно малой массой. Хотя трудность, связанная с введением инерциальной системы, исчезает в релятивистской теории, так же как и исчезает независимое пространство-время, тем не менее уравнения движения все еще вводятся независимо от уравнений поля.

Наша цель — исследовать, в какой мере уравнения поля сами по себе содержат уравнения движения частиц, а также развить метод, который позволил бы нам найти эти уравнения движения в любом приближении.

Начнем с простого замечания: *линейный* закон всегда означает, что движение сингулярностей произвольно. Если поле $F_{(1)}$ связано с мировой линией сингулярности с массой m_1, а поле $F_{(2)}$ — с мировой линией сингулярности с массой m_2, то суперпозиция этих двух полей $F_{(1)} + F_{(2)}$ также является решением линейных уравнений поля. При таком решении те же самые две мировые линии появятся вместе, как раньше появлялись отдельно. Поэтому поле, удовлетворяющее линейным уравнениям, не может заключать в себе взаимодействия между сингулярностями. Таким образом, только нелинейные уравнения поля могут дать нам уравнения движения, поскольку лишь нелинейность может выразить взаимодействие между сингулярностями.

Обратное же утверждение несправедливо. Нелинейность необходима, но не достаточна для того, чтобы уравнения движения следовали из уравнений поля.

Причина того, что уравнения гравитационного поля дают нам уравнения движения, лежит не только в их нелинейности, но также в том, что эти уравнения не являются независимыми друг от друга. В самом деле, среди десяти компонент четыре произвольны, что обусловлено свободой выбора координатной системы. Десять уравнений определяют, так сказать, только шесть независимых функций. Они были бы несовместны, если бы не было четырех тождеств (Бианки), которым они удовлетворяют. Это должно быть справедливо для любой релятивистской системы уравнений, полученных из вариационного принципа. Эти тождества (кроме нелинейности) являются причиной того, что *уравнения движения определяются уравнениями поля.*

Идеи, приводящие к уравнениям движения, далеко не просты и переплетаются друг с другом.

Одной из основных идей настоящей работы является исследование гравитационных уравнений новым приближенным методом. При этом мы разделяем пространство и время. Изменения поля во времени мы считаем малыми по сравнению с изменениями в пространстве. Только после этого мы приходим к согласованной, поддающейся решению системе уравнений, которую можно решить шаг за шагом. Эта мысль не нова, она содержалась и в предыдущих работах.

Другая важная идея состоит в выводе уравнений движения, которые являются *обыкновенными* дифференциальными уравнениями, из уравнений поля, представляющих собой *уравнения в частных производных.* Эта идея, разработанная здесь иначе, чем в предыдущих работах, приводит к использованию интегралов, взятых по поверхностям, окружающим сингулярности поля. Эти поверхностные интегралы зависят только от движения сингулярностей, но не от формы поверхности интегрирования.

Эти и другие вопросы будут подробно рассмотрены в настоящей работе. Для ясности мы решили поместить все наиболее утомительные вычисления в приложения. (Если мы ссылаемся, например, на **А.4**, то это означает приложение, относящееся к § 4.) Но даже и в этом случае многие непосредственные, но длинные вычисления пришлось опустить. Это особенно относится к вычислениям, которые ведут к поправкам к ньютоновским уравнениям движения. Небольшой параграф по этому вопросу мы включили только для полноты. Но, как и в работе [3], мы вынуждены отослать тех, кто хотел бы найти подробности вычислений, к рукописи, которая хранится в Принстоне (Institute for Advanced Study).

В заключение мы хотели бы поблагодарить Льюисона за его критическое изучение наших предыдущих работ и Шильда за внимательное и критическое чтение настоящей работы в рукописи.

2. Обозначения. Гравитационные уравнения. Так как в большей части нашей работы мы отделяем пространство и время, то мы не будем использовать обычные четырехмерные обозначения. Условимся, что латинские индексы принимают значение 1, 2, 3 и относятся только к пространственным координатам. Греческие индексы относятся и к пространству, и к времени, пробегая значения 0, 1, 2, 3. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Выражение $g_{\mu\nu|\sigma}$ и т. п. означает $\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$ и т. п. (2.1)

На бесконечности гравитационное поле принимает галилеевы значения $\eta_{\mu\nu}$, так что

$$\eta_{mn} = -\delta_{mn}, \qquad \eta_{0m} = 0, \qquad \eta_{00} = 1. \tag{2.2}$$

Мы будем писать:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

где величины $h_{\mu\nu}$ представляют собой отклонение метрики пространства-времени от пустого пространства и не предполагаются малыми.

Величины $h^{\mu\nu}$ могут быть получены как функции величин $h_{\mu\nu}$ при помощи соотношения

$$g_{\mu\sigma}g^{\mu\nu} = \delta^\nu_\sigma. \tag{2.4}$$

Оказывается удобным заменить величины h величинами γ, которые являются их линейными комбинациями:

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}h_{\sigma\rho}, \tag{2.5}$$

или более подробно:

$$\gamma_{00} = \frac{1}{2}h_{00} - \frac{1}{2}h_{ss}, \tag{2.6}$$

$$\gamma_{0n} = h_{0n}, \tag{2.7}$$

$$\gamma_{mn} = h_{mn} - \frac{1}{2}\delta_{mn}h_{ss} + \frac{1}{2}\delta_{mn}h_{00}. \tag{2.8}$$

---

[3] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, Ann. Math., 1938, 39, 65. (Статья 117.— *Ред.*)

Эта замена, конечно, не очень существенна, но она упрощает вычисления.

Таким образом мы можем всюду заменить величины h величинами γ. Уравнения гравитационного поля для пустого пространства

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2.9}$$

могут быть записаны (см. А.2) следующим образом:

$$\Phi_{00} + 2\Lambda_{00} = 0, \tag{2.10}$$

$$\Phi_{0n} + 2\Lambda_{0n} = 0, \tag{2.11}$$

$$\Phi_{mn} + 2\Lambda_{mn} = 0, \tag{2.12}$$

где

$$\Phi_{00} = -\gamma_{00|ss}\,, \tag{2.13}$$

$$\Phi_{0m} = -\gamma_{0m|ss} + \gamma_{0s|sm}, \tag{2.14}$$

$$\Phi_{mn} = -\gamma_{mn|ss} + \gamma_{ms|ns} + \gamma_{ns|ms} - \delta_{mn}\gamma_{rs|rs} \tag{2.15}$$

и

$$2\Lambda_{00} = \gamma_{sr|sr} + 2\Lambda'_{00}, \tag{2.16}$$

$$2\Lambda_{0m} = \gamma_{ms|s0} - \gamma_{00|m0} + 2\Lambda'_{0m}, \tag{2.17}$$

$$2\Lambda_{mn} = -\gamma_{0m|0n} - \gamma_{0n|0m} + 2\delta_{mn}\gamma_{0s|0s} + \gamma_{mn|00} - \delta_{mn}\gamma_{00|00} + 2\Lambda'_{mn}. \tag{2.18}$$

В этих формулах все линейные члены выписаны в явном виде, в то время как все нелинейные по γ члены обозначены через $\Lambda'_{\mu\nu}$. Разделение линейных членов на члены, относящиеся к $\Phi_{\mu\nu}$ и относящиеся к $\Lambda_{\mu\nu}$, может казаться в настоящий момент искусственным. Забегая вперед, заметим здесь, что в том методе приближения, которым мы будем решать гравитационные уравнения, линейные члены, собранные в $\Lambda_{\mu\nu}$, ведут себя подобно нелинейным.

3. **Лемма.** Во Введении мы упомянули, что дифференциальные уравнения движения будут получены путем образования поверхностных интегралов. Техника вычисления подобных поверхностных интегралов будет неоднократно использоваться в настоящей работе; она основывается на одном утверждении, на которое мы будем ссылаться в дальнейшем как на *лемму*. Здесь мы дадим ее формулировку и доказательство.

Мы имеем некоторую систему функций

$$F_{(aa\ldots)\,kl}\,. \tag{3.1}$$

При этом несущественно, имеют ли эти функции от x^μ тензорный характер или нет. Индексы в скобках могут быть греческими либо латинскими; они не будут играть роли в нашем доказательстве. Но мы делаем предположение, что эти функции антисимметричны по индексам k, l:

$$F_{(\dots)kl} = -F_{(\dots)lk}. \tag{3.2}$$

Теперь образуем интеграл

$$\int_{(S_2)} F_{(\dots)kl|l}\, n_k\, dS \tag{3.3}$$

по *произвольной замкнутой двумерной* поверхности, которая не проходит через сингулярности поля. В выражении (3.3) величины

$$n_k = \cos(x^k, \vec{n}) \tag{3.4}$$

являются компонентами «нормального единичного» вектора к поверхности. Слова «нормальный» и «единичный» имеют обычный смысл и обозначают соответствующие функции координат, которые применяются в эвклидовой геометрии. Они никак не связаны ни с каким специальным выбором метрики.

Наша лемма утверждает, что

$$\int_{(S_2)} F_{(\dots)kl|l}\, n_k\, dS = 0. \tag{3.5}$$

Мы видим, что интеграл (3.3), в силу теоремы Грина и благодаря соотношению

$$F_{(\dots)kl|lk} = 0, \tag{3.6}$$

не зависит от формы поверхности. Интеграл (3.3) мы можем записать также в форме

$$\int_{(S_2)} \operatorname{rot}_n \vec{A}\, dS, \tag{3.7}$$

где

$$F_{(\dots)23} = A_1, \quad F_{(\dots)31} = A_2, \quad F_{(\dots)12} = A_3.$$

Но интеграл (3.7) и, следовательно, интеграл (3.3) могут быть преобразованы по теореме Стокса в контурный интеграл по границе поверхности. Если поверхность замкнута, граница имеет нулевую длину. Следовательно, наша лемма, выраженная соотношением (3.5), доказана.

4. Поверхностные интегралы. Мы рассматриваем частицы вещества как сингулярности поля. Пусть имеется p частиц, мировые линии которых известны. Обозначим через

$$\overset{s}{\xi}{}^k(x^0), \qquad s = 1, 2, 3, \dots, p, \tag{4.1}$$

мировую линию s-й сингулярности. Здесь и в дальнейшем индекс, написанный сверху, будет всегда относиться к некоторой сингулярности.

Гравитационное поле, т. е. набор величин γ, будет зависеть от координат x^μ, а также и от величин ξ и их производных по времени. Величины γ удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu} = 0. \tag{4.2}$$

В произвольный момент времени x^0 окружим одну только s-ю сингулярность замкнутой поверхностью. Тогда

$$\int^s (\Phi_{\mu k} + 2\Lambda_{\mu k})\, n_k\, dS = 0, \tag{4.3}$$

где s над интегралом означает здесь и в дальнейшем, что интеграл берется по двумерной поверхности, окружающей лишь s-ю сингулярность.

Покажем, что

$$\int^s \Phi_{\mu k} n_k\, dS = 0. \tag{4.4}$$

В самом деле, из выражений (2.14) и (2.15) для величин $\Phi_{\mu k}$ следует, что последние могут быть записаны в виде

$$\Phi_{\mu k} = F_{(\mu)kl|l}, \tag{4.5}$$

$$F_{(\mu)kl} = \gamma_{\mu l|k} - \gamma_{\mu k|l} - \delta_{\mu k}\gamma_{lr|r} + \delta_{\mu l}\gamma_{kr|r}. \tag{4.6}$$

Но $F_{(\mu)kl}$ антисимметричен по k, l. Поэтому соотношение (4.4) выполнено. Отсюда и из соотношения (4.3) мы получаем

$$\int^s 2\Lambda_{\mu k} n_k\, dS = 0. \tag{4.7}$$

Из структуры $\Phi_{\mu k}$ легко проверить, что

$$\Phi_{\mu n|n} = 0, \tag{4.8}$$

и поэтому также

$$\Lambda_{\mu n|n} = 0. \tag{4.9}$$

Уравнение (4.9) показывает, что поверхностный интеграл вида (4.7) не зависит от формы поверхности. Но уравнение (4.7) говорит нам больше, а именно, что такой интеграл обращается в нуль.

Так как форма поверхности совершенно произвольна, то $4p$ поверхностных интегралов в (4.7) не могут дать нам соотношения между пространственными координатами поля. Они могут дать нам только соотношения между координатами сингулярностей и их производными по времени. Таким образом, мы можем иметь самое большее $4p$ дифференциальных уравнений. Забегая вперед, мы можем заметить здесь, что эти уравнения будут определять $3p$ функций времени:

$$\overset{s}{\xi}{}^k(x^0),$$

т. е. движение сингулярностей.

5. Метод приближения. Задача, стоящая перед нами, заключается в том, чтобы решить наши уравнения поля и вывести уравнения движения. Для этого мы используем новый приближенный метод. Предположим, что функция $\varphi(x^\mu, \lambda)$ разложена в ряд по степеням параметра λ (для малых λ):

$$\varphi(x^\mu, \lambda) = \lambda^0 \underset{0}{\varphi} + \lambda^1 \underset{1}{\varphi} + \lambda^2 \underset{2}{\varphi} + \ldots = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \underset{l}{\varphi}. \tag{5.1}$$

Индекс снизу означает *порядок приближения* (l в выражении λ^l всегда обозначает степень, но не индекс).

Если функция φ быстро меняется в пространстве, но медленно с изменением x^0, то мы не можем считать разные производные величинами одного порядка малости. Производные по x^0 будут величинами более высокого порядка, чем пространственные производные. Мы введем *вспомогательное время* τ,

$$\tau = x^0 \lambda, \tag{5.2}$$

и будем считать производные по τ равноправными с пространственными производными:

$$\varphi_{|0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\lambda = \lambda \varphi_{,0}. \tag{5.3}$$

Дифференцирование с чертой по x^0 некоторой величины можно заменять дифференцированием с запятой по τ, если при этом степень λ, на которую эта величина умножена, соответственно увеличить на единицу. Чтобы выразить это яснее, мы будем писать цифры под индексами «0», стоящими после запятой, например.

$$\lambda^{2l} \underset{2l}{\gamma}_{mn|0} = \lambda^{2l+1} \underset{2l}{\gamma}_{mn,\underset{1}{0}} \text{ или: } \lambda^{2l} \underset{2l}{\gamma}_{mn|00} = \lambda^{2l+2} \underset{2l}{\gamma}_{mn,\underset{2}{00}}. \tag{5.4}$$

С этого момента все производные будут браться по (τ, x^1, x^2, x^3) и будут обозначаться запятыми перед соответствующими индексами

$$\gamma_{\ldots|s} = \gamma_{\ldots,s}, \qquad \gamma_{\ldots|0} = \lambda \gamma_{\ldots,\underset{1}{0}}. \tag{5.5}$$

Таким образом, все функции, которые появляются в уравнениях поля, мы будем разлагать в ряды по степеням λ. Начнем с функций γ:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{00} &= \lambda^2 \underset{2}{\gamma_{00}} + \lambda^4 \underset{4}{\gamma_{00}} + \lambda^6 \underset{6}{\gamma_{00}} + \ldots,\\ \gamma_{0m} &= \qquad\qquad \lambda^3 \underset{3}{\gamma_{0m}} + \lambda^5 \underset{5}{\gamma_{0m}} + \ldots,\\ \gamma_{mn} &= \qquad\qquad \lambda^4 \underset{4}{\gamma_{mn}} + \lambda^6 \underset{6}{\gamma_{mn}} + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Почему эти разложения начинаются с различных степеней λ? Это является предположением, но оно может быть оправдано. Используя временно обычный тензор энергии-импульса материи, мы приближенно имеем для квазистационарного поля:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\gamma_{00} &= -2\rho,\\ \Delta\gamma_{0m} &= -2\rho\frac{dx^m}{d\tau}\lambda,\\ \Delta\gamma_{mn} &= -2\rho\frac{dx^m}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau}\lambda^2;\end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

поэтому

$$\gamma_{mn} \sim \lambda\gamma_{0m} \sim \lambda^2\gamma_{00}, \tag{5.8}$$

а то, что мы начинаем с λ^2 в разложении для γ_{00}, является чисто условным.

В связи с разложениями (5.6) возникает и другой вопрос: почему мы опускаем нечетные степени λ в разложениях для γ_{00}, γ_{mn} и четные в разложении для γ_{0m}? В самом деле, мы могли бы ввести все степени в разложения (5.6). Как показывает более тщательное исследование, наш выбор разложений для γ означает, что мы имеем здесь дело со случаем, аналогичным той процедуре в электродинамике, когда выбирают не запаздывающие потенциалы, а полусумму запаздывающих и опережающих потенциалов [4].

Все функции, которые появятся ниже, получаются из функций γ суммированием, умножением, дифференцированием. Таким образом, к каждой компоненте всюду применяется следующее правило: в разложении любой компоненты, имеющей $\left\{\begin{matrix}\text{нечетное}\\ \text{четное}\end{matrix}\right\}$ число нулевых индексов, будут только $\left\{\begin{matrix}\text{четные}\\ \text{нечетные}\end{matrix}\right\}$ степени λ.

[4] L. Infeld. Phys. Rev., 1938, 53, 836.

6. Уравнения поля и приближенный метод. Возвратимся к уравнениям поля

$$\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu} = 0, \tag{6.1}$$

в которые мы подставим разложения γ в степенные ряды. Таким образом, уравнение для индексов (00) в системе (6.1) можно записать в виде

$$\sum_l \lambda^{2l} (\underset{2l}{\Phi_{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{00}}) = 0. \tag{6.2}$$

Теперь перепишем уравнение (6.2) и другие уравнения поля в виде отдельных уравнений для каждого шага приближения. Мы запишем их в следующей форме:

$$\underset{2l-2}{\Phi_{00}} + 2\underset{2l-2}{\Lambda_{00}} = 0, \tag{6.3а}$$

$$\underset{2l-1}{\Phi_{0m}} + 2\underset{2l-l}{\Lambda_{0m}} = 0, \tag{6.3б}$$

$$\underset{2l}{\Phi_{mn}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} = 0. \tag{6.3в}$$

Проанализируем структуру уравнений (6.3) более внимательно. Вспоминая формулы (2.13) — (2.15), мы можем записать более подробно:

$$\underset{2l-2}{\Phi_{00}} = -\underset{2l-2}{\gamma_{00,rr}}, \tag{6.4а}$$

$$\underset{2l-1}{\Phi_{0m}} = -\underset{2l-1}{\gamma_{0m,rr}} + \underset{2l-1}{\gamma_{0r,mr}}, \tag{6.4б}$$

$$\underset{2l}{\Phi_{mn}} = -\underset{2l}{\gamma_{mn,rr}} + \underset{2l}{\gamma_{mr,nr}} + \underset{2l}{\gamma_{nr,mr}} - \delta_{mn}\underset{2l}{\gamma_{rs,rs}} \tag{6.4в}$$

и

$$2\underset{2l-2}{\Lambda_{00}} = \underset{2l-2}{\gamma_{rs,rs}} + 2\underset{2l-2}{\Lambda'_{00}}, \tag{6.5а}$$

$$2\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}} = -\underset{2l-2}{\gamma_{00,}}\underset{1}{{}_{0m}} + \underset{2l-2}{\gamma_{mr,}}\underset{1}{{}_{0r}} + 2\underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}}, \tag{6.5б}$$

$$2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} = -\underset{2l-1}{\gamma_{0m,}}\underset{1}{{}_{0n}} - \underset{2l-1}{\gamma_{0n,}}\underset{1}{{}_{0m}} + 2\delta_{mn}\underset{2l-1}{\gamma_{0r,}}\underset{1}{{}_{0r}} + \underset{2l-2}{\gamma_{mn,}}\underset{2}{{}_{00}} - \delta_{mn}\underset{2l-2}{\gamma_{00,}}\underset{2}{{}_{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda'_{mn}}. \tag{6.5в}$$

Теперь предположим, что все функции,

$$\underset{2}{\gamma_{00}} \cdots \underset{2l-4}{\gamma_{00}}, \tag{6.6а}$$

$$\underset{3}{\gamma_{0m}} \cdots \underset{2l-3}{\gamma_{0m}}, \tag{6.6б}$$

$$\underset{4}{\gamma_{mn}} \cdots \underset{2l-2}{\gamma_{mn}}, \tag{6.6в}$$

известны. Тогда значение функции $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ может быть найдено из уравнения (6.3а). Действительно, $\underset{2l-2}{\Lambda_{00}}$ содержит только уже известные члены, так как функции $\underset{2l-2}{\gamma_{mn}}$ известны, а $\underset{2l-2}{\Lambda'_{00}}$ нелинейна и поэтому может зависеть только от известных функций γ. То же самое справедливо и для уравнений (6.3б) и (6.3в). Неизвестные функции содержатся в Φ, известные функции — в Λ. Функция $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, уже найденная из уравнения (6.3а), появляется как известная функция в выражении для $\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}}$. Подобно этому, функция $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$, найденная из уравнения (6.3б), появляется как известная в выражении для $\underset{2l}{\Lambda_{mn}}$. В самом деле, мы теперь видим целесообразность нашего разделения линейных членов.

Таким образом, наши уравнения (6.3), если их решить, дают

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00}}, \quad \underset{2l-1}{\gamma_{0m}}, \quad \underset{2l}{\gamma_{mn}}, \tag{6.7}$$

и, если эта процедура сходится, мы можем определить поле в любом желаемом приближении.

Важный вопрос заключается в следующем: всегда ли уравнения (6.3) разрешимы?

7. Условие дивергенции. Вернемся к нашим уравнениям (6.3). Первое из них, т. е.

$$\underset{2l-2}{\Phi_{00}} + 2\underset{2l-2}{\Lambda_{00}} = 0, \tag{7.1}$$

в силу (6.4а) и (6.5а), является уравнением Пуассона, где величина $\underset{2l-2}{\Lambda_{00}}$ известна. Это уравнение нетрудно проинтегрировать и найти $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$. Далее из уравнения (6.3б), принимая во внимание формулу (6.4б), получаем

$$\underset{2l-1}{\Phi_{0m,\, m}} = 0. \tag{7.2}$$

Поэтому следующие три уравнения могут быть проинтегрированы, только если

$$\underset{2l-1}{\Lambda_{0m,\, m}} = 0. \tag{7.3}$$

Но выражение $\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}}$ уже известно. Поэтому мы должны быть уверены, что наша процедура приводит нас к выражению для $\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}}$, удовлетворяющему условию (7.3). Подобным образом последние шесть уравнений

(6.3в) приводят нас вследствие того, что

$$\underset{2l}{\Phi}_{mn,\,n} = 0, \tag{7.4}$$

к условию интегрируемости

$$\underset{2l}{\Lambda}_{mn,\,n} = 0. \tag{7.5}$$

Докажем, что условия (7.3) и (7.5) выполняются, если уравнения поля удовлетворены *во всех предыдущих* приближениях.

Тензор

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{7.6}$$

удовлетворяет тождеству Бианки

$$G^{\mu}_{\nu|\mu} + \left\{ {\alpha \atop \alpha\ \beta} \right\} G^{\beta}_{\nu} - \left\{ {\beta \atop \nu\ \alpha} \right\} G^{\alpha}_{\beta} = 0. \tag{7.7}$$

Мы предполагаем, что удовлетворены все уравнения вплоть до порядка $(2l-2)$, т. е. включая уравнение

$$\underset{2l-2}{\Phi_{00}} + 2\underset{2l-2}{\Lambda_{00}} = 0.$$

Мы знаем, что $\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu} = 0$ эквивалентно уравнению $R_{\mu\nu} = 0$. Из приложения A.2 следует соотношение

$$\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu} = -2\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\right), \tag{7.8}$$

которое означает, что наше выражение $\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu}$ является линейной комбинацией из компонент $R_{\mu\nu}$. Таким образом, если наши уравнения поля удовлетворены, то мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \underset{2}{G_{00}} &= \underset{4}{G_{00}} = \ldots = \underset{2l-2}{G_{00}} = 0, \\ \underset{3}{G_{0m}} &= \underset{5}{G_{0m}} = \ldots = \underset{2l-3}{G_{0m}} = 0, \\ \underset{2}{G_{mn}} &= \underset{4}{G_{mn}} = \ldots = \underset{2l-2}{G_{mn}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

Запишем нулевое тождество Бианки порядка $(2l-1)$. Из левой части тождества (7.7), полагая $\nu = 0$, получаем следующие линейные члены:

$$-\underset{2l-1}{G_{0m,\,m}} + \underset{2l-2}{G_{00,\,\underset{1}{0}}}. \tag{7.10}$$

Нелинейная часть содержит произведения величин G и γ. Но в силу равенств (7.9), как нелинейная часть тождества Бианки, так и второе выражение в (7.10), обращаются в нуль. Поэтому *нулевое* тождество Бианки вместе с уравнениями поля дает

$$\underset{2l-1}{G}_{0m,\,m} = 0. \tag{7.11}$$

Вследствие равенств (7.8), (7.6) и (7.2)

$$\underset{2l-1}{\Lambda}_{0m,\,m} = 0. \tag{7.12}$$

Переходя к следующему приближению, предположим, что кроме равенств (7.9) мы имеем также

$$\underset{2l-1}{G}_{0m} = 0. \tag{7.13}$$

Полагая в тождестве Бианки (7.7) $\nu = m$, в силу равенств (7.9) и (7.13), в порядке $2l$ получаем

$$\underset{2l}{G}_{mn,\,n} = 0, \tag{7.14}$$

и поэтому, ввиду равенств (7.4) и (7.8),

$$\underset{2l}{\Lambda}_{mn,\,n} = 0. \tag{7.15}$$

Таким образом, условия дивергенции удовлетворены на каждом этапе приближения, хотя и не тождественно. Они удовлетворены благодаря тождествам Бианки и благодаря предшествующим приближениям уравнений поля.

8. **Условие на поверхности и уравнения движения.** Мы теперь приближаемся к наиболее существенной части нашего доказательства. Перед нами стоит задача решения следующей системы уравнений:

$$\underset{2l-2}{\Phi}_{00} + 2\underset{2l-2}{\Lambda}_{00} = 0, \tag{8.1а}$$

$$\underset{2l-1}{\Phi}_{0m} + 2\underset{2l-1}{\Lambda}_{0m} = 0, \tag{8.1б}$$

$$\underset{2l}{\Phi}_{mn} + 2\underset{2l}{\Lambda}_{mn} = 0. \tag{8.1в}$$

Мы знаем, что вследствие тождеств Бианки и в силу того, что (как мы предполагаем) подобные уравнения были решены в предыдущих приближениях, мы имеем

$$\underset{2l-1}{\Lambda}_{0m,\,m} = 0, \qquad \underset{2l}{\Lambda}_{mn,\,n} = 0. \tag{8.2}$$

Вспомним также, что нетрудно решить уравнение (8.1а), которое является уравнением Пуассона. Но что можно сказать об уравнениях (8.1б) и (8.1в)?

Прежде чем вернуться к этому фундаментальному вопросу, мы хотим обсудить *исходный пункт* нашего метода последовательных приближений, который определяет характер вычислений.

В уравнениях (8.1) мы положим $l = 2$ и подробно выпишем первые два уравнения:

$$\underset{2}{\gamma}_{00,\,ss} = 0, \tag{8.3а}$$

$$-\underset{3}{\gamma}_{0m,\,ss} + \underset{3}{\gamma}_{0s,\,ms} = \underset{2}{\gamma}_{00,\,\underset{1}{0}m}. \tag{8.3б}$$

Характер полного решения будет зависеть от выбора гармонической функции, которую мы возьмем как решение уравнения (8.3а). Поскольку мы заинтересованы в решениях, представляющих частицы, мы запишем:

$$\left.\begin{aligned} &\underset{2}{\gamma}_{00} = 2\varphi, \quad \varphi = \sum_{s=1}^{p} \{-2\underset{2}{\overset{s}{m}}\overset{s}{\psi}\}, \\ &\overset{s}{\psi} = [(x^k - \overset{s}{\xi}{}^k)(x^k - \overset{s}{\xi}{}^k)]^{-\frac{1}{2}} = (\overset{s}{r})^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Здесь $\overset{s}{r}$ — «расстояние» в пространстве от точки до s-й сингулярности.

Временно оставим открытым вопрос о том, является ли $\underset{2}{\overset{s}{m}}$ функцией времени или она постоянна. Теперь подставим это выражение для $\underset{2}{\gamma}_{00}$ в уравнение (8.3б) и опять получим три уравнения для трех функций $\underset{3}{\gamma}_{0m}$. Но всегда ли уравнения (8.3б) разрешимы? Правда, дивергенции от обеих частей этих уравнений обращаются в нуль. Но этого недостаточно. Поверхностный интеграл от левой части уравнения (8.3б) обращается в нуль, как следует из леммы. Но тогда поверхностный интеграл от правой части (8.3б) также должен быть равен нулю. Если мы вычислим интеграл по поверхности, окружающей каждую сингулярность, то найдем (см. А.4), что он обращается в нуль лишь в том случае, если

$$\frac{d}{d\tau}\Big(\underset{2}{\overset{s}{m}}\Big) = \underset{2}{\overset{s}{m}}_{,\,\underset{1}{0}} = \underset{3}{\dot{\overset{s}{m}}} = 0, \tag{8.5}$$

т. е. если величины $\underset{2}{m}$ не зависят от времени. Это происходит потому, что

$$\overset{s}{\psi}_{,\,0} = -\overset{s}{\psi}_{,\,k}\dot{\overset{s}{\xi}}{}^k, \qquad \left(\dot{\xi}^k = \frac{d\xi^k}{d\tau}\right), \tag{8.6}$$

и благодаря тому, что только выражения, пропорциональные r^{-2}, могут давать вклад в поверхностные интегралы. Таким образом, возвращаясь к (8.4), мы должны предположить, что величины

$$\overset{1}{\underset{2}{m}},\ \overset{2}{\underset{2}{m}},\ \overset{3}{\underset{2}{m}}, \ldots, \overset{p}{\underset{2}{m}} \tag{8.7}$$

постоянны.

Эти постоянные (8.7) могут быть либо положительными, либо отрицательными. Мы будем предполагать, что величины $\overset{s}{\underset{2}{m}}$ положительны. В самом деле, взяв первую частицу и удалив все остальные, мы видим, что $\overset{1}{\underset{2}{m}}$ является ее *гравитационной массой*, поскольку при больших r поле совпадает с полем частицы с гравитационной массой $\overset{1}{\underset{2}{m}}$. Это — та же самая константа интегрирования, которая появляется в решении Шварцшильда, так как наше поле для одной частицы совпадает с полем сингулярности Шварцшильда, когда r велико. *Итак, мы должны исключить из наших решений отрицательные гравитационные массы. Но тогда мы должны также исключить диполи и полюса более высокого порядка.*

Тем не менее, если мы попытаемся решить уравнения (8.1), то увидим (детали будут обсуждены позже), что не можем сделать этого без добавления к $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ определенных полюсов и диполей. Это мы должны сделать для того, чтобы обеспечить интегрируемость уравнений (8.1) в каждом приближении. Но тогда решения для полного поля будут содержать диполи, которые недопустимы, так как они представляют физически бессмысленные решения. Мы должны будем устранить их *после того*, как будет найдено полное поле. Это может быть сделано, если мы *ограничим движение частиц*. Иначе говоря, условие, что дипольное поле должно обращаться в нуль, даст нам $3p$ обыкновенных дифференциальных уравнений движения p частиц. Таким образом, движение в процедуре последовательных приближений остается неопределенным. Оно становится определенным только после того, как процедура последовательных приближений заканчивается и исключаются дипольные поля.

Практически мы находим решения как для поля, так и для уравнений движения лишь в определенном приближении, скажем, в приближении порядка $2n$. Мы получим уравнения движения в приближении порядка $2n$, исключив все дипольные поля в таком приближении.

Хотя мы разложили наши уравнения поля по произвольному параметру λ, это λ может быть исключено из окончательных уравнений движения путем изменения масштабов величин $\overset{s}{\underset{2}{m}}$ и τ, так что параметр λ не будет входить в уравнения в окончательной форме.

Мы дали общий набросок наших рассуждений. Возвращаясь к деталям, посмотрим, почему уравнения (8.1) в общем случае неинтегрируемы. Из содержания раздела 4, в частности из равенства (4.4), мы знаем, что поверхностные интегралы от функций Φ обращаются в нуль. Хотя это утверждение было доказано для полного поля, оно в равной степени справедливо на каждом этапе приближения, так как при доказательстве использована только структура функции Φ, которая остается той же самой и для полного поля, и для поля в каждом приближении. Таким образом, мы имеем

$$\int^{s} \underset{2l-1}{\Phi}_{0r} n_r dS = 0, \qquad \int^{s} \underset{2l}{\Phi}_{mr} n_r dS = 0. \tag{8.8}$$

Но тогда наши уравнения (8.1) могут быть самосогласованы, только если мы имеем

$$\int^{s} 2\underset{2l-1}{\Lambda}_{0r} n_r dS = 0, \qquad \int^{s} 2\underset{2l}{\Lambda}_{mr} n_r dS = 0. \tag{8.9}$$

Но функции Λ в уравнениях (8.1) уже известны; это функции *известного* поля, вычисленного на предыдущем этапе приближения. Поэтому мы можем вычислить интегралы (8.9) и выяснить, обращаются они в нуль или нет.

В этом месте удобно ввести новые обозначения. Ввиду равенств (8.2) поверхностные интегралы (8.9) будут зависеть не от формы поверхности, а только от сингулярностей и их движения. Таким образом поверхностные интегралы, даже если они не обращаются в нуль, могут быть функциями лишь τ.

Мы пишем:

$$\frac{1}{4\pi}\int^{s} 2\, \underset{2l-1}{\Lambda}_{0r} n_r dS = \overset{s}{\underset{2l-1}{C}}_0(\tau) = \overset{s}{\underset{2l-1}{C}}_0, \tag{8.10}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int^{s} 2\, \underset{2l}{\Lambda}_{mr} n_r dS = \overset{s}{\underset{2l}{C}}_m(\tau) = \overset{s}{\underset{2l}{C}}_m \tag{8.11}$$

и предполагаем, что мы уже вычислили величины C. Если они обращаются в нуль тождественно и если они обращаются в нуль на каждом этапе приближения, то наши уравнения самосогласованы.

Предположим, однако, что величины C в соотношениях (8.10) и (8.11) *не равны нулю*. Тогда уравнения (8.1б, в) не могут быть решены. При решении уравнений (8.1а) затруднения отсутствуют. Это уравнение имеет вид

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00,\,rr}} = 2\underset{2l-2}{\Lambda_{00}}, \tag{8.12}$$

где правая часть известна. Мы видим, что решение этого уравнения определяется лишь с точностью до произвольной гармонической функции. Таким образом, мы можем добавить к любому решению либо изолированные полюса, либо полюса и диполи.

Добавляя полюса, мы можем обеспечить интегрируемость уравнения (8.1б). Затем, добавляя диполи, мы можем обеспечить интегрируемость уравнения (8.1в). Все это можно сделать *одновременно*, добавляя полюса и диполи, но для простоты изложения мы сделаем это в два этапа.

Найдя $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ из уравнения (8.12), мы вычислим величину $\underset{2l-1}{\overset{s}{C}_0}$ и, вообще говоря, найдем, что $\underset{2l-1}{\overset{s}{C}_0} \neq 0$. Тогда мы заменим в уравнении (8.1б)

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00}} \text{ на } \underset{2l-2}{\gamma_{00}} - \sum_s 4\underset{2l-1}{\overset{s}{m}}\overset{s}{\psi}, \tag{8.13}$$

где $\underset{2l-2}{\overset{s}{m}}$ — некоторые функции времени, которые мы скоро определим, а ψ — функции, определенные в (8.4). Конечно, это изменение величин $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ изменяет $\underset{2l-1}{\overset{s}{C}_0}$. В самом деле,

$$\left.\begin{gathered} 2\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}} \text{ переходит теперь в} \\ 2\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}} + \sum_s (4\underset{2l-2}{\overset{s}{m}}\overset{s}{\psi})_{\underset{1}{,\,0m}}, \end{gathered}\right\} \tag{8.14}$$

что следует из уравнения (6.5б), поскольку величина $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ появляется в $\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}}$ только как $-\underset{2l-2}{\gamma_{00,}}\underset{1}{_{m0}}$. Теперь очевидно, что прежний поверхностный интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\overset{s}{\int} 2\underset{2l-1}{\Lambda_{0r}}n_r\,dS = \underset{2l-1}{\overset{s}{C}_0} \tag{8.15}$$

переходит в (см. А.4)

$$\underset{2l-1}{\overset{s}{C}_0} - 4\underset{2l-1}{\overset{s}{\dot{m}}}. \tag{8.16}$$

Поэтому его можно сделать равным нулю, выбирая

$$4 \underset{2l-1}{\overset{s}{\dot{m}}} = \underset{2l-1}{\overset{s}{C}}{}_0. \tag{8.17}$$

Таким образом, добавляя полюс, мы можем обеспечить интегрируемость уравнений (8.1б). Следующий шаг состоит в том, чтобы обеспечить интегрируемость уравнений (8.1в). Итак, мы предположим, что величины $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ известны, что уравнения (8.1б) интегрируемы, и мы должны еще раз возвратиться к $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, чтобы найти другое решение уравнения (8.1а), обеспечивающее интегрируемость уравнений (8.1в), не нарушая интегрируемости (8.1б).

Заменим теперь нашу величину $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ (содержащую дополнительные полюса) на

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00}} - \sum_{s=1}^{p} \underset{2l-2}{\overset{s}{S}}{}_r \overset{s}{\psi}{}_{,r}. \tag{8.18}$$

Это — дополнительные *дипольные* решения, и мы предположим, что в $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ не содержится других дипольных выражений. Снова S_r являются функциями только τ, определяемыми позже. Величины $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ теперь содержат решения с изолированными полюсами, чтобы выполнялось условие интегрируемости уравнений (8.1б). Нетрудно видеть, что при изменении выражения (8.18) изменяется $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ так, что выражение для $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ принимает вид

$$\underset{2l-1}{\gamma_{0m}} - \sum_{s} (\underset{2l-2}{\overset{s}{S}}{}_m \overset{s}{\psi})_{\underset{1}{,0}}. \tag{8.19}$$

В самом деле, если старые $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ удовлетворяли первоначальным уравнениям (8.1б),

$$\underset{2l-1}{\gamma_{0m,ss}} - \underset{2l-1}{\gamma_{0s,ms}} = \underset{2l-2}{\gamma_{ms,}}\underset{1}{{}_{0s}} - \underset{2l-2}{\gamma_{00,}}\underset{1}{{}_{m0}} + 2 \underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}}, \tag{8.20}$$

то величины $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ *вместе* с дополнительными выражениями, выписанными в (8.18) и (8.19), также удовлетворяют этим уравнениям. Это происходит потому, что величины $2 \underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}}$, будучи нелинейными, не могут содержать ни $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, ни $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$. Поэтому добавление дипольных членов не влияет на интегрируемость уравнений (8.1б).

Теперь последний и решающий шаг: мы заменяем в (8.1в) выражения для $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ новыми выражениями, согласно (8.18) и (8.19), и подбираем величины S так, чтобы поверхностные интегралы обращались в нуль тождественно. Это требует несколько более длинных вычислений.

Выпишем подробно уравнение (8.1в):

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,ss}} - \underset{2l}{\gamma_{ms,ns}} - \underset{2l}{\gamma_{ns,ms}} + \delta_{mn}\underset{2l}{\gamma_{rs,rs}} = -\underset{2l-1}{\gamma}_{0m,\underset{1}{0}n} - \underset{2l-1}{\gamma}_{0n,\underset{1}{0}m} + 2\delta_{mn}\underset{2l-1}{\gamma}_{0r,\underset{1}{0}r} +$$

$$+ \underset{2l-2}{\gamma}_{mn,\underset{2}{00}} - \delta_{mn}\underset{2l-2}{\gamma}_{00,\underset{2}{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda'_{mn}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}. \tag{8.21}$$

Подставим в уравнение (8.21) вместо старых $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ соответственно

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00}} - \sum_s \underset{2l-2}{\overset{s}{S}_r}\overset{s}{\psi}_{,r}, \tag{8.22}$$

$$\underset{2l-1}{\gamma_{0m}} - \sum_s (\underset{2l-2}{\overset{s}{S}_m}\overset{s}{\psi})_{,\underset{1}{0}}. \tag{8.23}$$

Теперь мы получим новые выражения, которые надо добавить к старым $\underset{2l}{\Lambda_{mn}}$. Трудность заключается в том, что теперь вклад вносят не только линейные выражения, но и Λ'_{mn}, которые содержат члены типа $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}\underset{2}{\gamma_{00}}$. Результат вычислений приводится в A.8 и содержит много выражений, из которых мы выпишем лишь первые три, состоящие из линейных членов (остальные, как мы увидим, несущественны). Вместо старого выражения $2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}$ мы имеем

$$2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} + \sum_s (\underset{2l}{\overset{s}{\ddot{S}}_m}\overset{s}{\psi}_{,n} + \underset{2l}{\overset{s}{\ddot{S}}_n}\overset{s}{\psi}_{,m} - \delta_{mn}\underset{2l}{\overset{s}{\ddot{S}}_r}\overset{s}{\psi}_{,r}) + \ldots, \tag{8.24}$$

где точки в конце обозначают опущенные выражения. Поскольку мы здесь обсуждаем вопрос о поверхностных интегралах, мы можем опустить их, потому что они не дают вклада в последние. Мы видим также, что выписанные нами здесь выражения имеют исчезающую дивергенцию. Это справедливо также для опущенных членов. Вычисляя поверхностные интегралы (приложение A.4), мы находим, что старый поверхностный интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\overset{s}{\int} 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} n_n dS = \underset{2l}{\overset{s}{C}_m} \tag{8.25}$$

переходит в

$$\overset{s}{\underset{2l}{C}}{}_m - \overset{s}{\underset{2l}{\ddot{S}}}{}_m. \tag{8.26}$$

Поэтому его можно сделать равным нулю, выбирая

$$\overset{s}{\underset{2l}{\ddot{S}}}{}_m = \overset{s}{\underset{2l}{C}}{}_m. \tag{8.27}$$

Таким образом, добавляя дипольные решения в $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, мы всегда можем сделать поверхностные интегралы тождественно равными нулю.

Продолжая в этом духе, мы накопляем полюса и диполи, и дополнительные выражения в γ_{00} будут иметь вид

$$-\sum_l \lambda^{2l-2} \sum_{s=1}^{p} \left(4 \overset{s}{\underset{2l-2}{m}} \overset{s}{\psi} + \overset{s}{\underset{2l-2}{S}}{}_r \overset{s}{\psi}{}_{,r}\right). \tag{8.28}$$

Мы нарушили наше правило не включать диполи. Однако это сделано только для γ_{00}. Мы можем в конце процесса последовательных приближений устранить все эти дополнительные дипольные выражения, положив

$$\sum_l \lambda^{2l-2} \overset{s}{\underset{2l-2}{S}}{}_r = 0. \tag{8.29}$$

Дифференцируя это равенство дважды и учитывая (8.27), мы получаем

$$\sum_l \lambda^{2l} \overset{s}{\underset{2l}{\ddot{S}}}{}_m = \sum_l \lambda^{2l} \overset{s}{\underset{2l}{C}}{}_m = 0. \tag{8.30}$$

Это и есть 3p уравнений движения. Таким образом, уравнения движения определены, если отброшены дипольные решения.

С другой стороны, величины m могут быть вычислены из величин C_0, согласно соотношениям (8.17). Обозначая полный коэффициент при $\overset{s}{\psi}$ через $-4\overset{s}{M}$, мы имеем

$$\overset{s}{M} = \lambda^2 \overset{s}{\underset{2}{m}} + \lambda^4 \overset{s}{\underset{4}{m}} + \lambda^6 \overset{s}{\underset{6}{m}} + \ldots, \tag{8.31}$$

где $\overset{s}{\underset{4}{m}}, \overset{s}{\underset{6}{m}}, \ldots$ — функции первоначальных констант $\overset{s}{\underset{2}{m}}$ и известных функций времени.

Соотношения (8.30) и (8.31) будут содержать только конечное число членов, которое зависит от порядка, в котором мы желаем выполнить наши вычисления.

9. **О выборе системы координат.** Теперь мы увидим, что наши уравнения можно упростить надлежащим выбором системы координат. Предположим, что

$$\underset{2l-2}{\gamma^*_{00}},\quad \underset{2l-1}{\gamma^*_{0m}},\quad \underset{2l}{\gamma^*_{mn}} \tag{9.1}$$

—решения нашей системы (6.3), где функции Ф и Λ определены формулами (6.4) и (6.5). Тогда мы можем показать, что любые

$$\begin{aligned} &\underset{2l-2}{\gamma_{00}} = \underset{2l-2}{\gamma^*_{00}}, \\ &\underset{2l-1}{\gamma_{0m}} = \underset{2l-1}{\gamma^*_{0m}} + \underset{2l-1}{a_{0,m}}, \\ &\underset{2l}{\gamma_{mn}} = \underset{2l}{\gamma^*_{mn}} + \underset{2l}{a_{m,n}} + \underset{2l}{a_{n,m}} - \delta_{mn}\underset{2l}{a_{r,r}} + \delta_{mn}\underset{2l-1}{a_0}{}_{,\underset{1}{0}} \end{aligned} \tag{9.2}$$

с *произвольными* функциями $\underset{2l-1}{a_0}$, $\underset{2l}{a_m}$ являются также решениями наших уравнений. Это можно показать хотя бы непосредственной подстановкой в соотношения (6.4). Простое вычисление показывает, что все функции a выпадают из этих соотношений. Таким образом, мы можем на каждом этапе приближения наложить на поле четыре условия. Выберем, как обычно, следующие четыре координатных условия:

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00}}{}_{,\underset{1}{0}} - \underset{2l-1}{\gamma_{0r}}{}_{,r} = 0, \tag{9.3а}$$

$$\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}{}_{,\underset{1}{0}} - \underset{2l}{\gamma_{mr}}{}_{,r} = 0. \tag{9.3б}$$

Действительно, если γ^* не удовлетворяют таким условиям, то можно подобрать такие a, чтобы обеспечить это требование. Функции a удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\underset{2l-1}{a_{0,rr}} = \underset{2l-2}{\gamma^*_{00}}{}_{,\underset{1}{0}} - \underset{2l-1}{\gamma^*_{0r}}{}_{,r}, \tag{9.4а}$$

$$\underset{2l}{a_{m,rr}} = \underset{2l-1}{\gamma^*_{0m}}{}_{,\underset{1}{0}} - \underset{2l}{\gamma^*_{mr}}{}_{,r}. \tag{9.4б}$$

Координатные условия (9.3) значительно упрощают нашу систему уравнений. Уравнения (6.3) теперь приобретают вид

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00,\,rr}} = \underset{2l-4}{\gamma_{00,}}\underset{2}{{}_{00}} + 2\,\underset{2l-2}{\Lambda'_{00}}, \tag{9.5а}$$

$$\underset{2l-1}{\gamma_{0m,\,rr}} = \underset{2l-3}{\gamma_{0m,}}\underset{2}{{}_{00}} + 2\,\underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}}, \tag{9.5б}$$

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,\,rr}} = \underset{2l-2}{\gamma_{mn,}}\underset{2}{{}_{00}} + 2\,\underset{2l}{\Lambda'_{mn}}; \tag{9.5в}$$

они вместе с координатными условиями

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00,}}\underset{1}{{}_{0}} - \underset{2l-1}{\gamma_{0r,\,r}} = 0, \tag{9.6а}$$

$$\underset{2l-1}{\gamma_{0m,}}\underset{1}{{}_{0}} - \underset{2l}{\gamma_{mr,\,r}} = 0 \tag{9.6б}$$

образуют симметричную систему уравнений, причем в системе (9.5) все известные функции в правой части, по крайней мере, на два порядка ниже, чем в левой.

Поверхностные интегралы, которые должны обращаться в нуль и которые дают уравнения движения, имеют вид

$$\int^{s} (\underset{2l-3}{\gamma_{0m,}}\underset{2}{{}_{00}} - \underset{2l-2}{\gamma_{00,}}\underset{1}{{}_{0m}} + 2\,\underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}})\, n_m dS = 0; \tag{9.7а}$$

$$\int^{s} (\underset{2l-2}{\gamma_{nm,}}\underset{2}{{}_{00}} - \underset{2l-1}{\gamma_{n0,}}\underset{1}{{}_{0m}} + 2\underset{2l}{\Lambda'_{nm}})\, n_m dS = 0. \tag{9.7б}$$

Мы можем получить их из наших старых формул, используя лемму или непосредственно дифференцируя равенство (9.6), добавляя к (9.5) и используя лемму.

Если теперь, как и в разделе 8, мы введем диполи, чтобы удовлетворить уравнению (9.7б), то условия (9.6а) не нарушим.

Иногда более удобно использовать другие координатные условия. Например, в настоящей работе в вычислениях применялись условия

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00,}}\underset{1}{{}_{0}} - \underset{2l-1}{\gamma_{0s,\,s}} = 0, \tag{9.8а}$$

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,\,n}} = 0. \tag{9.8б}$$

Уравнения в этом случае принимают вид

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00,\,rr}} = 2\,\underset{2l-2}{\Lambda'_{00}}, \tag{9.9а}$$

$$\underset{2l-1}{\gamma_{0m,\,rr}} = 2\underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}}, \tag{9.9б}$$

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,\,rr}} = -\underset{2l-1}{\gamma_{0m,\,0n}}\underset{1}{} - \underset{2l-1}{\gamma_{0n,\,0m}}\underset{1}{} + \delta_{mn}\underset{2l-2}{\gamma_{00,\,00}}\underset{2}{} + \underset{2l-2}{\gamma_{mn,\,00}}\underset{2}{} + 2\underset{2l}{\Lambda'_{mn}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}. \tag{9.9в}$$

Условия на поверхности будут

$$\int^{s} (2\underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}} - \underset{2l-2}{\gamma_{00,\,0m}}\underset{1}{})\, n_m dS = 0, \tag{9.10а}$$

$$\int^{s} 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} n_m dS = 0. \tag{9.10б}$$

Возникает вопрос: в какой степени координатные условия влияют на уравнения движения? Мы вернемся к этому вопросу в последнем разделе настоящей работы, и там покажем, что уравнения движения до шестого порядка не зависят от выбора координатной системы.

10. Ньютоновское приближение. Теперь мы рассмотрим первые три уравнения для $l = 2$. Эти уравнения имеют вид

$$\underset{2}{\gamma_{00,\,rr}} = 0, \tag{10.1}$$

$$\underset{3}{\gamma_{0m,\,rr}} = 0, \tag{10.2}$$

$$\underset{4}{\gamma_{nm,\,rr}} = 2\underset{4}{\Lambda_{nm}}. \tag{10.3}$$

Мы выбираем координатные условия

$$\underset{3}{\gamma_{0r,\,r}} - \underset{2}{\gamma_{00,\,0}}\underset{1}{} = 0, \tag{10.4}$$

$$\underset{4}{\gamma_{mr,\,r}} = 0. \tag{10.5}$$

Явное выражение для $\underset{4}{\Lambda_{mn}}$ дано в А.10.

Характер нашего полного решения будет существенно зависеть от выбора гармонической функции, которую мы берем в качестве решения уравнения (10.1). Поскольку нас интересуют решения, представляющие частицы, мы напишем:

$$\underset{2}{\gamma_{00}} = 2\varphi, \qquad \varphi = \sum_{s=1}^{p}\{-2\underset{2}{\overset{s}{m}}\overset{s}{\psi}\},$$

$$\overset{s}{\psi} = [(x^r - \overset{s}{\xi}{}^r)(x^r - \overset{s}{\xi}{}^r)]^{-\frac{1}{2}} = (\overset{s}{r})^{-1}. \tag{10.6}$$

Из уравнения (10.2) мы видим, что $\underset{3}{\gamma}_{0m}$ также является гармонической функцией, которая должна, однако, удовлетворять, кроме того, координатным условиям. Из условия (10.4) мы имеем

$$\underset{3}{\gamma}_{0r,\,r} = \underset{2}{\gamma}_{00,\,\underset{1}{0}} = -\sum_{s}\{4\underset{2}{\overset{s}{m}}\overset{s}{\psi}_{,\,r}\underset{1}{\dot{\overset{s}{\xi}}}{}^{r}\}. \tag{10.7}$$

Константы $\underset{2}{\overset{s}{m}}$, которые мы отождествляем с гравитационной массой частиц, предполагаются положительными. Поэтому исключение диполей, вместе с уравнениями поля и координатными условиями, однозначно определяет величины $\underset{3}{\gamma}_{0n}$:

$$\underset{3}{\gamma}_{0n} = \sum_{s} 4\underset{2}{\overset{s}{m}}\overset{s}{\psi}\underset{1}{\dot{\overset{s}{\xi}}}{}^{n}. \tag{10.8}$$

К этому выражению для $\underset{3}{\gamma}_{0n}$ можно добавить, согласно равенствам (9.2), градиент произвольной функции. Этим путем мы получим общее решение. Но поскольку наш метод последовательных приближений использует только рациональные функции от $(x^r - \overset{s}{\xi}{}^{r})$, то любое такое добавление ввело бы новые сингулярности (не типа изолированного полюса) или негалилеево поле на бесконечности. Таким образом, величины $\underset{3}{\gamma}_{0n}$ в выражении (10.8) следует рассматривать как характеризующие задачу описания частиц, безотносительно к тому, вводим мы координатные условия (10.4) или нет.

Ограничимся ради простоты случаем двух частиц и напишем (опуская индексы внизу у $\overset{s}{m}$, φ, f, g):

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi = f + g,\\
&f = -2\overset{1}{m}\overset{1}{\psi}, \qquad g = -2\overset{2}{m}\overset{2}{\psi},\\
&\overset{1}{\xi}{}^{r} = \eta^{r}, \qquad \overset{2}{\xi}{}^{r} = \zeta^{r}.
\end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

Так как поверхностный интеграл (9.10а) обращается в нуль для случая $l = 3$ вследствие того, что

$$\overset{s}{\int}(2\underset{3}{\Lambda}{}'_{0m} - \underset{2}{\gamma}_{00,\,\underset{1}{0m}})\,n_m dS = -\overset{s}{\int}\underset{2}{\gamma}_{00,\,\underset{1}{0m}} n_m dS = 0, \tag{10.10}$$

то следующим шагом мы определяем:

$$\left.\begin{aligned}\overset{1}{\underset{4}{C}}_m &= \frac{1}{4\pi}\overset{1}{\int}\underset{4}{2\Lambda_{mr}}n_r dS,\\ \overset{2}{\underset{4}{C}}_m &= \frac{1}{4\pi}\overset{2}{\int}\underset{4}{2\Lambda_{mr}}n_r dS.\end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

Если мы хотим оборвать процесс последовательных приближений в этом месте, то уравнения с точностью до величин четвертого порядка, или, как мы будем говорить, уравнения в ньютоновском приближении, будут

$$\overset{1}{\underset{4}{C}}_m = 0, \qquad \overset{2}{\underset{4}{C}}_m = 0. \qquad (10.12)$$

Нам теперь остается лишь вычислить поверхностные интегралы методом, изложенным в общих чертах в **А.4.** Результаты этих вычислений приведены в **А.10.** Они имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\overset{1}{\underset{4}{C}}_m(\tau) &= 4\overset{1}{m}\left\{\ddot{\eta}^m + \frac{1}{2}\tilde{g}_{,m}\right\} = 0,\\ \overset{2}{\underset{4}{C}}_m(\tau) &= 4\overset{2}{m}\left\{\ddot{\zeta}^m + \frac{1}{2}\tilde{f}_{,m}\right\} = 0,\\ \tilde{g}_{,m} &= g_{,m} \ \text{при}\ x^s = \eta^s,\\ \tilde{f}_{,m} &= f_{,m} \ \text{при}\ x^s = \zeta^s.\end{aligned}\right\} \qquad (10.13)$$

Уравнения (10.13) фактически не зависят от переменных x^s. В последних уравнениях мы видим, что, например, величины $\tilde{g}_{,m}$ получены путем дифференцирования g по x^s и последующей заменой x^s на η^s. Но результат будет тот же самый, если мы *сначала* заменим x^s на η^s, а *затем* продифференцируем по η^s или ζ^s. Итак,

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{,s} &= \frac{\partial g(r)}{\partial \eta^s} = -\frac{\partial g(r)}{\partial \zeta^s},\\ g(r) &= -\frac{2\overset{2}{m}}{r}; \qquad r^2 = (\eta^s - \zeta^s)(\eta^s - \zeta^s).\end{aligned} \qquad (10.14)$$

Следовательно, мы можем рассматривать наши уравнения движения как включающие дифференцирование функций, зависящих только от положения сингулярностей, что характерно для теории, которая базируется на концепции дальнодействия. Действительно, мы видим, что наши уравнения являются точно ньютоновскими уравнениями движения, полученными здесь в качестве первого приближения из уравнений поля. Рассмотрение p частиц (вместо двух) не добавляет каких-либо новых трудностей, пока мы имеем дело только с ньютоновским приближением.

11. **Переход к следующему приближению.** Мы хотим теперь идти дальше ньютоновского приближения. Но тогда мы должны вычислить величины $\underset{4}{\gamma}_{mn}$, так как от $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ зависят функции $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$. Характерная особенность этого метода состоит в том, что вообще, если мы желаем найти уравнения движения в $2l$-приближении (включительно), нам не нужно вычислять величины $\underset{2l}{\gamma}_{mn}$, поскольку $\underset{2l}{C}_m$ их не содержит. Но теперь, чтобы сделать еще один шаг вперед, мы должны найти $\underset{4}{\gamma}_{mn}$, которые определяются уравнениями

$$\underset{4}{\gamma}_{mn,\,rr} = 2\underset{4}{\Lambda}_{mn}. \tag{11.1}$$

Это — переходный шаг, который мы должны сделать, прежде чем перейти к следующему приближению. Эти уравнения интегрируемы только в том случае, если мы *предположим* ньютоновское движение. В противном случае нам пришлось бы добавлять диполи. Тем не менее, если мы хотим получить *только* следующее приближение, мы можем предположить ньютоновское движение, и добавочные выражения, обязанные дипольным полям, не будут необходимы.

Если в уравнениях (11.1) мы предположим ньютоновское движение, то эти уравнения можно проинтегрировать, поскольку тогда поверхностный интеграл от $\underset{4}{\Lambda}_{mn}$ обращается в нуль. Но сделав это, мы введем ньютоновское движение в $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$. Это допустимо ввиду того, что $\underset{6}{\Lambda}$, вычисленное таким путем, и $\underset{6}{\Lambda}$, вычисленное для реального движения, отличаются на величину порядка $\underset{8}{\Lambda}$. Таким образом, ввиду того, что мы не собираемся идти дальше $\underset{6}{\Lambda}$, можно игнорировать дополнительные дипольные поля. Именно по этой причине предыдущие конкретные вычисления, выполненные в работе [5], были правильны, хотя общая теория была ошибочна.

