95

ПРОБЛЕМА ПРОСТРАНСТВА, ЭФИРА И ПОЛЯ В ФИЗИКЕ*

Научное мышление — это продолжение донаучного. Поскольку в последнем понятие пространства уже играет фундаментальную роль, мы должны начать с понятия пространства в донаучном мышлении. Существуют два способа рассмотрения понятий, и оба они необходимы для понимания. Первый способ — логически-аналитический — отвечает на вопрос, каким образом понятия и суждения зависят друг от друга. Отвечая на этот вопрос, мы остаемся на сравнительно надежной основе. Это та надежность, которая внушает нам такое уважение к математике. Но надежность эта покупается ценой отказа от содержания. Ведь понятия приобретают содержание только благодаря тому, что они связываются — хотя бы даже косвенно — с чувственными ощущениями. Однако эту связь нельзя вскрыть логическим исследованием; ее можно только ощущать. Эта-то связь и определяет познавательную ценность логических систем.

Пример. Предположим, что археолог позднейшей культуры нашел учебник эвклидовой геометрии без чертежей. Он узнает, как применяются в теоремах слова: «точка», «прямая», «плоскость». Он также поймет, как теоремы выводятся одна из другой. Он даже сможет сам установить новые теоремы по известным правилам. Но образное содержание теорем будет оставаться для него пустой игрой слов до тех пор, пока он не «сумеет представить себе в каком-нибудь виде» слова: «точка», «прямая», «плоскость» и т. д. Только в этом случае геометрия получит для него осмысленное содержание. Аналогичная ситуация будет существовать для него также в связи с аналитической механикой и вообще в связи с представлениями дедуктивных наук.

* *Raum-, Äther- und Feld-problem der Physik*. Forum Philosophicum, 1930, I, 173—180.

Что же значит «уметь представить себе в каком-нибудь виде» слова: «точка», «прямая», «пересечение» и т. д.? Это означает указать чувственные ощущения, к которым относятся эти слова. Эта проблема, выходящая за пределы логики, представляет собой проблему сущности, которую археолог сможет решить только интуитивно, обращаясь к своим ощущениям и просматривая, нельзя ли найти среди них нечто, соответствующее этим первичным понятиям и связывающим их аксиомам. Только в этом смысле и можно разумно ставить вопрос о сущности вещей, представленных в виде понятий.

По отношению к нашему мышлению мы находимся почти в положении нашего археолога. Мы, так сказать, забыли, какие черты мира ощущений побудили нас образовать то или иное понятие, и нам очень трудно смотреть на мир ощущений иначе, чем через очки издавна привычной абстрактной интерпретации. Кроме того, трудность состоит и в том, что в нашем языке мы должны пользоваться словами, неразрывно связанными с этими первоначальными понятиями. Эти препятствия также преграждают нам путь, когда мы собираемся излагать сущность донаучного понятия пространства.

Прежде чем обратиться к проблеме пространства, сделаем замечание о понятиях вообще: понятия связаны с чувственными ощущениями, но никогда не выводятся логически из последних. По этой причине я никогда не мог понять вопрос об априорности в смысле Канта. В вопросах сущности можно всегда говорить только о том, чтобы отыскивать те характеристики комплексов чувственных ощущений, к которым относятся понятия.

Что касается понятия пространства, то, очевидно, ему должно предшествовать понятие телесного объекта. Свойства комплексов чувственных ощущений, породивших это понятие, излагались много раз. Соответствие определенным зрительным и осязательным ощущениям, непрерывная наблюдаемость во времени, повторяемость ощущений в любое время (при прикосновении, взгляде) суть некоторые из этих свойств. Если на основе указанных ощущений уже образовалось понятие телесного объекта —а это понятие вовсе не предполагает понятий пространства или пространственного отношения,— то потребность мысленно постичь связи таких телесных объектов друг с другом должна с необходимостью привести к понятиям, соответствующим их пространственным отношениям. Два телесных объекта могут либо касаться, либо находиться на расстоянии один от другого. В последнем случае можно, ничего не меняя, поместить между ними третье тело, в первом же случае это невозможно. Эти пространственные отношения, очевидно, реальны в таком же смысле, как и сами тела. Если два тела равноценны для заполнения этого промежутка, то они будут равноценны и при заполнении других промежутков. Таким образом, промежуток оказывается независимым от выбора заполняющего его тела; то же самое справедливо в совершенно общем случае пространственных отношений. Тот факт, что эта независимость, составляющая главнейшую предпосылку образования чисто геометрических понятий, априори отнюдь не обязательна, представляется очевидным. По-моему, понятие промежутка, не зависящее от особого выбора заполняющего его тела, служит отправным пунктом для понятия пространства вообще.

Следовательно, с точки зрения чувственных ощущений развитие понятия пространства можно кратко изобразить следующей схемой: телесный объект — отношения положения телесных объектов — пространственный промежуток — пространство. Таким образом, пространство выступает как нечто столь же реальное, как и телесные объекты.

Ясно, что в мире естественнонаучных понятий понятие пространства как реального объекта существовало уже давно. Однако геометрия Эвклида не пользовалась этим понятием как таковым и ограничивалась только понятием объекта и отношениями положения между объектами. Точка, плоскость, прямая, отрезок — все это идеализированные телесные объекты. Все отношения положения сводились к соприкосновению (пересечения прямых, плоскостей, положения точек на прямых и т. д.). Пространство как континуум вообще не входило в геометрию. Это понятие впервые было введено Декартом в его описании пространственной точки координатами. Только здесь появились геометрические образы, в известной степени выглядевшие как части бесконечного пространства, под которым понимается трехмерный континуум.

Большое преимущество описания пространства Декартом состоит отнюдь не только в том, что оно ставит анализ на службу геометрии. Главное заключается скорее в следующем. Геометрия греков выделяет при геометрическом описании особые образы (прямые, плоскости); другие объекты (например эллипсы) доступны ей лишь постольку, поскольку они строятся (или определяются) с помощью образов точки, прямой и плоскости. В противоположность этому в декартовском описании, например, все поверхности в принципе равноценны, и нет произвольного выделения роли линейных объектов при построении геометрии.

Поскольку геометрия понимается как учение о закономерностях взаимного расположения практически твердых тел, ее можно рассматривать как древнейшую отрасль физики. Это учение, как уже отмечалось, могло исходить только из идеальных телесных объектов — точки, прямой, плоскости, отрезка, не нуждаясь в понятиии пространства самого по себе. Напротив, для физики Ньютона пространство как целое в смысле Декарта было безусловно необходимым. В самом деле, исходным понятием динамики является материальная точка, а не переменное во времени расстояние между материальными точками.

Фундаментальную роль в уравнениях движения Ньютона играет понятие ускорения, которое не может быть определено одними лишь переменными во времени расстояниями. Ускорение в смысле Ньютона следует понимать (или определять) как ускорение по отношению к пространству в целом. Таким образом, к геометрической реальности пространства прибавилась новая его функция — определять инерцию. Когда Ньютон объявил пространство абсолютным, он, несомненно, имел в виду именно этот реальный смысл пространства, который заставил его приписать пространству вполне определенное состояние движения, но определяемое не одними только явлениями механики. Пространство это было абсолютным и в другом смысле: свойство определять инерцию считалось независимым от воздействия каких-либо физических условий, пространство само влияло на массы, но обратного воздействия от них не получало.

Довольно долго пространство оставалось в сознании физиков лишь пассивным хранилищем бытия, не принимавшим никакого участия в физических процессах. Новый поворот в развитии понятия пространства наступил лишь с появлением волновой теории света и теории электромагнитного поля Фарадея—Максвелла. Выяснилось, что в пространстве, свободном от материальных тел, существуют состояния, распространяющиеся в виде волн, а также локализованные поля, способные оказывать силовое воздействие на помещенные в них электрические заряды или магнитные полюса. Поскольку физикам XIX столетия казалось совершенно абсурдным приписывать физические функции или состояния самому пространству, то по образцу весомой материи была придумана пронизывающая все пространство среда — эфир, предполагаемый носитель электромагнитных и световых процессов. Состояния этой среды, которые должны были отвечать электромагнитному полю, строились сначала чисто механически по образцу упругих деформаций в твердых телах. Однако полностью построить механическую теорию эфира не удавалось, и постепенно все привыкли отказываться от выяснения природы эфирных полей. Так эфир превратился в субстанцию, обладавшую единственной функцией, — служить носителем электрических полей, природа которых не поддавалась дальнейшему анализу. Возникла следующая картина: пространство заполняется эфиром, в котором плавают материальные частицы или атомы весомой материи; атомистическая структура последнего уже была с достоверностью установлена наукой как раз к концу века.

Поскольку взаимодействие между телами должно передаваться через поля, то пришлось поместить в эфир и гравитационное поле, законы которого в то время были еще не вполне ясны. Эфир служил только для локализации сил, действующих в пространстве. С тех пор как выяснилось, что движущийся электрический заряд создает магнитное поле, энергия которого явилась аналогом инерции, природа инерции стала также сводиться к полю, локализованному в эфире.

Непонятными были прежде всего механические свойства эфира. Но пришли великие идеи Г. А. Лоренца. Все известные в то время явления электромагнетизма можно было объяснить на основе двух предположений. Эфир жестко связан с пространством, т. е. он вообще не может двигаться. Электричество жестко связано с подвижными элементарными частицами. В наши дни эту концепцию можно изложить так: физическое пространство и эфир — это лишь различные выражения для одной и той же вещи; поля суть физические состояния пространства. В самом деле, если эфиру нельзя придать любое состояние движения, то, очевидно, нет никаких оснований вводить эфир наряду с пространством как особую сущность. Однако такой способ рассуждений был еще чужд физикам. Ведь, как и прежде, они смотрели на пространство как на нечто застывшее, однородное и неизменное, не имеющее никаких состояний. Только гений Римана, непонятый в свое время и одинокий, возвысился уже в середине прошлого века до нового понятия пространства, согласно которому пространство переставало быть неподвижным и бездейственным и могло принимать участие в физических процессах. Это достижение научной мысли тем более удивительно, что оно предшествовало полевой теории электричества Фарадея—Максвелла. Затем появилась специальная теория относительности со своим утверждением о физической равноценности всех инерциальных систем. В связи с электродинамикой или с законом распространения света проявилась неотделимость пространства от времени. До этого же времени молчаливо предполагалось, что четырехмерный континуум можно объективно расщепить на время и пространство, т. е., что «теперь» имеет абсолютное значение. Утверждением об относительности одновременности пространство и время были связаны в единый континуум, подобно тому, как прежде в единый континуум были слиты три пространственных измерения. Таким образом, физическое пространство расширилось до четырехмерного пространства, которое содержит в себе и временное измерение. Четырехмерное пространство специальной теории относительности является таким же жестким и абсолютным, как и пространство Ньютона.

Теория относительности являет собой прекрасный пример современного пути развития фундаментальной теории. Исходные гипотезы становятся все более абстрактными, все более далекими от ощущений. Но зато мы все ближе подходим к важнейшей цели науки — из наименьшего числа гипотез или аксиом логически получить дедуктивным путем максимум реальных результатов. При этом мысленный путь от аксиом к ощущаемым результатам или проверяемым следствиям становится все длиннее, все утонченнее. Теоретику все больше приходится руководствоваться при поисках теорий чисто математическими, формальными соображениями, поскольку физический опыт экспериментатора не дает возможности подняться прямо к сферам высочайшей абстракции. Место преимущественно индуктивных методов, присущих юношескому периоду науки, занимает поисковая дедукция. К тому же надо далеко продвинуться в построении такого теоретического здания, чтобы прийти к следствиям, которые можно сравнить с опытом. Конечно, опыт и здесь остается всемогущим судьей. Но его приговор может последовать только после большой и трудной умственной работы, перебрасывающей мост через пропасть между аксиомами и следствиями. Эту гигантскую работу теоретик должен проделать, ясно сознавая, что она, быть может, лишь подготовит смертный приговор его теории. И теоретика, занимающегося этим, не следует с упреком называть фантастом. Нет, лучше одобрить его фантазии, поскольку другого пути к цели для него вообще не существует. Это вовсе не беспредметные фантазии, а поиски логически простейших возможностей и их следствий. Этот призыв к снисхождению был необходим для того, чтобы слушатель или читатель проявил бóльшую склонность с интересом следовать излагаемому ниже ходу развития идей; это тот самый ход мыслей, который привел от специальной теории относительности к общей теории относительности и затем к ее последнему отпрыску — единой теории поля. Однако в этом изложении нельзя совсем уклониться от применения математических символов.

Начнем со специальной теории относительности. Она основывается еще непосредственно на эмпирическом законе постоянства скорости света. Пусть P и P' — точки в пустоте, находящиеся на бесконечно малом расстоянии $d\sigma$. В момент времени t из P выходит световой сигнал, достигающий точки P' в момент $t + dt$. Тогда

$$d\sigma^2 = c^2 dt^2.$$

Если обозначить через dx_1, dx_2, dx_3 проекции $d\sigma$ на оси прямоугольной системы координат, то упомянутый закон постоянства скорости света принимает вид

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = 0.$$

Поскольку эта формула выражает реальное свойство вещей, величине ds можно приписывать реальный смысл даже в том случае, когда соседние точки четырехмерного континуума выбираются так, что соответствующая величина ds отлична от нуля. Иначе говоря, четырехмерное пространство (с мнимой временнóй координатой) специальной теории относительности обладает эвклидовóй метрикой.

Называя эту метрику эвклидовой, мы подразумеваем под этим следующее: роль подобной метрики в трехмерном континууме полностью эквивалентна роли аксиом эвклидовой геометрии. При этом уравнение, определяющее метрику, есть просто теорема Пифагора, примененная к дифференциалам координат.

В специальной теории относительности разрешаются только такие изменения координат (преобразования), что и в новых координатах величина ds^2 (фундаментальный инвариант) имеет вид суммы квадратов дифференциалов новых координат. Такие преобразования называются преобразованиями Лоренца.

Эвристический метод специальной теории относительности отличается тем, что для выражения законов природы допускаются только такие уравнения, которые не изменяют своей формы при замене координат в соответствии с преобразованием Лоренца (ковариантность уравнений по отношению к преобразованиям Лоренца).

Этот метод позволил вскрыть внутреннюю связь между энергией и импульсом, электрическим и магнитным полями, электростатическими и электродинамическими силами, инертной массой и энергией; в результате число независимых понятий и фундаментальных уравнений физики уменьшилось.

Этот метод привел к вопросу: правда ли, что уравнения, выражающие законы природы, ковариантны только относительно преобразований Лоренца, а относительно других преобразваний не ковариантны? Однако сформулированный таким образом вопрос по существу является бессмысленным, поскольку каждую систему уравнений, конечно, можно записать в произвольных координатах. Следует спросить, устроены ли законы природы так, что их нельзя сколько-нибудь существенно упростить, если выбрать какие-нибудь особые координаты.

О том, что обнаруженный на опыте закон равенства инертной и тяжелой массы побуждает нас ответить «да» на этот вопрос, мы упомянем лишь вкратце. Возводя в принцип эквивалентность координатных систем для формулировки законов природы, мы приходим к общей теории относительности, сохраняя положение о постоянстве скорости света или гипотезу об объективном значении эвклидовой метрики для бесконечно малых областей четырехмерного пространства.

Это значит, что для конечных областей пространства предполагается (физически осмысленное) существование общей римановой метрики, выражаемой формулой

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

где суммирование следует проводить по всем сочетаниям индексов от 11 до 44.

Структура такого пространства принципиально отличается от структуры эвклидова пространства в одном отношении. Именно, коэффициентами

$g_{\mu\nu}$ могут быть произвольные функции координат $x_1,\dots, x_4$, и структура пространства в действительности определена только тогда, когда известны эти функции $g_{\mu\nu}$. Можно также сказать, что структура такого пространства сама по себе абсолютно не определена. Она становится более определенной только в том случае, если известны законы, которым подчиняется метрическое поле $g_{\mu\nu}$. При этом из физических соображений возникает убеждение, что метрическое поле является вместе с тем и гравитационным.

Поскольку гравитационное поле определяется конфигурацией масс и изменяется вместе с ней, то и геометрическая структура этого пространства зависит от физических факторов. Следовательно, согласно этой теории, пространство, как и подозревал Риман, уже не является абсолютным, и структура пространства зависит от физических условий. Геометрия (физическая) — это уже не изолированная наука, замкнутая в себе, как геометрия Эвклида.

Проблема гравитации, таким образом, была сведена к математической проблеме: требуется найти простейшие метрические соотношения, ковариантные относительно произвольных преобразований координат. Это четко ограниченная задача, вполне доступная для решения.

О подтверждении этой теории на опыте я не буду здесь говорить, но сразу же объясню, почему этим успехом теории нельзя удовлетвориться до конца. Хотя гравитация сводится к структуре пространства, кроме гравитационного поля существует ведь и электромагнитное поле. Пока что оно должно вводиться в теорию как нечто независимое от гравитации. В уравнения поля приходится добавлять аддитивные члены, обеспечивающие существование электромагнитного поля. Однако мысль о том, что существуют две независимые структуры пространства, именно метрически-гравитационная и электромагнитная, противоречит духу теории. Напрашивается убеждение, что оба вида поля должны отвечать единой структуре пространства.

Статья в несколько измененном виде включена в сборник «Mein Weltbild» (стр. 176—185), по тексту которого и сделан перевод. В этом издании опущен последний абзац, посвященный варианту единой теории поля. Так как это было сделано по просьбе самого Эйнштейна («развитая там теория мною давно отвергнута и заменена теорией несимметричных полей, вполне последовательной с формально-логической точки зрения»), то мы не восстановили его и в переводе, оставив статью несколько незаконченной по форме. Английский перевод статьи опубликован в «Ideas and Opinions» и в «Out of My later Years».

ПРОБЛЕМА ПРОСТРАНСТВА, ПОЛЯ И ЭФИРА В ФИЗИКЕ*

Понятия и системы понятий существуют всегда для того, чтобы упорядочивать, «осмысливать» наши ощущения. Поэтому, если мы хотим выяснить роль и значение понятий, далеко не достаточно указать на их логические взаимосвязи; надо указать еще те ощущения, к которым относятся понятия.

Все это совершенно очевидно для понятий, достаточно близких к сфере чувственных ощущений, в противоположность так называемым абстрактным понятиям, к которым принадлежит понятие пространства. Абстрактные понятия часто кажутся порождением разума, оторванным от материнской почвы — мира ощущений. Такая точка зрения, по-моему, всегда неправильна. Исходя из нее, можно заключить, что понятие пространства предшествует понятию телесного предмета. Вслед за этим понятием выступают как особенно простые те комплексы ощущений, которые мы связываем с понятием «положение телесных объектов». Ясно, что отношения положения тел реальны в том же смысле, в каком реальны сами тела.

Эвклидова геометрия античных греков представляет собой не что иное, как единую дедуктивную систему, пытающуюся включить в себя эти отношения положения. Вначале вместо тел разнообразной формы выступают в качестве элементов такие идеализированные образы, как точка, прямая, плоскость, затем их свойства положения задаются так называемыми аксиомами, а все остальные формы и отношения положения для них выводятся отсюда строго логическим путем. Все отношения расположения можно свести к касанию.

Раз зашла речь о пространственных отношениях, то уже недалеко отсюда стоит и понятие «пространство» в эвклидовой геометрии, строго говоря, не существующее вообще. Ведь вместо отношений касания тел между собой

* *Das Raum-, Feld- und Ätherproblem in der Physik.* Die Koralle, 1930, 5, 486—487.

можно изучать отношения касания всех тел с одним воображаемым универсальным телом, которое и является пространством. Для геометра пространство имеет такой же смысл, как квазитвердая поверхность Земли для геометрического рассмотрения в повседневной жизни или как лист чертежной бумаги для тех, кто хочет наглядно изобразить взаимоотношения плоских фигур.

Только в аналитической геометрии, основанной Декартом, пространство (трехмерное) превращается в фундаментальное понятие. Введение понятия координатного пространства чрезвычайно упростило логическую систему геометрии. В самом деле, здесь достаточно взять за основу теорему о том, что измеряемое масштабной линейкой расстояние между двумя бесконечно близкими точками вычисляется по разностям их координат согласно теореме Пифагора (как корень квадратный из суммы квадратов). Другими словами, если взять за основу «метрику Эвклида», то из нее можно вывести все понятия и теоремы геометрии.

В соответствии со сказанным выше, физически реальными были именно пространственные отношения, а не само пространство. Но в механике Ньютона пространство приобретает физическую реальность. В качестве фундаментального понятия в закон движения входит здесь ускорение. При этом ускорение мыслится как состояние движения по отношению к пространству, не сводимое к одному лишь понятию относительного расположения.

Таким образом, согласно механике Ньютона, метрика и инерция являются самыми существенными свойствами пространства. В классической теории оно абсолютно. Это означает: свойства расположения (абсолютно твердых) тел, а также инерциальные свойства тел не изменяются никакими физическими причинами, действующими вблизи этих тел.

Кроме понятий пространства, времени, материи, Фарадеем и Максвеллом было введено в физику новое понятие — понятие поля, которое скоро разорвало рамки механического понимания природы. Поля — это непрерывные образования, которые могут находиться в пустом пространстве. Различают электромагнитное и гравитационное поля; поле, образующее свет, оказывается электромагнитным. Сначала преобладало стремление понимать поле как механическое состояние некоей материи, существующей всюду,—эфира. Когда это стремление потерпело неудачу, то хотя эфир и продолжал еще считаться особым веществом, состояния которого должны образовывать поле, однако механическая интерпретация его состояний была отброшена. К концу прошлого столетия Г. А. Лоренц показал, что эфиру нельзя приписать никакого движения относительно пространства, если стремиться к правильному количественному описанию электромагнитных явлений. Конечно, к этому времени уже можно было бы отождествить пространство с эфиром, если бы не бессознательное предубеждение, что пространство должно быть абсолютным, т. е., что оно само не подвержено никаким изменениям.

Это предубеждение было устранено только общей теорией относительности, после того как закон распространения света заставил объединить трехмерный континуум пространства и одномерный континуум времени в единое четырехмерное пространство (континуум). Действительно, общая теория относительности показала, что эмпирический закон равенства инертной и тяжелой массы можно объяснить естественно только предположив, что в присутствии гравитационного поля метрика пространства будет неэвклидовой. Отклонение от эвклидовой метрики, с одной стороны, и гравитационное поле — с другой, являются лишь разными формами проявления (метрической) структуры пространства.

Тем самым пространство потеряло свой абсолютный характер. Оно оказалось способным изменять свое состояние, так что оно само смогло взять на себя функции эфира и, поскольку это относится к гравитационному полю, действительно взяло их на себя. Неясным оставался еще формальный смысл электромагнитного поля, которое не могло быть объяснено одной только метрической структурой пространства. Однако со времени создания общей теории относительности нельзя уже серьезно сомневаться в том, что гравитационное и электромагнитное поля должны объясняться некоей единой структурой (четырехмерного) пространства.

Недавно созданная «единая теория поля» является попыткой в этом направлении. В ее основу положена такая структура пространства, при которой любые два линейных элемента имеет смысл сравнивать не только по величине, но и по направлению. В этом отношении подобная структура пространства приближается к структуре эвклидова пространства в большей мере, чем изучавшиеся до сих пор неэвклидовы геометрии.

Отыскание законов природы как математическая проблема приводит к задаче: требуется найти логически наиболее простые законы, которым можно подчинить структуру рассматриваемого вида.

Видно, что теоретическое исследование вдохновляется верой в гармонию или в простоту природы. Однако эта вера не слепая; теория всегда проверяется верховным судьей — опытом.

Аналогичная статья под тем же названием была опубликована в Trans. Second World Power Conf. (Berlin), 1930, XIX, 1—5.

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ *

1. Задача «единой теории физического поля» заключается в том, чтобы обновить общую теорию относительности на основе объединения теорий электромагнитного и гравитационного полей.

В настоящее время новая теория представляет собой не более чем математическое построение, весьма слабо связанное с физической реальностью. Она была выдвинута на основе совершенно абстрактных соображений; ее математические выводы еще не достаточно развиты, чтобы их можно было проверить экспериментально. Но мне эта попытка построения теории представляется весьма интересной сама по себе, в особенности в связи с обнадеживающими перспективами ее дальнейшего развития. Именно в надежде заинтересовать ею математиков я и позволил себе изложить и проанализировать указанную теорию в настоящей статье.

2. С точки зрения математики основная идея общей теории относительности такова. Четырехмерное пространство, в котором происходят все события, не аморфно; оно имеет некоторую структуру, наличие которой выражается в существовании *римановой метрики* этого пространства.

С точки зрения физики смысл этого утверждения заключается в том, что фундаментальная квадратичная форма

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

характеризует пространство, выражая его метрику, и, будучи приравнена нулю,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0,$$

определяет закон распространения света в этом пространстве. Значит, указанная квадратичная форма имеет отношение к физической реальности, и введение ее не есть результат игры воображения. Использование этой

* *Théorie unitaire de champ physique.* Ann. Inst. H. Poincare, 1930, 1, 1—24.

квадратичной формы оправдывается тем соответствием, которое можно установить между ее коэффициентами $g_{\mu\nu}$ и известным кругом явлений, а именно явлениями гравитации.

Поскольку фундаментальная квадратичная форма выражает структуру пространства, возникает следующий вопрос: каков тот *простейший* закон, которому могут подчиняться коэффициенты $g_{\mu\nu}$? Ответ дает тензорная теория Римана. Из коэффициентов $g_{\mu\nu}$ и их производных можно составить тензор R^i_{klm}, носящий название тензора кривизны Римана. Путем *свертывания* этого тензора по индексам i и m из него можно получить другой тензор второго ранга R_{kl}. Простейший закон, которому могут подчиняться $g_{\mu\nu}$, выражается простым уравнением:

$$R_{kl} = 0.$$

Основанная на этом равенстве теория могла бы рассматриваться как идеальная физическая теория, будь она способна полностью описать реально существующее в природе силовое поле, т. е. совокупность электромагнитного и гравитационного полей. Однако уравнение $R_{kl} = 0$, которое, по всей видимости, позволило бы описать гравитационные явления, совершенно не учитывает электромагнитных процессов. Для описания всей совокупности явлений одной только метрики недостаточно.

Для полного описания пространства была сделана попытка ввести, помимо фундаментальной квадратичной формы $g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$, еще и линейную комбинацию $\varphi_\mu dx^\mu$, где в качестве коэффициентов φ_μ выступали бы компоненты электромагнитного вектор-потенциала. В этом случае полные уравнения поля имели бы следующий вид:

$$R_{kl} + T_{kl} = 0.$$

Здесь T_{kl} — член, зависящий от потенциалов (это может быть, например, электромагнитный тензор Максвелла или нечто подобное ему). Но и такой путь построения теории является неудовлетворительным. Ведь уравнение $R_{kl} + T_{kl} = 0$ содержит два *независимых* члена, и логически не исключена возможность варьировать один из них, оставляя другой неизменным. При этом в теорию вводятся два независимых элемента, как бы представляющих *два* «состояния» пространства. Это свидетельствует об отсутствии в природе единства, во что наш разум совершенно отказывается поверить. Более правдоподобно, что этот недостаток следует отнести за счет несовершенства теории. Поэтому нужно искать пути обобщения и углубления теории для обеспечения того единства, которого неодолимо требует наш рассудок.