Решим теперь уравнения

$$\underset{4}{\gamma}_{mn,\,rr} = 2\underset{4}{\Lambda}_{mn} = -\underset{3}{\gamma}_{om,\,\underset{1}{o}n} - \underset{3}{\gamma}_{on,\,\underset{1}{o}m} + 2\delta_{mn}\varphi_{,\,00} - 2\varphi\varphi_{,\,mn} - \varphi_{,\,m}\varphi_{,\,n} + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,\,s}\varphi_{,\,s}, \tag{11.2}$$

[5] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, Ann. Math., 1938, 39, 65. (Статья 117.— *Ред.*)

предполагая справедливыми ньютоновские уравнения движения, т. е. уравнения (10.13).

Мы можем игнорировать дипольные выражения, поскольку нас интересуют только уравнения движения в следующем приближении. Но по той же самой причине мы интересуемся только теми выражениями в $\underset{4}{\gamma}_{mn}$, которые дают вклад в соответствующий поверхностный интеграл от $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$.

Исследование вида функции $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$ (приложение **А.12**) показывает, что нам нужно знать $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ только в окрестности сингулярностей, и мы можем опустить в нем члены, которые не обращаются в бесконечность при $\overset{s}{r} \to 0$, так как поверхностный интеграл от этих членов должен обращаться в нуль (см. **А.12**). С другой стороны, величину $\underset{4}{\gamma}_{ss}$, которая также появляется в $\underset{6}{\Lambda}$, нужно вычислять, что и будет сделано, во всем пространстве.

В правой части уравнения (11.2) мы имеем «перекрестные произведения», т. е. произведения, принадлежащие различным сингулярностям. Благодаря этому уравнения (11.2) можно проинтегрировать только в окрестности, скажем, первой сингулярности. Выражения, возникающие от второй сингулярности, могут быть разложены вблизи первой сингулярности в степенные ряды. Оставляя все выражения, которые могут дать вклад в поверхностный интеграл, и только их, мы получим в окрестности *первой* сингулярности

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{\gamma}_{mn} = {} & \{f[(x^n - \eta^n)\dot{\eta}^m + (x^m - \eta^m)\dot{\eta}^n - \delta_{mn}(x^s - \eta^s)\dot{\eta}^s]\}_{,0} + \\
& + \{g[(x^n - \zeta^n)\dot{\zeta}^m + (x^m - \zeta^m)\dot{\zeta}^n - \delta_{mn}(x^s - \zeta^s)\dot{\zeta}^s]\}_{,0} + \\
& + \frac{7}{4}\overset{1}{r}{}^2 f_{,m} f_{,n} + \frac{7}{4}\overset{2}{r}{}^2 g_{,m} g_{,n} - f_{,m}(x^n - \eta^n)\widetilde{g} + \alpha_{mn} f + \beta_{mn} g. \qquad (11.3)
\end{aligned}
$$

Здесь от перекрестных произведений осталось только выражение

$$
-f_{,m}(x^n - \eta^n)\widetilde{g}; \qquad \widetilde{g} = g \text{ при } x^s = \eta^s.
$$

Два последних выражения представляют собой дополнительные гармонические функции (диполи исключены); они определяются координатными условиями

$$
\underset{4}{\gamma}_{mr,r} = 0. \qquad (11.4)
$$

В результате имеем

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{mn} &= 2\dot{\eta}^m\dot{\eta}^n + \delta_{mn}\widetilde{g},\\ \beta_{mn} &= 2\dot{\zeta}^m\dot{\zeta}^n + \delta_{mn}\widetilde{f},\\ \widetilde{f} &= f(r), \quad \widetilde{g} = g(r), \quad r^2 = (\eta^s - \zeta^s)(\eta^s - \zeta^s).\end{aligned}\right\} \tag{11.5}$$

Но отметим еще раз, что все это справедливо только в том случае, если принято, что движение ньютоновское.

Наконец, как мы заметили раньше, величина $\underset{4}{\gamma}_{rr}$ может быть вычислена точно. В результате получим

$$\underset{4}{\gamma}_{rr} = -2\overset{1}{m}\overset{1}{r}_{,00} - 2\overset{2}{m}\overset{2}{r}_{,00} + \frac{7}{4}\varphi^2 + \alpha f + \beta g. \tag{11.6}$$

Здесь α и β должны быть определены так, чтобы вблизи сингулярности выражение (11.6) совпадало с (11.3) при $m = n = r$. В результате имеем

$$\begin{aligned}\alpha &= 2\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s + \frac{1}{2}\widetilde{g},\\ \beta &= 2\dot{\zeta}^s\dot{\zeta}^s + \frac{1}{2}\widetilde{f}.\end{aligned} \tag{11.7}$$

Таким образом подготовительный промежуточный этап завершен.

12. Постньютоновское приближение. Выпишем следующие уравнения движения:

$$\underset{4}{\gamma}_{00,\,rr} = 2\underset{4}{\Lambda}_{00} = -\frac{3}{2}\varphi_{,\,r}\varphi_{,\,r}, \tag{12.1а}$$

$$\underset{5}{\gamma}_{0m,\,rr} = 2\underset{5}{\Lambda'}_{0m} = \varphi_{,\,s}\gamma_{0s,\,m} - \varphi_{,\,sm}\gamma_{0s} - 3\varphi_{,\,0}\varphi_{,\,m}, \tag{12.1б}$$

$$\underset{6}{\gamma}_{mn,\,rr} = 2\underset{6}{\Lambda}_{mn}. \tag{12.1в}$$

Явное выражение для $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$ приведено в А.12. Решение уравнения (12.1а) имеет простой вид:

$$\underset{4}{\gamma}_{00} = -\frac{3}{4}\varphi^2 - 4\overset{1}{m}\overset{1}{\underset{4}{\psi}} - 4\overset{2}{m}\overset{2}{\underset{4}{\psi}}. \tag{12.2}$$

Как известно из общей теории, произвольные гармонические функции должны быть определены таким образом, чтобы уравнения (12.1б) были совместными, т. е. соответствующие поверхностные интегралы должны обращаться в нуль.

Координатные условия здесь те же, что и раньше:

$$\underset{5}{\gamma}_{0r,\,r} - \underset{4}{\gamma}_{00,\,\underset{1}{0}} = 0, \tag{12.3а}$$

$$\underset{6}{\gamma}_{mr,\,r} = 0. \tag{12.3б}$$

Отсюда условия разрешимости уравнений (12.1б, в) будут

$$\frac{1}{4\pi}\int^{s}\left\{2\underset{5}{\Lambda'}_{0m} - \underset{4}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}m}\right\} n_m dS = 0, \tag{12.4а}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int^{s} 2\underset{6}{\Lambda}_{mr} n_r\, dS = 0. \tag{12.4б}$$

Из соотношений (12.4а) мы определяем m. В результате вычисления поверхностных интегралов в (12.4а) (см. А.12) имеем

$$\left.\begin{aligned}
\overset{1}{\underset{4}{m}} &= \frac{1}{2}\overset{1}{m}\left\{\dot\eta^s\dot\eta^s + \frac{1}{2}\tilde g\right\} = \frac{1}{2}\left(\overset{1}{m}\dot\eta^s\dot\eta^s - \overset{1}{m}\overset{2}{m}\frac{1}{r}\right),\\
\overset{2}{\underset{4}{m}} &= \frac{1}{2}\overset{2}{m}\left\{\dot\zeta^s\dot\zeta^s + \frac{1}{2}\tilde f\right\} = \frac{1}{2}\left(\overset{2}{m}\dot\zeta^s\dot\zeta^s - \overset{1}{m}\overset{2}{m}\frac{1}{r}\right),\\
\overset{1}{m} &= \overset{1}{\underset{2}{m}}, \qquad \overset{2}{m} = \overset{2}{\underset{2}{m}}, \qquad r^2 = (\eta^s - \zeta^s)(\eta^s - \zeta^s).
\end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

После того как совместность уравнений (12.1б) обеспечена, нужно вычислить величины $\underset{5}{\gamma}_{0s}$. Они необходимы нам потому, что входят в последующий поверхностный интеграл. Выписывая существенные члены, которые могут влиять на величину поверхностного интеграла, находим вблизи первой сингулярности

$$\begin{aligned}
\underset{5}{\gamma}_{0m} = {} & -\frac{7}{4}\overset{1}{r}f_{,m}f_{,r}\dot\eta^r + \frac{3}{4}f^2\dot\eta^m + \frac{3}{2}(x^s - \eta^s)(\dot\eta^s - \dot\zeta^s)f\tilde g_{,m} - \\
& -(x^m - \eta^m)f\tilde g_{,s}(\dot\eta^s - \dot\zeta^s) + \frac{1}{2}(x^s - \eta^s)f_{,m}\dot\zeta^s\{\tilde g + \tilde g_{,r}(x^r - \eta^r)\} + \\
& + \frac{1}{2}(x^s - \eta^s)\{f\tilde g_{,s}\dot\zeta^m + f_{,m}\tilde g\dot\zeta^s\} + \alpha_{0m}f.
\end{aligned} \tag{12.6}$$

Снова определим величину α_{0m} из координатных условий (12.3а). В результате получим

$$\alpha_{0m} = -\dot\eta^s\dot\eta^s\dot\eta^m + \tilde g\dot\eta^m - \tilde g\dot\zeta^m. \tag{12.7}$$

Теперь на сцену выступают последние и наиболее трудные вычисления:

$$\overset{1}{\underset{6}{C}}_m = \frac{1}{4\pi}\int 2\overset{1}{\underset{6}{\Lambda}}_{mn} n_m \, dS. \tag{12.8}$$

В А.12 сделаны несколько замечаний по поводу их вычислений и приведены некоторые результаты. Мы получаем

$$\begin{aligned}\overset{1}{\underset{6}{C}}_m = -4\overset{1}{m}\overset{2}{m}\Big\{&\Big[\dot\eta^s\dot\eta^s + \frac{3}{2}\dot\zeta^s\dot\zeta^s - 4\dot\eta^s\dot\zeta^s - 4\frac{\overset{2}{m}}{r} - 5\frac{\overset{1}{m}}{r}\Big]\frac{\partial}{\partial\eta^m}\left(\frac{1}{r}\right) + \\ &+ [4\dot\eta^s(\dot\zeta^m - \dot\eta^m) + 3\dot\eta^m\dot\zeta^s - 4\dot\zeta^s\dot\zeta^m]\frac{\partial}{\partial\eta^s}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial\eta^s\partial\eta^r\partial\eta^m}\dot\zeta^s\dot\zeta^r\Big\}.\end{aligned} \tag{12.9}$$

Таким образом, уравнения движения на этой стадии приближения имеют вид

$$\lambda^4\overset{1}{\underset{4}{C}}_m + \lambda^6\overset{1}{\underset{6}{C}}_m = 0. \tag{12.10}$$

Мы можем теперь избавиться от λ, вводя новые единицы измерения τ и $\overset{1}{m}, \overset{2}{m}$:

Старое $\tau = \lambda\cdot$(Новое τ).

Старая масса $= \lambda^{-2}\cdot$(Новая масса).

Сохраняя старые обозначения для величин в новых единицах, мы получаем следующее уравнение движения для первой частицы:

$$\begin{aligned}\ddot\eta^m - \overset{2}{m}\frac{\partial}{\partial\eta^m}\left(\frac{1}{r}\right) = \overset{2}{m}\Big\{&\Big[\dot\eta^s\dot\eta^s + \frac{3}{2}\dot\zeta^s\dot\zeta^s - 4\dot\eta^s\dot\zeta^s - 4\frac{\overset{2}{m}}{r} - 5\frac{\overset{1}{m}}{r}\Big]\frac{\partial}{\partial\eta^m}\left(\frac{1}{r}\right) + \\ &+ [4\dot\eta^s(\dot\zeta^m - \dot\eta^m) + 3\dot\eta^m\dot\zeta^s - 4\dot\zeta^s\dot\zeta^m]\frac{\partial}{\partial\eta^s}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial\eta^s\partial\eta^r\partial\eta^m}\dot\zeta^s\dot\zeta^r\Big\}.\end{aligned} \tag{12.11}$$

Уравнения движения для другой частицы получаются путем замены

$$\overset{1}{m}, \overset{2}{m}, \eta, \zeta \text{ на } \overset{2}{m}, \overset{1}{m}, \zeta, \eta$$

соответственно.

Это — уравнения движения двух частиц. Они могут быть проинтегрированы, и из них можно получить заключения о движении перигелия двойной звезды[6]. Общий метод может быть приспособлен к случаю движения заряженной частицы в электромагнитном поле[7].

....

[6] H. P. Robertson. Ann. Math., 1938, 39, 101.
[7] L. Infeld, P. R. Wallace. Phys. Rev., 1940, 57, 797.

13. Уравнения движения и координатные условия. Последние три раздела не содержат ничего нового. Однако их изложение отличается от изложения в работах [8] и [9], так как оно приспособлено к новой теории. Есть и еще один вопрос, на который мы хотели бы ответить и который не был рассмотрен раньше. Это стало возможным только теперь, когда общая теория усовершенствована. Мы спрашиваем: в какой мере уравнения движения, сформулированные в виде (12.11), зависят от специального выбора координатной системы?

Мы отказываемся от любого специального выбора системы координат и записываем первые два уравнения:

$$\underset{2}{\Phi}_{00} + 2\underset{2}{\Lambda}_{00} = -\underset{2}{\gamma}_{00\,rr} = 0, \tag{13.1}$$

$$\underset{3}{\Phi}_{0m} + 2\underset{3}{\Lambda}_{0m} = -\underset{3}{\gamma}_{0m,rr} + \underset{3}{\gamma}_{0r,mr} - \underset{2}{\gamma}_{00,m\underset{1}{0}} = 0. \tag{13.2}$$

Предположим, что мы начинаем наш процесс последовательных приближений с тех же самых функций $\underset{2}{\gamma}_{00}$ и $\underset{3}{\gamma}_{0m}$, *как и раньше*. Но после этого, имея дело с теми же самыми уравнениями, мы будем искать *общие* решения, не ограничивая себя никакими дополнительными координатными условиями.

Итак, мы хотим рассмотреть следующие уравнения:

$$\underset{4}{\Phi}_{mn} + 2\underset{4}{\Lambda}_{mn} = 0, \tag{13.3а}$$

$$\underset{4}{\Phi}_{00} + 2\underset{4}{\Lambda}_{00} = 0, \tag{13.3б}$$

$$\underset{5}{\Phi}_{0m} + 2\underset{5}{\Lambda}_{0m} = 0. \tag{13.3в}$$

В последних трех разделах мы решали эти уравнения, используя специальные координатные условия. Обозначим теперь специальные решения, полученные там, через

$$\underset{4}{\overset{*}{\gamma}}_{mn}, \quad \underset{4}{\overset{*}{\gamma}}_{00}, \quad \underset{5}{\overset{*}{\gamma}}_{0m}. \tag{13.4}$$

Зная их, мы можем найти общее решение уравнений (13.3). Процедура отыскания общего решения подобна той, которая была намечена в раз-

---

[8] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann. Ann. Math., 1938, 39, 65. (Статья 117.— *Ред.*)

[9] A. Einstein, L. Infeld. Ann. Math., 1940, 41, 455. (Статья 120.— *Ред.*)

деле 9, с той лишь разницей, что теперь мы имеем систему уравнений порядка ($2l$), ($2l$) и ($2l+1$), в то время как раньше имели систему уравнений порядка ($2l-2$), ($2l-1$) и ($2l$). Непосредственная подстановка показывает, что благодаря линейным выражениям в уравнениях (13.3) (а только они одни играют роль) общее решение уравнений (13.3) будет:

$$\underset{4}{\gamma}_{mn} = \underset{4}{\overset{*}{\gamma}}_{mn} + \underset{4}{a}_{m,n} + \underset{4}{a}_{n,m} - \delta_{mn}\underset{4}{a}_{r,r}, \tag{13.5а}$$

$$\underset{4}{\gamma}_{00} = \underset{4}{\overset{*}{\gamma}}_{00} + \underset{4}{a}_{r,r}, \tag{13.5б}$$

$$\underset{5}{\gamma}_{0m} = \underset{5}{\overset{*}{\gamma}}_{0m} + \underset{5}{a}_{0,m} + \underset{4}{a}_{m,\underset{1}{0}}, \tag{13.5в}$$

где a_μ — произвольны. Тогда вопрос заключается в следующем. Если мы подставим эти новые выражения в Λ, то изменятся ли при этом интегралы

$$\int \Lambda_{mr} n_r dS, \qquad \int \underset{5}{\Lambda}_{0r} n_r dS, \qquad \int \underset{6}{\Lambda}_{mr} n_r dS? \tag{13.6}$$

В отношении первых двух интегралов ответ прост: $\underset{4}{\Lambda}$ не изменяются; в $\underset{5}{\Lambda}$ существенны только линейные выражения, но поверхностный интеграл от дополнительных выражений, согласно лемме, обращается в нуль. Иначе обстоит дело с третьим поверхностным интегралом. В $\underset{6}{\Lambda}$ появляются новые члены, содержащие величины a. Они входят как в линейные, так и в нелинейные выражения. Но эти дополнительные выражения — они выписаны в последнем приложении — таковы, что поверхностные интегралы от них обращаются в нуль. Таким образом, уравнения движения не зависят в указанном здесь смысле от выбора системы координат. Эта зависимость могла бы появиться, вероятно, в следующем приближении ($\underset{8}{\Lambda}$), но они не входят в поверхностный интеграл от $\underset{6}{\Lambda}$. Это представляется удовлетворительным результатом, поскольку трудно понять смысл наших координатных условий,

$$\begin{gathered} \underset{4}{\gamma}_{mr,r} = 0, \\ \underset{5}{\gamma}_{0r,r} - \underset{4}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}} = 0, \\ \underset{6}{\gamma}_{mr,r} = 0, \end{gathered} \tag{13.7}$$

и полезно убедиться в том, что наши уравнения не зависят от них. Это — общий результат. Если мы имеем систему уравнений:

$$\underset{2l}{\Phi_{mn}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} = 0,$$
$$\underset{2l}{\Phi_{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{00}} = 0, \qquad (13.8)$$
$$\underset{2l+1}{\Phi_{0m}} + 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0m}} = 0,$$

то поверхностный интеграл от $\underset{2l+2}{\Lambda_{mn}}$ не зависит от координатных условий, введенных на этом этапе приближения. Это происходит благодаря тому, что величины $\underset{2l}{a}$ комбинируются с величинами φ одинаковым образом на каждом этапе приближения.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А.2

Уравнения поля имеют вид

$$R_{\mu\nu} = -\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\nu\end{Bmatrix}_{|\rho} + \begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\rho\end{Bmatrix}_{|\nu} + \begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma\\ \rho\nu\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma\\ \rho\sigma\end{Bmatrix}. \qquad (А.2.1)$$

Вводя функции h, определенные равенствами (2 3), и выделяя в (А.2.1) линейные и нелинейные члены, получаем

$$R_{00} = -\frac{1}{2}h_{00|ss} + h_{0s|0s} - \frac{1}{2}h_{ss|00} + L'_{00}, \qquad (А.2.2а)$$

$$R_{0n} = -\frac{1}{2}h_{0n|ss} + \frac{1}{2}h_{0s|ns} + \frac{1}{2}h_{ns|0s} - \frac{1}{2}h_{ss|n0} + L'_{0n}, \qquad (А.2.2б)$$

$$R_{mn} = -\frac{1}{2}h_{mn|ss} + \frac{1}{2}h_{ms|ns} + \frac{1}{2}h_{ns|ms} - \frac{1}{2}h_{ss|mn} +$$
$$+ \frac{1}{2}h_{mn|00} - \frac{1}{2}h_{m0|n0} - \frac{1}{2}h_{n0|m0} + \frac{1}{2}h_{00|mn} + L'_{mn}. \qquad (А.2.2в)$$

Здесь $L'_{\mu\nu}$ — нелинейные выражения. Образуем теперь

$$-2\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\right) = 0. \qquad (А.2.3)$$

Подставляя функции h вместо γ, мы видим, что (A.2.3), записанные подробно, совпадают с формулами (2.10) — (2.18), где

$$\Lambda'_{\mu\nu}=L'_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}. \tag{A.2.4}$$

A.4

При вычислении поверхностных интегралов необходимо учитывать только те выражения, которые ведут себя на бесконечности как r^{-2}, потому что лишь такие выражения дадут конечный вклад. Поскольку все функции поля конечны (за исключением сингулярностей) и поскольку этот вклад не зависит от формы поверхности, постольку мы можем игнорировать все другие выражения. Но нам придется фиксировать форму поверхности ввиду того, что в наших вычислениях сложное выражение, поверхностный интеграл от которого не зависит от формы поверхности, разделяется на части с отличной от нуля дивергенцией. Поэтому в наших вычислениях поверхность всегда будет выбираться в виде двумерной «сферы» с радиусом, стремящимся к нулю. Предположим для простоты, что пространственные координаты сингулярности есть (0, 0, 0). Сначала мы дадим несколько примеров поверхностных интегралов, взятых вокруг такой сингулярности.

Пример 1. Вычисляя

$$\int^{0}\psi_{,s}n_s\,dS, \qquad \text{где } \psi=r^{-1}, \qquad r^2=x^sx^s,$$

получаем

$$\int^{0}\psi_{,s}n_s\,dS=-\int^{0}\frac{x^sx^s}{r^4}\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=-4\pi.$$

Пример 2. Вычисляем

$$\int^{0}\psi_{,s}n_r\,dS=-\int^{0}\frac{x^sx^r}{r^4}\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=-\frac{4\pi}{3}\,\delta_{sr}.$$

Пример 3. Вычислим

$$\int^{0}\psi_{,mn}n_n\chi(r)\,dS.$$

Чтобы найти подобный поверхностный интеграл, выразим $\chi(r)$ в виде степенного ряда в окрестности сингулярности:

$$\chi=\chi(0)+\chi_{,s}(0)\,x_s+\ldots.$$

Вклад дает только второй член, т. е. мы должны вычислить

$$\chi_{,s}(0)\int\limits^{0}\psi_{,mn}n_n x^s dS = -\chi_{,s}(0)\int\limits^{0}\frac{x^m x^s}{r^4}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi +$$

$$+3\chi_{,s}(0)\int\limits^{0}\frac{x^m x^s}{r^4}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \frac{8\pi}{3}\chi_{,m}(0).$$

В ходе наших вычислений мы должны будем найти более сложные поверхностные интегралы; при этом будет полезна следующая таблица

Таблица поверхностных интегралов

$$\text{I.}\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}\psi_{,n}n_n\,dS = -1.$$

$$\text{II.}\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}\psi_{,s}n_n\,dS = -\frac{1}{3}\delta_{sn}.$$

$$\text{III.}\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}x^r\psi_{,ns}n_n\,dS = \frac{2}{3}\delta_{rs}.$$

$$\text{IV.}\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}x^r\psi_{,ms}n_n\,dS = -\frac{1}{15}\{2\delta_{rn}\delta_{ms}-3\delta_{rm}\delta_{ns}-3\delta_{rs}\delta_{mn}\}.$$

$$\text{V.}\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}x^r\psi_{,rs}n_n\,dS = \frac{2}{3}\delta_{ns}.$$

$$\text{VI.}\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}x^n\psi_{,ms}n_n\,dS = 0.$$

$$\text{VII.}\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}x^n x^s\psi_{,mrl}n_n\,dS = 0.$$

$$\text{VIII.}\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}x^m x^s\psi_{,nrl}n_n\,dS = \frac{2}{5}\delta_{ms}\delta_{lr}-\frac{3}{5}(\delta_{ml}\delta_{rs}+\delta_{mr}\delta_{ls}).$$

A.8

Линейные члены в выражении (8.26) дают следующий вклад в $2\underset{2l}{\Lambda}_{mn}$:

$$\sum_{s=1}^{p}\left\{\underset{2l-2}{\overset{s}{S}}{}_m\overset{s}{\psi}_{,n}+\underset{2l-2}{\overset{s}{S}}{}_n\overset{s}{\psi}_{,m}-\delta_{mn}\underset{2l-2}{\overset{s}{S}}{}_r\overset{s}{\psi}_{,r}\right\}_{,\underset{2}{00}}. \qquad \text{(A.8.1)}$$

Нелинейные члены могут быть найдены следующим путем. Исследуя члены в выражении (A.12.3) для $\underset{6}{\Lambda_{mn}}$, мы обнаруживаем произведения $\underset{4}{\gamma_{00}}$ и $\underset{2}{\gamma_{00}}$ или, как они называются там, 2φ. Поэтому, если мы в (A.12.3) подставим выражение (8.18) вместо γ_{00} и напишем для краткости

$$(S_r\psi) = \sum_s^4 \underset{2l-2}{\overset{s}{S_r}}\,\overset{s}{\psi}, \tag{A.8.2}$$

то получим пять новых членов. Таким образом, используя обозначение (A.8.2), мы будем иметь в *каждом* приближении следующие дополнительные члены:

$$\left.\begin{aligned} &\{(S_m\psi)_{,n} + (S_n\psi)_{,m} - \delta_{mn}(S_r\psi)_{,r}\}_{,00} + \varphi\,(S_r\psi)_{,rmn} + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\varphi_{,n}(S_r\psi)_{,rm} + \frac{1}{2}\varphi_{,m}(S_r\psi)_{,rn} - \\ &\qquad\qquad - \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}(S_r\psi)_{,rs} + \varphi_{,mn}(S_r\psi)_{,r}. \end{aligned}\right\} \tag{A.8.3}$$

В поверхностный интеграл дают вклад только три линейных члена. Труднее увидеть, что нелинейные члены не дают вклада, так как это требует некоторого умения обращаться с поверхностными интегралами, которые приведены в A.4. Нелинейные члены в (A.8.3) мы можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\{\varphi_{,mn}(S_r\psi)\}_{,r} - \{\varphi_{,mr}(S_n\psi)\}_{,r} + \varphi_{,mn}(S_n\psi)_{,r} + \frac{1}{2}\{\varphi_{,n}(S_r\psi)_{,m}\}_{,r} - \\ &\qquad - \frac{1}{2}\{\varphi_{,r}(S_n\psi)_{,m}\}_{,r} + \frac{3}{2}\varphi_{,r}(S_n\psi)_{,mr} - \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,r}(S_s\psi)_{,sr}. \end{aligned} \tag{A.8.4}$$

Это — нелинейное выражение и их дивергенция обращается в нуль благодаря тому, что φ является гармонической функцией. Слагаемые, записанные парами в выражении (A.8.4), не дают вклада в поверхностные интегралы в силу нашей леммы в разделе 3. Таким образом, вклад могут вносить только члены

$$\frac{3}{2}\varphi_{,s}S_n\psi_{,ms} - \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}S_r\psi_{,rs}. \tag{A.8.5}$$

Здесь только «перекрестные произведения» могут давать вклад, и мы находим с помощью таблицы поверхностных интегралов в A.4, что в результате получается нуль.

А.10

В приближении $l = 2$ имеем

$$\left.\begin{aligned}
\underset{2}{\gamma_{00}} &= 2\varphi = 2f + 2g,\\
\underset{3}{\gamma_{0n}} &= -2f\dot{\eta}^n - 2g\dot{\zeta}^n = \underset{3}{h_{0n}},\\
\underset{2}{h_{00}} &= \varphi = f + g,\\
\underset{2}{h^{00}} &= -h_{00} = -\varphi,\\
\underset{3}{h^{0n}} &= \underset{3}{h_{0n}} = \underset{3}{\gamma_{0n}},\\
\underset{2}{h_{mn}} &= -\underset{2}{h^{mn}} = \delta_{mn}\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{A.10.1}$$

Непосредственное вычисление дает

$$\left.\begin{aligned}
2\underset{2}{\Lambda_{00}} &= 0,\\
2\underset{3}{\Lambda_{0m}} &= -\underset{2}{\gamma_{00}}{}_{,m\underset{1}{0}},\\
2\underset{4}{\Lambda_{mn}} &= -\underset{3}{\gamma_{0m}}{}_{,\underset{1}{0}n} - \underset{3}{\gamma_{0n}}{}_{,\underset{1}{0}m} + 2\delta_{mn}\varphi_{,\underset{2}{00}} -\\
&\quad - 2\varphi\varphi_{,mn} - \varphi_{,m}\varphi_{,n} + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\varphi_{,s}.
\end{aligned}\right\} \tag{A.10.2}$$

Вклады в поверхностные интегралы (для первой сингулярности) будут:

$$-\gamma_{0m,0n} \to 4\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m \cdot 4\pi,$$

$$-\gamma_{0n,0m} \to \frac{4}{3}\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m \cdot 4\pi,$$

$$2\delta_{mn}\varphi_{,00} \to -\frac{4}{3}\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m \cdot 4\pi,$$

$$-2\varphi\varphi_{,mn} \to \frac{8}{3}\overset{1}{m}\tilde{g}_{,m} \cdot 4\pi,$$

$$-\varphi_{,m}\varphi_{,n} \to -\frac{8}{3}\overset{1}{m}\tilde{g}_{,m} \cdot 4\pi,$$

$$\frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\varphi_{,s} \to 2\overset{1}{m}\tilde{g}_{,m} \cdot 4\pi,$$

$$\left(\overset{1}{m} = \underset{2}{\overset{1}{m}}\right).$$

A.12

Непосредственное вычисление $\underset{4}{\Lambda}, \underset{5}{\Lambda}, \underset{6}{\Lambda}$ дает

$$2\underset{4}{\Lambda}_{00} = -\frac{3}{2}\varphi_{,s}\varphi_{,s}, \tag{A.12.1}$$

$$2\underset{5}{\Lambda'}_{0m} = \varphi_{,s}\underset{3}{\gamma}_{0s,m} - \varphi_{,sm}\underset{3}{\gamma}_{0s} - 3\varphi_{,0}\varphi_{,m}, \tag{A.12.2}$$

$$\begin{aligned} 2\underset{6}{\Lambda}_{mn} = & -\underset{5}{\gamma}_{0m,0n} - \underset{5}{\gamma}_{0n,0m} + \delta_{mn}\underset{4}{\gamma}_{00,00} + \underset{4}{\gamma}_{mn,00} - \varphi\underset{4}{\gamma}_{00,mn} - \varphi\underset{4}{\gamma}_{ss,mn} - \\ & - \varphi_{,mn}\underset{4}{\gamma}_{00} - \varphi_{,mn}\underset{4}{\gamma}_{ss} + \varphi_{,ms}\underset{4}{\gamma}_{ns} + \varphi_{,ns}\underset{4}{\gamma}_{ms} - \delta_{mn}\varphi_{,sr}\underset{4}{\gamma}_{sr} - 2\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{mn,s} + \varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{ms,n} + \\ & + \varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{ns,m} - \frac{1}{2}\varphi_{,m}\underset{4}{\gamma}_{ss,n} - \frac{1}{2}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{ss,m} - \frac{1}{2}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{00,m} - \frac{1}{2}\varphi_{,m}\underset{4}{\gamma}_{00,n} + \\ & + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{rr,s} + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{00,s} - \underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0n,ms} - \underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0m,ns} + 2\underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0s,mn} + \\ & + \frac{1}{2}\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}\underset{3}{\gamma}_{0r,s} - \frac{3}{2}\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}\underset{3}{\gamma}_{0s,r} + \underset{3}{\gamma}_{0s,m}\underset{3}{\gamma}_{0s,n} + \underset{3}{\gamma}_{0m,s}\underset{3}{\gamma}_{0n,s} - \varphi_{,0n}\underset{3}{\gamma}_{0m} - \\ & - \varphi_{,0m}\underset{3}{\gamma}_{0n} + 2\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s}\varphi_{,0s} - \varphi_{,0}\underset{3}{\gamma}_{0m,n} - \varphi_{,0}\underset{3}{\gamma}_{0n,m} - \varphi_{,n}\underset{3}{\gamma}_{0m,0} - \varphi_{,m}\underset{3}{\gamma}_{0n,0} + \\ & + 2\varphi\underset{3}{\gamma}_{0m,0n} + 2\varphi\underset{3}{\gamma}_{0n,0m} - 2\delta_{mn}\varphi\varphi_{,00} + 2\varphi\varphi\varphi_{,mn} - \varphi\varphi_{,m}\varphi_{,n} + \\ & + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi\varphi_{,s}\varphi_{,s} + \frac{1}{2}\delta_{mn}\varphi_{,0}\varphi_{,0}. \end{aligned} \tag{A.12.3}$$

Поверхностный интеграл (12.4а) для $s = 1$, с учетом равенств (12.2) и (12.1б), принимает вид

$$\frac{1}{4\pi}\int\left(\varphi_{,r}\underset{3}{\gamma}_{0r,m} - \varphi_{,rm}\underset{3}{\gamma}_{0n} - \frac{3}{2}\varphi_{,0}\varphi_{,m} + \frac{3}{2}\varphi\varphi_{,0m} + 4\left(\underset{4}{\overset{1}{m}}\psi\right)_{,0m}\right)n_m dS = 0.$$

Вклады этих пяти выражений соответственно будут:

$$(1) \to -\frac{4\overset{1}{m}}{3}\tilde{g}_{,s}\dot{\zeta}^s - 4\overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\eta}^s,$$

$$(2) \to -\frac{8\overset{1}{m}}{3}\tilde{g}_{,s}\dot{\zeta}^s,$$

$$(3) \to 3\overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\zeta}^s + \overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\eta}^s,$$

$$(4) \to 2\overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\eta}^s,$$

$$(5) \to -4\underset{4}{\dot{\overset{1}{m}}}.$$

Поэтому

$$-4\underset{4}{\overset{1}{\dot{m}}} = \overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\zeta}^s + \overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\eta}^s = 2\overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\eta}^s - \overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\eta}^s + \overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\zeta}^s = -\overset{1}{m}\,(2\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s + \tilde{g})_{,0}.$$

Из последнего соотношения немедленно следует равенство (12.5).

Последним шагом будет вычисление поверхностных интегралов, связанных с $\underset{6}{\Lambda}$. Здесь искусное использование леммы может избавить нас от вычисления многих поверхностных интегралов. В самом деле, $2\underset{6}{\Lambda}_{mn}$ может быть записано в следующем виде:

$$2\underset{6}{\Lambda}_{mn} = (\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{sm} - \varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{nm})_{,s} + (\varphi\underset{4}{\gamma}_{ms,n} - \varphi\underset{4}{\gamma}_{mn,s})_{,s} +$$

$$+ (\delta_{ms}\varphi_{,r}\underset{4}{\gamma}_{rn} - \delta_{mn}\varphi_{,r}\underset{4}{\gamma}_{rs})_{,s} + (\delta_{mn}\varphi_{,s}\gamma_{rr} - \delta_{ms}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{rr})_{,s} +$$

$$+ \frac{1}{2}(\delta_{mn}\varphi\underset{4}{\gamma}_{rr,s} - \delta_{ms}\varphi\underset{4}{\gamma}_{rr,n})_{,s} + (\delta_{mn}\underset{5}{\gamma}_{0s,0} - \delta_{ms}\underset{5}{\gamma}_{0n,0})_{,s} +$$

$$+ \frac{1}{2}(\underset{3}{\gamma}_{0s,m}\underset{3}{\gamma}_{0n} - \underset{3}{\gamma}_{0n,m}\underset{3}{\gamma}_{0s})_{,s} + (\delta_{mn}\varphi_{,0}\underset{3}{\gamma}_{0s} - \delta_{ms}\varphi_{,0}\underset{3}{\gamma}_{0n})_{,s} +$$

$$+ (\underset{3}{\gamma}_{0n}\underset{3}{\gamma}_{0m,s} - \underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0m,n})_{,s} + \frac{1}{2}(\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}\underset{3}{\gamma}_{0r} - \delta_{ms}\underset{3}{\gamma}_{0n,r}\underset{3}{\gamma}_{0r})_{,s} +$$

$$+ (\delta_{ms}\underset{3}{\gamma}_{0r,n}\underset{3}{\gamma}_{0r} - \delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0r,s}\underset{3}{\gamma}_{0r})_{,s} -$$

$$- \underset{5}{\gamma}_{0m,0n} + \underset{4}{\gamma}_{mn,00} + \underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0s,mn} - \qquad [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3]$$

$$- \frac{1}{2}\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}\underset{3}{\gamma}_{0s,r} - (\varphi_{,n}\underset{3}{\gamma}_{0m})_{,0} - \qquad [\alpha_4 + \alpha_5]$$

$$- (\varphi_{,m}\underset{3}{\gamma}_{0n})_{,0} + (\varphi\underset{3}{\gamma}_{0m,n})_{,0} + (\varphi\underset{3}{\gamma}_{0n,m})_{,0} - \qquad [\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8]$$

$$- \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,0}\varphi_{,0} - \frac{1}{2}\varphi\underset{4}{\gamma}_{ss,mn} + \qquad [\alpha_9 + \alpha_{10}]$$

$$+ \frac{1}{2}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{ss,m} + \frac{1}{2}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{00,m} + \qquad [\alpha_{11} + \alpha_{12}]$$

$$+ \frac{1}{2}\varphi_{,m}\underset{4}{\gamma}_{00,n} - \frac{1}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{00,s} - \qquad [\alpha_{13} + \alpha_{14}]$$

$$- \varphi\varphi_{,00}\delta_{mn} - 2\varphi\varphi_{,m}\varphi_{,n} + \qquad [\alpha_{15} + \alpha_{16}]$$

$$+ \frac{11}{4}\varphi\varphi_{,s}\varphi_{,s}\delta_{mn}. \qquad [\alpha_{17}]$$

Таблица

Поверхностные интегралы для вычисления $\int \overset{1}{\underset{6}{\Lambda}}_{ms} n_s \, dS$

№	Выражение	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	α_{16}	α_{17}	Результат	Примечания
1	$\overset{1}{m}g_{,s}\dot\eta^s\dot\eta^m$	$-\frac{16}{3}$				$-\frac{4}{3}$		$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{15}$		$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$				$\frac{4}{5}$			-8	$\tilde g_{,s}=-2\overset{2}{m}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta^s}$
2	$\overset{1}{m}\tilde g\ddot\eta^m$	-2						-4	$-\frac{4}{3}$			$-\frac{29}{3}$	3	$\frac{11}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{32}{3}$	$-\frac{22}{3}$	-8	$\tilde g=-\frac{2\overset{2}{m}}{r}$; $\ddot\eta^m=-\frac{1}{2}\tilde g_{,m}$
3	$\overset{1}{m}\tilde g_{,m}\dot\eta^s\dot\eta^s$	1					$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{5}$			$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{15}$			2	$\tilde g_{,m}=-2\overset{1}{m}\ddot\eta^m$
4	$\overset{1}{m}\tilde g_{,m}\dot\zeta^s\dot\zeta^s$											2	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$				3	
5	$\overset{1}{m}\tilde g_{,m}\tilde f$	$\frac{4}{3}$				-2	$\frac{2}{3}$					$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$				5	$\tilde g_{,m}\tilde f=-\tilde g\tilde f_{,m}$; $\tilde f=-\frac{2\overset{1}{m}}{r}$
6	$\overset{1}{m}\overset{2}{m}\tilde r_{,00m}$											-2							-2	$\overset{2}{\tilde r}_{,00m}=(\overset{2}{r}_{,00m})$ для $x^s=\eta^s$*
7	$\overset{1}{m}\tilde g_{,s}\dot\zeta^m\dot\eta^s$	$\frac{16}{5}$				$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$											8	
8	$\overset{1}{m}\tilde g_{,s}\dot\zeta^s\dot\eta^m$	$\frac{16}{5}$					$-\frac{8}{15}$	4	$\frac{4}{3}$	-2									6	
9	$\overset{1}{m}\tilde g_{,m}\dot\eta^s\dot\zeta^s$	$-\frac{32}{15}$		$-\frac{16}{3}$	$-\frac{8}{3}$		$\frac{4}{5}$		$\frac{4}{3}$										-8	
10	$\overset{1}{m}\tilde g_{,s}\dot\zeta^s\dot\zeta^m$	$-\frac{8}{3}$				-4	$-\frac{4}{3}$												-8	

* $\tilde r_{,00m}=\frac{\partial^3 r}{\partial\eta^s\partial\eta^r\partial\eta^m}\dot\zeta^s\dot\zeta^r$, так как $\frac{\partial^2 r}{\partial\eta^s\partial\eta^m}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta^s}=0.$

Теперь благодаря лемме нам остается найти поверхностные интегралы только от 17 выражений, обозначенных соответственно через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_{17}$. Результат этих вычислений суммирован в таблице. В конечном счете оказалось только десять типов выражений (или эквивалентных им). В таблице даны вклады каждого из выражений α в окончательный результат. Единственным α, которое не дает вклада, оказалось $\alpha_2 = \underset{6}{\gamma}_{mn,00}$.

А.13

Отказ от координатных условий приводит к следующим дополнительным выражениям в $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$:

$$2(\delta_{mn}a_{0,r0} - \delta_{mr}a_{0,n0})_{,r} + (\varphi_{,m}a_{n,r} - \varphi_{,m}a_{r,n})_{,r} + (\varphi_{,n}a_{m,r} - \varphi_{,r}a_{m,n})_{,r} +$$
$$+ (\varphi_{,n}a_{s,m} - \varphi_{,s}a_{n,m})_{,s} - 2(\delta_{mn}\varphi_{,s}a_{s,r} - \delta_{mr}\varphi_{,s}a_{s,n})_{,r} + 2(\delta_{mn}\varphi_{,s}a_{r,r} - \delta_{ms}\varphi_{,n}a_{r,r})_{,s}.$$

Они выписаны в таком порядке, что обращение в нуль каждой строки в силу леммы, очевидно.

Поступила 12 февраля 1949 г.

ВРЕМЯ, ПРОСТРАНСТВО И ТЯГОТЕНИЕ*

В физике есть несколько типов теорий. Большинство из них являются конструктивными, т. е. их задачей является построение картины сложных явлений на основе некоторых относительно простых предположений. Кинетическая теория газов, например, ставит перед собой цель свести к молекулярным движениям механические, тепловые и кинетические свойства газов. Когда мы говорим, что понимаем какой-либо круг явлений природы, это означает, что мы построили конструктивную теорию, охватывающую этот круг явлений.

Фундаментальные теории. Однако, помимо этой многочисленной группы теорий существуют другие теории, которые я называю фундаментальными. В них используется не синтетический, а аналитический метод. Их исходным пунктом и основой являются не гипотетические предположения, а извлеченные из опыта общие свойства явлений, принципы, из которых выводятся математические формулы, имеющие всеобщую приложимость. Термодинамика, например, исходит из того факта, что вечный двигатель никогда не встречается в повседневном опыте, и пытается вывести отсюда некоторым аналитическим рассмотрением теорию, которая применима во всех случаях. К достоинствам конструктивных теорий относятся их простота, гибкость и ясность; достоинством фундаментальных теорий является их логическое совершенство, надежность исходных положений.

Теория относительности является фундаментальной теорией. Чтобы понять ее, нужно понять принцип, на котором она основана. Но прежде

* *Times, Space and Gravitation.* (Опубликована впервые в сб. «Out of my later Years», N. Y., 1950, в котором она датирована 1948-м годом. Однако эта статья очень близка по тексту к статье 56 (том 1), опубликованной в 1919 году. Французский перевод опубликован в сб. «Conceptions scientifiques, morales et sociales», Paris, 1952. — *Ред.*)

чем излагать его, надо указать, что теория относительности подобна древней династии с двумя родословными; она слагается из специальной теории относительности и общей теории относительности.

С античных времен известно, что при описании движения тела мы должны относить его к другому телу. Движение железнодорожного поезда описывается по отношению к полотну дороги, движение планет — по отношению ко всей совокупности видимых неподвижных звезд. В физике тела̀, к которым относят движения, называются системами координат. Законы механики Галилея и Ньютона можно сформулировать, только используя некоторую систему координат.

Состояние движения системы координат нельзя выбрать произвольно, если предположить, что законы механики выполняются (система не должна вращаться и ускоряться). Системы координат, используемые в механике, называются инерциальными. Состояние движения инерциальной системы, по крайней мере поскольку это касается механики, не задается природой единственным образом. Достаточно, чтобы выполнялось условие, сформулированное в следующем утверждении: система координат, движущаяся в том же направлении и с той же скоростью, что и инерциальная система, сама является инерциальной. Поэтому специальная теория относительности представляет собой приложение ко всем процессам природы следующего положения:

«Каждый закон природы, который выполняется по отношению к некоторой системе координат K, должен также выполняться в любой другой системе K', при условии, что K и K' движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно.

Другой принцип, на котором основана специальная теория относительности, — это принцип постоянства скорости света в пустоте. Свет в пустоте распространяется с определенной постоянной скоростью, не зависящей от скорости источника. Свое убеждение в справедливости этого принципа физики почерпнули из электродинамики Максвелла — Лоренца.

Хотя оба упомянутые мной принципа хорошо подтверждены экспериментом, они не кажутся логически совместимыми. Специальная теория относительности сумела их примирить ценой видоизменения кинематики или, иначе говоря, ценой изменения физических представлений о пространстве и времени. Стало очевидным, что утверждение о совпадении двух событий может иметь смысл только в связи с определенной системой координат и что масса тел, а также ход часов должны зависеть от их состояния движения по отношению к системе координат.

Старая физика. Но старая физика, в том числе законы движения Галилея и Ньютона, противоречила релятивистской кинематике. Последняя приводила к некоторым обобщенным математическим условиям, с которыми должны были согласоваться законы природы, если потребовать совместности двух фундаментальных принципов. Физику необходимо было видоизменить. Самым заметным изменением было введение нового закона движения для (очень быстро) движущихся материальных точек, который вскоре удалось проверить для случая электрически заряженных частиц. Наиболее важный результат специальной теории относительности касался инертной массы материальной системы. Стало очевидным, что инертная масса системы должна зависеть от содержащейся в ней энергии, и мы пришли таким образом к убеждению, что инертная масса является не чем иным, как скрытой энергией. Принцип сохранения массы потерял свою независимость и оказался составной частью закона сохранения энергии.

Специальная теория относительности, которая была простым обобщением электродинамики Максвелла — Лоренца, имела последствия, выходящие далеко за ее рамки. Должна ли зависимость физических законов от выбора системы координат ограничиваться только системами координат, движущимися друг относительно друга прямолинейно и равномерно? Какое отношение имеет природа к вводимым нами системам координат и их движению? Хотя для нашего описания природы может оказаться необходимым использование систем координат, выбранных нами произвольно, выбор систем не должен быть ничем ограничен в той мере, в какой это касается их движения (общая теория относительности). Выводы общей теории относительности оказались в противоречии с хорошо известным экспериментом, согласно которому вес и инерция тела зависят от одних и тех же констант (тождество инертной и тяготеющей масс). Рассмотрим случай системы координат, которая предполагается равномерно вращающейся по отношению к инерциальной (в ньютоновском смысле) системе. Силы, являющиеся центробежными относительно этой системы, должны быть, по Ньютону, приписаны инерции. Но эти центробежные силы, подобно гравитационным, пропорциональны массе тел. Нельзя ли в таком случае рассматривать нашу систему координат как покоящуюся и центробежные силы как гравитационные? Такая интерпретация кажется почти очевидной; однако классическая механика ее запрещает.

Эти беглые замечания указывают, каким образом законы тяготения должны войти в общую теорию относительности; действительное развитие этих представлений оправдало все надежды. Путь, однако, оказался труднее, чем ожидалось сначала, поскольку пришлось вступить в противоречие с эвклидовой геометрией. Другими словами, законы расположения материальных тел в пространстве не совпадают в точности с законами пространства, предписываемыми эвклидовой геометрией твердых тел. Именно это имеется в виду, когда говорят об «искривлении пространства». Фундаментальные понятия «прямой», «плоский» и т. д. потеряли свой точный смысл в физике.

В общей теории относительности представления о пространстве и времени, а также кинематика уже не являются более абсолютными основами общей физики. Геометрическое состояние тел и ход часов зависят прежде всего от гравитационных полей, которые в свою очередь определяются рассматриваемыми материальными системами.

Таким образом, новая теория гравитации существенно отличается в своих основных положениях от ньютоновской. Но практически они совпадают столь близко, что трудно было найти хотя бы несколько случаев, в которых различие между теориями поддавалось бы наблюдению. До сих пор были отмечены только следующие явления:

1. Искажение эллиптических орбит планет солнечной системы (подтверждено для Меркурия).

2. Отклонение световых лучей в гравитационном поле (было подтверждено английской астрономической экспедицией во время полного солнечного затмения 1919 г.).

3. Красное смещение спектральных линий для света, приходящего от звезд, обладающих большой массой (еще не подтверждено опытом)[1].

Привлекательной стороной этой теории является ее логическая завершенность. Если какой-либо ее вывод окажется неверным, то от теории нужно будет отказаться. Частичное видоизменение, не нарушающее целого, представляется невозможным.

Не следует думать, что великое творение Ньютона можно ниспровергнуть в сколько-нибудь реальном смысле слова этой или иной теорией. Его ясные и всеобъемлющие идеи навсегда сохранят свое значение, как основа, на которой построено здание современной физики.

---

[1] Теперь это подтверждено наблюдениями. См. примечание автора к английскому изданию статьи 56.—*Прим. ред.*

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ *

Редакция *Scientific American* попросила меня написать о моей недавно опубликованной работе. Эта работа представляет собой математическое исследование, касающееся основ полевой физики.

Некоторые читатели, быть может, удивятся: разве мы не узнали еще в школе все об основах физики? Ответ будет «да» или «нет» в зависимости от подхода. Мы познакомились с понятиями и общими соотношениями, которые позволили нам понять огромный круг опытных фактов и допускают их математическую трактовку. В каком-то смысле эти понятия и соотношения являются, по-видимому, окончательными. Это справедливо, например, для законов преломления света, соотношений классической термодинамики в той мере, в какой они основаны на понятиях давления, объема, теплоты и работы и для гипотезы о несуществовании вечного двигателя.

Что же, в таком случае, побуждает нас изобретать теорию за теорией? Почему мы вообще изобретаем теории? Ответ на последний вопрос прост: потому что мы наслаждаемся «постижением», т. е. сведе́нием явлений с помощью логических процессов к чему-то уже известному или (по-видимому) очевидному. Новые теории необходимы прежде всего тогда, когда мы сталкиваемся с новыми фактами, которые нельзя объяснить в рамках существующих теорий. Но эта побуждающая причина для создания новых теорий является в каком-то смысле тривиальной, привносимой извне. Существует иная, более тонкая причина, играющая не меньшую роль, а именно,— стремление к единству и простоте предпосылок теории как

* *On the Generalized Theory of Gravitation*. Sci. Amer., 1950, 182, 13—17. (Статья имеет подзаголовок: «Рассказ о недавно опубликованном обобщении общей теории относительности с историческими и философскими замечаниями». Французский перевод опубликован в сб. Conceptions scientifiques, morales et sociales, Paris, 1952.—*Ред.*)

целого (т. е. принцип экономии Маха, интерпретируемый как логический принцип).

Существует страсть к постижению, как существует страсть к музыке. Она довольно обычна в детях, но взрослые большей частью ее утрачивают. Без этой страсти не было бы ни математики, ни естественных наук. Время и опять-таки страсть к пониманию создали иллюзию, что человек способен постичь объективный мир умозрительно, чистым мышлением, без всякой эмпирической основы, короче, метафизически. Мне кажется, что каждый истинный теоретик является чем-то вроде половинчатого метафизика, независимо от того, насколько чистым «позитивистом» он себя воображает. Метафизик верит, что логически простое — синоним реального. Половинчатый метафизик верит, что не все логически простое воплощено в ощущаемую реальность, но что совокупность всех чувственных восприятий можно «постичь» на основе системы понятий, построенной из предпосылок максимальной простоты. Скептик скажет, что это — «вера в чудеса». Пусть так, но развитие науки поразительным образом поддержало эту веру в чудеса.

Хороший тому пример — возникновение атомизма. Как мог Левкипп прийти к этой смелой идее? Когда вода замерзает, то превращается в лед, казалось бы, совершенно непохожий на воду, почему же при таянии льда образуется нечто, кажущееся неотличимым от той воды, которая была сначала. Левкипп озадачен и ищет «объяснения». Он приходит к заключению, что в этих превращениях «сущность» предмета не меняется вообще. Быть может, предмет состоит из неизменных частиц и все изменение сводится только к изменению их расположения в пространстве? И разве не может эта идея оказаться справедливой для всех материальных объектов, которые возникают снова и снова с почти тождественными свойствами?

Эта идея не была полностью утрачена за время долгой спячки западной цивилизации. Через две тысячи лет после Левкиппа Бернулли размышляет, почему газ оказывает давление на стенки сосуда. Следует ли объяснять это взаимным отталкиванием частей газа в смысле механики Ньютона? Эта идея представляется абсурдной, ибо давление газа при прочих равных условиях зависит от температуры. Предположение о зависимости ньютоновских сил взаимодействия от температуры противоречит духу механики Ньютона. Зная атомистическую концепцию, Бернулли обязан был заключить, что атомы (или молекулы) сталкиваются со стенками сосуда и таким образом создают давление. В конце концов, предположение о том, что атомы движутся, неизбежно, ибо как еще можно объяснить переменную температуру газов?

Простые механические соображения показывают, что это давление зависит только от кинетической энергии частиц и их плотности в пространстве. Отсюда физики того времени пришли к выводу, что теплота заключается в беспорядочном движении атомов. Если бы они приняли этот вывод настолько серьезно, насколько он этого заслуживает, то развитие теории тепла и, в частности, открытие эквивалентности тепловой и механической энергии значительно облегчилось бы.

Приведенный пример иллюстрирует два обстоятельства. Теоретические идеи (в данном случае атомизм) не возникают отдельно от опыта и независимо от него; их также нельзя вывести из опыта чисто логическим путем. Их возникновение есть творческий акт. Коль скоро теоретическая идея возникла, ее следует строго придерживаться до тех пор, пока она не приведет к противоречию.

* * *

Что касается моей последней теоретической работы, то мне кажется неоправданным рассказывать о ней широкому кругу читателей, интересующихся наукой. Так следует поступать лишь по отношению к теориям, которые получили должное подтверждение на опыте. Пока в пользу обсуждаемой здесь теории говорит лишь простота ее предпосылок и ее тесная связь с тем, что уже известно (именно, с законами чисто гравитационного поля). Однако для широкого круга читателей может представлять интерес знакомство с той последовательностью идей, которая привела к построениям столь явно спекулятивного характера. Кроме того, я расскажу о встречающихся трудностях и о том, в каком смысле их удается преодолеть.

В ньютоновской физике элементарным теоретическим понятием, на котором основано описание материальных тел, является понятие материальной точки или частицы. Таким образом, вещество априори считается дискретным. Отсюда возникает необходимость рассматривать взаимодействие между материальными точками как «действие на расстоянии». Поскольку такое представление кажется несогласующимся с повседневной практикой, то нет ничего удивительного в том, что современники Ньютона — и, конечно, сам Ньютон — находили его трудным для восприятия. Однако благодаря почти фантастическому успеху системы Ньютона последующие поколения физиков постепенно привыкли к идее действия на расстоянии. Все сомнения были надолго похоронены.

Но когда во второй половине XIX в. стали известны законы электродинамики, то оказалось, что они не укладываются сколько-нибудь удовлетворительно в ньютоновскую схему. Интересно пофантазировать: сумел бы Фарадей открыть закон электромагнитной индукции, если б он получил обычное образование в колледже? Не обремененный традиционными путями мышления, он чувствовал, что введение «поля» как независимого элемента реальности помогает ему связать воедино экспериментальные факты. Уделом Максвелла было окончательное осознание роли, которую играет понятие поля; ему принадлежит фундаментальное открытие, что законы электродинамики находят свое естественное выражение в дифференциальных уравнениях для электрического и магнитного полей.

Из этих уравнений следовало существование волн, свойства которых отвечали свойствам света, в той мере, в какой последние были известны в то время.

Слияние оптики с теорией электромагнетизма явилось одним из величайших триумфов в стремлении к единству в основах физики; Максвелл пришел к этому единству чисто теоретическим путем, задолго до того, как оно было подтверждено экспериментами Герца. Новый взгляд позволил отказаться от гипотезы действия на расстоянии по крайней мере в мире электромагнитных явлений; поле теперь выступает как единственный носитель электромагнитного взаимодействия между телами и поведение поля полностью определяется процессами в соседних точках, описываемыми с помощью дифференциальных уравнений.

Но тогда возникает вопрос: поскольку поле существует даже в вакууме, следует ли представлять себе поле как состояние некоего «носителя» или нужно наделять его независимым существованием, не сводимым ни к чему иному? Иными словами, существует ли «эфир» в качестве носителя поля, эфир, о котором, например, надо говорить, что он колеблется, когда он передает световые волны?

Существует естественный ответ на этот вопрос: так как отказаться от понятия поля нельзя, то предпочтительно не вводить дополнительно носитель с гипотетическими свойствами. Однако пионеры, впервые понявшие неизбежность понятия поля, были слишком отягощены механической традицией мышления, чтобы, не колеблясь, принять эту простую точку зрения. Но в последующие десятилетия этот взгляд постепенно одерживал верх.

Введение поля в качестве элементарного понятия приводит к непоследовательности теории как целого. Теория Максвелла, хотя и правильно описывает поведение электрически заряженных частиц, не объясняет поведение плотности электрического заряда, т. е. она не дает теории самих частиц. Таким образом, они должны рассматриваться на основе старой теории как материальные точки. Комбинация идеи непрерывного поля с представлением о материальных точках, расположенных дискретно в пространстве, оказывается противоречивой. Последовательная полевая теория требует непрерывности всех элементов теории, и не только во времени, но также и в пространстве, причем во всех его точках. Следовательно, материальной точке как фундаментальному понятию нет места в полевой теории. Таким образом, даже если отвлечься от оставленного в стороне тяготения, электродинамику Максвелла нельзя считать полной теорией.

Уравнения Максвелла для пустого пространства остаются неизменными, если пространственные координаты и время подвергать линейным преобразованиям особого рода — преобразованиям Лоренца («ковариантность» по отношению к преобразованиям Лоренца). Ковариантность также сохраняется и для преобразования, составленного из двух или больше подобных преобразований; это называется «групповым» свойством преобразований Лоренца.