Итак, отправным пунктом единой теории поля является тот факт, что одной лишь метрики для описания всех явлений недостаточно. Но метрика, по крайней мере частично, отражает истину и, несомненно, имеет физический смысл. Поэтому возникает проблема отыскания такого элемента теории, который, будучи добавлен к метрике, позволил бы, наконец, выразить структуру пространства, не оставляя ничего без внимания.

3. Имея это в виду, выясним, в чем смысл понятия римановой метрики и как ее можно представить. Рассмотрим n-мерный континуум, обладающий римановой структурой. Подобный континуум должен отличаться тем свойством, что в бесконечно малой окрестности любой точки справедлива эвклидова геометрия. Кроме того, если A и B — две точки, находящиеся на конечном расстоянии друг от друга, то имеется возможность сравнения *длин* двух линейных элементов, относящихся соответственно к A и B. Однако сравнить их направления нельзя, поскольку в римановой геометрии нет понятия параллельности на расстоянии (абсолютного параллелизма).

4. Представим себе в некоторой точке этого пространства декартову систему координат, т. е. систему из n взаимно перпендикулярных осей, вдоль каждой из которых направлен свой единичный вектор. Назовем такую систему осей n-подом (n-репером). Бесконечно малая эвклидова окрестность любой точки описывается заданием n-пода в этой точке. Если заданы n-поды во всех точках пространства, то известна и метрика этого пространства. Однако обратное утверждение было бы неверно. Знания метрики риманового пространства еще недостаточно для однозначного задания n-пода в каждой его точке. Действительно, метрика пространства не изменится, если подвергнуть все n-поды повороту на произвольный угол. Итак, если задана только метрика, ориентации n-подов неизвестны, и в определении структуры пространства еще остается некоторый произвол. Поэтому очевидно, что описание пространств посредством n-подов является в известном смысле более содержательным, чем описание с помощью фундаментальной квадратичной формы. Возникает мысль, что именно в произволе, связанном с этим способом описания, кроются искомые связи между структурой пространства и причиной электромагнетизма, которые до сих пор ускользали от теории.

Подобного рода пространства рассматриваются не впервые; с чисто математической точки зрения они уже были исследованы ранее. Последовательные стадии разработки соответствующих формальных представлений описаны в заметке в «Mathematische Annalen», любезно отредактированной Картаном [1].

Пусть в точке A задан n-под. Структура пространства будет вполне задана, если и для всякой другой его точки указать некий n-под, который по определению будем считать параллельным первому. Так между двумя точками пространства можно установить не только соотношение

[1] Статья 98.— *Ред.*

масштабов, но и соотношение направлений. Понятие абсолютного параллелизма теперь приобретает точный смысл, которого в теории Римана оно не могло иметь. Два вектора, взятые в двух точках пространства, удаленных друг от друга на конечное расстояние, будут параллельны, если имеются одинаковые составляющие по соответствующим осям своих локальных систем координат. Когда структуру пространства характеризуют посредством задания поля n-подов, то тем самым подразумевают, что существует риманова метрика и одновременно имеет место абсолютный параллелизм. Это значит, что для любых двух бесконечно малых пространственных элементов можно установить не только отношение длин, что связано с метрикой, но и соотношение направлений, отражаемое ориентацией n-подов.

Итак, единственная новая гипотеза, необходимая для перехода к более сложной геометрии, чем геометрия Римана, сводится к существованию в пространстве «направлений» и соотношений между этими направлениями. Этого понятия «направления» не содержит в себе ни понятие континуума, ни понятие пространства. Поэтому для предположения о наличии в пространстве каких-то соотношений направлений, выражаемых существованием параллельности на конечном удалении, и потребовалась дополнительная гипотеза.

Однако нетрудно видеть, что даже в случае одновременного принятия гипотезы о существовании абсолютного параллелизма и гипотезы о наличии римановой метрики поле n-подов определяется только с точностью до поворота на произвольный угол (одинаковый для всех n-подов).

5. Введем обобщенную систему гауссовых координат и рассмотрим n-под с началом отсчета в точке P. Пусть h_s^ν — проекции единичных векторов n-пода на оси системы гауссовых координат. В дальнейшем все греческие индексы будем относить к координатам, а все латинские — к n-подам. В таком случае h_s^ν обозначает ν-ю проекцию единичного вектора, направленного вдоль s-й оси n-пода. В четырехмерном пространстве ($n = 4$) имеется очевидно 16 величин h_s^ν, которые полностью описывают структуру пространства.

Если эти величины известны, то можно выразить составляющие любого вектора A в локальной системе координат через его составляющие в системе гауссовых координат. Имеем

$$A^\nu = h_s^\nu A_s \tag{1}$$

и, обратно,

$$A_s = h_{s\nu} A^\nu, \tag{2}$$

где $h_{s\nu}$ — миноры детерминанта $h = |h_s^\nu|$, деленные на h. Как обычно, по индексам, встречающимся дважды, следует провести суммирование.

Чтобы найти метрику этого пространства, вычислим длину произвольного вектора A. В локальной системе координат (в предположении справедливости эвклидовой геометрии) имеем

$$A^2 = \sum A_s^2 = \sum h_{s\mu} h_{s\nu} A^\mu A^\nu. \tag{3}$$

Коэффициенты фундаментальной метрической формы $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, очевидно, определяются равенством

$$g_{\mu\nu} = h_{s\mu} h_{s\nu}. \tag{4}$$

Так мы убеждаемся, что поле n-подов (h_s^ν) полностью определяет метрику $g_{\mu\nu}$; однако обратное утверждение неверно.

Величины h_s^ν составляют фундаментальный тензор, аналогичный тензору $g_{\mu\nu}$ старой теории; теперь в случае $n = 4$ имеется 16 величин h_s^ν по сравнению с 10 величинами $g_{\mu\nu}$.

Понятие тензора в этой теории обобщается. Действительно, мы должны рассматривать здесь не только преобразования, изменяющие систему координат, но и преобразования, которые изменяют ориентацию n-подов. Поскольку n-поды определены лишь с точностью до произвольного поворота, единственно допустимыми являются соотношения, ковариантные относительно такого вращения. В качестве примера изменим одновременно систему координат и ориентацию локальных систем. Если вращение характеризуется не зависящими от координат постоянными коэффициентами α_{st}, такими, что

$$\alpha_{s\mu} \alpha_{s\nu} = \alpha_{\mu s} \alpha_{\nu s} = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ (при } \mu = \nu) \\ 0 \text{ (при } \mu \neq \nu) \end{cases}, \tag{5}$$

то

$$h_s^{\nu'} = \alpha_{st} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho} h_t^\rho. \tag{6}$$

Каждому локальному (латинскому) индексу соответствует преобразование α, а всякому греческому индексу — обычное преобразование.

6. Алгебраические законы, которым подчиняются эти тензоры, почти такие же, как и для тензоров абсолютного дифференциального исчисления. Можно определить сумму и разность двух тензоров T и S, имеющих одинаковые индексы. Произведение двух тензоров подчиняется тому же закону преобразования, что и тензор более высокого ранга. Может применяться также операция свертывания, как по греческим, так и по латинским индексам. Для первых верхний индекс следует всегда приравнивать нижнему. Возможна также перестановка индексов; в частности с помощью фундаментального тензора h_s^ν можно заменить латинский ин-

декс на греческий. Пусть, например, имеется тензор $T_{.s}^{\cdot\lambda}$. Тогда

$$h_s^{\tau} T_{.s}^{\cdot\lambda} = T^{\tau\lambda}. \tag{7}$$

Возможен также переход от составляющих тензора в локальной системе отсчета к составляющим того же тензора в гауссовой системе и наоборот.

Наконец, вычислим в этой новой теории элемент объема. Эта важная величина дается в общей теории относительности выражением

$$d\Omega = \sqrt{g}\, d\tau,$$

где

$$g = |g_{\mu\nu}| \quad \text{и} \quad d\tau = dx^1\, dx^2 dx^3 dx^4.$$

Между тем имеем

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu s} h_{\nu s} \quad \text{и} \quad g = h^2 .$$

Следовательно,

$$d\Omega = h d\tau. \tag{8}$$

Исчезновение иррациональных выражений является еще одним преимуществом новой теории.

7. Рассмотрим теперь параллельный перенос вектора A^μ. В римановом многообразии этот перенос дается формулой

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x^\beta.$$

Коэффициенты $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ — это символы Кристоффеля, которые должны удовлетворять следующим двум условиям.

1°. При определяемом ими параллельном переносе метрика должна сохраняться неизменной, т. е. должна оставаться инвариантной длина рассматриваемых векторов.

2°. $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ должны быть симметричны по α и β:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}.$$

В римановой геометрии параллельный перенос неинтегрируем. Если произвести перенос по замкнутому пути, то окончательное направление вектора не совпадает с первоначальным, причем мерой соответствующей разности будет тензор Римана $R^i_{k,\,lm}$.

В новой теории дело обстоит иначе. Параллельный перенос вектора A дается аналогичной формулой

$$\delta A^\mu = \Delta^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x^\beta. \tag{9}$$

Но здесь перенос интегрируем: если вектор переносить по замкнутому пути, то первоначальное направление вектора всегда совпадает с окончательным. Тензор Римана, составленный из $\Delta^{\mu}_{\alpha\beta}$, будет, следовательно, тождественно равен нулю. Сверх того, $\Delta^{\mu}_{\alpha\beta}$ теперь несимметричны по α и β. Эти результаты легко проверить, выразив $\Delta^{\mu}_{\alpha\beta}$ через h.

Пусть x^{β} и $x^{\beta}+dx^{\beta}$ — две соседние точки и их n-поды «параллельны». Векторы A_s и $A_s+\delta A_s$ будут параллельны, если они имеют одинаковые составляющие в соответствующих двух n-подах. Следовательно, условие параллельного переноса из x^{β} в $x^{\beta}+dx^{\beta}$ будет $\delta A_s = 0$.

Выражая A_s через составляющие A в гауссовой системе координат

$$A_s = h_{s\mu}A^{\mu},$$

имеем

$$\delta\,(h_{s\mu}A^{\mu}) = 0. \tag{10}$$

Умножая на h^{σ}_{s}, получаем

$$0 = h^{\sigma}_{s}\left\{h_{s\mu}\delta A^{\mu} + A^{\alpha}\frac{\partial h_{s\alpha}}{\partial x^{\beta}}\delta x^{\beta}\right\} \tag{11}$$

или, обозначив запятой перед соответствующим индексом операцию обычного дифференцирования, будем иметь

$$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = h^{\mu}_{s}h_{s\alpha,\,\beta}, \tag{12}$$

а также

$$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = -\,h_{s\alpha}h^{\mu}_{s,\,\beta}. \tag{13}$$

Таким же способом, как это делается в абсолютном дифференциальном исчислении, можно составить из $\Delta^{\mu}_{\alpha\beta}$ оператор ковариантного дифференцирования. Обозначая его точкой с запятой перед соответствующим индексом, будем иметь для контравариантного тензора первого ранга

$$A^{\mu}_{;\,\sigma} = A^{\mu}{}_{,\,\sigma} - A^{\alpha}\Delta^{\mu}_{\alpha\sigma} \tag{14}$$

и для ковариантного тензора первого ранга

$$A_{\mu;\,\sigma} = A^{\mu}{}_{,\,\sigma} - A^{\alpha}\Delta^{\mu}_{\alpha\sigma}. \tag{15}$$

Аналогичные формулы могут быть получены и для тензоров более высоких рангов. Они, подобны формулам абсолютного дифференциального исчисления, зависят только от метрики и выводятся таким же образом.

Легко убедиться, что ковариантная производная фундаментального тензора тождественно равна нулю:

$$h^{\nu}_{s;\,\tau} = h_{s\nu;\,\tau} = g_{\sigma\tau;\,\rho} = g^{\sigma\tau}_{;\,\rho} \equiv 0. \tag{16}$$

Действительно,

$$h^{\nu}_{s;\tau} = h^{\nu}_{s,\tau} + h^{\alpha}_{s}\Delta^{\nu}_{\alpha\tau} = \delta_{st}\,(h^{\nu}_{t,\tau} + h^{\alpha}_{t}\Delta^{\nu}_{\alpha\tau}) = h^{\alpha}_{s}\,(h_{t\alpha}h^{\nu}_{t\tau} + \Delta^{\nu}_{\alpha\tau}) \equiv 0.$$

Ковариантную производную произведения двух тензоров находят по обычному правилу дифференциального исчисления. Если мы имеем, например, два тензора любого ранга $T^{\cdot}_{\cdot}$ и $S^{\cdot}_{\cdot}$, то

$$(T^{\cdot}_{\cdot}S^{\cdot}_{\cdot})_{;\,\tau} = T^{\cdot}_{\cdot\,;\,\tau}S^{\cdot}_{\cdot} + T^{\cdot}_{\cdot}S^{\cdot}_{\cdot\,;\,\tau}. \tag{17}$$

Две операции дифференцирования не перестановочны, т. е. порядок дифференцирования не безразличен. Пусть имеется произвольный тензор $T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$. Найдем результаты его последовательного дифференцирования сначала в порядке σ, τ, а затем в порядке τ, σ и определим их разность. Тогда получим фундаментальную формулу

$$T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\,;\,\sigma;\,\tau} - T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\,;\,\tau;\,\sigma} \equiv - T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\,;\,\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}, \tag{18}$$

где

$$\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}.$$

Эту формулу легко вывести на простых примерах. Допустим сначала, что $T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ есть всего лишь скаляр ψ. В этом случае ковариантная производная не отличается от обычной производной

$$\psi_{;\,\sigma} = \psi_{,\,\sigma}$$

и соответственно

$$\psi_{;\,\sigma;\,\tau} = \psi_{,\,\sigma,\,\tau} - \psi_{,\,\alpha}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau},$$

$$\psi_{;\,\tau;\,\sigma} = \psi_{,\,\tau,\,\sigma} - \psi_{,\,\alpha}\Delta^{\alpha}_{\tau\sigma},$$

$$\psi_{;\,\sigma;\,\tau} - \psi_{;\,\tau;\,\sigma} = -\psi_{,\,\alpha}(\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}) = -\psi_{;\,\alpha}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

Разность имеет как раз требуемый вид. Легко убедиться, что $\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$ представляет собой тензор

Случай вектора $T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} = A^{\mu}$ сводится к предыдущему, если учесть, что в теории существует абсолютный параллелизм. Существование такого параллелизма в действительности приводит к возможности существования однородного векторного поля, т. е. в каждой точке можно себе представить вектор того же направления, что и заданный.

Рассмотрим такое однородное поле *произвольных* векторов a_{μ}. Легко показать, что $a_{\mu;\,\sigma} = a^{\nu}_{;\,\sigma} = 0$. Образуем из заданного вектора A_{μ} скаляр

$$\psi = A^{\mu}\cdot a_{\mu}.$$

К этому скаляру можно применить формулу, выведенную выше для разности D. Далее, учитывая правило дифференцирования произведения, имеем

$$(A^{\mu}a_{\mu})_{;\sigma} = a_{\mu}A^{\mu}_{;\sigma}.$$

Произвольные величины a^{μ} выступают в качестве множителя и сокращаются, так что окончательно получается соотношение искомого вида

$$A^{\mu}_{;\sigma;\tau} - A^{\mu}_{;\tau;\sigma} \equiv -A^{\mu}_{;\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau},$$

которое легко можно обобщить на случай тензора любого ранга.

8. Заслуживает серьезного внимания одно важное отличие излагаемой здесь теории от теории Римана. В теории Римана нет такого тензора, который мог бы быть выражен через одни лишь первые производные фундаментального тензора. В нашей же теории разность

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = \Delta^{\alpha}_{\mu\nu} - \Delta^{\alpha}_{\nu\mu} \tag{19}$$

является тензором, который содержит только первые производные. Этот тензор замечателен тем, что он представляет собой в некотором смысле аналог тензора Римана: если Λ обращается в нуль, континуум является эвклидовым. Этот результат нетрудно доказать.

Из формулы для $\Delta^{\alpha}_{\mu\nu}$ имеем

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = h^{\alpha}_{s}(h_{s\mu,\nu} - h_{s\nu,\mu}) = 0.$$

Умножая на h^{α}_{t} и учитывая, что $h^{\alpha}_{s}h_{t\alpha} = \delta_{st}$, получаем

$$h_{t\mu,\nu} - h_{t\nu,\mu} = 0.$$

Следовательно, $h_{t\nu}$ имеет вид

$$h_{t\mu} = \frac{\partial\psi_t}{\partial x^{\mu}}.$$

Если ψ_t принять за гауссовы координаты, что вполне возможно, то $\psi_t = x^t$ и

$$h_{t\mu} = \delta_{t\mu} = \begin{cases} 1 & t = \mu \\ 0 & t \neq \mu \end{cases}$$

будут постоянными коэффициентами. Из них можно составить таблицу, в которой диагональные члены равны 1, а остальные обращаются в нуль. Поскольку $h_{s\mu}$ и $g_{\mu\nu}$ постоянны, континуум является эвклидовым.

9. Рассмотрим величину Λ, которая в новой теории будет играть весьма существенную роль. Всего может быть $6 \times 4 = 24$ величин Λ,

функций же h имеется только 16. Следовательно, между различными Λ существуют соотношения, которые должны выполняться тождественно. Чтобы найти их, будем исходить из выражения для Λ. Так как параллельный перенос является интегрируемым, тензор «кривизны», аналогичный тензору Римана, тождественно равен нулю. Следовательно, мы будем иметь

$$\Delta^i_{\varkappa\lambda,\mu} - \Delta^i_{\varkappa\mu,\lambda} - \Delta^i_{\sigma\lambda}\Delta^\sigma_{\varkappa\mu} + \Delta^i_{\sigma\mu}\Delta^\sigma_{\varkappa\lambda} \equiv 0. \tag{20}$$

Произведем круговую перестановку индексов $\varkappa$, λ, μ и просуммируем; затем вместо обычных производных введем ковариантные. Тогда получится следующее тождество для Λ:

$$(\Lambda^i_{\varkappa\lambda;\mu} + \Lambda^i_{\lambda\mu;\varkappa} + \Lambda^i_{\mu\varkappa;\lambda}) + (\Lambda^i_{\varkappa\alpha}\Lambda^\alpha_{\lambda\mu} + \Lambda^i_{\lambda\alpha}\Lambda^\alpha_{\mu\varkappa} + \Lambda^i_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha_{\varkappa\lambda}) \equiv 0. \tag{21}$$

Свертывая один раз по i и μ и полагая, что $\Lambda^\alpha_{\mu\alpha} = \varphi_\mu$, находим другое важное тождество

$$\Lambda^\alpha_{\mu\nu;\alpha} - \left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^\mu}\right) \equiv 0. \tag{22}$$

Для получения из него еще одного тождества нужно воспользоваться правилом перестановки для ковариантного дифференцирования:

$$T^{\cdot}_{\cdot;\sigma;\tau} - T^{\cdot}_{\cdot;\tau;\sigma} = -T^{\cdot}_{\cdot;\alpha}\Lambda^\alpha_{\sigma\tau}.$$

Введем новые обозначения; условимся, что подчеркнутый индекс — это переставленный, т. е. опущенный или поднятый индекс. Например, $\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu}}$ означает, что взяты контравариантные компоненты $\Lambda^\alpha_{\mu\nu}$:

$$\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu}} = \Lambda^\alpha_{\sigma\tau}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}.$$

Учитывая это, применим предыдущее правило к $\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu}}$, продифференцировав эту величину по ν и по α. Тогда будем иметь:

$$\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu};\nu;\alpha} - \Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu};\alpha;\nu} \equiv -\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu};\sigma}\Lambda^\sigma_{\nu\alpha}.$$

Правую часть можно записать в виде

$$-\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu};\sigma}\Lambda^\sigma_{\nu\alpha} \equiv -(\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^\sigma_{\nu\alpha})_{;\sigma} + \Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^\sigma_{\nu\alpha;\sigma}.$$

В первом слагаемом правой части заменим немые индексы σ, α и ν на α, σ и τ. Тогда получим

$$-(\Lambda^\sigma_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^\alpha_{\tau\sigma})_{;\alpha} \equiv +(\Lambda^\sigma_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^\alpha_{\sigma\tau})_{;\alpha}.$$

Следовательно,

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu;\,\alpha} - (\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{;\,\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha;\,\nu} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha;\,\sigma} \equiv 0$$

или

$$(\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{;\,\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha;\,\nu} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha;\,\sigma} \equiv 0. \qquad (23)$$

Это и есть искомое тождество. Введем обозначения

$$G^{\mu\alpha} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau},$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha}.$$

Тогда тождество (23) запишется следующим образом:

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\alpha} - F^{\mu\alpha}_{;\,\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}F_{\nu\alpha} \equiv 0. \qquad (24)$$

10. После того как введен способ математического описания структуры пространства, займемся основной проблемой теории, которая заключается в установлении уравнений поля. Как и в общей теории относительности, эта проблема сводится к отысканию простейших условий, которым могут подчиняться элементы, определяющие структуру пространства, т. е. величины h^{ν}_{s}. Речь идет, следовательно, о выборе между различными возможностями. Трудность этого выбора связана с отсутствием каких-либо опорных пунктов, которые могли бы подсказать нам решение. Прежде чем выписывать окончательные уравнения поля, мне кажется интересным воспроизвести ход рассуждений, приведший к их открытию.

Отправным пунктом мне послужили тождественные соотношения, которым удовлетворяют величины $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$. В общем случае обнаружение определенных тождественных соотношений может явиться большим подспорьем в выборе уравнений поля, подсказывая возможный характер искомых уравнений. Исследование равенств должно, следовательно, логически предшествовать выбору системы уравнений. Но *априори* неизвестны величины, между которыми следует искать соотношения.

Кажется, что можно руководствоваться следующим соображением: искомые соотношения должны, по всей вероятности, содержать тензор $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$ и его производные, поскольку это единственный тензор, который может быть выражен через одни только первые производные фундаментального тензора.

Самым простым возможным условием явилось бы

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = 0.$$

Очевидно, это условие слишком жесткое: оно означало бы, что пространство эвклидово. Кроме того, оно содержит только первые производные, а уравнения, описывающие явления природы, по всей видимости, второго порядка, как, например, уравнение Пуассона.

Попытаемся теперь потребовать выполнения условия

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\sigma} = 0.$$

Это соотношение также неприемлемо, поскольку оно почти эквивалентно первому. Однако оно полезно в том отношении, что подсказывает приравнять нулю дивергенции, которые можно составить на основе $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\sigma}$. Будем исходить из этой ковариантной производной и выполним свертывание ее всеми возможными способами (при этом возникает дивергенция). У нас есть две возможности: либо

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\alpha} = 0, \tag{25}$$

либо

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\nu} = 0. \tag{26}$$

Сразу видно, что совокупность этих систем не может нас удовлетворить, поскольку число уравнений нельзя выбрать произвольным. Ведь без специального исследования нельзя гарантировать совместности этих уравнений. Между тем необходимо, чтобы выбранная система уравнений была совместной.

11. В общем случае n-мерного пространства имеется n^2 переменных h^{ν}_{s}. Но в общековариантной теории при произвольном выборе системы координат n переменных из числа n^2 могут быть выбраны произвольно. Вследствие этого число независимых уравнений будет $n^2 - n$. Число уравнений может оказаться даже больше, чем $n^2 - n$, при условии, что они связаны некоторым числом тождественных соотношений, делающих систему совместной. Во всяком случае система должна удовлетворять следующему правилу: *избыток числа уравнений над числом тождественных соотношений должен равняться числу переменных минус n.*

Рассмотрим, например, уравнения общей теории относительности. Мы имеем 10 неизвестных функций $g_{\mu\nu}$. Благодаря произволу в выборе системы координат каким-либо четырем функциям $g_{\mu\nu}$ могут быть приданы любые значения. Итак, шесть переменных должны удовлетворять 10 уравнениям. Но, как известно, одновременно имеется четыре тождества

$$\left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R\right)_{;\,k} \equiv 0,$$

которые восстанавливают совместность [2].

....

[2] Символ «;» используется здесь в старом, хорошо известном смысле, отличном от того, в каком он используется в остальных соотношениях настоящей статьи.

Можно указать и другие случаи, когда число уравнений превосходит число неизвестных, но уравнения не являются несовместными. Например, существует восемь уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0,$$

для шести неизвестных, однако эта система совместна, так как уравнения связаны двумя известными тождествами.

В чем глубокий смысл превышения числа уравнений над числом переменных?

В выбранном примере два векторных уравнения Максвелла канонически определяют задачу. Достаточно задать поля $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ в момент t, чтобы все остальное можно было определить. Но остающиеся еще скалярные соотношения приводят к тому, что начальные условия не могут быть произвольными. Следовательно, превышение числа уравнений над числом неизвестных (при наличии, однако, тождественных соотношений, делающих уравнения совместными) частично снимает в данном случае произвол в выборе начальных условий. Между тем ясно, что теория, согласующаяся с опытом, тем более удовлетворительна, чем полнее она исключает этот произвол.

Теперь вернемся к нашей проблеме.

12. Для четырехмерного пространства ($n = 4$) мы имеем 16 неизвестных h_s^{ν}, из которых четыре могут быть произвольными, так что только 12 должны будут определяться уравнениями поля. Число уравнений, образующих на первый взгляд надлежащую систему, составляло 22, а именно: 6 уравнений (25) и 16 уравнений (26). Но нам бы потребовалось иметь 10 тождеств, которые в этом случае отсутствуют. Так становится понятным, каким образом условие совместности позволяет нам эффективно ограничить произвол в выборе уравнений поля.

Исследуем теперь тождество (24). Оно подсказывает нам возможность выбора в качестве уравнений поля системы

$$G^{\mu\alpha} = 0, \tag{27}$$

$$F^{\mu\alpha} = 0 \tag{28}$$

или в явном виде

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0, \tag{27a}$$

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha} = 0. \tag{28a}$$

Эта система, мало отличающаяся от системы уравнений (25) и (26), состоит по-прежнему из 22 уравнений, которые, однако, выбраны так, что удовлетворяют четырем тождествам (24). Тем не менее разность 22—4= = 18 все-таки превышает разность 16—4 = 12. Для совместности новой системы уравнений требуется, чтобы между этими уравнениями существовало еще 6 дополнительных тождественных соотношений. Докажем, что эти необходимые тождества существуют. Для этого сначала придадим уравнениям (28) другую форму, эквивалентную первоначальной. Будем руководствоваться тождеством (22):

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\alpha} - (\varphi_{\mu,\,\nu} - \varphi_{\nu,\,\mu}) \equiv 0. \tag{22}$$

Мы положили $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\alpha} = 0$. Тогда из (22) следует

$$\frac{\partial\varphi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\varphi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0.$$

Следовательно, φ_{μ} является скалярной производной некоторого скаляра, который удобно обозначить как $\ln\psi$:

$$\varphi_{\mu} = \frac{\partial \ln\psi}{\partial x^{\mu}}.$$

Положим далее

$$F_{\mu} = \varphi_{\mu} - \frac{\partial \ln\psi}{\partial x^{\mu}}.$$

Имеем $F_{\mu} = 0$. Тогда уравнения

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\alpha} = 0$$

можно заменить уравнениями $F_{\mu} = 0$, и нашу систему уравнений записать в виде

$$G^{\mu\alpha} = 0, \tag{29}$$

$$F_{\mu} = 0 \tag{30}$$

или

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\underline{\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0, \tag{29a}$$

$$\varphi_{\mu} - \frac{\partial \ln\psi}{\partial x^{\mu}} = 0. \tag{30a}$$

Теперь мы имеем 16 уравнений (29) и 4 уравнения (30), т. е. всего 20 уравнений. Мы ввели еще одну новую переменную — скаляр ψ; значит всего имеется $16 + 1 = 17$ неизвестных, из которых 4 произвольны. Чтобы система была совместной, между компонентами $G^{\mu\alpha}$ и F_μ должно существовать

$$20 - (17 - 4) = 7$$

тождеств. Четыре из них мы уже нашли; это — тождества (24). Но существуют и другие тождественные соотношения между рассматриваемыми величинами и (это можно считать чудом!) их как раз три. Я не могу сказать, каковы глубокие причины их существования. Однако данный тип пространства изучался до меня математиками, в частности Вейценбеком, Эйзенхартом и Картаном. Я надеюсь, что они помогут выяснить скрытые первопричины этих новых тождеств. Как бы то ни было, эти тождества существуют. Сейчас я укажу, как к ним можно прийти.

Разложим тензор $G^{\mu\alpha}$ на симметричную часть $\underline{\underline{G}}^{\mu\alpha}$ и антисимметричную часть $\underline{G}^{\mu\alpha}$. Имеем

$$2G^{\mu\alpha} = (\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} - \Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\nu}})_{;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} =$$
$$= (\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu\alpha}})_{;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}} \Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}} + \Lambda^{\sigma}_{\alpha\tau} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau},$$

поскольку $\Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\nu}}$ антисимметричны по α и ν. Можно выразить $2\underline{G}^{\mu\alpha}$ через $F^{\mu\alpha} = \Lambda^{\nu}_{\mu\alpha;\,\nu}$ и некоторый тензор, антисимметричный по отношению к любой паре индексов α, μ, ν,

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} + \Lambda^{\nu}_{\underline{\alpha\mu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu\alpha}}. \tag{31}$$

Очевидно,

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} = S^{\nu}_{\underline{\alpha\mu};\,\nu} + F^{\mu\alpha} + C.$$

Дополнительный член C задается равенством.

$$C = \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

Для его определения заметим, что, переставив немые индексы σ и τ, получим

$$\Lambda_{\underline{\alpha\tau}} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}} \Lambda^{\mu}_{\tau\sigma} = - \Lambda^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}$$

и

$$\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\tau}_{\underline{\mu\sigma}} \Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma} = - \Lambda^{\tau}_{\underline{\mu\sigma}} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

С другой стороны, имеем равенство

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\tau\sigma}} \Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}} = \Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma} \Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}$$

благодаря тому, что

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\tau\sigma}} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} g^{\beta\tau} g^{\gamma\sigma} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} \Lambda^{\mu}_{\gamma\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}.$$

Следовательно,

$$-C = \Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} (\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}} + \Lambda^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}} + \Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}) \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2} (\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}} + \Lambda^{\tau}_{\underline{\mu\sigma}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}) \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau},$$

т. е.

$$-C = \frac{1}{2} S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2} S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

Окончательно имеем

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} = -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\,\nu} + \frac{1}{2} S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2} S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} + F^{\mu\alpha}. \tag{32}$$

Запишем ковариантную производную в явном виде (подчеркнутые индексы контрвариантны). Имеем

$$-S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\,\nu} = S^{\tau}_{\underline{\alpha\mu};\,\tau} = S^{\tau}_{\alpha\mu,\,\tau} + S^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}} \Delta^{\tau}_{\sigma\tau} + S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + S^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}} \Delta^{\mu}_{\sigma\tau},$$

или, переставляя σ и τ местами,

$$S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}} \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} = S^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}} \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma} = \frac{1}{2} (S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}} \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} + S^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}} \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}) = \frac{1}{2} S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}} (\Delta^{\alpha}_{\tau\sigma} - \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau}) = -\frac{1}{2} S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau},$$

поскольку

$$S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}} = S^{\mu}_{\underline{\tau\sigma}} = S^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}};$$

кроме того,

$$S^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}} \Delta^{\mu}_{\sigma\tau} = S^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}} \Delta^{\mu}_{\tau\sigma} = \frac{1}{2} S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}} (\Delta^{\mu}_{\sigma\tau} - \Delta^{\mu}_{\tau\sigma}) = \frac{1}{2} S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}.$$

Следовательно,

$$-S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\,\nu} = -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha},\,\nu} + \frac{1}{2} S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2} S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} - S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}} \Delta^{\nu}_{\sigma\nu}$$

и тогда

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} = -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha},\,\nu} - S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}} \Delta^{\nu}_{\sigma\nu} + F^{\mu\alpha}. \tag{33}$$

Вычислим член $\Delta^{\nu}_{\sigma\nu}$, воспользовавшись его определением. Имеем

$$\Lambda^{\tau}_{\sigma\tau} = \Delta^{\tau}_{\sigma\tau} - \Delta^{\tau}_{\tau\sigma}.$$

Но по определению

$$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = h^{\mu}_{s} h_{s\alpha,\,\beta}, \quad \Delta^{\tau}_{\tau\sigma} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial \ln h}{\partial x^{\sigma}}.$$

С другой стороны, мы положили

$$\Lambda^{\tau}_{\sigma\tau} = \varphi_\sigma$$

и

$$F_\sigma = \varphi_\sigma - \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^\sigma}\,.$$

Значит,

$$\Delta^{\tau}_{\sigma\tau} = \varphi_\sigma + \frac{\partial \ln h}{\partial x^\sigma} = F_\sigma + \frac{\partial \ln (\psi h)}{\partial x^\sigma}\,.$$

Подставим это в предыдущее уравнение, умножив его на ψh:

$$\psi h\,(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha}) = \psi h S^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu},\,\sigma} - \psi h F_\sigma S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}} - \psi h \frac{\partial \ln (\psi h)}{\partial x^\sigma} S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}.$$

Перенося второй член правой части уравнения в левую часть, получаем

$$\psi h\,(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}} F_\sigma) = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\psi h S^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}}).$$

Теперь продифференцируем последнее равенство по α. Тогда правая часть равенства обратится в нуль и мы получим тождества

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\psi h\ (2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}} F_\sigma)\right] \equiv 0. \tag{34}$$

Действительно, правую часть равенства можно переписать с заменой немых индексов в следующем виде:

$$(h\psi S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}})_{,\,\sigma,\,\alpha} = (h\psi S^{\alpha}_{\underline{\mu\sigma}})_{,\,\alpha,\,\sigma} = -(h\psi S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}})_{,\,\alpha,\,\sigma},$$

так как

$$S^{\alpha}_{\mu\sigma} = -S^{\sigma}_{\mu\alpha}.$$

Существует только 3 независимых тождества (34). Если $A^{\mu\alpha}$ — антисимметричный тензор,

$$A^{\mu\alpha} = -A^{\alpha\mu},$$

обладающий свойством

$$(A^{\mu\alpha})_{,\,\alpha} \equiv 0,$$

то

$$(A^{\mu\alpha})_{,\,\alpha,\,\mu} = (A^{\alpha\mu})_{,\,\mu,\,\alpha} = -(A^{\mu\alpha})_{,\,\mu,\,\alpha} \equiv 0.$$

Это справедливо для любого антисимметричного тензора $A^{\mu\alpha}$. Если принять за $A^{\mu\alpha}$ первый член тождества (34), то получим соотношение, не зависящее от значений, принимаемых $G^{\mu\alpha}$ и F_σ. Это уменьшает число независимых тождеств на 1. Окончательное число этих тождеств составляет $4+3=7$, число уравнений 20, а число неизвестных 17. Очевидно, $20-7=17-4$ и система совместна.

13. Можно попытаться непосредственно проверить совместность предлагаемой системы уравнений. Для этого допустим, что *все* уравнения

$$G^{\mu\alpha}=0, \qquad F_\sigma=0$$

удовлетворяются для пространственного сечения $x^4=\text{const}=a$. Разделим их на две группы: пусть первая группа состоит из 13 уравнений [3]:

$$\begin{array}{llll} F_1=0, & F_2=0, & F_3=0, & F_4=0, \\ G^{11}=0, & G^{12}=0, & G^{13}=0, & \\ G^{21}=0, & G^{22}=0, & G^{23}=0, & \\ G^{31}=0, & G^{32}=0, & G^{33}=0, & \end{array}$$

а вторая группа — из остальных 7 уравнений. Легко доказать справедливость следующего утверждения. *Если все уравнения удовлетворяются для сечения $x^4=0$ и если 13 уравнений первой группы удовлетворяются во всем четырехмерном пространстве, то и уравнения второй группы также автоматически удовлетворяются во всем этом пространстве.*

Действительно,

$$F_{\mu\alpha}=F_{\mu,\,\alpha}-F_{\alpha,\,\mu}.$$

Если F_μ всюду обращается в нуль, то будет равен нулю и $F_{\mu\alpha}$. В сечении $x^4=0$ имеем

$$\frac{\partial G^{\mu 4}}{\partial x^4}=0,$$

как это следует из тождества

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[h\psi\ (2\underline{G}^{\mu\alpha}-F^{\mu\alpha}+S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}F_\sigma)\right]\equiv 0. \qquad (34)$$

Рассмотрим бесконечно близкое сечение $x^4=a+da$. Поскольку $F^{\mu\alpha}$ и F_σ всюду равны нулю, то из предыдущего равенства для $\alpha=4$ следует, что $G^{\mu\alpha}$ будут равны нулю также и в этом сечении. Аналогичное рассуждение, использующее тождество

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\alpha}-F^{\mu\nu}_{;\,\nu}-\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}F_{\tau\sigma}\equiv 0, \qquad (24)$$

показывает, что симметричная часть $G^{\mu\alpha}$, обозначенная через $\underline{G}^{\mu\alpha}$, будет

[3] Совместность этих 13 уравнений не вызывает сомнений.

также равна нулю для $\alpha = 4$ в бесконечно близком сечении $x^4 = a + da$. Следовательно, наш вывод справедлив для

$$G^{\mu\alpha} = \underline{G}^{\mu\alpha} + \underline{\underline{G}}^{\mu\alpha}$$

в сечении $x^4 = a + da$ и может быть распространен на все пространство.

14. Займемся теперь, насколько это окажется возможным, физической интерпретацией теории. Очень трудно дать физическую интерпретацию уравнениям во всей их общности. Придется ограничиться первым приближением.

Для этого рассмотрим пространство, лишь бесконечно мало отличающееся от эвклидова. Поскольку последнее характеризуется значениями $h_{s\nu}$, равными $\delta_{s\nu}$ ($= 1$ или 0, x^4 — мнимо), наше допущение сведется к тому, что

$$h_{s\nu} = \delta_{s\nu} + \overline{h}_{s\nu}. \tag{35а}$$

Тогда следует положить

$$h_s^{\nu} = \delta_{s\nu} - \overline{h}_{\nu s}. \tag{35б}$$

Итак, подставим указанные выражения для $h_{s\nu}$ и h_s^{ν} во все данные уравнения и сохраним только члены первого порядка малости. Тогда получим

$$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = h_s^{\mu} h_{s\alpha,\beta} = \overline{h}_{\mu\alpha,\beta},$$

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha\beta} = \overline{h}_{\mu\alpha,\beta} - \overline{h}_{\mu\beta,\alpha}.$$

Уравнения поля будут иметь вид

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{h}_{\alpha\mu,\nu,\nu} - \overline{h}_{\alpha\nu,\mu,\nu} = 0, \\ \overline{h}_{\alpha\mu,\nu,\alpha} - \overline{h}_{\alpha\nu,\mu,\alpha} = 0, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{ll} \overline{h}_{\alpha\mu,\nu,\nu} - \overline{h}_{\alpha\nu,\nu,\mu} = 0, & (36) \\ \overline{h}_{\alpha\mu,\alpha,\nu} - \overline{h}_{\alpha\nu,\alpha,\mu} = 0. & (37) \end{array}\right.$$

Второе уравнение просто означает, что можно положить

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\alpha} = \frac{\partial\chi}{\partial x^{\mu}}, \tag{38}$$

так что система сводится к

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\nu,\nu} - \overline{h}_{\alpha\nu,\nu,\mu} = 0, \tag{39}$$

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\alpha} - \chi_{,\mu} = 0. \tag{40}$$

Однако эта форма уравнений не совсем удовлетворительна, поскольку она не дает с первого взгляда достаточно ясных сведений о рассматриваемом поле. Чтобы прийти к более легко интерпретируемой форме уравнений, вспомним, что система координат выбрана до известной степени произвольно, и произведем ее бесконечно малое преобразование:

$$x^{\mu'} = x^{\mu} - \xi^{\mu}. \tag{41}$$

Здесь ξ^{μ} — бесконечно малые величины первого порядка. Выберем их такими, чтобы система приняла более простой вид.

Применение бесконечно малого преобразования эквивалентно замене $h_{\mu\nu}$ на

$$\overline{h}'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi^{\mu}_{,\nu} \tag{42}$$

(уравнение, следующее из правила преобразования тензоров). Следовательно,

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\nu} = \overline{h}_{\alpha\nu,\nu} + \xi^{\alpha}_{,\nu,\nu},$$
$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\alpha} = \overline{h}_{\alpha\nu,\alpha} + \xi^{\alpha}_{,\nu,\alpha}.$$

Выберем коэффициенты ξ^{μ} так, чтобы эти две величины в новой системе координат обратились в нуль. Я утверждаю, что для этого достаточно принять

$$\xi^{\alpha}_{,\nu,\nu} = -\overline{h}_{\alpha\nu,\nu}, \tag{43}$$

$$\xi^{\alpha}_{,\alpha} = -\chi. \tag{44}$$

Действительно, во-первых,

$$\xi^{\alpha}_{,\nu,\alpha} = \xi^{\alpha}_{,\alpha,\nu} = -\chi_{,\nu} = -\overline{h}_{\alpha\nu,\alpha},$$

во-вторых, система уравнений (43) и (44) совместна, хотя и состоит из 5 уравнений для 4-х неизвестных, поскольку существует тождество

$$(-\chi)_{,\nu,\nu} - (-\overline{h}_{\alpha\nu,\nu})_{,\alpha} \equiv 0.$$

Следовательно, решение данной системы уравнений даст такие значения ξ^{μ}, что они обеспечат выполнение равенств

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\nu} = 0, \tag{45}$$

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\alpha} = 0. \tag{46}$$

Итак, в результате указанного преобразования координат наши уравнения принимают вид (штрихи опущены)

$$\left\{\begin{aligned} \overline{h}_{\alpha\mu,\nu,\nu} &= 0,\\ \overline{h}_{\alpha\mu,\alpha} &= 0,\\ \overline{h}_{\alpha\mu,\mu} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{47}$$

Если все $\overline{h}_{\alpha\mu}$ разложить на симметричную часть $S_{\alpha\mu}$ и антисимметричную часть $A_{\alpha\mu}$, то система распадется на две системы, каждая из которых состоит только из симметричных или только из антисимметричных членов:

$$\begin{cases} S_{\alpha\mu,\nu,\nu} = 0, \\ S_{\alpha\mu,\mu} = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} A_{\alpha\mu,\mu,\nu} = 0, \\ A_{\alpha\mu,\mu} = 0. \end{cases} \tag{48}$$

Итак, мы пришли к двум группам уравнений. *Группа симметричных уравнений выражает законы гравитационного поля, совместные с законом Ньютона—Пуассона*; при этом результат не вполне идентичен результату теории, основанной на геометрии Римана. *Группа антисимметричных уравнений выражает уравнения Максвелла в обобщенной форме.* Я действительно верю, что группа антисимметричных уравнений должна интерпретироваться как система, дающая общие уравнения электромагнитного поля (в первом приближении).

Следовательно, в данном случае происходит четкое разделение законов электромагнетизма, с одной стороны, и законов гравитации, с другой. Но это разделение наблюдается *только в первом приближении*; оно не происходит в общем случае; поле подчиняется единому закону. Однако при современном состоянии теории невозможно судить о том, верна ли *интерпретация* величин, представляющих поле. Поле в действительности определяется в первую очередь своим пондеромоторным воздействием на частицы. Однако закон этого воздействия еще не известен. Для его открытия потребовалось бы проинтегрировать уравнения поля, что до сих пор сделать не удалось.

15. В заключение, резюмируя полученные результаты, можно сказать следующее.

Частный вид структуры пространства, который мы приняли в качестве основной гипотезы, привел нас к определенным общим уравнениям поля, которые в первом приближении приводятся к хорошо известным уравнениям гравитации и электромагнетизма. Однако полученные до сих пор результаты не дают возможности экспериментальной проверки предсказаний теории. Дело в том, что до сих пор не удалось проинтегрировать полученные уравнения и найти законы строения частиц и их движения в поле.

Первая трудность, с преодоления которой должно будет начаться развитие теории, заключается в нахождении лишенных особенностей интегралов, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям поля и способных дать правильное решение проблемы частиц и их движения. Только после этого сравнение с экспериментом станет возможным.

Эта работа содержит наиболее полное изложение второго варианта единой теории поля, намеченного в работах 87 и 88. Новый вариант призван заменить старую аффинную теорию Вейля и Эддингтона (статьи 72—75, 79). От этого нового варианта Эйнштейн отказывается уже через год и переходит к исследованию обобщений пятимерных теорий (ср. статьи 103,106,107).

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ, ОСНОВАННАЯ НА МЕТРИКЕ РИМАНА И АБСОЛЮТНОМ ПАРАЛЛЕЛИЗМЕ *

В последние годы мною была развита теория, которую можно изложить в форме, легко понятной каждому, кто знает общую теорию относительности. Изложение это необходимо потому, что после того, как недавно были найдены новые закономерности и теория была усовершенствована, чтение старых работ означало бы лишь потерю времени. В этой работе теория излагается, на мой взгляд, в наиболее целесообразном для быстрого усвоения виде. От Вейценбека и Картана, в частности, я узнал, что теория континуумов рассматриваемого здесь рода сама по себе не является новой. Картан любезно взял на себя труд составить исторический обзор соответствующего раздела математики, который дополняет мою работу; он напечатан в этом же журнале непосредственно вслед за моей статьей. Я выражаю искреннюю благодарность Картану за его ценный вклад. Самым важным и во всяком случае новым в моей работе является получение простейших законов поля, которым может подчиняться риманово многообразие с абсолютным параллелизмом. При этом вопрос о физическом смысле теории будет рассмотрен лишь кратко.

§ 1. Структура континуума

Поскольку в последующих рассуждениях число измерений не играет никакой роли, мы будем рассматривать n-мерный континуум. Чтобы учесть гравитацию, предположим, что существует риманова метрика. Однако в природе существуют также электромагнитные поля, которые не могут описываться римановой метрикой. Возникает вопрос: каким логически наиболее естественным образом приписать нашему риманову пространству такую структуру, чтобы теория приобрела единый характер?

* *Auf die Riemann-Metrik und den Fern-Parallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie.* Math. Ann., 1930, 102, 685—697.

Пусть в окрестности каждой точки P континуум (псевдо-)эвклидов. В каждой точке существует локальная декартова система координат (или ортогональный n-под), в которой выполняется теорема Пифагора. Ориентация этого n-пода в римановом пространстве не играет роли. Предположим теперь, что между этими окрестностями (эвклидовыми пространствами) существует также связь по направлениям. Будем предполагать, что в силу структуры пространства можно, как и в эвклидовой геометрии, говорить о параллельной ориентации всех локальных n-подов (что имеет смысл *только* в пространстве с метрической структурой). В дальнейшем мы будем всегда считать, что n-поды ориентированы параллельно. Тогда произвольная ориентация локального n-пода в *одной* точке P однозначно определяет ориентацию локальных n-подов во всех точках континуума.

Наша задача теперь состоит в том, чтобы описать этот континуум математически так, чтобы можно было найти простейшие ограничения, которые могут быть наложены на такой континуум. Мы делаем это в надежде найти таким способом законы природы, аналогично тому, как это было сделано в общей теории относительности, основанной только на метрической структуре пространства.

§ 2. Математическое описание структуры пространства

Локальный n-под состоит из n взаимно-перпендикулярных единичных векторов с компонентами h_s^ν в произвольной гауссовой системе координат. Здесь, как и везде, нижний латинский индекс означает принадлежность к определенному n-поду, греческий индекс вверху или внизу — контравариантный или ковариантный характер преобразования соответствующей величины относительно преобразований гауссовой системы координат.

Общее свойство преобразования h_s^ν состоит в следующем. Если все локальные системы, или n-поды, повернуть одинаковым образом (что разрешается) и затем ввести новую гауссову систему координат, то новые и старые h_s^ν будут связаны законом преобразования

$$h_s^{\nu'} = \alpha_{st} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} h_t^\alpha, \tag{1}$$

где постоянные коэффициенты α_{st} образуют ортогональную систему

$$\alpha_{sa}\alpha_{bs} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1 \text{ при } a = b \\ 0 \text{ при } a \neq b. \end{cases} \tag{2}$$

Закон преобразования (1) без труда обобщается на величины, компоненты которых содержат сколь угодно большое число локальных и координатных индексов. Такие величины мы называем тензорами. Отсюда непосредственно получаются законы алгебраических операций с тензорами (сложение, умножение, свертывание по латинским и греческим индексам).

Величины h_s^ν назовем компонентами фундаментального тензора. Если вектор имеет в локальной системе составляющие A_s, а в гауссовой системе — координаты A^ν, то по определению h_s^ν имеем:

$$A^\nu = h_s^\nu A_s, \tag{3}$$

или, разрешая относительно A_s,

$$A_s = h_{s\nu} A^\nu. \tag{4}$$

Тензорный характер нормированных миноров $h_{s\nu}$ величин h_s^ν следует из соотношения (4). Величины $h_{s\nu}$ представляют собой ковариантные составляющие фундаментального тензора. Между $h_{s\nu}$ и h_s^ν существуют следующие соотношения:

$$h_{s\mu} h_s^\nu = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 \text{ при } \mu = \nu, \\ 0 \text{ при } \mu \neq \nu, \end{cases} \tag{5}$$

$$h_{s\mu} h_t^\mu = \delta_{st}. \tag{6}$$

В силу ортогональности локальной системы абсолютная величина вектора определяется равенством

$$A^2 = A_s^2 = h_{s\mu} h_{s\nu} A^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu; \tag{6'}$$

следовательно,

$$g_{\mu\nu} = h_{s\mu} h_{s\nu} \tag{7}$$

представляют собой метрические коэффициенты.

Фундаментальный тензор позволяет [см. соотношения (3) и (4)] переводить локальные индексы в координатные и наоборот (умножением и свертыванием), так что вопрос о применении тензоров с индексами различного характера становится чисто формальным.

Ясно, что выполняются также соотношения

$$A_\nu = h_{s\nu} A_s, \tag{3a}$$

$$A_s = h_s^\nu A_\nu. \tag{4a}$$

Кроме того, выполняется соотношение между определителями

$$g = |g_{\sigma\tau}| = |h_{\alpha\sigma}|^2 = h^2, \tag{8}$$

так что инвариантный элементарный объем $\sqrt{g}d\tau$ принимает вид $hd\tau$.

Особый характер времени в нашей 4-мерной модели пространства и времени удобнее всего учитывать, полагая координату x^4 чисто мнимой (как локальную, так и общую), равно как и все составляющие тензоров с нечетным числом индексов 4.

§ 3. Дифференциальные соотношения

Обозначая через δ приращение, получаемое компонентами вектора или тензора при «параллельном переносе» в смысле Леви-Чивиты при переходе к бесконечно близкой точке континуума, имеем в соответствии с изложенным выше

$$0 = \delta A_s = \delta(h_{s\alpha}A^\alpha) = \delta(h_s^\alpha A_\alpha). \tag{9}$$

Раскрывая скобки, получаем

$$h_{s\alpha}\delta A^\alpha + A^\alpha h_{s\alpha,\beta}\delta x^\beta = 0,$$

$$h_s^\alpha \delta A_\alpha + A_\alpha h_{s,\beta}^\alpha \delta x^\beta = 0,$$

причем запятая во втором члене означает, как обычно, дифференцирование по x^β. Разрешая эти уравнения относительно δA^σ и δA_σ, находим

$$\delta A^\sigma = -A^\alpha \Delta_{\alpha\beta}^\sigma \delta x^\beta, \tag{10}$$

$$\delta A_\sigma = A_\alpha \Delta_{\sigma\beta}^\alpha \delta x^\beta, \tag{11}$$

где мы ввели следующее обозначение:

$$\Delta_{\alpha\beta}^\sigma = h_s^\sigma h_{s\alpha,\beta} = -h_{s\alpha} h_{s,\beta}^\sigma. \tag{12}$$

[Последнее преобразование основывается на соотношении (5).]

В противоположность геометрии Римана этот закон параллельного переноса несимметричен. Если он симметричен, то существует эвклидова геометрия, поскольку в таком случае

$$\Delta_{\alpha\beta}^\sigma - \Delta_{\beta\alpha}^\sigma = 0,$$

или

$$h_{s\alpha,\beta} - h_{s\beta,\alpha} = 0;$$

но тогда

$$h_{s\alpha} = \frac{\partial \psi_s}{\partial x_\alpha}.$$

Выбирая ψ_s в качестве новых переменных x'_s, имеем

$$h_{s\alpha} = \delta_{s\alpha}, \tag{13}$$

что и доказывает утверждение.

Ковариантное дифференцирование. Локальные компоненты A_s вектора инвариантны относительно произвольного преобразования координат. Отсюда немедленно следует тензорный характер производных

$$A_{s,\,\alpha}. \tag{14}$$

Заменяя (14) с помощью соотношения (4а) выражением

$$(h_s^\sigma A_\sigma)_{,\,\alpha},$$

доказываем тензорный характер суммы

$$h_s^\sigma A_{\sigma,\,\alpha} + A_\sigma h^\sigma_{s,\,\alpha},$$

а следовательно (после умножения на $h_{s\tau}$), суммы

$$A_{\tau,\,\alpha} + A_\sigma h^\sigma_{s,\,\alpha} h_{s\tau},$$

разности

$$A_{\tau,\,\alpha} - A_\sigma h_s^\sigma h_{s\tau,\,\alpha},$$

а также, согласно (12), и величины

$$A_{\tau,\,\alpha} - A_\sigma \Delta^\sigma_{\tau\alpha}.$$

Это выражение называется ковариантной производной ($A_{\tau;\,\alpha}$) вектора A_τ.