Максвелловы уравнения приводят к «группе Лоренца», но из группы Лоренца еще не следуют уравнения Максвелла. Действительно, группу Лоренца можно определить независимо, как группу линейных преобразований, оставляющих одно значение скорости — скорость света — неизменным. Эти преобразования отвечают переходам из одной «инерциальной системы» в другую, движущуюся относительно первой равномерно и прямолинейно. Наиболее важным свойством этой группы преобразований является то, что она снимает абсолютный характер понятия одновременности для пространственно удаленных событий. По этой причине следует ожидать, что все уравнения физики ковариантны относительно преобразований Лоренца (специальная теория относительности). Таким образом, уравнения Максвелла приводят к эвристическому принципу, пригодному далеко за рамками применимости самих уравнений электромагнитного поля.

Следующее положение является общим для специальной теории относительности и механики Ньютона: законы обеих теорий предполагаются справедливыми лишь в определенных системах координат, а именно, в так называемых «инерциальных системах». Инерциальная система — это система, в которой «свободные от действия сил» материальные частицы не ускоряются по отношению к системе координат. Однако это определение бессодержательно, если нет независимого способа узнать об отсутствии сил. Но такого способа не существует, если тяготение рассматривать как поле.

Пусть A — система отсчета, движущаяся равномерно ускоренно относительно инерциальной системы I. Материальные точки, движущиеся неускоренно относительно I, будут двигаться с ускорением по отношению к A, причем ускорения во всех точках одинаковы по величине и направлению. Материальные точки ведут себя так, как если бы существовало гравитационное поле в системе A, ибо характерным свойством гравитационного поля является независимость ускорения от конкретного вида тел. Нет причин для отказа от возможности интерпретировать такое поведение как результат воздействия «истинного» гравитационного поля (принцип эквивалентности). Эта интерпретация означает, что A представляет собой «инерциальную систему», хотя она и движется ускоренно по отношению к другой инерциальной системе. (Для приведенных соображений существенно, что введение независимого гравитационного поля считается оправданным, несмотря на то, что не определено, какие массы порождают это поле. Поэтому Ньютону такие соображения не показались бы убедительными.) Таким образом, понятия инерциальной системы, закона движения оказываются лишенными конкретного содержания — не только в классической механике, но и в специальной теории относительности. Более того, если следовать этому пути, то оказывается, что время по отношению к системе A нельзя измерить тождественными часами; в действительности, вообще говоря, теряют непосредственный физический смысл даже разности координат. Учитывая все эти трудности, не следует ли в конце концов попробовать сохранить понятие инерциальной системы, оставив все попытки объяснить фундаментальную черту гравитационных явлений, которая проявляет себя в системе Ньютона как эквивалентность инертной и тяготеющей масс? Тот, кто верит в постижимость природы, должен дать ответ — нет.

* * *

Суть принципа эквивалентности заключается в том, что для объяснения равенства инертной и тяготеющей масс в теории необходимо допустить нелинейные преобразования четырех координат. Таким образом, группу преобразований Лоренца и, следовательно, набор «допустимых» систем координат необходимо расширить.

Какая группа преобразований координат может заменить группу Лоренца? Математика предлагает ответ, основанный на фундаментальных исследованиях Гаусса и Римана: надлежащей заменой является группа всех непрерывных (аналитических) преобразований координат. При таких преобразованиях остается неизменным лишь то, что соседние точки имеют примерно одинаковые координаты и что система координат выражается в топологическом упорядочении точек в пространстве (с учетом его четырехмерного характера). Уравнения, выражающие законы природы, должны быть ковариантны по отношению ко всем непрерывным преобразованиям координат. Таков общий принцип относительности.

Описанная процедура устраняет несовершенство в основах механики, которое заметил уже Ньютон и критиковал Лейбниц, а двумя столетиями позже — Мах. Инерция противодействует ускорению, но ускорению относительно чего? В рамках классической механики на этот вопрос можно дать только один ответ: инерция противодействует ускорению относительно пространства. Таково физическое свойство пространства — пространство действует на объекты, но объекты не воздействуют на пространство.

В этом, по-видимому, заключен более глубокий смысл утверждения Ньютона: spatium est absolutum (пространство абсолютно). Но многих, и в частности Лейбница, тревожила мысль, что пространству нельзя приписывать независимого существования, и следует рассматривать его лишь как свойство «вещей» (совокупности физических объектов). Если бы оправданные сомнения Лейбница восторжествовали в то время, вряд ли это было бы выигрышем для физики, поскольку эмпирические и теоретические основы, необходимые, чтобы следовать его идее, в XVII в. еще не существовали.

Согласно общей теории относительности, не существует понятия пространства, лишенного какого бы то ни было физического содержания. Физическая реальность пространства представляется полем, компоненты которого есть непрерывные функции четырех независимых переменных — пространственных координат и времени. Именно этот особый вид зависимости отражает пространственный характер физической реальности.

Поскольку общая теория относительности подразумевает описание физической реальности непрерывным полем, ни понятие частиц, или материальных точек, ни понятие движения не могут иметь фундаментального значения. Частица может выступать лишь как ограниченная область пространства, в которой напряженность поля или плотность энергии особенно велики.

Релятивистская теория должна дать ответ на два вопроса: во-первых, какова математическая природа поля и, во-вторых, каким уравнениям должно удовлетворять это поле.

Что касается первого вопроса, то с математической точки зрения поле существенно характеризуется способом преобразования его компонент при выполнении преобразования координат. Что касается второго вопроса, то уравнения должны определять поле в достаточной мере, удовлетворяя при этом общему принципу относительности. Можно ли удовлетворить этому требованию, зависит от выбора типа поля.

Попытка понять связь между данными опыта на основе столь абстрактной программы может на первый взгляд показаться почти безнадежной. В действительности вся процедура сводится к вопросу: каков максимально простой объект (поле) и какими максимально простыми свойствами его нужно наделить, чтобы при этом сохранить общий принцип относительности? С точки зрения формальной логики двойственный характер этого вопроса кажется противоестественным, не говоря уж о туманности понятия «простой». Более того, с физической точки зрения нет никакой гарантии того, что «логически простая» теория окажется также «истинной».

Но каждая теория является спекулятивной. Когда основные понятия теории сравнительно «близки к опыту» (например, понятия силы, давления, массы), ее спекулятивный характер не так легко распознать. Однако если теория такова, что необходим сравнительно сложный логический процесс для извлечения из ее предпосылок тех выводов, которые можно сопоставить с наблюдениями, то каждый ощущает ее спекулятивную природу. В таких случаях у людей, неискушенных в гносеологическом анализе и не знающих о ненадежности теоретических идей в знакомых им областях, возникает почти непреодолимое чувство неприязни к теории.

С другой стороны, следует согласиться, что «близость» основных понятий и фундаментальных гипотез теории к опыту является важным ее преимуществом и большее доверие к такой теории, конечно, оправдано. Здесь меньше опасности уйти совсем в сторону, в частности потому, что требуется гораздо меньше времени и сил, чтобы опровергнуть такую теорию на опыте. Но снова и снова, по мере углубления наших познаний, мы должны отказываться от этого преимущества в нашем стремлении к логической простоте и единству основ физической теории. Следует признать, что общая теория относительности ушла дальше предшествующих физических теорий в отказе от «близости к опыту» фундаментальных понятий ради достижения логической простоты. Это относится уже к теории гравитации и еще более справедливо по отношению к ее новому обобщению, которое ставит целью охватить свойства полного поля. В этой обобщенной теории путь вывода из основных предпосылок тех заключений, которые можно сравнить с опытом, настолько труден, что никаких результатов еще не достигнуто. В пользу этой теории в настоящее время говорят ее логическая простота и ее «жесткость». Здесь жесткость означает, что теория либо верна, либо не верна; видоизменять же ее нельзя.

* * *

Глубочайшей внутренней трудностью на пути развития теории относительности является двойственный характер задачи, отраженный в двух типах вопросов, которые мы ставим. Эта двойственность является причиной того, что в развитии теории было два этапа, разделенных большим промежутком времени. Первый из этих этапов, теория гравитации, основывается на рассмотренном выше принципе эквивалентности и покоится на следующих соображениях. Согласно специальной теории относительности свет распространяется с постоянной скоростью. Если луч света в пустоте выходит из точки трехмерного пространства с координатами x_1, x_2 и x_3 в момент времени x_4, то он распространяется как сферическая волна и достигает соседней точки $(x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2,\ x_3 + dx_3)$ в момент $x_4 + dx_4$.

Вводя скорость света c, мы приходим к соотношению

$$\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = c\,dx_4,$$

которое можно также записать в виде

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dx_4^2 = 0.$$

Это равенство представляет собой объективное соотношение между координатами соседних пространственно-временных точек в четырехмерном пространстве и справедливо во всех инерциальных системах, при условии, что преобразования координат ограничены преобразованиями специальной теории относительности. Однако это соотношение теряет такую форму, если в соответствии с общим принципом относительности допустить произвольные непрерывные преобразования координат, и принимает более общий вид

$$\sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0.$$

Величины g_{ik} — некоторые функции координат, преобразующиеся определенным образом при непрерывном преобразовании координат. Согласно принципу эквивалентности, функции g_{ik} описывают гравитационное поле частного вида — поле, которое можно получить преобразованием «свободного от поля» пространства. Функции g_{ik} подчиняются определенному закону преобразования. Математически они представляют собой компоненты «тензора», обладающего свойством симметрии, которое сохраняется при всех преобразованиях; это свойство симметрии выражается следующим образом:

$$g_{ik} = g_{ki}.$$

Напрашивается вопрос: не можем ли мы приписать объективный смысл такому симметричному тензору, даже если поле нельзя получить одним только координатным преобразованием пустого пространства специальной теории относительности? Хотя мы и не можем ожидать, что такой симметричный тензор будет описывать поле самого общего вида, он все же может описывать частный случай «чисто гравитационного поля». Таким образом становится очевидным, какого типа поля нужно вводить по крайней мере в конкретном случае общей теории относительности (симметричные тензорные поля). Остается лишь вопрос: какого типа общие ковариантные уравнения нужно постулировать для симметричного тензорного поля?

В наше время нетрудно было найти ответ на этот вопрос, так как необходимые математические понятия уже были известны в виде метрической теории поверхностей, созданной Гауссом сто лет назад и обобщенной Риманом на случай многообразий произвольного числа измерений. Результат этих чисто формальных исследований оказался поразительным во многих отношениях. Дифференциальные уравнения, которые можно постулировать как уравнения поля g_{ik}, не могут быть ниже второго порядка, т. е. они должны содержать производные по крайней мере второго порядка от g_{ik} по координатам. Если предположить, что производные выше второго порядка не входят в уравнения поля, то они оказываются математически определенными общим принципом относительности. Система уравнений может быть записана в следующем виде:

$$R_{ik} = 0.$$

Величины R_{ik} преобразуются таким же образом, как g_{ik}, т. е. они также составляют симметричный тензор.

Эти дифференциальные уравнения полностью заменяют ньютоновскую теорию движения небесных тел, при условии, что массы выступают как особенности поля. Другими словами, они содержат закон сил, а также закон движения, хотя и исключают использование «инерциальных систем».

То обстоятельство, что массы выступают как особенности поля, показывает, что сами массы нельзя объяснить с помощью симметричных полей g_{ik} или «гравитационных полей». Из теории нельзя вывести даже факт существования только положительных масс. Полная релятивистская полевая теория должна, очевидно, основываться на поле более сложной структуры, т. е. на обобщении симметричного тензорного поля.

* * *

Прежде чем переходить к этому обобщению, сделаем два замечания, относящихся к гравитационному полю и существенных для дальнейшего.

Во-первых, отметим, что общий принцип относительности налагает весьма сильное ограничение на круг теоретических возможностей. Без этого ограничивающего принципа было бы практически невозможно найти уравнения гравитационного поля, даже пользуясь специальным принципом относительности и зная заранее, что поле должно описываться симметричным тензором. Никакой набор фактов не может привести к этим уравнениям, пока не использован общий принцип относительности. Именно по этой причине все попытки глубже проникнуть в основы физики кажутся мне обреченными на неудачу, если основные представления не находятся с самого начала в согласии с общим принципом относительности. Эта ситуация затрудняет использование наших эмпирических знаний, как бы обширны они ни были, для поиска фундаментальных физических понятий и соотношений, и вынуждает нас прибегать к свободным умозаключениям в гораздо большей степени, чем это предполагает ныне большинство физиков. Я не вижу причины считать, что эвристическая роль общего принципа относительности ограничена гравитацией и остальная физика должна рассматриваться отдельно на основе специального принципа относительности в надежде, что впоследствии все будет объединено в рамках общей релятивистской схемы. Я не думаю, чтобы такой подход, хоть он и объясним исторически, можно было объективно оправдать. Сравнительная узость круга известных нам гравитационных эффектов не есть решающая причина для игнорирования общего принципа относительности в исследованиях фундаментального характера. Другими словами, я не считаю оправданным вопрос: как выглядела бы физика без гравитации?

Во-вторых, мы должны отметить, что уравнения гравитационного поля представляют собой систему из десяти уравнений для десяти компонент симметричного тензора g_{ik}. В случае теории, которая не является общерелятивистской, система обычно не переопределена, если число уравнений совпадает с числом неизвестных функций. Многообразие решений таково, что в рамках общего решения можно выбрать произвольно некоторое число функций трех переменных. В общерелятивистской теории это нельзя считать самоочевидным. Свобода в выборе системы координат приводит к тому, что из 10 функций, т. е. из 10 компонент поля, четыре можно задать произвольно путем надлежащего выбора системы координат. Иначе говоря, общий принцип относительности приводит к тому, что полное число функций, которые следует определять из дифференциальных уравнений, равно не десяти, а $10-4=6$. Для этих шести функций можно постулировать только шесть независимых дифференциальных уравнений. Лишь шесть из десяти дифференциальных уравнений гравитационного поля должны быть независимы между собой, тогда как остальные четыре должны быть связаны с первыми шестью с помощью четырех соотношений (тождеств). И действительно, левые части R_{ik} десяти гравитационных уравнений, связаны четырьмя тождествами (тождествами Бианки), которые обеспечивают совместность системы уравнений.

В случаях, подобных этому, когда число переменных поля равно числу дифференциальных уравнений, совместность системы всегда обеспечена, если уравнения можно вывести из вариационного принципа. Это действительно можно сделать в случае гравитационного поля.

Однако десять уравнений нельзя полностью заменить шестью. Система уравнений действительно «переопределена», но, благодаря существованию тождеств, переопределение не приводит к потере совместности, т. е. к критическому сужению многообразия решений. Уравнения гравитационного поля включают в себя закон движения для масс, и это обстоятельство теснейшим образом связано с указанной (допустимой) переопределенностью.

После этих вводных замечаний легко понять характер нашего исследования, не входя в математические детали. Проблема заключается в построении релятивистской теории полного поля. Наиболее важным указанием на путь решения является факт существования такого решения для частного случая чисто гравитационного поля. Поэтому теория, которую мы ищем, должна быть обобщением теории гравитационного поля. Первый вопрос таков: каким должно быть естественное обобщение симметричного тензора поля?

Ответить на этот вопрос можно, только связав его с другим вопросом: какое обобщение поля должно привести к наиболее естественной теоретической схеме? Рассматриваемая теория основана на следующем ответе: симметричное тензорное поле должно быть заменено на несимметричное. Это означает, что условие $g_{ik} = g_{ki}$ для компонент поля должно быть отброшено. В этом случае поле имеет 16 независимых компонент вместо десяти.

Теперь остается задача установления релятивистских дифференциальных уравнений для несимметричного тензорного поля. При попытке решить эту задачу возникает трудность, которая не встречается в случае симметричного поля. Общий принцип относительности недостаточен для полного определения уравнений поля, в основном потому, что закон преобразования для симметричной части поля не охватывает компонент антисимметричной части и наоборот. Вероятно, по этой причине такого типа обобщение никогда не выдвигалось ранее. Переход к комбинации этих двух частей поля можно считать естественным только в том случае, если в формализме теории играет роль лишь полное поле, а не отдельно его симметричная и антисимметричная части.

Оказывается, что этому требованию действительно можно удовлетворить естественным образом. Но даже это требование в совокупности с общим принципом относительности еще недостаточно, чтобы однозначно определить уравнения поля. Вспомним теперь, что система уравнений должна удовлетворять еще одному условию — она должна быть совместной. Выше упоминалось, что это условие выполняется, если уравнения можно вывести из вариационного принципа.

Это действительно было проделано, хотя и не столь естественным путем, как в случае симметричного поля. К сожалению, оказалось, что вывод можно выполнить двумя различными путями. Эти вариационные принципы дают две системы уравнений (назовем их E_1 и E_2), отличные (хотя и немного) одна от другой, каждая из которых страдает специфическими недостатками. Следовательно, даже условие совместности недостаточно для однозначного определения системы уравнений.

Но именно формальные недостатки систем E_1 и E_2 позволили найти выход. Существует третья система уравнений E_3, свободная от формальных недостатков систем E_1 и E_2 и представляющая собой их комбинацию в том смысле, что каждое решение E_3 является как решением E_1, так и решением E_2. Это наводит на мысль, что система E_3 и есть искомая система уравнений. Почему бы не постулировать систему E_3 как систему уравнений? Такой подход нужно оправдать дополнительным анализом, так как из совместности системы E_1 и совместности системы E_2 еще не следует совместность более сильной системы E_3, число уравнений в которой на четыре превышает число компонент поля.

Совершенно другие соображения показывают, что независимо от вопроса о совместности более сильной системы E_3 эта система является единственным действительно естественным обобщением уравнений гравитации.

Но E_3 не есть совместная система в том же смысле, что и системы E_1 и E_2, совместность которых обеспечена достаточным числом тождеств. Последнее означает, что каждое поле, удовлетворяющее этим уравнениям в некоторый момент времени, имеет непрерывное продолжение, представляющее решение в четырехмерном пространстве. Однако система E_3 не допускает такого продолжения. Используя язык классической механики, мы могли бы сказать: для системы нельзя задавать свободно «начальные условия». В действительности основное значение имеет ответ на следующий вопрос: является ли многообразие решений системы E_3 настолько богатым, насколько это требуется для физической теории? Эта чисто математическая задача пока не решена.

Допустим, скажет скептик, что эта система действительно разумна с логической точки зрения. Но этим еще не доказано, что она соответствует природе. Вы правы, дорогой скептик. Только опыт может решить, где же скрыта истина. Все же мы кое-чего достигли, если сумели сформулировать осмысленный и точный вопрос. Подтверждение или опровержение не будет простым, ввиду отсутствия экспериментальных данных. Получение из уравнений заключений, которые можно сопоставить с опытом, потребует огромных усилий и, вероятно, новых математических методов.

Статья написана в связи с выходом 3-го издания «Сущности теории относительности», в котором новая теория помещена в Приложении II. Это приложение было потом переработано (см. статью 141). Теории с несимметричными $g_{\mu\nu}$ Эйнштейн разрабатывал до конца своей жизни. Последний ее вариант изложен в Приложении II к 5-му изданию «Сущности теории относительности» (см. статью 146).

ТОЖДЕСТВА БИАНКИ В ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ*

1. Общие замечания

Эвристическое значение общего принципа относительности заключается в том, что он значительно уменьшает число мыслимых систем уравнений поля. Уравнения поля должны быть ковариантны относительно всех непрерывных преобразований четырех координат. Однако проблема будет хорошо определена математически лишь в том случае, если мы выберем зависимые переменные, входящие в уравнения поля, и постулируем их трансформационные свойства (структуру поля). Но после того как мы выбрали структуру поля (таким образом, чтобы существовали достаточно сильные релятивистские уравнения поля), принцип относительности еще не определяет уравнения поля однозначно. Следует добавить принцип «логической простоты», формулировка которого не лишена произвола. Лишь тогда мы получим определенную теорию, физическую применимость которой можно проверить a posteriori.

Структура поля релятивистской теории гравитации основана на использовании симметричного тензора g_{ik}. Основной физической причиной такого выбора является наше убеждение в том, что в каждой мировой точке существует «световой конус» ($g_{ik}\, dx^i dx^k = 0$), разделяющий пространственно-подобные линейные элементы от временно-подобных. Каким наиболее естественным путем можно обобщить эту структуру поля? Простейшей возможностью представляется использование несимметричного тензора, хотя этот выбор нельзя убедительно оправдать с физической точ-

* *The Bianchi Identities in the Generalized Theory of Gravitation.* Canad. J. Math., 1950, 2, 120—128.

ки зрения. Однако мне кажется немаловажным следующее формальное соображение. Для общей теории относительности существенно, что ковариантный тензор g_{ik} мы можем связать с контравариантным g^{ik} посредством соотношения $g_{is}\,g^{ks} = \delta_i^k = g_{si}\,g^{sk}$ (нормалированные кофакторы). Эту связь можно непосредственно перенести на случай несимметричного поля. Поэтому естественно попытаться распространить теорию гравитации на несимметричные поля g_{ik}.

Основная трудность заключается здесь в том, что из несимметричного тензора мы можем построить гораздо больше ковариантных уравнений, чем из симметричного. Это обусловлено тем обстоятельством, что симметричная $g_{\underline{ik}}$ и антисимметричная $g_{\overset{\vee}{ik}}$ части являются независимыми тензорами. Существует ли формальная точка зрения, которая позволяет считать одну из многих возможностей более естественной, чем остальные? Мне кажется, что существует. В теории гравитации существенно, что помимо тензора g_{ik} у нас имеется симметричное бесконечно малое смещение Γ_{ik}^l. Оно связано с g_{ik} соотношением

$$g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma_{il}^s - g_{is}\Gamma_{lk}^s = 0. \tag{1}$$

Но в симметричном случае порядок индексов не играет роли. Каким образом обобщить уравнение (1) на наш случай? Мы воспользуемся следующим постулатом. Существует тензор g_{ki}, «сопряженный» g_{ik}, и смещение Γ_{ki}^l, «сопряженное» Γ_{ik}^l. По-видимому, разумно ожидать, что эти сопряженные величины должны играть эквивалентную роль в уравнениях поля. Поэтому мы требуем, чтобы любое уравнение поля при замене g и Γ на сопряженные им величины переходило в эквивалентное уравнение. Это требование заменяет симметрию в нашей системе (см. раздел 2). Если мы требуем, чтобы система соотношений (1) переходила сама в себя, то порядок индексов должен быть таким, какой указан в (1).

Наша основная задача состоит теперь в том, чтобы выяснить, существует ли достаточно убедительный метод нахождения однозначной системы уравнений для несимметричного поля указанной структуры. В обеих предыдущих работах [1] эта задача решалась путем формулирования вариационного принципа по аналогии с симметричным случаем. При этом мы могли быть уверены в совместности полученных уравнений. Единственная причина, по которой этот вывод может показаться не вполне удовлетворительным, заключается в том, что мы априори налагали на поле два

---

[1] A. Einstein. Ann. Math., 1945, 46, 578; A. Einstein, E. G. Straus. Ann. Math., 1946, 47, 731. (Статьи 127 и 130. — *Ред.*)

условия из соображения логической простоты:

$$\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}} = \frac{1}{2}(\Gamma^{s}_{is} - \Gamma^{s}_{si}) = 0, \tag{2}$$

$$\mathfrak{g}^{\hat{is}}_{,s} = \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{is} - \mathfrak{g}^{si})_{,s} = 0 \quad [\mathfrak{g}^{is} = g^{is}(-\det g_{ab})^{1/2}]. \tag{3}$$

Эти дополнительные условия усложняют вывод по сравнению с теорией гравитации; с формальной точки зрения они до сих пор не получили должного оправдания [2].

В теории симметричных полей существует другой способ убедиться в совместности уравнений поля ($R_{ik} = 0$). Мы должны получить четыре тождества, связывающие уравнения. Их можно вывести путем свертывания тождеств Бианки для тензора кривизны:

$$R_{ik\ddot{l}m;\dot{n}} = R_{iklm;n} + R_{ikmn;l} + R_{iknl;m} = 0.$$

В этой статье мы покажем, что аналогичные соображения можно использовать для обоснования уравнений поля и в нашем случае. Это поможет глубже разобраться в структуре несимметричных полей и продемонстрирует еще раз, что вывод уравнений для несимметричных полей действительно естествен.

2. Несимметричные тензоры

Для удобства приведем здесь основные соотношения для несимметричных тензоров.

Любой тензор A_{ik} можно записать как сумму симметричного тензора $A_{\underline{ik}}$ и антисимметричного $A_{\underset{\vee}{ik}}$, которые однозначно определяются соотношениями

$$A_{\underline{ik}} = \frac{1}{2}(A_{ik} + A_{ki}), \tag{4}$$

$$A_{\underset{\vee}{ik}} = \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}). \tag{5}$$

В излагаемой теории возникает усложнение, связанное с тем, что помимо фундаментального тензора g_{ik} существует сопряженный ему тензор

$$\tilde{g}_{ik} = g_{ki}. \tag{6}$$

[2] Вследствие соотношения (1) условия (2) и (3) эквивалентны. Это будет показано в разделе 5.

Остальные тензоры нашей теории определяются через g_{ik}. Если дан тензор A_{ik}, то под *сопряженным* к нему тензором $\widetilde{A}_{ik}$ мы разумеем тензор, полученный заменой g_{ik} в определении A_{ik} на g_{ki} [3]. [Это определение согласуется, в частности, с (6).] Мы будем интересоваться, в частности, тензорами, в определении которых g и $\widetilde{g}$ играют аналогичную роль; точнее, теми тензорами, для которых замена g_{ik} на g_{ki} приводит лишь к замене A_{ik} на A_{ki}, или

$$\widetilde{A}_{ik} = A_{ki}. \tag{7}$$

Тензор, обладающий таким свойством, называется *эрмитовым* [3]. В более общем виде: любая функция $A_{\dots ik\dots}$ от g_{ik} является эрмитовой по (ik), если

$$\widetilde{A}_{\dots ik\dots} = A_{\dots ki\dots}\,. \tag{7a}$$

Если величина Γ^l_{ik} определяется уравнением (1), то она эрмитова по (ik). Это другой способ формулировки принципа, на котором мы основывали выбор порядка индексов в соотношении (1) [4].

Мы говорим, что величина $A_{\dots ik\dots}$ антиэрмитова, если

$$\widetilde{A}_{\dots ik\dots} = -A_{\dots ki\dots}\,. \tag{8}$$

По аналогии с (4) и (5) мы можем однозначно представить любой тензор в виде разложения

$$A_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} + \widetilde{A}_{ki}) + \frac{1}{2}(A_{ik} - \widetilde{A}_{ki}). \tag{9}$$

Здесь первый член — эрмитова часть A_{ik}, второй член — антиэрмитова.

Предстоит еще обобщить понятие ковариантной производной. В симметричной теории, если $A^{i}_{\dots k\dots}$ есть произвольный тензор, то величина

$$A^{i}_{\dots k\dots;\,l} = A^{i}_{\dots k\dots,\,l} \pm \dots + A^{s}_{\dots k\dots}\Gamma^{i}_{sl} - A^{i}_{\dots s\dots}\Gamma^{s}_{kl} \pm \dots$$

также является тензором. Это справедливо и в нашей теории, но в каждом члене (после первого) мы можем расположить нижние индексы двумя способами. Если индекс дифференцирования l должен быть справа в некотором члене, то мы будем ставить знак «+» под соответствующим

---

[3] Названия «сопряженный» и «эрмитов» можно оправдать следующим образом. Рассмотрим случай чисто мнимого g_{ik}. Тогда $\widetilde{g}$ действительно является сопряженным к g. Следовательно $\widetilde{A}$ является сопряженным к A и определение «эрмитовости» совпадает с обычным.

[4] Таким образом в нашей теории условие симметрии заменяется на условие эрмитовости. Величины g_{ik}, Γ^l_{ik}, R_{ik} — все эрмитовы по (ik).

тензорным индексом, если слева, то мы будем ставить знак «—» под индексом. В качестве иллюстрации приведем новую форму соотношения (1):

$$g_{\underset{+-}{ik};l} = g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk} = 0. \tag{1a}$$

Теоремы, относящиеся к ковариантному дифференцированию, можно перенести из симметричной теории, если аккуратно различать два типа производных. Поднимая индексы i и k в соотношении (1a), мы получаем

$$g^{\overset{ik}{+-}}{}_{;l} = g^{ik}_{,l} + g^{sk}\Gamma^i_{sl} + g^{is}\Gamma^k_{ls} = 0. \tag{1б}$$

Иногда удобно пользоваться даже такой записью:

$$A_{\underset{-+}{iklm};n} = A_{iklm,n} - A_{sklm}\Gamma_{ni} - A_{islm}\Gamma^s_{kn},$$

но следует помнить, что такого рода выражения не всегда являются тензорами, если знаки «+» и «—» не проставлены под каждым тензорным индексом.

Если через $\mathfrak{g}$ обозначить квадратный корень из определителя g_{ik}, взятого с обратным знаком, то $\mathfrak{g}$ будет скалярной плотностью. Тензорную плотность мы можем представить как произведение $\mathfrak{g}$ на тензор. Рассмотрим эти плотности. Умножим соотношение (1) на g^{ik} и просуммируем:

$$\frac{(\det g_{ik})_{,l}}{\det g_{ik}} - \Gamma^s_{sl} - \Gamma^s_{ls} = 0,$$

$$\frac{(\mathfrak{g}^2)_{,l}}{\mathfrak{g}^2} - 2\Gamma^s_{\underline{ls}} = 0. \tag{10}$$

$$\mathfrak{g}_{,l} - \mathfrak{g}\Gamma^s_{\underline{ls}} = 0.$$

Поэтому естественно определить [5] $\mathfrak{g}_{;l}$ как $\mathfrak{g}_{,l} - \mathfrak{g}\Gamma^s_{\underline{ls}}$. Если соотношение (1a) удовлетворено, то $\mathfrak{g}_{;l} = 0$. Если выполнение уравнения (1) не предполагать, то величины $g^{\overset{ik}{+-}}{}_{;l}$ и $g_{\underset{+-}{ik};l}$ не обращаются в нуль и имеют тензорный характер. Аналогично, $\mathfrak{g}_{;l}$ обладает свойствами векторной плотности.

---

[5] Поскольку $\Gamma^s_{sl} = \Gamma^s_{ls}$, два типа дифференцирования совпадают в применении к $\mathfrak{g}$. Этого и следовало ожидать, так как в данном случае нет индексов, под которыми нужно ставить знаки «+» или «—».

Мы можем теперь вычислить ковариантную производную от тензорной плотности по правилу дифференцирования произведений. Например,

$$\mathfrak{g}^{ik}_{;\,l} = (\mathfrak{g} g^{ik})_{;\,l} = \mathfrak{g}_{;\,l} g^{ik} + \mathfrak{g} g^{ik}_{;\,l}.$$

Эта величина обращается в нуль, если соотношение (1) выполняется. Или в более явном виде:

$$\mathfrak{g}^{ik}_{;\,l} = (\mathfrak{g}_{,\,l} - \mathfrak{g}\Gamma^{s}_{\underline{ls}})\, g^{ik} + \mathfrak{g}(g^{ik}_{,\,l} + g^{sk}\Gamma^{i}_{sl} + g^{is}\Gamma^{k}_{ls}) =$$

$$= \mathfrak{g}^{ik}_{,\,l} + \mathfrak{g}^{sk}\Gamma^{i}_{sl} + \mathfrak{g}^{is}\Gamma^{k}_{ls} - \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^{s}_{ls}.$$

Отсюда получаем

$$\overset{ik}{\mathfrak{g}^{+-}_{;\,l}} = \mathfrak{g}\overset{ik}{g^{+-}_{;\,l}} = 0.$$

Для полноты мы приведем следующее сокращенное обозначение:

$$A_{\underset{\cdots}{ikl}} = A_{ikl} + A_{kli} + A_{lik}.$$

3. Свойства обобщенной кривизны

Мы исходим из несимметричного Γ и строим тензор кривизны, как обычно, при помощи параллельного переноса вектора вокруг бесконечно малого элемента площади:

$$R^{i}_{klm} = \Gamma^{i}_{kl,m} - \Gamma^{i}_{km,\,l} - \Gamma^{i}_{sl}\Gamma^{s}_{km} + \Gamma^{i}_{sm}\Gamma^{s}_{kl}. \tag{11}$$

Прямое вычисление показывает, что тензор кривизны удовлетворяет следующим тождествам:

$$R^{\overset{i}{+}}_{\underset{+\cdot\ \cdot\quad\cdot}{klm;\,n}} = R^{i}_{\underset{\cdot\ \cdot\ \cdot}{klm,n}} + R^{s}_{\underset{\cdot\,\cdot}{klm}}\Gamma^{i}_{s\underset{\cdot}{n}} - R^{i}_{\underset{\cdot}{s}l\underset{\cdot}{m}}\Gamma^{s}_{k\underset{\cdot}{n}} = 0. \tag{12}$$

Из формулы (11) мы можем образовать по аналогии с симметричным случаем ковариантный тензор кривизны

$$R_{iklm} = g_{si} R^{s}_{klm}. \tag{13}$$

Выбор g_{si} вместо g_{is} может показаться произвольным, но в действительности это не так. Мы должны опустить индекс i в тождествах (12). Указанием на дифференцирование в отношении ковариантного индекса i служит знак «+» и его следует свертывать с таким же индексом, т. е. с первым индексом g. Лишь таким образом можно опустить индекс i в тождествах (12), не вводя дополнительных членов. Таким образом мы приходим к ковариантным тождествам:

$$g_{si}\underset{+\cdot\cdot\ \cdot}{R^{\overset{s}{+}}_{klm;\,n}} = (\underset{-}{g_{si}}\underset{+\cdot\cdot}{R^{s}_{klm}})_{;\underset{\cdot}{n}} = \underset{-+\cdot\ \cdot\ \cdot}{R_{ik\,lm\,;n}} = 0. \tag{14}$$

В дальнейшем нам также понадобятся свойства симметрии R_{iklm}. Из формулы (11) ясно, что тензор R^{i}_{klm} антисимметричен по индексам lm. Из соотношения (13) следует, что R_{iklm} обладает тем же свойством:

$$R_{iklm} = -R_{ikml}\,. \tag{15}$$

Если мы продифференцируем соотношение (1) по индексу m и антисимметризуем результат по l и m, то получим

$$(g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^{s}_{il} - g_{is}\Gamma^{s}_{lk})_{,m} - (g_{ik,m} - g_{sk}\Gamma^{s}_{im} - g_{is}\Gamma^{s}_{mk})_{,l} = 0$$

или

$$-g_{sk,m}\Gamma^{s}_{il} - g_{is,m}\Gamma^{s}_{lk} + g_{sk,l}\Gamma^{s}_{im} + g_{is,l}\Gamma^{s}_{mk} -$$
$$- g_{sk}(\Gamma^{s}_{il,m} - \Gamma^{s}_{im,l}) - g_{is}(\Gamma^{s}_{lk,m} - \Gamma^{s}_{mk,l}) = 0.$$

Снова использовав соотношение (1) в первых четырех слагаемых и перегруппировав члены, находим

$$-g_{sk}(\Gamma^{s}_{il,m} - \Gamma^{s}_{im,l} - \Gamma^{s}_{tl}\Gamma^{t}_{im} + \Gamma^{s}_{tm}\Gamma^{t}_{il}) - g_{is}(\Gamma^{s}_{lk,m} -$$
$$- \Gamma^{s}_{mk,l} - \Gamma^{s}_{lt}\Gamma^{t}_{mk} + \Gamma^{s}_{mt}\Gamma^{t}_{lk}) = 0,$$

или, учитывая формулы (11) и (13), имеем:

$$R_{kilm} = -\widetilde{R}_{iklm}\,. \tag{16}$$

Это равенство выражает антиэрмитовость R_{iklm} по индексам ik; таким способом антисимметричность R_{iklm} (в теории гравитации) обобщается на наш случай.

Из соотношений (14) сразу не видно, что величина $\underset{-+\cdot\ \cdot\ \cdot}{R_{iklm;n}}$ является тензором. Теперь нетрудно привести более полезную форму соотношений (14), из которой это обстоятельство легче усмотреть:

$$\underset{-+\ -+}{R_{ik\,lm;\,n}} + \underset{-+++}{R_{ikmn;\,l}} + \underset{-+--}{R_{ik\,nl;\,m}} = \underset{-+\ \ \cdot\cdot\ \cdot}{R_{ik\,lm;n}} - R_{ik\,sm}\Gamma^{s}_{nl} -$$
$$- R_{inls}\Gamma^{s}_{mn} - R_{iksn}\Gamma^{s}_{ml} - R_{ikms}\Gamma^{s}_{nj} - R_{iksl}\Gamma^{s}_{mn} - R_{ikns}\Gamma^{s}_{ml}\,.$$

Первый член в правой части этого равенства обращается в нуль в силу соотношений (14); последние шесть членов взаимно уничтожаются вследствие соотношений (15). Таким образом,

$$\underset{-+-+}{R_{ik\,lm;n}} + \underset{-+++}{R_{ikmn;\,l}} + \underset{-+\ --}{R_{ik\,nl;m}} = 0. \tag{14a}$$

4. Уравнения поля

Мы можем теперь вывести тождества, связывающие уравнения поля. По аналогии с теорией гравитации выполним свертывание соотношения (14а) при помощи $g^{mi}\,g^{kl}$. [Подчеркнем, что последовательность индексов определяется характером соответствующих индексов в (14а) по отношению к дифференцированию.] Используя соотношения (15), мы приходим к соотношению

$$g^{mi}g^{kl}\,(R_{\underset{-+-+}{ik\,lm};\,n} - R_{\underset{-+++}{iknm};\,l} - R_{\underset{-+\,--}{ik\,ln};\,m}) = 0.$$

или, с учетом (1а), к

$$g^{kl}\,[g^{mi}R_{ik\,\underset{+-}{lm}}];_{n} - g^{kl}\,[g^{mi}R_{ik\underset{++}{nm}}];\,_{l} - g^{mi}\,[g^{kl}R_{ik\underset{--}{ln}}\,];_{m} = 0. \qquad (17)$$

Введем величины

$$R_{kl} = g^{mi}R_{iklm}\,, \qquad (18)$$

$$S_{mi} = g^{kl}R_{iklm}\,, \qquad (19)$$

где

$$R_{kl} = g^{mi}g_{si}R^{s}_{nlm} = \delta^{m}_{s}R^{s}_{klm} = \Gamma^{s}_{kl,s} - \Gamma^{s}_{ks,l} - \Gamma^{s}_{il}\Gamma^{t}_{ks} + \Gamma^{s}_{ts}\Gamma^{t}_{kl}. \qquad (18а)$$

Тогда получим

$$g^{kl}\,(R_{\underset{+-}{kl}};\,_{n} - R_{\underset{++}{kn}};\,_{l} - S_{\underset{--}{nl}};\,_{k}) = 0. \qquad (17а)$$

Найдем теперь связь между R и S. Из соотношений (15) и (16) следует, что

$$R_{kiml} = \widetilde{R}_{iklm}\,.$$

Умножим это равенство на $g^{im}\,(= \widetilde{g}^{mi})$ и просуммируем (т. е. выполним свертывание); тогда

$$S_{lk} = \widetilde{R}_{kl}. \qquad (20)$$

Если бы тензор R был эрмитовым, то R и S совпадали бы тождественно. Это еще одна причина, чтобы требовать эрмитовости R_{kl}. Но из формулы (18а) мы видим, что R_{kl} имеет антиэрмитову часть [ср. равенство (9)]:

$$\frac{1}{2}\,(R_{kl} - \widetilde{R}_{lk}) = \frac{1}{2}\,\left[(\Gamma^{s}_{sl,\,k} - \Gamma^{s}_{ks,l}) - \Gamma^{t}_{kl}\,(\Gamma^{s}_{st} - \Gamma^{s}_{ts})\right]. \qquad (21)$$

Из (10) следует, что

$$\Gamma^{s}_{ls} = \frac{g_{,\,l}}{g} = \left(\frac{1}{2}\ln|\det g_{ik}|\right)_{,\,l}. \qquad (22)$$

Поэтому

$$\Gamma^s_{sl,\,k} - \Gamma^s_{ks,\,l} = \Gamma^s_{\underset{\vee}{sl},\,k} - \Gamma^s_{\underset{\vee}{ks},\,l}. \tag{21a}$$

$$\frac{1}{2}\left(R_{kl} - \widetilde{R}_{lk}\right) = -\frac{1}{2}\left(\Gamma^s_{\underset{\vee}{ls}} + \Gamma^s_{\underset{\vee}{ks},\,l} - \Gamma^t_{kl}\Gamma^s_{\underset{\vee}{ts}}\right).$$

Отсюда ясно, что тензор R_{kl} будет эрмитовым, если мы наложим на поле четыре условия:

$$\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0. \tag{2}$$

Тогда из равенства (20) следует, что

$$S_{lk} = R_{lk}, \tag{20a}$$

и соотношение (17а) принимает вид

$$g^{kl}\left[R_{\underset{+-}{kl};\,n} - R_{\underset{++}{kn};\,l} - R_{\underset{--}{nl};\,k}\right] = 0. \tag{17б}$$

Эти тождества выполняются для всех полей, для которых Γ определено соотношением (1) и подчиняется условию (2). Мы могли бы прийти к заключению, что уравнения поля должны требовать обращения в нуль всех компонент R_{kl}. Однако эта система уравнений вместе с соотношениями (1) и (2) была бы переопределена. Можно получить более слабую систему, если рассмотреть, каким образом $R_{\underset{\vee}{kl}}$ входит в (17б). Вклад от $R_{\underset{\vee}{kl}}$ в это уравнение равен

$$g^{kl}\left[R_{\underset{\vee}{\underset{+-}{kl}};\,n} - R_{\underset{\vee}{\underset{++}{kn}};\,l} - R_{\underset{\vee}{\underset{--}{nl}};\,k}\right].$$

Это выражение можно записать в следующем виде:

$$g^{kl}\left[R_{\underset{\vee}{kl},\,n} - R_{\underset{\vee}{sl}}\Gamma^s_{kn} - R_{\underset{\vee}{ks}}\Gamma^s_{nl} - R_{\underset{\vee}{kn},\,l} + R_{\underset{\vee}{sn}}\Gamma^s_{kl} + R_{\underset{\vee}{ks}}\Gamma^s_{kl} -\right.$$

$$\left. - R_{\underset{\vee}{nl},\,k} + R_{\underset{\vee}{sl}}\Gamma^s_{kn} + R_{\underset{\vee}{ns}}\Gamma^s_{kl}\right] = g^{kl}\left[R_{\underset{\vee}{kl},\,n} - R_{\underset{\vee}{kn},\,l} - R_{nl,\,k}\right] =$$

$$= g^{kl}\left[R_{\underset{\vee}{kl},\,n} + R_{nk,\,l} + R_{\underset{\vee}{ln},\,k}\right] = g^{kl}\,R_{\underset{\ddot{\vee}}{kl}\,\underset{\cdot}{n}}.$$

Поскольку $R_{\underset{\vee}{kl}}$ входит в уравнения лишь в комбинации $R_{\underset{\ddot{\vee}}{kl},\,\underset{\cdot}{n}}$, естественно выбрать уравнения поля для $R_{\underset{\vee}{kl}}$ в виде

$$R_{\underset{\ddot{\vee}}{kl},\,\underset{\cdot}{n}} = 0 \tag{23}$$

вместо уравнений $R_{kl} = 0$. Таким образом, мы приходим к системе уравнений поля:

$$\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0, \tag{2}$$

$$R_{\underline{kl}} = 0, \tag{24}$$

$$R_{\underset{\ddot{\vee}}{kl},\,\underset{\cdot}{n}} = 0, \tag{23}$$

где Γ^l_{ik} определено соотношением

$$g_{\underset{+-}{ik};\,l} = 0. \tag{1a}$$

Приведенный вывод показывает, насколько естественно мы можем распространить общую теорию относительности на несимметричные поля. Предложенные ранее уравнения поля действительно являются естественными обобщениями гравитационных уравнений. Если бы мы были уверены, что выбор несимметричного тензора g_{ik} для описания структуры обобщенного поля правилен, то вряд ли могли бы возникнуть сомнения в справедливости указанных уравнений.

5. Вариационный принцип

Для сравнения мы приведем вывод наших уравнений на основе вариационного принципа. Формально этот вывод проще, чем изложенный выше, но его недостатком является использование двух, казалось бы, произвольных условий, налагаемых на поле:

$$\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0, \tag{2}$$

$$g^{\overset{is}{\vee}}{}_{,s} = 0. \tag{3}$$

С другой стороны, соотношения (1) выводятся из вариационного принципа, и нам нет нужды их постулировать. В этом выводе удобно пользоваться методом Палатини. Как и в разделе 3, мы строим тензор кривизны

$$R^i_{klm} = \Gamma^i_{kl,\,m} - \Gamma^i_{km,\,l} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km} + \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{kl}. \tag{11}$$

Обобщая метод Палатини на несимметричный случай, нетрудно убедиться, что

$$\delta R^i_{klm} = \Big(\delta\Gamma^{\overset{i}{+}}_{\underset{+-}{kl}}\Big)_{;m} - \Big(\delta\Gamma^{\overset{i}{+}}_{\underset{++}{km}}\Big)_{;\,l}. \tag{25}$$

Мы выбираем функцию Гамильтона следующим образом:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{kl}R_{kl}, \tag{26}$$

$$\mathfrak{H} = \delta^m_i \mathfrak{g}^{kl}R^i_{klm}. \tag{26a}$$

Варьируя равенство (26а) по Γ, получаем

$$\delta\mathfrak{H} = \delta^m_i\mathfrak{g}^{kl}\,(\delta R^i_{klm}) = \delta^m_i\,\mathfrak{g}^{kl}\,[(\delta\Gamma^{\overset{i}{+}}_{\underset{+-}{kl}})_{;m} - (\delta\Gamma^{\overset{i}{+}}_{\underset{++}{km}})_{;l}\,]. \tag{27}$$

Положим для краткости

$$\mathfrak{A}^m = \delta_i^m \mathfrak{g}^{kl} (\delta\Gamma^i_{kl}) = \mathfrak{g}^{kl} (\delta\Gamma^m_{kl}), \tag{28}$$

$$\mathfrak{B}^l = \delta_i^m \mathfrak{g}^{kl} (\delta\Gamma^i_{km}) = \mathfrak{g}^{kl} (\delta\Gamma^m_{km}). \tag{29}$$

Тогда равенство (27) можно записать в виде

$$\delta\mathfrak{H} = \overset{m}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;m} = -(\overset{m}{\underset{+}{\delta_i^+}}\ \overset{kl}{\mathfrak{g}}{}^{++})_{;m} (\delta\Gamma^i_{kl}) - \overset{l}{\mathfrak{B}}{}^{-}_{;l} + (\overset{m}{\underset{+}{\delta_i^+}}\ \overset{kl}{\mathfrak{g}}{}^{+-})_{;l}\ \delta\ (\Gamma^i_{km}). \tag{27a}$$

Мы должны образовать интеграл от $\delta\mathfrak{H}$. Рассмотрим вклад в этот интеграл, вносимый величиной $\overset{m}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;m}$ (см. раздел 2):

$$\overset{m}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;m} = \mathfrak{A}^m_{,m} + \mathfrak{A}^s \Gamma^m_{sm} - \mathfrak{A}^s \Gamma^m_{ms} = \mathfrak{A}^m_{,m} + \mathfrak{A}^m \Gamma^s_{\underset{\vee}{ms}}. \tag{30}$$

Первый член представляет собой обычную дивергенцию и, следовательно, не дает никакого вклада в интеграл. Чтобы вклад от второго члена обращался в нуль, необходимо, очевидно, ввести предположение (2). Налагая на поле условие (2), мы убеждаемся, что $\overset{m}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;m}$ (и, аналогично, $\overset{l}{\mathfrak{B}}{}^{-}_{;l}$) при интегрировании обращается в нуль. Поэтому мы можем опустить эти члены в равенстве (27a) и представить вариацию в виде

$$\delta\mathfrak{H} = \left[-(\overset{m}{\underset{+}{\delta_i^+}}\ \overset{kl}{\mathfrak{g}}{}^{+-})_{;m} + (\overset{l}{\underset{+}{\delta_i^+}}\ \overset{km}{\mathfrak{g}}{}^{+-})_{;m}\right] (\delta\Gamma^i_{kl}) \tag{27б}$$

или, в силу того, что $\delta\,\overset{l}{\underset{+}{\overset{+}{i}}}{}_{;m}$ обращается в нуль,—

$$\delta\mathfrak{H} = \left[-\overset{kl}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;m} + \overset{km}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;m}\ \overset{l}{\underset{+}{\delta_i^+}}\right] (\delta\Gamma^i_{kl}). \tag{27в}$$

Мы не можем утверждать, что величина в круглых скобках равна нулю, так как Γ^i_{kl} не являются независимыми, но связаны условием (2). Однако мы могли бы заключить об обращении в нуль величин, если бы они зависели только от 60 параметров, а не от 64 $\overset{kl}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;i}$. Но это действительно имеет место по следующей причине: в соотношении

$$\frac{1}{2}\left(\overset{kl}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;l} - \overset{lk}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;l}\right) = \overset{kl}{\mathfrak{g}}{}_{,\overset{\vee}{l}} - \mathfrak{g}^{\underline{kl}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{ls}} \tag{31}$$

все четыре величины в левой части обращаются в нуль, если на поле наложить условия (2) и (3). Следовательно, лишь 60 из 64 величин $\mathfrak{g}^{kl}_{\substack{+-\\;i}}$ независимы. То же самое должно относиться к величинам в квадратных скобках в правой части равенства (27в). Таким образом, из равенства (27в) мы можем заключить, что эти величины все равны нулю. Свертывая по индексам l и i, мы получаем, что $\mathfrak{g}^{km}_{\substack{+-\\;m}} = 0$. Следовательно, равны нулю $\mathfrak{g}^{kl}_{\substack{+-\\;i}}$ и вместе с ними величины $g^{kl}_{\substack{+-\\;i}}$ [см. соотношения (1б) и (1в)]. Следовательно, мы доказали, что

$$g_{\underset{+-}{ik};\, l} = 0. \tag{1a}$$

[Отсюда и из соотношения (31) следует, что условия (2) и (3) эквивалентны].

Нам нужно еще проварьировать (7) по $\mathfrak{g}^{ik}$. Но мы должны помнить, что $\mathfrak{g}^{ik}$ удовлетворяют соотношению (3). Это проще всего выполнить, полагая

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{\overset{ik}{\vee}} &= \mathfrak{g}^{iks}_{,s}\,, \\ \mathfrak{g}^{ik} &= \mathfrak{g}^{\underline{ik}} + \mathfrak{g}^{iks}_{,s} \end{aligned} \tag{32}$$

и варьируя по независимым величинам $\mathfrak{g}^{\underline{ik}}$ и $\mathfrak{g}^{iks}$. (Здесь $\mathfrak{g}^{iks}$ — тензорная плотность, антисимметричная по любой паре индексов.) В результате получаем уравнения

$$R_{\underset{\vee}{kl};\dot{n}} = 0, \tag{23}$$

$$R_{\underline{kl}} = 0. \tag{24}$$

Этим завершается вывод уравнений поля.

В обоснование априорного предположения (2) мы можем указать, что оно необходимо и достаточно для эрмитовости тензора R_{kl} [см. соотношения (21а)].

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ И ПРОБЛЕМА ПРОСТРАНСТВА*

Характерной особенностью ньютоновской физики является то, что она пространству и времени, так же как и материи, должна приписывать независимое реальное существование, поскольку в ньютоновском законе движения появляется понятие ускорения. Но ускорение в этой теории может означать только «ускорение по отношению к пространству». Таким образом, ньютоново пространство должно мыслиться как «покоящееся» или, по крайней мере, как «неускоренное», чтобы ускорение, появляющееся в законе движения, можно было рассматривать как величину, имеющую физический смысл. Почти то же самое справедливо и для времени, которое также входит в определение понятия ускорения. Сам Ньютон и наиболее критически настроенные его современники чувствовали, что это не позволяет считать физической реальностью как само пространство, так и состояние движения последнего; но в то время не было другого выбора, если хотели, чтобы механика имела ясный смысл.

Приписание физической реальности пространству вообще и, особенно, пустому пространству — в самом деле требование слишком жестокое. Философы с давних времен всегда сопротивлялись такому требованию,

* *Relativität und Raumproblem.* Приложение V к немецкому изданию 1954 года книги «О специальной и общей теории относительности» (статья 43, том 1). (Впервые опубликовано в 15-м английском издании этой книги в 1952 году.—*Ред.*) В предисловии (9 июня 1952 г.) к этому изданию Эйнштейн пишет:
«В этом издании я добавил Приложение V, в котором изложил свои взгляды на проблему пространства вообще и на изменения наших представлений о пространстве, возникающие под влиянием релятивистской точки зрения. Мне хотелось показать, что пространству и времени нельзя с необходимостью приписать раздельное существование, независимо от действительных объектов физической реальности. Физические объекты находятся не в пространстве, но эти объекты являются пространственно протяженными. На этом пути концепция ,,пустого пространства“ теряет свой смысл».

Декарт аргументировал это примерно так: пространство совпадает с протяженностью, а протяженность связана с телами; таким образом, нет пространства без тел и, следовательно, нет пустого пространства. Слабость этой аргументации заключается главным образом в следующем. Несомненно верно, что понятие протяженности обязано своим происхождением нашему опыту в расположении твердых тел в пространстве. Отсюда, однако, нельзя заключить, что понятие протяженности не может быть оправдано и в других случаях. Такое расширение понятий может быть обосновано косвенно по его значению для интерпретации эмпирических результатов. Поэтому утверждение, что протяженность обязательно связана с телами, очевидно, само по себе необоснованно. Однако позже мы увидим, что общая теория относительности подтверждает все же концепцию Декарта, хотя и другим путем. Декарта привело к его удивительно привлекательной точке зрения сознание того, что без настоятельной необходимости не следует приписывать реальность вещам, подобным пространству, которые не допускают «прямой проверки на опыте» [1].

Психологическое происхождение идеи пространства или необходимости ее далеко не так очевидно, как может показаться на основе привычного нам образа мышления. Геометры прошлого имели дело с мысленными объектами (прямая, точка, поверхность), но не с пространством как таковым, которое понадобилось позже, в аналитической геометрии. Однако идея пространства подсказывалась некоторыми простыми опытами. Допустим, что сделан ящик. Внутри ящика так разместим предметы, чтобы он был целиком заполнен. Возможность такого размещения предметов есть свойство материального объекта — «ящика», то, что с ним связано,— «ограниченное пространство». Это — нечто различное для разных ящиков, что можно естественно представить себе, независимо от того, имеются вообще какие-либо предметы в ящике в любой момент времени или нет. Когда в ящике нет предметов, его пространство «пустое».

До сих пор наше представление о пространстве связывалось с ящиком. Однако оказывается, что все возможные способы размещения, которые определяют пространство-ящик, не зависят от толщины стенок ящика. Нельзя ли тогда сделать эту толщину равной нулю, не теряя, однако, «пространства»? Естественность такого предельного процесса очевидна, и для нашего воображения пространство без ящика — вещь очевидная; она тем не менее становится нереальной, как только мы забываем происхождение этого понятия. Можно думать, что Декарт считал его несовместимым с представлениями о пространстве как о независимой от материальных объектов вещи, которая может существовать

[1] Это выражение не следует понимать слишком буквально.

в отсутствие материи [2]. (В то же самое время, это не мешало ему трактовать пространство как фундаментальное понятие его аналитической геометрии.) Ссылка на вакуум в ртутном барометре, конечно, обезоружила картезианцев. Но нельзя отрицать, что уже на этой примитивной стадии пространство понималось как самостоятельно существующий реальный объект.

Способы, которыми тела могут заполнять пространство (например, ящик), представляют собой предмет трехмерной эвклидовой геометрии; ее аксиоматическая структура, однако, легко вводит в заблуждение, так как она не подчеркивает, что геометрия не описывает реальные объекты.

Если теперь понятие пространства формируется намеченным выше образом и следует из опыта «заполнения» ящика, то это пространство прежде всего — *ограниченное* пространство. Однако это ограничение не представляется существенным, так как, очевидно, всегда можно ввести в рассмотрение ящик бóльших размеров, охватывающий ящик меньших размеров. На этом пути пространство представляется как нечто неограниченное.

Я не буду здесь рассматривать, как понятия трехмерности и «эвклидовости» пространства могут быть прослежены в сравнительно простых опытах. Прежде всего я буду рассматривать с других точек зрения роль понятия пространства в развитии физической мысли.

Если некоторый ящик s находится в состоянии относительного покоя, внутри некоторого ящика S бóльших размеров, то полость ящика s является частью полого пространства ящика S; при этом одно и то же «пространство», которое содержат оба ящика, принадлежит каждому из них. Однако, если s движется относительно S, это понятие становится менее простым. Тогда были склонны думать, что ящик s охватывает всегда одно и то же пространство, но различные части пространства ящика S. В таком случае становилось необходимым выделить для каждого ящика его особое пространство, которое не мыслится ограниченным, и предположить, что эти два пространства находятся в движении по отношению друг к другу.

Прежде чем такой сложный вопрос был осознан, пространство представлялось неограниченной средой, или вместилищем, в котором плавают материальные объекты. Теперь же надо вспомнить, что существует бесконечное число пространств, которые движутся относительно друг друга.

---

[2] Попытку же Канта устранить это затруднение путем отрицания объективности пространства трудно считать серьезной. Возможность заполнения внутреннего пространства ящика так же объективна, как и сам ящик и как объект, который может быть помещен внутри него.

Понятие пространства как чего-то, существующего объективно и независимо от вещей, относится к донаучному мировоззрению; оно сменяется идеей о существовании бесконечного числа пространств, движущихся относительно друг друга. Эта последняя оказывается логически неизбежной, но и она не может играть значительную роль в научной мысли.

Что можно сказать о психологической природе понятия времени? Это понятие, несомненно, связано с фактом «запоминания», а также с дифференциацией чувственных ощущений и воспоминанием о них. Сомнительно, дает ли нам что-либо психологически дифференциация чувственного опыта и воспоминание (или просто изображение). Всякий знает по своему опыту, что он часто сомневался в том, испытывал ли он что-то действительно или просто вообразил себе это. Вероятно, способность различать между этими возможностями впервые приходит как результат упорядочивающей деятельности мышления.

«Запоминание» упорядочивает ощущения и позволяет рассматривать «более ранние переживания» в сравнении с «переживаниями в настоящее время». Этот понятный принцип упорядочения вспоминаемого опыта и возможность его выполнения имели своим результатом субъективное понятие времени, т. е. такое понятие времени, которое относится к упорядочению переживаний индивидуума.