Итак, мы получили правило ковариантного дифференцирования

$$A_{\sigma;\,\tau} = A_{\sigma,\,\tau} - A_\alpha \Delta^\alpha_{\sigma\tau}. \tag{15}$$

Аналогично из соотношения (3) следует также формула

$$A^\sigma_{;\,\tau} = A^\sigma_{,\,\tau} + A^\alpha \Delta^\sigma_{\alpha\tau}. \tag{16}$$

Правила ковариантного дифференцирования тензора получаются теперь аналогичным образом. Поясним на примере:

$$A^\sigma_{\alpha\tau;\,\rho} = A^\sigma_{\alpha\tau,\,\rho} + A^\nu_{\alpha\tau} \Delta^\sigma_{\nu\rho} - A^\sigma_{\alpha\nu} \Delta^\nu_{\tau\rho}. \tag{17}$$

Поскольку с помощью фундаментального тензора h^{α}_{s} локальные (латинские) индексы можно переводить в координатные (греческие), то вопрос о том, какими индексами — локальными или координатными — предпочтительнее пользоваться при формулировании каких-либо тензорных соотношений, остается открытым. Локальные индексы предпочитали применять итальянские авторы (Леви-Чивита, Палатини), тогда как я пользовался преимущественно координатными индексами.

Д и в е р г е н ц и я. Свертывая ковариантные производные, получаем дивергенцию как и в абсолютном дифференциальном исчислении, основанном только на метрике. Например, свертывая (17) по индексам σ и ρ, получаем тензор

$$A_{\alpha\tau} = A^{\sigma}_{\alpha\tau;\,\sigma}.$$

В предыдущих работах мы вводили еще и другие операции дивергенции, но теперь не считаем необходимым приписывать этим операторам особый смысл.

К о в а р и а н т н ы е п р о и з в о д н ы е ф у н д а м е н т а л ь н о г о т е н з о р а. Из выведенных формул нетрудно найти, что ковариантные производные и дивергенции фундаментального тензора обращаются в нуль. Например,

$$h^{\nu}_{s;\,\tau} \equiv h^{\nu}_{s,\,\tau} + h^{\alpha}_{s}\Delta^{\nu}_{\alpha\tau} \equiv \delta_{st}\,(h^{\nu}_{t,\,\tau} + h^{\alpha}_{t}\Delta^{\nu}_{\alpha,\,\tau}) \equiv h^{\alpha}_{s}\,(h_{t\alpha}h^{\nu}_{t,\tau} + \Delta^{\nu}_{\alpha\tau}) =$$
$$= h^{\alpha}_{s}\,(-\Delta^{\nu}_{\alpha\tau} + \Delta^{\nu}_{\alpha\tau}) \equiv 0. \qquad (18)$$

Аналогично

$$h^{\nu}_{s;\,\tau} \equiv g^{\mu\nu}_{;\,\tau} \equiv g_{\mu\nu;\,\tau} \equiv 0. \qquad (18a)$$

Также обращаются в нуль дивергенции $h^{\nu}_{s;\nu}$ и $g^{\mu\nu}_{;\,\nu}$.

Д и ф ф е р е н ц и р о в а н и е п р о и з в е д е н и й т е н з о р о в. Как и в обычном дифференциальном исчислении, ковариантную производную произведения тензоров можно выразить через производные сомножителей. Если $S^{\cdot}_{\cdot}$ и $T^{\cdot}_{\cdot}$ — тензоры с произвольным характером индексов, то

$$(S^{\cdot}_{\cdot}T^{\cdot}_{\cdot})_{;\,\alpha} = S^{\cdot}_{\cdot;\,\alpha}T^{\cdot}_{\cdot} + T^{\cdot}_{\cdot;\,\alpha}S^{\cdot}_{\cdot}. \qquad (19)$$

Отсюда, а также из равенства нулю ковариантных производных фундаментального тензора следует, что фундаментальный тензор можно по желанию вносить или выносить из-под знака ковариантного дифференцирования (;).

«К р и в и з н а». Из гипотезы «абсолютного параллелизма» или из соотношения (9) следует интегрируемость закона параллельного переноса (10) или (11). Отсюда следует

$$0 = -\Delta^{\iota}_{\varkappa\lambda;\mu} \equiv -\Delta^{\iota}_{\varkappa\lambda,\mu} + \Delta^{\iota}_{\varkappa\mu,\lambda} + \Delta^{\sigma}_{\varkappa\mu}\Delta^{\iota}_{\sigma\lambda} - \Delta^{\iota}_{\sigma\mu}\Delta^{\sigma}_{\varkappa\lambda}. \quad (20)$$

Этим условиям должны удовлетворять Δ, если они выражаются через величины h. Из равенства (20) видно, что характерные свойства рассматриваемого здесь многообразия должны в корне отличаться от свойств их в прежней теории. Именно, согласно новой теории, существуют все тензоры старой теории, в частности и риманов тензор кривизны, образованный из символов Кристоффеля. Однако в новой теории существуют также более простые и понятные тензорные величины, которые будут использованы для формулирования законов поля.

Тензор Λ. Дважды выполняя ковариантное дифференцирование скаляра φ, в соответствии с формулой (15), получаем тензор

$$\varphi_{,\sigma,\tau} - \varphi_{,\alpha}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

Переставляя индексы σ и τ и вычитая полученный таким образом тензор из первого, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_{\alpha}}(\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}).$$

Отсюда немедленно следует, что разность

$$\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma} \quad (21)$$

есть тензор. Следовательно, согласно этой теории, существует тензор, содержащий только компоненты $h_{s\alpha}$ фундаментального тензора и их первые производные. Тот факт, что обращение этого тензора в нуль приводит к эвклидовой метрике, был уже доказан раньше [ср. (13)]. Таким образом, естественное определение континуума формулируется условиями, накладываемыми на этот тензор.

Свертывая тензор Λ, получаем вектор

$$\varphi_{\sigma} = \Lambda^{\alpha}_{\sigma\alpha}, \quad (22)$$

который, как я предполагал раньше, должен играть в этой теории роль потенциала электромагнитного поля. Однако недавно я отказался от этого предположения.

Правило перестановки при дифференцировании. Если дважды выполнить ковариантное дифференцирование произвольного тензора T, то получим важное правило перестановки

$$T^{\cdot}_{\cdot;\sigma;\tau} - T^{\cdot}_{\cdot;\tau;\sigma} \equiv -T^{\cdot}_{\cdot;\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}. \quad (23)$$

Доказательство. Если T скаляр (тензор без греческого индекса), то правило перестановки (23) является непосредственным следствием соотношения (15). На этом частном случае мы будем основывать общее доказательство теоремы.

Заметим сначала, что в рассматриваемой теории существуют однородные векторные поля. Они образуются из векторов с одинаковыми компонентами во всех локальных системах. Если (a^α) или (a_α) означает такое векторное поле, то оно, как легко показать, удовлетворяет условию

$$a^\alpha_{;\,\sigma} = 0 \text{ или } a_{\alpha;\,\sigma} = 0.$$

Для простоты будем проводить доказательство для тензора T^λ с единственным индексом. Если φ — скаляр, то из определений (16) и (21) прежде всего следует соотношение

$$\varphi_{;\,\sigma;\,\tau} - \varphi_{;\,\tau;\,\sigma} \equiv -\varphi_{;\,\alpha}\Lambda^\alpha_{\sigma\tau}.$$

Подставляя сюда вместо φ скаляр $a_\lambda T^\lambda$, где a_λ означает однородное векторное поле, можно при каждом ковариантном дифференцировании менять местами a_λ и символ дифференцирования, так что a_λ во все члены входит в виде множителя. Таким образом получаем

$$[T^\lambda_{;\,\sigma;\,\tau} - T^\lambda_{;\,\tau;\,\sigma} + T^\lambda_{;\alpha}\Lambda^\alpha_{\sigma\tau}]\, a_\lambda \equiv 0.$$

Поскольку это тождество должно выполняться при произвольном выборе a_λ, то выражение в квадратных скобках должно обращаться в нуль; тем самым теорема доказана. Обобщение на тензоры с произвольным числом греческих индексов очевидно.

Тождества для тензора Λ. Складывая три тождества, получаемые из (20) путем циклической перестановки индексов $\varkappa$, λ, μ, и объединяя соответствующие члены с учетом равенства (21), получаем

$$0 \equiv (\Lambda^\iota_{\varkappa\lambda,\,\mu} + \Lambda^\iota_{\lambda\mu,\,\varkappa} + \Lambda^\iota_{\mu\varkappa,\,\lambda}) + (\Delta^\iota_{\sigma\varkappa}\Lambda^\sigma_{\lambda\mu} + \Delta^\iota_{\sigma\lambda}\Lambda^\sigma_{\mu\varkappa} + \Delta^\iota_{\sigma\mu}\Lambda^\sigma_{\varkappa\lambda}).$$

Преобразуем это тождество, вводя вместо обычных производных тензора Λ ковариантные [по формуле (17)]; в результате получим

$$0 \equiv (\Lambda^\iota_{\varkappa\lambda;\,\mu} + \Lambda^\iota_{\lambda\mu;\,\varkappa} + \Lambda^\iota_{\lambda\varkappa;\,\lambda}) + (\Lambda^\iota_{\varkappa\alpha}\Lambda^\alpha_{\lambda\mu} + \Lambda^\iota_{\lambda\alpha}\Lambda^\alpha_{\mu\varkappa} + \Lambda^\iota_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha_{\varkappa\lambda}). \qquad (24)$$

Это тождество представляет собой условие, с помощью которого Λ выражаются через h.

Свертывая это тождество по индексам ι и μ, получаем тождество

$$0 \equiv \Lambda^\alpha_{\varkappa\lambda;\,\alpha} + \varphi_{\lambda;\,\varkappa} - \varphi_{\varkappa;\,\lambda} - \varphi_\alpha\Lambda^\alpha_{\varkappa\lambda},$$

или

$$\Lambda^{\alpha}_{\varkappa\lambda;\,\alpha} \equiv \varphi_{\varkappa,\,\lambda} - \varphi_{\lambda,\,\varkappa}, \tag{25}$$

где через φ_λ обозначена величина $\Lambda^{\alpha}_{\lambda\alpha}$ [см. равенство (22)].

§ 4. Уравнения поля

Искомые простейшие уравнения поля представляют собой условия, которым должен удовлетворять тензор $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$. Поскольку число компонент h равно n^2, причем n из них, в силу общей ковариантности, должны оставаться неопределенными, то число независимых уравнений поля должно быть $n^2 - n$. С другой стороны, ясно, что теория тем лучше, чем больше возможностей она исключает (не вступая в противоречие с опытом). Следовательно, число уравнений поля Z должно быть как можно больше. Если через $\bar{Z}$ обозначить число тождественных соотношений между уравнениями поля, то разность $Z - \bar{Z}$ должна быть равна $n^2 - n$.

В соответствии с правилом перестановки дифференцирования,

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu;\,\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau};\,\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} \equiv 0. \tag{26}$$

При этом черта под индексом означает «поднятие» или «опускание» индекса, например,

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} g^{\mu\beta} g^{\nu\gamma},$$

$$\Lambda^{\underline{\alpha}}_{\mu\nu} \equiv \Lambda^{\beta}_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}.$$

Перепишем теперь тождество (26) в виде

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\alpha} - F^{\mu\nu}_{;\,\nu} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}} F_{\sigma\tau} \equiv 0, \tag{26a}$$

где

$$G^{\mu\alpha} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}, \tag{27}$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha}. \tag{28}$$

Предположим теперь, что уравнения поля выбраны так:

$$G^{\mu\alpha} = 0, \tag{29}$$

$$F^{\mu\alpha} = 0. \tag{30}$$

На первый взгляд в этих уравнениях содержится незаконная переопределенность. Ведь их число равно $n^2 + \frac{n(n-1)}{2}$, а число тождеств (26а) для них, как нам известно, равно n. Однако из тождества (25) и уравнения (30) следует, что $\varphi_\varkappa$ можно свести к потенциалу. В соответствии с этим положим

$$F_\varkappa \equiv \varphi_\varkappa - \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^\varkappa} = 0. \tag{31}$$

Это уравнение полностью эквивалентно (30). Уравнение (29) и соотношение (31) вместе образуют $n^2 + n$ уравнений для $n^2 + 1$ функций $h_{s\nu}$ и ψ. Однако между этими уравнениями существует, кроме (26а), еще одна система тождеств, которую мы сейчас найдем.

Обозначая через $\underline{G}^{\mu\alpha}$ антисимметричную часть $G^{\mu\alpha}$, непосредственным вычислением из (27) получаем

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} \equiv -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\,\nu} + \frac{1}{2} S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2} S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} + F^{\mu\alpha}, \tag{32}$$

где для краткости введен антисимметричный по всем индексам тензор

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} + \Lambda^{\nu}_{\underline{\alpha\mu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu\alpha}}. \tag{33}$$

Вычисляя первый член в (32), находим

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} \equiv -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha},\,\nu} - S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\Lambda^{\nu}_{\sigma\nu} + F^{\mu\alpha}. \tag{34}$$

Однако теперь, учитывая соотношение (31), которое является определением $F_\varkappa$, получаем

$$\Delta^{\nu}_{\sigma\nu} - \Delta^{\nu}_{\nu\sigma} \equiv \Lambda^{\nu}_{\sigma\nu} \equiv \varphi_\sigma \equiv F_\sigma = \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^\sigma},$$

или

$$\Delta^{\nu}_{\sigma\nu} = \frac{\partial \ln \psi h}{\partial x^\sigma} + F_\sigma. \tag{35}$$

Поэтому формула (34) принимает вид

$$h\psi\,(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}F_\sigma) = -\frac{\partial}{\partial x^\sigma}(h\psi S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}). \tag{34б}$$

Отсюда, в силу антисимметрии, следует искомая система тождеств:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[h\psi\,(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}F_\sigma)\right] \equiv 0. \tag{36}$$

Она состоит из n тождеств, из которых независимы только $n-1$, поскольку, в силу антисимметрии, $[\quad]_{,\alpha,\mu} \equiv 0$ независимо от конкретного вида функций $G^{\mu\alpha}$ и F_μ.

В тождествах (26а) и (36) подразумевается, что величина $F^{\mu\alpha}$ выражена через F_μ в соответствии с соотношением, вытекающим из уравнения (31)

$$F_{\mu\alpha} \equiv F_{\mu,\alpha} - F_{\alpha,\mu}. \tag{31a}$$

Теперь мы можем доказать совместность уравнений поля (29) и (30), или (29) и (31).

Сначала следует показать, что число уравнений поля, уменьшенное на число (независимых) тождеств, на n меньше числа переменных поля. В самом деле, так как

число уравнений (29) и (31) равно $n^2 + n$,

число (независимых) тождеств равно $n + n - 1$,

число переменных поля равно $n^2 + 1$,

то

$$n^2 + n - (n + n - 1) = (n^2 + 1) - n.$$

Следовательно, число тождеств как раз такое, какое нам нужно. Однако мы не удовлетворимся этим и докажем следующую теорему.

Если в сечении $x^n = \text{const}$ удовлетворяются все дифференциальные уравнения и, кроме того, $(n^2 + 1) - n$ соответствующим образом выбранных из них уравнений удовлетворяются всюду, то и все $n^2 + n$ уравнений будут выполняться всюду.

Доказательство. Пусть все уравнения выполняются в сечении $x^n = a$ и, кроме того, всюду выполняются уравнения, получающиеся путем приравнивания нулю выражений

$$\begin{array}{llll} F_1 & \ldots F_{n-1} & F_n, \\ G^{11} & \ldots G^{1\,n-1} & \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ G^{n-1\,1} & \ldots G^{n-1\,n-1}. & \end{array}$$

Из соотношения (31а) прежде всего следует, что $F^{\mu\alpha}$ также всюду обращаются в нуль. Теперь из тождеств (36) следует, что в соседнем сечении $x^n = a + da$ должны обращаться в нуль и антисимметричные выражения $\underline{G}^{\mu\alpha}$ для $\alpha = n$[1]. Далее, аналогичным образом из тождества (26а) следует, что симметричные выражения $G^{\mu\alpha}$ для $\alpha = n$ должны обращаться в нуль и в бесконечно близком сечении $x^n = a + da$. Повторяя эти рассуждения, нетрудно доказать теорему.

§ 5. Первое приближение

Рассмотрим теперь поле, бесконечно мало отличающееся от эвклидова с обыкновенным параллелизмом. Для этого поля можно положить

$$h_{s\nu} = \delta_{s\nu} + \overline{h}_{s\nu}, \tag{37}$$

где $\overline{h}_{s\nu}$ — бесконечно малые величины первого порядка, а величины более высоких порядков малости опущены. Тогда, в соответствии с соотношениями (5) или (6), можно положить

$$h_s^{\nu} = \delta_{s\nu} - \overline{h}_{s\nu}. \tag{38}$$

Уравнения поля (29) и (30) в первом приближении имеют вид

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\,\nu,\,\nu} - \overline{h}_{\alpha\nu,\,\nu,\,\mu} = 0, \tag{39}$$

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\,\alpha,\,\nu} - \overline{h}_{\alpha\nu,\,\alpha,\,\mu} = 0. \tag{40}$$

Уравнение (40) заменим следующим:

$$\overline{h}_{\alpha\nu,\,\alpha} = \chi_{,\nu}. \tag{40a}$$

Теперь мы утверждаем, что из инфинитезимального преобразования координат $x^{\nu'} = x^{\nu} - \xi^{\nu}$ следует, какие из величин $\overline{h}_{\alpha\nu,\nu}$ и $\overline{h}_{\alpha\nu,\,\alpha}$ должны обращаться в нуль.

Доказательство. Сначала напишем, что

$$\overline{h}'_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} + \xi^{\mu}_{,\,\nu}. \tag{41}$$

Отсюда

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\alpha} = h_{\alpha\nu,\nu} + \xi^{\alpha}_{,\,\nu,\,\nu}.$$

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\alpha} = h_{\alpha\nu,\alpha} + \xi^{\alpha}_{,\alpha,\,\nu}.$$

Правые части с учетом уравнения (40а) равны нулю, если выполняются

[1] Для $x^n = a$ величины $\dfrac{\partial \underline{G}^{\mu n}}{\partial x^n}$ равны нулю.

уравнения

$$\xi^{\alpha}_{,\nu,\nu} = -\overline{h}_{\alpha\nu,\nu}\,,$$
$$\xi^{\alpha}_{,\alpha} = -\chi. \tag{42}$$

Но эти $n+1$ уравнений для n величин ξ^{α} совместны, поскольку в соответствии с уравнением (40а)

$$(-h_{\alpha\nu,\nu})_{,\alpha} - (-\chi)_{,\nu,\nu} = 0. \tag{43}$$

При новом выборе координат уравнения поля имеют вид

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\nu\nu} = 0,$$
$$\overline{h}_{\alpha\mu,\alpha} = 0,$$
$$\overline{h}_{\alpha\mu,\mu} = 0.$$

Разобьем теперь выражение $\overline{h}_{\alpha\mu}$ на две части:

$$\overline{h}_{\alpha\mu} + \overline{h}_{\mu\alpha} = \overline{g}_{\alpha\mu},$$
$$h_{\alpha\mu} - \overline{h}_{\mu\alpha} = a_{\alpha\mu},$$

причем $\delta_{\alpha\mu} + \overline{g}_{\alpha\mu} (= g_{\mu\nu})$ определяют в первом приближении метрику, так что уравнения поля принимают вид

$$\overline{g}_{\alpha\mu,\sigma,\sigma} = 0, \tag{44}$$
$$\overline{g}_{\alpha\mu,\mu} = 0, \tag{45}$$
$$a_{\alpha\mu,\sigma,\sigma} = 0, \tag{46}$$
$$a_{\alpha\mu,\mu} = 0. \tag{47}$$

Напрашивается утверждение, что в первом приближении $\overline{g}_{\alpha\mu}$ определяют гравитационное поле, а $a_{\alpha\mu}$ — электромагнитное поле. Уравнения (44) и (45) соответствуют уравнению Пуассона, а уравнения (46) и (47) — уравнениям Максвелла для пустоты. Интересно, что уравнения для гравитационного поля оказываются в этом приближении независимыми от законов электромагнитного поля, что соответствует опытному факту независимости обоих видов поля. Однако в строгом смысле независимости этих полей в рассматриваемой теории не существует.

Относительно ковариантности уравнений (44) — (47) справедливо следующее. Величины $h_{s\mu}$ в общем случае преобразуются по формуле

$$h'_{s\mu} = \alpha_{st} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\mu'}} h_{t\sigma}.$$

Выбирая преобразования координат линейными и ортогональными, а вращение локальных систем конформным, т. е.

$$x^{\mu'} = \alpha_{\mu\sigma} x^{\sigma}, \tag{48}$$

получаем закон преобразования

$$h'_{s\mu} = \alpha_{st} \alpha_{\mu\sigma} h_{t\sigma}, \tag{49}$$

в точности совпадающий с законом преобразования тензоров в специальной теории относительности. Поскольку в силу преобразования (48) этот же закон выполняется для $\delta_{s\mu}$, то он выполняется и для величин $\bar{h}_{\alpha\mu}$, $\bar{g}_{\alpha\mu}$ и $a_{\alpha\mu}$. Относительно этих преобразований уравнения (44)—(47) ковариантны.

Заключение

Очарование изложенной здесь теории для меня заключается в ее единстве и большой (но разрешенной) степени переопределенности переменных поля. К тому же я показал, что уравнения поля в первом приближении приводят к уравнениям, соответствующим теории Ньютона — Пуассона для гравитационного поля и теории Максвелла — для электромагнитного. Несмотря на это, я далек от мысли, что полученные уравнения на самом деле физически выполняются. Причина этого заключается в том, что мне еще не удалось вывести законы движения для частиц.

Поступила 19 августа 1929 г.

СОВМЕСТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ*

Несколько месяцев назад я изложил математические основы единой теории поля в обзорной статье, опубликованной в «Mathematische Annalen» [1]. В настоящей работе я хочу кратко изложить самое существенное и одновременно указать, в каких пунктах выводы моих прежних работ[2] нуждались в улучшениях. Доказательство совместности здесь несколько упрощено благодаря использованию предложения г-на Картана, за которое я благодарен ему.

§ 1. Критические замечания к моим прежним работам

Введение в работе [1] операции образования дивергенции из тензорной плотности оказалось нецелесообразным. Лучше сохранить определение дивергенции как свертки производной тензора, поскольку лишь при таком определении дивергенция фундаментального тензора тождественно обращается в нуль.

Тождество (3а) или (3б) упомянутой работы в этом случае принимает вид

$$\Lambda^{\alpha}_{\varkappa\iota;\,\alpha} - (\varphi_{\varkappa,\,\iota} - \varphi_{\iota,\,\varkappa}) \equiv 0, \tag{1}$$

где введено обозначение

$$\varphi_{\varkappa} = \Lambda^{\sigma}_{\varkappa\sigma}. \tag{1a}$$

* *Die Kompatibilität der Feldgleichungen in der einheitlichen Feldtheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1930, 18—23.

[1] Math. Ann., 1930, 102, 685. (Статья 98).

[2] [1] «К единой теории поля». Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1929, 2—7 (Статья 91); [2] «Единая теория поля и принцип Гамильтона», Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1929, 156—159. (Статья 94).

Как уже указывалось ранее, доказательство совместности уравнений поля в работе [1] основывается на неправильном предположении, что среди уравнений (10) этой работы существуют четыре тождества.

Вторая из упомянутых работ содержит злосчастную ошибку. В самом деле, неверно, что величины $G^{*\mu\alpha}$ являются однородными квадратичными функциями тензоров $S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}$. Поэтому вывод уравнения (21) работы [2], отождествленного там с уравнением электромагнитного поля, оказывается недостаточно обоснованным.

§ 2. Обзор математического аппарата теории

Структура пространства или поля описывается гауссовыми компонентами h^{ν}_{s} локального ортогонального 4-пода (ν-я компонента s-го пода). Закон преобразования при замене гауссовой системы координат и одинаковом повороте всех локальных 4-подов гласит:

$$h^{\nu'}_{s} = \alpha_{st} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\sigma}} h^{\sigma}_{t}, \tag{2}$$

причем постоянные α_{st} образуют ортогональную систему.

Нормированные миноры $h_{s\nu}$ величин h подчиняются закону преобразования

$$h'_{s\nu} = \alpha_{st} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}} h_{t\sigma}. \tag{3}$$

Системы величин, отличающиеся от h в своих трансформационных свойствах только числом индексов, называются тензорами. Величины ($h_{s\nu}$) или (h^{ν}_{s}) образуют фундаментальный тензор.

Сложение, вычитание и умножение определяются так же, как в обычном тензорном исчислении. Свертывание может производиться только по двум локальным (латинским) или двум координатным (греческим) индексам разного характера.

Поднятие или опускание индексов тензора производится посредством умножения на фундаментальный тензор и последующего свертывания, например,

$$A_{s} = h_{s\nu} A^{\nu}.$$

Так как длина вектора (A) должна определяться произведением $A_s A_s$, то коэффициенты римановой метрики $g_{\mu\nu}$ задаются квадратичной формой

$$g_{\mu\nu} = h_{s\mu} h_{s\nu}. \tag{4}$$

Из определения параллельности локальных 4-подов следует закон (интегрируемого) элементарного параллельного переноса

$$\left.\begin{aligned} \delta A^{\mu} &= -\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha} \delta x^{\beta}, \\ \Delta^{\mu}_{\alpha\beta} &= h^{\mu}_{s} h_{s\alpha,\,\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

причем запятая перед индексом означает обыкновенное дифференцирование. Отсюда следует закон (абсолютного) дифференцирования

$$A^{\mu}{}_{;\,\sigma} = A^{\mu}{}_{,\,\sigma} + A^{\alpha}\Delta^{\mu}_{\alpha\tau}, \tag{6}$$

$$A_{\mu;\,\sigma} = A_{\mu,\,\sigma} - A_{\alpha}\Delta^{\alpha}_{\mu\sigma}. \tag{7}$$

В случае тензоров с несколькими греческими или латинскими индексами соответствующий член появляется для каждого греческого индекса.

Образуя тензор $\Phi_{;\,\sigma;\,\tau}$ двукратным дифференцированием скаляра Φ, а также разность тензоров $(\Phi_{;\,\sigma;\,\tau} - \Phi_{;\,\tau;\,\sigma})$, легко доказать, что величина

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = \Delta^{\alpha}_{\mu\nu} - \Delta^{\alpha}_{\nu\mu} \tag{8}$$

обладает тензорным характером. Обращение в нуль всех величин $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$ является условием эвклидовости континуума.

Вследствие интегрируемости закона параллельного переноса для величин Δ (или благодаря тому, что его можно выразить через величины h) тензор (Λ) удовлетворяет тождеству

$$(\Lambda^{\iota}_{\varkappa\lambda;\,\mu} + \Lambda^{\iota}_{\lambda\mu;\,\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\varkappa;\,\lambda}) + (\Lambda^{\iota}_{\varkappa\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\lambda\mu} + \Lambda^{\iota}_{\lambda\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\mu\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\varkappa\lambda}) \equiv 0, \tag{9}$$

откуда свертыванием получается тождество (1).

Для абсолютного дифференцирования справедливо правило дифференцирования произведения. Ковариантные производные величин h, так же как и величин $g_{\mu\nu}$ (или $g^{\mu\nu}$), тождественно равны нулю. Следовательно, фундаментальный тензор как сомножитель может взаимно переставляться с операцией абсолютного дифференцирования.

Для двукратного абсолютного дифференцирования произвольного тензора $T^{\cdot}_{\cdot}$ (точки означают произвольные индексы) справедливо правило перестановки дифференцирования

$$T^{\cdot}_{\cdot;\,\sigma;\,\tau} - T^{\cdot}_{\cdot;\,\tau;\,\sigma} \equiv -T^{\cdot}_{\cdot;\,\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}. \tag{10}$$

Если тензор T не имеет греческих индексов (скалярный характер), это правило легко доказывается непосредственно; для произвольных тензоров доказательство основывается на том, что при умножении их на параллельные векторы (обладающие всюду нулевой абсолютной производной) получаются скаляры

Если рассматриваемый тензор $T^{\cdot}_{\cdot}$ имеет два контравариантных индекса, то его можно свертывать по этим индексам и по σ или τ; тогда из формулы (10) получается правило перестановки для дивергенции.

Особый характер четырехмерного физического континуума выражается условием, что координата x^4 является чисто мнимой (как и четвертая локальная координата), остальные координаты вещественны. Компоненты тензора чисто мнимы, если они имеют нечетное число индексов 4; в противном случае эти компоненты вещественны.

Наконец, формальное правило: изменение положения греческого индекса («поднятие» или «опускание») может обозначаться также подчеркиванием соответствующего индекса.

§ 3. Уравнения поля и их совместность

Уравнения поля должны быть, конечно, ковариантными; предполагается также, что они являются уравнениями второго порядка и линейными относительно тех переменных поля, которые дважды дифференцируются по координатам. В то время как в прежней общей теории относительности эти требования оказываются достаточными для определения хотя бы уравнений гравитационного поля в пустоте, в излагаемой теории это уже не так. Именно, вследствие тензорного характера величины Λ здесь имеется существенно большее разнообразие тензоров, чем в пределах схемы Римана.

Вследствие общей ковариантности, четыре переменных поля должны оставаться произвольными. Таким образом, на 16 величин h можно налагать только 12 независимых условий. Если же число уравнений поля N больше 12, то между ними должно существовать по меньшей мере $N—12$ тождественных соотношений.

Простой возможности вывести ковариантную систему только из 12 уравнений не существует. Следовательно, необходимо искать уравнения, между которыми имеются тождественные соотношения. Чем больше число уравнений (и, стало быть, число тождественных соотношений между ними), тем более определенные выводы вытекают в теории из требования детерминизма, а следовательно, тем более ценной будет сама теория, если она совместима также с данными опыта [3]. Требование существования «переопределенной» системы уравнений с необходимым числом тождественных соотношений дает нам в руки средство для отыскания уравнений поля.

[3] В прежней теории гравитации, например, для 10 переменных поля существуют 10 уравнений, между которыми имеются четыре тождественных соотношения.

В качестве уравнений поля я предлагаю две системы уравнений:

$$G^{\mu\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\underline{\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0, \tag{11}$$

$$F_{\mu\alpha} = \Lambda^{\sigma}_{\mu\alpha;\,\sigma} = 0; \tag{12}$$

всего $16 + 6$ уравнений для 16 переменных поля $h_{s\nu}$. К этим уравнениям я пришел, применяя к тензору $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$ правило перестановки для дивергенции. В самом деле, имеем

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\nu;\,\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\alpha;\,\nu} \equiv - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha}.$$

Правую часть можно записать так:

$$-(\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha})_{;\,\sigma} + \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha;\,\sigma}.$$

Учитывая это и вводя соответствующие обозначения для «немых» индексов, последнее тождество можно привести к виду:

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\alpha} - F^{\mu\alpha}_{;\,\alpha} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\underline{\tau}}F_{\sigma\tau} \equiv 0. \tag{13}$$

Это и есть 4 тождественных соотношения между величинами, входящими в уравнения (11) и (12), которые послужили основанием для составления последних.

Уравнения (12) в сочетании с тождеством (1) приводят далее к тождеству:

$$F_{\mu\nu,\,\rho} + F_{\nu\rho,\,\mu} + F_{\rho\mu,\,\nu} \equiv 0. \tag{14}$$

Заметим, что уравнения (12) также можно заменить на

$$F_{\mu\alpha} \equiv \varphi_{\mu,\,\alpha} - \varphi_{\alpha,\,\mu} = 0, \tag{12а}$$

или на

$$F_{\mu} \equiv \varphi_{\mu} - \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^{\mu}} = 0, \tag{12б}$$

где ψ — скаляр. Далее величины $F_{\mu\nu}$ можно выразить через F_{μ} благодаря соотношению

$$F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu,\,\nu} - F_{\nu,\,\mu}. \tag{15}$$

Третью систему тождеств мы получаем, образуя $G^{\mu\alpha}_{;\,\mu}$. Сначала из уравнений (11) получаем

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\mu} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\nu;\,\mu} - \Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma}\underline{\mu};\,\mu}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\underline{\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau;\,\mu}.$$

Применяя правило перестановки для дивергенции к тензору $\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ относительно индексов ν и μ, получаем

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\nu;\mu} \equiv -\frac{1}{2}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu\mu}.$$

Заменяя, согласно этому соотношению, первый член в правой части предыдущего тождества, запишем первый и третий члены вместе в следующем виде:

$$-\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\underline{\tau}}\left(\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau;\,\mu}+\frac{1}{2}\Lambda^{\alpha}_{\tau\mu;\,\sigma}\right),$$

или

$$-\frac{1}{2}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\underline{\tau}}(\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau;\,\mu}+\Lambda^{\alpha}_{\tau\mu;\,\sigma}+\Lambda^{\alpha}_{\mu\sigma;\,\tau}).$$

Однако учитывая уравнение (9), можно выразить скобку через сами тензоры Λ, так что получаем

$$+\frac{1}{2}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\underline{\tau}}(\Lambda^{\alpha}_{\sigma\lambda}\Lambda^{\lambda}_{\tau\mu}+\Lambda^{\alpha}_{\tau\lambda}\Lambda^{\lambda}_{\mu\sigma}+\Lambda^{\alpha}_{\mu\lambda}\Lambda^{\lambda}_{\sigma\tau}),$$

или, опуская первый член в скобках и объединяя два других,

$$\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\underline{\tau}}\Lambda^{\lambda}_{\sigma\tau}\Lambda^{\alpha}_{\mu\lambda}.$$

Поэтому получается

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\mu} \equiv -\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}(\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma}\underline{\mu};\,\mu}-\Lambda^{\rho}_{\underline{\sigma}\underline{\lambda}}\Lambda^{\tau}_{\rho\lambda}),$$

или, окончательно,

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\mu}+\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}G^{\sigma\tau} \equiv 0. \tag{16}$$

Равенства (13), (14) и (16) образуют тождества, следующие из уравнений поля (11) и (12).

То, что эти тождества в самом деле удовлетворяют условию совместности уравнений (11) и (12), видно из следующего рассуждения. Можно добиться того, чтобы все уравнения (11) и (12) выполнялись для сечения $x^4 = a$. Равным образом можно добиться того, чтобы выполнялись во всем пространстве те уравнения, которые получаются путем приравнивания нулю величин

$$\begin{matrix} G^{11} & G^{12} & G^{23} \\ G^{21} & G^{22} & G^{23} \\ G^{31} & G^{32} & G^{33} \\ F_{14} & F_{24} & F_{34} \end{matrix}$$

Далее для этих последних уравнений можно так выбрать решение, чтобы оно было непрерывным продолжением решения, заданного для сечения $x^4 = a$. Тогда мы утверждаем, что это решение всюду будет удовлетворять так же уравнениям, которые получаются приравниванием нулю величин

$$G^{14}\ G^{24}\ G^{34}\ G^{41}\ G^{42}\ G^{43}\ G^{44}\ F_{23}\ F_{31}\ F_{12}.$$

Отсюда прежде всего следует, что компоненты F_{14}, F_{24}, F_{34} всюду обращаются в нуль и что с учетом тождества (14) и производные $\frac{\partial F_{23}}{\partial x^4}$, $\frac{\partial F_{31}}{\partial x^4}$, $\frac{\partial F_{12}}{\partial x^4}$ всюду равны нулю. Однако, так как F_{23}, F_{31}, F_{12} равны нулю в сечении $x^4 = a$, то они равны нулю всюду. Далее из тождеств (13) и (16) следует, что в сечении $x^4 = a$ обращаются в нуль производные по x^4 величин G^{14}, G^{41} ... G^{44}; таким образом эти величины, а тем самым и все $G^{\mu\alpha}$ обращаются в нуль в бесконечно близком сечении $x^4 = a + da$. Повторяя эти рассуждения, находим, наконец, что все величины $G^{\mu\alpha}$ также обращаются в нуль всюду. Тем самым получено доказательство совместности уравнений поля (11) и (12).

Первое приближение. Исследуем поля, которые лишь бесконечно мало отличаются от эвклидова частного случая:

$$h_{s\nu} = \delta_{s\nu} + \overline{h}_{s\nu}. \tag{17}$$

При этом величина $\delta_{s\nu}$ равна 1 или 0 соответственно при $s = \nu$ или $s \neq \nu$; величины $\overline{h}_{s\nu}$ представляют собой бесконечно малые (по сравнению с 1). Пренебрегая квадратичными по $\overline{h}$ членами (второго порядка малости), уравнения поля (11) и (12) можно заменить уравнениями

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\nu,\nu} - \overline{h}_{\alpha\nu,\nu,\mu} = 0, \tag{11a}$$

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\alpha,\nu} - \overline{h}_{\alpha\nu,\alpha,\mu} = 0. \tag{12a}$$

Условие (17) все еще допускает бесконечно малое преобразование гауссовых координат. Теперь можно показать, что вследствие уравнений (12а) возможен выбор координат, при котором выполняются уравнения

$$\overline{h}_{\mu\alpha,\alpha} = \overline{h}_{\alpha\mu,\alpha} = 0, \tag{18}$$

причем из уравнений поля остаются только следующие:

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\nu,\nu} = 0. \tag{11б}$$

Обозначая символом $\overline{g}_{\alpha\mu}$ симметричную, а символом $a_{\alpha\mu}$ — антисим метричную часть тензора $\bar{h}_{\alpha\mu}$, можно разбить уравнения поля на две системы:

$$\left.\begin{aligned}\bar{g}_{\alpha\mu,\nu,\nu} &= 0,\\ \bar{g}_{\alpha\mu,\mu} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

и

$$\left.\begin{aligned}a_{\alpha\mu,\nu,\nu} &= 0,\\ a_{\alpha\mu,\mu} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

По-моему, уравнения (19) описывают гравитационное поле, а уравнения (20) — электромагнитное поле, причем величины $a_{\alpha\mu}$ выполняют роль напряженностей электромагнитного поля. При строгом рассмотрении расщепление поля на гравитационное и электромагнитное поле невозможно. Более подробные сведения можно найти в цитированной обзорной статье [4].

Важнейшим вопросом, связанным с уравнениями поля (строгими), является вопрос о несингулярных решениях, которые могли бы изображать электроны и протоны.

Поступила 6 февраля 1930 г.

[4] Статья 98.— *Ред.*

ДВА СТРОГИХ СТАТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ *

(Совместно с В. Майером)

Ниже рассматриваются два частных случая:

а) Сферически симметричное пространство, обладающее одновременно зеркальной симметрией. С физической точки зрения это соответствует внешнему полю электрически заряженного шара с ненулевой массой.

б) Статическое решение, соответствующее произвольному числу покоящихся электрически нейтральных материальных точек.

Примечание. Изложение в § 1 вплоть до равенств (27) содержит строгое математическое доказательство того, что в случае сферической и зеркальной симметрии пространства величины h_s^α при соответствующем выборе координат принимают вид, указанный равенствами (27).

§ 1. Случай сферической симметрии пространства

Мы ищем самый общий трехмерный континуум

$$x_1, x_2, x_3, h_s^\alpha (x_1, x_2, x_3), \quad s, \alpha = 1, 2, 3,$$

обладающий свойством симметрии относительно вращения, т. е. инвариантный относительно группы преобразований:

$$\bar{x}_\alpha = a_{\alpha\beta} x_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $\| a_{\alpha\beta} \|$ — ортогональная матрица.

* *Zwei strenge statische Lösungen der Feldgleichungen der einheitlichen Feldtheorie.* (Mit W. Mayer). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1930, 110—120.

Подстановка (1) переводит точку P (x_1, x_2, x_3) в точку $\overline{P}$ $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ и нормированный трипод h_s^α (x) точки P в трипод точки $\overline{P}$

$$\overline{h}_s^\alpha(\overline{x}) = a_{\alpha\beta} h_s^\beta(x), \qquad s, \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Необходимым и достаточным условием симметрии относительно вращения является существование одинакового для всех точек пространства R_3 «локального вращения» (вращения локальных триподов), переводящего трипод $\overline{h}_s^\alpha(\overline{x})$ в первоначальный трипод $h_s^\alpha(\overline{x})$:

$$\overline{h}_s^\alpha(\overline{x}) = A_{st} h_t^\alpha(\overline{x}), \qquad s, t, \alpha = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Пусть пространство R_3 является эвклидовым на бесконечности, т. е. значения x_1, x_2, x_3 (или по крайней мере значения одной из трех координат) бесконечно возрастают, так что $h_s^\alpha(x)$ стремятся в пределе к $\delta_{s\alpha}$. Для краткости будем писать $h_s^\alpha(\infty) = \delta_{s\alpha}$.

В соответствии с соотношением (2), для бесконечности имеем $\overline{h}_s^\alpha(\overline{x}) = a_{\alpha s}$ и далее, вследствие соотношения (3), $a_{\alpha s} = A_{s\alpha}$. Тогда вместо (3) выполняется соотношение

$$\overline{h}_s^\alpha(\overline{x}) = a_{ts} h_t^\alpha(\overline{x}), \qquad s, t, \alpha = 1, 2, 3, \tag{3'}$$

откуда, сравнивая с соотношением (2), получаем функциональное уравнение для искомых составляющих трипода

$$a_{\alpha\beta} h_s^\beta(x_1, x_2, x_3) = a_{ts} h_t^\alpha(a_{1j}x_j, a_{2j}x_j, a_{3j}x_j), \qquad \alpha, \beta, t, s = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Соотношения (4) переходят в тождества, связывающие величины x_1, x_2, x_3, $a_{\alpha\beta}$, как только матрица $\|a_{\alpha\beta}\|$ становится ортогональной.

Рассмотрим теперь точку $P(x_1, x_2, x_3)$ и выберем для $a_{\alpha\beta}$ трипод

$$a_{\alpha\beta} = {}_{(\alpha)}\xi_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \tag{5}$$

который вследствие соотношений $a_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} = {}_{(\alpha)}\xi_\beta \; {}_{(\alpha)}\xi_\gamma = \delta_{\beta\gamma}$ обладает эвклидовой нормировкой. При этом здесь введено обозначение

$$ {}_{(1)}\xi_\alpha = \frac{x_\alpha}{s}, \qquad s^2 = x_\alpha x_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

При таком выборе матрицы $\|a_{\alpha\beta}\|$ из уравнения (4) получается

$$ {}_{(\alpha)}\xi_\beta h_s^\beta(x_1, x_2, x_3) = {}_{(t)}\xi_s h_t^\alpha(s, 0, 0), \qquad s, t, \alpha = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Умножая уравнение (6) на ${}_{(\alpha)}\xi_\gamma$, получаем

$$h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3) = {}_{(i)}\xi_s\,{}_{(\alpha)}\xi_\gamma h_i^\alpha(s) =$$
$$= {}_{(1)}\xi_s\,{}_{(1)}\xi_\gamma h_1^1(s) + {}_{(1)}\xi_s\,{}_{(\alpha)}\xi_\gamma h_1^\alpha(s) + {}_{(1)}\xi_\gamma\,{}_{(i)}\xi_s h_i^1(s) + {}_{(i)}\xi_s\,{}_{(\alpha)}\xi_\gamma h_i^\alpha(s) \qquad (7)$$

(во второй строке суммирование производится только по индексам 2 и 3). Для $h_i^\alpha(s, 0, 0)$ мы ввели обозначение $h_i^\alpha(s)$. Вследствие равенств (5) уравнение (7) можно записать в виде

$$h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_s x_\gamma}{s^2} h_1^1(s) + \frac{x_s}{s}\,{}_{(\alpha)}\xi_\gamma h_1^\alpha(s) +$$
$$+ \frac{x_\gamma}{s}\,{}_{(i)}\xi_s h_i^1(s) + {}_{(i)}\xi_s\,{}_{(\alpha)}\xi_\gamma h_i^\alpha(s). \qquad (8)$$

Воспользуемся теперь тем, что векторы ${}_{(2)}\xi_\alpha$, ${}_{(3)}\xi_\alpha$, которые должны образовать с вектором ${}_{(1)}\xi_\alpha$ трипод с эвклидовой нормировкой, не определены. Если мы вместо выбранного бипода ${}_{(2)}\xi_\alpha$, ${}_{(3)}\xi_\alpha$ введем в соответствии с уравнениями

$$\left.\begin{aligned} {}_{(2)}\xi_\alpha &= \cos\varphi\,{}_{(2)}\eta_\alpha + \sin\varphi\,{}_{(3)}\eta_\alpha, \\ {}_{(3)}\xi_\alpha &= -\sin\varphi\,{}_{(2)}\eta_\alpha + \cos\varphi\,{}_{(3)}\eta_\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

повернутый на угол φ бипод ${}_{(2)}\eta_\alpha$, ${}_{(3)}\eta_\alpha$, то получим новое представление трипода $h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3)$, в которое входит произвольный угол φ. Это представление имеет вид

$$h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3) = P_{(s\gamma)} + Q_{(s\gamma)}\sin\varphi + R_{(s\gamma)}\cos\varphi +$$
$$+ S_{(s\gamma)}\cos^2\varphi + T_{(s\gamma)}\sin\varphi\cos\varphi. \qquad (10)$$

Так как соотношение (10) выполняется для произвольного φ, получаем

$$h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3) = P_{(s\gamma)}, \quad Q_{(s\gamma)} = R_{(s\gamma)} = S_{(s\gamma)} = T_{(s\gamma)} = 0. \qquad (11)$$

Выполняя эти простые вычисления, из $Q_{(s\gamma)} = 0$, $R_{(s\gamma)} = 0$ получаем

$$h_2^1(s) = h_3^1(s) = h_1^2(s) = h_1^3(s) = 0. \qquad (12)$$

Из равенств $S_{(s\gamma)} = 0$, $T_{(s\gamma)} = 0$ снова следует

$$h_2^2(s) = h_3^3(s), \qquad h_2^3(s) = -h_3^2(s). \qquad (13)$$

Вследствие равенств (12) и (13) уравнение (8) принимает вид

$$h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_s x_\gamma}{s^2} h_1^1(s) + h_2^2(s)\left[{}_{(2)}\xi_s\,{}_{(2)}\xi_\gamma + {}_{(3)}\xi_s\,{}_{(3)}\xi_\gamma\right] +$$
$$+ h_2^3(s)\left[{}_{(2)}\xi_s\,{}_{(3)}\xi_\gamma - {}_{(3)}\xi_s\,{}_{(2)}\xi_\gamma\right]. \qquad (14)$$

Теперь сумма ${}_{(2)}\xi_s\,{}_{(2)}\xi_\gamma + {}_{(3)}\xi_s\,{}_{(3)}\xi_\gamma = \delta_{(s\gamma)} - {}_{(1)}\xi_s\,{}_{(1)}\xi_\gamma$ не зависит от выбора нормированного бипода ${}_{(2)}\xi_s$, ${}_{(3)}\xi_s$. Напротив, величина ${}_{(2)}\xi_s\,{}_{(3)}\xi_\gamma - {}_{(3)}\xi_s\,{}_{(2)}\xi_\gamma$ при перестановке векторов ${}_{(2)}\xi_s$ и ${}_{(3)}\xi_s$ меняет знак.

Если же теперь мы допускаем только преобразования (1), для которых определитель матрицы $\|a_{ik}\|$ равен $+1$, то величина ${}_{(2)}\xi_s\,{}_{(3)}\xi_\gamma - {}_{(3)}\xi_s\,{}_{(2)}\xi_\gamma$ также не будет зависеть от выбора бипода. [В этом случае должно выполняться равенство $|{}_{(\alpha)}\xi_\beta| = 1$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, благодаря чему фиксируется нумерация векторов $({}_{(2)}\xi_\alpha, {}_{(3)}\xi_\alpha)$]. Такие преобразования мы будем называть собственным вращением.

Если мы введем антисимметричный единичный тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, причем $\varepsilon_{123} = 1$, то будет выполняться равенство

$${}_{(2)}\xi_s\,{}_{(3)}\xi_\gamma - {}_{(3)}\xi_s\,{}_{(2)}\xi_\gamma = \varepsilon_{s\gamma\tau}\,{}_{(1)}\xi_\tau,$$

и вместо уравнения (14) можно написать

$$h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_s x_\gamma A(s) + \delta_{s\gamma} B(s) + \varepsilon_{s\gamma\tau} x_\tau C(s), \tag{15}$$

причем величины

$$A(s) = \frac{1}{s^2}\left(h_1^1(s) - h_2^2(s)\right), \qquad B(s) = h_2^2(s), \qquad C(s) = h_2^3(s)\cdot\frac{1}{s} \tag{15'}$$

являются произвольными функциями s, удовлетворяющими лишь условию

$$h_s^\gamma(\infty) = \delta_{s\gamma}.$$

Эта необходимая форма (15) компонент трипода, как показывает простое вычисление, является также достаточной для вращательной симметрии пространства R_3.

Разумеется, следует положить $C(s) = 0$, если допускаются также несобственные вращения (1) ($|a_{\alpha\beta}| = -1$, «отражения»).

Только этот случай мы и будем рассматривать дальше, так что уравнение (15) при условии $C(s) = 0$ будет представлять самую общую форму компонент пода.

Дополним наш континуум $x_1, x_2, x_2, h_s^\alpha(x_1, x_2, x_3)$ до четырехмерного, сопоставляя точке x_1, x_2, x_3, x_4 тетрапод $h_s^\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $s, \alpha = 1, \ldots, 4$ так, что

$$h_s^\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = h_s^\alpha(x_1, x_2, x_3), \quad s, \alpha = 1, 2, 3. \tag{16}$$

Остальные компоненты векторов, также зависящие только от x_1, x_2, x_3, следует определить таким образом, чтобы пространство R_4 было инвариантным относительно группы

$$\bar{x}_\alpha = a_{\alpha\beta} x_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \qquad \bar{x}_4 = x_4. \tag{17}$$

При этом пространство R_4 будет иметь псевдориманову структуру, т. е. метрический тензор $g^{\alpha\beta}$ будет выражаться через нормированный тетрапод $h_s^\alpha(x_1, \ldots, x_4)$ следующим образом [1]:

$$g^{\alpha\beta} = h_1^\alpha h_1^\beta + h_2^\alpha h_2^\beta + h_3^\alpha h_3^\beta - h_4^\alpha h_4^\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, 4. \tag{18}$$

На бесконечности снова имеем

$$h_s^\alpha(\infty) = \delta_{s\alpha}.$$

Преобразование (17) переводит тетрапод $h_s^\alpha(x)$ точки $P(x_1, \ldots, x_4)$ в тетрапод

$$\overline{h}_s^\alpha(\overline{x}) = a_{\alpha\beta} h_s^\beta(x), \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \qquad \overline{h}_s^4(\overline{x}) = h_s^4(x), \qquad s = 1, \ldots, 4. \tag{19}$$

Теперь необходимо произвести обратный поворот, чтобы выполнялось равенство

$$\overline{h}_s^\alpha(\overline{x}) = B_{st} h_t^\alpha(\overline{x}), \qquad s, t, \alpha = 1, 2, 3, 4, \tag{20}$$

причем величины B_{st} являются постоянными.

Из поведения уравнения (19) на бесконечности следует

$$\overline{h}_s^\alpha(\infty) = a_{\alpha s}, \qquad \alpha, s = 1, 2, 3, \qquad \overline{h}_4^\alpha(\infty) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$\overline{h}_s^4(\infty) = h_s^4(\infty) = \delta_{s4}.$$

Подставляя это в уравнение (20), получаем

$$a_{\alpha s} = B_{s\alpha}, \qquad s, \alpha = 1, 2, 3, \qquad B_{4\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$\delta_{s4} = B_{s4}.$$

Вследствие выбора тетрапода (16) уравнения (19), (20) выполняются, если

$$\overline{h}_s^4(\overline{x}) = h_s^4(x) = a_{ts} h_t^4(\overline{x}), \qquad s, t = 1, 2, 3, \tag{21}$$

$$\overline{h}_4^4(\overline{x}) = h_4^4(x) = h_4^4(\overline{x}), \tag{21'}$$

$$\overline{h}_4^\alpha(\overline{x}) = a_{\alpha\beta} h_4^\beta(x) = h_4^\alpha(\overline{x}), \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{21''}$$

Эти уравнения служат функциональными уравнениями для остальных компонент тетрапода.

---

[1] Здесь мы отказываемся от введения мнимых величин, необходимых для получения дефинитного метрического тензора.

Уравнения решаются методом, примененным к уравнению (6); в результате получим

$$h_s^4(x_1, x_2, x_3) = D(s)\,x_s, \qquad s = 1, 2, 3, \tag{22}$$

$$h_4^\alpha(x_1, x_2, x_3) = E(s)\,x_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{22'}$$

$$h_4^4(x_1, x_2, x_3) = F(s). \tag{22''}$$

Так как на бесконечности выполняется равенство $h_s^\alpha(\infty) = \delta_{s\alpha}$, то функции, входящие в уравнения (15) и (22), вблизи $s = \infty$ можно разложить в ряды

$$\begin{gathered} A(s) = \frac{K}{s^a}(1 + (\cdot)), \qquad a > 2, \qquad B = 1 + (\cdot), \\ F = 1 + (\cdot), \qquad C, D, E = \frac{K}{s^b}(1 + (\cdot)), \qquad b > 1, \end{gathered} \tag{23}$$

причем скобки $(\cdot)$ содержат множитель $\frac{1}{s}$.

В системе координат

$$\bar{x}_i = \varphi(s)\,x_i, \qquad i = 1, 2, 3, \qquad \bar{x}_4 = x_4, \tag{24}$$

в которой трипод x_1, x_2, x_3, $h_\alpha^s(x_1, x_2, x_3)$, $\alpha = 1, 2, 3$, также обладает вращательной симметрией при соответствующем выборе функции φ:

$$\varphi = e^{-\int \frac{A s\,ds}{B + A s^2}}, \tag{25}$$

можно добиться, чтобы в уравнении (15) член с функцией A обращался в нуль. Так как на бесконечности φ стремится к конечному значению, то для новых значений $\bar{B}(s)$, $\bar{F}(s)$, $\bar{C}(s)$, $\bar{D}(s)$, $\bar{E}(s)$, как показывает простое вычисление, выполняются условия (23).

Дальнейшим преобразованием координат

$$\bar{x}_4 = x_4 + \psi(s), \tag{26}$$

снова можно обратить в нуль функцию $D(s)$ в уравнении (22); в новой системе координат по-прежнему выполняются соотношения (23). Другими словами, не нарушая общности, можно предположить, что $A(s) = D(s) = 0$.