Что мы имеем в виду, вводя объективное понятие времени? Рассмотрим следующий пример. Лицо A («я») испытало: «Молния!». В то же самое время лицо A также обнаружило такое поведение лица B, что сопоставило поведение лица B со своим собственным ощущением молнии. Таким образом, A связывает с B свое ощущение молнии. У лица A возникает представление, что другие лица также участвуют в опыте с молнией. «Молния!» теперь истолковывается уже не как некоторое исключительно субъективное переживание, но как опыт других лиц (или в конечном счете только как «потенциальный опыт»). Таким образом ощущение «Молния!», которое первоначально доходило до сознания как некоторый «опыт», теперь интерпретируется как некоторое (объективное) «событие». Это как раз и есть полная сумма всех событий, которую мы имеем в виду, когда говорим о «реальном внешнем мире».

Мы видели, что мы сами склонны приписывать упорядочение во времени наших переживаний следующим образом. Если β позже, чем α, и γ позже, чем β, то γ также позже, чем α («последовательность событий»). Как обстоит теперь дело в этом отношении с «событиями», которые мы ассоциируем с переживаниями? На первый взгляд представляется естественным предположить, что существует порядок следования событий во времени, который согласуется с временны́м порядком переживаний (ощущений). Вообще это делалось бессознательно до тех пор, пока не стали возникать сомнения [3]. Чтобы прийти к идее объективного мира, необходимы еще дополнительные конструктивные понятия: событие локализовано не только во времени, но и в пространстве.

В предыдущих разделах [4] мы пытались описать, как понятия пространства, времени и события психологически могут быть связаны с переживаниями. С логической точки зрения они представляют собой свободные творения человеческого разума, инструменты мышления, которые должны служить для установления связи одних ощущений с другими, так чтобы их можно было лучше обозревать. Попытка осознать эмпирические источники этих фундаментальных понятий должна показать, в какой мере мы фактически привязаны к этим понятиям. Мы отдаем себе отчет в свободе, разумное использование которой в случае необходимости всегда является трудным делом.

Мы должны еще добавить нечто существенное к этому наброску, касающемуся психологической природы понятий пространства — времени — события (будем называть их более кратко понятиями «пространственного типа» в отличие от этих понятий в психологической сфере). Мы связывали понятие пространства с ощущениями, используя ящики и размещение материальных объектов в них. Таким образом, это формирование понятий уже предполагает понятие материальных объектов (например, «ящиков»). Таким же образом лица, которые были введены в рассмотрение при обсуждении объективного понятия времени, тоже играют роль материальных объектов. Поэтому мне кажется, что формирование понятия материального объекта должно предшествовать нашим понятиям времени и пространства.

Все эти понятия пространственного типа, вместе с такими, как «боль», «цель», «намерение», и другими понятиями из области психологии, принадлежат к донаучным представлениям. Теперь для физического мышления, как и для естественнонаучного мышления вообще, характерно то, что оно в принципе стремится обойтись *только* понятиями «пространственного типа» и старается выразить с помощью их все соотношения, имеющие форму законов. Физик пытается свести цвета и тона к частотам колебаний, психолог — мышление и боль к нервным процессам, так что психический элемент как таковой исключается из причинной зависимости в природе и, таким образом, нигде не выступает как независимое звено в причинных связях. Эта позиция, с точки зрения которой для понимания всех связей возможно в принципе использовать исключительно

[3] Например, порядок ощущений во времени, полученных акустическими средствами, может отличаться от временно́го порядка ощущений, полученных визуально, так что временна́я последовательность событий не может быть отождествлена с временной последовательностью ощущений.

[4] См. статью 43 тома I.— *Прим. ред.*

понятия «пространственного типа», несомненно и есть то, что в настоящее время понимается под термином «материализм» (после того, как «материя» утратила свою роль фундаментального понятия).

Зачем понадобилось ниспровергать с платоновских олимпийских высот фундаментальные представления естественнонаучной мысли и пытаться обнаружить их земное происхождение? Ответ: для того, чтобы освободить эти идеи от привязанного к ним «табу» и, таким образом, достичь большей свободы в формировании представлений и понятий. В том, что эта критическая концепция была введена, бессмертная заслуга принадлежит прежде всего Д. Юму и Э. Маху.

Наука приняла от донаучного мышления понятия пространства, времени и материального объекта (с важным частным случаем «твердого тела»), а затем модифицировала и уточнила их. Ее первым значительным достижением было построение эвклидовой геометрии. Аксиоматическая формулировка последней не должна была заставлять нас закрывать глаза на ее эмпирическое происхождение (возможности размещения твердых тел), в особенности на трехмерную природу пространства, а также на его эвклидовский характер (т. е. возможность заполнить без пробелов пространство одинаковыми «кубами»).

Тонкость понятия пространства возросла с открытием того, что абсолютно твердых тел не существует. Все тела являются упруго деформируемыми и изменяют свой объем с изменением температуры. Поэтому структуры, возможные расположения которых должны описываться эвклидовой геометрией, не могут быть оторваны от физических понятий. Но так как физика при установлении своих понятий в конце концов должна использовать геометрию, то эмпирическое содержание геометрии может быть сформулировано и проверено на опыте только в рамках всей физики.

В этой связи необходимо также подумать об атомистике и ее концепции конечной делимости; пространство не может быть измерено до субатомных размеров. Атомистика заставляет также отказаться, в принципе, от резкой и статически определенной ограничивающей поверхности твердых тел. Строго говоря, не существует *точных* законов для возможных расположений твердых тел, касающихся друг друга, даже в макроскопической области.

Несмотря на это, никто не думал отказываться от понятия пространства, ибо оно представляется необходимым в замечательно оправдывающейся совокупности естественных наук. Мах в девятнадцатом столетии был единственным, кто серьезно думал об исключении понятия пространства, которое он пытался заменить представлением о всей сумме расстояний между всеми материальными точками. (Он предпринял эту попытку для того, чтобы прийти к удовлетворительному пониманию инерции).

Поле

В механике Ньютона пространство и время играют двойственную роль. Прежде всего они выполняют для объектов, встречающихся в физике, роль носителя или рамы, относительно которой события описываются с помощью пространственных координат и времени. В принципе, вещество мыслится состоящим из «материальных точек», движения которых образуют физическое событие. Если вещество мыслится непрерывным, то это делается лишь в тех случаях, когда не желают или не могут описывать его дискретную структуру. В этом случае малые части (элементы объема) материи трактуются подобно материальным точкам, по крайней мере до тех пор, пока мы интересуемся только движениями, но не явлениями, которые в данный момент нельзя или ненужно относить к движениям (например, изменения температуры, химические процессы). Вторая роль пространства и времени была та, что они служили «инерциальной системой». Из всех мыслимых систем отсчета инерциальные системы потому считались привилегированными, что по отношению к ним справедлив закон инерции.

При этом существенным обстоятельством является то, что «физическая реальность», существующая независимо от познающих ее субъектов, представлялась состоящей по крайней мере в принципе, из пространства и времени, с одной стороны, и из постоянно существующих материальных точек, движущихся по отношению к пространству и времени,— с другой. Идея независимого существования пространства и времени может быть выражена следующим образом: если бы материя исчезла, то остались бы только пространство и время (своего рода сцена, на которой разыгрываются физические явления).

Эта точка зрения была преодолена в результате возникновения новых идей, которые сначала, казалось, не вносили никаких изменений в проблему пространства — времени, а именно, в результате появления *понятия поля* и возникновения требования — заменить им, в принципе, понятие частицы. В рамках классической физики понятие поля появлялось как вспомогательное понятие в тех случаях, когда вещество трактовалось как некоторый континуум. Например, при рассмотрении теплопроводности в твердом теле состояние этого тела описывалось путем задания температуры в каждой точке тела для каждого определенного момента времени. Математически это означает, что температура T представляется как функция пространственных координат и времени t (поле температуры). Закон теплопроводности представляется как некоторое локальное соотношение (дифференциальное уравнение), которое охватывает все частные случаи передачи тепла. Температура здесь представляет собой простой пример понятия поля. Это — некоторая величина (или некоторый комплекс величин), являющаяся функцией координат и времени. Другим примером может служить описание движения жидкости. В каждой точке и для любого момента времени существует скорость, которая количественно описывается ее тремя «компонентами» по осям системы координат (вектор). Здесь компоненты скорости в точке (поле компонент) также являются функциями координат (x, y, z) и времени (t).

Характерной особенностью упомянутых здесь полей является то, что они выступают только в пределах весомых масс; они служат только для описания состояния вещества. На ранней стадии развития понятия поля считалось, что там, где нет вещества, не может существовать и поля. Однако в первой четверти девятнадцатого столетия было показано, что явления интерференции и распространения света могут быть объяснены с изумительной ясностью, если свет рассматривать как волновое поле, совершенно аналогичное полю механических колебаний в некотором упругом твердом теле. Таким образом, возникла необходимость ввести поле, которое могло бы существовать в пустом пространстве, в отсутствие весомой материи.

Это состояние проблемы привело к парадоксальной ситуации, так как по самой своей природе понятие поля возникло для описания состояний внутри весомых тел. Это казалось естественным, так как утвердилось убеждение, что каждое поле должно рассматриваться как некоторое состояние, допускающее механическую интерпретацию, что, конечно, предполагает присутствие вещества. Таким образом вынуждены были предположить существование всюду, даже в пространстве, которое прежде считалось пустым, некоторого рода материи, которая была названа «эфиром».

Эмансипация понятия поля от предположения о его связи с механическим носителем нашла отражение в психологически наиболее интересных процессах развития физической мысли. В течение второй половины XIX столетия, в связи с исследованиями Фарадея и Максвелла, становилось все более ясным, что полевое описание электромагнитных процессов значительно превосходит трактовку на основе механических концепций материальной точки. Введя понятия поля в электродинамику, Максвелл успешно предсказал существование электромагнитных волн, принципиальное тождество которых со световыми волнами, уже ввиду равенства их скорости распространения, не вызывало сомнений. В результате этого оптика в принципе была поглощена электродинамикой. *Один* психологический эффект этого огромного успеха состоял в том, что концепция поля, в противоположность механической картине классической физики, постепенно приобретала все бóльшую самостоятельность.

Тем не менее сначала допускали, что электромагнитные поля должны интерпретироваться как состояния эфира, и усердно пытались объяснить эти состояния как механические. Но поскольку все усилия оказывались тщетными, в науке постепенно стали привыкать к идее отказа от такой механической интерпретации. Несмотря на это, все еще оставалось убеждение, что электромагнитные поля должны представлять собой состояния эфира; это продолжалось вплоть до начала XX столетия.

Эфирная теория повлекла за собой следующий вопрос: как ведет себя эфир с механической точки зрения по отношению к весомым телам? Принимает ли он участие в движении этих тел или его части остаются в покое относительно друг друга? Для решения этого вопроса было предпринято много остроумных экспериментов. В этой связи должны быть отмечены следующие важные факты: «аберрация» неподвижных звезд вследствие годичного движения Земли и «эффект Допплера» (влияние относительного движения звезд на частоту излучаемого ими света, достигающего нас). Результаты всех этих наблюдений и опытов (за исключением одного, эксперимента Майкельсона — Морли) были объяснены Г. А. Лоренцом на основе предположения, что эфир не принимает участия в движениях весомых тел и что части эфира вообще не перемещаются относительно друг друга. Таким образом, эфир выступил как бы воплощением абсолютно покоящегося пространства. Но Лоренц достиг гораздо большего. Он объяснил все известные в то время электромагнитные и оптические процессы в весомых телах на основе предположения, что влияние весомой материи на электрическое поле, и обратно, обусловлено исключительно тем фактом, что составляющие материю частицы несут электрические заряды, которые участвуют в движении частиц. Что же касается эксперимента Майкельсона — Морли, то Г. А. Лоренц показал, что полученный результат по крайней мере не противоречит теории покоящегося эфира.

Несмотря на все эти замечательные успехи, состояние теории все еще не было полностью удовлетворительным по следующим причинам. Согласно классической механике, в справедливости которой, с высокой степенью точности, можно было бы не сомневаться, все инерциальные системы или инерциальные «пространства» эквивалентны для формулировки законов природы, т. е. законы природы инвариантны относительно перехода от одной инерциальной системы к другой. Электромагнитные и оптические *эксперименты* с высокой точностью говорили о том же. Но из основ электромагнитной *теории* следовало, что должно отдаваться предпочтение некоторой особой инерциальной системе отсчета, а именно системе, покоящейся относительно светового эфира. Такое понимание теоретических основ совершенно неудовлетворительно. Возник вопрос: нет ли модификаций этих основ, которые бы сохраняли, подобно классической механике, эквивалентность инерциальных систем (специальный принцип относительности)?

Ответом на этот вопрос явилась специальная теория относительности. Она приняла от теории Максвелла — Лоренца предположение о постоянстве скорости света в пустом пространстве. Чтобы согласовать это предположение с эквивалентностью инерциальных систем (специальный принцип относительности), необходимо было отказаться от идеи абсолютного характера одновременности; кроме того, для перехода от одной инерциальной системы к другой служили преобразования Лоренца для времени и пространственных координат. Все содержание специальной теории относительности заключено в постулате: законы природы инвариантны относительно преобразований Лоренца. Важное значение этого требования состоит в том, что оно определенным образом ограничивает возможные законы природы.

Каково отношение специальной теории относительности к проблеме пространства? В первую очередь мы должны предостеречь от того мнения, что четырехмерность реальности была введена впервые этой теорией. Даже в классической механике «положение» события определяется четырьмя числами: тремя пространственными координатами и одной временнóй координатой; таким образом, вся совокупность физических «событий» мыслится как бы погруженной в четырехмерное непрерывное многообразие (континуум). Но сообразно с классической механикой этот четырехмерный континуум распадается объективно на одномерное временнóе и на трехмерное пространственное сечения, причем лишь последнее из них содержит одновременные события. Это «расщепление» является одним и тем же для всех инерциальных систем. Одновременность двух определенных событий по отношению к одной инерциальной системе влечет за собой одновременность этих событий по отношению ко всем инерциальным системам. Это есть то, что имеют в виду, когда говорят об абсолютном времени в классической механике. Согласно же специальной теории относительности это уже не так. Хотя по отношению к некоторой определенной инерциальной системе существует совокупность событий, одновременных с каким-либо наблюдаемым событием, эта совокупность уже не будет независимой от выбора инерциальной системы. Четырехмерный континуум не распадается объективно на сечения, среди которых были бы сечения, содержащие все одновременные события; для пространственно протяженного мира понятие «сейчас» теряет свой объективный смысл. В связи с этим пространство и время должны рассматриваться как объективно нераспадающийся четырехмерный континуум, если желают выразить содержание объективных отношений без ненужного произвола

Тем, что специальная теория относительности показала физическую эквивалентность всех инерциальных систем, она доказала несостоятельность гипотезы покоящегося эфира. Поэтому необходимо было отказаться от идеи, что электромагнитное поле должно рассматриваться как состояние некоторого материального носителя. Таким образом, поле становится несводимым элементом физического описания, несводимым в том же смысле, что и понятие материи в теории Ньютона.

До сих пор мы обсуждали вопрос о том, в какой мере понятия пространства и времени были *модифицированы* специальной теорией относительности. Теперь же сконцентрируем наше внимание на тех элементах, которые эта теория приняла от классической механики. В ней законы природы претендуют на справедливость только в том случае, когда в качестве основы пространственно-временнóго описания принята инерциальная система. Закон инерции и принцип постоянства скорости света справедливы только по отношению к *инерциальной системе*. Можно также требовать, чтобы законы поля имели физический смысл и были справедливы только по отношению к инерциальным системам. Таким образом, как и в классической механике, пространство здесь является независимой составной частью в представлении физической реальности. Если мы представим себе, что материя и поле удалены, то остается (инерциальное) пространство, или, точнее говоря, это пространство вместе со связанным с ним временем. Эта четырехмерная структура (пространство Минковского) мыслится как носитель материи и поля. Инерциальные пространства, вместе со связанными с ними временами, являются привилегированными четырехмерными координатными системами, связанными линейными преобразованиями Лоренца. Так как в этой четырехмерной структуре не существует каких-либо сечений, которые объективно представляли бы «сейчас», понятия события и становления не исключаются полностью, но усложняются. Поэтому представляется более естественным мыслить физическую реальность как четырехмерные события вместо *развития* событий трехмерных.

Это жесткое четырехмерное пространство специальной теории относительности есть до некоторой степени аналог неподвижного трехмерного эфира Г. А. Лоренца. Для этой теории справедливо также следующее утверждение: описание физических состояний постулирует пространство как заданное с самого начала и существующее независимо. Таким образом, даже эта теория не рассеяла беспокойства Декарта, связанного с независимым или, быть может, *априорно* существующим «пустым пространством». Действительная цель нашего обсуждения — показать, до какой степени эти сомнения преодолены общей теорией относительности.

Понятие пространства в общей теории относительности

Эта теория возникла первоначально из попытки понять равенство инертной и тяжелой масс. Мы исходим из инерциальной системы S_1, пространство которой, с физической точки зрения, является пустым. Иными словами, в рассматриваемой части пространства не существует ни материя (в обычном смысле), ни поле (в смысле специальной теории относительности). Пусть по отношению к системе S_1 равноускоренно движется вторая система отсчета S_2. Тогда система S_2 будет неинерциальной. По отношению к S_2 каждая пробная масса должна двигаться с ускорением, которое не зависит от ее физической и химической природы. Поэтому относительно S_2 существует картина, которую, по крайней мере в первом приближении, нельзя отличить от гравитационного поля. Таким образом, с наблюдаемыми фактами совместима следующая концепция: система S_2 эквивалентна некоторой «инерциальной системе», в отличие от S_1, находящейся в (однородном) гравитационном поле (природой которого, в этой связи, не следует заниматься). Итак, когда в теорию введено гравитационное поле, инерциальная система теряет свое объективное значение, если предположить, что такой «принцип эквивалентности» может быть распространен на любое относительное движение любой системы отсчета. Если на основе этой фундаментальной идеи можно создать последовательную теорию, то само собой должен удовлетворяться надежно установленный эмпирический факт равенства инертной и тяжелой масс.

Нелинейные преобразования четырех координат, рассматриваемые в четырехмерном пространстве, соответствуют переходу от S_1 к S_2. Теперь возникает вопрос: какого рода нелинейные преобразования допустимы, или, как должно быть обобщено преобразование Лоренца? Для ответа на этот вопрос решающее значение имеет следующее рассуждение.

Инерциальной системе прежней теории мы приписываем такое свойство: разности координат измеряются покоящимися «твердыми» измерительными стержнями, а разности значений времени — покоящимися часами. Первое предположение дополняется другим предположением, а именно, что для относительного расположения измерительных стержней в покое выполняются теоремы эвклидовой геометрии о «расстояниях». Тогда из результатов специальной теории относительности, путем элементарных рассуждений, приходим к заключению, что оказывается утраченной прямая физическая интерпретация координат для системы отсчета (S_2), ускоренной относительно инерциальной системы (S_1). Но если это так, то координаты выражают только порядок или степень «близости», а следовательно, и размерность пространства, но не выражают никаких его метрических свойств. Мы пришли, таким образом, к распространению преобразований на произвольные непрерывные преобразования [5]. Это заключает в себе общий принцип относительности: законы природы должны быть ковариантны относительно произвольных непрерывных преобразований координат. Это требование (в сочетании с требованием наибольшей возможной логической простоты этих законов) ограничивает рассматривавшиеся законы природы несравнимо сильнее, чем специальный принцип относительности.

Такой ход мыслей существенно основан на понятии поля как независимом понятии. Так как условия, существующие по отношению к S_2, интерпретируются как гравитационное поле, несомненно наличие масс, которые создают это поле. На основании этого хода мыслей можно также понять, почему законы чисто гравитационного поля более непосредственно связаны с идеей общей относительности, чем законы полей более общего вида (например, электромагнитного поля). Именно, мы имеем хорошую основу для предположения, что «свободное от поля» пространство Минковского представляет собой возможный частный случай и даже простейший мыслимый частный случай. Что касается метрических свойств такого пространства, то оно характеризуется тем, что $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ есть квадрат измеренного единичным масштабом пространственного расстояния между двумя бесконечно близкими точками трехмерного сечения «пространственного типа» (теорема Пифагора), тогда как dx_4 есть измеренный совместно с (x_1, x_2, x_3) соответствующим временным масштабом интервал времени между двумя событиями. Как нетрудно показать с помощью преобразований Лоренца, все это просто означает, что объективный метрический смысл придается величине

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2. \tag{1}$$

Математически это означает, что величина ds^2 инвариантна по отношению к преобразованиям Лоренца.

Если теперь, в смысле общего принципа относительности, пространство [ср. формулу (1)] подвергается произвольному непрерывному преобразованию координат, то величина ds, имеющая объективный смысл, выражается в новой системе координат соотношением

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{1a}$$

где должно быть выполнено суммирование по индексам i и k для всех

[5] Эта не вполне точная формулировка, вероятно, достаточна здесь.

комбинаций 11, 12, . . ., 44. Компоненты g_{ik} теперь уже не константы, а функции координат, которые определены произвольно выбранным преобразованием. Тем не менее, компоненты g_{ik} являются не произвольными функциями новых координат, но функциями такого рода, что форма (1a) может быть преобразована снова в форму (1) непрерывным преобразованием четырех координат. Чтобы это было возможно, функции g_{ik} должны удовлетворять определенным общековариантным соотношениям, которые были выведены Б. Риманом более чем за полстолетия до формулирования общей теории относительности («условие Римана»). Согласно принципу эквивалентности, соотношение (1a) описывает в общековариантной форме гравитационное поле специального вида, если функции g_{ik} удовлетворяют условию Римана.

Отсюда следует, что уравнения чисто гравитационного поля общего вида должны быть удовлетворены, если выполняется условие Римана; но они должны быть слабее, чем условия Римана. Таким путем закон чисто гравитационного поля практически полностью определяется; мы не будем здесь обосновывать этого более детально.

Мы в состоянии теперь видеть, насколько переход к общей теории относительности видоизменяет понятие пространства. В соответствии с классической механикой и согласно специальной теории относительности, пространство (пространство-время) существует независимо от материи или поля. Для описания того, что заполняет пространство и зависит от координат, нужно, чтобы пространство-время, или инерциальная система, с ее метрическими свойствами, мыслились существующими с самого начала, так как иначе описание «того, что заполняет пространство», не имело бы смысла [6]. С другой стороны, согласно общей теории относительности, не существует отдельно пространство, как нечто противоположное «тому, что заполняет пространство» и что зависит от координат. Таким образом, чисто гравитационное поле может быть описано с помощью g_{ik} (как функций координат), путем решения уравнений гравитации. Если мы представим себе, что гравитационное поле, т. е. функции g_{ik}, устранено, то не останется не только пространства типа (1), но и вообще *ничего*, в том числе и «топологического пространства». В самом деле функции g_{ik} описывают не только поле, но и в то же самое время топологические и метрические структурные свойства многообразия. Пространство типа (1) с точки зрения общей теории относительности не есть пространство без поля, но представляет собой частный случай поля

[6] Если мы представим себе, что «то, что заполняет пространство» (например, поле) удалено, то все еще оставалось бы метрическое пространство, соответствующее форме (1), которое определяло бы также инерциальное поведение помещенного в него пробного тела.

g_{ik}, когда — в определенной системе координат, которая сама по себе не имеет объективного значения — функции g_{ik} имеют значения, независящие от координат. Пустое пространство, т. е. пространствобез поля, не существует. Пространство-время существует не само по себе, но только как структурное свойство поля.

Таким образом, Декарт был не так далек от истины, когда полагал, что существование пустого пространства должно быть исключено. Эта точка зрения действительно казалась абсурдной до тех пор, пока физическую реальность видели исключительно в весомых телах. Потребовалась идея поля, как реального объекта в комбинации с общим принципом относительности, чтобы показать истинную сущность идеи Декарта: не существует пространство, «свободное от поля».

Обобщенная теория гравитации

На основе общей теории относительности можно построить теорию чисто гравитационного поля, поскольку мы можем быть уверены в том, что «свободное от поля» пространство Минковского с его метрикой, соответствующей форме (1), удовлетворяет общим законам поля. Из этого частного случая закон тяготения следует в результате обобщения, которое практически свободно от произвола. Дальнейшее развитие теории определяется общим принципом относительности не столь однозначно; в течение последних десятилетий были предприняты попытки в различных направлениях. Общим для всех этих попыток было представление физической реальности как некоторого поля, которое является обобщением гравитационного поля и полевые законы которого являются обобщением закона чисто гравитационного поля. После долгих поисков (в которых приходилось идти ощупью) я думаю, что теперь нашел [7] наиболее естественную форму этого обобщения, но еще не в состоянии выяснить, может ли этот обобщенный закон выдержать сравнение с опытными фактами.

Для общей теории вопрос о законах этого особого поля является вторичным. Главный вопрос в настоящее время заключается в следующем: может ли теория поля рассмотренного здесь вида вообще привести нас к цели? Такая теория должна описать исчерпывающим образом физи-

---

[7] Это обобщение можно охарактеризовать следующим образом. В соответствии с их происхождением из пустого «пространства» Минковского, функции g_{ik} чисто гравитационного поля обладают свойством симметрии: $g_{ik} = g_{ki}$ ($g_{12} = g_{21}$ и т. д.). Обобщенное поле есть поле того же рода, но не обладающее этим свойством симметрии. Вывод закона поля полностью аналогичен выводу его в частном случае чистой гравитации.

ческую реальность как поле. Современное поколение физиков склонно ответить на этот вопрос отрицательно. Соглашаясь с современной формой квантовой теории, они считают, что состояние системы не может быть охарактеризовано непосредственно, но только косвенно, путем установления статистического распределения результатов измерений над системой. Преобладает убеждение, что надежно установленный экспериментально дуализм природы (корпускулярные и волновые свойства) может быть понят только на пути такого «ослабления» понятия реальности. Я думаю, что такая далеко идущая теоретическая уступка пока еще не оправдывается нашими фактическими знаниями и что не следует отказываться идти до конца по пути релятивистской теории поля.

ОТВЕТ ЧИТАТЕЛЯМ «ЕЖЕМЕСЯЧНИКА ПОПУЛЯРНОЙ НАУКИ»*

Не моя вина, что читатели получают преувеличенное представление о важности достигнутых результатов. В этом скорее повинны авторы популярных статей и в особенности корреспонденты газет, которые преподносят все насколько возможно сенсационно.

Разрешите мне ответить на Ваш вопрос.

Путем обобщения релятивистских уравнений гравитации, т. е. чисто математически, я пытался найти простые уравнения для полного поля. Я надеялся, что полученные таким образом уравнения будут справедливы для описания реального мира. Чтобы решить, в какой мере это справедливо, необходимо найти решения этих уравнений, которые описывали бы известные из опыта факты. До сих пор ни я, ни кто-либо другой не добились успеха в этом направлении; поэтому нет никакой возможности ответить на вопрос, является теория «верной» или нет. Причина этого заключается в сложности математической задачи.

Приведу пример, чтобы проиллюстрировать для неспециалиста создавшееся положение. Ньютоновская теория движения планет основана на эмпирических законах движения планет вокруг Солнца, открытых Кеплером. Эти простые законы достаточно точны, поскольку масса Солнца велика, а масса планет мала, так что взаимодействие планет между собой почти не возмущает их движения. Ньютон гипотетически предположил для них закон движения тел под действием силы притяжения. Эта теория была основана на нескольких удивительно простых предположениях. Чтобы показать справедливость теории, ему надо было вычислить траектории планет в соответствии с этой гипотезой. Тем самым можно было выяснить, согласуются ли вычисленные траектории с теми, которые дают эмпирические законы Кеплера. Вычисление траекторий на основе простых гипотез

* *Doctor Einstein Replies to PSM Readers.* Popul. Sci. Monthly, 1952, 160, N 4, 18.

было трудной задачей, но гений Ньютона справился с ней. Таким образом, теория Ньютона получила подтверждение.

Однако если бы планетная система состояла из тел примерно одинаковой массы, находящихся примерно на одинаковых расстояниях одно от другого, то траектории этих тел имели бы настолько сложную форму, что их нельзя было бы ни определить и описать эмпирически, ни вычислить на основе теории. Если бы такая ситуация действительно существовала, мы, возможно, никогда бы не узнали, справедлива теория Ньютона или нет.

Заметка представляет собой ответ на письмо одного из читателей журнала, который спрашивал, почему ничего не слышно о развитии новой теории Эйнштейна, которую газеты преподносили на первых полосах как сенсацию.

141

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ*

ПРИЛОЖЕНИЕ II К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ РАБОТЫ «СУЩНОСТЬ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ»

Содержание изложенной выше общей теории относительности формально выражается уравнением

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = T_{ik}. \tag{1}$$

Левая часть этого уравнения зависит только от симметричного тензора g_{ik}, описывающего как метрические свойства пространства, так и гравитационное поле. Правая часть уравнения (1) феноменологически описывает все источники гравитационного поля. Тензор T_{ik} представляет энергию, которая создает гравитационное поле, но сама не имеет гравитационного характера, как, например, энергия электромагнитного поля, энергия, связанная с плотностью вещества и т. д. При составлении тензора T_{ik} были использованы представления дорелятивистской физики, которые только a posteriori были согласованы с общим принципом относительности.

Такой дуалистической трактовки единого поля нельзя было избежать на первой стадии развития теории относительности. Было, однако, очевидно, что это только предварительный подход к проблеме. Отправной точкой теории явилось установление единства тяготения и инерции (принцип эквивалентности). Из этого принципа и из установленного факта, что свет определенным образом ведет себя в «пустом пространстве», следовало, что свойства последнего описываются симметричным тензором g_{ik}. Однако принцип эквивалентности не позволяет ответить на вопрос о том, каков наиболее общий математический аппарат, на котором следует строить те-

* *Generalization of Theory of Gravitation.* The Meaning of Relativity, fourth edition. Prinston, 1953 (Статья 60. Приложение II] появилось впервые во 2-м издании «Сущности теории относительности». Для 4-го издания оно было переработано.— *Прим. ред.*).

орию единого поля, охватывающего всю физическую реальность. В этом случае наши познания в области физики не позволяют сделать однозначного выбора, подобного тому, который следовал из эквивалентности инерции и тяготения для частного случая чисто гравитационного поля. Единственным указанием, которое можно извлечь из опыта, является смутное ощущение, что полное поле должно включать в себя нечто подобное электромагнитному полю Максвелла.

В результате попытка последовательного обобщения общей теории относительности ведет к явно туманной формулировке проблемы: найти структуру поля, являющуюся естественным обобщением симметричного тензора, и отыскать систему уравнений поля этой структуры, которые представляли бы естественное обобщение уравнений чистой гравитации

$$R_{ik} = 0. \tag{2}$$

Сейчас я попытаюсь дать решение этой проблемы, которое кажется мне в высшей степени убедительным, хотя вследствие математических трудностей еще не найдено практического пути для сравнения результатов теории с экспериментальными данными.

§ 1. Структура поля

Первая проблема заключается в следующем: каков естественный путь обобщения структуры поля? Что является естественным обобщением симметричного тензора g_{ik}?

Решение, сразу же приходящее в голову, заключается в замене симметричного тензора поля несимметричным. Именно такая структура поля кладется в основу излагаемой ниже теории.

Легко понять, почему этот путь, кажущийся на первый взгляд таким естественным, до последнего времени никогда серьезно не рассматривался. Если разложить тензор g_{ik} на его симметричную и антисимметричную части ($g_{\underline{ik}}$ и $g_{\underset{\vee}{ik}}$ соответственно) согласно уравнению

$$g_{ik} = g_{\underline{ik}} + g_{\underset{\vee}{ik}}, \tag{3}$$

то мы увидим, что каждая из этих двух частей сама по себе является тензором, т. е. при преобразовании координат компоненты каждой из частей преобразуются независимо от компонент другой части. Другими словами, несимметричный тензор g_{ik}, с точки зрения лоренцовой группы, не является неприводимым, а представляет собой произвольную и необоснованную комбинацию двух величин различной природы.

Это должно казаться веским возражением. Следует заметить, однако, что теоретико-групповые соображения отнюдь не являются единственным критерием для суждения о «единообразии» концепции несимметричного тензора поля. Действительно, в теории симметричного тензорного поля (теория Римана) очень важную роль играет определитель, составленный из g_{ik}. В частности, с его помощью становится возможным связать контравариантный тензор g^{ik} с ковариантным тензором g_{ik} согласно соотношению

$$g_{is}g^{it} = \delta_s^t = g_{si}g^{ti}, \tag{4}$$

где δ_s^t — тензор Кронекера. Эта связь, играющая фундаментальную роль в теории симметричного поля, может быть немедленно перенесена на случай несимметричного поля; в последнем случае, однако, необходимо сохранять порядок индексов. Это указывает на то, что, несмотря на приведенное выше возражение, введение несимметричного тензорного поля является естественным обобщением симметричного поля. Соотношение (4) позволяет поднимать и опускать индексы у тензора; однако в случае несимметричного поля эта операция уже не является однозначно определенной априори ($A_s g^{sk}$ и $A_s g^{ks}$ не равны друг другу), даже если задан «фундаментальный тензор».

§ 2. Аффинное смещение и абсолютное дифференцирование в случае несимметричного поля

Понятие бесконечно малого параллельного переноса вектора

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{st} A^s dx^t, \tag{5а}$$

$$\delta A_i = \Gamma^s_{it} A_s dx^t, \tag{5б}$$

может быть немедленно распространено и на нашу обобщенную теорию. При этом приходится, однако, считать, что Γ несимметричен по двум нижним индексам, так что нужно постулировать разумное соотношение между g_{ik} и Γ^l_{ik}.

Из (5а) и (5б) следует, что [1]

$$A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{sk} \tag{6а}$$

и

$$A_{i,k} - A_s\Gamma^s_{ik} \tag{6б}$$

[1] В дальнейшем запятая будет всегда означать частное дифференцирование например, $A^i_{,k} \equiv \dfrac{\partial A^i}{\partial x^k}$.

имеют тензорный характер, так же как и в случае симметричного Γ^l_{ik}. Из определений (5), аналогично случаю симметричного Γ, вытекает закон преобразования величин Γ^l_{ik}

$$\Gamma^{l^*}_{ik} = \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^t} \frac{\partial x^r}{\partial x^{i^*}} \frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}} \Gamma^t_{rs} - \frac{\partial^2 x^{l^*}}{\partial x^a \partial x^b} \frac{\partial x^a}{\partial x^{i^*}} \frac{\partial x^b}{\partial x^{k^*}}. \tag{7}$$

Разлагая Γ^l_{ik} соответственно симметрии нижних индексов на

$$\Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{\underline{ik}} + \Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}, \tag{8}$$

легко показать, что получаемые две величины преобразуются независимо друг от друга. Переставляя в (6б) индексы i и k и вычитая полученный таким образом тензор из (6б), мы получаем тензор

$$(A_{i,\,k} - A_{k,\,i}) - A_s (\Gamma^s_{ik} - \Gamma^s_{ki}).$$

Выражение в первой скобке имеет тензорный характер; поэтому то же должно быть справедливо для $A_s \Gamma^s_{\underset{\vee}{ik}}$, а следовательно, и для $\Gamma^s_{\underset{\vee}{ik}}$. Тогда из (6б) следует, что

$$A_{i,\,k} - A_s \Gamma^s_{\underline{ik}}$$

также является тензором. Следовательно, $\Gamma^s_{\underline{ik}}$ само является (симметричным) полем смещений.

С теоретико-групповой точки зрения, Γ^l_{ik} не является однородным образованием, так как с помощью разложения (8) его можно разбить на симметричное поле смещений $\Gamma^l_{\underline{ik}}$ и на антисимметричный тензор $\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}$ — аддитивную добавку, на первый взгляд кажущуюся нежелательной. Однако мы сейчас увидим, что, так же как и в аналогичном случае несимметричного тензора g_{ik}, это возражение не имеет решающего значения.

Если ввести определение

$$\tilde{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^l_{ki}, \tag{9}$$

то из (9) следует, что

$$\tilde{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^l_{\underline{ik}} + (-\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}).$$

Из формулы преобразования (7) мы видим, что $\tilde{\Gamma}^l_{ik}$ также является полем смещений. Транспонируя g_{ik}, можно таким же образом, конечно, построить и тензор $\tilde{g}_{ik} = g_{ki}$. В дальнейшем окажется важным рассматривать g, Γ и транспонированные величины $\tilde{g}$ и $\tilde{\Gamma}$ совместно.

Поскольку наряду со смещением Γ возможно смещение $\widetilde{\Gamma}$, то, согласно формулам (6а) и (6б), имеются две различные возможности абсолютного дифференцирования, которые следует рассматривать отдельно. Соответственно этому мы вводим следующие определения:

$$\left.\begin{aligned} A^{\overset{i}{+}}_{;k} &= A^{i}_{,k} + A^{s}\Gamma^{i}_{sk} \\ A^{\overset{i}{-}}_{;k} &= A^{i}_{,k} + A^{s}\Gamma^{i}_{ks} \end{aligned}\right\}, \tag{10а}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{\underset{+}{i};\,k} &= A_{i,\,k} - A_{s}\Gamma^{s}_{ik} \\ A_{\underset{-}{i};\,k} &= A_{i,\,k} - A_{s}\Gamma^{s}_{ki} \end{aligned}\right\}. \tag{10б}$$

Далее, так как иногда оказывается, что ковариантные производные содержат симметризованное Γ, то мы определим еще

$$A^{\overset{i}{0}}_{;k} = A^{i}_{,k} + A^{s}\Gamma^{i}_{\underline{sk}}, \tag{11а}$$

$$A_{\underset{0}{i};\,k} = A_{i,\,k} - A_{s}\Gamma^{s}_{\underline{ik}}. \tag{11б}$$

При абсолютном дифференцировании, так же как и в случае симметричного Γ, выполняются правила произведений и сумм, из которых, в частности, следуют правила дифференцирования тензоров более высокого ранга.

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство, не имеющее аналога в случае симметричного Γ: ковариантная производная тензора Кронекера δ_i^k обращается в нуль только в случаях

$$\delta_{\underset{+}{i}}{}^{\overset{k}{+}}{}_{;l};\quad \delta_{\underset{-}{i}}{}^{\overset{k}{-}}{}_{;l};\quad \delta_{\underset{0}{i}}{}^{\overset{k}{0}}{}_{;l},$$

тогда как, например,

$$\delta_{\underset{+}{i}}{}^{\overset{k}{-}}{}_{;l} = 0 + \delta_i^s\,\Gamma^k_{ls} - \delta_s^k\,\Gamma^s_{il} = 2\Gamma^k_{\underset{\vee}{li}} \neq 0.$$

Свертывание индексов под знаком дифференцирования (без добавления поправочных членов) по этой причине возможно, только если соответствующие индексы имеют один и тот же характер по отношению к дифференцированию. Так, например,

$$A^{\overset{i}{+}}{}_{\underset{+}{k}\ldots;\,l}\,\delta_i^k = A^{s}{}_{s\ldots;\,l}$$

Абсолютное дифференцирование тензорных плотностей

Величина

$$g_{\underset{+-}{ik};l}\,(=g_{ik,l}-g_{sk}\Gamma^s_{il}-g_{is}\Gamma^s_{lk}) \tag{12}$$

является тензором. Умножая на g^{ik} и свертывая по индексам i и k, мы получаем, согласно правилу дифференцирования определителей, вектор

$$\frac{w_{,l}}{w}-\Gamma^s_{\underline{ls}}, \tag{13}$$

где w означает $\sqrt{-\operatorname{Det}(g_{ik})}$, а w - скалярную плотность (ранга 1). Кроме того, если ρ — произвольная скалярная плотность (ранга 1), то ρ/w, а следовательно, и $\ln(\rho/w)$ являются скалярными величинами. Дифференцируя по x_l, получаем вектор

$$\frac{\rho_{,l}}{\rho}-\frac{w_{,l}}{w}. \tag{14}$$

Складывая векторы (13) и (14), получаем вектор

$$\frac{\rho_{,l}}{\rho}-\Gamma^s_{\underline{ls}}.$$

Умножение его на ρ дает векторную плотность

$$\rho_{,l}-\rho\Gamma^s_{\underline{ls}}.$$

Это выражение мы будем рассматривать как определение ковариантной производной $\rho_{;l}$ скалярной плотности ρ

$$\rho_{;l}=\rho_{,l}-\rho\Gamma^s_{\underline{ls}}. \tag{15}$$

Из этого определения, в частности, вытекает следующее тождество для скалярной плотности w:

$$\left(\frac{w_{;l}}{w}\right)_{,m}-\left(\frac{w_{;m}}{w}\right)_{,l}\equiv\Gamma^s_{\underline{ls},m}-\Gamma^s_{\underline{ms},l}. \tag{16}$$

Используя (15) и правило абсолютного дифференцирования произведений, мы можем уже знакомым путем распространить понятие абсолютного дифференцирования на тензорные плотности. Так, например,

$$(\rho \overset{i}{A^{+}})_{;k}=\rho_{;k}A^i+\rho A^i{}_{;k}$$

или, обозначая векторную плотность ρA^i через $\mathfrak{A}^i$,

$$\mathfrak{A}^{\overset{i}{+}}{}_{;k} = (\rho_{,k} - \rho\Gamma^s_{\underline{ks}})\, A^i + \rho\,(A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{sk}),$$

что можно записать в виде

$$\mathfrak{A}^{\overset{i}{+}}{}_{;k} = \mathfrak{A}^i_{,k} + \mathfrak{A}^s\Gamma^i_{sk} - \mathfrak{A}^i\Gamma^s_{\underline{ks}}. \tag{17}$$

Последний член отличает ковариантную производную векторной плотности от ковариантной производной вектора. Аналогичный результат получается и при абсолютном дифференцировании тензорных плотностей более высокого ранга. Свертывая (17), получаем

$$\mathfrak{A}^{\overset{t}{+}}{}_{;t} = \mathfrak{A}^t_{,t} + \mathfrak{A}^t\Gamma_t, \tag{18}$$

где мы ввели обозначение $\Gamma_t = \Gamma^s_{\underset{\vee}{ts}}$. Таким же образом получаем

$$\mathfrak{A}^{\overset{t}{-}}{}_{;t} = \mathfrak{A}^t{}_{,t} - \mathfrak{A}^t\Gamma_t. \tag{19}$$

Тождества для метрического тензора

Выведем теперь несколько тождеств, которые окажутся полезными в дальнейшем. Так же как и в предыдущем разделе, умножим тензор $g_{\underset{+-}{ik};l}$ на g^{ik} и свернем полученное выражение по i и k. Используя определение $w_{;l}$, можем написать

$$g^{ik}g_{\underset{+-}{ik};l} \equiv 2w_{;l}. \tag{20}$$

Умножим, далее $g_{\underset{+-}{ik};l}$ на $g^{it}g^{sk}$ и произведем свертку. Это дает (учитывая, что $g^{sk}g_{ik,l} = -g^{sk}{}_{,l}g_{ik}$)

$$g^{it}g^{sk}g_{\underset{+-}{ik};l} \equiv -g^{st}_{,l} - g^{it}\Gamma^s_{il} - g^{sk}\Gamma^t_{lk} \equiv -g^{\overset{st}{+-}}{}_{;l}. \tag{21}$$

Определим, наконец, $\mathfrak{g}^{ik}$ как $\mathfrak{g}^{ik} = wg^{ik}$. Для этой тензорной плотности выполняется соотношение

$$\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}{}_{;l} = \mathfrak{g}^{ik}{}_{,l} + \mathfrak{g}^{sk}\Gamma^i_{sl} + \mathfrak{g}^{is}\Gamma^k_{ls} - \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^s_{\underline{ls}}.$$

Антисимметризуя по индексам i и k и свертывая по k и l, получаем важное тождество

$$\frac{1}{2}\,(\mathfrak{g}^{it}{}_{;t} - \mathfrak{g}^{ti}{}_{;t}) \equiv \mathfrak{g}^{\overset{it}{\vee}}{}_{,t} - \mathfrak{g}^{\overset{it}{-}}\Gamma_t. \tag{22}$$

Риманова кривизна

Точно так же как и в случае симметричной теории, тензор кривизны можно получить путем параллельного переноса вектора вдоль границы бесконечно малого элемента поверхности

$$R^i_{klm} = (\Gamma^i_{kl,m} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km}) - (\Gamma^i_{km,l} - \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{kl}). \tag{23}$$

Другой тензор этого же типа получается при замене Γ^i_{kl} на $\widetilde{\Gamma}^i_{kl} (= \Gamma^i_{lk})$.

Свертывая (23) по i и m, получаем в результате тензор

$$R_{kl} = (\Gamma^t_{kl,t} - \Gamma^t_{sl}\Gamma^s_{kt}) - (\Gamma^t_{kt,l} - \Gamma^t_{st}\Gamma^s_{kl}). \tag{24}$$

§ 3. Вывод уравнений поля

Чтобы получить совместную систему уравнений, ограничимся случаем, когда система уравнений может быть выведена из вариационного принципа. Это гарантирует совместность уравнений.

В качестве наиболее общего подынтегрального выражения для нашего вариационного принципа мы выберем скалярную плотность $\mathfrak{H}$, построенную из $\mathfrak{g}^{ik}$, Γ^l_{ik} и их первых производных. Из вариационного принципа следует

$$\delta \int \mathfrak{H}\, d\tau = 0, \tag{25}$$

где $\mathfrak{g}^{ik}$ и Γ^l_{ik} должны варьироваться независимо друг от друга. Мы можем так выбрать $\delta\mathfrak{g}$ и $\delta\Gamma$, чтобы на границах области интегрирования они обращались в нуль. Тогда, производя интегрирования по частям, можно переписать (25) в следующей форме:

$$\int (\mathfrak{B}^{ik}_l \delta\Gamma^l_{ik} + W_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik})\, d\tau = 0. \tag{25a}$$

Так как $\delta\mathfrak{g}$ и $\delta\Gamma$ независимы, коэффициенты при них должны обращаться в нуль, и мы получаем уравнения поля

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}^{ik}_l &= 0 \\ W_{ik} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{I}$$

Посмотрим, что получится, если варьировать интеграл (25) при дополнительном условии

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0. \tag{26}$$

Введение априори этого соотношения между компонентами $\mathfrak{g}^{ik}$ означает, что $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ не являются уже независимыми. Чтобы учесть это, мы можем, например, использовать метод неопределенных множителей Лагранжа. Тогда после интегрирования по частям находим

$$\int (\mathfrak{B}_l^{ik}\delta\Gamma_{ik}^l + [W_{ik} + \sigma_{i,k} - \sigma_{k,i}]\delta\mathfrak{g}^{ik})\,d\tau = 0,$$

где σ_i — векторное поле множителей Лагранжа, которое позволяет нам теперь рассматривать $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ как независимые переменные. Таким образом, мы приходим к уравнениям

$$\mathfrak{B}_l^{ik} = 0; \qquad \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}{}_{,s} = 0; \quad W_{ik} + (\sigma_{i,k} - \sigma_{k,i}) = 0,$$

или, исключая вспомогательные переменные σ_i,

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{B}_l^{ik} = 0; \quad \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}{}_{,s} = 0 \\ &W_{\underline{ik}} = 0; \quad W_{\underline{ik},l} + W_{\underset{\vee}{kl},i} + W_{\underset{\vee}{li},k} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{II}$$

Система уравнений (II) отличается от системы (I) тем, что шесть уравнений системы (I) $W_{\underset{\vee}{ik}} = 0$ заменены в ней восемью уравнениями

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}{}_{,s} = 0; \quad W_{\underset{\vee}{ik},l} + W_{\underset{\vee}{kl},i} + W_{\underset{\vee}{li},k} = 0.$$

Левые части этих восьми уравнений удовлетворяют двум тождествам

$$(\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}{}_{,s})_{,i} \equiv 0$$

и

$$(W_{\underset{\vee}{ik},l} + W_{\underset{\vee}{kl},i} + W_{\underset{\vee}{li},k})_{,m}\,\eta^{iklm} \equiv 0$$

(η^{iklm} — антисимметричная по всем четырем индексам тензорная плотность Леви-Чивиты).

Кажется очевидным (и это будет строго доказано ниже, см. стр. 786), что при любом выборе тензорной плотности $\mathfrak{H}$ для вариационного принципа эти восемь уравнений и два тождества более жестко определяют переменные поля, чем шесть уравнений системы (I). В качестве физической теории я склонен предпочесть более «жесткую» систему (II) системе (I). Такой принцип предпочтения более жестких систем более слабым представляется мне имеющим всеобщую применимость.

Тождества Бианки

В чисто гравитационной теории мы знаем четыре тождества Бианки. Следуя Вейлю, их можно получить из вариационного принципа, используя инвариантность по отношению к группе преобразований координат.

Та же самая процедура может быть проделана и в несимметричной теории. Предположим, что $\delta\Gamma^l_{ik}$ и $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ возникли в результате бесконечно малого преобразования координат. Тогда получаем [2]

$$\delta\Gamma^l_{ik} = \Gamma^s_{ik}\xi^l_{,s} - \Gamma^l_{sk}\xi^s_{,i} - \Gamma^l_{is}\xi^s_{,k} - \xi^l_{,ik} - \Gamma^l_{ik,s}\xi^s,$$

$$\delta\mathfrak{g}^{ik} = \mathfrak{g}^{sk}\xi^i_{,s} + \mathfrak{g}^{is}\xi^k_{,s} + \mathfrak{g}^{ik}\xi^s_{,s} - \mathfrak{g}^{ik}_{s,}\xi^s.$$

Подставляя эти выражения в варьируемый интеграл $\delta\int\mathfrak{H}\,d\tau = 0$ и выполняя необходимые интегрирования по частям, мы можем привести интеграл к следующему виду

$$\int \mathfrak{M}_i\xi^i d\tau = 0, \tag{27}$$

откуда следуют четыре тождества Бианки

$$\mathfrak{M}_i \equiv 0. \tag{28}$$

Конкретное содержание этих тождеств зависит, конечно, от выбора $\mathfrak{H}$ в вариационном принципе. Однако даже не делая этого выбора, мы можем видеть, как тождества (28) связывают уравнения поля, следующие из общего вариационного принципа $\delta\int\mathfrak{H}\,d\tau = 0$. Действительно, если мы подставим $\delta\Gamma^l_{ik}$ и $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ в (25а) и приведем его к виду (27), то увидим, что $\mathfrak{M}_i$ линейно зависят от $\mathfrak{B}^{ik}_{l,}$, W_{ik} и их первых производных, так что если удовлетворяются уравнения поля (I), то (28) представляют собой тождественные соотношения между этими уравнениями поля. То же самое справедливо и в случае системы (II), но, чтобы увидеть это, необходимо выделить симметричную и антисимметричную части W_{ik}, входящие в $\mathfrak{M}_i$. Вклад W_{ik} в $\mathfrak{M}_i$ равен

$$[-2(W_{\underline{s}i}\mathfrak{g}^{\underline{st}})_{,t} + W_{\underline{s}k,i}\mathfrak{g}^{sk}] + \mathfrak{g}^{sk}[W_{k\underset{\vee}{i},s} +$$
$$+ W_{\underset{\vee}{is},k} + W_{\underset{\vee}{s}k,i}] + [-W_{i\underset{\vee}{k}}\mathfrak{g}^{tk}_{,t} + W_{i\underset{\vee}{k}}\mathfrak{g}^{kt}_{,t}].$$

Последняя скобка как раз равна $2W_{\underset{\vee}{s}k}\mathfrak{g}^{kt}_{,\underset{\vee}{t}}$ (= 0, согласно (26)). Таким образом, мы видим, что и в случае системы (II) $\mathfrak{M}_i$ являются линейными комбинациями уравнений поля.

---

[2] Последний член в каждой строке появляется вследствие того, что варьируемые величины должны браться при фиксированных значениях координат.

Выбор гамильтониана $\mathfrak{H}$

Вопрос о выборе тензорной плотности $\mathfrak{H}$ для вариационного принципа пока оставался открытым. До сих пор ничего не говорилось о виде $\mathfrak{H}$. Чтобы сделать какой-то выбор, наложим следующее условие на вариационный принцип: из него должно следовать (по возможности) наиболее простое соотношение между g и Γ, а именно:

$$g_{\underset{+-}{ik};l} = 0. \tag{29}$$

Условие (29) является обобщением соотношения в симметричной теории. Это условие обладает свойством инвариантности относительно транспонирования (которое, конечно, не имеет смысла в симметричной теории); это означает, что уравнения остаются справедливыми при замене

$$g_{ik} \text{ на } \tilde{g}_{ik} \, (\equiv g_{ki}) \text{ и } \Gamma^i_{kl} \text{ на } \tilde{\Gamma}^i_{kl} \, (\equiv \Gamma^i_{lk}).$$

Это является математическим выражением того факта, что для теории безразличен знак заряда электричества.

Плотность $\mathfrak{H}$, удовлетворяющая поставленному выше условию, может быть действительно найдена. Начнем с рассмотрения свернутого тензора кривизны

$$R_{ik} = [\Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{tk}] - [\Gamma^s_{is,k} - \Gamma^t_{ik}\Gamma^s_{\underline{ts}}]. \tag{24}$$

Сначала прибавим к R_{ik} тензор $\Gamma_{\underset{+}{i};k} = \Gamma^s_{\underset{\vee}{is},k} - \Gamma^t_{ik}\Gamma^s_{\underset{\vee}{ts}}$; при этом R_{ik} заменится на

$$\overset{*}{R}_{ik} = [\Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{tk}] - [\Gamma^s_{\underline{is},k} - \Gamma^t_{ik}\Gamma^s_{ts}].$$

Для выражения во второй скобке мы используем теперь уравнение, определяющее абсолютное дифференцирование скалярной плотности,

$$w_{;t} = w_{,t} - w\Gamma^s_{\underline{ts}}. \tag{15}$$

После перегруппировки членов это дает

$$\overset{*}{R}_{ik} = [\Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{tk}] - \left[\left(\frac{w_{,i}}{w}\right)_{,k} - \left(\frac{w_{,t}}{w}\right)\Gamma^t_{ik}\right] + \left[\left(\frac{w_{;i}}{w}\right)_{,k} - \left(\frac{w_{;t}}{w}\right)\Gamma^t_{ik}\right].$$

Последняя скобка равна просто тензору $[(1/w)\, w_{,\underset{+}{i}}]_{;k}$. Вычитая этот тензор из $\overset{*}{R}_{ik}$, получаем

$$\overset{**}{R}_{ik} = \Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{tk} - (\ln w)_{,ik} + (\ln w)_{,t}\Gamma^t_{ik}. \tag{24a}$$

По построению $\overset{**}{R}_{ik}$ является тензором и, действительно, мы сейчас проверим, что плотность $\mathfrak{g}^{ik}\overset{**}{R}_{ik}$ может быть использована для нашего вариационного принципа и дает при этом нужный нам результат. Проварьируем интеграл $\int \mathfrak{g}^{ik}\overset{**}{R}_{ik}d\tau$ сначала по Γ (когда дополнительное условие $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{i}s}_{,s} = 0$ не играет роли). Мы получим уравнение

$$\mathfrak{g}^{ik}_{,l} + \mathfrak{g}^{tk}\Gamma^{i}_{tl} + \mathfrak{g}^{it}\Gamma^{k}_{lt} - \mathfrak{g}^{ik}(\ln w)_{,l} = 0. \tag{30}$$

Заменяя $\mathfrak{g}^{ik}$ на wg^{ik} и деля все уравнения на w, находим

$$0 = g^{ik}_{,l} + g^{tk}\Gamma^{i}_{tl} + g^{it}\Gamma^{k}_{lt} = g^{\underset{+-}{ik}}_{;l}, \tag{30a}$$

что, согласно тождествам (20) и (21), приводит к нужному результату

$$g_{\underset{+-}{ik};l} = 0; \qquad \mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}_{;l} = 0; \qquad w_{;l} = 0.$$

Поскольку у нас есть теперь уравнения $\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}_{;l} = 0$ и $g^{\underset{\vee}{i}s}_{,s} = 0$, то из тождества (22) видно, что выполняются также соотношения

$$\Gamma_i = 0. \tag{31}$$

Отсюда, далее, вытекает, что $\overset{**}{R}_{ik}$ оказывается теперь равным R_{ik}, так как разность между этими двумя тензорами сводится к величине

$$\Gamma_{\underset{+}{ik}} - \left(\frac{1}{w}w_{;\underset{+}{i}}\right)_{;k},$$

которая равна нулю.

Нам осталось получить остальные уравнения. Найдем их, варьируя $\int \mathfrak{g}^{ik}\overset{**}{R}_{ik}d\tau$ по $\mathfrak{g}^{ik}$.

После интегрирования по частям имеем

$$0 = \int [\overset{**}{R}_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} - \{\mathfrak{g}^{ik}_{,ik} + (\mathfrak{g}^{ik}\Gamma^{t}_{ik})_{,t}\}\,\delta(\ln w)]d\tau.$$

Но коэффициент при $\delta(\ln w)$ обращается в нуль, поскольку он может быть записан в виде

$$\{\mathfrak{g}^{ik}_{,i} + \mathfrak{g}^{it}\Gamma^{k}_{it}\}_{,k} = \{\mathfrak{g}^{ik}_{;i}\}_{,k} = 0.$$

Поэтому у нас остается

$$\int \overset{**}{R}_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik}d\tau = 0.$$

Вариации $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ не являются независимыми вследствие условия

$\mathfrak{g}^{is}_{,\check{s}} = 0$, и мы используем, как это уже делалось выше, метод неопределенных множителей Лагранжа. В результате получаются уравнения (мы можем теперь писать R_{ik} вместо R^{**}_{ik}):

$$R_{\underline{ik}} = 0, \qquad R_{\check{ik},l} + R_{\check{kl},i} + R_{\check{li},k} = 0.$$

Выписывая полную систему уравнений, мы замечаем, что в силу тождества (22) уравнения $\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}_{;l} = 0$ и $\Gamma_i = 0$ вместе эквивалентны уравнениям $\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}_{;l} = 0$ и $\mathfrak{g}^{is}_{,\check{s}} = 0$. Поэтому нашу систему можно выбрать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{g}_{\underset{+-}{ik};l} = 0; && \Gamma_i = 0 \\ &R_{\underline{ik}} = 0; && R_{\check{ik},l} + R_{\check{kl},i} + R_{\check{li},k} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{IIa}$$

Эта система уравнений обладает свойством инвариантности относительно транспонирования; это непосредственно видно для уравнений $\mathfrak{g}_{\underset{+-}{ik};l} = 0$ и $\Gamma_i = 0$. Для двух других инвариантность легко проверить, заменяя R_{ik} на R^{**}_{ik}.