Далее мы предполагали, что наш трипод x_1, x_2, x_3, $h_s^\alpha(x_1, x_2, x_3)$ инвариантен также и относительно зеркального отражения; с этим связано обращение в нуль функции $C(s)$ в уравнении (15). В результате тетрапод (15), (22) приобретает следующий наиболее общий вид:

$$\begin{aligned} &h_s^\alpha = \lambda(s)\,\delta_{s\alpha}, && \alpha, s = 1, 2, 3, && h_s^4 = 0, && s = 1, 2, 3, \\ &h_4^\alpha = \tau(s)\,x_\alpha, && \alpha = 1, 2, 3, && h_4^4 = \mu(s), && \end{aligned} \tag{27}$$

причем мы для оставшихся функций ввели новые обозначения.

Будем теперь искать решения уравнений $G^{\mu\alpha} = 0$, $F^{\mu\alpha} = 0$ единой теории поля вида (27).

Обозначим через $k_{s\beta}$, $s, \beta = 1, 2, 3, 4$ ковариантный тетрапод, сопряженный тетраподу h_s^α и определенный системой

$$h_s^\alpha k_{s\beta} = \delta_\beta^\alpha, \qquad s, \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \tag{28}$$

(при этом $k_{s\alpha} = h_{s\alpha}$, $s = 1, 2, 3$, $k_{4\alpha} = -h_{4\alpha}$). Тогда в соответствии с уравнением (27) этот тетрапод будет иметь компоненты

$$\begin{aligned} &k_{s\alpha} = \frac{1}{\lambda}\,\delta_{s\alpha}, && \alpha, s = 1, 2, 3, && k_{s4} = -\frac{\tau}{\mu\lambda}\,x_s, && s = 1, 2, 3, \\ &k_{4\alpha} = 0, && \alpha = 1, 2, 3, && k_{44} = \frac{1}{\mu}. && \end{aligned} \tag{29}$$

Теперь выпишем необходимые нам в дальнейшем формулы. Величины

$$\Delta_{ik}^l = -\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial h_s^l}{\partial x_k}\,k_{si} - \frac{\partial h_4^l}{\partial x_k}\,k_{4i}$$

вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\Delta_{i4}^l = 0, \quad i, l = 1, \ldots 4, \\ &\Delta_{ik}^l = -\frac{\partial \ln\lambda}{\partial x_k}\,\delta_{il}, \qquad i, k, l = 1, \ldots 3, \qquad \Delta_{ik}^4 = 0, \qquad i, k = 1, \ldots 3, \\ &\Delta_{4k}^l = -\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\tau}{\lambda}\,x_l\right) = -\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\tau}{\lambda}\,x_k\right), \qquad k, l = 1, \ldots 3, \\ &\Delta_{4k}^4 = -\frac{\partial \ln\mu}{\partial x_k}, \qquad k = 1, \ldots 3. \end{aligned} \tag{30}$$

Отсюда для величин $\Lambda_{ik}^l = \Delta_{ik}^l - \Delta_{ki}^l$, $i, k, l = 1, \ldots 4$ получаются выражения

$$\begin{aligned} &\Lambda_{ik}^l = \frac{\partial \ln\lambda}{\partial x_i}\,\delta_{kl} - \frac{\partial \ln\lambda}{\partial x_k}\,\delta_{il}, && i, k, l = 1, \ldots 3, \\ &\Lambda_{i4}^l = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\tau}{\lambda}\,x_l\right), && i, l = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &\Lambda^4_{ik} = 0, && i, k = 1, 2, 3, \\ &\Lambda^4_{4k} = -\frac{\partial \ln \mu}{\partial x_k}, && k = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{31}$$

Далее нам необходим контравариантный метрический тензор, компоненты которого имеют вид

$$\begin{aligned} &g^{\alpha\beta} = \lambda^2\delta_{\alpha\beta} - \tau^2 x_\alpha x_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \\ &g^{4\alpha} = -\mu\tau x_\alpha, \\ &g^{44} = -\mu^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Решим сначала систему уравнений поля $F^{\mu\nu} \equiv \Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu}; \alpha} = 0$, или $\varphi_{\mu, \nu} - \varphi_{\nu, \mu} = 0$, где введено обозначение $\varphi_\mu = \Lambda^\alpha_{\mu\alpha}$. Вследствие равенств (31) имеем

$$\varphi_i = \Lambda^\alpha_{i\alpha} = \xi_i\left(\frac{\mu'}{\mu} + 2\frac{\lambda'}{\lambda}\right), \qquad \xi_i = \frac{x_i}{s}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{33}$$

$$\varphi_4 = \Lambda^\alpha_{4\alpha} = -\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_\alpha\right), \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{33'}$$

Система $\varphi_{i, k} - \varphi_{k, i} = 0$, $i, k = 1, 2, 3$ удовлетворяется тождественно, и остается только уравнение $\varphi_{4, i} - \varphi_{i, 4} = 0$, или, так как $\varphi_{i, 4} = 0$, то $\varphi_{4, i} = 0$, т. е.

$$\varphi_4 = \text{const}. \tag{34}$$

В соответствии с равенствами (33′) это приводит к уравнению

$$\frac{\lambda}{\mu}\left[\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)' s + 3\frac{\tau}{\lambda}\right] = k, \qquad k = \text{const}, \tag{35}$$

которое можно также записать в виде

$$\left(\frac{\tau}{\lambda}s^3\right)' = k\frac{\mu}{\lambda}s^2, \tag{36}$$

или после интегрирования:

$$\frac{\tau}{\lambda}s^3 = k\int\frac{\mu}{\lambda}s^2\,ds + k_1, \qquad k_1 = \text{const}. \tag{36'}$$

На бесконечности величины λ, μ, τ можно разложить в ряды $\lambda = 1 + (\cdot)$, $\mu = 1 + (\cdot)$, $\tau = \frac{c}{s^b}(1 + (\cdot))$, $b > 1$, откуда, согласно уравнению (36′), следует $k = 0$ или (после замены $k_1 = e$)

$$\tau = e\frac{\lambda}{s^3}, \qquad e = \text{const}. \tag{37}$$

Итак, система $F^{\mu\nu}=0$ исчерпана.

Рассмотрим теперь другую систему уравнений поля:

$$G^{\mu\alpha}\equiv\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\nu}-\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\underline{\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}=0, \qquad (38)$$

которой простым преобразованием мы придадим вид

$$0=G^{\alpha}_{\sigma}\equiv g^{\nu\rho}\left[\frac{\partial\Lambda^{\alpha}_{\sigma\rho}}{\partial x_{\nu}}-\Delta^{j}_{\sigma\nu}\Lambda^{\alpha}_{j\rho}-\Delta^{j}_{\rho\nu}\Lambda^{\alpha}_{\sigma j}+\Delta^{\alpha}_{\nu j}\Lambda^{j}_{\sigma\rho}\right],\quad \alpha,\ \sigma=1,\ldots 4. \qquad (39)$$

Сначала мы рассмотрим подсистему $\alpha=4$, $\sigma\neq 4$, для которой из уравнений (39) получим

$$0=g^{4\rho}\left[\frac{\partial\Lambda^{4}_{\sigma 4}}{\partial x_{\rho}}-\Delta^{j}_{\sigma\rho}\Lambda^{4}_{j4}-\Delta^{4}_{\sigma 4}\Lambda^{4}_{\rho 4}+\Delta^{4}_{4j}\Lambda^{j}_{\sigma\rho}\right]+g^{44}\Delta^{4}_{4j}\Lambda^{j}_{\sigma 4}. \qquad (40)$$

Выполняя вычисления в соответствии с равенствами (31) и (32), получаем

$$\tau\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)'s+s\frac{\lambda'\mu'}{\lambda\mu}\tau-\frac{\mu'\lambda}{\mu}\left[\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)'s+\frac{\tau}{\lambda}\right]+\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{2}s\tau=0. \qquad (41)$$

В соответствии с уравнением (35) ($k=0$!) имеем

$$\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)'s+\frac{\tau}{\lambda}=-\frac{2\tau}{\lambda}.$$

Для $\tau=0$ уравнение (41) выполняется, и поэтому, полагая $\tau\neq 0$, мы можем сократить на τ уравнение (41); тогда получим

$$\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)'s+s\frac{\lambda'\mu'}{\lambda\mu}+2\frac{\mu'}{\mu}+s\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{2}=0, \qquad (41')$$

что непосредственно ведет к соотношению

$$\mu'\lambda s^{2}=\mathrm{const} \qquad (42)$$

и далее к формуле

$$\mu=k\int\frac{ds}{\lambda s^{2}}+k_{1}. \qquad (43)$$

Так как на бесконечности λ и μ стремятся к единице, то $k_1=1$ и, следовательно,

$$\mu=1+m\int\frac{ds}{\lambda s^{2}},\qquad m=\mathrm{const}. \qquad (44)$$

Найдем теперь решение подсистемы $\alpha\neq 4$, $\sigma=4$ уравнений (39). Для этой подсистемы имеем

$$g^{\nu\rho}\left[\frac{\partial\Lambda^{\alpha}_{4\rho}}{\partial x_{\nu}}-\Delta^{j}_{4\nu}\Lambda^{\alpha}_{j\rho}-\Delta^{j}_{\rho\nu}\Lambda^{\alpha}_{4j}+\Delta^{\alpha}_{\nu j}\Lambda^{j}_{4\rho}\right]+g^{4\rho}\left[\Delta^{\alpha}_{4j}\Lambda^{j}_{4\rho}\right]=0. \qquad (45)$$

Выполняя вычисления, получаем

$$\left(1-\frac{e^2}{s^4}\right)\left[2\lambda^2 e\left(\frac{\lambda}{\mu s^3}\right)'+2\frac{\mu'\lambda^3 e}{\mu^2 s^3}\right]+\frac{6\lambda^3 e}{\mu s^4}-\frac{4e^3\lambda^3}{\mu s^8}=0. \tag{46}$$

Вследствие равенства

$$\frac{6\lambda^3 e}{\mu s^4}-\frac{4e^3\lambda^3}{\mu s^8}=\frac{2\lambda^3 e}{\mu s^4}+\frac{4\lambda^3 e}{\mu s^4}\left(1-\frac{e^2}{s^4}\right),$$

из уравнения (46) получаем

$$\left(1-\frac{e^2}{s^4}\right)\left[\lambda^2\left(\frac{\lambda}{\mu s^3}\right)'+\frac{\mu'\lambda^3}{\mu^2 s^3}+\frac{2\lambda^3}{\mu s^4}\right]+\frac{\lambda^3}{\mu s^4}=0. \tag{47}$$

Мы сократили это уравнение на $2e$; условие $e=0$ удовлетворяет уже уравнению (46).

Элементарное вычисление дает

$$\left(1-\frac{e^2}{s^4}\right)\left(\ln\frac{\lambda}{s}\right)'+\frac{1}{s}=0, \tag{48}$$

следовательно,

$$\ln\frac{\lambda}{s}=-\int\frac{ds}{s\left(1-\frac{e^2}{s^4}\right)}+k=-\ln\sqrt[4]{s^4-e^2}+k,$$

или, наконец,

$$\lambda=c\,\frac{s}{\sqrt[4]{s^4-e^2}}. \tag{49}$$

Так как на бесконечности $\lambda=1$, то следует положить $c=1$. Тогда окончательно получаем

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{e^2}{s^4}}}. \tag{50}$$

В соответствии с равенствами (37), (44) и (50) функции λ, μ, τ, характеризующие случай вращательной симметрии, нам уже известны.

Функции (37), (44) и (50) должны тождественно удовлетворять также и не рассмотренным нами уравнениям (39) при $\alpha=\sigma=4$ и $\alpha,\ \sigma\neq 4$.

Для $\alpha=\sigma=4$ уравнение (39) принимает вид

$$g^{\nu\rho}\left[\frac{\partial\Lambda^4_{4\rho}}{\partial x_\nu}-\Delta^4_{4\nu}\Lambda^4_{4\rho}-\Delta^j_{\rho\nu}\Lambda^4_{4j}\right]+g^{4\rho}\Delta^4_{4j}\Lambda^j_{4\rho}=0, \tag{51}$$

или

$$(\lambda^2\delta_{\nu\rho} - \tau^2 x_\nu x_\rho)\left[-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\mu'}{\mu}\xi_\rho\right) - \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 \xi_\nu\xi_\rho - \frac{\lambda'\mu'}{\lambda\mu}\xi_\nu\xi_\rho\right] - \\ - \tau\mu x_\rho \frac{\lambda\mu'}{\mu^2}\xi_j \frac{\partial}{\partial x_\rho}\left(\frac{\tau}{\lambda} x_j\right) = 0. \qquad (51')$$

Этому уравнению действительно удовлетворяют функции (37), (44) и (50).

При $\alpha, \sigma \neq 4$ уравнение (39) имеет вид

$$(\lambda^2\delta_{\nu\rho} - \tau^2 x_\nu x_\rho)\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\lambda'}{\lambda}(\xi_\sigma\delta_{\rho\alpha} - \xi_\rho\delta_{\sigma\alpha})\right) + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 \xi_\nu\delta_{j\sigma}(\xi_j\delta_{\rho\alpha} - \xi_\rho\delta_{j\alpha}) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 \xi_\nu\delta_{j\rho}(\xi_\sigma\delta_{j\alpha} - \xi_j\delta_{\sigma\alpha}) - \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 \xi_j\delta_{\nu\alpha}(\xi_\sigma\delta_{j\rho} - \xi_\rho\delta_{j\sigma})\right] + \\ + \lambda'\tau x_\rho \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\tau}{\lambda} x_\alpha\right)(\xi_\sigma\delta_{j\rho} - \xi_\rho\delta_{j\sigma}) - \mu\tau x_\nu\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_\alpha\right)\right) + \right. \\ + \frac{\lambda'}{\mu}\xi_\nu\delta_{j\sigma}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_\alpha\right) + \frac{\lambda'}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_j\right)\left(\xi_\sigma\delta_{j\alpha} - \xi_j\delta_{\sigma\alpha}\right) + \\ \left. + \frac{\mu'}{\mu}\xi_\nu\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_\alpha\right) - \frac{\lambda'}{\mu}\xi_j\delta_{\nu\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_j\right)\right] + \\ + \lambda^2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_\alpha\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_\sigma\right) = 0. \qquad (52)$$

Этому уравнению также удовлетворяют функции (37), (44) и (50). Это вычисление, требующее только некоторой внимательности, предлагаем выполнить читателю.

Отметим результат: тетрапод

$$\begin{aligned} h_s^\alpha &= \frac{\delta_{s\alpha}}{\sqrt[4]{1-\dfrac{e^2}{s^4}}}, \qquad \alpha, s = 1, 2, 3, \qquad h_s^4 = 0, \\ h_4^\alpha &= \frac{e}{\sqrt[4]{1-\dfrac{e^2}{s^4}}}\,\frac{x_\alpha}{s^3}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \qquad h_4^4 = 1 + m\int\sqrt[4]{1-\frac{e^2}{s^4}}\,\frac{ds}{s^2} \end{aligned} \qquad (53)$$

представляет собой наиболее общее решение для случая центральной симметрии (зеркальной симметрии). Что касается физической интерпретации, то, по нашему мнению, под e следует понимать электрический заряд и под m — пондеромоторную массу. Эта интерпретация сама по себе произвольна, несмотря на то, что она соответствует смыслу поля, проявляющемуся при рассмотрении уравнений поля в первом приближении. Примечательно, что при этом появляются две и только две постоянные, которые должны быть получены из опыта.

§ 2. Статическое чисто гравитационное поле

Из уравнений (53) следует, что для нулевого заряда e все величины h_s^α, кроме h_4^4, становятся постоянными, в то время как $h_4^4 = 1 - \frac{m}{s}$. Этот результат заставляет предполагать, что он соответствует статическим решениям общего вида, для которых переменной является только величина h_4^4. Поэтому, полагая

$$h_s^\alpha = \delta_{s\alpha}, \qquad s = 1, 2, 3, \qquad h_4^\alpha = \delta_{4\alpha} \cdot \sigma(x_1, x_2, x_3), \tag{1}$$

находим, что все величины $\Delta_{\alpha\beta}^\gamma$ равны нулю, кроме

$$\Delta_{4\beta}^4 = \Lambda_{4\beta}^4 = -k_{44} h_{4,\beta}^4 = -\frac{\partial \ln \sigma}{\partial x_\beta}. \tag{2}$$

Тогда тождественно выполняются все уравнения поля, кроме

$$G_4^4 = g^{\nu\rho}\left[\frac{\partial \Lambda_{4\rho}^4}{\partial x_\nu} - \Delta_{4\nu}^4 \Lambda_{4\rho}^4\right] = 0, \tag{3}$$

или

$$0 = \sum_\rho \left(\frac{\partial \Lambda_{4\rho}^4}{\partial x_\rho} - \Delta_{4\rho}^4 \Delta_{4\rho}^4\right) = \sum_\rho \left(\frac{\partial^2 \ln \sigma}{\partial x_\rho^2} + \frac{\partial \ln \sigma}{\partial x_\rho}\frac{\partial \ln \sigma}{\partial x_\rho}\right). \tag{3'}$$

Отсюда для σ получаем

$$\sum_\rho \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_\rho^2} = 0, \tag{4}$$

т. е. σ является потенциалом.

Так как на бесконечности σ стремится к единице, то решение (в случае конечного числа материальных точек) будет

$$\sigma = 1 + \sum_j \frac{m_j}{r_j}, \qquad m_j = \text{const}. \tag{5}$$

Этот строгий результат имеет важное значение, в связи с физической интерпретацией теории, по следующей причине. Формула (5) показывает, что существует строгое решение, соответствующее случаю, когда две (или больше) несвязанные электрически нейтральные массы покоятся на произвольном расстоянии друг от друга. Такому случаю в природе ничто не соответствует. Отсюда можно сделать вывод, что теория не отвечает опыту. Это было бы действительно верно, если бы из уравнений поля можно вывести закон движения сингулярных точек, как это было в первоначальном варианте теории. Однако в излагаемой теории, по-видимому, этого сделать нельзя [2].

Таким образом, существование рассмотренного статического решения не может быть аргументом в пользу физической применимости теории. Однако легко видеть, что в новой теории следует требовать регулярности тех решений, которые должны изображать элементарные частицы вещества.

До тех пор, пока такие решения не найдены, вывести закон движения частиц из уравнений поля, вероятно, невозможно.

Поступила 11 марта 1930 г.

[2] Возможность вывести закон движения в прежнем варианте теории обусловлена тем, что там в уравнение поля входят симметричные тензоры, дивергенция которых равна нулю. Однако в излагаемой теории это условие не выполняется.

К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ С РИМАНОВОЙ МЕТРИКОЙ И АБСОЛЮТНЫМ ПАРАЛЛЕЛИЗМОМ*

Ниже излагается одно общее свойство пространств с римановой метрикой и абсолютным параллелизмом, причем вопрос о их физическом смысле пока не рассматривается[1].

Пусть $(T^{\mu\nu})$ — тензор, который кроме контравариантных индексов μ и ν может иметь и другие индексы. В этом случае всегда справедливо правило перестановки при дифференцировании:

$$T^{\mu\nu}_{;\sigma;\tau} - T^{\mu\nu}_{;\tau;\sigma} \equiv - T^{\mu\nu}_{;\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}. \tag{1}$$

Отсюда после свертывания получаем

$$T^{\mu\nu}_{;\nu;\mu} - T^{\mu\nu}_{;\mu;\nu} \equiv T^{\mu\nu}_{;\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}. \tag{1a}$$

После простого преобразования отсюда следует тождество

$$[(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu})_{;\nu} - T^{\sigma\tau}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}]_{;\mu} + T^{\sigma\tau}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau;\alpha} = 0. \tag{2}$$

В тождество (2) входит только антисимметричная часть тензора T. Поэтому без ограничения общности можно предположить, что тензор T относительно рассматриваемых индексов является антисимметричным. Тогда тождество (2) принимает вид

$$\left[T^{\mu\nu}_{;\nu} - \frac{1}{2}T^{\sigma\tau}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}\right]_{;\mu} + \frac{1}{2}T^{\sigma\tau}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau;\mu} = 0. \tag{2a}$$

Это соотношение можно преобразовать дальше, используя тождество,

* *Zur Theorie der Räume mit Riemann-Metrik und Fernparallelismus.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1930, 401—402

[1] Здесь предполагается известным содержание работы «Совместность уравнений единой теории поля» (этот же журнал, стр. 18—23). (Статья 99.— *Ред.*).

следующее из интегрируемости параллельного переноса:

$$\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau;\,\mu} \equiv \varphi_{\sigma,\,\tau} - \varphi_{\tau,\,\sigma} \quad (\varphi_{\sigma} = \Lambda^{\alpha}_{\sigma\alpha}), \tag{3}$$

или

$$\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau;\,\mu} \equiv \varphi_{\sigma;\,\tau} - \varphi_{\tau;\,\sigma} + \varphi_{\mu}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}. \tag{3a}$$

С помощью (3а) получаем

$$\frac{1}{2} T^{\sigma\tau}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau;\,\mu} \equiv (T^{\sigma\tau}\varphi_{\sigma})_{;\,\tau} - \varphi_{\sigma}T^{\sigma\tau}_{\ \ ;\,\tau} + \frac{1}{2}\varphi_{\mu}T^{\sigma\tau}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}.$$

Подставляя правую часть этого тождества в (2а) и вводя символ дивергенции

$$A^{\nu}_{\ |\,\nu} = A^{\nu}_{\ ;\,\nu} - \varphi_{\nu}A^{\nu}, \tag{4}$$

где A^{ν} — тензор произвольного ранга с контравариантным индексом ν, получаем

$$\left.\begin{aligned} &U^{\mu}_{\ |\,\mu} \equiv 0, \\ &U^{\mu} = T^{\mu\nu}_{\ \ |\,\nu} - \frac{1}{2}T^{\sigma\tau}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Таким образом, применяя линейную дифференциальную операцию, можно из любого тензора T с антисимметричной парой индексов $\mu\nu$ получить тензор U^{μ} ранга, меньшего на единицу с дивергенцией, тождественно равной нулю.

Так, например, из тензора

$$L^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}} + a(\varphi_{\mu}g^{\nu\alpha} - \varphi_{\nu}g^{\mu\alpha}) + bS^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}, \tag{6}$$

где a, b — произвольные постоянные и

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu}\underline{\alpha}} + \Lambda^{\nu}_{\underline{\alpha}\underline{\mu}}, \tag{7}$$

можно получить тензор

$$G^{\mu\alpha} = L^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}\,|\,\nu} - \frac{1}{2}L^{\alpha}_{\underline{\sigma}\underline{\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}, \tag{8}$$

дивергенция которого по μ тождественно обращается в нуль:

$$G^{\mu\alpha}_{\ \ |\,\mu} \equiv 0. \tag{8a}$$

Отсюда следует, что система уравнений

$$G^{\mu\alpha} = 0 \tag{9}$$

является совместной системой для величин h^{ν}_{s}, которые могут, вообще говоря, быть просто постоянными a и b.

О СОВРЕМЕННОМ СОСТОЯНИИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

§ 1. Принципы

В основе общей теории относительности лежат следующие идеи.

1. Как и в прежних теориях, ставится цель построить модель реальности в виде четырехмерного континуума, которую мы будем кратко называть «пространством».

2. В противоположность прежней физике выдвигается требование, чтобы функции координат, предназначенные для описания реальности, удовлетворяли законам, как можно более простым *с точки зрения общей теории относительности.*

Последний пункт выражает общий принцип относительности. Она представляет собой чисто формальную точку зрения, а не какую-то определенную гипотезу о природе. Ибо всякую систему законов, вообще имеющую смысл, можно выразить в общековариантной форме. Тем не менее этот принцип имеет большое эвристическое значение. Ибо в общем случае нерелятивистские теории, кажущиеся простыми при использовании определенной системы координат, выглядят в высшей степени сложными и неестественными, если их уравнения переводятся в общековариантную форму. Это относится, например, к ньютоновской теории тяготения и закону движения. С другой стороны, очевидно, что этот принцип представляет собой методическое достижение. Ибо нерелятивистская теория содержит не только высказывания об *объектах*, но и высказывания, относящиеся к объектам *и к координатным системам*, служащим для их описания. Следовательно, с логической точки зрения такая теория менее удовлетворительна, чем релятивистская, высказывания которой не зависят от выбора координат.

* *Über den gegenwärtigen Stand der allgemeinen Relativitätstheorie.* Yale University Library Gazette, VI, 1930, 3—6.

По поводу пункта 1 замечу, что он не согласуется с программой квантовой механики в ее современной форме; ведь квантовая механика отказывается конструировать модель реальности на таком пути. Входящие в ее уравнения переменные описывают только вероятности, а не действительные состояния.

Из сказанного уже следует, что *один только* общий принцип относительности не может быть достаточной формальной основой теории. Современная общая теория относительности основывается, кроме того, на следующих посылках.

3. В (четырехмерном) пространстве имеет объективный смысл определенная метрика Римана:

$$ds^2 = g_{uv} dx^u dx^v. \tag{1}$$

Эта аксиома основывается в первую очередь на уже известном из специальной теории относительности «принципе постоянства скорости света» ($ds = 0$). Но она соответствует также характеру природы, в которой, по-видимому, осуществляется *подобие* в бесконечно малом. (Независимость элементарных тел, а также равенства масштабов от их предыстории.)

4. Существует вопрос, можно ли считать функции, входящие в уравнения, всюду регулярными или же материальные точки, к примеру, должны выражаться через сингулярности. Это — вопрос открытый. Однако я придерживаюсь мнения, что сингулярности следует исключить.

§ 2. Критика существовавшей до сих пор формы общей теории относительности

Предположим, что переменные g_{uv} описывают метрику пространства (физически выражаемую как совокупность измерений с помощью масштабных линеек и часов), а также гравитационное поле. Для описания электромагнитного поля необходимы новые переменные φ_i, которые проще всего ввести с помощью линейной формы

$$\varphi_i dx^i. \tag{2}$$

В качестве уравнений поля наряду с релятивистскими обобщенными уравнениями Максвелла появляются «уравнения гравитации»:

$$R_{ik}' = T_{ik}. \tag{3}$$

В левой части этого уравнения стоит «тензор кривизны» определяемый только величинами g_{ik}, в правой — тензор энергии Максвелла. Не говоря о преимуществах этой теории, я сразу перейду к рассмотрению ее недостатков.

1. Обобщенные уравнения Максвелла,

$$\frac{\partial f^{uv}}{\partial x^v} = 0, \tag{4}$$

равно как и тесно связанные с ними уравнения (3), исключают существование несингулярных заряженных частиц, как вытекает из уравнения (4), на основании интегральной теоремы Гаусса.

2. Полевые переменные не отвечают единой концепции о структуре континуума.

3. Левая и правая части уравнений поля (3) взаимосвязываются произвольным образом (т. е. без логической необходимости).

Поэтому следует искать такие пространственные структуры, которые наряду с метрикой Римана содержат и другие структурные элементы. Далее будет дана характеристика структуры такого рода, разрабатываемая мной в настоящее время.