Мы должны теперь выяснить, можно ли выбрать какое-нибудь другое выражение для $\mathfrak{H}$, которое также приводило бы к уравнению $g_{\underset{+-}{ik};l} = 0$. Предположим, что мы нашли такую плотность $\mathfrak{H}^*$, причем $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} + \mathfrak{K}$. Если $\mathfrak{K}$ зависит от Γ, то оно дает свой вклад при варьировании по Γ. С другой стороны, чтобы выполнялось уравнение $g_{\underset{+-}{ik};l} = 0$, этот вклад должен тождественно обращаться в нуль. Мы можем без доказательства принять, что это означает, что $\mathfrak{K}$ не может зависеть от Γ. Остается возможность, что $\mathfrak{K}$ построено только из g_{ik}, как, например, w или $wg^{ik}g_{ki}$ и т. д. (Первая из этих возможностей ведет к так называемому «космологическому члену».) Все такие дополнительные члены внесли бы неоднородность в систему уравнений и их следует отбросить, если только не будут найдены веские физические аргументы в их пользу.

Замечания относительно физической интерпретации системы уравнений. При физической интерпретации теории на первый план выступает вопрос: в какой степени имеется сходство между этой теорией и теорией Максвелла? Есть формальное сходство между линейным приближением к этой теории и уравнениями Максвелла. Можно показать, что в линейном приближении система распадается на две системы уравнений: одну — для симметричных компонент поля и другую — для антисимметричных компонент. Уравнения для антисимметричной части являются обобщением уравнений Максвелла для пустого пространства. Расщепление уравнений в линейном приближении делает понятным, почему электромагнитное и гравитационное поля казались независимыми на начальной стадии развития наших теоретических идей. Дело в том, что эти идеи основывались исключительно на известных нам данных о поведении слабых полей.

В строгой теории такой независимости уже нет. Во всяком случае, сходство с теорией Максвелла не очень близкое; в частности, локализация энергии оказывается совершенно другой. Однако имеются и следующие общие черты.

Вид уравнения $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0$ наводит на мысль, что его можно интерпретировать как условие обращения в нуль магнитного тока. Кроме того, величины

$$g_{\underset{\vee}{ik},l} + g_{\underset{\vee}{kl},i} + g_{\underset{\vee}{li},k}$$

или соответствующую векторную плотность

$$\mathfrak{J}^m = \frac{1}{6}\left(g_{\underset{\vee}{ik},l} + g_{\underset{\vee}{kl},i} + g_{\underset{\vee}{li},k}\right)\eta^{iklm}$$

можно интерпретировать как плотность электрического тока, так как эти величины тождественно удовлетворяют «уравнению непрерывности»

$$\mathfrak{J}^m_{,m} = 0.$$

Другой вывод уравнений поля

Приведенный выше вывод уравнений поля, в котором использовался вспомогательный тензор $\overset{**}{R}_{ik}$, имеет некоторые преимущества. Вариация по Γ непосредственно дает уравнение $g_{\underset{+\,-}{ik};l} = 0$. Кроме того, когда мы в уравнениях заменяем R_{ik} на $\overset{**}{R}_{ik}$, сразу становится очевидной инвариантность относительно транспонирования.

Однако, с другой стороны, этот вывод имеет и свои недостатки, так как $\overset{**}{R}_{ik}$ вводится искусственным путем; кроме того, этот вывод позволяет допустить, что с тем же основанием можно выбрать антисимметричную часть поля ($g_{\underset{\vee}{ik}}$ и $\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}$) чисто мнимой. Поэтому мы считаем нужным коротко упомянуть о другом выводе, свободном от указанных недостатков.

Сопоставим каждому полю Γ^l_{ik} семейство полей Γ^{l+}_{ik}, связанных друг с другом соотношением

$$\Gamma^{l+}_{ik} = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \lambda_k \qquad («\lambda\text{-преобразование»}),$$

где λ_k — произвольное векторное поле [3]. Нетрудно показать, что совокупность преобразований координат и λ-преобразований образует группу («расширенная группа»). Возникает вопрос, можно ли найти вариационный принцип (опять с априорным условием $g^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0$), инвариантный относительно расширенной группы.

Применяя λ-преобразование к R_{ik}, получаем

$$R^{+}_{ik} = R_{ik} - (\lambda_{i,\,k} - \lambda_{k,\,i}).$$

Тензорная плотность $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik}R_{ik}$ преобразуется поэтому следующим образом:

$$(\mathfrak{g}^{ik}R^{+}_{ik} =)\, \mathfrak{H}^{+} = \mathfrak{H} - \mathfrak{g}^{ik}(\lambda_{i,k} - \lambda_{k,i}) = \mathfrak{H} + 2\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}\lambda_{k,\,i}.$$

Пользуясь условием $0 = \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s}$, мы можем переписать это в виде

$$\mathfrak{H}^{+} = \mathfrak{H} + 2\,(\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}\lambda_k)_{,\,i}.$$

Второй член при интегрировании дает поверхностный интеграл и поэтому ничего не вносит при варьировании. Отсюда следует, что вариационный принцип

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\right\} = 0$$

и вытекающие из него уравнения инвариантны относительно λ-преобразований.

Можно показать, что вариация по Γ приводит к уравнению

$$-\mathfrak{g}^{\overset{+-}{ik}}_{;l} + \mathfrak{g}^{\overset{+-}{it}}_{;t}\delta^k_l + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma_l + \mathfrak{g}^{it}\Gamma_t\delta^k_l = 0.$$

Отсюда вытекает, что $\mathfrak{g}^{\overset{+-}{i\,k}}_{;\,l} = 0$, если выполняется условие $\Gamma_i = 0$. Но этого можно добиться (благодаря λ-инвариантности вариационного принципа) соответствующим выбором λ_k («нормировка» Γ-поля).

Таким образом, мы приходим к тем же уравнениям, что и при использовании первого метода. При этом, однако, существенно, что Γ^l_{ik} вещественны, а $\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}$ уже не имеют инвариантного смысла при преобразованиях расширенной группы. Если мы опять потребуем, чтобы выполнялось уравнение $g_{\underset{+\,-}{i\,k};\,l} = 0$, то с помощью тех же рассуждений, как и раньше (стр. 774), мы увидим, что в функцию Гамильтона нельзя ввести никаких добавочных членов.

[3] Это преобразование, очевидно, «смешивает» симметричную и антисимметричную части Γ-поля, так что $\Gamma^i_{\underset{\vee}{kl}}$ не может быть при этом выбрано мнимым.

§ 4. Общие замечания относительно «жесткости» системы уравнений. Применение к теории несимметричного поля

В предыдущем параграфе (стр. 770) мы из двух систем уравнений (I) и (II) отдали предпочтение второй. Принцип, которому мы при этом следовали, имеет всеобщую применимость к физическим теориям: систему уравнений следует выбирать так, чтобы полевые величины определялись этой системой *как можно более жестким образом.*

Чтобы применять этот принцип, нам нужен метод, который позволял бы дать меру жесткости системы уравнений. Поступим следующим образом: разложим переменные поля вблизи точки P в ряд Тэйлора (предполагается аналитический характер поля). Коэффициенты разложения, которые представляют собой не что иное, как производные переменных поля в точке P, распадаются на группы соответственно порядку дифференцирования. В каждом порядке дифференцирования мы на первых порах получаем набор коэффициентов, которые можно было бы выбрать произвольно, если бы поле не должно было удовлетворять системе уравнений. Благодаря наличию системы дифференциальных уравнений (и уравнений, получаемых из них путем дифференцирования по координатам) число независимых коэффициентов уменьшается, так что в каждой группе уже меньшее число коэффициентов может быть выбрано произвольно. Количество «свободных» коэффициентов в каждой группе непосредственно дает меру «слабости» системы уравнений и, таким образом, определяет и «жесткость» системы.

Этот метод подсчета числа свободных коэффициентов в каждом порядке дифференцирования предполагает, что число их можно вычислять последовательно порядок за порядком. Мы можем также ограничиться случаем, когда все эти числа положительны, т. е. когда уравнения для коэффициентов одного порядка не накладывают добавочных условий на коэффициенты предыдущих порядков. В таком случае мы будем говорить, что система уравнений «абсолютно совместна». Все системы уравнений, применявшиеся до сих пор в теоретической физике, по-видимому, имеют такой характер.

Проиллюстрируем этот метод несколькими примерами. Волновое уравнение в пространстве четырех измерений имеет вид

$$0 = \Box\varphi = \varphi_{,1,1} + \varphi_{,2,2} + \varphi_{,3,3} - \varphi_{,4,4}.$$

Система уравнений в этом случае состоит из одного уравнения для одной функции φ. В окрестности какой-либо точки, например $x_i = 0$,* φ разлагается в степенной ряд следующего вида:

$$\varphi = c + (c_i x_i) + (c_{ik} x_i x_k) + \ldots$$

Таким образом, φ будет определено, если мы зададим значения коэффициентов c для всех членов разложения (т. е. производные φ в точке $x_i = 0$). Количество коэффициентов на каждой последовательной ступени вычислений приведено в следующей таблице:

Порядок	Число коэффициентов
0	1
1	$4 = \binom{4}{1}$
2	$\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = \binom{4}{2}$
3	$\frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = \binom{4}{3}$
. . .	. . . .
n	$\frac{4\cdot 5\ldots(n+3)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} = \binom{4}{n}$

Количество этих коэффициентов уменьшается вследствие условий, вытекающих из дифференциального уравнения. Эти условия получаются при учете дифференциального уравнения и всех уравнений, получаемых путем последовательного дифференцирования исходного уравнения, в точке $x_i = 0$.

Порядок	Число условий
0	0
1	0
2	1
3	$\binom{4}{1}$
. . .	. . . .
n	$\binom{4}{n-2}$

Вычитая из числа коэффициентов данного порядка соответствующее число условий, получим число коэффициентов данного порядка Ω_n, остающихся произвольными. Для числа свободных коэффициентов степени n (> 2) находим

$$\Omega_n = \binom{4}{n} - \binom{4}{n-2},$$

или

$$\Omega_n = \binom{4}{n}\left(1 - \frac{n}{n+3}\,\frac{n-1}{n+2}\right) = \binom{4}{n}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{3}{n}}\,\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right).$$

При больших n это равенство можно заменить на

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\frac{6}{n}.$$

Множитель $6/n$ дает ту часть общего числа коэффициентов (порядка $n \gg 1$), которые остаются не определенными дифференциальным уравнением. Величина Ω_n, таким образом, является мерой жесткости, с которой дифференциальное уравнение определяет поле. Будучи положительным, число Ω_n характеризует эту систему как «абсолютно совместную».

Эти же соображения можно без всякого изменения перенести на более сложное уравнение

$$A_{ik}\varphi_{,ik} + B = 0,$$

где A_{ik} и B — известные функции φ и $\varphi_{,s}$. Продифференцировав это уравнение $(n-2)$ раз в точке $x_i = 0$, найдем, что n-я производная от φ входит в выражение линейно, тогда как производные низших степеней входят более сложным образом. При меньшем числе дифференцирований n-я производная от φ вообще не появляется. Это позволяет последовательно проводить дифференцирование различных порядков. Схема, показывающая число условий, которые следуют из дифференциальных уравнений, дает в правом столбце число уравнений, в которых порядок дифференцирования, указанный в левом столбце, появляется в первый раз (и появляется линейно).

Главная трудность, возникающая при применении намеченного выше метода к системам, состоящим более чем из одного дифференциального уравнения, заключается в правильном учете тождества между уравнениями. Мы покажем, как это делается на примере уравнений Максвелла для вакуума.

Уравнения Максвелла для пустого пространства

Запишем уравнения Максвелла в форме Минковского (с мнимой временной координатой):

$$(U_i \equiv)\,\varphi_{is,s} = 0,$$

$$(V_{ikl} \equiv)\,\varphi_{ik,l} + \varphi_{kl,i} + \varphi_{li,k} = 0,$$

где φ_{ik} — (антисимметричный) тензор электромагнитного поля. Эти уравнения удовлетворяют тождествам

$$U_{i,i} = 0,$$
$$V_{ikl,m}\eta^{iklm} = 0.$$

Поскольку φ_{ik} имеет шесть компонент, число коэффициентов разложения в ряд Тэйлора на n-м этапе равно $6\binom{4}{n}$. Эти коэффициенты связаны между собой алгебраическими уравнениями, получаемыми при $(n-1)$-кратном дифференцировании уравнений поля. Число этих условий (алгебраических уравнений) равно

$$4\binom{4}{n-1} + 4\binom{4}{n-1}.$$

Однако вследствие существования тождеств эти условия не независимы. Действительно, между коэффициентами n-го этапа существуют соотношения, выполняющиеся тождественно, как это следует из $(n-2)$-кратного дифференцирования выписанных выше тождеств. Число таких тождественных соотношений между коэффициентами равно

$$\binom{4}{n-2} + \binom{4}{n-2}.$$

Число *независимых* соотношений между коэффициентами n-го этапа, следовательно, равно

$$8\binom{4}{n-1} - 2\binom{4}{n-2}.$$

Вычитая это число из (полного) числа $6\binom{4}{n}$ коэффициентов на n-м этапе, мы получаем число Ω_n коэффициентов, остающихся неопределенными на n-м этапе:

$$\Omega_n = 6\binom{4}{n} - \left[8\binom{4}{n-1} - 2\binom{4}{n-2}\right].$$

В этом месте удобно использовать асимптотическое выражение $(n \gg 1)$

$$\binom{4}{n-r} \sim \binom{4}{n}\left(1 - \frac{3r}{n}\right) \qquad (r \ll n).$$

Отсюда следует, что

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\left[6 - 8\left(1 - \frac{3}{n}\right) + 2\left(1 - \frac{6}{n}\right)\right],$$

или

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\frac{12}{n}.$$

Мы видим, что на n-м этапе здесь остается вдвое больше свободных коэффициентов, чем в случае скалярного волнового уравнения.

Прежде чем оставить этот пример, остановимся на одном пункте, который необходим как для понимания используемого здесь метода, так и для формального понимания этой конкретной системы уравнений.

Если в выписанные выше уравнения введем вектор-потенциал ψ_i, определяемый соотношением

$$\varphi_{ik} = \psi_{i,k} - \psi_{k,i},$$

то увидим, что второе уравнение выполняется автоматически, в то время как первое дает

$$(W_i \equiv)\, \psi_{i,s,s} - \psi_{s,s,i} = 0.$$

Это система четырех уравнений для четырех компонент ψ_i, причем между ними имеется одно тождество $W_{i,i} \equiv 0$. Таким образом, эти уравнения неоднозначно определяют векторное поле ψ_i, из которого мы обратно можем получить первоначальную систему уравнений. Как известно, для однозначного определения ψ_i-поля необходимо дополнить эту (промежуточную) систему уравнением $\psi_{s,s} = 0$. При этом получается система

$$(A_i \equiv)\, \psi_{i,s,s} = 0,$$

$$(B \equiv)\, \psi_{s,s} = 0.$$

Приведенное выше тождество принимает форму

$$A_{i,i} - B_{s,s} \equiv 0.$$

Эта система включает в себя промежуточную систему, а с ней и первоначальную систему уравнений для φ_{ik}. Следовательно, эта система определяет φ_{ik} с той же самой жесткостью, что и первоначальная система; представляется интересным вычислить также жесткость, с которой определяются ψ_i. Метод подсчета коэффициентов n-го порядка дает в этом случае

$$\Omega_n = 4\binom{4}{n} - \left[4\binom{4}{n-2} + \binom{4}{n-1} - \binom{4}{n-3}\right],$$

или, асимптотически,

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\left(\frac{24}{n} + \frac{3}{n} - \frac{9}{n}\right) = \binom{4}{n}\frac{18}{n}.$$

Сравнение с результатами, относящимися к первоначальной системе уравнений, показывает, что ψ_i-поле определяется менее жестко, чем φ_{ik}-поле. С этой точки зрения, следует отдать предпочтение первоначальной форме уравнений Максвелла, если нет причин приписывать независимый физический смысл переменным ψ_i. Причиной разной жесткости этих двух систем уравнений является то, что, даже зная полностью φ_{ik}, мы не можем однозначно определить ψ_i. Сейчас мы разберем это подробно, так как этот случай позволяет проиллюстрировать, как при подсчете учесть «тождества между тождествами». Пусть φ_{ik} заданы, а ψ_i удовлетворяет уравнениям

$$(C_{ik} \equiv)\, \psi_{i,k} - \psi_{k,i} = \varphi_{i,k},$$
$$(B \equiv)\, \psi_{s,s} = 0$$

(где заданные φ_{ik} удовлетворяют уравнению $\varphi_{ik,l} + \varphi_{kl,i} + \varphi_{li,k} = 0$). Первое из этих уравнений удовлетворяет тождеству

$$(D_{ikl} \equiv)\, C_{ik,l} + C_{kl,i} + C_{li,k} \equiv 0.$$

Однако эти четыре тождества не независимы друг от друга, поскольку сами D_{ikl} удовлетворяют тождеству

$$D_{ikl,m}\eta^{iklm} \equiv 0,$$

выполняющемуся при любых (антисимметричных) C_{ik}. Это тождество между компонентами D_{ikl} меняет на каждом этапе результат подсчета коэффициентов. Не проводя доказательства, приведем лишь результат

$$\Omega_n = 4\binom{4}{n} - \left[\left\{6\binom{4}{n-1} + \binom{4}{n-1}\right\} - \left\{4\binom{4}{n-2} - \binom{4}{n-3}\right\}\right].$$

Первый член в правой части равен полному числу коэффициентов на n-м этапе дифференцирования; член в квадратных скобках дает число условий, накладываемых уравнениями на коэффициенты. Внутри квадратной скобки выражение в первой фигурной скобке равно числу условий, вытекающих из первоначальных уравнений, без учета тождеств. Вторая фигурная скобка связана с наличием тождеств первого и второго рода.

Вычисление приводит к следующему асимптотическому выражению для Ω_n:

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\left(\frac{18}{n} + \frac{3}{n} - \frac{24}{n} + \frac{9}{n}\right) \sim \binom{4}{n}\frac{6}{n}.$$

Здесь мы видим отражение того произвола, с которым определяются ψ_i при заданных φ_{ik}; численно эта степень произвола согласуется с полученными ранее результатами относительно

$$\varphi_{ik} \text{ и } \psi_i \left(\frac{6}{n} = \frac{18}{n} - \frac{12}{n}\right).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать системы общековариантных уравнений. Здесь необходимо сделать замечания о числе коэффициентов в таких системах для каждого порядка. Пусть в число переменных поля входит и тензор g_{ik}. Тогда число возникающих из g_{ik} коэффициентов n-го порядка будет равно $16\binom{4}{n}$. Однако не все эти коэффициенты имеют объективный смысл, так как они изменяются при преобразовании координат. О фактическом множестве действительно различных полей можно судить, подсчитывая число независимых коэффициентов в *полностью определенной* системе координат.

Из законов преобразования следует, что в конечной области координаты можно выбрать так, что g_{14}, g_{24}, g_{34} обращаются в нуль, а $g_{44} = \pm 1$. Остающиеся компоненты $g_{ik}(g_{11}, \ldots, g_{33})$ в общем случае зависят тогда от $x_1, \ldots, x_4$. На гиперповерхности $x_4 = 0$ они являются функциями x_1, x_2, x_3. Поэтому можно сделать дальнейшее преобразование координат так, чтобы на этой гиперповерхности $x_4 = 0$ мы имели $g_{13} = g_{23} = 0$, $g_{33} = \pm 1$. Эту же процедуру можно повторить в подпространстве $x_4 = x_3 = 0$, при этом получим $g_{12} = 0$, $g_{22} = \pm 1$ и, наконец, в подпространстве $x_4 = x_3 = x_2 = 0$, так чтобы получить $g_{11} = \pm 1$. Это — наиболее жесткое ограничение на компоненты тензора, которого можно добиться путем выбора системы координат. В результате общее число $16\binom{4}{n}$ коэффициентов в ряде Тэйлора уменьшится на

$$4\binom{4}{n} + 3\binom{3}{n} + 2\binom{2}{n} + 1 = D_n$$

коэффициентов. Общее g_{ik}-поле имеет поэтому на n-м этапе на D_n меньше коэффициентов, чем получилось бы без учета его ковариантных свойств. Для больших значений n мы находим [3]

$$D_n \sim \binom{4}{n}\left(4 + \frac{9}{n}\right).$$

[3] Эта формула, как показано самим автором, ошибочна. См. ниже, стр. 791.— *Прим. ред.*

Применение метода к системе уравнений симметричного поля (чисто гравитационное поле)

Полное поле состоит из симметричных полей g_{ik} и Γ^l_{ik}. Будем считать, что оба поля разложены в степенные ряды вблизи начала координат. Структура уравнений

$$0 = g_{ik;l} = g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk}$$

такова, что на каждом этапе дифференцирования g_{ik} дифференцируется на один раз больше, чем Γ. По этой причине в разложении

$$\Gamma = \underset{0}{\Gamma} + \underset{1}{\Gamma}_s x_s + \underset{2}{\Gamma}_{st} x_s x_t + \ldots$$

мы будем рассматривать $\underset{0}{\Gamma}$ как величину первого порядка, $\underset{1}{\Gamma}$ — второго порядка и т. д. Благодаря этому получим, что в уравнениях, определяющих коэффициенты разложения, высшие порядки входящих в них коэффициентов g и Γ одинаковы. Уравнения для R_{ik} не вносят затруднений, так как в них g вообще не входит.

Среди членов n-й степени в разложении поля мы имеем

$$10\binom{4}{n} \text{ коэффициентов для } g_{ik}\text{-поля},$$

$$40\binom{4}{n-1} \text{ коэффициентов для } \Gamma\text{-поля}.$$

Чтобы скомпенсировать последствия произвола в выборе системы координат, из этого числа следует вычесть число D_n.

Продифференцированные $(n - 1)$ раз уравнения $g_{ik;l} = 0$ дают для коэффициентов соотношения, в которых высший порядок коэффициентов равен n. Число таких уравнений, получаемых дифференцированием, равно

$$40\binom{4}{n-1}.$$

Продифференцированные $(n - 2)$ раза уравнения $R_{ik} = 0$ дают

$$10\binom{4}{n-2}$$

уравнений для коэффициентов n-й степени.

Однако мы должны еще учесть существование четырех тождеств Бианки, благодаря которым уравнения для коэффициентов не являются независимыми. Продифференцированные $(n - 3)$ раза тождества Бианки дают тождества, в которых высший порядок коэффициентов равен n, причем эти коэффициенты входят линейно. Тождества Бианки, следовательно, приводят к

$$4\binom{4}{n-3}$$

алгебраическим тождествам. Полное число этих тождеств следует вычесть из полного числа уравнений для коэффициентов, следующих из уравнений поля; эта процедура даст нам число независимых уравнений для определения коэффициентов n-го порядка.

Собирая все вместе и вычитая число независимых уравнений из числа коэффициентов n-го порядка, получаем число коэффициентов, которые можно выбрать произвольно. Это число равно

$$\Omega_n=\left[10\binom{4}{n}+40\binom{4}{n-1}-D_n\right]-\left[40\binom{4}{n-1}+10\binom{4}{n-2}-4\binom{4}{n-3}\right].$$

Вынося за скобку множитель $\binom{4}{n}$ и используя приближенное выражение при больших n, получаем

$$\Omega_n\sim\binom{4}{n}\frac{15}{n}.$$

Сравнивая эту величину с результатом, полученным для волнового уравнения, мы видим, что гравитационные уравнения оставляют в $^5/_2$ раза больше неопределенных коэффициентов, чем волновое уравнение (для $n\gg 1$). Такой вывод кажется удивительным, ибо g_{ik} имеет десять компонент, тогда как φ — только одну.

Замечание. Совместность десяти гравитационных уравнений есть следствие существования четырех тождеств Бианки. Однако интересно отметить, что простого существования четырех тождеств самого по себе еще недостаточно, чтобы обеспечить абсолютную совместность. В этом отношении эффективность тождества зависит от порядка входящей в него производной g_{ik}. Если бы, например, мы имели систему, в которой тождества Бианки были пятой степени, а не третьей, то для асимптотического выражения Ω_n вычисление дало бы формулу

$$\Omega_n\sim\binom{4}{n}\left(-\frac{9}{n}\right)<0,$$

которая означает, что такая система не была бы абсолютно совместной.

Применение метода к несимметричному полю

Наши уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_k=0,\qquad & \qquad g^{\underset{+-}{kl}}_{;s}=0\\ R_{\underline{ik}}=0,\qquad & R_{\underset{\vee}{ik},l}+R_{\underset{\vee}{kl},i}+R_{\underset{\vee}{li},k}=0\end{aligned}\right\}\qquad\text{(IIa)}$$

и существует шесть тождеств между ними: четыре тождества Бианки (с производными третьего порядка) от g_{ik}, тождество $(\overline{\mathfrak{g}}^{it}_{;t}-\mathfrak{g}^{ti}_{;t}-2\mathfrak{g}^{\underline{ti}}\Gamma_t)_{,i}=0$ (с производными второго порядка) и тождество $(\eta^{iklm}R_{i\check{k},l}+R_{k\check{l},i}+$ $+R_{\check{l}i,k})_{,m}=0$ (с производными четвертого порядка). Число свободных коэффициентов равно

$$\Omega_n=\left[16\binom{4}{n}+64\binom{4}{n-1}-D_n\right]-$$
$$-\left[\left\{4\binom{4}{n-1}+64\binom{4}{n-1}+10\binom{4}{n-2}+4\binom{4}{n-3}\right\}-\right.$$
$$\left.-\left\{1\binom{4}{n-2}+4\binom{4}{n-3}+1\binom{4}{n-4}\right\}\right],$$

или, асимптотически,

$$\Omega_n\sim\binom{4}{n}\frac{45}{n}.$$

Докажем теперь, что система уравнений типа (II) является более жесткой, чем система типа (I) (см. стр. 770).

Если бы в системе (IIа) при помощи уравнений $g_{ik;l}=0$ можно было исключить Γ, то W_{ik} [см. (I) и (II)] в этом случае содержали бы вторые производные от g_{ik}. В общем случае порядок производных не может быть меньше, и мы обозначим его через α. В случае системы (I) шесть уравнений $W_{\check{ik}}=0$ приводят к $6\binom{4}{n-\alpha}$ условиям для коэффициентов n-го порядка. В случае (II) эти шесть уравнений заменяются восемью уравнениями $\mathfrak{g}^{i\check{s}}_{,s}=0$, $W_{i\check{k},l}+W_{k\check{l},i}+W_{l\check{i},k}=0$, между которыми существует два тождественных соотношения, упомянутых на стр. 770. Число независимых условий для системы (II) тогда равно

$$\left[4\binom{4}{n-1}+4\binom{4}{n-\alpha-1}\right]-\left[\binom{4}{n-2}+\binom{4}{n-\alpha-2}\right].$$

Вычитая число условий для системы из числа условий для системы (II), мы асимптотически получаем

$$6\binom{4}{n}\frac{3\alpha-4}{2n}.$$

Это число положительно для $\alpha\geqslant 2$, а это и показывает, что система (II) всегда является более жесткой, чем система (I). $\left(\text{Для } \alpha=2 \text{ эта разность равна } \binom{4}{n}\frac{6}{n}.\right)$

§ 5. Общие замечания относительно понятий и методов теоретической физики

Если не считать окончательным переход к теории принципиально статистического характера, какой является, например, квантовая механика в ее современном виде, то цель физической теории можно сформулировать следующим образом: дать объективное (в принципе полное) описание физических систем и установить структуру законов, связывающих понятия, входящие в это объективное описание. Под «объективным описанием» понимается такое описание, которое может претендовать на справедливость и осмысленность без ссылок на какие бы то ни было акты наблюдения.

Единственное отличие физических теорий от математических построений заключается в следующем. Физическая теория должна давать существенно полное и воспроизводимое соответствие между описанной в определенных терминах реальностью и непосредственными чувственными восприятиями. Вопрос о том, как установить это соответствие, может решаться только интуитивно и не может быть выражен в рамках логически сформулированной теории.

Одна теория отличается от другой главным образом выбором «кирпичей» для фундамента, т. е. ни к чему не сводимых основных понятий, на которых построена вся теория. В классической теории (механика) такими основными понятиями являются материальная точка, сила взаимодействия между материальными точками (потенциальная энергия) и инерциальная система (последняя составляется из декартовой системы координат и временной координаты). С ростом наших знаний об электромагнитном поле к числу основных понятий наравне с материальной точкой (вещество) прибавилось понятие поля, рассматриваемого как второй носитель энергии.

Специальная теория относительности изменила эту схему лишь в том отношении, что в структуру инерциальной системы пришлось включить «факт» (на деле — гипотезу, основанную на ряде экспериментальных фактов, без которой, по-видимому, нельзя обойтись) постоянства скорости света. Теория предполагает далее, что мы можем отбросить концепцию материальной точки и иметь дело только с полевой концепцией. Это связано с тем, что относительность одновременности делает невозможным дальнейшее сохранение концепции дальнодействия и потенциальной энергии.

Еще более глубокие изменения теоретических основ внесла общая теория относительности, которая вовсе отбросила понятие инерциальной системы. В прежних теориях пространство, математически выражаемое инерциальной системой, рассматривалось как независимый элемент физической реальности. Этот элемент можно было рассматривать как нечто абсолютное, поскольку он определял поведение точечных масс или поля, которые сами на него не действовали. Однако в общей теории относительности инерциальная система заменяется полем смещений, которое является составной частью единого поля, представляющего собой единственное средство описания реального мира. Пространственный аспект реальных вещей, таким образом, полностью выражается полем, зависящим от четырех координат-параметров; он есть свойство этого поля. Если мы представим себе, что поле удалено, то не останется и «пространства», так как пространство не имеет независимого существования.

Этим можно закончить замечания *об изменениях*, которые связаны с развитием указанных идей. В связи с возможностями дальнейшего развития теоретических основ интересно спросить, что же осталось неизменным в процессе этого развития. Для всех этих теорий, существенно, что они оперируют с пространственно-временным континуумом четырех измерений (во всяком случае, с конечным числом измерений). (Этот континуум может включать в себя или не включать сингулярные точки или линии.) Возможность отказа от этой фундаментальной предпосылки много раз рассматривалась, в частности, Риманом. Такой отказ от четырехмерного континуума, конечно, привел бы к ломке всех основных концепций, на которых строились рассматривавшиеся до сих пор теории.

Кроме всегда использовавшегося понятия континуума, прежние теории имели еще одну общую черту. Во всех этих теориях существенным является непременное наличие группы преобразований, так что одно и то же физическое состояние можно представить в различных формах, которые переходили одна в другую при преобразованиях этой группы. Чем шире группа преобразований, тем жестче она ограничивала круг возможных уравнений.

Во всех этих теориях считалось, что (четырехмерная) *точка* объективно существует, т. е. что она существует независимо от представления. Конкретной точке поля *в одном* представлении соответствует определенная точка в любом другом эквивалентном представлении той же самой физической системы. Математически это выражается тем фактом, что только такие преобразования считаются эквивалентными, которые связаны взаимнооднозначными преобразованиями координат.

Очевидно, что весь формализм современных теорий неразрывно связан с этим ограничением. Из него следует существование закона преобразования для дифференциалов координат dx^i, на котором основан закон преобразования векторов, а следовательно, и тензоров (ковариантный вектор можно, например, определить, рассматривая инвариант $\alpha_i dx^i$). Если отбросить понятие вектора (и тензора), то от формализма существующих ныне теорий не останется ничего.

Хотя априори не очевидно, почему не может существовать эквивалентных представлений физической системы, в которых не сохранялась бы тождественность точки (в то время как весь континуум переходил бы сам в себя), я не вижу путей построения релятивистской теории в таком широком смысле. Для понимания существующей сейчас теории относительности, во всяком случае, важно знать, что она полностью основана на предположении об инвариантном смысле точки.

Заключительные замечания

Результаты настоящего Приложения сводятся к следующему: в качестве естественного обобщения гравитационных уравнений в пустом пространстве мы рассматриваем систему уравнений:

$$g_{\underset{+\,-}{i\,k};s} = 0, \qquad \Gamma_i = 0,$$

$$R_{\underline{ik}} = 0, \quad R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0.$$

Однако я должен объяснить, зачем я потратил столько сил, чтобы прийти к этому результату. Современные физики с трудом поймут это без соответствующего разъяснения, поскольку успех основанной на понятии вероятности квантовой механики убедил их, что физическая теория не должна ставить своей целью полное описание реальной ситуации. Я не хочу обсуждать здесь вопросы о том, почему я не разделяю этого убеждения или почему я не думаю, чтобы действительно интересная попытка де-Бройля и Бома дать в рамках формализма современной квантовой теории полное описание реально существующих индивидуальных явлений увенчалась успехом.

Существует, далее, убеждение, что нельзя одновременно сохранить концепции поля и частицы как элементов физического описания. Концепция поля требует, чтобы в поле не было сингулярностей, в то время как концепция частиц (как элементарная концепция) требует, чтобы они были. Концепция поля, однако, кажется неизбежной, поскольку без нее невозможна формулировка общей теории относительности. А общая теория относительности есть единственный способ избежать такой нереальной «вещи», как инерциальная система.

По этой причине я не вижу в существующей ситуации другого возможного пути, кроме чисто полевой теории, которая, впрочем, должна тогда решить такую чрезвычайно трудную задачу, как вывод атомистического характера энергии. Я считаю, далее, что уравнения гравитации для пустого пространства представляют собой единственный рационально обоснованный случай теории поля, который может претендовать на строгость (с учетом также и нелинейных членов). Все это приводит к попытке построить теорию единого поля путем обобщения теории гравитации для пустого пространства.

Предложенные обобщенные уравнения поля, однако, далеко еще не совершенны, так как мы пока не знаем, как находить свободные от сингулярностей решения такой системы уравнений; мы даже не имеем метода, с помощью которого можно было бы судить о существовании или отсутствии несингулярных решений. Поэтому от возможности сопоставления результатов теории с экспериментом нас пока отделяет непреодолимый барьер. Тем не менее я считаю неоправданным объявлять априори, что такая теория не сможет быть согласована с атомистическим характером энергии.

Дополнение к Приложению II[4]

В теории уравнений поля важную роль играет понятие «жесткости» системы уравнений. Это понятие основано на следующем рассуждении. Если компоненты поля разлагать вблизи какой-нибудь точки в ряд Тэйлора, то производные каждого порядка (скажем, порядка n) приведут к появлению некоторого количества коэффициентов. Их можно было бы выбирать произвольно, если бы не уравнения поля, которые устанавливают алгебраические связи между коэффициентами каждого порядка дифференцирования. При больших n часть коэффициентов остается свободной для выбора; число их записывается в виде

$$\Omega_n = \binom{4}{n}\left(\frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \dots\right).$$

Когда n достаточно велико, многообразие решений рассматриваемой совокупности дифференциальных уравнений определяется числом z_1. Если приходится выбирать между несколькими различными совместными системами уравнений, то следует предпочесть наиболее «жесткую» из них, т. е. систему с наименьшим z_1.

При рассмотрении числа коэффициентов n-го порядка в системе уравнений общей теории относительности нужно помнить, что некоторые из них лишены объективного значения вследствие свободы в выборе координат[5].

По этой причине представляется естественным вычесть их число из общего числа коэффициентов n-го порядка; мы получим, таким образом, число свободных коэффициентов при полностью определенной координатной решетке. В Приложении II[6] эта поправка была введена неправильно; однако ее можно очень просто найти путем следующего рассуждения.

[4] Это дополнение напечатано в виде вкладки. —*Прим. ред.*

[5] Число таких коэффициентов обозначалось через D_n.

[6] Ссылка относится к стр. 783 основного текста статьи.— *Прим. ред.*

Тензорное поле, фигурирующее в уравнениях поля, обозначим через g_{ik}. При произвольном преобразовании координат оно будет меняться по закону

$$\overset{*}{g}_{ik} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial \overset{*}{x}_i}\frac{\partial x_\beta}{\partial \overset{*}{x}_k}\, g_{\alpha\beta}.$$

Если это выражение продифференцировать n раз по $\overset{*}{x}_1$, то впервые возникнут $(n+1)$-е производные от x_α по $\overset{*}{x}_1$. Следовательно, фиксируя их значения, можно произвольно задать

$$D_n = 4\binom{4}{n+1}$$

производных n-го порядка от $\overset{*}{g}_{ik}$ без какого-либо «реального» изменения поля. Это и есть то число, которое мы должны вычесть из числа коэффициентов n-го порядка, чтобы правильно судить о свободе, действительно присущей полю. В результате получим

$$D_n = \binom{4}{n}4\frac{n+4}{n+1} \sim \binom{4}{n}4\left(1+\frac{3}{n}\right) \sim \binom{4}{n}\left(4+\frac{12}{n}\right).$$

Старые рассуждения давали вместо этого результата ошибочный

$$\binom{4}{n}\left(4+\frac{9}{n}\right).$$

Если устранить эту ошибку в Приложении II, то для ковариантных уравнений характеристические числа z_n будут меньше на три единицы:

Система уравнений	z_n	
Гравитационные уравнения	12 (вместо 15)	Число свободных для выбора коэффициентов n-го порядка
$g^{\overset{kl}{+-}}_{;s} = 0$; $R_{\underline{ik}} = 0$	42 (вместо 45)	$\Omega_n = \binom{4}{n}\left(\frac{z_1}{n} + \dots\right)$
$\Gamma_k = 0$; $R_{\underset{\vee}{ik},l} + \dots = 0$		

Теорию уравнений поля можно сделать более ясной путем следующих рассуждений.

При логически последовательном подходе к несимметричной теории поля мы рассуждали по такой схеме.

Вводится несимметричный символ Γ^i_{kl} и из него строится тензор кривизны

$$R^i_{klm} = \Gamma^i_{kl,m} - \Gamma^i_{km,l} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km} + \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{kl}.$$

После свертки

$$R_{kl} = \Gamma^s_{kl,s} - \Gamma^s_{kt}\Gamma^t_{ls} - \Gamma^s_{ks,l} + \Gamma^s_{kl}\Gamma^t_{st}.$$

Тогда, следуя Палатини, получаем при бесконечно малой вариации поля

$$\delta R_{kl} = \delta\,(\Gamma^{\overset{s}{+}}_{\underset{+\,-}{k\,l}})_{;s} - (\delta\Gamma^s_{\underset{+}{k\,s}})_{;l},$$

что естественным образом обобщает выражение, появляющееся в случае симметричного поля. Чтобы сформулировать вариационный принцип с помощью R_{ik}, введем несимметричный тензор g_{kl} и его контравариантную тензорную плотность $\mathfrak{g}^{ik}$. Затем, используя оба поля, образуем скалярную плотность

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{kl}R_{kl},$$

интеграл по пространству от которой варьируется по $\mathfrak{g}^{kl}$ и Γ^m_{kl} независимо. После использования метода Палатини, варьирование приводит к уравнениям поля

$$\left.\begin{aligned} R_{kl} &= 0 \\ -\,\mathfrak{g}^{\underset{+-}{kl}}_{;m} + \mathfrak{g}^{\underset{+-}{kt}}_{;t}\delta^l_m + \mathfrak{g}^{kl}\Gamma_m + \mathfrak{g}^{kt}\Gamma_t\delta^l_m &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(I)}$$

где

$$\frac{1}{2}\,(\Gamma^s_{ls} - \Gamma^s_{sl}) = \Gamma^s_{\underset{\vee}{ls}} = \Gamma_l.$$

Появление последних двух членов в левой части второго уравнения показывает, что вариационный принцип не приводит непосредственно к уравнению $g_{\underset{+-}{ik};l} = 0$, которого мы могли бы ожидать по аналогии с симметричной теорией. Эти члены возникают по той причине, что величину $(\mathfrak{g}^{kl}\,\delta\Gamma^s_{kl})_{;s}$, которая имеет вид $\mathfrak{A}^{\overset{s}{+}}_{;s}$, *нельзя* заменить на $\mathfrak{A}^s_{;s}$ и, следовательно, при интегрировании ее нельзя преобразовать в интеграл по поверхности. Преодоление этой трудности составляет существенную задачу при выводе уравнений поля.

В Приложении II эта задача решается введением дополнительно условия $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ks}}{}_{,s} = 0$ для поля g_{ik}. Несколько проще следующий путь.

Заменим в вариационном принципе поле смещений Γ^l_{ik} на выражение $\Gamma^s_{kl} = \Gamma^{s*}_{kl} + \delta^s_k\lambda_l$, где λ_l — вектор. По своим трансформационным свойствам Γ_{kl}^{s*} снова образует поле смещений. При заданном Γ_{kl}^{s} остается произвол в выборе λ_l. Следовательно, после варьирования можно выбрать λ_l так, чтобы выполнялось условие («нормировка»):

$$\Gamma_k^* = \frac{1}{2}(\Gamma_{ks}^{s*} - \Gamma_{sk}^{s*}) = 0.$$

Это, собственно, и было причиной введения Γ_{kl}^{s*}.

В вариационном принципе мы можем независимо варьировать Γ_{kl}^{i*} и λ_k. Тем не менее варьирование дает не $64+4$, а только 64 независимых алгебраических уравнения, так как варьирование по λ_l эквивалентно определенным образом выбранному варьированию по Γ_{kl}^{i*}.

Подставляя новые Γ_{kl}^{i*} в свернутый тензор кривизны, путем прямого вычисления получаем выражение

$$R_{kl} = \overset{*}{R}_{kl} - (\lambda_{k,l} - \lambda_{l,k}),$$

где $\overset{*}{R}_{ik}$ — та же функция от Γ_{kl}^{i*}, что R_{ik} от Γ_{kl}^{i}. Подынтегральное выражение в вариационном принципе теперь принимает вид

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{kl}[\overset{*}{R}_{kl} - (\lambda_{k,l} - \lambda_{l,k})].$$

Варьируя λ_k, получаем

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ks}}_{,s} = 0,$$

тогда как варьирование по Γ_{kl}^{s*} приводит к результату

$$-\mathfrak{g}^{\overset{kl}{+-}}_{\underset{*}{;s}} + \mathfrak{g}^{\overset{kt}{+-}}_{\underset{*}{;t}}\delta_s^l + \mathfrak{g}^{kl}\Gamma_s^* + \mathfrak{g}^{kt}\Gamma_t^*\delta_s^l = 0.$$

Второе из этих уравнений совпадает со вторым из уравнений (I) при условии, что Γ_{kl}^{i} заменено на Γ_{kl}^{i*}. Кроме того, легко убедиться, что первое уравнение становится тождественным второму, если свернуть последнее по индексам s и k.

После нормировки поля Γ_{kl}^{i*} в соответствии с условием $\Gamma_k^* = 0$ второе уравнение принимает вид

$$\mathfrak{g}^{\overset{kl}{+-}}_{\underset{*}{;s}} = 0 \quad \text{и соответственно} \quad g_{\underset{+-}{kl};\underset{*}{s}} = 0,$$

где абсолютное дифференцирование проводится при помощи Γ_{kl}^{s*}. Варьирование по $\mathfrak{g}^{kl}$ дает уравнение

$$\overset{*}{R}_{kl} - (\lambda_{k,l} - \lambda_{l,k}) = 0,$$

или, по исключении λ_k,

$$R^*_{\underline{kl}} = 0,$$

$$R^*_{\underset{\vee}{kl},m} + R^*_{\underset{\vee}{lm},k} + R^*_{\underset{\vee}{mk},l} = 0.$$

Объединяя результаты, получаем тот же набор уравнений, который был выведен в работе при помощи вспомогательного условия $\mathfrak{g}^{\overset{ks}{\vee}}_{,s} = 0$, а именно

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{g}^{\overset{kl}{+-}}_{;m} = 0; & \Gamma_k = 0 \\ R_{\underline{kl}} = 0; & R_{\underset{\vee}{kl},m} + R_{\underset{\vee}{lm},k} + R_{\underset{\vee}{mk},l} = 0 \end{array}\right\}, \qquad \text{(II)}$$

где Γ^{s*}_{kl} всюду заменено на Γ^s_{kl}.

Системы (I) и (II) эквивалентны, поскольку они следуют из одного и того же вариационного принципа. Тем не менее легко видеть, что уравнения (II) выражают налагаемые на поле условия более удовлетворительно, чем уравнения (I). Действительно, пусть Γ^s_{kl} и $\mathfrak{g}^{kl}$ — решение уравнений (I). Мы получим соответствующее решение уравнений (II), положив

$$\Gamma^{s*}_{kl} = \Gamma^s_{kl} + \delta^s_k \lambda_l,$$

$$\Gamma^*_k = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{s*}_{ks} - \Gamma^{s*}_{sk}\right) = 0$$

и вычислив Γ^{s*}_{kl} из Γ^s_{kl}. Исключение λ_l дает

$$\Gamma^{s*}_{kl} = \Gamma^s_{kl} + \frac{2}{3}\delta^s_k \Gamma_l.$$

Следовательно, каждый раз, когда задано поле $g_{kl} - \Gamma^s_{kl}$, удовлетворяющее системе (I), существует одно и только одно поле $g_{kl} - \Gamma^{s*}_{kl}$, удовлетворяющее системе (II). Обратное, однако, не справедливо, поскольку правая часть этого уравнения удовлетворяет четырем алгебраическим тождествам, так что его нельзя разрешить относительно Γ^s_{kl}. Следовательно, имеются различные по форме решения системы (I), отвечающие одному и тому же решению системы (II).

Дополним эти рассуждения следующим. Система (II) полна, хотя число переменных поля (16 + 64) на четыре единицы больше, чем число уравнений (64 + 10 + 4 + 4), уменьшенное на число тождеств (4 + 1 + + 1), как это и должно быть в релятивистских теориях. Соответственно, в общем решении не появится произвольных функций четырех координат. В этом смысле система (II) полностью определяет переменные поля, фигурирующие в ней.

То же самое выполнялось бы для системы (I), если бы, кроме тождеств Бианки, не существовало еще одно тождество. В этом случае система уравнений содержала бы (16 + 64) переменных по́ля, (16 + 64) уравнения и четыре тождества; число переменных оказывалось бы в результате на четыре больше, чем разность между числом уравнений и числом тождеств. Существует, однако, дополнительное тождество. Если обозначить через $\mathfrak{A}_m^{kl}$ левую часть второго уравнения в системе (I), то можно показать, что существует следующее тождество:

$$\mathfrak{A}^{st}_{s,t} \equiv 0.$$

Существование этого тождества соответствует инвариантности R_{kl} и, следовательно, $\mathfrak{H}$ относительно преобразования $\Gamma^{s*}_{kl} = \Gamma^{s}_{kl} + \delta^{s}_{k}\lambda_{,l}$, где λ — произвольный скаляр.

Отсюда следует, что система (I) недостаточна для определения своих (16 + 64) переменных по́ля, и в общем решении появится произвольная функция четырех координат. Таким образом, чтобы сделать систему (I) полностью определенной по отношению к выбранным переменным, мы должны присоединить к ней произвольное скалярное уравнение.

Можно выбрать, например, одно из следующих двух уравнений:

$$g^{kl}\Gamma_k\Gamma_l = 0,$$

$$(\mathfrak{g}^{ks}\Gamma_s)_{,k} = 0.$$

Порядок дифференцирования равен 1 в первом уравнении и 2 во втором. (Соответственно, в системе (II) полная определенность достигается произвольной нормировкой, согласно условию $\Gamma_i = 0$.)

Теперь для каждой из этих двух полностью определенных систем можно вычислить характеристическое число z_1, дающее число коэффициентов разложения, которые могут быть выбраны произвольно.

Сравнение систем (II) и (I) дает :

Система уравнений	z_1
Система (II)	42
Дополненная система (I)	45 или 48

Таким образом, мы видим, что даже после того как система (I) сделана полной, в ней остается на три коэффициента больше, чем в случае, когда законы поля описываются системой (II). Это одна из причин, по которой мы должны предпочесть описание законов поля с помощью системы (II) описанию с помощью системы (I).

Дополнительный аргумент для предпочтения системы (II) можно усмотреть в том, что она удовлетворяет двум условиям.

1. Она содержит наиболее естественное уравнение для определения Γ^{s}_{kl} по g_{kl}:

$$g_{\underset{+\,-}{kl};m} = 0.$$

2. Как уже указывалось в самой работе, система (II) инвариантна по отношению к транспонированию. Здесь мы хотим только подчеркнуть, что при выводе системы (II) можно обойтись без налагаемого заранее на поле g_{kl} условия $\mathfrak{g}^{ks}_{,\check{s}} = 0$.

Причины, заставившие меня считать неестественным введение других добавочных членов в вариационный принцип, конечно, остаются теми же. Такие добавочные члены не могли были бы содержать Γ, иначе уравнение $g_{\underset{+\,-}{kl};m} = 0$, определяющее Γ, перестало бы быть справедливым; поэтому они могут зависеть только от g_{kl} и их производных. Такие добавки нарушили бы однородную структуру теории.

На клапане суперобложки 4-го издания помещено следующее высказывание Эйнштейна:

«Теорию относительности можно рассматривать как итог борьбы с фундаментальным представлением физики Галилея и Ньютона, а именно, представлением об «инерциальной системе». Пересмотр основ теории был вызван существенными результатами электромагнитных и оптических экспериментов. Прежде лишь очень немногие были серьезно озабочены призрачным понятием инерциальной системы. Лейбниц, Ньютон, Риман и Э. Мах были теми мыслителями, которые ясно обнаруживали интерес к этой проблеме.

Специальная теория относительности приспособила инерциальную систему к основному закону постоянства скорости света; этот вопрос не вызывает сейчас сомнения — после результатов, полученных в исследованиях Г. А. Лоренца по электродинамике движущихся тел. Эта первая фаза теории относительности представлялась физикам того времени революционной, в особенности потому, что она отбросила понятие одновременности; теория, однако, оставила нетронутым независимый, объективный характер инерциальной системы.

Общая теория относительности впервые уничтожила инерциальную систему, заменив ее «полем смещений». После этого пространство потеряло свое независимое существование и стало в значительной степени свойством поля. Без опытного факта эквивалентности инертной и гравитационной масс вряд ли было бы возможно психологически ликвидировать инерциальную систему, несмотря на то, что в наших руках был готовый аппарат в форме римановской теории метрического континуума и понятой Минковским формальной эквивалентности трех пространственных измерений и времени.

Последний шаг теории состоит в унификации понятия поля, характеризуемой переходом к несимметричным полям. Трудности выбора законов поля были полностью преодолены в последние несколько месяцев. Аргументы, существенные для понимания этого, подробно изложены в Приложении II».

Такую же уверенность в близости завершения теории Эйнштейн высказывает и в статье для журнала «Scientific American» (статья 137). Однако этим надеждам не суждено было осуществиться.

ЗАМЕЧАНИЕ ПО ПОВОДУ КРИТИКИ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ*

Соображение доктора Джонсона [1] затрагивает вопрос фундаментальной важности, заслуживающий подробного рассмотрения. Чтобы выявить суть дела, приведу сначала следующую аналогию нашему случаю.

Инвариантны ли законы электромагнитного поля по отношению к изменению знака электрических зарядов, или, что эквивалентно, знака компонент электромагнитного поля? Мы склоняемся ответить на этот вопрос отрицательно, основываясь на наших познаниях, почерпнутых из опыта. В самом деле, если мы находим решение, описывающее атом с положительно заряженным ядром и отрицательно заряженными окружающими частицами, то существует и другое решение, в котором электрический заряд ядра отрицателен, а окружающих его частиц — положителен. Это противоречит данным опыта, согласно которым электрический заряд ядра всегда положителен. Следовательно, мы заключаем, что уравнения не обладают сформулированным выше свойством инвариантности.

Однако это заключение неосновательно. Действительно, предположим, что законы электромагнитного поля все-таки обладают этим свойством инвариантности. Возможно, что преобладание ядерных электрических зарядов одного знака связано с тем, что конфигурации противоположных зарядов неустойчивы. Это привело бы к преобладанию одного знака электрического заряда ядра. Рассмотрение математических возможностей показывает, что это альтернативное объяснение (при котором законы обладают указанной выше инвариантностью) оказывается более правдоподобным.

Вернемся теперь к проблеме, которая нас здесь интересует.

* *A Comment on a Criticism of Unified Field Theory.* Phys. Rev., 1953, 89, 321.

[1] C. P. Johnson. Phys. Rev., 1953, 89, 320.

Чтобы система уравнений поля была приемлема с физической точки зрения, она должна объяснять атомистическую структуру физической реальности. Для этого она должна иметь характерные свойства:

1) квазилокализацию массы (т. е. энергии) и электрического заряда;

2) области пространства, соответствующие «частицам», имеют дискретные массу и заряд. Иными словами, если существуют элементарные решения уравнений, которые зависят от непрерывного параметра, то уравнения поля не должны допускать одновременного существования в пределах одной системы таких элементарных решений, которые отвечают произвольным значениям их параметров. Если же теория не обладает этими свойствами, т. е. если они не вытекают из теории, то теория неприемлема.

Разобьем теперь все мыслимые системы уравнений поля на два класса соответственно тому, «однородны отдельные уравнения по отношению к порядку дифференцирования» или нет. Под «однородными» мы понимаем уравнения такого типа, как, например, гравитационные уравнения для пустого пространства ($R_{ik} = 0$). Выражение R_{ik} состоит из членов, каждый из которых является либо линейным по вторым производным от g_{ik} по координатам, либо квадратичным по первым производным от g_{ik}. Мы говорим тогда, что выражение R_{ik} является «однородным (второго порядка) относительно дифференцирования по координатам».

Мне кажется, что все релятивистские системы уравнений, обладающие однородной структурой, т. е. являющиеся набором логически независимых членов, обладают этим свойством однородности. Это справедливо также и для той системы уравнений, которую я назвал «обобщенными уравнениями гравитации».

Создается впечатление, что любая такая однородная система уравнений должна быть несовместима с приведенным выше требованием (2), поскольку любая однородная система уравнений имеет семейство решений, которые непрерывно зависят от параметра k. Это, по сути дела, то свойство, которое Джонсон использовал в своих рассуждениях.

Для краткости обозначим переменные пóля через g. Пусть $g(x)$ — решение уравнений поля; тогда $g(kx)$ также будет решением при любом значении k. О таком многообразии решений будем говорить, как о семействе «подобных решений». Здесь физически важно, что как масса, так и заряд «частицы» непрерывно меняются при изменении параметра k (все решения вложены в одно и то же пространство Минковского). Такой мир, построенный из решений с непрерывно меняющимися значениями параметра k, не удовлетворяет требованию (2).

Однако это заключение основано на предположении, что такие решения с произвольно различающимися значениями k могут существовать одновременно в одном и том же мире, так что взаимодействие их не разрушает. Могло оказаться, например, что взаимодействие приводит к недопустимым сингулярностям поля (именно это происходит в статической задаче двух тел в теории, учитывающей только гравитацию). Однако, если уравнения поля исключают возможность одновременного существования подобных решений в одном и том же мире, то такого рода возражение против теории снимается. Аргументы Джонсона тогда не могут быть использованы, поскольку они также основаны на предположении о существовании подобных решений.

Приведенные выше соображения показывают, насколько осторожным следует быть при использовании доводов общего характера для высказывания достоверных суждений относительно допустимости какой-либо теории поля с эмпирической точки зрения.

Поступила 12 ноября 1952 г.

Джонсон указывает на противоречие, к которому можно прийти, если предположить, что в единой теории поля (которая определяет массу и заряд частицы) из любого решения можно получить новое преобразованием подобия координат $x_i' = kx_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

О СОВРЕМЕННОМ СОСТОЯНИИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ*

(Совместно с Б. Кауфман)

Излагаемые ниже исследования, посвященные проблеме обобщения уравнений гравитации на случай несимметричного поля, не содержат ничего существенно нового. Тем не менее они позволяют отдать предпочтение одной из многих незначительно отличающихся друг от друга систем уравнений, выводимых из вариационных принципов, и в силу этого кажущихся на первый взгляд одинаково допустимыми. В части Б будет показано, почему мы считаем, что другая система уравнений (называемая «сильной системой» [1] и не выводимая из вариационного принципа) неприемлема с физической точки зрения.

А. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ ИЗ НАИБОЛЕЕ ЕСТЕСТВЕННОГО ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА БЕЗ АПРИОРНЫХ УСЛОВИЙ, НАЛАГАЕМЫХ НА ПОЛЕ

Введение несимметричного поля приводит к некоторым усложнениям в выводе уравнений поля. В приводимом ниже кратком изложении основного формализма мы покажем, каким образом можно обойти эти трудности.

1. *Абсолютное дифференцирование.* Если задано поле несимметричных параллельных переносов Γ^l_{ik}, то абсолютная производная от вектора не будет определяться однозначно. Дело обстоит так потому, что $\widetilde{\Gamma}^l_{ik}\ (\equiv \Gamma^l_{ki})$

* *Sur l'Etat Actuell de la Thèorie gênèrale de la Gravitation*, в сб. «Луи де Бройль, физик и мыслитель», стр. 321—342.

[1] A. Einstein. The Meaning of Relativity, 3d Edition, Appendix II, p. 144. (Приложение II помещено в виде, переработанном Эйнштейном; при этом он исключил обсуждение «сильной системы».— *Ред.*)

представляет собой также поле параллельных переносов таких, что [2]

$$\frac{1}{2}(\Gamma^l_{ik}+\Gamma^l_{ki})\equiv\Gamma^l_{\underline{ik}}.$$

Поэтому мы будем различать следующие типы абсолютной производной от контравариантного вектора:

$$\overset{i}{A}{}^{+}_{;k}\equiv A^i_{,k}+A^s\Gamma^i_{sk},$$

$$\overset{i}{A}{}^{-}_{;k}\equiv A^i_{,k}+A^s\Gamma^i_{ks},$$

$$\overset{i}{A}{}^{0}_{;k}\equiv A^i_{,k}+A^s\Gamma^i_{\underline{sk}}.$$

Аналогично рассматриваются и ковариантные векторы.

Рассмотрим теперь правило дифференцирования тензорной плотности w. Пусть g_{ik} — несимметричный ковариантный тензор, а g^{ik} — соответствующий ему контравариантный тензор, определяемый соотношением

$$g_{ik}g^{ik}=g_{is}g^{it}=\delta^t_s.$$

Образуем тензор

$$g_{\underset{+-}{ik};l}\equiv g_{ik;l}-g_{sk}\Gamma^s_{il}-g_{is}\Gamma^s_{lk}.$$

После умножения на $\frac{1}{2}\,g^{ik}$ и свертывания по i и k мы получим вектор

$$\frac{w_{,l}}{w}-\Gamma^s_{\underline{ls}},$$

где w — скалярная плотность, определяемая из соотношения $w^2 = -\operatorname{Det}(g_{ik})$. Произведение этого вектора на скалярную плотность w даст нам векторную плотность, определяемую как абсолютная производная от скалярной плотности w:

$$w_{;l}\equiv w_{,l}-w\Gamma^s_{\underline{ls}}.$$

[2] Несимметричные тензоры Γ^l_{ik} обычно разлагают на симметричную и антисимметричную части:

$$\Gamma^l_{ik}=\Gamma^l_{\underline{ik}}+\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}},$$

где $\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}=\frac{1}{2}(\Gamma^l_{ik}-\Gamma^l_{ki})$. То же относится и к тензору g_{ik}.

Из этого определения и определения абсолютного дифференцирования тензоров вытекает правило образования абсолютной производной тензорной плотности.

Теперь мы уже в состоянии перейти непосредственно к рассмотрению тех особенностей, которыми обусловлены трудности, возникающие при обобщении уравнений теории гравитации на случай несимметричных полей. Речь идет о дивергенции контравариантного вектора, задающей некоторую плотность. Из сказанного выше для дивергенции векторной плотности вытекают следующие результаты:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{i}{\mathfrak{A}^{+}_{;i}} \equiv \mathfrak{A}^i_{,i} + \mathfrak{A}^s\Gamma^i_{si} - \mathfrak{A}^s\Gamma^i_{\underline{si}} \equiv \mathfrak{A}^i_{,i} + \mathfrak{A}^s\Gamma^i_{\underset{\vee}{si}} \equiv \mathfrak{A}^i_{,i} + \mathfrak{A}^s\Gamma_s \\ (\text{здесь } \Gamma_s \equiv \Gamma^i_{si}) \text{ и, аналогично,} \\ \overset{i}{\mathfrak{A}^{-}_{;i}} \equiv \mathfrak{A}^i_{,i} - \mathfrak{A}^s\Gamma_s, \\ \overset{i}{\mathfrak{A}^{0}_{;i}} \equiv \mathfrak{A}^i_{,i}. \end{array}\right\} \quad (1)$$

В двух первых случаях «абсолютная дивергенция» отличается от обычной дивергенции наличием дополнительного члена, который в этих уравнениях записан вторым. Именно этот член и вызывает некоторые трудности при выводе уравнений поля из вариационного принципа.

2. *Вариационный принцип.* Так же, как и в симметричном случае, мы получаем тензор кривизны Римана с помощью параллельного переноса некоторого вектора вдоль бесконечно малого замкнутого контура:

$$R^i_{klm} = (\Gamma^i_{kl,m} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km}) - (\Gamma^i_{km,l} - \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{kl}). \quad (2)$$

Свертывание по индексам i и m приводит к тензору

$$R_{kl} = (\Gamma^s_{kl,s} - \Gamma^t_{sl}\Gamma^s_{kt}) - (\Gamma^s_{ks,l} - \Gamma^t_{st}\Gamma^s_{kl}). \quad (3)$$

Рассмотрим теперь несимметричный тензор g_{ik} как обобщение тензора гравитации. Тогда наиболее простой вариационный принцип, какой только можно себе представить, требует, чтобы

$$\delta\left(\int \mathfrak{g}_{ik}R_{ik}\,d\tau\right) = 0, \quad \mathfrak{g}_{ik} = wg_{ik}. \quad (4)$$

Предполагается, что вариация удовлетворяет условиям с обычными пределами и что тензоры g_{ik} (или $\mathfrak{g}_{ik}$) и Γ^l_{ik} варьируются независимо друг от друга.

Замечание. По поводу упомянутого выше гамильтониана можно высказать следующее возражение: этот гамильтониан не инвариантен относительно трансмутации, т. е. не инвариантен относительно преобразования $g_{ik} \to g_{ki}$; $\Gamma^l_{ik} \to \Gamma^l_{ki}$. (В этом свойстве проявляется эквивалентность положительного и отрицательного электричества в теории несимметричного поля.) Несмотря на это, совершенно неожиданным образом оказывается (как мы увидим дальше), что окончательные уравнения поля инвариантны относительно этого преобразования.

Наиболее просто указанная вариация вычисляется по методу, в котором используется метод Палатини, предложенный для случая симметричного поля. Согласно этому методу, при вычислении вариации тензора Γ мы исходим из представления

$$\delta R_{ik} = (\delta \Gamma^{\overset{s}{+}}_{\underset{+-}{ik}})_{;s} - (\delta \Gamma^{s}_{\underset{+}{is}})_{;k},$$

аналогичного представлению Палатини в случае симметричного поля.

Проинтегрировав соотношение (4) по частям и воспользовавшись формулами (1), получим под знаком суммы:

$$R_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} + \big(-\overset{ik}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} + \overset{it}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;t}\delta^k_s + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma_s + \mathfrak{g}^{it}\Gamma_t\delta^k_s\big)\,\delta\Gamma^s_{ik}. \tag{4a}$$

Затем, приравнивая нулю коэффициенты при $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и $\delta\Gamma^s_{ik}$, находим уравнения поля:

$$R_{ik} = 0 \tag{5}$$

и

$$-\overset{ik}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} + \overset{it}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;t}\delta^k_s + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma_s + \mathfrak{g}^{it}\Gamma_t\delta^k_s = 0. \tag{6}$$

Второе из этих уравнений имеет чрезвычайно сложный вид, поскольку в нем фигурируют Γ_i. (Величины Γ_i не входили бы в это уравнение, если бы абсолютная дивергенция совпадала с обычной.) Чтобы избежать этого усложнения, можно высказать гипотезу о том, что для параллельных переносов поля $\Gamma_i = 0$. (Такую гипотезу вводят и на самом деле в «сильной системе» уравнений.) Однако, благодаря исследованиям Шредингера, мы в настоящее время знаем, что прибегать к такому косвенному методу нет необходимости. Если в уравнении (6) произвести свертывание по s и k и воспользоваться полученным при этом результатом для того, чтобы исключить $\overset{ik}{g}{}^{+-}_{;t}$, то из уравнения (6) получим уравнение

$$-\overset{ik}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma_s - \frac{2}{3}\,\mathfrak{g}^{it}\Gamma_t\delta^k_s = 0. \tag{6a}$$

Введем теперь, вслед за Шредингером, новое поле параллельных переносов:

$$\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik} \equiv \Gamma^{s}_{ik} + \frac{2}{3}\,\delta^{s}_{i}\Gamma_{k}, \tag{7}$$

которое удовлетворяет условию

$$\underset{0}{\Gamma}_{i} \equiv \underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{\underset{\vee}{is}}\left(= \Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,(1-4)\,\Gamma_{i}\right) = 0. \tag{7a}$$

В этих переменных уравнение (6а) примет следующий простой вид:

$$\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{\underset{0}{;}s} \left(\equiv \mathfrak{g}^{ik}_{,s} + \mathfrak{g}^{it}\underset{0}{\Gamma}{}^{k}_{st} + \mathfrak{g}^{tk}\underset{0}{\Gamma}{}^{i}_{ts} - \mathfrak{g}^{ik}\underset{0}{\Gamma}{}^{t}_{\underset{-}{st}}\right) = 0. \tag{6б}$$

Таким образом, выполнив вариацию, мы получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{\underset{0}{;}s} &= 0,\\ R_{ik} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

В случае симметричного поля 40 уравнений $g^{\overset{ik}{+-}}_{\underset{0}{;}s} = 0$ определяют 40 (симметричных) величин $\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$, которые в этом случае, разумеется, совпадают с Γ^{s}_{ik}. Случай несимметричного поля отличается от случая симметричного поля тем, что 64 уравнения $\mathfrak{g}^{ik}_{\underset{0}{;}s} = 0$ уже нельзя разрешить относительно $\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ при произвольном поле g_{ik}. Дело обстоит так потому, что среди величин $\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ имеется лишь 60 независимых, что можно усмотреть из условия (7а). В самом деле, из (7а) мы получаем тождество:

$$\frac{1}{2}\left(\mathfrak{g}^{\overset{it}{+-}}_{;t} - \mathfrak{g}^{\overset{ti}{+-}}_{;t}\right) \equiv \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{it}}_{,t}. \tag{7б}$$

Отсюда следует, что уравнения поля $\mathfrak{g}^{ik}_{\underset{0}{;}s} = 0$ с необходимостью влекут за собой уравнения

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{it}}_{,t} = 0. \tag{7в}$$

Если эти 4 уравнения относительно g^{ik} выполняются, то из 64 уравнений $\mathfrak{g}^{ik}_{\underset{0}{;}s} = 0$ алгебраически независимых останется лишь 60. Этих уравнений ровно столько, сколько необходимо для того, чтобы найти 60 величин $\underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}$.

В заключение следует еще добавить, что переменные g_{ik} и Γ^s_{ik}, определяемые из системы (1), связаны четырьмя тождествами, которые соответствуют тождествам Бианки в теории симметричного поля. Их нетрудно получить, например, пользуясь методом Г. Вейля. Так же, как и в теории симметричного поля, наличие четырех тождеств Бианки означает, что 4 из 16 величин g_{ik} (или 10 величин g_{ik} в теории симметричного поля) можно выбрать произвольно, как это и должно быть при общей ковариантности рассматриваемой системы уравнений.

3. *Окончательный вид полученной системы уравнений.* Поскольку первое из уравнений (1) допускает введение лишь 60 независимых величин $\underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}$, во втором уравнении удобно произвести замену переменных по формуле (7). В результате R_{ik} окажется функцией, зависящей от 60 величин $\underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}$ и 4 величин Γ_i (не зависящих от $\underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}$), вместо того, чтобы зависеть от 64 величин Γ^s_{ik}.

Выполнив эту замену переменных, мы получим:

$$\underset{0}{R}_{ik} + \frac{2}{3}(\Gamma_{i,k} - \Gamma_{k,i}) = 0. \tag{8}$$

Здесь $\underset{0}{R}_{ik}$ представляет собой выражение, которое получится, если в выражении (3) вместо Γ^s_{ik} подставить $\underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}$. Так как несимметричная часть тензора $\underset{0}{\Gamma}{}^s_{\check{ik}}$ обращается в нуль, мы можем заменить два последних члена $\underset{0}{R}_{ik}$ следующим выражением:

$$-\underset{0}{\Gamma}{}^s_{\underline{is},k} + \underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}\underset{0}{\Gamma}{}^t_{\underline{st}}.$$

Затем это выражение можно записать в виде

$$-\frac{1}{2}(\underset{0}{\Gamma}{}^s_{\underline{is},k} + \underset{0}{\Gamma}{}^s_{\underline{ks},i}) + \underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}\,\underset{0}{\Gamma}{}^t_{st}$$

по следующей причине: умножив уравнение $\underset{0}{g}{}^{\overset{ik}{+-}}_{;s} = 0$ на g^{ik} и произведя свертывание по индексам i и k, мы получим

$$\frac{w_{,s}}{w} - \underset{0}{\Gamma}{}^i_{sk} = 0,$$

откуда

$$\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{\underline{is},\, k} = \underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{\underline{ks},\, i}.$$

Поэтому в соотношении (8) мы можем вместо $\underset{0}{R}_{ik}$ записать

$$\underset{0}{R}_{ik} = \underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik,\, s} - \underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{it}\Gamma^{t}_{sk} - \frac{1}{2}\,(\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{\underline{is},\, k} + \underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ks,\, i}) + \underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik}\underset{0}{\Gamma}{}^{t}_{st}.$$

Наконец, поскольку величины Γ_i входят лишь во второе уравнение системы (1), представляется естественным исключить их из системы (1), а следовательно, и из соотношения (8). В результате мы получим:

$$\underset{0}{R}_{\underline{ik}} = 0, \tag{8б}$$

$$\underset{0}{R}_{\underset{\vee}{ik},\, l} + \underset{0}{R}_{\underset{\vee}{kl},\, i} + \underset{0}{R}_{\underset{\vee}{li},\, k} = 0. \tag{8а}$$

Теперь уже величины Γ_i не входят более в уравнения поля. Поэтому мы можем изменить обозначения и вместо $\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ писать Γ^{s}_{ik}. Однако, поступая так, мы вынуждены присоединять к нашей системе уравнений условие $\Gamma_i = 0$ (которое в первоначальных обозначениях получалось при определении величин $\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ по величинам Γ^{s}_{ik}). Итак, исходя из наиболее простого вариационного принципа, мы сразу же получаем хорошо известную[3] систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} g_{\underset{+-}{ik};\, l} &= 0,\\ \Gamma_i &= 0,\\ R_{\underline{ik}} &= 0,\\ R_{\underset{\vee}{ik},\, l} + R_{\underset{\vee}{kl},\, i} + R_{\underset{\vee}{li},\, k} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1а}$$

Здесь R_{ik} задается соотношением (3а). Эта система уравнений остается инвариантной при преобразованиях величин g_{ik} и Γ^{s}_{ik}.

[3] A. Einstein, E. Strauss, Ann. of Math., 47, 1946, 731 (Статья 130.)

Б. ИСКЛЮЧЕНИЕ «СИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ» ИЗ РАССМОТРЕНИЯ

Приведенный выше вывод уравнений поля является гораздо более убедительным, чем прежние выводы. Тем не менее нельзя отрицать, что существуют и другие вариационные принципы, которые (несмотря на то что они менее естественны, чем принцип, указанный в настоящей работе) приводят к несколько иным системам уравнений. Эти различные системы уравнений содержатся в «сильной системе» (которую нельзя вывести из вариационного принципа).

Ввиду этого «сильная система» представляется наиболее подходящей. Однако имеется еще один вопрос, который также надлежит принимать во внимание: какая из двух совокупностей решений достаточно обширна для того, чтобы соответствующая система уравнений могла иметь физический смысл? Ниже мы хотим показать, что «сильная система» предоставляет мало свободы и нам приходится исключить ее из рассмотрения. Для доказательства этого утверждения мы воспользуемся методом, который одинаково применим и в случае симметричного поля. Вот почему поучительно рассмотреть сначала уравнения гравитационного поля, чтобы понять, почему такие ограничения не возникают в этом случае.

1. *Симметричное поле.* Разложим решение, соответствующее слабому полю, в ряд по степеням параметра ε:

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \varepsilon \underset{1}{g}_{ik} + \varepsilon^2 \underset{2}{g}_{ik} + \ldots.$$

Аналогичным образом разложим Γ^s_{ik}:

$$\Gamma^s_{ik} = \varepsilon \underset{1}{\Gamma}{}^s_{ik} + \varepsilon^2 \underset{2}{\Gamma}{}^s_{ik} + \ldots$$

(здесь η_{ik} — метрический тензор пространства Минковского). Мы хотим, чтобы эти ряды тождественно относительно ε удовлетворяли уравнениям поля $g_{ik;l} = 0$ и $R_{ik} = 0$. Тогда первое из этих уравнений в первом и втором приближениях запишется в виде:

$$\underset{1}{g}_{ik,l} - \eta_{sk} \underset{1}{\Gamma}{}^s_{il} - \eta_{is} \underset{1}{\Gamma}{}^s_{lk} = 0, \tag{9а}$$

$$(\underset{2}{g}_{ik,l} - \underset{1}{g}_{sk} \underset{1}{\Gamma}{}^s_{il} - \underset{1}{g}_{is} \underset{1}{\Gamma}{}^s_{lk}) - \eta_{sk} \underset{2}{\Gamma}{}^s_{il} - \eta_{is} \underset{2}{\Gamma}{}^s_{lk} = 0. \tag{9б}$$

Из уравнения (9а) мы получим, что

$$\underset{1}{\Gamma}{}^{s}_{ik} = \underset{1}{\left[\frac{s}{ik}\right]} \equiv \frac{1}{2}(-\underset{1}{g}_{ik,\underline{s}} + \underset{1}{g}_{is,\underline{k}} + \underset{1}{g}_{\underline{s}k,i})$$

(отдельный подчеркнутый индекс означает, что он поднят — или опущен — с помощью тензора η^{ik} или η_{ik}). Подставляя в уравнение (9б) выражения для $\underset{1}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ через $\underset{1}{g}_{ik}$, мы сможем представить $\underset{2}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ в виде функции от $\underset{1}{g}_{ik}$ и g_{ik}. Имеем:

$$\underset{2}{\Gamma}{}^{s}_{ik} = \underset{2}{\left[\frac{s}{ik}\right]} + g_{iks},$$

где $\underset{2}{\left[\frac{s}{ik}\right]}$ связано с $\underset{2}{g}_{ik}$ такими же линейными соотношениями, как $\left[\frac{s}{ik}\right]$ с $\underset{1}{g}_{ik}$, а g_{iks} представляет собой известное выражение, квадратичное относительно $\underset{1}{g}_{ik}$. Затем из уравнений

$$R_{ik} = 0 = \Gamma^{s}_{ik,s} - \Gamma^{s}_{is,k} - \Gamma^{l}_{is}\Gamma^{s}_{lk} + \Gamma^{s}_{ik}\Gamma^{l}_{sl}$$

мы получим два первых приближения:

$$\underset{1}{R}_{ik} = 0 = \underset{1}{\Gamma}{}^{s}_{ik,s} - \underset{1}{\Gamma}{}^{s}_{is,k}, \tag{10а}$$

$$\underset{2}{R}_{ik} = 0 = \underset{2}{\Gamma}{}^{s}_{ik,s} - \underset{2}{\Gamma}{}^{s}_{is,k} - (\underset{1}{\Gamma}{}^{l}_{is}\underset{1}{\Gamma}{}^{s}_{lk} - \underset{1}{\Gamma}{}^{s}_{ik}\underset{1}{\Gamma}{}^{l}_{sl}). \tag{10б}$$

Выразим $\underset{1}{\Gamma}$ и $\underset{2}{\Gamma}$ через $\underset{1}{g}$ и $\underset{2}{g}$ и отделим линейные члены от квадратичных. Из уравнений (10а) получим:

$$0 = \underset{1}{\left[\frac{s}{ik}\right]}_{,s} - \underset{1}{\left[\frac{s}{is}\right]}_{,k} \equiv \underset{1}{\mathscr{L}}_{ik} \equiv \frac{1}{2}(-\underset{1}{g}_{ki,\underline{s},s} + \underset{1}{g}_{\underline{sk},si} + \underset{1}{g}_{\underline{si},sk} - g_{\underline{ss},ik}), \tag{11а}$$

в то время как из уравнений (10б) получим

$$0 = \underset{2}{\left[\frac{s}{ik}\right]}_{,s} - \underset{2}{\left[\frac{s}{is}\right]}_{,k} + \underset{2}{Q}_{ik} \equiv \underset{2}{\mathscr{L}}_{ik} + \underset{2}{Q}_{ik}. \tag{11б}$$

Величина $\underset{2}{\mathscr{L}}_{ik}$ в этом уравнении оказывается связанной с $\underset{2}{g}$ той же линейной зависимостью, что и величина $\underset{1}{\mathscr{L}}_{ik}$ с $\underset{1}{g}$. Величина $\underset{2}{Q}_{ik}$ квадратична относительно $\underset{1}{g}$. Ее можно вычислить в явном виде совершенно строго.

Таким образом, проблема решения уравнений гравитационного поля (второго порядка) сводится к проблеме решения двух систем линейных дифференциальных уравнений (из которых вторая система (11б) — неоднородная). Решив систему (11а), мы подставим в систему (11б) функции $\underset{1}{g}_{ik}$, которые теперь уже будут известными, и решим систему (11б).

Ниоткуда, однако, не следует и заранее вовсе не очевидно, что система (11б) имеет решение, и вот почему. Между величинами $\mathscr{L}_{ik}$ существует 4 тождества:

$$D_i(g_{st}) \equiv \left(\underline{\mathscr{L}_{ik}} - \frac{1}{2}\,\eta_{\underline{ik}}\underline{\mathscr{L}_{ss}}\right)_{,\,k} \equiv 0. \qquad (12)$$

Эти тождества остаются в силе в приближениях всех порядков. Но тогда, применив к уравнениям (11б) дифференциальный оператор D_i, получим

$$D_i(\underset{2}{Q}_{st}) = 0. \qquad (13)$$

Уравнения (13) представляют собой 4 дополнительных уравнения, которым должны удовлетворять функции $\underset{1}{g}\ldots$. Вообще говоря, нет никаких оснований считать, что они удовлетворяют этим уравнениям. Однако с помощью вполне строгих вычислений можно показать, что уравнения (13) удовлетворяются тождественно. (Тот факт, что уравнения (13) удовлетворяются тождественно, имеет глубокую причину: наличие 4 тождеств Бианки, в чем нетрудно убедиться, разлагая эти тождества в ряд по степеням малого параметра.) Это означает, что каждому решению уравнений (11а), полученных в первом приближении, отвечает некоторое решение уравнений (11б), полученных во втором приближении.

2. *Несимметричное поле.* Иначе обстоит дело, если речь идет о «сильной системе» уравнений для несимметричного поля. В этом случае вместо одной системы (13) мы получаем две системы уравнений, квадратичных относительно $\underset{1}{g}$. Точно так же, как и в случае гравитационного поля, одна из этих систем, получающаяся из симметричной части уравнения $R_{ik} = 0$, автоматически удовлетворяется в силу 4 «тождеств Бианки». Другая система, получаемая из уравнений $R_{\underset{\vee}{ik}} = 0$, тождественно не удовлетворяется. Более того, она представляет собой дополнительное ограничение, налагаемое на решение уравнений первого приближения. Как мы увидим дальше, это ограничение с точки зрения теоретической физики является очень сильным.

Чтобы рассмотреть этот вопрос подробно, применим излагавшийся ранее метод к сильной системе:

$$g_{\underset{+-}{ik};t} = 0, \quad \Gamma_i = 0, \quad R_{ik} = 0.$$

Разложим снова g и Γ по степеням малого параметра и найдем систему уравнений в двух первых приближениях. Выражения, позволяющие получить $\underset{1}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ и $\underset{2}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ как функции от g, уже выписаны в предыдущем параграфе: их можно взять такими же, как и в случае симметричного поля. Поскольку те же соображения остаются в силе и в нашем случае при рассмотрении симметричной части уравнений $R_{ik}=0$, мы не будем рассматривать здесь эту симметричную часть уравнений, а рассмотрим лишь уравнения

$$R_{\underset{\vee}{ik}} \equiv \frac{1}{2}(R_{ik}-R_{ki}) = 0.$$

В первом приближении мы получим уравнения[4]:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \underset{1}{\Gamma}_i = {}_1\!\left[\begin{matrix}\underline{s}\\ \underset{\vee}{is}\end{matrix}\right] = \underset{1}{g}_{\underset{\vee}{is},\,s} \equiv \underset{1}{\mathfrak{M}}_i,\\ 0 &= \underset{1}{R}_{\underset{\vee}{ik}} = {}_1\!\left[\begin{matrix}\underline{s}\\ \underset{\vee}{is}\end{matrix}\right]_{,s} - \frac{1}{2}\left({}_1\!\left[\begin{matrix}\underline{s}\\ is\end{matrix}\right]_{,k} - {}_1\!\left[\begin{matrix}\underline{s}\\ ks\end{matrix}\right]_{,i}\right) \equiv \underset{1}{g}_{\underset{\vee}{ik},ss} \equiv \underset{1}{\eta}_{\underset{\vee}{ik}}. \end{aligned}\right\} \quad (14а)$$

Во втором приближении уравнения запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \underset{2}{\Gamma}_i = {}_2\!\left[\begin{matrix}\underline{s}\\ \underset{\vee}{is}\end{matrix}\right] + \underset{2}{p}_i \equiv \underset{2}{\mathfrak{M}}_i + \underset{2}{p}_i,\\ 0 &= \underset{2}{R}_{\underset{\vee}{ik}} = {}_2\!\left[\begin{matrix}\underline{s}\\ \underset{\vee}{ik}\end{matrix}\right]_{,s} - \frac{1}{2}\left({}_2\!\left[\begin{matrix}s\\ is\end{matrix}\right]_{,k} - {}_2\!\left[\begin{matrix}\underline{s}\\ ks\end{matrix}\right]_{,i}\right) + \underset{2}{P}_{\underset{\vee}{ik}} \equiv \underset{2}{\eta}_{\underset{\vee}{ik}} + \underset{2}{P}_{\underset{\vee}{ik}}. \end{aligned}\right\} \quad (14б)$$

Величины $\underset{2}{\mathfrak{M}}_i$ и $\underset{2}{\eta}_{\underset{\vee}{ik}}$, выраженные как функции от $\underset{2}{g}$, представляют собой те же линейные выражения, которые в первом приближении определялись уравнениями (14а). С другой стороны, $\underset{2}{p}_i$ и $\underset{2}{P}_{\underset{\vee}{ik}}$ являются известными выражениями, квадратичными относительно $\underset{1}{g}$; их можно вычислить абсолютно строго. В результате мы находим 4 тождества между линейными формами $\mathfrak{M}_i$ и $\eta_{\underset{\vee}{ik}}$:

$$E_i(g_{st}) \equiv \eta_{\underset{\vee}{ik},\,k} - \mathfrak{M}_{i,\,\underline{k},\,k} = g_{\underset{\vee}{ik},\,ssk} - g_{\underset{\vee}{is},\,k\underline{k}s} = 0. \quad (15)$$

---

[4] Отдельный подчеркнутый индекс означает индекс, поднятый или опущенный с помощью тензоров η^{ik} или η_{ik}, соответственно.

Введем теперь в уравнения (14б) оператор E_i, записав, что

$$0 = \underset{2}{R}_{\underset{\vee}{ik},\,k} - \underset{2}{\Gamma}_{i,\,kk} = [\underset{2}{\eta}_{\underset{\vee}{ik},\,k} - \underset{2}{\mathfrak{M}}_{i,\,kk}] + [\underset{2}{P}_{\underset{\vee}{ik},\,k} - \underset{2}{p}_{i,\,kk}].$$

Первая из этих скобок так же, как и в (15), обращается в нуль, и мы получаем

$$\underset{2}{P}_{\underset{\vee}{ik},\,k} - \underset{2}{p}_{i,\,kk} = 0 \tag{16}$$

— четыре уравнения, квадратичных относительно $\underset{1}{g}_{ik}$. (Важно отметить, что поскольку в этом случае не существует тождеств, аналогичных тождествам (15), такого замечания, как мы делали в случае систем (1) и (1а), сделать нельзя.) Довольно длинные, но строгие вычисления позволяют найти явный вид уравнений (16):

$$\underset{1}{g}_{\underset{\vee}{kt},\,s}\,(\underset{1}{g}_{\underline{ik},\,st} + \underset{1}{g}_{\underline{st},\,ik}) = 0. \tag{17}$$

Уравнения (17) должны удовлетворяться, чтобы обеспечить существование решения $\underset{2}{g}$ дифференциальных уравнений (14б). Однако уравнения (17) автоматически не удовлетворяются. Скорее наоборот, они налагают существенное ограничение на совокупность решений $\underset{1}{g}$ уравнений (14а).

Дело обстоит следующим образом. В первом приближении мы должны удовлетворить линейным уравнениям поля. В силу уравнений (14а) антисимметричная часть решения должна удовлетворять уравнениям

$$\underset{1}{g}_{\underset{\vee}{is},\,s} = 0$$

и

$$\underset{1}{g}_{\underset{\vee}{ik},\,ss} = 0,$$

в то время как симметричная часть должна удовлетворять уравнению, получаемому при симметризации уравнения (11а):

$$\underset{1}{g}_{\underline{ik},\,sk} + \underset{1}{g}_{\underline{ss},\,ik} - \underset{1}{g}_{\underline{is},\,ks} - \underset{1}{g}_{\underline{ks},\,is} = 0.$$

Мы видим, что в первом приближении уравнения поля для симметричных и несимметричных g_{ik} полностью не зависят друг от друга. В силу этого, пока речь идет лишь об этих уравнениях, решения в первом приближении можно считать произвольными.

Однако уравнения (17), билинейные относительно $\underset{1}{g}_{\underset{\vee}{ik}}$ и $\underset{1}{g}_{\underline{ik}}$, ограничивают общность этого предположения. Сейчас мы покажем, что это предположение не является допустимым с физической точки зрения.

Рассмотрим, каким образом наличие поля Шварцшильда, которое мы предполагаем сколь угодно слабым, уменьшает общность произвольного антисимметричного поля на расстоянии a от некоторой массы. В первом приближении поле Шварцшильда можно представить в виде:

$$\underset{1}{g}_{\underline{ik}} = -\delta_{ik}\frac{2m}{\rho},$$

где ρ — расстояние между массой и рассматриваемой точкой поля $\left(\rho^2 = \sum_{\sigma=1}^{3}(x_\sigma - a_\sigma)^2\right) \cdot_\sigma)^2\Big)$. Величину $\frac{1}{\rho}$ можно разложить в окрестности начала координат. Мы воспользуемся обозначением

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

и напомним, что $a_4 = 0$. Тогда мы получим, что

$$\underset{1}{g}_{\underline{ik},st} = -\frac{2m}{a^5}\delta_{ik}(3a_s a_t - a^2\varepsilon_{st}), \quad i, k = 1, 2, 3, 4$$

(если удерживать только члены низшего порядка по x_i).

Подставляя этот результат в (17), получаем

$$0 = -\frac{2m}{a^5}\underset{1}{g}_{\underset{\vee}{kt},s}[3a_s a_t\delta_{ik} + 3a_i a_k\delta_{st} - a^2\delta_{ik}\varepsilon_{st} - a^2\delta_{st}\varepsilon_{ik}].$$

Выберем теперь систему координат так, чтобы направление, соединяющее начало координат с массой, было осью x. Тогда $a_1 = -a$, $a_2 = a_3 = 0$. В результате из уравнения (7) мы получаем 4 условия:

при $i = 1$	$\underset{1}{g}_{\underset{\vee}{14},4} = 0,$
$i = 2$	$\underset{1}{g}_{\underset{\vee}{21},1} - \underset{1}{g}_{\underset{\vee}{24},4} = 0,$
$i = 3$	$\underset{1}{g}_{\underset{\vee}{31},1} - \underset{1}{g}_{\underset{\vee}{34},4} = 0,$
$i = 4$	$\underset{1}{g}_{\underset{\vee}{41},1} = 0.$

Первое из этих уравнений означает, что при наличии сколь угодно малой гравитационной массы радиальная составляющая магнитного поля не будет зависеть от времени. Четвертое уравнение означает, что эта радиальная составляющая не должна также зависеть от x. Кроме того, с помощью несложных вычислений можно показать, что эти условия вместе с уравнением (7в) исключают существование плоских «электромагнитных» волн, распространяющихся по всем другим направлениям, кроме направления оси x.

Это замечание показывает, до какой степени «сильные уравнения» ограничивают аддитивность слабых симметричных и антисимметричных полей. По-видимому, оно полностью исключает пригодность «сильной системы» с физической точки зрения.

ПРИЛОЖЕНИЕ [5]

Расширение релятивистской группы

Фундаментальным принципом общей теории относительности является условие ковариантности уравнений поля относительно группы T всех невырожденных преобразований координат. Рассмотрим эту группу T. Интересующие нас переменные поля, например, g_{ik} и Γ^l_{ik}, преобразуются по формулам

$$g^*_{i'k'} = \frac{\partial x_i}{\partial x^*_{i'}} \frac{\partial x_k}{\partial x^*_{k'}} g_{ik} (= T(g_{ik})),$$

$$\Gamma^{*l'}_{i'k'} = \frac{\partial x^*_{l'}}{\partial x_l} \frac{\partial x_i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x_k}{\partial x^*_{k'}} \Gamma^l_{ik} - \frac{\partial^2 x^*_{l'}}{\partial x_a \partial x_b} \frac{\partial x_a}{\partial x^*_{i'}} \frac{\partial x_b}{\partial x^*_{k'}} (= T(\Gamma^l_{ik})).$$

Эти уравнения формально определяют природу величин g_{ik} и Γ^l_{ik}. Групповое свойство этих преобразований T можно усмотреть непосредственно из этих уравнений. Оно состоит в том, что произведение двух таких преобразований T_2T_1 снова является преобразованием T.

Введем теперь второй вид преобразований (преобразование A), определяемых следующим образом:

$$A(g_{ik}) = g_{ik}$$

(и одинаковых для всех тензоров и всех тензорных плотностей).

$$A(\Gamma^l_{ik}) = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \lambda_k$$

[5] *Extension du groupe relativiste*. Сб. «Луи де Бройль, физик и мыслитель», стр. 337—342. Это приложение написано без участия Б. Кауфман.— *Ред.*

(величины λ_k представляют собой 4 произвольные функции от x_i).

Сразу же видно, что эти преобразования A образуют группу. Например,

$$A_2 A_1 (\Gamma^l_{ik}) = A_2 (\Gamma^l_{ik} + \delta^l_{i_1} \lambda_k) = (\Gamma^l_{ik} + \delta^l_{i_1} \lambda_k) + \delta^l_{i_2} \lambda_k = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i (\underset{1}{\lambda_k} + \underset{2}{\lambda_k}).$$

Теперь мы утверждаем, что *совокупность* таких преобразований T и A образует группу. Для тензоров это очевидно непосредственно. Для величин Γ это утверждение следует проверить.

Прежде всего мы составим произведение преобразования A и преобразования T, взяв их в различной последовательности:

$$AT (\Gamma^l_{ik}) = \overset{*}{\Gamma}{}^{l'}_{i'k'} + \delta^{l'}_{i'} \overset{*}{\lambda}_{k'},$$

$$TA (\Gamma^l_{ik}) = T (\Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \lambda_k) = \frac{\partial \overset{*}{x}_{l'}}{\partial x_l} \frac{\partial x_i}{\partial \overset{*}{x}_{i'}} \frac{\partial x_k}{\partial \overset{*}{x}_{k'}} (\Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \lambda_k) + \\ + \frac{\partial^2 \overset{*}{x}_{l'}}{\partial x_a \partial x_b} \frac{\partial x_a}{\partial \overset{*}{x}_{l'}} \frac{\partial x_b}{\partial \overset{*}{x}_{k'}} = \overset{*}{\Gamma}{}^{l'}_{i'k'} + \delta^{l'}_{i'} \overset{*}{\lambda}_{k'}.$$

В последнем преобразовании предполагается, что λ_k преобразуется при замене переменных как ковариантный вектор. Полученный результат означает, что преобразование A коммутирует с преобразованием T.

Если теперь у нас имеется некое произведение преобразований A и T, взятых в каком-то порядке, то с помощью перестановок преобразований A и T соответствующий ему оператор можно привести к виду:

$$A_1 A_2 \ldots T_1 T_2 \ldots$$

Как A, так и T обладают групповым свойством, поэтому выписанное преобразование эквивалентно некоторому преобразованию вида

$$AT.$$

Тем самым групповое свойство составных преобразований доказано также и в том случае, когда их применяют к Γ^l_{ik}. Мы назовем группу преобразований, составленных из произведения преобразований A и T, группой преобразований U. Это расширение группы T до группы U имеет огромное значение, ибо преобразование U определяется 8 произвольными функциями, а преобразование T — лишь 4 функциями. Все поля, которые получаются друг из друга преобразованием U, будут рассматриваться как различные представления одного и того же поля.

Отсюда вытекает, например, следующее. Величина

$$a_{\underset{+}{i};\, k} = a_{i,\, k} - a_s \Gamma^s_{ik}$$

относительно группы T представляет собой тензор, если a_i — вектор. Но относительно группы U эта величина тензором не является. В самом деле, в результате преобразования A мы имеем

$$a_i^* = a_i,$$

$$\Gamma_{ik}^{*s} = \Gamma_{ik}^s + \delta_i^s \lambda_k.$$

Отсюда

$$(a_{\underset{+}{i};\, k})^* = a_{\underset{+}{i};\, k} - a_i \lambda_k.$$

Таким образом, с помощью абсолютного дифференцирования (в основу которого положена группа T) мы не можем получить из вектора никакой величины, ковариантно преобразующейся относительно группы U. Кроме того, преобразование A переводит симметричные Γ в несимметричные Γ, а антисимметричные Γ в неантисимметричные Γ. Следовательно, в этом случае $\Gamma_{\underset{\vee}{ik}}^l$ не обладает тензорными свойствами, а симметричная часть $\Gamma_{\underline{ik}}^l$ не имеет никакого инвариантного смысла как поле параллельных переносов. В рассматриваемом случае величины Γ определяются лишь своими трансформационными свойствами относительно преобразований U, а не тем, что они приводят к параллельному переносу вектора, удовлетворяющему уравнению $\delta a^i = -\Gamma_s^i + a^s dx_+$.

Что же произойдет с римановой кривизной для несимметричного поля? Относительно группы T величина

$$R_{klm}^i = (\Gamma_{kl,m}^i - \Gamma_{sl}^i \Gamma_{km}^s) - (\Gamma_{km,l}^i - \Gamma_{sm}^i \Gamma_{kl}^s)$$

представляет собой тензор. В этом уравнении подвергнем величины Γ преобразованию A. Получим

$$R_{klm}^{*i} = R_{klm}^i + \delta_k^i (\lambda_{l,m} - \lambda_{m,l}).$$

Таким образом, относительно преобразования A величина R_{klm}^i преобразуется не как тензор. То же справедливо и для кривизны, над которой произведено свертывание. Имеем

$$R_{ik}^* = R_{ik} - (\lambda_{i,k} - \lambda_{k,i}).$$

Поэтому величина $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik}$ не имеет никакого инвариантного смысла. В то же время интеграл от этой величины I, взятый по объему (мы не принимаем во внимание интеграла по поверхности), дает

$$I^* = I + 2 \int \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}_{,k} \lambda_i \, d\tau.$$

Последний интеграл обращается в нуль, когда на поле g_{ik} априори наложено условие $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}_{,k} = 0$. После этого инвариантный интеграл I (модуль интеграла по поверхности) позволяет получить с помощью вариации $\mathfrak{g}^{ik}$ и Γ^l_{ik} уравнения поля, ковариантные относительно группы U. Этот процесс вариации отличается от рассмотренного выше процесса лишь тем, что на поле g_{ik} априори наложено условие $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}_{,k} = 0$.

Таким образом получаются прежде всего уравнения

$$g_{\underset{0}{ik;\,l}} = 0, \quad R_{\underline{ik}} = 0,$$

$$R_{\underset{\vee}{ik},\,l} + R_{\underset{\vee}{kl},\,i} + R_{\underset{\vee}{li},\,k} = 0.$$

Если $\underset{0}{\Gamma^l_{ik}}$ в R_{ik} снова заменить выражением $\underset{0}{\Gamma^l_{ik}} = \Gamma^l_{ik} + \frac{2}{3}\,\delta^l_i\Gamma_k$ (в соответствии с определением Шредингера), в силу чего R_{ik} так же, как это было сделано выше, придется заменить на $\underset{0}{R_{ik}} + \frac{2}{3}\,(\Gamma_{i,k} - \Gamma_{k,i})$, то получится система уравнений

$$g_{\underset{0}{ik;\,l}} = 0, \quad \underset{0}{R}_{\underline{ik}} = 0,$$

$$\underset{0}{R}_{\underset{\vee}{ik},\,l} + \underset{0}{R}_{\underset{\vee}{kl},\,i} + \underset{0}{R}_{\underset{\vee}{li},\,k} = 0,$$

которая не содержит никаких других величин, кроме $\underset{0}{\Gamma^l_{ik}}$ (для которых $\underset{0}{\Gamma^i} = 0$). Смысл расширения группы преобразований до группы U состоит в том, что последняя практически полностью определяет уравнения поля. Например, хотя все решения этих уравнений поля в случае симметричных полей полностью совпадают с решениями уравнений гравитационного поля, тем не менее последняя система не имеет никакого ковариантного смысла относительно группы U. Обобщение группы вынуждает нас к обобщению тех полей, которые определялись первоначальной теорией относительности, на случай несимметричных полей.

Так же, как и в теории симметричного поля, гамильтониан можно обобщить путем добавления к нему интегралов, не содержащих Г, например,

$$\int w\, d\tau,$$

$$\int w g^{ii'} g^{kk'} (\varphi_{i,\,k} - \varphi_{k,\,i})(\varphi_{i',\,k'} - \varphi_{k',\,i'})\, d\tau.$$

Я считаю, что введения таких интегралов следует по возможности избегать, ибо это привело бы к нарушению единой структуры теории. В частности, следует по возможности избегать введения наряду с g_{ik} и Γ^l_{ik} других переменных поля (например, вектора φ_i).

Еще одно замечание формального характера. Если Γ^l_{ik} подвергнуть преобразованию A, то это никак не скажется на $\underset{0}{\Gamma}{}^l_{ik}$. Таким образом, окончательные уравнения обладают простой инвариантностью относительно группы T. Это обстоятельство ничуть не умаляет разумность введения группы U, ибо группа ограничивает выбор гамильтониана, а следовательно, и закон поля, гораздо сильнее, чем группа T.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ НЕСИММЕТРИЧНОГО ПОЛЯ*

(Совместно с Б. Кауфман)

1. Введение

В теории симметричного поля постоянство сигнатуры поля в пространстве следует из того, что поле g_{ik} регулярно и определитель $|g_{ik}|$ отличен от нуля. Постоянство сигнатуры позволяет различать пространственно-подобные и временно-подобные направления в каждой точке континуума (построить световой конус).

Мы смогли показать, что это важное свойство сохраняется и в теории несимметричного поля. Оно проявляется в том, что симметричная часть $g_{\underline{ik}}$ тензора g_{ik} есть риманова метрика с постоянной сигнатурой. Но для доказательства, помимо предположения $\det(g_{ik}) \neq 0$, приходится постулировать, что величина Γ, которая вычисляется из соотношения

$$g_{\underset{+-}{ik;l}} = 0, \tag{1}$$

в каждой точке конечна и алгебраически определена («регулярность Г-поля»). Из этих двух постулатов следует, что должно выполняться условие $\det(g_{\underline{ik}}) \neq 0$ и, следовательно, сигнатура поля $g_{\underline{ik}}$ постоянна.

Однако оказывается, что этих двух неравенств недостаточно для того, чтобы обеспечить регулярность Г-поля, и поле g_{ik} должно удовлетворять еще одному алгебраическому неравенству, которое мы в дальнейшем выведем.

В этом исследовании существенно используется существование в каждой точке локальной системы координат, в которой смешанный тензор $g_k^i = g^{is} g_{sk}$ представляется диагональной матрицей $\rho_i \delta_k^i$.

---

* *Algebraic Properties of the Field in the Relativistic Theory of the asymmetric Field.* (With B. Kaufmann). Ann. Math., 1954, 59, 230—244.

Формальное усложнение, вносимое несимметричностью поля, обусловлено главным образом тем, что несимметричное поле g_{ik} обладает алгебраическими инвариантами, которых не имеет симметричное поле. С этим связано то обстоятельство, что решение уравнений $g_{\underset{+-}{ik};l} = 0$ относительно Г для несимметричного поля оказывается гораздо сложнее, чем в случае симметричного поля. По этой же причине, по-видимому, бесполезно (возможное в принципе) исключение Г из уравнений поля при исследовании и интегрировании этих уравнений. Однако с формальной точки зрения представляет интерес получить замкнутое выражение для Г как функции g_{ik} и его первых производных. Среди существующих решений этой задачи отметим работы Бозе [1] и Главатого [2].

В последней части настоящего исследования мы также дали решение этой задачи, которое является относительно более прозрачным в том смысле, что в нем обходится разложение поля на симметричную и антисимметричную компоненты — разложение, не соответствующее духу теории.

Мы хотели бы поблагодарить нашего коллегу В. Баргмана за ряд плодотворных дискуссий.

2. Алгебраические свойства поля g_{ik}

Прежде чем обсуждать решение уравнений (1), рассмотрим алгебраические свойства поля g_{ik}, которое ограничено лишь требованием, чтобы определитель $|g_{ik}|$ был всюду отличен от нуля и, следовательно, знак его, из соображений непрерывности, был всюду одинаков. Потребуем, в частности, чтобы всюду

$$|g_{ik}| < 0,$$

поскольку в областях, где поле достаточно слабо, определитель должен быть отрицателен из физических соображений.

2. 1. Заметим сначала, что в частном случае симметричного поля ($g_{ik} = g_{ki}$) тензор g_{ik} не имеет алгебраических инвариантов. Это эквивалентно тому известному обстоятельству, что тензор g_{ik} путем локальной замены координат можно привести к виду $\varepsilon\delta_k^i$, где $\varepsilon = \pm 1$. Число отрицательных значений ε — «сигнатура» — не меняется при преобразованиях координат.

[1] S. N. Bose. Ann. Math., 1954, 58, 171—176.

[2] V. Hlavatý. J. Rational Mech. and Analysis, 1952, 1, 539—562; 1953, 2, 1—52. Ряд алгебраических свойств поля g_{ik}, полученных здесь, был выведен также в двух работах проф. Главатого, с которыми мы ознакомились уже после завершения настоящей работы. (Ср. книгу V. Hlavatý, Geometry of Einstein's Unified Field Theory, Groningen, 1957.— *Ред.*)

Для несимметричного тензора g_{ik} дело обстоит иначе, и мы покажем, что такой тензор обладает двумя независимыми инвариантами. Легко видеть, что инварианты g_{ik} следует строить путем свертывания смешанных тензоров, простейшим из которых является тензор $g^i_k = g^{is}g_{sk}$ (или обратный ему $g^i_k = g^{si}g_{ks}$). Смешанный тензор, который можно свернуть в скаляр, очевидно, должен обладать одинаковым числом ковариантных и контравариантных множителей g_{ab} и g^{ab}. Следовательно, достаточно рассмотреть инварианты, построенные из g^i_k, а именно, $I_1 = g^i_i$, $I_2 = g^i_k g^k_i$, $I_3 = g^i_k g^k_l g^l_i$ и т. д. Мы покажем, что лишь два из этих инвариантов независимы. Проще всего убедиться в этом, перейдя в специальную (локальную) систему координат, в которой тензор g^i_k диагонален[3]: $g^{i*}_k = \rho_{\bar{i}}\delta^i_k$ (как мы убедимся в дальнейшем, такая диагонализация всегда возможна).

В «диагональной системе» инварианты простым образом выражаются через диагональные элементы ρ_i:

$$I_1 = \sum_1^4 \rho_s, \qquad I_2 = \sum_1^4 \rho_s^2, \qquad I_3 = \sum_1^4 \rho_s^3 \text{ и т. д.}$$

Чтобы выполнить диагонализацию, выпишем сначала закон преобразования для g^i_k:

$$g^{i*}_k = \frac{\partial x^{i*}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^{k*}} g^a_b. \tag{2}$$

Мы хотим найти преобразование, результатом которого будет диагонализация g^i_k:

$$g^{i*}_k = \rho_i \delta^i_k. \tag{2a}$$

Если мы умножим соотношение (2) на $\partial x^{k*}/\partial x^c$ и подставим искомое выражение для g^{i*}_k, то получим

$$\frac{\partial x^{i*}}{\partial x^c} \rho_i = \frac{\partial x^{i*}}{\partial x^a} g^a_c,$$

или

$$\frac{\partial x^{i*}}{\partial x^a}(g^a_c - \delta^a_c \rho_i) = 0. \tag{3}$$

Эти 16 уравнений выполняются при всех i и c и определяют четыре собственных значения ρ_i и закон преобразования $\partial x^{i*}/\partial x^c$. Собственные зна-

[3] Звездочка у индекса означает, что по нему не выполняется суммирование.

чения находятся из следующего условия существования нетривиального решения однородных уравнений (3):

$$\det(g^a_c - \delta^a_c \rho_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Как известно, процедура диагонализации всегда выполнима, если четыре собственных значения ρ_i различны. В дальнейшем мы увидим, что для рассматриваемых нами полей это условие, вообще говоря, выполняется.

Левая часть уравнения (4) представляет собой полином 4-й степени по ρ, и мы можем переписать это уравнение в следующем виде:

$$\rho^4 - S_1\rho^3 + S_2\rho^2 + S_3\rho + S_4 = 0, \tag{5}$$

где S_1, S_2, S_3 — суммы главных миноров соответственно 1-, 2- и 3-го порядка определителя g^a_b, а $S_4 = \det(g^a_b)$.

Из определения g^a_b следуют соотношения

$$S_4 = +1 \tag{а}$$

и

$$S_3 = S_1. \tag{б}$$

Доказательство: а) $S_4 = |g^a_b| = |g^{as}g_{sb}| = |g^{as}| \cdot |g_{sb}| = |g^{sa}| \cdot |g_{sb}| = |g^{sa}g_{sb}| = |\delta^a_b| = 1$.

б) Как упоминалось выше, элементами матрицы, обратной (g^a_b), являются $g^b_a = g^{sb}g_{as}$, так как $g^b_a g^c_b = g^{sb}g_{as}g^{ct}g_{tb} = \delta^c_a$. С другой стороны, поскольку $|g^a_b| = +1$, элементы g^b_a равны минорам 3-го ранга (ко-факторам g^a_b) определителя $|g^a_b|$. Отсюда

$$S_3 = g^k_k = g^{sk}g_{ks} = g^s_s = S_1.$$

Вследствие соотношений (а) и (б) уравнение (5) приводится к виду

$$\rho^4 - S_1\rho^3 + S_2\rho^2 - S_1\rho + 1 = 0. \tag{6}$$

Таким образом корни этого уравнения зависят только от двух инвариантных величин S_1 и S_2 и, следовательно, не может существовать более двух независимых инвариантов, что и требовалось доказать.

Существует тесная связь между инвариантами I_1 и I_2, введенными выше, и S_1 и S_2. Если уравнение (6) переписать в форме

$$(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3)(\rho - \rho_4) = 0,$$

то увидим, что

$$S_1 = \sum_1^4 \rho_s = I_1, \tag{7а}$$

тогда как

$$S_2=\sum_{\substack{s>t\\1}}\rho_s\rho_t,$$

так что

$$S_2=\frac{1}{2}(I_1^2-I_2). \qquad (7б)$$

[В дальнейшем мы будем пользоваться либо набором (S_1, S_2), либо набором (I_1, I_2) в зависимости от того, что нам будет удобнее [4]].

2.2. Из уравнения (6) немедленно следуют два заключения:

а) корни этого уравнения являются *попарно сопряженными*, поскольку коэффициенты вещественны;

б) корни являются *попарно взаимно обратными*. Если уравнение (6) поделить на ρ^4, то получим

$$\frac{1}{\rho^4}-S\frac{1}{\rho^3}+S_2\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{\rho}S_1+1=0,$$

т. е. уравнение для $1/\rho$ совпадает с уравнением для ρ.

То обстоятельство, что корни попарно взаимно обратны, существенно при вычислении ковариантного тензора g_{ik} в системе координат, где тензор g^i_k диагонален. В этой «диагональной системе» $g^i_k=\rho_{\underline{i}}\delta^i_k$. Отсюда, воспользовавшись определением $g^i_k=g^{is}g_{sk}$, мы можем найти g_{ik}. Умножая это соотношение на g_{im} и свертывая, получаем

$$g_{mk}=g_{im}g^i_k \qquad (8)$$

или, если положить $g^i_k=\rho_{\underline{i}}\delta^i_k$,

$$g_{mk}=g_{km}\rho_{\underline{i}}. \qquad (9)$$

Если произвести замену g_{km} на $g_{mk}\rho_{\underline{m}}$, согласно (9), то получим

$$g_{mk}=\rho_{\underline{k}}\rho_{\underline{m}}g_{mk}, \qquad (10)$$

и, следовательно, $g_{mk}=0$ при $\rho_m\rho_k$, не равном $+1$. Если мы перенумеруем попарно обратные корни g^i_k в следующем порядке: ρ_1, $\rho_2=\frac{1}{\rho_1}$, ρ_3, $\rho_4=\frac{1}{\rho_3}$, то единственными отличными от нуля недиагональными членами в g_{ik} будут g_{12}, g_{21} и g_{34}, g_{43}. Что касается диагональных членов, то вследствие равенства (9) они обращаются в нуль, исключая лишь

---

[4] См. A. Einstein, E. Straus, Ann. Math., 1946, 47, 731. (Статья 130). В этой работе определена несколько иная система инвариантов.

частный случай, когда $\rho_k = +1 = \frac{1}{\rho_k}$. В общем случае в диагональной системе

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{34} \\ 0 & 0 & g_{43} & 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где $g_{21} = \rho_1 g_{12}$, $g_{43} = \rho_3 g_{34}$.

Компоненты g_{ik} в (11) определены не полностью: мы можем умножить g_{12} и g_{21} на одну и ту же постоянную (и аналогично для g_{34} и g_{43}), не изменив g^i_k. Это соответствует возможности совершить еще одно преобразование координат: $x^{1*} = \alpha_1 x^1, \ldots, x^{4*} = \alpha_4 x^4$, в результате которого компоненты g_{12} и g_{21} умножаются на одну и ту же постоянную $(\alpha_1\alpha_2)$, а компоненты g_{34} и g_{43} — на постоянную $(\alpha_3\alpha_4)$, но не затрагиваются компоненты $g^1_1 = \rho_1, \ldots, g^4_4 = \rho_4$. В частности, в «диагональной системе» мы можем пользоваться стандартизованной формой g_{ik}:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_1^{-1/2} & 0 & 0 \\ \rho_1^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_3^{-1/2} \\ 0 & 0 & \rho_3^{1/2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

2.3. В следующем разделе мы покажем, что теория требует, чтобы $\det(\underline{g_{ik}}) \neq 0$. Здесь же мы выведем алгебраические следствия из этого требования. Обращение в нуль $\det(\underline{g_{ik}})$ является инвариантным свойством, и мы можем использовать «диагональную систему». Из формулы (12) следует, что

$$|\underline{g_{ik}}| = \frac{1}{16}(\rho_1^{1/2} + \rho_1^{-1/2})^2 (\rho_3^{1/2} + \rho_3^{-1/2})^2$$

и определитель $|\underline{g_{ik}}|$ обращается в нуль в том и только в том случае, когда $\rho_1^{1/2} = -\rho_1^{-1/2}$ или $\rho_3^{1/2} = -\rho_3^{-1/2}$, т. е. когда один из корней равен -1. (В действительности, когда два корня равны -1, т. е. когда $\rho_1 = -1$, то также $\rho_2 = \rho_1^{-1} = -1$).

Если $|\underline{g_{ik}}| \neq 0$, то ортогональным преобразованием координат симметричный тензор $\underline{g_{ik}}$ можно привести к диагональному виду $\varepsilon\delta^i_k$. При сигнатуре $(+, +, +, -)$ этот тензор останется диагональным при преобразовании Лоренца. Что касается антисимметричной части поля, то она останется антисимметричной и после всех этих преобразований, при этом мы можем найти преобразование Лоренца, которое оставляет отличными от нуля только компоненты $\underset{\vee}{g}_{12}$ и $\underset{\vee}{g}_{34}$. Иными словами, при сигнатуре симметричной части поля $(+, +, +, -)$ мы можем регулярным преобразованием привести ковариантный тензор g_{ik} к виду

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & \underset{\vee}{g}_{12} & 0 & 0 \\ -\underset{\vee}{g}_{12} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \underset{\vee}{g}_{34} \\ 0 & 0 & -\underset{\vee}{g}_{34} & 1 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где g_{12} и g_{34} — вещественные величины.

Формулы (12) и (13) тесно связаны, и ρ_1 нетрудно выразить через g_{12}, а ρ_3 — через g_{34}. Мы получаем

$$\rho_1 = \frac{1 + i\underset{\vee}{g}_{12}}{1 - i\underset{\vee}{g}_{12}}, \qquad \rho_3 = \frac{1 + \underset{\vee}{g}_{34}}{1 - \underset{\vee}{g}_{34}}. \tag{14}$$

Это значит, что ρ_1, $\rho_2 = \rho_1^{-1}$ лежат на окружности единичного радиуса, тогда как ρ_3, $\rho_4 = \rho_3^{-1}$ — вещественны. Мы видим также, что $\operatorname{arc}(\rho_1) < \pi$ (другими словами, что $\rho_1 \neq -1$).

Используем теперь условие $|g_{ik}| < 0$. Из формулы (13) получаем

$$|g_{ik}| = (1 + \underset{\vee}{g}{}_{12}^2)(-1 + \underset{\vee}{g}{}_{34}^2) < 0,$$

откуда следует, что

$$|\underset{\vee}{g}_{34}| < 1. \tag{15}$$

Это неравенство показывает, что ρ_3 и ρ_4 — положительны.

Подведем итоги. Мы показали, что при сигнатуре симметричной части $\underline{g_{ik}}$ вида $(+, +, +, -)$ взаимно обратные корни ρ_1, ρ_2 лежат на окружности единичного радиуса, из которой исключена точка -1; два других взаимно обратных корня ρ_3, ρ_4 положительны. Удобно выразить корни через углы ϑ_1 и ϑ_2:

$$\rho_1 \equiv e^{i\vartheta_1} = \rho_2^{-1}, \qquad \rho_3 \equiv e^{\vartheta_2} = \rho_4^{-1}. \tag{14a}$$

Отсюда следует, что $|\vartheta_1| < \pi$; для ϑ_2 аналогичного ограничения не существует.

3. Требование регулярности Γ^l_{ik}

Мы постулируем теперь, что величины Γ^l_{ik}, определяемые соотношением

$$g_{ik,l} = g_{is}\Gamma^s_{lk} + g_{sk}\Gamma^s_{il}, \tag{1}$$

всюду регулярны и однозначно определены алгебраически. Исследуем необходимые и достаточные условия для выполнения этого постулата.

Покажем сначала (как мы обещали выше), что

$$\det(g_{\underline{ik}}) \neq 0 \tag{16}$$

является необходимым условием [5]. Чтобы убедиться в этом, предположим, что это условие не выполнено, т. е. что $|g_{\underline{ik}}| = 0$. Тогда должен существовать по крайней мере один вектор A^k, такой, что

$$g_{\underline{ik}}A^k = 0.$$

Умножая уравнение (1) на $A^iA^kA^l$, мы получаем

$$A^iA^kA^lg_{\underline{ik};l} = A^iA^kA^lg_{\underline{is}}\Gamma^s_{\underline{lk}} + A^iA^kA^lg_{\underline{sk}}\Gamma^s_{\underline{il}} = 0.$$

Тождественное обращение в нуль всех членов, содержащих Γ^l_{ik} в этой линейной комбинации, означает, что определитель из коэффициентов при неизвестных Γ^l_{ik} в уравнении (1) обращается в нуль, если $\det(g_{\underline{ik}}) = 0$, и, следовательно, в этом случае не существует однозначного алгебраического решения для Γ^l_{ik}.