§ 3. Метрика Римана с абсолютным параллелизмом

Континуум с метрикой Римана можно охарактеризовать следующим образом: в каждой точке существует локальный ортогональный n-под (n — число измерений), относительно которого в бесконечно малом выполняется теорема Пифагора. Эти n-поды независимо друг от друга могут поворачиваться на произвольные углы, не изменяя при этом описываемой ими метрики Римана. Но предположим теперь дополнительно, что каждому направлению в точке P взаимно однозначно соответствует определенное направление в произвольной точке Q этого континуума, так что ортогональным направлениям в P соответствуют ортогональные направления в Q.

Тогда можно выбрать локальные ортогональные n-поды таким образом, чтобы соответственные n-поды во всех точках пространства были взаимно параллельны. Такую структуру пространства можно описывать проекциями n-подов на гауссову систему координат (h_s^v — v-компонента s-го пода). Если h_{sv} суть принадлежащие h_s^v нормированные миноры, то метрика Римана выражается соотношением

$$g_{uv} = h_{su} h_{sv}. \tag{5}$$

Математическая проблема заключается в следующем: каковы формально самые естественные законы, которым можно подчинить h-поле? Имеют ли эти законы какое-нибудь отношение к законам физического пространства?

Декабрь 1930

ГРАВИТАЦИОННОЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЯ *

С тех пор как в 1915 г. была сформулирована общая теория относительности, теоретики настойчиво пытались найти общую основу для законов гравитационного и электромагнитного полей. Трудно было думать, что эти поля соответствуют двум пространственным структурам, между которыми нет фундаментальной связи. Отсюда возникли теории Вейля и Эддингтона, от которых, однако, авторы отказались, теория Калуцы и теория абсолютного параллелизма. После того как мы проработали около года над дальнейшим развитием последней теории, мы пришли к заключению, что избрали неверный путь, и теория Калуцы, хотя и неприемлема, все же ближе к истине, чем другие теоретические построения.

Теория Калуцы основана на предположении, что физический пространственно-временный континуум является пятимерным (а не четырехмерным), причем взятая из опыта четырехмерность физического континуума может быть выведена из гипотезы о независимости физических переменных от координаты x_5. Вводя в пятимерном пространстве риманову метрику, Калуца получает уравнения поля, которые в первом приближении совпадают с известными уравнениями гравитационного и электромагнитного полей.

Среди соображений, которые заставляют усомниться в этой теории, на первом месте стоит следующее: вряд ли разумно заменять четырехмерный континуум на пятимерный и затем искусственно налагать ограничение на одно из этих пяти измерений с тем, чтобы объяснить, почему оно не проявляет себя физически.

Нам удалось сформулировать теорию, которая формально близка к теории Калуцы, но свободна от упомянутого возражения. Это достигается

* *Gravitational and Electrical Fields.* Science. 1930, 74, 438—439. (Предварительное краткое сообщение для фонда Дж. Мейси, мл., о работах 106 и 107, выполненных с В. Майером.— *Прим. ред.*)

путем введения совершенно нового математического понятия, которое можно охарактеризовать следующим образом.

До сих пор считалось, что в пространстве n измерений можно ввести векторы или векторные поля с числом компонент, совпадающим с размерностью пространства. Оказывается, однако, что это ограничение не является обязательным. Оно возникает вследствие «наглядности» характера тех векторов, на которых основана сама формулировка понятия вектора. Нам удалось ввести в n-мерном пространстве R_n векторы $a^i (i = 1, \ldots, m)$ с m компонентами и построить исчисление таких векторов и тензоров, которое по существу не сложнее, чем известное абсолютное тензорное исчисление.

Наша теория возникает естественным образом при рассмотрении 5-векторов (пятикомпонентных векторов) в четырехмерном континууме. Строится «пятимерная кривизна» пространства, которая аналогична римановой кривизне и связана с уравнениями единого поля таким же образом, как риманова кривизна с релятивистскими уравнениями для одного гравитационного поля.

В этой теории еще не содержатся результаты квантовой теории. Она указывает, однако, путь к естественному развитию, от которого мы можем ожидать дальнейших результатов в этом направлении. Во всяком случае, полученные до сих пор результаты представляют определенный шаг вперед в познании структуры физического пространства.

Поступила 30 октября 1930 г.

В этой заметке впервые изложена идея нового (третьего) варианта единой теории поля. Этим вариантом Эйнштейн занимался до 1945 г. (статьи 105, 106).

104

К КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Под космологической проблемой понимается задача о свойствах пространства и о распределении вещества в больших масштабах, причем вещество звезд и звездных систем для простоты заменяется непрерывно распределенным веществом. С тех пор как вскоре после создания общей теории относительности я рассматривал эту задачу, по этому вопросу появились не только многочисленные теоретические работы, но и исследования Хэббла о доплеровском смещении и распределении внегалактических туманностей, открывающие новые пути для теории.

В своем первоначальном исследовании я исходил из следующих предпосылок.

1. Все части Вселенной равноценны, в частности, локальная средняя плотность звездного вещества должна быть также всюду одинаковой.

2. Пространственная структура и плотность вещества должны быть постоянными во времени.

В то время я показал, что эти два предположения можно совместить с отличной от нуля средней плотностью ρ, если ввести в уравнения поля общей теории относительности так называемый космологический член, так что эти уравнения принимают вид

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)+\lambda g_{ik}=-kT_{ik}. \quad (1)$$

Этим уравнениям удовлетворяет пространственно сферический статический мир с радиусом $P=\sqrt{\frac{2}{\varkappa\rho}}$, где ρ — средняя плотность вещества (в отсутствие давления).

Но после того как из результатов Хэббла стало ясно, что внегалактические туманности распределены в пространстве равномерно и что они

---

* *Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1931, 235—237.

разбегаются (по крайней мере, если их систематические красные смещения объяснять эффектом Доплера), предположение (2) о статической природе пространства уже не оправдывается и возникает вопрос, может ли объяснить эти результаты общая теория относительности.

Различными исследователями предпринимались попытки связать новые факты со сферическим пространством, радиус которого P зависит от времени. Первым, причем независимо от наблюдаемых фактов, вступил на этот путь А. Фридман [1]. В последующих рассуждениях я использую результаты его вычислений. Фридман исходит из линейного элемента вида

$$ds^2 = -P^2(dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2) + c^2 dx_4^2,$$

где P — функция лишь одной вещественной временно́й переменной x_4. Для определения P и связи этой величины с (переменной) плотностью ρ он получает из уравнений (1) два дифференциальных уравнения:

$$\frac{P'^2}{P^2} + \frac{2P''}{P} + \frac{c^2}{P^2} - \lambda = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{3P'^2}{P^2} + \frac{3c^2}{P^2} - \lambda = \varkappa c^2 \rho. \qquad (3)$$

Мое старое решение получается из этих уравнений, если считать, что величина P постоянна во времени. Однако с помощью этих уравнений можно показать, что это решение неустойчиво, т. е. что всякое решение, в некоторый момент времени мало отличающееся от такого статического решения, с течением времени будет все больше отклоняться от него. Уже по одной этой причине, даже не говоря о результатах наблюдений Хэббла, я не считаю больше возможным приписывать физический смысл своему прежнему решению.

При этих обстоятельствах следует задать вопрос, можно ли описать опытные факты, не вводя λ-член, явно неудовлетворительный с теоретической точки зрения. Посмотрим, в какой степени это возможно; при этом мы, как и Фридман, будем пренебрегать влиянием излучения. Как показал Фридман, из уравнения (2) в результате интегрирования получается (для $\lambda = 0$)

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = c^2 \frac{P_0 - P}{P}, \qquad (2a)$$

где P_0 — постоянная интегрирования. Это означает наличие верхней гра-

[1] Z. Phys., 1922, 10, 377. [Работы Фридмана опубликованы повторно в УФН, 1963, 80, 447, 453.— *Прим. ред.*]

ницы, которую радиус мира не может никогда превзойти. Здесь производная $\frac{dP}{dt}$ должна менять знак [2]. Из уравнения (3) следует, что плотность ρ (для $\lambda = 0$) во всяком случае остается положительной, как и должно быть.

Результаты Хэббла показывают, что в настоящее время следует принять $\frac{dP}{dt} > 0$ и что величина доплеровского смещения, поделенная на расстояние, не зависит от расстояния; с достаточной для нас точностью она выражается формулой

$$D = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt}\cdot\frac{1}{c}\,.$$

Вместо уравнения (2а) можно написать

$$D^2 = \frac{1}{P^2}\frac{P_0 - P}{P} \tag{2б}$$

и вместо уравнения (3) —

$$D^2 = \frac{1}{3}\varkappa\rho\frac{P_0 - P}{P}\,. \tag{3а}$$

Уравнение (2а) описывает следующий процесс. При малых значениях радиуса P (для строго предельного случая $P = 0$ наша идеализация несправедлива) его величина возрастает очень быстро. Затем скорость изменения P, т. е. производная $\frac{dP}{dt}$, при возрастании P все более уменьшается и обращается в нуль, когда достигается предельное значение $P = P_0$, после чего весь процесс протекает в обратном порядке (т. е. при все более быстром уменьшении P).

Если сравнивать наши формулы с опытными фактами, то необходимо предположить, что мы находимся где-то в фазе возрастающей плотности ρ. Тогда для грубой ориентировки разумно предположить, что разность $P - P_0$ имеет такой же порядок величины, как и P_0, так что по порядку величины выполняется соотношение

$$D^2 \sim \varkappa\rho.$$

Отсюда для ρ получаем по порядку величины 10^{-26}, что, по-видимому, примерно соответствует оценкам астрономов. Аналогично, в соответствии с уравнением (2б), радиус мира в настоящее время определяется по

[2] В соответствии с уравнением (2а) P не может превзойти P_0, а согласно уравнению (2), P не может принять постоянное значение P_0.

порядку величины соотношением

$$P \sim \frac{1}{D},$$

что дает лишь около 10^8 световых лет.

Но самая большая трудность, как известно, заключается в том, что состояние мира с $P = 0$ соответствовало, согласно уравнению (2а), времени лишь около 10^{10} лет назад. Эту трудность можно было бы обойти, сославшись на то, что наше приближенное рассмотрение становится незаконным ввиду неоднородного распределения звездного вещества. Кроме того, теория, объясняющая на основе эффекта Доплера найденные Хэбблом огромные смещения спектральных линий, вряд ли может устранить эту трудность сколько-нибудь простым способом.

Во всяком случае эта теория достаточно проста для того, чтобы можно было удобно сравнивать ее с астрономическими наблюдениями. Она говорит также о том, что при экстраполяции на большие промежутки времени в астрономии надо соблюдать осторожность. Более всего примечательно, что общая теория относительности, по-видимому, естественно (т. е. без λ-члена) согласуется скорее с новыми наблюдениями Хэббла, чем с постулатом о квазистатической природе пространства, отброшенным теперь под влиянием опытных фактов.

Эта работа представляет собой полное признание работ Фридмана (уместно вспомнить письма—статьи 68 и 69). В них четко сформулировано отношение Эйнштейна к статической модели и к введению космологического члена в уравнения тяготения. Существование особенности в решении (около 10^{10} лет назад) представляется автору трудностью теории. Современные данные дают для времени особенности бóльшую величину (около 10^{11} лет). Эта оценка, по-видимому, уже не противоречит данным о возрасте галактик.

СИСТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОВМЕСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ, ВОЗМОЖНЫХ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С АБСОЛЮТНЫМ ПАРАЛЛЕЛИЗМОМ*

(Совместно с В. Майером)

В ранее опубликованных исследованиях уравнений поля, возможных в римановом пространстве с абсолютным параллелизмом, всегда делалось предположение о совместности уравнений, оправдывающее их вывод. Однако до сих пор у нас не было систематического метода, который дал бы уверенность в том, что мы рассмотрели все существующие возможности. Этот пробел мы восполняем в настоящем исследовании. При этом выясняется, что действительно существует не рассмотренная ранее форма уравнений, которая дает нетривиальное обобщение первоначальных уравнений поля тяготения.

Мы исследовали особо, методом, аналогичным излагаемому ниже, такие системы уравнений, которые удовлетворяют д в у м четырехмерным тождествам. Однако мы нашли достаточно убедительные основания для того, чтобы считать их непригодными для физического описания пространства, а потому мы ограничимся здесь исследованием таких систем уравнений, которые удовлетворяют о д н о м у четырехмерному тождеству. Это тем более оправдано, что первые системы уравнений содержатся в последних как частный случай.

Как обычно, искомые уравнения должны быть линейными по вторым производным переменных поля $h_{s\nu}$ и квадратичными по их первым производным. Тождества, которым удовлетворяют левые части $G^{\mu\alpha}$ уравнений поля, должны быть линейными выражениями по первым производным величин $h_{s\nu}$ и должны содержать в явном виде величины $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$ только линейно. Обозначения, применявшиеся нами в прежних работах, будут использованы здесь без изменений.

* *Systematische Untersuchung über kompatible Feldgleichungen, welche in einem Riemannschen Raume mit Fernparallelismus gesetzt werden können.* (Mit W. Mayer). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1931, 257—265.

§ 1. Метод исследования

Рассмотрим уравнения поля вида

$$0 = G^{\mu\alpha} = p\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu} + q\Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\nu};\,\nu} + a_1\varphi_{\alpha;\,\underline{\mu}} + a_2\varphi_{\underline{\mu};\,\underline{\alpha}} + a_3 g^{\mu\alpha}\varphi_{\underline{\nu};\,\nu} + R^{\mu\alpha}, \tag{1}$$

где $R^{\mu\alpha}$ — совокупность остаточных членов, квадратичных по Λ. Постоянные p, q, a_1, a_2, a_3, а также величины $R^{\mu\alpha}$ следует определить так, чтобы величина $G^{\mu\alpha}$ удовлетворяла дифференциальному тождеству

$$0 \equiv G^{\mu\alpha}_{;\,\mu} + AG^{\alpha\mu}_{;\,\mu} + G^{\sigma\tau}(c_1\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + c_2\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\alpha}} + c_3\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}}) +$$
$$+ c_4 G^{\alpha\sigma}\varphi_\sigma + c_5 G^{\sigma\alpha}\varphi_\sigma + c_6 G^{\underline{\sigma\sigma}}\varphi_{\underline{\alpha}} + BG^{\underline{\sigma\sigma}}_{;\,\underline{\alpha}}. \tag{2}$$

Постоянные $A, B, c_1 \ldots c_6$ в свою очередь следует определить так, чтобы тождеству (2) удовлетворяли сами уравнения (1).

Вводя в левую часть уравнений (1) вместо $G^{\mu\alpha}$ выражения

$$\overline{G}^{\mu\alpha} = G^{\mu\alpha} + sG^{\alpha\mu} + tg^{\alpha\mu}G^{\underline{\sigma\sigma}}$$

(где s и t — соответственно определенные постоянные), в общем случае можно получить уравнения того же вида, но с нулевыми значениями постоянных A и B. Постоянную B нельзя обратить в нуль только тогда когда $B = -\frac{1+A}{4}$. Этот частный случай мы не будем исследовать дальше так как он не дает никаких интересных для нас результатов. Постоянную A этим преобразованием нельзя обратить в нуль лишь в том случае, если $A = \pm 1$. Этот особый случай мы также не будем рассматривать, а положим сначала

$$A = B = 0. \tag{2a}$$

Соотношения (1) и (2) — если отвлечься от некоторых, возможных в случае четырех измерений, но не очень естественных членов — являются самыми общими уравнениями для нашей проблемы с учетом наложенных нами ограничительных условий.

Теперь мы должны подставить уравнения (1) в тождество (2) и определить произвольные постоянные и остаточные члены так, чтобы тождество было выполнено. При этом логично было бы написать с неопределенными коэффициентами также и квадратичные члены $R^{\mu\alpha}$, выразить всё через величины $h_{s\nu}$ и их производные и затем приравнять нулю коэффициенты при алгебраически независимых членах. Однако этот практически неосуществимый ввиду своей сложности путь можно заменить более простым.

Должно существовать тождество, содержащее Λ, которое вытекает только из дифференциальных тождеств, связанных с возможностью выражения Λ через величины h и с правилами перестановки при дифференцировании (так как в тождество входят вторые производные величин Λ). Вместе с ним необходимо использовать и другие тождества, известные из прежних исследований:

$$T^{\cdot}_{\cdot;\,\sigma;\,\tau} - T^{\cdot}_{\cdot;\,\tau;\,\sigma} \equiv - \Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}\, T^{\cdot}_{\cdot;\,\rho}, \tag{3}$$

$$0 \equiv \Lambda^{\iota}_{\varkappa\lambda;\,\mu} + \Lambda^{\iota}_{\lambda\mu;\,\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\varkappa;\,\lambda} + \Lambda^{\iota}_{\varkappa\rho}\Lambda^{\rho}_{\lambda\mu} + \Lambda^{\iota}_{\lambda\rho}\Lambda^{\rho}_{\mu\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\rho}\Lambda^{\rho}_{\varkappa\lambda}, \tag{4}$$

$$\Lambda^{\sigma}_{\varkappa\lambda;\,\sigma} \,(\equiv F_{\varkappa\lambda}) \equiv \varphi_{\varkappa,\,\lambda} - \varphi_{\lambda,\,\varkappa}. \tag{5}$$

При этом тождество (5) является непосредственным следствием уравнения (4).

Второе упрощение метода заключается в следующем. Вместо того, чтобы вводить члены, квадратичные по $R^{\mu\alpha}$, с неопределенными коэффициентами, подставим сначала в тождество само $R^{\mu\alpha}$; вместе с ним войдет и $R^{\mu\alpha}_{;\,\alpha}$. Преобразование остальных членов будем проводить так, чтобы возникало как можно меньше членов, отличных от $U^{\mu\alpha}_{;\,\mu}$; при этом $U^{\mu\alpha}$ означает величину, квадратичную по Λ. Обозначая символом $U^{\mu\alpha}_{;\,\mu}$ *совокупность* всех таких членов, потребуем, чтобы сумма $U^{\mu\alpha} + R^{\mu\alpha}$ обращалась в нуль; величина $R^{\mu\alpha}$ выразится при этом через Λ. *Это, конечно, возможно лишь в том случае, если преобразованное тождество содержит только линейно независимые члены.* Так определяются $R^{\mu\alpha}$ и таким же способом находятся введенные выше численные коэффициенты.

§ 2. Преобразование тождества

После подстановки уравнений (1) тождество (2) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} 0 \equiv{}& p\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\nu;\,\mu} + q\Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha}\underline{\nu};\,\nu;\,\mu} + a_1\varphi_{\underline{\mu};\,\underline{\alpha};\,\mu} + a_2\varphi_{\underline{\alpha};\,\underline{\mu};\,\mu} + a_3\varphi_{\underline{\nu};\,\nu;\,\alpha} + R + \\ &+ (p\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma}\underline{\nu};\,\nu} + q\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau}\underline{\nu};\,\nu} + a_1\varphi_{\underline{\sigma};\,\underline{\tau}} + a_2\varphi_{\underline{\tau};\,\underline{\sigma}} + a_3 g^{\sigma\tau}\varphi_{\underline{\nu};\,\nu})\,(c_1\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + c_2\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma}\alpha} + \\ &+ c_3\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau}\underline{\alpha}}) + c_4\,(p\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha}\underline{\nu};\,\nu}\varphi_\sigma + q\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma}\underline{\nu}}\varphi_\sigma + a_1\varphi_{\underline{\alpha};\,\underline{\sigma}}\varphi_\sigma + a_2\varphi_{\underline{\sigma};\,\underline{\alpha}}\varphi_\sigma + \\ &+ a_3\varphi_{\underline{\nu};\,\nu}\varphi_{\underline{\alpha}}) + c_5\,(p\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma}\underline{\nu};\,\nu}\varphi_\sigma + q\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha}\underline{\nu};\,\nu}\varphi_\sigma + a_1\varphi_{\underline{\sigma};\,\underline{\alpha}}\varphi_\sigma + a_2\varphi_{\underline{\alpha};\,\underline{\sigma}}\varphi_\sigma + \\ &+ a_3\varphi_{\underline{\nu};\,\nu}\varphi_\alpha) + c_6\,[-(p+q) + a_1 + a_2 + 4a_3]\,\varphi_{\underline{\nu};\,\nu}\varphi_{\underline{\alpha}} + D^{\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где D^α — совокупность членов, содержащих третьи степени величин Λ, которые будут учтены позднее. Линейная независимость членов, входящих в тождество (6), достигается с помощью следующих преобразований, без особых трудностей выводимых из тождеств (3) — (5):

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\nu;\mu} \equiv \frac{1}{2}(\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\nu})_{;\mu} - \frac{1}{2}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}F_{\mu\nu}, \tag{7а}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\nu};\nu;\mu} \equiv -(\Lambda^{\mu}_{\nu\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\nu}})_{;\mu} + F_{\underline{\alpha\nu};\nu} + F_{\nu\mu}\Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\nu}}, \tag{7б}$$

$$\varphi_{\underline{\mu};\underline{\alpha};\mu} \equiv -(\varphi_\sigma\Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\sigma}})_{;\mu} + \varphi_{\underline{\mu};\mu;\underline{\alpha}} + F_{\alpha\underline{\mu}}\varphi_\mu, \tag{7в}$$

$$\varphi_{\underline{\alpha};\underline{\mu};\mu} \equiv -(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}}\varphi_\sigma + \Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha}\sigma}\varphi_\sigma)_{;\mu} + \varphi_{\underline{\mu};\mu;\underline{\alpha}} + F_{\alpha\underline{\mu}}\varphi_\mu + F_{\alpha\underline{\mu};\mu}, \tag{7г}$$

$$\begin{aligned}2\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu};\nu}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} \equiv {} & [(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\sigma\mu}} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\tau\sigma}})\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}]_{;\mu} + F_{\underline{\sigma\nu}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\nu} + \\ & + \Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu}}(\Lambda^{\alpha}_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\tau\nu} + \Lambda^{\alpha}_{\tau\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu\sigma} + \Lambda^{\alpha}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}),\end{aligned} \tag{7д}$$

$$\begin{aligned}\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu};\nu}\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}} \equiv {} & \left[\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}}\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}} - \frac{1}{4}g^{\alpha\mu}\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu}}\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\nu}\right]_{;\mu} + \frac{1}{2}\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu}}(\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha}\nu} + \\ & + \Lambda^{\underline{\tau}}_{\underline{\alpha}\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu\sigma} + \Lambda^{\underline{\tau}}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\sigma\underline{\alpha}}),\end{aligned} \tag{7е}$$

$$\begin{aligned}\Lambda^{\tau}_{\sigma\underline{\nu};\nu}\Lambda^{\sigma}_{\tau\underline{\alpha}} \equiv {} & \left(\Lambda^{\nu}_{\sigma\underline{\mu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\underline{\alpha}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu}\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu\underline{\alpha}} - \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\Lambda^{\tau}_{\nu\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\nu}\tau}\right)_{;\mu} - \\ & - F_{\sigma\nu}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\nu}} + \Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu}}(\Lambda^{\sigma}_{\tau\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha}\nu} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha}\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu\tau} + \Lambda^{\sigma}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\tau\underline{\alpha}}),\end{aligned} \tag{7ж}$$

$$\varphi_{\underline{\sigma};\underline{\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} \equiv \frac{1}{2}F_{\sigma\tau}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}} - \frac{1}{2}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}\varphi_\rho, \tag{7з}$$

$$\varphi_{\underline{\sigma};\tau}\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\alpha}} \equiv (\varphi_\sigma\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\alpha}})_{;\mu} - \varphi_\sigma F_{\underline{\sigma\alpha}}, \tag{7и}$$

$$\varphi_{\sigma;\tau}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}} \equiv (\varphi_\sigma\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\alpha}})_{;\mu} - F_{\underline{\sigma\alpha}}\varphi_\sigma + F_{\sigma\tau}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}\varphi_\rho, \tag{7к}$$

$$\begin{aligned}g^{\sigma\tau}\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\nu};\nu} \quad (\equiv -\varphi_{\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\nu};\nu}) \equiv {} & F_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\sigma - \left(\varphi_{\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\mu}} - \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\varphi_{\underline{\sigma}}\varphi_\sigma\right)_{;\mu} - \\ & - \Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\rho\varphi_\sigma,\end{aligned} \tag{7л}$$

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu};\nu}\varphi_\sigma \equiv (\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\mu}}\varphi_\sigma)_{;\mu} - \frac{1}{2}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu}}F_{\sigma\nu} + \frac{1}{2}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\nu}\varphi_\rho, \tag{7м}$$

$$\varphi_{\underline{\alpha};\underline{\sigma}}\varphi_\sigma \equiv F_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\sigma + \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\varphi_{\underline{\sigma}}\varphi_\sigma)_{;\mu} - \Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\rho\varphi_\sigma, \tag{7н}$$

$$\varphi_{\underline{\sigma};\underline{\alpha}}\varphi_\sigma \equiv \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\varphi_{\underline{\sigma}}\varphi_\sigma)_{;\mu}, \tag{7о}$$

$$\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\nu};\nu}\varphi_\sigma \equiv (\varphi_\sigma\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\alpha}} + \varphi_\sigma\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}})_{;\mu} + F_{\sigma\tau}\Lambda^{\sigma}_{\tau\alpha} + F_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\sigma - \Lambda^{\sigma}_{\tau\underline{\alpha}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}\varphi_\rho. \tag{7п}$$

После того, как в тождестве (6) члены, соответствующие левым частям уравнений (7), будут заменены согласно этим уравнениям, указанное тождество будет содержать только линейно независимые члены. Это представляется справедливым даже без особого доказательства. Можно убедиться в том, что уравнения (3) — (5) делают невозможным дальнейшее упрощение тождества. Приравнивая нулю коэффициенты при каждом члене, получаем:

Коэффициент при	Дает уравнение	
$\varphi_{\underline{\nu};\,\nu;\,\alpha}$	$a_1 + a_2 + a_3 = 0,$	[1]
$F_{\underline{\alpha\nu};\,\nu}$	$a_2 + q = 0,$	[2]
$F_{\sigma\nu}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu}}$	$-p + pc_1 + a_1c_1 + a_2c_4 - c_5p = 0,$	[3]
$F_{\nu\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\nu}}$	$q(1 + c_5) + p(c_3 + c_4) + a_1c_3 = 0,$	[4]
$F_{\underline{\alpha\mu}}\varphi_{\mu}$	$-a_3 + c_4(p + a_1 - a_3) - a_3c_5 + c_6(p + q - 3a_3) = 0.$	[5]