Мы доказали, что регулярность и однозначная определимость Γ^l_{ik} требует, чтобы

$$\det(g_{\underline{ik}}) \neq 0. \tag{16}$$

Как мы видели выше, это эквивалентно условию

$$\rho_i \neq -1. \tag{16a}$$

Условие $|g_{\underline{ik}}| \neq 0$ влечет за собой важное для теории следствие, что сигнатура симметричной части поля всюду $(+, +, +, -)$. (Поскольку сигнатура не может измениться без того, чтобы $|g_{\underline{ik}}|$ прошло через запрещенное нулевое значение, а в областях, где поле почти симметрично, сигнатура равна $(+, +, +, -)$, то она остается одинаковой всюду.) Этот результат означает, что всюду в пространстве временноподобные

[5] Это утверждение принадлежит Е. Страусу.

области одинаковым образом отличаются от пространственноподобных,— так же как в теории гравитации (с симметричными полями).

Вернемся к вопросу об условиях регулярности и однозначной определимости Γ^l_{ik}. Необходимое условие $\det(g_{\underline{ik}}) \neq 0$ (или, что эквивалентно, $\rho_i \neq -1$) не является, как мы сейчас увидим, достаточным. Если выполняется неравенство (16) или (16а), то мы всегда можем несингулярным преобразованием перейти к (локальной) диагональной системе координат (см. раздел 2.3). Запишем уравнение (1) в «диагональной» системе, использовав стандартизованную форму (12) тензора g_{ik}. (В этой системе координат легче проверить условие регулярности, а если величина Γ^l_{ik} регулярна в «диагональной» системе, то она регулярна и в произвольной). В «диагональной» системе уравнения (1) принимают вид

$$g_{ik,l} = g_{\underline{k}k}\Gamma^{\underline{k}}_{il} + g_{i\underline{i}}\Gamma^{\underline{i}}_{lk}. \tag{1a}$$

Здесь мы использовали следующие обозначения: $\underline{k}=1$, если $k=2$, и $\underline{k}=2$, если $k=1$; $\underline{k}=4$, если $k=3$, и $\underline{k}=3$, если $k=4$. В этих обозначениях

$$g_{k\underline{k}} = \rho_{\underline{k}}^{1/2}, \qquad g_{\underline{k}k} = \rho_{\underline{k}}^{-1/2} = \rho_k^{1/2}. \tag{17}$$

Уравнения (1а) легко разрешить. Если все три индекса одинаковы, мы получаем

$$g_{ii,i} = (g_{\underline{i}i} + g_{i\underline{i}})\,\Gamma^{\underline{i}}_{ii} = (\rho_i^{1/2} + \rho_i^{-1/2})\,\Gamma^{\underline{i}}_{ii}. \tag{18}$$

Поскольку $\rho_i \neq -1$, по предположению, это уравнение можно разрешить относительно $\Gamma^{\underline{i}}_{ii}$, и решение является регулярным и однозначным.

Если не все три индекса совпадают, мы берем систему трех уравнений, отвечающих циклической перестановке индексов:

$$\begin{aligned} g_{ik,l} &= g_{\underline{k}k}\Gamma^{\underline{k}}_{il} + g_{i\underline{i}}\Gamma^{\underline{i}}_{lk},\\ g_{kl,i} &= g_{\underline{l}l}\Gamma^{\underline{l}}_{ki} + g_{k\underline{k}}\Gamma^{\underline{k}}_{il},\\ g_{li,k} &= g_{\underline{i}i}\Gamma^{\underline{i}}_{lk} + g_{l\underline{l}}\Gamma^{\underline{l}}_{ki}. \end{aligned} \tag{19}$$

Определитель из коэффициентов в правых частях последней системы уравнений есть

$$\begin{vmatrix} g_{\underline{k}k} & g_{i\underline{i}} & 0 \\ g_{k\underline{k}} & 0 & g_{\underline{l}l} \\ 0 & g_{\underline{i}i} & g_{l\underline{l}} \end{vmatrix} = -(\rho_k^{1/2}\rho_l^{1/2}\rho_i^{1/2} + \rho_k^{-1/2}\rho_l^{-1/2}\rho_i^{-1/2}). \tag{20}$$

Он может обратиться в нуль лишь в очень специальном случае, когда один из корней есть $i = \sqrt{-1}$, а другой $+1$. В этом случае в (20) мы берем, например, $k = l$ и $\rho_k = \rho_l = i$, а $\rho_i = +1$ и находим, что определитель равен нулю. Мы можем описать этот случай с помощью инвариантов S_1, S_2:

$$S_1 = \sum_1^4 \rho_t = 1 + 1 + i + (-i) = 2,$$

$$S_2 = \sum_{\substack{s<t \\ 1}}^{4} \rho_s \rho_t = 1 + i - i + i - i + 1 = 2.$$

Таким образом мы получили достаточное условие регулярности и однозначной алгебраической определимости Γ^l_{ik}:

$$\det(\underset{\vee}{g}_{ik}) \neq 0 \text{ и } S_1 \neq 2 \neq S_2.$$

Сопутствующее условие $S_1 \neq 2 \neq S_2$ может оказаться весьма сильным для компонент поля; оно делает вероятным существование неравенства $\vartheta_1 < \pi/2$. Действительно, если поле содержит значения $|\vartheta_1| \geqslant \pi/2$, то в поле, вообще говоря, должна существовать поверхность, на которой $\vartheta_1 = \pi/2$. При изменении значений ρ_3 и $\rho_4 = \rho_3^{-1}$ на этой поверхности, вообще говоря, будет существовать по крайней мере точка, в которой $\rho_3 = \rho_4 = +1$ (или $\vartheta_2 = 0$), иначе говоря, точка, где $S_1 = 2 = S_2$. В этой точке Γ алгебраически не определено однозначно, и такого рода решения уравнений поля, согласно нашему постулату, мы должны исключить. Поэтому представляется правдоподобным, что теория как целое требует выполнения более сильного неравенства для ϑ_1, а именно, $\vartheta_1 < \pi/2$. Однако доказательство этого утверждения не может основываться только на соображениях регулярности g и Γ.

Из равенств (14) и (14а) следует, что если $|\vartheta_1|$ должна быть меньше чем $\pi/2$, то

$$|\underset{\vee}{g}_{12}| < 1$$

[$\underset{\vee}{g}_{12}$ — полевая переменная в формуле (13)], и это условие в какой-то мере аналогично неравенству

$$|\underset{\vee}{g}_{34}| < 1$$

[$\underset{\vee}{g}_{34}$ — снова из формулы (13)].

4. Решение уравнений для Γ^l_{ik}

Решения уравнений (18) и (19) не очень полезны, поскольку они найдены лишь в локальной системе координат, которая меняется от точки к точке. Поэтому представляет интерес найти решение в общей системе координат. Такого рода решение действительно можно построить — вывод мы вкратце дадим ниже,— но оно громоздко и совершенно бесполезно для решения дифференциальных уравнений.

4.1. Первый шаг к решению заключается в переходе к более удобной записи уравнения (1). Введем для удобства две величины:

$$\begin{aligned} V_{ik|l} &= g_{sl}\Gamma^s_{ik}, \\ W_{ik|l} &= g_{ls}\Gamma^s_{ik}. \end{aligned} \tag{21}$$

Они просто связаны между собой:

$$\Gamma^t_{ik} = g^{tl}V_{ik|l} = g^{lt}W_{ik|l}, \tag{22}$$

или

$$V_{ik|m} = g^{lt}g_{tm}W_{ik|l} = g^l_m W_{ik|l}. \tag{23}$$

Введем величины V и W в уравнение (1) и затем исключим V с помощью соотношений (23). Тогда получим уравнение для W:

$$0 = g_{ik,l} - W_{lk|i} - g^s_k W_{il|s}. \tag{24}$$

Это уравнение можно видоизменить и привести к более удобной и прозрачной форме. Мы используем (24) в виде

$$W_{lk|i} = g_{ik,l} - g^s_k W_{il|s} \tag{24a}$$

и подставим это выражение в третий член уравнения (24). Тогда мы получим

$$0 = g_{ik,l} - W_{lk|i} - g^s_k\left(g^s_{l,i} - g^t_l\right)W_{si|t},$$

или

$$0 = \left(g_{ik,l} - g^s_k g_{sl,i}\right) - W_{lk|i} + g^s_k g^t_l W_{si|t}.$$

Теперь мы повторим эту процедуру и снова заменим $W_{si|t}$ в последнем члене на эквивалентное выражение с помощью (24а)

$$g_{ik,l} + g^{k'}_k g^{l'}_l g_{l'i,k'} - g^{k'}_k g_{k'l,i} = W_{lk|i} + g^{l'}_l g^{k'}_k g^{i'}_i W_{l'k'|i'}. \tag{25}$$

Введя определение

$$A_{ik|l} = g_{lk,i} - g^{k'}_k g_{k'i,l} + g^{i'}_i g^{k'}_k g_{i'l,k'}, \tag{26}$$

можно написать

$$A_{ik|l} = (\delta_i^{i'}\delta_k^{k'}\delta_l^{l'} + g_i^{i'}g_k^{k'}g_l^{l'})W_{i'k'|l'}. \qquad (27)$$

Это наиболее удобный вид уравнения для $W_{ik|l}$. Коль скоро W известно, мы находим Γ, используя соотношение (21):

$$\Gamma_{ik}^{l} = g^{ls}W_{ik|s}. \qquad (21a)$$

Насколько рациональна запись уравнения в форме (27), можно убедиться, рассматривая, например, случай симметричного поля. В этом случае $g_i^{i'} = \delta_i^{i'}$. Левая часть уравнения (27) равна $2\begin{bmatrix} l \\ ik \end{bmatrix}$, тогда как правая часть превращается в $2W_{ik|l}$ и уравнение (27) приводит к соотношению

$$\Gamma_{ik}^{l} = g^{ls}\begin{bmatrix} s \\ ik \end{bmatrix},$$

т. е. к хорошо известной формуле римановой геометрии. Чтобы разрешить (27) относительно W, умножим это уравнение на тензор, обратный коэффициенту при W. Обозначим этот коэффициент через $U_{ikl}^{i'k'l'}$, а обратный ему коэффициент — через $\underline{U}_{i'k'l'}^{ikl}$. Тогда

$$U_{ikl}^{i'k'l'}\underline{U}_{i''k''l''}^{ikl} = \delta_{i''}^{i'}\delta_{k''}^{k'}\delta_{l''}^{l'}. \qquad (28)$$

Умножая теперь уравнение (27) на $\underline{U}$, находим

$$\underline{U}_{i''k''l''}^{ikl}A_{ik|l} = W_{i''k''|l''}. \qquad (29)$$

Таким образом, наша задача об определении W (и тем самым Γ) свелась к задаче о нахождении тензора $\underline{U}$, обратного U. Это — чисто алгебраическая задача, в которой производные от g_{ik} не фигурируют вообще.

4.2. Обращение U. Чтобы тензору U придать более компактный вид, введем прямое произведение матриц (обозначаемое символом «$\times$»). Пусть M — четырехрядная матрица, элементами которой являются g_k^i, и пусть I — четырехрядная единичная матрица. Тогда из определения U следует

$$U_{ikl}^{i'k'l'} = \delta_i^{i'}\delta_k^{k'}\delta_l^{l'} + g_i^{i'}g_k^{k'}g_l^{l'} = (\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\mathrm{I}+\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times\mathrm{M})_{ikl}^{i'k'l'},$$

или, в более компактной форме,

$$\mathrm{U} = \mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\mathrm{I}+\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times\mathrm{M}. \qquad (30)$$

Наша задача заключается в отыскании матрицы $\underline{\mathrm{U}}$, такой что

$$\mathrm{U}\cdot\underline{\mathrm{U}} = \mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\mathrm{I} = \mathrm{M}^0\times\mathrm{M}^0\times\mathrm{M}^0. \qquad (31)$$

Нетрудно найти решение для матрицы, обратной U, в заданной точке, если мы будем описывать поле в этой точке в локальной диагональной системе. В этой локальной системе U принимает вид

$$U_{ikl}^{i'k'l'} = \delta_i^{i'}\delta_k^{k'}\delta_l^{l'}(1+\rho_{i'}\rho_{k'}\rho_{l'}), \tag{32}$$

и для обратной матрицы $\underline{\mathrm{U}}$ мы получаем выражение

$$\underline{U}_{i''k''l''}^{ikl} = \delta_{i''}^{i}\delta_{k''}^{k}\delta_{l''}^{l}(1+\rho_i\rho_k\rho_l)^{-1}. \tag{32a}$$

В принципе это и есть решение нашей задачи; но поскольку оно приведено в не ковариантной форме и по виду (32а) нелегко догадаться о том, как выглядит ковариантное выражение, то приходится обратиться к другому подходу, основанному на последовательном использовании произвольной системы координат. Поэтому решение для $\underline{\mathrm{U}}$ запишем в общем виде:

$$\sum c_{rst}\,\mathrm{M}^r \times \mathrm{M}^s \times \mathrm{M}^t.$$

Суммирование должно быть ограничено значениями — 2, —1, 0, +1, поскольку M удовлетворяет алгебраическому тождеству четвертой степени:

$$\mathrm{M}^2 - S_1\mathrm{M}^1 + S_2\mathrm{M}^0 - S_1\mathrm{M}^{-1} + \mathrm{M}^{-2} \equiv 0 \equiv \sum_{-2}^{2} \alpha_s \mathrm{M}^s. \tag{33}$$

С помощью этого тождества все полиномы по M можно привести к стандартной форме, куда входят только четыре последовательных степени M [однако выбор этих степеней остается свободным, поскольку тождество (33) выполняется и после умножения его на M^t]. Поэтому мы можем написать

$$\underline{\mathrm{U}}\,| = \sum_{-2}^{+1} c_{rst}\mathrm{M}^r \times \mathrm{M}^s \times \mathrm{M}^t, \tag{34}$$

и наша задача теперь сводится к определению коэффициентов c_{rst} из матричного уравнения

$$(\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\mathrm{I} + \mathrm{M}\times\mathrm{M}\times\mathrm{M})\cdot\sum_{-2}^{+1} c_{rst}\mathrm{M}^r\times\mathrm{M}^s\times\mathrm{M}^t \equiv$$

$$\equiv \sum_{-1}^{+2} d_{rst}\mathrm{M}^r\times\mathrm{M}^s\times\mathrm{M}^t = \mathrm{M}^0\times\mathrm{M}^0\times\mathrm{M}^0. \tag{35}$$

Легко видеть, что введенные здесь коэффициенты d_{rst} связаны с c_{rst} соотношением

$$d_{rst} = c_{rst} + c_{r-1,\,s-1,\,t-1}. \tag{36}$$

В дальнейшем мы используем здесь два различных метода определения этих коэффициентов. Первый из них, который мы изложим лишь вкратце, позволяет получить c_{rst} как рациональные функции инвариантов S_1 и S_2, входящие в тождество (33). Однако получающиеся при этом коэффициенты c_{rst} как функции r, s, t не имеют единой формы. По этой причине мы дадим подробный вывод другим методом, лишенным этого недостатка. Однако в этом случае мы получим c_{rst} как функции инвариантов ρ_i, которые не являются рациональными функциями S_1, S_2 и, следовательно, рациональными функциями переменных поля. Этот метод существенно опирается на свойства локальной диагональной системы, и решение легко приводится в любой данной точке к локальному решению (32а).

Обращаясь к первому методу, укажем сначала на некоторые свойства симметрии коэффициентов. (Имеется в виду, что d_{rst} обращается в нуль, если хоть один индекс принимает значение меньше -2 или больше $+2$, и c_{rst} обращается в нуль, если какой-либо индекс принимает значения меньше -2 или больше $+1$.) Из уравнения (35) нетрудно видеть, что c_{rst} не меняется при перестановке индексов (поскольку изменение порядка множителей в прямых произведениях не меняет ни правой части, ни общего множителя перед суммой. Чтобы обеспечить эту инвариантность, коэффициенты c_{rst} должны быть сами инвариантны относительно перестановки индексов). Следовательно, и коэффициенты d_{rst} инвариантны относительно перестановок индексов.

Тождество (33), кроме того, инвариантно относительно замены М на M^{-1}. Значит, соотношение (35) не должно нарушаться при такой замене. Отсюда следует, что $d_{rst} = d_{-r,-s,-t}$ или, если воспользоваться соотношением (36), что $c_{rst} = c_{-r-1,-s-1,-t-1}$. Эти свойства симметрии существенно уменьшают число коэффициентов.

Теперь из соотношения (35) и тождества (33) мы видим, что наиболее общее выражение для d_{rst} имеет вид

$$d_{rst} = \delta_{r0}\delta_{s0}\delta_{t0} + (\alpha_r d_{st} + \alpha_s d_{tr} + \alpha_t d_{rs}), \tag{37}$$

где d_{rs} пока неизвестны, но будут определены из уравнений, которым должны удовлетворять величины d_{rst}. Из свойств симметрии d_{rst} следует, что d_{rs} должны удовлетворять соотношениям $d_{rs} = d_{sr}$ и $d_{rs} = d_{-r-s}$. Следовательно, остается определить лишь девять различных коэффициентов d_{rs}.

Уравнения (36) вместе с соотношением $c_{2st} = 0$ дают нам теперь 9 уравнений для d_{rst}. Чтобы убедиться в этом, составим величину

$$d^*_{rst} = d_{rst} - d_{r-1,\, s-1,\, t-1} + d_{r-2,\, s-2,\, t-2} - \ldots,$$

причем

$$d^*_{rst} = c_{rst} \qquad (r,\ s,\ t \neq 2), \tag{38}$$

но

$$d^{*}_{2st} = \delta_{s2}\delta_{t2}. \tag{39}$$

В силу симметрии относительно перестановок и изменения знака, соотношения (39) содержат только 9 различных уравнений для d_{rst}, или, в силу соотношений (37), 9 уравнений для d_{rs}. Эту систему из 9 линейных уравнений для 9 величин d_{rs} можно решить. Отсюда находим d_{rst} и затем [используя соотношения (38)] c_{rst} как явные функции α_r (т. е. S_1, S_2). Однако нам не удалось записать это решение в обозримом виде, и поэтому мы перейдем сейчас к другому методу, о котором упоминалось выше.

При использовании второго метода тождество (33) применяется иначе. Заменим при помощи этого тождества M^2 на более низкие степени M во всех слагаемых в левой части уравнения (35). Тогда в левой части останется приведенный полином, в который M входит в степенях -2, -1, 0, $+1$; в правой же части стоит прямое произведение $\mathrm{M}^0 \times \mathrm{M}^0 \times \mathrm{M}^0$. Поскольку все полиномы приводятся к стандартной форме со степенями -2, -1, 0, $+1$, равенство выражений в левой и правой частях означает, что коэффициент при $\mathrm{M}^r \times \mathrm{M}^s \times \mathrm{M}^t$ (в приведенной левой части) должен быть равен $\delta_{r0}\delta_{s0}\delta_{t0}$.

Приведение левой части по модулю тождества (33) выполняется с помощью следующего искусственного приема. Имеем

$$\mathrm{M}\cdot\mathrm{M}^r = \sum_{s=-2}^{+1} \alpha_{rs}\mathrm{M}^s \qquad (r = -2,\ -1,\ 0,\ +1), \tag{40}$$

где

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & S_1 & -S_2 & S_1 \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Последняя строка в матрице берется из тождества. Подставляя (40) в соотношение (35), получаем:

$$\mathrm{M}^0\times \mathrm{M}^0\times\mathrm{M}^0 = \sum_{rst} c_{rst}\mathrm{M}^r\times\mathrm{M}^s\times\mathrm{M}^t + \sum_{rst} c_{rst}(\mathrm{M}\cdot\mathrm{M}^r)\times(\mathrm{M}\cdot\mathrm{M}^s)\times(\mathrm{M}\cdot\mathrm{M}^t) =$$

$$= \sum_{rst} c_{rst}\mathrm{M}^r\times\mathrm{M}^s\times\mathrm{M}^t + \sum_{rst} c_{rst} \sum_{uvw} \alpha_{ru}\alpha_{sv}\alpha_{tw}\times\mathrm{M}^u\times\mathrm{M}^v\times\mathrm{M}^w =$$

$$= \sum_{uvw} \mathrm{M}^u\times\mathrm{M}^v\times\mathrm{M}^w\Big\{\sum_{rst} c_{rst}\,(\delta_{ru}\delta_{sv}\delta_{tw} + \alpha_{ru}\alpha_{sv}\alpha_{tw})\Big\}.$$

Сравнивая коэффициенты в обеих частях равенства, находим

$$\delta_{u0}\delta_{v0}\delta_{w0} = \sum_{-2}^{+1} c_{rst}\,[\delta_{ru}\delta_{sv}\delta_{tw} + \alpha_{ru}\alpha_{sv}\alpha_{tw}]. \tag{42}$$

Пусть t — матрица, диагонализирующая α:

$$\mathrm{t}\alpha\mathrm{t}^{-1} = \lambda \text{ или } \alpha\mathrm{t}^{-1} = \mathrm{t}^{-1}\lambda,$$

или, в более подробной записи,

$$\alpha_{ab}(\mathrm{t}^{-1})_{bc} = (\mathrm{t}^{-1})_{ac}\lambda_c. \tag{43}$$

Умножая соотношение (42) на

$$(\mathrm{t}^{-1})_{ua}(\mathrm{t}^{-1})_{vb}(\mathrm{t}^{-1})_{wc}$$

и суммируя по u, v, w, получаем:

$$(\mathrm{t}^{-1})_{0a}(\mathrm{t}^{-1})_{0b}(\mathrm{t}^{-1})_{0c} = [\sum_{rst} c_{rst}(\mathrm{t}^{-1})_{ra}(\mathrm{t}^{-1})_{sb}(\mathrm{t}^{-1})_{tc}]\cdot[1+\lambda_a\lambda_b\lambda_c].$$

Разделим обе части равенства на $(1+\lambda_a\lambda_b\lambda_c)$, умножим на $t_{ak}t_{bl}t_{cm}$ и просуммируем по a, b, c. Тогда мы придем к соотношению

$$\sum_{abc}\frac{(\mathrm{t}^{-1})_{0a}(\mathrm{t}^{-1})_{0b}(\mathrm{t}^{-1})_{0c}\,t_{ak}\,t_{bl}\,t_{cm}}{1+\lambda_a\lambda_b\lambda_c} = c_{klm}, \tag{44}$$

которое и содержит искомый результат.

Остается найти лишь λ_k и t'_{ak}. Как видно из определения α [формула (41)], собственные значения α удовлетворяют уравнению

$$\det(\alpha_{rs} - \lambda\delta_{rs}) = \lambda^4 - \lambda^3 S_1 + \lambda^2 S_2 - \lambda S_1 + 1 = 0.$$

Следовательно, собственные значения α и M совпадают:

$$\lambda_k = \rho_k. \tag{45}$$

Нетрудно также проверить, что равенства (43) удовлетворяются, если

$$(\mathrm{t}^{-1})_{ab} = (\rho_b)^a, \tag{46}$$

и, таким образом, в соотношении (44)

$$(\mathrm{t}^{-1})_{0a}(\mathrm{t}^{-1})_{0b}(\mathrm{t}^{-1})_{0c} = (\rho_a)^0(\rho_b)^0(\rho_c)^0 = 1.$$

Заметим, что поскольку при суммировании индексы пробегают значения —2, —1, 0, +1, то необходимо также изменить обозначения собственных значений на $\rho_{-2}, \ldots, \rho_{+1}$ и положить, например, $\rho_{-2} = \rho_{-1}^{-1}$, $\rho_0 = \rho_1^{-1}$.

Вычисляя, наконец, t, находим:

$$\begin{aligned} t_{a,\,-2} &= (\rho_{-2})^2 \left(-\frac{1}{\rho_a}\right)\sigma_a, \\ t_{a,\,-1} &= (\rho_{-1})^2 \frac{1}{\rho_a}\left(S_1 - \frac{1}{\rho_a}\right)\sigma_a, \\ t_{a,\,0} &= (\rho_0)^2 (\rho_a - S_1)\cdot\sigma_a, \\ t_{a,\,+1} &= (\rho_1)^2 \sigma_a, \end{aligned} \tag{47}$$

где $S_1 = \sum \rho_s$ и $(\sigma_0)^{-1} = (\rho_{+1} - \rho_0)(\rho_{-2} - \rho_0)(\rho_{-1} - \rho_0)$ и т. д. Эти величины можно использовать при вычислении различных коэффициентов:

$$c_{rst} = \sum_{abc=-2}^{+1} \frac{t_{ar} t_{bs} t_{ct}}{1 + \rho_a \rho_b \rho_c}. \tag{48}$$

Интересно проследить, каким образом это решение переходит в локальное решение (32a). Имеем соотношение

$$\underline{\mathrm{U}} = \sum_{-2}^{+1} c_{rst} \mathrm{M}^r \times \mathrm{M}^s \times \mathrm{M}^t.$$

Следовательно, в диагональной системе матрица U является диагональной:

$$\underline{\mathrm{U}}^{ikl}_{i''k''l''} = \delta^i_{i''}\delta^k_{k''}\delta^l_{l''} \sum_{-2}^{+1} c_{rst} (\rho_i)^r (\rho_k)^s (\rho_l)^t = \delta^i_{i''}\delta^k_{k''}\delta^l_{l''} \sum_{rst}\sum_{abc} \frac{t_{ar} t_{bs} t_{ct}}{1 + \rho_a \rho_b \rho_c} (\rho_i)^r (\rho_k)^s (\rho_l)^t.$$

Суммирование по r, s, t можно выполнить независимо для каждого индекса. Используя соотношение (46), находим

$$\sum_{r=-2}^{+1} t_{ar} (\rho_i)^r = \sum_{r=-2}^{+1} t_{ar} (\mathrm{t}^{-1})_{ri} = \delta_{ai} \tag{49}$$

и, следовательно,

$$U^{ikl}_{i''k''l''} = \delta^i_{i''}\delta^k_{k''}\delta^l_{l''} \sum_{abc} \frac{\delta_{ai}\delta_{bk}\delta_{cl}}{1 + \rho_a \rho_b \rho_c} = \delta^i_{i''}\delta^k_{k''}\delta^l_{l''} \frac{1}{1 + \rho_i \rho_k \rho_l},$$

что совпадает с выражением (32a).

Поступила 23 июня 1953 г.

НОВАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

(Совместно с Б. Кауфман)

Введение

Наиболее ясно общую теорию относительности можно охарактеризовать как теорию, которая обходится без введения «инерциальной системы координат». Первым, кто ясно увидел, что может заменить инерциальную систему, был Леви-Чивита. Инерциальная система дает нам соотношение между векторами в любых двух точках на конечном расстоянии. «Поле смещений» (Γ^l_{ik}) дает нам инвариантным образом соотношение между векторами (и тензорами) в бесконечно близких точках и поэтому является инвариантом, заменяющим инерциальную систему. Это Г-поле приводит к понятию тензора кривизны пространства R^i_{klm} и вместе с ним к понятию свернутого тензора кривизны $R_{kl} (\equiv R^s_{kls})$.

Чтобы использовать эти понятия для вывода уравнений поля, которые не были бы ни недоопределены, ни непозволительно переопределены, можно воспользоваться вариационным принципом. При этом заранее предполагается существование инвариантного интеграла по пространству, т. е. существование скалярной плотности $\mathfrak{H}$. Простейший способ построения такой плотности состоит во введении, кроме поля смещений, (контравариантной) тензорной плотности $\mathfrak{g}^{ik}$. Этой паре полей сопоставляется тогда скалярная плотность $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik}R_{ik}$, которая выбирается в качестве подынтегрального выражения в варьируемом интеграле. Тогда теория в принципе становится полностью определенной, если мы добавим, что при варьировании полей $\mathfrak{g}$ и Γ следует рассматривать как независимые переменные.

Настоящая теория возникла из попытки создать теорию полного поля путем обобщения уравнений чисто гравитационного поля. Это обобщение

---

* *A new Form of the General Relativistic Field Equations.* (With B. Kaufmann). Ann. Math., 1955, 62, 128—138.

состоит в отказе от свойств симметрии полей $\mathfrak{g}$ и Γ, т. е. от симметрии $\mathfrak{g}_{ik}$ и Γ^l_{ik} по индексам i, k. На первый взгляд такое обобщение кажется неестественным, так как симметричные и антисимметричные компоненты этих полей преобразуются независимо друг от друга, не смешиваясь при преобразованиях координат; таким образом, с точки зрения группы преобразований эти два набора компонент (симметричный и антисимметричный) выступают как независимые величины. Но, с другой стороны, можно убедиться, что те образования, которые существенны для установления ковариантных уравнений, не зависят от предположения о симметрии. В частности, это справедливо для поля смещений и тензора кривизны. Таким образом, при построении теории не нужно использовать свойства симметрии. Вместо симметрии переменных поля, которая характерна для теории гравитационного поля, более естественно ввести формально аналогичное (но более слабое) условие «инвариантности по отношению к транспонированию» системы уравнений. Мы замечаем, что хотя $\mathfrak{g}^{ik}$ и Γ^l_{ik} могут быть несимметричными, законы преобразования для этих величин те же, что для транспонированных

$$\tilde{\mathfrak{g}}^{ik}\,(\equiv \mathfrak{g}^{ki}),\ \ \tilde{\Gamma}^l_{ik}\,(\equiv \Gamma^l_{ki}).$$

Тогда мы потребуем, чтобы законы поля выполнялись для транспонированных величин так же, как и для исходных [1].

В качестве примера такого закона поля мы приведем уравнение

$$0 = \mathfrak{g}^{ik}_{\ ,l} + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^i_{tl} + \mathfrak{g}^{it}\Gamma^k_{lt} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{ik}(\Gamma^t_{lt} + \Gamma^t_{tl}).$$

Отсюда непосредственно видно, что если мы заменим в этом уравнении $\mathfrak{g}^{ik}$ и Γ^l_{ik} на транспонированные величины $\tilde{\mathfrak{g}}^{ik}$ и $\tilde{\Gamma}^l_{ik}$ и затем поменяем местами свободные индексы i и k, то вернемся к исходному уравнению. Поэтому имеет смысл говорить о правой части этого уравнения, как о выражении, обладающем «симметрией относительно транспонирования (по i и k)» и о самом уравнении как о «транспозиционно инвариантном» (по отношению к $\mathfrak{g}$ и Γ). Транспозиционная инвариантность является в некотором смысле более слабой заменой условий симметрии переменных и уравнений поля, которая характерна для теории гравитационного поля. В несимметричной теории условие транспозиционной инвариантности используется для значительного ограничения многообразия возможных вариантов. Физический смысл требования инвариантности по отношению к транспонированию состоит в инвариантности уравнений поля по отношению к изменению знака электрических зарядов.

[1] Эта формулировка будет несколько видоизменена по ходу нашего исследования, когда Γ^l_{ik} будут заменены на несколько отличные переменные поля.

Чтобы четко выявить черты нового вывода и новой формулировки законов поля, мы должны сперва привести первоначальный вывод в таком виде, который облегчит сравнение.

1. Вывод законов поля с использованием $\mathfrak{g}$ и Γ как переменных поля

Вывод законов поля из вариационного принципа становится автоматическим, как только выбрана скалярная плотность. При прежнем способе вывода $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik}R_{ik}$, где

$$R_{ik} = \Gamma^s_{ik,\,s} - \Gamma^s_{is,\,k} - \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{tk} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{st}. \tag{1}$$

Законы поля выводятся из условия

$$\delta\int \mathfrak{H} d\tau = \delta\int \mathfrak{g}^{ik}R_{ik}d\tau = 0,$$

где все $\mathfrak{g}^{ik}$ и Γ^l_{ik} варьируются независимо друг от друга, и вариации обращаются в нуль на границах интегрирования.

В результате варьирования по $\mathfrak{g}^{ik}$ мы получаем уравнения

$$R_{ik} = 0. \tag{2a}$$

Варьирование по Γ^l_{ik} несколько сложнее. Мы имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{ik}\delta R_{ik} &= \mathfrak{g}^{ik}(\delta\Gamma^s_{ik,\,s} - \delta\Gamma^s_{is,\,k} - \Gamma^t_{is}\cdot\delta\Gamma^s_{tk} - \delta\Gamma^t_{is}\cdot\Gamma^s_{tk} + \Gamma^s_{ik}\cdot\delta\Gamma^t_{st} + \\ &+ \delta\Gamma^s_{ik}\cdot\Gamma^t_{st}) = \{(\mathfrak{g}^{ik}\delta\Gamma^s_{ik})_{,\,s} - (\mathfrak{g}^{ik}\delta\Gamma^s_{is})_{,\,k}\} + \\ &+ \delta\Gamma^s_{ik}\,\{-\mathfrak{g}^{ik}_{,\,s} - \mathfrak{g}^{tk}\Gamma^i_{ts} - \mathfrak{g}^{it}\Gamma^k_{st} + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^t_{st} + \mathfrak{g}^{it}_{,\,t}\delta^k_s + \mathfrak{g}^{mt}\Gamma^i_{mt}\delta^k_s\}.\end{aligned}$$

Члены в первой скобке ничего не вносят в вариационный интеграл, поскольку вариации выбраны обращающимися в нуль на пределах. Обозначая коэффициент при $\delta\Gamma^s_{ik}$ через $\mathfrak{M}^{ik}_s$ и учитывая, что все $\delta\Gamma$ независимы, мы получаем уравнения

$$(\mathfrak{M}^{ik}_s \equiv)\,(-\mathfrak{g}^{ik}_{,\,s} - \mathfrak{g}^{tk}\Gamma^i_{ts} - \mathfrak{g}^{it}\Gamma^k_{st} + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^t_{st}) + \delta^k_s\,(\mathfrak{g}^{it}_{,\,t} + \mathfrak{g}^{mt}\Gamma^i_{mt}) = 0. \tag{2б}$$

Из рассмотрения уравнений (2a) и (2б) нетрудно заметить, что они не удовлетворяют требованию транспозиционной инвариантности; и это не удивительно, так как уравнения выводились из вариационной функции, которая не была транспозиционно инвариантной.

Тем не менее, можно изменить форму уравнений (2a) и (2б) таким образом, чтобы они стали транспозиционно инвариантными. Однако такой путь представляется довольно искусственным (хотя и законным), и мы приведем новый вывод и новую форму теории.

Метод, используемый при изменении формы уравнений (2а) и (2б), использует то обстоятельство, что как R_{ik}, так и $\mathfrak{M}_s^{ik}$ имели бы нужный вид, если бы мы могли положить $\Gamma_i = \frac{1}{2}(\Gamma_{is}^s - \Gamma_{si}^s) = 0$ (доказательство этого утверждения просто, но довольно длинно). Мы, конечно, не можем просто добавить в нашу систему четыре уравнения $\Gamma_i = 0$, ибо это нарушило бы ее внутреннюю согласованность. Вместо этого мы изменим формально описание поля, подставив вместо Γ новые величины Γ^*[2]

$$\Gamma_{ik}^l \equiv \Gamma_{ik}^{l*} + \delta_i^l \Lambda_k.$$

Мы должны ввести четыре новых произвольных переменных, которые не нужны для описания поля, но при варьировании рассматриваются как независимые переменные. Выполнив варьирование, мы можем придать Λ_k любое выбранное нами значение («нормировка» Λ_k); это позволит нам добавить к нашей системе, не нарушая ее совместности, четыре уравнения для Γ^*.

Прямым вычислением мы приходим к уравнению

$$R_{ik}(\Gamma) = R_{ik}(\Gamma^*) + (\Lambda_{k,\,i} - \Lambda_{i,\,k}),$$

так что для варьируемой функции получаем

$$\mathfrak{H}(\Gamma) = \mathfrak{H}(\Gamma^*) + \mathfrak{g}^{ik}(\Lambda_{k,\,i} - \Lambda_{i,\,k}). \tag{3}$$

Мы будем варьировать $\mathfrak{H}$ по $\mathfrak{g}^{ik}$, Γ_{ik}^{l*} и Λ_k. Но из формулы (3) видно, что варьирование по Γ дает нам те же уравнения (для Γ^*), которые были у нас ранее для Γ:

$$\mathfrak{M}_s^{ik}(\Gamma^*) = 0. \tag{4а}$$

Варьирование по $\mathfrak{g}^{ik}$ дает

$$R_{ik}(\Gamma^*) + (\Lambda_{k,\,i} - \Lambda_{i,\,k}) = 0. \tag{4б}$$

Наконец, варьирование по Λ_k дает

$$(\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}{}_{,s} \equiv)\ \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{is} - \mathfrak{g}^{si})_{,\,s} = 0. \tag{4в}$$

Эти последние уравнения не являются новыми, а следуют из (4а), так как

$$\mathfrak{M}_s^{si} = 2\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}{}_{,s}.$$

---

[2] Исходя из закона преобразования Γ_{ik}^l, нетрудно показать, что Γ_{ik}^{l*} также представляет собой поле смещений — при условии, что Λ_k преобразуется как вектор.

Теперь мы можем придать четырем лишним переменным Λ_k любое желаемое значение и выбрать Λ_k так, чтобы

$$\Gamma_k^* = 0. \tag{4г}$$

Приняв во внимание равенство (4г), можно показать, как упоминалось выше, что $\mathfrak{M}_s^{ik}(\Gamma^*)$ и $R_{ik}(\Gamma^*)$, как мы и хотели, транспозиционно инвариантны.

Когда переменные Λ_k полностью исключены, уравнения принимают окончательный вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_s^{ik}(\Gamma^*) &= 0, \\ \Gamma_k^* &= 0, \\ R_{\underline{ik}}(\Gamma^*) &= 0, \\ R_{\underset{\vee}{ik},\,l}(\Gamma^*) + R_{\underset{\vee}{kl},\,i}(\Gamma^*) + R_{\underset{\vee}{li},\,k}(\Gamma^*) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь все уравнения транспозиционно инвариантны. (И, конечно, нет нужды обозначать поле смещений через Γ^*; мы снова можем писать просто Γ.)

2. Введение поля U_{ik}^l

При выводе в предыдущем разделе был использован искусственный прием — сначала вводились четыре лишние переменные, а затем они исключались. Причина наших трудностей лежит в том, что мы требуем транспозиционной инвариантности уравнений поля, но исходим из вариационной функции, не обладающей этим свойством. Естественно возникает вопрос: можно ли найти вариационную функцию в форме, которая сама была бы транспозиционно инвариантной, так что все уравнения, выведенные из нее, были бы автоматически транспозиционно инвариантными, и не возникало бы необходимости в каких-либо искусственных приемах. И действительно, мы нашли, что такая форма $\mathfrak{H}$ существует, если $\mathfrak{H}$ выразить через новый «псевдотензор» [3] U_{ik}^l, который тесно связан с Γ_{ik}^l.

Нелегко непосредственно мотивировать введение псевдотензора U_{ik}^l. В действительности же он сначала был придуман, чтобы упростить выражение для R_{ik}. Заметим, что два подвергаемые дифференцирова

[3] Под «псевдотензором» мы подразумеваем величину, которая преобразуется как тензор при линейных преобразованиях координат; при этом закон преобразования отличается от тензорного только членами, не зависящими от самой этой величины.

нию $\Gamma^s_{ik,\,s} - \Gamma^s_{is,\,k}$ можно объединить: $(\Gamma^s_{ik} - \Gamma^t_{it}\delta^s_k)_{,\,s}$, так что псевдотензор можно определить равенством

$$U^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} - \Gamma^t_{it}\delta^l_k. \tag{6}$$

Мы можем разрешить это равенство относительно Γ, выразив его через U. Прежде всего

$$U^t_{it} = -3\Gamma^t_{it}$$

и, следовательно,

$$\Gamma^l_{ik} = U^l_{ik} - \frac{1}{3}U^t_{it}\delta^l_k. \tag{6a}$$

Подставляя U вместо Γ в R_{ik}, находим

$$R_{ik} = U^s_{ik,\,s} - U^t_{is}U^s_{tk} + \frac{1}{3}U^t_{it}U^s_{sk}. \tag{7}$$

Выражение R_{ik} через U транспозиционно симметрично, что можно усмотреть непосредственно из равенства (7). Следовательно, U — более естественные переменные для описания поля, чем Γ.

В дальнейшем мы выберем $\mathfrak{g}^{ik}$ и U^l_{ik} в качестве наших переменных поля, а нашей варьируемой функцией будет $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik}R_{ik}$, где R_{ik} определяется формулой (7).

3. Инвариантные свойства вариационной функции

Процедура варьирования предполагает, что $\int \mathfrak{H}d\tau$ является скаляром. Иными словами, $\mathfrak{H}$ выбирается таким образом, чтобы $\int \mathfrak{H}d\tau$ не менялся при произвольных преобразованиях координат.

Кроме того, мы находим, что при выбранном нами частном виде $\mathfrak{H}$ этот интеграл не меняется и при так называемом «λ-преобразовании». Это преобразование состоит в замене U^l_{ik} на

$$U^{l*}_{ik} = U^l_{ik} + (\delta^l_i\lambda_{,\,k} - \delta^l_k\lambda_{,\,i}) \tag{8}$$

при неизменном $\mathfrak{g}^{ik}$. Прямые вычисления [путем подстановки выражения (8) в соотношение (7)] показывают, что R_{ik} инвариантно относительно λ-преобразования. Следовательно, как $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik}R_{ik}$, так и $\int \mathfrak{H}d\tau$ являются «λ-инвариантными»[4].

[4] Соответствующее λ-преобразование можно определить также для $R_{ik}(\Gamma)$ теми же путем показать, что $R_{ik}(\Gamma)$ есть λ-инвариант. Важно заметить, что можно опре-

Инвариантные свойства интеграла $\int \mathfrak{H}\, d\tau$ приводят к появлению тождеств для уравнений поля и переменных поля, что будет показано в следующем разделе.

4. Формальные следствия из вариационного принципа

Мы выводим все уравнения поля и тождества из требования

$$\delta\int \mathfrak{H} d\tau = 0$$

и из факта инвариантности $\int \mathfrak{H}\, d\tau$ относительно преобразований координат и λ-преобразований.

В результате варьирования получаем

$$\delta\mathfrak{H} = (\mathfrak{g}^{ik}\delta U^s_{ik})_{,\,s} + \mathfrak{N}^{ik}_s \delta U^s_{ik} + R_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik}, \tag{9}$$

где, как и раньше,

$$\mathfrak{N}^{ik}_s = -\,\mathfrak{g}^{ik}_{,\,s} - \mathfrak{g}^{tk}\left(U^i_{ts} - \frac{1}{3}\delta^i_s U^m_{tm}\right) + \mathfrak{g}^{it}\left(U^k_{st} - \frac{1}{3}\delta^k_s U^m_{mt}\right). \tag{10}$$

$$R_{ik} \equiv U^s_{ik,\,s} - U^t_{is}U^s_{tk} + \frac{1}{3}U^s_{is}U^t_{tk}, \tag{7}$$

которые могут быть найдены путем простых вычислений.

Выбирая частные формы вариации в нашей теории, мы можем получить различные результаты. Перечислим сначала эти частные случаи; подробности будут приведены ниже.

I. Вариации δU^l_{ik} выбираются так, что они обращаются в нуль на пределах интегрирования. Тогда первый член в правой части равенства (9) не дает вклада в интеграл. Поскольку все вариации, $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU^l_{ik}, независимы, коэффициенты при них обращаются в нуль по отдельности, и мы находим *уравнения поля*

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{N}^{ik}_s &= 0, \\ R_{ik} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

II. Пусть вариации $\delta\mathfrak{g}$ и δU обусловлены варьированием, при котором $\delta\int \mathfrak{H} d\tau$ обращается в нуль тождественно. Снова предполагая, что

делить другое «λ-преобразование», которое оставляло бы неизменным $R_{ik}(\Gamma)$; однако не существует ни одного λ-преобразования, при котором как $R_{ik}(\Gamma)$, так и $R_{ik}(\widetilde{\Gamma})$ оставались бы неизменными Этот факт используется в разделе 5.

δU^l_{ik} обращаются в нуль на поверхности интегрирования, получаем

$$\int (\mathfrak{N}_s^{ik} \delta U^s_{ik} + R^{\underline{}\underline{}}_{ik} \delta \mathfrak{g}^{ik})\, d\tau \equiv 0. \tag{12}$$

Такие вариации $\delta\mathfrak{g}$ и δU возникают, в частности, при бесконечно малом варьировании координат, либо при бесконечно малом λ-преобразовании. Значит δU и $\delta\mathfrak{g}$ можно выразить через бесконечно малые вариации ξ^i (для координат) и λ. Поскольку все вариации ξ^i и λ независимы, мы находим $4+1$ тождеств для наших уравнений поля, $\mathfrak{N}_s^{ik}$ и R_{ik}. Четыре тождества, обязанные варьированию координат, называются «тождествами Бианки».

III. Пусть снова $\delta\mathfrak{g}$ и δU возникают при бесконечно малых координатных и λ-преобразованиях; кроме того, предположим, что уравнения поля удовлетворяются. Тогда $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik} = 0$, и при преобразованиях координат и при λ-преобразованиях $\mathfrak{H}$ остается равной нулю, так что $\delta\mathfrak{H} = 0$. Тогда (как следствие уравнений поля) получаем

$$(\mathfrak{g}^{ik} \delta U^s_{ik})_{,\, s} = 0. \tag{13}$$

Это — общий «закон сохранения», который в дальнейшем должен быть согласован с выбором вариации: бесконечно малое преобразование координат или λ-преобразование.

Мы можем теперь привести некоторые подробности для случаев II и III.

II. Здесь мы даем явную форму вариаций $\delta\mathfrak{g}$ и δU, возникающих при бесконечно малых преобразованиях координат и λ-преобразованиях.

а. Бесконечно малое λ-преобразование

Из определения этого преобразования следует

$$\delta\mathfrak{g}^{ik} = 0, \text{ но } \delta U^l_{ik} = \delta^l_i \lambda_{,\,k} - \delta^l_k \lambda_{,\,i}. \tag{14}$$

Подставляя эти выражения для вариаций в равенство (12), получаем

$$0 = \int [\mathfrak{N}_s^{ik} (\delta^s_i \lambda_{,\,k} - \delta^s_k \lambda_{,\,i})]\, d\tau = \int [\mathfrak{N}_s^{sk} \lambda_{,\,k} - \mathfrak{N}_s^{is} \lambda_{,\,i}]\, d\tau = \int [\mathfrak{N}_s^{sk} - \mathfrak{N}_s^{ks}] \lambda_{,\,k}\, d\tau.$$

Интегрируя по частям (и выбирая λ обращающимся в нуль на пределах интегрирования), мы получаем дифференциальное тождество

$$[\mathfrak{N}_s^{sk} - \mathfrak{N}_s^{ks}]_{,\,k} \equiv 0. \tag{15}$$

6. Бесконечно малые преобразования координат

Мы варьируем координаты, полагая $x^{i*} = x^i + \xi^i$ (ξ^i — бесконечно малая величина), откуда

$$\frac{\partial x^{i*}}{\partial x^a} = \delta^i_a + \xi^i_{,a} \text{ и } \frac{\partial x^a}{\partial x^{i*}} = \delta^a_i - \xi^a_{,i}.$$

Нас интересует теперь вариация $\mathfrak{g}^{ik}$, порожденная бесконечно малым изменением координат. Новые компоненты $\mathfrak{g}^{ik}$ (тензорной плотности!) определяются законом преобразования

$$(\mathfrak{g}^{ik})^* = \left[\frac{\partial x^{i*}}{\partial x^a}\cdot\frac{\partial x^{k*}}{\partial x^b}\,\mathfrak{g}^{ab}\right] y,$$

где y — функциональный определитель $|\partial x^s/\partial x^{t*}|$. При бесконечно малой вариации имеем

$$(\mathfrak{g}^{ik})^* = [(\delta^i_a + \xi^i_{,a})(\xi^k_b + \xi^k_{,b})\,\mathfrak{g}^{ab}](1 - \xi^s_{,s}) = \mathfrak{g}^{ik} + \mathfrak{g}^{ak}\xi^i_{,a} + \mathfrak{g}^{ib}\xi^k_{,b} - \mathfrak{g}^{ik}\xi^s_{,s}$$

(опуская члены, квадратичные по ξ).

Разность $(\mathfrak{g}^{ik})^* - (\mathfrak{g}^{ik})$ дает изменение компонент, но при двух различных значениях координат (x^i) и (x^{i*}). Однако в вариационном исчислении молчаливо предполагается, что варьирование следует производить при тех же значениях координат. По этой причине мы должны добавить изменение $-\mathfrak{g}^{ik}_{,s}\xi^s$, вызванное возвращением от координат (x^{i*}) к (x^i). В результате мы находим

$$\delta\mathfrak{g}^{ik} = \mathfrak{g}^{tk}\xi^i_{,t} + \mathfrak{g}^{it}\xi^k_{,t} - \mathfrak{g}^{ik}\xi^t_{,t} - \mathfrak{g}^{ik}_{,t}\xi^t. \tag{16}$$

Вариацию δU^l_{ik} можно аналогичным путем получить из закона преобразования U^l_{ik} (который выведен в Приложении). Мы находим

$$\delta U^l_{ik} = U^t_{ik}\xi^l_{,t} - U^l_{tk}\xi^t_{,i} - U^l_{it}\xi^t_{,k} - \xi^l_{,ik} + \frac{1}{2}(\delta^l_i\xi^t_{,tk} + \delta^l_k\xi^t_{,ti}) - U^l_{ik,t}\xi^t. \tag{17}$$

Теперь мы можем подставить выражения для $\delta\mathfrak{g}$ и δU в равенство (12) и выполнить необходимые интегрирования по частям. Получающийся интеграл имеет вид

$$\int W_i\xi^i d\tau \equiv 0;$$

поскольку все ξ^i независимы, мы находим «тождества Бианки» [5]:

$$0 \equiv [-\mathfrak{N}^{ik}_t U^s_{ik} + \mathfrak{N}^{sk}_t U^i_{tk} + \mathfrak{N}^{ks}_i U^i_{kt} - R_{it}\mathfrak{g}^{is} - R_{ti}\mathfrak{g}^{si}]_{,s} +$$
$$+\left[\frac{1}{2}(\mathfrak{N}^{is}_i + \mathfrak{N}^{si}_i)_{,t} - (\mathfrak{N}^{is}_t)_{,i}\right] + [R_{ik,t}\mathfrak{g}^{ik} - \mathfrak{N}^{ik}_s U^s_{ik,t}]. \tag{18}$$

[5] Этот метод вывода тождеств Бианки принадлежит Г. Вейлю.

III. Подставим в «закон сохранения» (13) явные выражения для δU^l_{ik} в различных частных случаях.

а. Бесконечно малое λ-преобразование

$$0 = [\mathfrak{g}^{ik}(\delta^s_i\lambda_{,k} - \delta^s_k\lambda_{,i})]_{,s} = [\mathfrak{g}^{sk}\lambda_{,k} - \mathfrak{g}^{is}\lambda_{,i}]_{,s} =$$
$$= [(\mathfrak{g}^{sk} - \mathfrak{g}^{ks})\ \lambda_{,k}]_{,s} = 2\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s}\lambda_{,k}.$$

Если, например, λ выбирается равным αx^a (α — бесконечно малая величина), мы получаем «уравнение дивергенции»

$$0 = \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{sa}}_{,s}. \tag{19}$$

Ничего, кроме этого, не получается и при другом выборе λ.

б. Бесконечно малое преобразование координат

Выбирая случаи $\xi^a = \text{const.}$ и $\xi^i = 0$ $(i \neq a)$, из равенств (13) и (17) находим, что

$$0 = [\mathfrak{g}^{ik}U^s_{ik,a}]_{,s}. \tag{20}$$

Обозначим выражение в скобках через $\mathfrak{T}^s_a$. Соотношение

$$0 = [\mathfrak{T}^s_a]_{,s} \tag{21}$$

можно интерпретировать как «закон сохранения энергии-импульса». Тогда $\mathfrak{T}^s_a$ есть плотность «тензора энергии-импульса». (Эта величина есть тензорная плотность лишь по отношению к линейным преобразованиям.)

Выбирая другой частный случай, мы полагаем $\xi^a = c^a_b x^b$ (c^a_b — бесконечно малые и произвольные величины) и принимаем во внимание соотношение (20), а также независимость c^a_b. Тогда мы находим

$$[\mathfrak{g}^{ik}u^b_{ik}\delta^t_a - \mathfrak{g}^{bk}u^t_{ak} - \mathfrak{g}^{kb}u^t_{ka}]_{,t} = \mathfrak{g}^{ik}u^b_{ik,a} = \mathfrak{T}^b_a. \tag{22}$$

Иначе говоря, каждая компонента тензора энергии-импульса выражается через дивергенцию тензорной плотности. Этот факт полезен при вычислении интегралов типа $\int \mathfrak{T}^4_4 d\tau$, так как (по теореме Гаусса) нам нужно знать значения $\mathfrak{g}$ и U только на пределах интегрирования.

5. Рассмотрение совместности и «жесткости» системы уравнений

Мы можем теперь подробно обсудить совместность нашей системы уравнений. Имеется 16 + 64 переменных поля $\mathfrak{g}^{ik}$ и U^l_{ik} и 16 + 64 уравнений $R_{ik} = 0$ и $\mathfrak{N}^{ik}_l = 0$. Мы имеем также 4 тождества Бианки, которые выражают тот факт, что поля, отличающиеся одно от другого только преобразованием координат, суть одни и те же поля. (Таким образом, после решения нашей системы дифференциальных уравнений мы еще можем выбрать координатные функции четырьмя произвольными способами.) Кроме того, имеется тождество (обязанное λ-инвариантности), которое выражает тот факт, что поля смещений (Г или U), отличающиеся одно от другого только λ-преобразованием, суть одни и те же поля.

Последнее соображение является главным доводом против метода, использованного в разделе 1. В самом деле, окончательная система уравнений (5) после выполнения «нормировки» больше не является λ-инвариантной. Это означает, что не все эквивалентные формы Г-поля являются решениями уравнений (5). В противоположность этому, уравнения (11), выраженные через переменные пóля $\mathfrak{g}$ и U, являются λ-инвариантными, так же как они инвариантны относительно преобразований координат. По этой причине совокупность решений уравнений (11) включает *все* поля, удовлетворяющие вариационному принципу.

Важное значение λ-инвариантности для теории проявляется в следующем. Можно было бы задать вопрос: почему бы не воспользоваться транспозиционно-инвариантной скалярной плотностью

$$\frac{1}{2}\,[\,\mathfrak{g}^{ik} R_{ik}(\Gamma) + \tilde{\mathfrak{g}}^{ik} R_{ik}(\tilde{\Gamma})]$$

(где R_{ik} (Г) сконструировано из Г) в качестве вариационной функции. При ближайшем рассмотрении оказывается, что с помощью этой плотности нельзя построить λ-инвариантную теорию, так что среди уравнений, выведенных таким образом, мы нашли бы лишь 4 тождества Бианки и не смогли бы отождествить поля, отличающиеся друг от друга λ-преобразованием. Грубо говоря, отождествление Г-полей с разными λ уменьшает число компонент Г от 64 до 63; совместность системы обеспечивается тогда существованием дифференциального тождества (обязанного λ-инвариантности). В системе без λ-инвариантности число компонент Г равно 64 и компенсирующего тождества нет.

В этом заключается более глубокая причина относительной слабости системы, которая не является λ-инвариантной [6]. Мы придерживаемся того принципа, что более жесткую систему следует предпочитать любой более слабой, если нет особых причин для обратного.

Приложение. Закон преобразования для U^l_{ik}

Из определения U через Γ мы можем найти закон преобразования [7]

$$(U^l_{ik})^* = \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}U^l_{ik} + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{k^*}} - \delta^{l^*}_{k^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}. \qquad (23)$$

Выражение в правой части этого равенства не обладает транспозиционной симметрией по индексам i, k. Однако легко показать, что это преобразование можно рассматривать как две последовательные операции: во-первых, преобразование координат, которое транспозиционно симметрично, и, во-вторых, λ-преобразование. Чтобы убедиться в этом, напишем:

$$\begin{aligned}(U^l_{ik})^* = &\left\{\frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}U^l_{ik} + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{k^*}} -\right.\\
&\left. - \frac{1}{2}\delta^{l^*}_{i^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^{t^*}\partial x^{k^*}} - \frac{1}{2}\delta^{l^*}_{k^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}\right\} -\\
&- \frac{1}{2}\left\{\delta^{l^*}_{k^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}} - \delta^{l^*}_{i^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{t^*}\partial x^{k^*}}\right\}. \qquad (23a)\end{aligned}$$

Выражение в первой скобке транспозиционно симметрично; обозначим его через $U^{l^*}_{i^*k^*}$. Допустим, что U^l_{ik} переходит в $U^{l^*}_{i^*k^*}$ при преобразованиях координат. Произведем теперь λ-преобразование: $U^{l^*}_{i^*k^*}$ перейдет в

$$U^{l^*}_{i^*k^*} + (\delta^{l^*}_{i^*}\lambda_{,k^*} - \delta^{l^*}_{k^*}\lambda_{,i^*});$$

иными словами, преобразования (координатное и λ-преобразование) аддитивны. Сравнивая этот результат с (23), мы видим, что $(U^l_{ik})^*$ мы можем

---

[6] Строгий способ оценивать «жесткость» системы дифференциальных уравнений описан в Приложении II к нашей работе «Сущность теории относительности» (и в дополнении к этому Приложению). (Статья 141, новый вариант см. статью 146.— *Ред.*)

[7] В этих обозначениях i и i^* — независимые индексы, относящиеся к старой и новой системам координат, соответственно (аналогично и для других пар индексов). Такие обозначения облегчают «усвоение» некоторых формул.

рассматривать как комбинацию координатного и λ-преобразований, при условии, что мы сможем показать, что

$$\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}$$

имеет вид $\lambda_{,i^*}$.

Обозначим функциональный определитель снова через J.

$$J \equiv \left|\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right| \equiv J^s_{t^*}.$$

Нормированный фактор при $J^s_{t^*}$ можно обозначить через $J^{t^*}_s$. Мы знаем, что

$$J^{t^*}_s = \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s},$$

так как

$$\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial x^{m^*}} = \delta^{t^*}_{m^*}.$$

Выражение

$$\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}},$$

которым мы интересуемся, имеет теперь вид

$$J^{t^*}_s\cdot(J^s_{t^*})_{,\,i^*};$$

можно видеть, что это — логарифмическая производная определителя J:

$$\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}} = (\ln J)_{,\,i^*}.$$

Таким образом, мы показали, что первоначально выведенную формулу преобразования (23) можно рассматривать как комбинацию транспозиционно инвариантного закона преобразования,

$$U^{l^*}_{i^*k^*} = \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}u^l_{ik} + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{k^*}} -$$
$$-\frac{1}{2}\delta^{l^*}_{i^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial t^*\partial x^{kx}} - \frac{1}{2}\delta^{l^*}_{k^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}, \qquad (24)$$

с λ-преобразованием (относительно которого R_{ik} инвариантно). Формула (24) используется при выводе соотношения (17).

Вообще говоря, любое преобразование, составленное из преобразования координат типа (24) и λ-преобразования, не будет сколько-нибудь существенно менять U-поле, но лишь изменит его представление и, наоборот, любое преобразование, которое меняет только представление поля, можно разложить на координатное и λ-преобразование.

Заключение

Уравнения поля (11) полностью эквивалентны уравнениям поля (5). Однако система (11) обладает преимуществом перед последней, не только вследствие своего более простого вида, но также и потому, что она вводит поле без каких-либо ограничений, т. е. без ограничений, не связанных с вариационным принципом.

Поступила 28 января 1955 г.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ПОЛЯ *

ПРИЛОЖЕНИЕ II К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ РАБОТЫ «СУЩНОСТЬ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ»[1]

Прежде чем перейти собственно к предмету статьи, я хочу обсудить в общем виде вопрос о «жесткости» систем уравнений поля. Это понятие представляет самостоятельный интерес независимо от излагаемой здесь конкретной теории. Однако для более глубокого понимания нашей проблемы оно является почти неизбежным.

О «совместности» и «жесткости» систем уравнений поля

Если заданы какие-то определенные переменные поля и система уравнений поля для них, то последняя в общем случае еще не определяет поле полностью. В решении остаются еще некоторые свободные параметры. Чем меньше число свободных параметров, совместных с системой уравнений поля, тем «жестче» система. Ясно, что при отсутствии какого-либо другого критерия для выбора уравнений более жесткую систему уравнений следует предпочитать менее жесткой. Наша цель состоит в том, чтобы найти меру такой жесткости уравнений. Оказывается, что можно определить такую меру, которая дает нам возможность сравнивать жесткость систем даже в том случае, если эти системы обладают различным числом и разными типами переменных поля.

---

* *Relativistic Theory of the non-symmetric Field.* The Meaning of Relativity. Fifth edition. Princeton, 1955. [В русском переводе 4-го издания «Сущности теории относительности» (см. примечание редактора к статье 60) этого Приложения не было, так как включался старый вариант (статья 141).—*Ред.*].

[1] Пятое издание книги вышло также на немецком (Braunschweig, 1960) и на французском языках (Paris, Gauthier — Villars, 1960). В предисловии к нему Эйнштейн писал:
«Для этого издания я полностью переработал „Обобщение теории гравитации“, озаглавив его „Релятивистская теория несимметричного поля“. Мне удалось — частично в сотрудничестве с моей ассистенткой Б. Кауфман — упростить вывод и саму форму уравнений поля. [Ср. статью 142. —*Ред.*]. Вся теория стала после этого более прозрачной, хотя ее содержание и не изменилось».

Мы поясним используемые здесь понятия и методы на примерах возрастающей сложности, ограничиваясь четырехмерными полями, и при рассмотрении этих примеров будем вводить соответствующие понятия в последовательном порядке.

Первый пример. *Скалярное волновое уравнение* [2].

$$\varphi_{,11} + \varphi_{,22} + \varphi_{,33} - \varphi_{,44} = 0.$$

Здесь система состоит лишь из единственного дифференциального уравнения для одной переменной поля. Предположим, что φ разлагается в ряд Тэйлора вблизи точки P (иначе говоря, что функция является φ аналитической). Тогда совокупность коэффициентов полностью описывает функцию. Число коэффициентов n-го порядка (то есть число производных φ n-го порядка в точке P) равно $\frac{4.5\ldots(n+3)}{1.2\ldots n}$ (сокращенно $\binom{4}{n}$) и все эти коэффициенты можно выбирать произвольно, если дифференциальное уравнение не устанавливает каких-либо связей между ними. Так как исходное уравнение второго порядка, то эти связи мы найдем, дифференцируя наше уравнение $(n-2)$ раза. Таким образом для коэффициентов n-го порядка мы получим $\binom{4}{n-2}$ условий. Поэтому число коэффициентов n-го порядка, остающихся произвольными, составит

$$z = \binom{4}{n} - \binom{4}{n-2}. \tag{1}$$

Это число положительно для всякого n. Следовательно, если произвольные коэффициенты для всех порядков, меньших n, будут зафиксированы, то условиям для коэффициентов n-го порядка всегда можно удовлетворить, не изменяя уже выбранных коэффициентов.

Аналогичное рассуждение можно привести для систем из нескольких уравнений. Если число свободных коэффициентов n-го порядка не меньше нуля, мы называем систему уравнений *абсолютно совместной*. Ограничимся именно такими системами уравнений. Все известные мне системы, используемые в физике, принадлежат к этому типу.

Перепишем равенство (1). Имеем

$$\binom{4}{n-2} = \binom{4}{n}\frac{(n-1)\,n}{(n+2)(n+3)} = \binom{4}{n}\left(1 - \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \cdots\right),$$

где $z_1 = +6$.

---

[2] В дальнейшем запятая всегда будет означать частные производные, например,

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \quad \varphi_{,11} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\,\partial x^1} \text{ и т. д.}$$

Ограничиваясь большими значениями n, можно пренебречь членами $\frac{z_2}{n^2}$ и т. д. в скобках, и для уравнения (1) мы получим *асимптотически*

$$z \sim \binom{4}{n}\frac{z_1}{n} = \binom{4}{n}\frac{6}{n}. \tag{1a}$$

Назовем z_1 «коэффициентом свободы», в нашем случае он равен 6. Чем больше этот коэффициент, тем слабее соответствующая система уравнений.

Второй пример. *Уравнения Максвелла для пустого пространства.*

$$\varphi^{is}_{,s} = 0; \quad \varphi_{ik,l} + \varphi_{kl,i} + \varphi_{li,k} = 0.$$

Тензор φ^{ik} получается из антисимметричного тензора φ_{ik} путем поднимания ковариантных индексов с помощью

$$\eta^{ik} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{bmatrix}.$$

Мы имеем $4+4$ уравнений поля для шести переменных поля. Среди этих восьми уравнений существуют два тождества. Если обозначить левые части уравнений поля через G^i и H_{ikl} соответственно, тождества примут вид

$$G^i_{,i} \equiv 0; \quad H_{ikl,m} - H_{klm,i} + H_{lmi,k} - H_{mik,l} = 0.$$

В этом случае мы рассуждаем следующим образом. Разложение шести переменных поля в ряды Тэйлора дает

$$6\binom{4}{n}.$$

коэффициентов n-го порядка. Условия, которым должны подчиняться эти коэффициенты n-го порядка, получаются $(n-1)$-кратным дифференцированием восьми уравнений поля первого порядка. Поэтому число этих условий равно

$$8\binom{4}{n-1}.$$

Однако эти условия не все независимы, так как среди восьми уравнений существуют два тождества второго порядка. После $(n-2)$-кратного дифференцирования они дают

$$2\binom{4}{n-2}$$

алгебраических тождеств для условий, полученных из уравнений поля. Поэтому число свободных коэффициентов n-го порядка равно

$$z = 6\binom{4}{n} - \left[8\binom{4}{n-1} - 2\binom{4}{n-2}\right].$$

Число z положительно для всех n. Таким образом система уравнений является «абсолютно совместной». Вынося за скобки множитель $\binom{4}{n}$ в правой части и разлагая, как и выше, в ряд для больших n, мы получаем

$$z = \binom{4}{n}\left[6 - 8\frac{n}{n+3} + 2\frac{(n-1)\,n}{(n+2)(n+3)}\right] \sim$$
$$\sim \binom{4}{n}\left[6 - 8\left(1 - \frac{3}{n}\right) + 2\left(1 - \frac{6}{n}\right)\right] \sim \binom{4}{n}\left[0 + \frac{12}{n}\right].$$

Таким образом, здесь $z_1 = 12$. Это говорит о том, что рассматриваемая система определяет поле менее жестко, чем в случае скалярного волнового уравнения ($z_1 = 6$). Равенство нулю постоянного члена в скобках в обоих случаях выражает тот факт, что рассматриваемая система не содержит никаких произвольных функций четырех переменных.

Третий пример. *Уравнения гравитации для пустого пространства.* Запишем их в виде:

$$R_{ik} = 0; \quad g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk} = 0.$$

Компоненты тензора R_{ik} содержат только величины Γ и являются величинами первого порядка по отношению к ним. Будем здесь считать независимыми переменными поля g и Γ. Второе уравнение показывает, что удобно рассматривать Γ как величины первого порядка при дифференцировании, т. е. что в разложении

$$\Gamma = \underset{0}{\Gamma} + \underset{1}{\Gamma}_s x^s + \underset{2}{\Gamma}_{st} x^s x^t + \ldots$$

следует считать $\underset{0}{\Gamma}$ величиной первого порядка, $\underset{1}{\Gamma}^s$ — величиной второго порядка и т. д. Соответственно компоненты R_{ik} следует рассматривать как величины второго порядка. Для этих уравнений существуют четыре тождества Бианки, которые вследствие сделанных выше предположений следует считать связанными с величинами третьего порядка.

В общековариантной системе уравнений возникает новое обстоятельство, существенное для правильного определения свободных коэффициентов. Поля, получаемые одно из другого только преобразованиями координат, надлежит рассматривать лишь как разные представления одного и того же поля. Соответственно лишь часть из

$$10\binom{4}{n}$$

коэффициентов n-го порядка функций g_{ik} служит для определения существенно различных полей. Поэтому число коэффициентов разложения, фактически определяющих поле, уменьшается на некоторую величину, которую мы теперь вычислим.

В законе преобразования величин g_{ik}

$$g^*_{ik} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{i*}} \frac{\partial x^b}{\partial x^{k*}} g_{ab}$$

функции g_{ab} и $g^*{}_{ik}$ на самом деле представляют одно и то же поле. Дифференцируя это уравнение n раз по x^*, мы замечаем, что коэффициенты n-го порядка в разложении g^* содержат все $(n+1)$-е производные четырех функций x по x^*; другими словами, здесь появляются $4\binom{4}{n+1}$ чисел, не играющих роли при определении поля. Поэтому во всякой общерелятивистской теории необходимо вычесть $4\binom{4}{n+1}$ из общего числа коэффициентов n-го порядка, чтобы учесть общековариантность теории. Подсчет числа свободных коэффициентов n-го порядка приводит, таким образом, к следующему результату.

Десять величин g_{ik} (нулевого порядка в смысле дифференцирования) и сорок величин Γ^l_{ik} (первого порядка в смысле дифференцирования) с учетом только что рассмотренной поправки дают

$$10\binom{4}{n} + 40\binom{4}{n-1} - 4\binom{4}{n+1}$$

соответствующих коэфициентов. Уравнения поля (10 уравнений второго и 40 первого порядка) дают для них

$$N = 10\binom{4}{n-2} + 40\binom{4}{n-1}$$

условий. Однако из этого числа N необходимо вычесть число тождеств

$$4\binom{4}{n-3},$$

которые получаются из тождеств Бианки (третьего порядка). В результате находим

$$z = \left[10\binom{4}{n} + 40\binom{4}{n-1} - 4\binom{4}{n+1}\right] - \left[10\binom{4}{n-2} + 40\binom{4}{n-1}\right] + \binom{4}{n-3}.$$

Выносся за скобки множитель $\binom{4}{n}$, мы получаем асимптотическую формулу для больших n

$$z \sim \binom{4}{n}\left[0+\frac{12}{n}\right].$$

Следовательно, $z_1 = 12$. В этом случае число z также положительно для всех n, так что система является абсолютно совместной в смысле данного выше определения. Поразительно, что уравнения гравитационного поля для пустого пространства определяют поле с такой же жесткостью, как уравнения Максвелла в случае электромагнитного поля.

Релятивистская теория поля

Общие замечания

Существенное достижение общей теории относительности заключается в том, что она избавила физику от необходимости вводить «инерциальную систему» (или «инерциальные системы»). Это понятие неудовлетворительно по той причине, что оно без какого-либо обоснования выделяет из всех мысленно возможных систем координат некоторые системы. Затем делается предположение, что законы физики выполняются *только* для таких инерциальных систем (например, закон инерции и закон постоянства скорости света). Таким образом в системе физики, пространство как таковое наделяется ролью, выделяющей его из всех прочих элементов физического описания. Оно играет определяющую роль во всех процессах, не испытывая их обратного воздействия. Хотя подобная теория является логически возможной, но, с другой стороны, она выглядит не совсем удовлетворительной. Ньютон вполне сознавал этот недостаток, но он столь же ясно понимал, что иного пути для физики в то время не было. Среди физиков позднейшего времени особое внимание на это обстоятельство обратил Эрнст Мах.

Какие новые идеи в развитии основ физики после Ньютона позволили преодолеть исключительность инерциальных систем? Прежде всего, введение понятия поля в теорию электромагнитных явлений Фарадея и Максвелла, или, точнее, введение поля как независимого, ни к чему уже не сводимого фундаментального понятия. Насколько мы способны судить в настоящее время, общая теория относительности может мыслиться только как теория поля. Ее нельзя было бы создать, придерживаясь точки зрения, что реальный мир состоит из материальных точек, движущихся под влиянием сил их взаимодействия. Всякий, кто попытался бы объяснить Ньютону равенство инерциальной и гравитационной масс, исходя из принципа эквивалентности, обязательно должен был бы ответить на следующее возражение: правда ли, что в ускоренной системе координат тела испытывают такое же ускорение, как и вблизи поверхности притягивающего их небесного тела? Но где же находятся в первом случае массы, производящие ускорение? Ясно, что теория относительности предполагает независимость понятия поля.

Математический аппарат, позволивший создать общую теорию относительности, мы находим в геометрических исследованиях Гаусса и Римана. Первый из них в своей теории поверхностей исследовал метрические свойства поверхности, вложенной в трехмерное эвклидово пространство, и показал, что эти свойства можно описывать с помощью понятий, относящихся только к самой поверхности и не связанных с пространством, в которое она вложена. Так как в общем случае на поверхности не существует предпочтительных систем координат, то это исследование впервые привело к выражению соответствующих величин в общих координатах. Риман распространил эту двумерную теорию поверхностей на пространства с произвольным числом измерений (пространства с римановой метрикой, которые характеризуются полем симметричных тензоров второго ранга). В этом замечательном исследовании он нашел общее выражение для кривизны многомерных метрических пространств.

Это кратко очерченное развитие математической теории, существенное для возникновения общей теории относительности, привело к тому, что сначала фундаментальным понятием, на котором была основана общая теория относительности, устранившая роль инерциальных систем, явилась метрика Римана. Однако позднее Леви-Чивита правильно указал на то, что элементом теории, позволяющим устранять инерциальную систему, является, собственно говоря, поле бесконечно малых смещений Γ^l_{ik}. Метрическое, или симметричное тензорное, поле g_{ik}, определяющее поле Γ^l_{ik}, связано с устранением роли инерциальной системы лишь косвенно, в той мере, в какой оно определяет поле смещений. Это ясно из следующего рассуждения.

Переход от одной инерциальной системы к другой определяется *линейным* преобразованием (специального вида). Если в двух произвольно удаленных точках P_1 и P_2 существуют два вектора $\underset{1}{A^i}$ и $\underset{2}{A^i}$, соответственные компоненты которых взаимно равны ($\underset{1}{A^i} = \underset{2}{A^i}$), то при разрешенном преобразовании это равенство сохраняется. Если в формуле преобразования

$$A^{i^*} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a} A^a$$

коэффициенты $\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a}$ не зависят от x^a, то формула преобразования для компонент вектора не зависит от положения. Равенство компонент двух векторов в разных точках P_1 и P_2 является, следовательно, инвариантным соотношением, пока мы ограничиваемся инерциальными системами. Однако, если мы отказываемся от понятия инерциальной системы и разрешаем тем самым произвольные непрерывные преобразования координат, так чтобы коэффициенты $\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a}$ зависели от координат x^a, то равенство компонент двух векторов, построенных в разных точках пространства, теряет свой инвариантный смысл, и, следовательно, такие векторы не могут непосредственно сравниваться. Именно по этой причине в общей теории относительности нельзя образовывать новые тензоры из данного тензора простым дифференцированием, и именно поэтому инвариантные образования встречаются в этой теории в гораздо меньшем количестве. Этот недостаток исправляется введением поля бесконечно малых смещений. Оно заменяет инерциальную систему постольку, поскольку позволяет проводить сравнение векторов в бесконечно близких точках. Отправляясь от этого понятия, мы рассмотрим в этом приложении релятивистскую теорию поля, опуская все, что является несущественным для нашей цели.

Поле бесконечно малых смещений Γ

Контравариантный вектор A^i в точке P (с координатами x^t) и вектор $A^i+\delta A^i$ в бесконечно близкой точке (x^t+dx^t) мы связываем билинейным выражением

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{st} A^s \, dx^t, \tag{2}$$

причем величины Γ являются функциями x. С другой стороны, если A есть векторное поле, то компоненты (A^i) в точке (x^t+dx^t) равны A^i+dA^i, где[3]

$$dA^i = A^i_{,\,t} \, dx^t.$$

Разность этих двух векторов в точке x^t+dx^t тогда сама является вектором

$$(A^i_{,\,t} + A^s\Gamma^i_{st})\, dx^t \equiv A^i_t dx^t,$$

связывающим компоненты векторного поля в двух бесконечно близких точках. Поле смещений заменяет инерциальную систему, поскольку оно удовлетворяет этому соотношению, формально установленному для инер-

[3] Как и прежде, символ «$,_t$» означает частное дифференцирование $\frac{\partial}{\partial x^t}$.

циальной системы. Выражение в скобках, обозначенное для краткости через A^i_l, является тензором.

Тензорный характер A^i_l определяет закон преобразования для величин Г. Сначала имеем

$$A^{i^*}_{k_*} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} A^i_k.$$

Использование одного и того же индекса в обеих системах не означает, что этот индекс относится к соответственным компонентам. Другими словами, индекс i в x^* и в x пробегает значения от 1 до 4 *независимо*. После некоторой практики такое обозначение значительно облегчает чтение уравнений. Теперь мы заменим

$$A^{i^*}_k \text{ на } A^{i^*}_{,k} + A^{s^*}\Gamma^{i^*}_{sk},$$

$$A^i_k \text{ на } A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{sk}$$

и, с другой стороны,

$$A^{i^*} \text{ на } \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} A^i, \quad \frac{\partial}{\partial x^{k^*}} \text{ на } \frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Это приводит к уравнению, содержащему кроме величин Γ^* только полевые величины первоначальной системы и их производные по координатам x первоначальной системы. Разрешая это уравнение относительно Γ^*, мы получаем искомую формулу преобразования

$$\Gamma^{i^*}_{kl} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l^*}} \Gamma^i_{kl} - \frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s \partial x^t} \frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}} \frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}}. \tag{3}$$

Второй член (в правой части) можно несколько упростить:

$$-\frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s \partial x^t} \frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}} \frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}} = -\frac{\partial}{\partial x^{l^*}} \left(\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s}\right) \frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^{l^*}} \left(\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^{k^*}}\right) + \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*} \partial x^{l^*}} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*} \partial x^{l^*}}. \tag{3a}$$

Такую величину мы будем называть *псевдотензором*. При линейных преобразованиях она преобразуется как тензор, тогда как для нелинейных преобразований прибавляется член, который не содержит преобразуемого выражения, но зависит лишь от коэффициентов преобразования.

Замечания о поле смещений

1. Величина $\widetilde{\Gamma}^i_{kl}$ ($\equiv \Gamma^i_{lk}$), получаемая при транспонировании нижних индексов, также преобразуется в соответствии с формулой (3) и потому тоже является полем смещений.

2. Выделяя симметричную или антисимметричную по нижним индексам k^* и l^* часть уравнения (3), мы получаем два уравнения:

$$\Gamma^{i^*}_{\underline{kl}}\left(=\frac{1}{2}(\Gamma^{i^*}_{kl}+\Gamma^{i^*}_{lk})\right)=\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l^*}}\Gamma^i_{\underline{kl}}-\frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s \partial x^t}\frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}},$$

$$\Gamma^{i^*}_{\underset{\vee}{kl}}\left(=\frac{1}{2}(\Gamma^{i^*}_{kl}-\Gamma^{i^*}_{lk})\right)=\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l^*}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{kl}}.$$

Следовательно, две составных части (симметричная и антисимметричная) величин Γ^i_{kl} преобразуются независимо, т. е., не перемешиваясь. Таким образом, с точки зрения закона преобразования они выглядят как независимые величины. Второе из этих уравнений показывает, что величина $\Gamma^i_{\underset{\vee}{kl}}$ преобразуется как тензор. Поэтому с точки зрения группы преобразований сначала кажется неестественным объединять аддитивно эти две величины в одну.

3. С другой стороны, нижние индексы Γ играют совершенно различные роли в определяющем уравнении (2), так что не существует никакой причины, заставляющей ограничивать Γ условием симметрии по нижним индексам. Если тем не менее это условие накладывается, то оно ведет к теории чисто гравитационного поля. Если же не подчинять величины Γ ограничительному условию симметрии, то мы приходим к обобщению закона гравитации, которое представляется мне естественным.

Тензор кривизны

Хотя поле Γ само не обладает тензорным характером, оно предполагает существование тензора. Этот тензор мы без труда получаем, перенося вектор A^i в соответствии с уравнением (2) вдоль контура, замыкающего бесконечно малый элемент двумерной поверхности, и вычисляя его изменение за один обход контура. Это изменение обладает векторным характером.

Пусть $\underset{0}{x^t}$ — координаты фиксированной точки и x^t — координаты другой точки на контуре. Тогда разность $\xi^t = x^t - \underset{0}{x^t}$ будет малой для всех точек контура, и ее можно использовать в качестве базиса при определении порядков величины.

Интеграл $\oint \delta A^i$ необходимо затем вычислить, используя более явные обозначения

$$-\oint \underline{\Gamma^i_{st}}\, \underline{A}^s dx^t \text{ или } -\oint \underline{\Gamma^i_{st}}\, \underline{A}^s d\xi^t.$$

Подчеркивание величин под знаком интеграла указывает на то, что эти величины следует брать для последовательных точек контура (а не для начальной точки $\xi^t = 0$).

Вычислим сначала в самом низшем приближении значение $\underline{A}^i$ для произвольной точки ξ^t контура. Это приближение получается при замене в интеграле, взятом теперь по незамкнутому пути, величин $\underline{\Gamma^i_{st}}$ и $\underline{A}^s$ на величины Γ^i_{st} и A^s для начальной точки интегрирования $(\overline{\xi^t = 0})$. Интегрирование тогда дает

$$\underline{A}^i = A^i - \Gamma^i_{st} A^s \int d\xi^t = A^i - \Gamma^i_{st} A^s \xi^t.$$

В этом выражении мы пренебрегли членами второго или более высокого порядка по ξ. В том же приближении мы получаем немедленно

$$\underline{\Gamma^i_{st}} = \Gamma^i_{st} + \Gamma^i_{st,\,r}\xi^r.$$

Подставляя эти выражения в интеграл и выбирая соответствующим образом индексы, по которым производится суммирование, мы получаем сначала

$$-\oint (\Gamma^i_{st} + \Gamma^i_{st,\,q}\,\xi^q)\,(A^s - \Gamma^s_{pq} A^p\,\xi^q)\,d\xi^t,$$

где все величины, за исключением ξ, следует брать для начальной точки интегрирования. Затем мы находим

$$-\Gamma^i_{st} A^s \oint d\xi^t - \Gamma^i_{st,\,q} A^s \oint \xi^q d\xi^t + \Gamma^i_{st}\Gamma^s_{pq} A^p \oint \xi^q\, d\xi^t,$$

где интегрирование производится по замкнутому контуру. (Первый член обращается в нуль, так как интеграл от него равен нулю.) Член, пропорциональный $(\xi)^2$, здесь опущен как величина высшего порядка. Два других члена можно объединить:

$$[-\Gamma^i_{pt,\,q} + \Gamma^i_{st}\Gamma^s_{pq}]\, A^p \oint \xi^q\, d\xi^t.$$

Это и есть изменение ΔA^i вектора A^i после переноса вдоль контура. Мы имеем

$$\oint \xi^q d\xi^t = \oint d\,(\xi^q\xi^t) - \oint \xi^t d\xi^q = -\oint \xi^t d\xi^q.$$

Таким образом, этот интеграл является антисимметричным по t и q, и, кроме того, он обладает тензорным характером. Обозначим его через f^{tq}.

Если бы f^{tq} был *произвольным* тензором, то векторный характер величины ΔA^i приводил бы к следствию, что выражение в скобках в предпоследней формуле имеет тензорный характер. В действительности же мы можем сделать вывод о тензорном характере выражения в скобках только в том случае, если оно будет антисимметризовано по t и q. Тогда из него получится тензор кривизны

$$R^i_{klm} \equiv \Gamma^i_{kl,\,m} - \Gamma^i_{km,\,l} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km} + \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{kl}. \tag{4}$$

При этом положение всех индексов фиксируется. Свертывая по индексам i и m, мы получим *свернутый тензор кривизны*

$$R_{ik} \equiv \Gamma^s_{ik,\,s} - \Gamma^s_{is,\,k} - \Gamma^s_{it}\Gamma^t_{sk} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{st}. \tag{4a}$$

λ-преобразование

Кривизна обладает свойством, которое будет иметь важное значение в последующем. Для поля смещений Γ можно определить новые величины Γ^* по формуле

$$\Gamma^{l*}_{ik} = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \lambda_{,k}, \tag{5}$$

где λ есть произвольная функция координат и δ^l_i есть тензор Кронеккера («λ-преобразование»). Если образовать R^i_{klm} (Γ^*) заменяя Γ^* на правую часть уравнения (5), то λ сокращается так, что

$$R^i_{klm}(\Gamma^*) = R^i_{klm}(\Gamma)$$

и

$$R_{ik}(\Gamma^*) = R_{ik}(\Gamma). \tag{6}$$

Кривизна инвариантна относительно λ-преобразования («λ-инвариантность»). Следовательно, теория, содержащая Γ только в выражении для тензора кривизны, определяет поле Γ не полностью, а только с точностью до функции λ, остающейся произвольной. В подобной теории Γ и Γ^* следует рассматривать как представления одного поля таким образом, как если бы величина Γ^* получалась из Γ просто преобразованием координат.

Следует отметить, что λ-преобразование, в противоположность преобразованию координат, порождает несимметричные величины Γ^* из симметричных по индексам i и k величин Γ. В такой теории условие симметрии для Γ теряет свой объективный смысл.

Основное значение λ-инвариантности определяется тем, что она, как мы увидим позднее, влияет на «жесткость» системы уравнений поля.

Требование «инвариантности относительно транспонирования»

Вводя несимметричные поля, мы встречаем следующую трудность. Если Γ^l_{ik} означает поле смещений, то $\widetilde{\Gamma}^l_{ik}\ (=\Gamma^l_{ki})$ тоже будет полем смещений. Если g_{ik} есть тензор, то $\widetilde{g}_{ik}\ (=g_{ki})$ также является тензором. Это ведет к большому числу ковариантных образований, из которых невозможно сделать выбор на основании одного только принципа относительности. Мы продемонстрируем эту трудность на примере и покажем, как можно преодолеть ее естественным образом.

В теории симметричного поля важную роль играет тензор

$$(W_{ikl} \equiv)\, g_{ik,\,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk}.$$

Приравнивая его нулю, мы получаем уравнение, позволяющее выразить величины Γ через g, т. е. исключить Γ. Пользуясь тем, что, как показано ранее, 1) выражение $A^i_t = A^i_{,t} + A^s\Gamma_{st}$ есть тензор, и что 2) произвольный контравариантный тензор может быть представлен в виде $\sum\limits_t \underset{(t)}{A^i}\,\underset{(t)}{B^k}$, можно без труда доказать, что написанное выше выражение имеет тензорный характер и в том случае, если поля g и Γ уже не будут симметричными.

Но в последнем случае тензорный характер сохраняется, если, к примеру, в последнем члене Γ^s_{lk} транспонируется, т. е. заменяется на Γ^s_{kl} (это следует из того факта, что выражение $g_{is}\,(\Gamma^s_{kl} - \Gamma^s_{lk})$ есть тензор). Существуют и другие, хотя и не такие простые, образования, сохраняющие тензорный характер, которые можно считать обобщением рассматриваемого выражения на случай несимметричного поля. Следовательно, если мы захотим обобщить на несимметричные поля соотношение между величинами g и Γ, получаемое приравниванием нулю написанного выше выражения, то это, по-видимому, внесет произвол при выборе поля.

Но рассматриваемое образование обладает свойством, отличающим его от всех других возможных образований. Если одновременно заменить g_{ik} на $\widetilde{g}_{ik}$ и Γ^l_{ik} на $\widetilde{\Gamma}^l_{ik}$ и затем переставить индексы i и k, это образование переходит само в себя. Оно является «симметричным относительно транспонирования» по индексам i и k. Уравнение, получаемое приравниванием этого выражения нулю, является «инвариантным относительно транспонирования». В случае симметричных g и Γ это условие, разумеется, также удовлетворяется; оно служит обобщением требования того, чтобы полевые величины были симметричны.

Для уравнений несимметричного поля мы постулируем, что они должны обладать *инвариантностью относительно транспонирования*. Я полагаю, что этот постулат, с физической точки зрения, соответствует требованию, чтобы положительные и отрицательные электрические заряды входили в законы физики симметрично.

Взгляд на уравнение (4а) показывает, что тензор R_{ik} является не вполне инвариантным относительно транспонирования, поскольку при транспонировании он переходит в

$$(\overset{*}{R}_{ik} =)\ \Gamma^{s}_{ik,s} - \Gamma^{s}_{sk,i} - \Gamma^{s}_{it}\Gamma^{t}_{sk} + \Gamma^{s}_{ik}\Gamma^{t}_{ts}. \tag{4б}$$

Это обстоятельство и лежит в основе трудностей, с которыми мы сталкиваемся, пытаясь установить уравнения поля, инвариантные относительно транспонирования.

Псевдотензор U^{l}_{ik}

Оказывается, что из R_{ik} можно образовать симметричный относительно транспонирования тензор, введя вместо Γ^{l}_{ik} несколько отличающийся псевдотензор U^{l}_{ik}. В уравнении (4а) два линейных по Γ члена формально можно объединить в один. Заменим $\Gamma^{s}_{ik,s} - \Gamma^{s}_{is,k}$ на $(\Gamma^{s}_{ik} - \Gamma^{t}_{it}\delta^{s}_{k})_{,s}$ и определим новый псевдотензор U^{l}_{ik} уравнением

$$U^{l}_{ik} \equiv \Gamma^{l}_{ik} - \Gamma^{t}_{it}\delta^{l}_{k}. \tag{7}$$

Поскольку, как следует из уравнения (7) в результате свертывания по k и l,

$$U^{t}_{it} = -3\Gamma^{t}_{it},$$

мы получаем для Γ следующее выражение

$$\Gamma^{l}_{ik} = U^{l}_{ik} - \frac{1}{3} U^{t}_{it}\delta^{l}_{k}. \tag{7а}$$

Подставляя это выражение в (4а), находим для свернутого тензора кривизны выражение через U:

$$S_{ik} \equiv U^{s}_{ik,s} - U^{s}_{it}U^{t}_{sk} + \frac{1}{3} U^{s}_{is}U^{t}_{tk}. \tag{8}$$

Но это выражение симметрично относительно транспонирования. Именно это обстоятельство и придает псевдотензору U такое значение для теории несимметричных полей.

λ-Преобразование для U. Заменяя в уравнении (5) Γ на U, мы получаем после простого вычисления

$$U_{ik}^{l^*} = U_{ik}^{l} + (\delta_i^l \lambda_{,k} - \delta_k^l \lambda_{,i}). \tag{9}$$

Это уравнение определяет λ-преобразование для U. Выражение (8) инвариантно по отношению к этому преобразованию ($S_{ik}(v^*) = S_{ik}(v)$).

Закон преобразования для U. Заменяя в уравнениях (3) и (3а) величины Γ на U с помощью формулы (7а), мы получаем

$$U_{ik}^{l^*} = \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} U_{ik}^{l} + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*} \partial x^{k^*}} - \delta_{k^*}^{l^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*} \partial x^{t^*}}. \tag{10}$$

Заметим, что опять индексы, относящиеся к обеим системам, пробегают все значения от 1 до 4 *независимо друг от друга*, даже если они обозначаются одной буквой. Рассматривая эту формулу, следует отметить, что из-за наличия последнего члена она несимметрична относительно перестановок индексов i и k. Это обстоятельство можно обнаружить, рассматривая преобразование как произведение симметричного относительно транспонирования преобразования координат и λ-преобразования. Запишем сначала последний член в виде

$$-\frac{1}{2}\left[\delta_{k^*}^{l^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*} \partial x^{t^*}} + \delta_{i^*}^{l^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*} \partial x^{t^*}}\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\delta_{i^*}^{l^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*} \partial x^{t^*}} - \delta_{k^*}^{l^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*} \partial x^{t^*}}\right].$$

Первое из этих выражений является симметричным относительно транспонирования. Объединим его с первыми двумя членами правой части уравнения (10) в одно выражение $K_{ik}^{l^*}$. Рассмотрим теперь, что получается, если вслед за преобразованием

$$U_{ik}^{l^*} = K_{ik}^{l^*}$$

мы совершаем λ-преобразование

$$U_{ik}^{l^{**}} = U_{ik}^{l^*} + \delta_{i^*}^{l^*} \lambda_{,k^*} - \delta_{k^*}^{l^*} \lambda_{,i^*}.$$

В результате получаем

$$U_{ik}^{l^{**}} = K_{ik}^{l^*} + (\delta_{i^*}^{l^*} \lambda_{,k^*} - \delta_{k^*}^{l^*} \lambda_{,i^*}).$$

Это значит, что (10) можно рассматривать как произведение двух преобразований, если второй член уравнения (10а) можно привести к виду $\delta_{i^*}^{l^*} \lambda_{,k^*} - \delta_{k^*}^{l^*} \lambda_{,i^*}$. Для этого достаточно показать, что существует такая функция λ, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\partial x^{t^*}} = \lambda_{,\,i^*}$$
$$\left(\text{и } \frac{1}{2}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}} = \lambda_{,\,i^*}\right). \tag{11}$$

Чтобы преобразовать левую часть гипотетического пока уравнения, необходимо сначала выразить $\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}$ через коэффициенты обратного преобразования $\frac{\partial x^a}{\partial x^{b^*}}$. С одной стороны,

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s} = \delta^p_s, \tag{а}$$

с другой —

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}} V^s_{t^*} = \frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}\frac{\partial D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^t}\right)} = D\delta^p_s.$$

Здесь $V^s_{t^*}$ означает сомножитель при $\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}$, который в свою очередь может быть выражен как производная определителя $D = \left|\frac{\partial x^a}{\partial x^{b^*}}\right|$ по $\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}$. Следовательно, мы имеем также

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}\frac{\partial \ln D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)} = \delta^p_s. \tag{б}$$

Из выражений (а) и (б) следует, что

$$\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s} = \frac{\partial \ln D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)}.$$

Вследствие этого соотношения левую часть уравнения (4) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ln D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)}\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)_{,\,k^*} = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln D}{\partial x^{k^*}}.$$

Это значит, что уравнение (11) действительно удовлетворяется, если

$$\lambda = \frac{1}{2} \ln D.$$

Это доказывает, что преобразование (10) можно рассматривать как произведение симметричного относительно транспонирования преобразования

$$U^{l^*}_{ik} = \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} U^l_{ik} + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*} \partial x^{k^*}} - \\ - \frac{1}{2} \left[\delta^{l^*}_{k^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*} \partial x^{t^*}} + \delta^{l^*}_{i^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*} \partial x^{t^*}} \right] \qquad (10б)$$

и λ-преобразования. Таким образом, в качестве формулы преобразования для U вместо (10) можно взять (10б). Всякое преобразование поля U, изменяющее только форму представления, можно выразить в виде произведения преобразования координат по формуле (10б) и λ-преобразования.

Вариационный принцип и уравнения поля

Вывод уравнений поля из вариационного поля имеет то преимущество, что обеспечивается совместность получаемой системы уравнений и что тождества, связанные с общей ковариантностью — тождества Бианки,— а также законы сохранения выводятся систематическим путем.

Варьируемый интеграл должен содержать скалярную плотность $\mathfrak{H}$. Мы построим эту плотность из R_{ik} или S_{ik}. Простейший способ состоит в том, чтобы ввести ковариантную тензорную плотность $\mathfrak{g}^{ik}$ с весом 1 в дополнение к Γ или U соответственно, полагая

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik} (= \mathfrak{g}^{ik} S_{ik}). \qquad (12)$$

Для $\mathfrak{g}^{ik}$ должен выполняться следующий закон преобразования:

$$\mathfrak{g}^{ik^*} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k^*}}{\partial x^k} \mathfrak{g}^{ik} \left| \frac{\partial x^t}{\partial x^{t^*}} \right|, \qquad (13)$$

где опять индексы, относящиеся к разным системам координат, несмотря на применение одних и тех же букв, следует считать взаимно независимыми. Действительно, мы получаем

$$\int \mathfrak{H}^* d\tau^* = \int \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k^*}}{\partial x^k} \mathfrak{g}^{ik} \left| \frac{\partial x^t}{\partial x^{t^*}} \right| \frac{\partial x^s}{\partial x^{i^*}} \frac{\partial x^t}{\partial x^{k^*}} S_{st} \left| \frac{\partial x^{r^*}}{\partial x^r} \right| d\tau = \int \mathfrak{H}\, d\tau,$$

т. е. что интеграл инвариантен относительно преобразования. Кроме того, интеграл инвариантен относительно λ-преобразования (5) или (9), так как тензор R_{ik}, выраженный соответственно через Γ или U, а следовательно, и $\mathfrak{H}$ является инвариантным относительно λ-преобразования. Отсюда следует, что уравнения поля, получаемые варьированием $\int \mathfrak{H}\, d\tau$, являются ковариантными по отношению к преобразованию координат и λ-преобразованию.

Но мы постулировали также, что уравнения поля должны быть инвариантными относительно транспонирования двух полей $\mathfrak{g}$, Γ или полей $\mathfrak{g}$, U. Этот постулат выполняется, если инвариантностью относительно транспонирования обладает подынтегральная функция $\mathfrak{H}$. Мы видели, что тензор R_{ik} симметричен относительно транспонирования, если он выражен через U, но не через Γ. Следовательно, функция $\mathfrak{H}$ будет инвариантной относительно транспонирования только в том случае, если в качестве переменных поля в дополнение к $\mathfrak{g}^{ik}$ мы введем величины U (но не Γ). В этом случае мы с самого начала гарантируем, что уравнения поля, получаемые варьированием $\int \mathfrak{H}\, d\tau$, будут инвариантными относительно транспонирования.

Варьируя $\mathfrak{H}$ [уравнения (12) и (8)] по $\mathfrak{g}$ и U, мы находим

$$\delta\mathfrak{H} = S_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} - \mathfrak{N}_l^{ik}\delta U_{ik}^{l} + (\mathfrak{g}^{ik}\delta U_{ik}^{s})_{,s},$$

где

$$\left.\begin{aligned} S_{ik} &= U_{ik,s}^{s} - U_{it}^{s}U_{sk}^{t} + \frac{1}{3}U_{is}^{s}U_{ik}^{t}, \\ \mathfrak{N}_l^{ik} &= \mathfrak{g}^{ik}{}_{,l} + \mathfrak{g}^{sk}\left(U_{sl}^{i} - \frac{1}{3}U_{st}^{t}\delta_l^{i}\right) + \mathfrak{g}^{is}\left(U_{ls}^{k} - \frac{1}{3}U_{ts}^{t}\delta_l^{k}\right). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Уравнения поля

Наш вариационный принцип гласит:

$$\delta\left(\int \mathfrak{H}\, d\tau\right) = 0. \tag{15}$$

Величины $\mathfrak{g}_{ik}$ и U_{ik}^{l} варьируются независимо, и их вариации на границе области интегрирования обращаются в нуль. Варьирование прежде всего дает

$$\int \delta\mathfrak{H}\, d\tau = 0.$$

Подставляя сюда выражение (14), находим, что последний член в выражении для $\delta\mathfrak{H}$ не вносит в интеграл ничего, так как вариации δU_{ik}^{l}

на границах исчезают. Итак, мы получаем уравнения поля

$$S_{ik} = 0, \tag{16а}$$

$$\mathfrak{R}_l^{ik} = 0. \tag{16б}$$

Эти уравнения — как уже ясно из выбора вариационного принципа — являются инвариантными относительно преобразования координат, λ-преобразования и транспонирования.

Тождества

Эти уравнения поля не независимы одно от другого. Между ними имеется $4+1$ тождеств. Другими словами, существуют $4+1$ уравнений между их левыми частями, выполняющихся независимо от того, удовлетворяет поле $\mathfrak{g}$ и U уравнениям поля или нет.

Эти тождества можно получить хорошо известным методом из того факта, что интеграл $\int \mathfrak{H}\, d\tau$ является инвариантным относительно преобразования координат и λ-преобразования.

Из инвариантности интеграла $\int \mathfrak{H}\, d\tau$ следует, что его вариация обращается в нуль *тождественно*, если подставить в $\delta\mathfrak{H}$ вариации $\delta\mathfrak{g}$ и δU, возникающие в результате бесконечно малого преобразования координат или бесконечно малого λ-преобразования соответственно.

Бесконечно малое преобразование координат описывается формулой

$$x^{i*} = x^i + \xi^i, \tag{17}$$

где ξ^i означает произвольный бесконечно малый вектор. Теперь мы должны выразить вариации $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU_{ik}^l через ξ^i с помощью уравнений (13) и (10б). В соответствии с уравнением (17) следует заменить

$$\frac{\partial x^{a*}}{\partial x^b} \text{ на } \delta_b^a + \xi^a_{,b}, \qquad \frac{\partial x^a}{\partial x^{b*}} \text{ на } \delta_b^a - \xi^a_{,b}$$

и опустить все члены выше первого порядка по ξ. В результате получим:

$$\delta\mathfrak{g}^{ik} (= \mathfrak{g}^{ik*} - \mathfrak{g}^{ik}) = \mathfrak{g}^{sk}\xi^i_{,s} + \mathfrak{g}^{is}\xi^k_{,s} - \mathfrak{g}^{ik}\xi^s_{,s} + [-\mathfrak{g}^{ik}_{,s}\xi^s], \tag{13а}$$

$$\delta U_{ik}^l (= U_{ik}^{l*} - U_{ik}^l) = U_{ik}^s\xi^l_{,s} - U_{sk}^l\xi^s_{,i} - U_{is}^l\xi^s_{,k} + \xi^l_{,ik} + [-U^l_{ik,k}\xi^s]. \tag{10в}$$

Сделаем следующее замечание. Формулы преобразования устанавливают новые значения переменных поля *для одной и той же точки континуума*. Вычисления, кратко описанные выше, дают сначала выражения для $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU_{ik}^l без членов в скобках. С другой стороны, при варьировании символы $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU^l_{ik} означают вариации *для фиксированных значений координат*. Чтобы получить эти вариации, необходимо прибавить члены в скобках.

При подстановке этих «трансформационных вариаций» $\delta\mathfrak{g}$ и δU вариация интеграла $\int\mathfrak{H}\,d\tau$ обращается в нуль тождественно. Если, кроме того, выбрать векторы ξ^i так, чтобы они (вместе со своими первыми производными) обращались в нуль на границе области интегрирования, то последний член в уравнении (14) не даст никакого вклада. Поэтому интеграл

$$\int(S_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik}-\mathfrak{N}^{ik}_l\delta U^l_{ik})\,d\tau$$

обращается в нуль тождественно, если вариации $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU^l_{ik} заменяются выражениями (13а) и (10в). Поскольку этот интеграл является линейной однородной функцией векторов ξ^i и их производных, он может быть приведен к виду

$$\int\mathfrak{M}_i\xi^i\,d\tau$$

повторным интегрированием по частям, причем $\mathfrak{M}_i$ обозначает известное выражение (первого порядка по S_{ik} и второго порядка по $\mathfrak{N}^{ik}_l$). Отсюда следуют тождества

$$\mathfrak{M}_i\equiv 0. \tag{18}$$

Четыре тождества для S_{ik} и $\mathfrak{N}^{ik}_l$ соответствуют тождествам Бианки. В соответствии с введенной ранее терминологией эти тождества принадлежат третьему порядку.

Существует пятое тождество, соответствующее инвариантности интеграла $\int\mathfrak{H}\,d\tau$ по отношению к бесконечно малому λ-преобразованию. В этом случае в уравнение (14) мы должны подставить

$$\delta\mathfrak{g}^{ik}=0,\qquad \delta U^l_{ik}=\delta^l_i\lambda_{,k}-\delta^l_k\lambda_{,i},$$

где λ — бесконечно малая величина, исчезающая на границе области интегрирования. Сначала получаем

$$\int\mathfrak{N}^{ik}_l(\delta^l_i\lambda_{,k}-\delta^l_k\lambda_{,i})\,dt=0,$$

или, после интегрирования по частям,

$$2\int\mathfrak{N}^{\underset{\vee}{is}}_{s,i}\lambda\,d\tau=0$$

$\left(\text{где, вообще, } \mathfrak{N}^{\underset{\vee}{ik}}_l=\frac{1}{2}(\mathfrak{N}^{ik}_l-\mathfrak{N}^{ki}_l)\right)$.

Это дает искомое тождество

$$\mathfrak{N}^{\underset{\vee}{is}}_{s,i}\equiv 0. \tag{19}$$

По нашей терминологии это тождество второго порядка. Для $\mathfrak{R}^{\underset{\vee}{i}s}_{s}$ непосредственным вычислением из уравнения (14) получаем

$$\mathfrak{R}^{\underset{\vee}{i}s}_{s} \equiv \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{i}s}_{,s}. \tag{19a}$$

Таким образом, если уравнение поля (16б) удовлетворяется, то

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{i}s}_{,s} = 0. \tag{16в}$$

Замечание о физической интерпретации. Сравнение с теорией электромагнитного поля Максвелла наводит на мысль, что уравнение (16в) выражает равенство нулю плотности магнитного тока. Если принять эту интерпретацию, то станет очевидным, какое выражение должно означать плотность электрического тока. Тензорной плотности $\mathfrak{g}^{ik}$ можно сопоставить тензор g^{ik} по формуле

$$\mathfrak{g}^{ik} = g^{ik}\sqrt{-|g_{st}|}, \tag{20}$$

где ковариантный тензор g_{ik} связывается с контравариантным тензором уравнениями

$$g_{is}g^{ks} = \delta_i^k. \tag{21}$$

Из этих двух уравнений получаем

$$g^{ik} = \mathfrak{g}^{ik}\left(-|\mathfrak{g}^{st}|\right)^{-\frac{1}{2}}$$

и затем g_{ik} — из уравнений (21). Далее мы можем предположить, что уравнение

$$(a_{ikl}) = g_{\underset{\vee}{ik},l} + g_{\underset{\vee}{kl},i} + g_{\underset{\vee}{li},k}, \tag{22}$$

или

$$\mathfrak{a}^m = \frac{1}{6}\,\eta^{iklm}a_{ikl}, \tag{22a}$$

выражает плотность тока, причем η^{iklm} означает тензорную плотность Леви-Чивиты (с компонентами ± 1), антисимметричную по всем индексам. Дивергенция этой величины равна нулю тождественно.

Жесткость системы уравнений (16а), (16б)

Применяя здесь описанный выше метод вычислений, мы должны учитывать, что все величины U^*, получаемые из заданной величины U с помощью λ-преобразований вида (9), в действительности представляют одно и то же поле U. Вследствие этого коэффициенты n-го порядка в разложении U_{ik}^l включают $\binom{4}{n}$ производных λ n-го порядка, выбор которых не имеет значения для действительно различных полей U. Таким образом число коэффициентов разложения, существенных для определения полей U, уменьшается на $\binom{4}{n}$. Используя наш метод вычислений, мы получаем для числа свободных коэффициентов n-го порядка выражение

$$z = \left[16\binom{4}{n} + 64\binom{4}{n-1} - 4\binom{4}{n+1} - \binom{4}{n}\right] - \\ - \left[16\binom{4}{n-2} + 64\binom{4}{n-1}\right] + \left[4\binom{4}{n-3} + \binom{4}{n-2}\right]. \quad (23)$$

Первые скобки дают полное число соответствующих коэффициентов n-го порядка, характеризующих поле U, вторые скобки показывают уменьшение этого числа вследствие существования уравнений поля, а третьи скобки означают поправку к этому уменьшению, обусловленную тождествами (18), (19). Вычисляя асимптотическое значение для больших n, находим

$$z \sim \binom{4}{n}\frac{z_1}{n}, \quad (23a)$$

где $z_1 = 42$.

Следовательно, уравнения несимметричного поля оказываются значительно более слабыми, чем уравнения чисто гравитационного поля ($z_1 = 12$).

Влияние λ-инвариантности на жесткость системы уравнений. Можно попытаться построить теорию, инвариантную относительно транспонирования, отправляясь от выражения, инвариантного относительно транспонирования,

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{g}^{ik}R_{ik} + \tilde{\mathfrak{g}}^{ik}\tilde{R}_{ik}\right)$$

(вместо того, чтобы вводить в качестве переменных поля U). Конечно. получаемая при этом теория будет отличаться от изложенной выше. Можно показать, что эта функция $\mathfrak{H}$ не является λ-инвариантной. Здесь мы также получаем уравнения поля типа (16а), (16б), инвариантные относительно транспонирования $\mathfrak{g}$ и Γ. Между ними, однако, существуют только четыре тождества Бианки. Применяя к этой системе метод вычислений, мы обнаружим, что в формуле, соответствующей (23), отсутствуют четвертый член в первых скобках и второй член в третьих скобках. Получаем

$$z_1 = 48.$$

Следовательно, эта система уравнений слабее, чем наша, и поэтому должна быть отвергнута.

Сравнение с прежней системой уравнений поля. Она гласит:

$$\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0, \qquad R_{\underline{ik}} = 0,$$

$$g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk} = 0, \qquad R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0,$$

где тензор R_{ik} как функция Г определяется уравнением (4a) и где

$$R_{\underline{ik}} = \frac{1}{2}(R_{ik} + R_{ki}), \quad R_{\underset{\vee}{ik}} = \frac{1}{2}(R_{ik} - R_{ki})\Big].$$

Эта система полностью эквивалентна новой [системе (16а), (16б), так как она получена варьированием того же интеграла. Она инвариантна относительно транспонирования $\mathfrak{g}_{ik}$ и Γ^l_{ik}. Разница, однако, заключается в том, что ни сам варьируемый интеграл, ни система уравнений, получаемая при его варьировании, не инвариантны относительно транспонирования. Однако она инвариантна по отношению к λ-преобразованиям (5). Чтобы добиться инвариантности относительно транспонирования, следует применить искусственный прием. Введем формально четыре новых переменных поля λ_i и выберем [4] их после варьирования так, чтобы удовлетворялись уравнения $\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0$.

Таким образом уравнения, полученные варьированием по Г, приводятся к указанному виду, инвариантному относительно транспонирования. Но уравнения для R_{ik} все еще содержат вспомогательные переменные λ_i. Однако их можно исключить, что приведет к разложению этих уравнений в ряд указанным выше способом. Получаемые в результате уравнения также будут инвариантными относительно транспонирования по отношению к $\mathfrak{g}$ и Г).

Постулирование уравнений $\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0$ приводит к нормировке Г-поля, устраняющей λ-инвариантность системы уравнений. В результате не все эквивалентные представления Г-поля оказываются решениями этой системы. То, что происходит при этом, можно сравнить с процессом присоединения к уравнениям чисто гравитационного поля произвольных дополнительных уравнений, ограничивающих выбор координат. К тому же в нашем случае уравнения становятся излишне усложненными. Эти трудности не появляются в новом представлении, получаемом из вариационного принципа, инвариантного относительно транспонирования по отношению к $\mathfrak{g}$ и U, причем в качестве переменных поля всюду следует применить $\mathfrak{g}$ и U.

Закон дивергенции и закон сохранения импульса и энергии

Если удовлетворяются уравнения поля и, кроме того, вариация является результатом λ-преобразования, то в уравнении (14) обращаются в нуль не только S_{ik} и $\mathfrak{R}^{ik}_l$, но и $\delta\mathfrak{H}$, так что уравнения поля имеют своим следствием

$$(\mathfrak{g}^{ik}\delta U^s_{ik})_{,s} = 0,$$

[4] Полагая $\Gamma^{l*}_{ik} = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \lambda_k$.

где δU^{s}_{ik} определяются уравнением (10в). Этот закон дивергенции выполняется для произвольно выбранного вектора ξ^i. Простейший конкретный выбор, когда ξ^i не зависит от x, дает четыре уравнения:

$$\mathfrak{T}^{s}_{t,s} \equiv (\mathfrak{g}^{ik} U^{s}_{ik,t})_{,s} = 0.$$

Эти уравнения можно интерпретировать и применять в качестве уравнений сохранения импульса и энергии. Следует отметить, что эти уравнения сохранения определяются системой уравнений поля не единственным образом. Интересно отметить, что в соответствии с уравнениями

$$\mathfrak{T}^{s}_{t} \equiv \mathfrak{g}^{ik} U^{s}_{ik,t}$$

плотность потока энергии ($\mathfrak{T}^1_4$, $\mathfrak{T}^2_4$, $\mathfrak{T}^3_4$), а также плотность энергии $\mathfrak{T}^4_4$ исчезают для поля, независимого от x^4. Уже отсюда можно заключить, что согласно этой теории стационарное поле, не содержащее особенностей, не может представлять массу, отличную от нуля.

Вывод, а также вид законов сохранения становится намного сложнее, чем в том случае, когда мы использовали уравнения поля в прежней формулировке.

Общие замечания.

А. С моей точки зрения, изложенная здесь теория является логически простейшей релятивистской теорией поля, возможной вообще. Но это не значит, что природа не может подчиняться более сложным теориям поля.

Более сложные теории поля предлагались часто. Их можно классифицировать по следующим характерным признакам.

а) Увеличение числа измерений континуума. В этом случае необходимо объяснить, почему континуум *очевидным образом* ограничен четырьмя измерениями;

б) Введение полей иного рода (например, векторного поля) в дополнение к полю смещений и тензорному полю g_{ik} (или $\mathfrak{g}^{ik}$);

в) Введение уравнений поля высшего порядка (в смысле дифференцирования).

На мой взгляд подобные более сложные теории и их комбинации следует рассматривать только в том случае, если для этого будут существовать физические причины, основанные на эксперименте.

Б. Теория поля еще не вполне определяется системой уравнений поля. Надо ли признавать наличие сингулярностей? Следует ли постулировать граничные условия? Что касается первого вопроса, то мое мнение заключается в следующем: сингулярности должны быть исключены. Мне не кажется разумным вводить в теорию континуума точки (или линии и т. п.), для которых уравнения поля не выполняются. Кроме того, введение сингулярностей эквивалентно постулированию граничных условий (произвольных с точки зрения уравнений поля) на «поверхностях», окружающих сингулярности. Без такого постулата теория будет слишком неопределенной. Ответ на второй вопрос, по-моему, заключается в том, что постулирование граничных условий является обязательным. Я продемонстрирую это на элементарном примере. Можно сравнить постулат о потенциале вида $\varphi = \sum \frac{m}{r}$ с утверждением, что вне материальных точек (в трех измерениях) выполняется уравнение $\Delta\varphi = 0$. Но если не прибавить граничное условие, согласно которому φ обращается в нуль (или остается конечным) на бесконечности, то будут существовать решения, представляющие собой целые функции x [например, $x_1^2 - 1/2\,(x_2^2 + x_3^2)$] неограниченно возрастающие на бесконечности. Исключить такие поля можно, только постулируя граничное условие в случае, если пространство «открытое».

В. Можно ли думать, что теория поля позволит понять атомистическую и квантовую структуру реальности? Почти каждый ответит на этот вопрос «нет». Но я полагаю, что по этому поводу в настоящее время никому не известно ничего достоверного, поскольку мы не знаем, каким образом и в какой степени исключение сингулярностей сокращает множество решений. У нас вообще нет никакого метода для систематического получения решений, свободных от сингулярностей. Приближенные методы здесь не идут в счет, так как никогда не известно, существует ли для частного приближенного решения точное решение, свободное от сингулярностей. По этой причине мы не можем в настоящее время сравнивать с опытом содержание нелинейной теории поля. Здесь может помочь только существенный прогресс в математических методах. В настоящее время преобладает мнение, что теорию поля сначала необходимо перевести «квантованием» в статистическую теорию вероятностей, следуя более или менее установленным правилам. Я вижу в этом лишь попытку описывать линейными методами соотношения существенно нелинейного характера.

Г. Можно убедительно доказать, что реальность вообще не может быть представлена непрерывным полем. Из квантовых явлений, по-видимому, следует, что конечная система с конечной энергией может полностью описываться конечным набором чисел (квантовых чисел). Это, кажется, нельзя совместить с теорией континуума и требует для описания реальности чисто алгебраической теории. Однако сейчас никто не знает, как найти основу для такой теории.

Пятое издание «Сущности теории относительности» вышло в год смерти Эйнштейна (он умер 18 апреля 1955 г.). Приложение II к этому изданию — последняя опубликованная работа великого автора.

СОДЕРЖАНИЕ

1925 г.

1926 г.

1927 г.

1928 г.

1929 г.

1930 г.

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

Собрание научных трудов

Том II

Утверждено к печати редколлегией серии «Классики науки»

Редактор *С. И. Ларин*

Редактор издательства *Е. М. Кляус*

Художник *А. Я. Михайлов*

Технический редактор *Н. Д. Новичкова*

Сдано в набор 16/II 1965 г. Подписано в печати 11/XI 1965 г.
Формат 70×90¹/₁₆. Печ. л. 55 + 1 вкл. = 64,35 усл. печ. л. +1 вкл.
Уч. изд. л. 42,3 + 1 вкл. (42,4 уч. изд. л.) Тираж 32 000 экз.
Изд. № 1641/а. Тип. зак. 2574.

Цена 3 р.

Издательство Академии наук СССР
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография Издательства АН СССР
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
96	5 св.	По-видимому	По видимому
178	3 сн.	Rundschan	Rundschau
248	2 сн.	предноложению	предложению
343	14 сн.	единицу	единицу,
370	7 сн.	$= 0\ (\alpha)$	$= 0 \quad (\alpha)$
400	15 сн.	перефирии	периферии
800	2 сн.	Приложение II	Приложение II — статья 141—

А. Эйнштейн, т. II