Далее для $R^{\mu\alpha}$ мы получаем

$$\left.\begin{aligned}
-R^{\mu\alpha} \equiv {} & \frac{1}{2}(p - pc_1 + qc_1)\,\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\nu} + (p-q)c_1\Lambda^{\alpha}_{\nu\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\nu\mu}} + \\
& + (pc_3 + qc_2 + q)\,\Lambda^{\mu}_{\nu\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu\underline{\alpha}} + (pc_3 + qc_2)\,\Lambda^{\nu}_{\sigma\underline{\mu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\underline{\alpha}} + \\
& + (pc_2 + qc_3)\left(\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}}\Lambda^{\tau}_{\sigma\underline{\alpha}} - \frac{1}{4}g^{\mu\alpha}\Lambda^{\tau}_{\sigma\nu}\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu}}\right) - \frac{1}{2}(pc_3 + qc_2)\,g^{\alpha\mu}\Lambda^{\tau}_{\sigma\nu}\Lambda^{\sigma}_{\tau\underline{\nu}} + \\
& + [(a_1 + a_2)(1 + c_2 + c_3) + c_4p + c_5q]\,\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\alpha}}\varphi_{\sigma} + \\
& + [-a_2 + c_4p + c_5q]\,\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}}\varphi_{\sigma} + (c_4q + c_5p)\,\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\mu}}\varphi_{\sigma} + M\varphi_{\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\mu}} + \\
& + Ng^{\alpha\mu}\varphi_{\underline{\sigma}}\varphi_{\sigma}.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$M = -a_3(c_2 + c_3) + a_3(c_4 + c_5) + c_6(-p - q + 3a_3), \quad (8а)$$

$$2N = -M - a_3(c_4 + c_5). \quad (8б)$$

Дальнейшие условия для коэффициентов, введенных в соотношения (1) и (2), получаем, приравнивая нулю члены третьей степени по Λ. Этим способом получаем тождество

$$
\left.\begin{aligned}
0 \equiv\; & R^{\sigma\tau}(c_1\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + c_2\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\alpha}} + c_3\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}}) + c_4R^{\alpha\sigma}\varphi_\sigma + c_5R^{\sigma\alpha}\varphi_\sigma + \\
& + c_6\varphi_{\underline{\alpha}}R^{\underline{\sigma\sigma}} + \frac{p-q}{2}c_1\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu}}(2\Lambda^{\alpha}_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\tau\nu} + \Lambda^{\alpha}_{\tau\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu\sigma}) + \\
& + \frac{pc_2+qc_3}{2}\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu}}(2\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma}\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha}\nu} + \Lambda^{\tau}_{\underline{\alpha}\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu\sigma}) + (pc_3+qc_2)\Lambda^{\tau}_{\sigma\underline{\nu}}(\Lambda^{\sigma}_{\tau\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha}\nu} + \\
& + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha}\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu\tau} + \Lambda^{\sigma}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\tau\underline{\alpha}}) - \frac{(a_1-a_2)c_1}{2}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}\varphi_\rho - (a_1c_3+a_2c_2)\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}\varphi_\rho - \\
& - a_3(c_2+c_3)\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\rho\varphi_\sigma - (pc_4+qc_5)\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\rho}_{\tau\sigma}\varphi_\rho + \frac{c_4q+c_5p}{2}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\nu}\varphi_\rho - \\
& - (c_4a_1+c_5a_2)\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\rho\varphi_\sigma + (c_4+c_5)a_3\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\rho\varphi_\sigma + \\
& + c_6(-p-q+3a_3)c_6\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\rho\varphi_\sigma.
\end{aligned}\right\} \tag{9}
$$

Совместно с уравнениями (8) тождество (9) дает для определения коэффициентов следующие алгебраические уравнения:

Коэффициент при	Дает уравнение	
$\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}(\Lambda^{\tau}_{\underline{\nu\rho}}\Lambda^{\rho}_{\nu\sigma} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\nu\rho}}\Lambda^{\rho}_{\underline{\nu\tau}})$	$[(p-q)(c_1-1) - pc_3 - q(c_2+1)]c_1 = 0,$	[6]
$\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\nu\tau}} - \Lambda^{\tau}_{\underline{\nu\sigma}})\varphi_\nu$	$c_1a_3(1+c_2+c_3) - c_4(pc_3+qc_2+q) -$ $- c_1c_4(p-q) = 0,$	[7]
$\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}\Lambda^{\nu}_{\underline{\tau\sigma}}\varphi_\nu$	$(a_1+a_2)c_1 + c_1c_4(-3p+q) - c_1c_5(p+q) +$ $+ c_4(p-q) = 0,$	[8]
$\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\alpha}}\Lambda^{\rho}_{\underline{\sigma}\nu}\Lambda^{\rho}_{\underline{\nu\tau}}$	$(pc_2+qc_3)(1+c_2+c_3) = 0,$	[9]
$\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\alpha}}\Lambda^{\tau}_{\rho\nu}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\rho\nu}}$	$(p-q)[c_3 - c_1(c_2+c_3)] = 0,$	[10]
$\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\alpha}}\Lambda^{\rho}_{\underline{\nu}\sigma}\Lambda^{\nu}_{\underline{\rho\tau}}$	$(pc_3+qc_2)(1+c_2+c_3) = 0,$	[11]
$\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\alpha}}\Lambda^{\tau}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\nu\sigma}}$	$c_1c_2(p-q) + c_3(pc_3+qc_2+q) = 0,$	[12]
$\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\alpha}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\nu\tau}}$	$c_1c_3(p-q) + c_2(pc_3+qc_2+q) = 0,$	[13]
$\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\alpha}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}\varphi_\rho$	$p[c_4(1+c_2-c_3-c_1) - c_3c_5] + q(c_1c_4 - c_3c_5) +$ $+ (a_1+a_2)c = 0,$	[14]
$\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\alpha}}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\rho}}\varphi_\rho$	$c_2(a_1+a_2)(1+c_2+c_3) + c_4(p-q)(c_2-c_3) = 0,$	[15]

$$\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma}\underline{\alpha}}\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma}\underline{\rho}}\varphi_{\rho} \qquad c_3(a_1+a_2)(1+c_2+c_3)-c_4(p-q)(c_2-c_3)=0, \quad [16]$$

$$\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma}\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\sigma}}\varphi_{\underline{\tau}} \qquad M(1+c_2+c_3)=c_4[a_1+a_2-(c_4+c_5)(p+q)]-$$
$$-c_5(a_1+a_2)(1+c_2+c_3)=0, \quad [17]$$

$$\varphi_{\underline{\alpha}}\Lambda^{\rho}_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^{\rho}_{\mu\nu} \qquad (pc_2+qc_3)(c_4+c_5-c_2-c_3)-2c_6(p-pc_1+qc_1)=0, \quad [18]$$

$$\varphi_{\underline{\alpha}}\Lambda^{\rho}_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\rho\underline{\alpha}} \qquad (pc_3+qc_2)(c_4+c_5-c_2-c_3)-2c_6(q-qc_1+pc_1)=0, \quad [19]$$

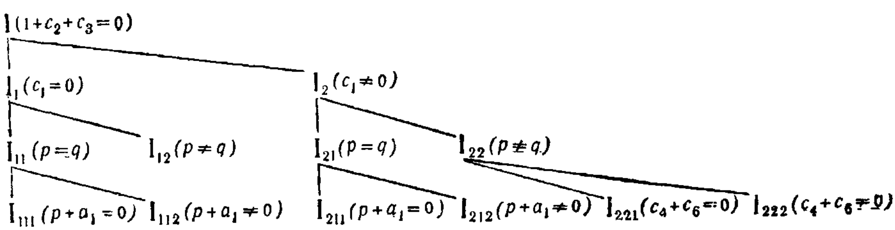
$$\varphi_{\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\nu}}\varphi_{\nu} \qquad (c_2+c_3)N-(c_4+c_5)(M+N)-c_6[(a_1+a_2)(1+$$
$$+c_2+c_3)+(c_4+c_5)(p+q)+M+4N]=0. \quad [20]$$

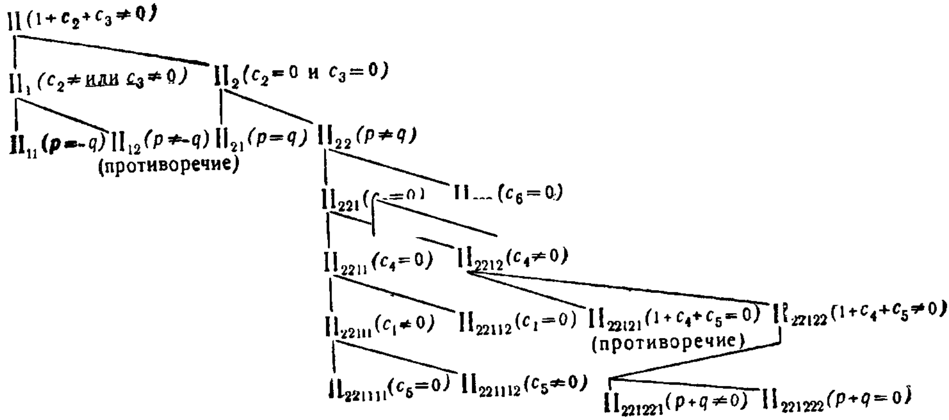
§ 3. Решение алгебраических уравнений

Мы свели задачу нахождения дифференциальных уравнений с тождеством к определению 11 постоянных p, q, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, из которых — как непосредственно следует из уравнений (1) — одну можно выбрать произвольно, так как в постоянные p, q, a_1, a_2, a_3 входит общий произвольный числовой множитель. Таким образом, для определения 10 постоянных мы имеем 20 уравнений [1] — [20].

Решение этой системы уравнений сильно облегчается тем обстоятельством, что она повторно расщепляется вследствие появления уравнений типа $P\cdot Q=0$. Вместо того, чтобы описывать здесь весь процесс решения, приведем схему этих расщеплений, поскольку она удовлетворит всех, кто захочет проконтролировать исследование.

Прежде всего из уравнений [9] и [11] видно, что существуют два главных случая (I и II), в зависимости от того, равна или не равна нулю сумма $1+c_2+c_3$. Для этих двух главных случаев вычисление проводится по следующей схеме расщеплений:





Из двух приведенных схем решения получаются следующие системы коэффициентов (причем сделана подстановка $p = 1$) (см. таблицу на стр. 362—363).

Буквы в таблице означают (произвольные) численные параметры.

По поводу главного случая I следует заметить следующее: симметричное уравнение для I_{111} и I_{211} можно выразить только через величины $g_{\mu\nu}$, и оно согласуется с уравнениями чисто гравитационного поля, основанными только на метрике Римана. Так как здесь четырехмерному тождеству удовлетворяет лишь о д н о симметричное уравнение, то антисимметричное уравнение можно выбирать произвольно. Этот случай, очевидно, не представляет интереса для физических приложений. Поэтому мы не будем на нем останавливаться.

Ввиду отсутствия симметричного уравнения случай I_{222} не рассматривается. Решение I_{112} содержится в I_{12} в качестве частного случая. Далее решение I_{212} представляет собой частный случай решения I_{221}. Итак, от главного случая I остаются только два решения I_{12} и I_{221}, содержащие по два произвольных численных параметра.

Самым общим случаем, выводимым из принципа Гамильтона, является решение I_{12}. Он может быть охарактеризован, например, следующим образом. Допустим, что

$$J = J_1 + \alpha J_2 + \beta J_3,$$

где J_1— скалярная риманова кривизна (непосредственно выражаемая через величины h),

$$J_2 = \varphi_\alpha \varphi^\alpha,$$

и

$$J_3 = S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} S^{\alpha}_{\mu\nu} \qquad (S^{\alpha}_{\mu\nu} = \Lambda^{\underline{\alpha}}_{\mu\nu} + \Lambda^{\underline{\mu}}_{\nu\alpha} + \Lambda^{\underline{\nu}}_{\alpha\mu}).$$

Тогда I_{12} получаются из вариационного принципа

$$\delta \left\{ \int hJd\tau \right\} = 0. \tag{10}$$

Случай I_{221} до сих пор был неизвестен. Его симметричное уравнение при $a_1 = -1$ согласуется с уравнениями гравитационного поля общей теории относительности. Следовательно, этот случай, как и I_{12}, является обобщением, но не коренным изменением уравнений первоначальной теории.

После введения тензора Римана

$$P_{\mu\alpha} = R_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} R,$$

где величины $R_{\mu\alpha}$ определяются равенством

$$R_{\mu\alpha} = -\Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha,\,\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma,\,\alpha} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}\Gamma^{\tau}_{\sigma\tau},$$

наши уравнения поля (деленные на $1 + q$) после отделения симметричной и антисимметричной частей принимают вид (коэффициенты σ и τ являются численными параметрами)

$$0 = 2S^{\mu\alpha} = 2P_{\underline{\mu\alpha}} + \sigma \Big[\varphi_{\underline{\mu};\underline{\alpha}} + \varphi_{\underline{\alpha};\underline{\mu}} - 2g^{\mu\alpha}\varphi_{\underline{\nu};\nu} - (\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\alpha}} + \Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\mu}})\varphi_\sigma - $$
$$- \sigma\varphi_{\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\mu}} + \left(2 - \frac{\sigma}{2}\right) g^{\alpha\mu}\varphi_{\underline{\nu}}\varphi_\nu\Big], \tag{11}$$

$$0 = 2A^{\mu\alpha} = \tau \frac{1}{h} (hS^{\nu}_{\underline{\alpha\mu}})_{,\,\nu} - \sigma (\varphi_{\underline{\alpha},\underline{\mu}} - \varphi_{\underline{\mu},\underline{\alpha}}). \tag{11a}$$

Они удовлетворяют тождеству

$$0 \equiv S^{\mu\alpha}_{;\,\mu} - S^{\alpha\sigma}\varphi^\sigma - S^{\sigma\tau}\Lambda^{\underline{\tau}}_{\underline{\sigma\alpha}} + \sigma\left(S^{\alpha\sigma}\varphi_\sigma - \frac{1}{2} S^{\underline{\sigma\sigma}}\varphi_{\underline{\alpha}}\right) + \frac{1}{h}(hA^{\mu\alpha})_{,\,\mu}. \tag{12}$$

Если ввести ковариантные производные геометрии Римана по формулам

$$A^{\mu}_{;\,\sigma} = A^{\mu}_{,\,\sigma} + A^{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma},$$

причем выполняется соотношение $2\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} \equiv (\Delta^{\mu}_{\alpha\sigma} + \Delta^{\mu}_{\sigma\alpha}) + (\Lambda^{\underline{\alpha}}_{\underline{\mu}\sigma} + \Lambda^{\underline{\sigma}}_{\underline{\mu}\alpha}),$

Таблица

Обозначение решения	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	a_1	a_2	a_3	q	Примечания
					Решение I						
I_{111}	0	c_2	$-1-c_2$	c_4	$-1-c_4$	0	-1	-1	2	1	симметричное уравнение содержит только $g^{\mu\nu}$
I_{112}	0	-1	0	0	-1	0	a_1	-1	$1-a_1$	1	частный случай I_{12}
I_{12}	0	-1	0	0	-1	0	a_1	$-q$	$q-a_1$	q	общий случай принципа Гамильтона
I_{211}	c_1	c_2	$-1-c_2$	c_4	$-1-c_4$	0	-1	-1	2	1	содержит I_{111}
I_{212}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{a_1+1}{4}$	$\frac{a_1-3}{4}$	$-\frac{a_1+1}{4}$	a_1	-1	$-a_1+1$	1	
I_{221}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{a_1+1}{2(1+q)}$	$\frac{a_1-1-2q}{2(1+q)}$	$-\frac{a_1+1}{2(1+q)}$	a_1	$-q$	$-a_1+q$	q	
I_{222}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	c_4	c_4-1	c_6	-1	1	0	-1	симметричное уравнение отсутствует

Обозначение решения	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	a_1	a_2	a_3	q	Примечания
					Решение II						
II_{11}	$\frac{1}{2}$	c_2	c_2	1	0	c_6	-1	1	0	-1	симметричное уравнение отсутствует
II_{21}	0	0	0	0	-1	0	a_1	-1	$-a_1+1$	1	частный случай II_{22112}
II_{221111}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	частный случай II_{221221}
II_{221112}	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-1	0	-1	1	0	-1	симметричное уравнение отсутствует
II_{22112}	0	0	0	0	-1	0	a_1	$-q$	$-a_1+q$	q	
II_{221221}	$\frac{1}{1-q}$	0	0	$\frac{q}{(2q-1)(1-q)}$	$\frac{q(2q-3)}{(2q-1)(1-q)}$	0	$\frac{q(q-2)}{2q-1}$	$-q$	$\frac{q(1+q)}{2q-1}$	q	
II_{221222}	$\frac{1}{2}$	0	0	c_4	c_4-1	0	-1	1	0	-1	симметричное уравнение отсутствует
II_{222}	$\frac{1}{2}$	0	0	c_4	c_4-1	c_6	-1	1	0	-1	симметричное уравнение отсутствует

то уравнения (11) и тождество (12) принимают более обозримую форму:

$$0 = 2S^{\mu\alpha} = 2P^{\mu\alpha} + \tag{11'}$$

$$+ \sigma \left[\varphi_{\underline{\alpha};\underline{\mu}} + \varphi_{\underline{\mu};\underline{\alpha}} - 2g^{\mu\alpha}\varphi_{\underline{\nu};\underline{\nu}} - \sigma\left(\varphi_{\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\mu}} + \frac{1}{2}\, g^{\alpha\mu}\varphi_{\underline{\nu}}\varphi_{\nu}\right)\right],$$

$$0 = 2A^{\mu\alpha} = \tau \frac{1}{h}\left(hS^{\nu}_{\underline{\alpha\mu}}\right)_{,\,\nu} - \sigma\left(\varphi_{\underline{\alpha},\,\underline{\mu}} - \varphi_{\underline{\mu},\,\underline{\alpha}}\right), \tag{11a'}$$

$$0 \equiv S^{\mu\alpha}_{;\mu} + \sigma\left(S^{\alpha\sigma}\varphi_{\sigma} - \frac{1}{2}S^{\underline{\sigma}\sigma}\varphi_{\underline{\alpha}}\right) + \frac{1}{h}\left(hA^{\mu\alpha}\right)_{,\,\mu}. \tag{12'}$$

Что касается главного случая II, то по причинам, указанным в примечании к таблице, в нем остаются только два решения: II_{22112} и II_{221221}. Первое из них содержит два численных параметра и было получено раньше из правила перестановки при дифференцировании. Этому решению можно придать более наглядный вид.

Пусть

$$L^{\alpha}_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} + \alpha\left(\varphi_{\mu}\delta^{\alpha}_{\nu} - \varphi_{\nu}\delta^{\alpha}_{\mu}\right) + \beta S^{\alpha}_{\mu\nu},$$

где коэффициенты α и β представляют собой численные параметры. Тогда уравнения поля с соответствующим тождеством имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &G^{\mu\alpha} \equiv L^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}|\nu} - \frac{1}{2}L^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = 0,\\ &G^{\mu\alpha}_{|\mu} \equiv 0,\\ &(T^{\cdot\mu}_{\cdot|\mu} \equiv T^{\cdot\mu}_{\cdot;\mu} - T^{\cdot\mu}_{\cdot}\varphi_{\mu}),\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

или, после введения тензоров с локальными (латинскими) и координатными (греческими) индексами и тензорных плотностей ($\mathfrak{G}$ или $\mathfrak{L}$),

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{G}^{\mu}_{s} \equiv \mathfrak{L}^{s}_{\underline{\mu\nu},\,\nu} = 0,\\ &\mathfrak{G}^{\mu}_{s,\,\mu} \equiv 0.\end{aligned}\right\} \tag{13a}$$

Случай II_{221221} во всей своей общности еще не был известен. Ранее подробному исследованию подвергался только частный случай II_{221111} ($q = 0$), полученный из правила перестановки при дифференцировании. Этот случай отличается тем, что к нему можно присоединить уравнение $F_{\mu\nu} = 0$.

Что касается нашей первоначальной специализации, выражаемой уравнением (2а), то с помощью вычислений, аналогичных изложенным выше, мы убедились, что единственный заслуживающий рассмотрения случай $A = \pm 1$ не приводит к уравнениям нового типа.

Таким образом, результат всего исследования заключается в следующем. В пространстве с метрикой Римана и абсолютным параллелизмом вида, определяемого соотношениями (1)—(2), существует всего четыре (нетривиальных) различных типа (совместных) уравнений поля. Из них два являются (нетривиальными) обобщениями первоначальных уравнений гравитационного поля, причем в свою очередь один тип уже был известен как следствие принципа Гамильтона [ср. уравнения (10)—(11)]. Два остальных типа описываются в настоящей работе уравнениями (13) и обозначаются как II_{221221}.

Поступила 30 мая 1931 г.

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА*

(Совместно с В. Майером)

До сих пор общая теория относительности была, в первую очередь, рациональной теорией гравитации и метрических свойств пространства. При рассмотрении же электромагнитных явлений она должна была довольствоваться лишь формальным присоединением максвелловской теории к релятивистской схеме. Наряду с квадратичной метрической формой гравитационного поля необходимо было вводить логически независимую от нее линейную форму, коэффициенты которой интерпретируются как потенциалы электромагнитного поля. В тензорных уравнениях гравитационного поля к тензору кривизны без логического обоснования добавлялся со знаком плюс ковариантно записанный максвелловский тензор электромагнитного поля. Это вызывало тем большее сожаление, что теория Максвелла основывается на весьма обширном эмпирическом материале только как полевая теория первого приближения; нельзя упускать из вида, что линейность уравнений Максвелла может не соответствовать действительности и что истинные уравнения электромагнетизма для сильных полей могут отличаться от максвелловских.

Поэтому с появлением общей теории относительности теоретики пытаются построить логически единую теорию полного поля. Нельзя, однако, утверждать, что приложенные до сих пор большие усилия к решению этой проблемы привели к успеху. С появлением квантовой механики от этих попыток в общем отказались, предполагая, что проблема вообще не разрешима в рамках теории поля в существовавшем до сих пор смысле этого слова. В противоположность этому мнению мы изложим здесь теорию, которая представляет, как мы уверены, совершенно удовлетворительное решение, не связанное с квантовыми проблемами. Старые форму-

---

* *Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität*. (Mit W. Mayer). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. phys.-math. Kl., 1931, 541—557.

лы гравитации и электричества удается получить новым единым путем. Оказывается, что уравнения Максвелла, вводимые в общую теорию относительности, должны рассматриваться в качестве строгих уравнений в том же самом смысле, как и гравитационные уравнения для пустого пространства.

Представленная здесь теория психологически связана с известной теорией Калуцы; однако она избегает дополнения физического континуума до континуума пяти измерений. Калуца описывает полное поле в пятимерном пространстве посредством пятимерного метрического тензора $g_{\mu\alpha}$, причем компоненты $g_{11}, \ldots, g_{44}$ с физической точки зрения играют роль гравитационных потенциалов, в то время как компоненты $g_{15}, \ldots, g_{45}$ означают электромагнитные потенциалы, а физический смысл g_{55} не определен. Чтобы оправдать четырехмерность пространственно-временного континуума в соответствии с опытом, континуум рассматривается как «цилиндрический» относительно координаты x^5 $\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^5} = 0\right)$. Естественным путем Калуце удалось получить уравнения, совпадающие в первом приближении с известными уравнениями гравитационного поля и максвелловскими уравнениями электромагнитного поля. При этом он рассматривал в пятимерном пространстве уравнения, полностью аналогичные чисто гравитационному полю общей теории относительности. Уравнения геодезической в пятимерном пространстве должны представлять собой уравнения движения электрически заряженной точечной массы.

Неудовлетворительность теории Калуцы прежде всего в предположении пятимерного континуума, тогда как наблюдаемый нами мир является четырехмерным. Далее, с точки зрения релятивистской пятимерной теории, условие цилиндричности не является естественным даже формально. В этой теории также не удается вычислить константу связи электрической и весомой масс движущейся материальной точки. Наконец, не удается физически истолковать компоненту g_{55} метрического тензора.

Все эти трудности обходятся в предлагаемой ниже теории благодаря тому, что, хотя континуум остается четырехмерным, в нем вводятся векторы с пятью компонентами и соответствующие им тензоры, индексы которых пробегают значения от 1 до 5. Ниже объясняется, как это можно сделать. Если преодолеть формальные трудности, то полная теория получается путем, совершенно аналогичным пути вывода закона чисто гравитационного поля в первоначальной теории относительности или пути получения общего закона поля в теории Калуцы.

§ 1. 4-векторы и 5-векторы

В каждой точке четырехмерного риманова пространства наряду с четырехмерным векторным пространством V_4, образованным из контравариантных и ковариантных векторов, задано еще пятимерное линейное векторное пространство V_5. Компоненты контравариантного вектора в этом последнем пространстве будем обозначать, например, так:

$$a^\iota \, (\iota = 1, \ldots, 5).$$

Ниже символами с греческими индексами будут обозначаться компоненты 5-вектора, а с латинскими — компоненты 4-вектора. Координаты риманова пространства обозначим через x_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Пятимерное (линейное) векторное пространство означает, что всякий его (контравариантный) вектор задается пятью числами a^ι и что для этих чисел a^ι определены, во-первых сложение, и, во-вторых, умножение на обычное число (скаляр). Иначе говоря, выражения $\alpha a^\iota + \beta b^\iota$ (α и β — обычные числа) должны быть компонентами некоторого вектора в векторном пространстве V_5, если a^ι и b^ι — векторы. Вектор, все компоненты которого равны нулю, называется нулевым вектором.

Преобразование координат в пространстве V_5 соответствует равенству вида:

$$a^\iota = M^\iota_\tau a^\tau, \tag{1}$$

причем

$$|M^\iota_\tau| \neq 0. \tag{2}$$

При этом M^ι_τ в общем случае является функцией координат x_i. Вследствие однородности и линейности этого преобразования операции суммирования 5-векторов или умножения на скаляр не зависят от конкретного выбора координат.

Величины b_ι, изменяющиеся при преобразовании (1) таким образом, что для любого a^ι произведение

$$b_\iota a^\iota \tag{3}$$

остается инвариантным, называются компонентами ковариантного 5-вектора. Для ковариантных 5-векторов сохраняют смысл операции суммирования и умножения на скаляр. Так же как и в пространстве V_4, где задан метрический тензор,

$$g_{ik} \text{ или } g^{ik} \qquad (g_i^k = \delta_i^k),$$

в пространстве 5-векторов a^ι, b_ι существует метрический тензор (не вырожденный симметричный тензор)

$$g_{\iota\varkappa} \text{ или } g^{\iota\varkappa} \qquad (g_\iota^\varkappa = \delta_\iota^\varkappa),$$

и мы будем говорить просто о 5-векторе «a» в контравариантной записи (a^ι) или ковариантной записи (a_ι), причем

$$\left.\begin{aligned} a_\iota &= g_{\iota\varkappa}a^\varkappa \\ a^\iota &= g^{\iota\varkappa}a_\varkappa \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

До сих пор между 5-векторами (a^ι) в пространстве V_5 и 4-векторами (a^i) в пространстве V_4 не было связи. Теперь мы установим такую связь, вводя «смешанный» тензор

$$\gamma_\iota^k, \tag{5}$$

который вектору (a^ι) в пространстве V_5 сопоставляет вектор (a^k) в пространстве V_4 и, обратно,

$$a^k = \gamma_\iota^k a^\iota, \tag{6}$$

$$b_\iota = \gamma_\iota^k b_k. \tag{7}$$

С помощью метрических тензоров в V_4 и V_5 тензор (5) мы можем записать в следующих эквивалентных формах:

$$\gamma_\iota^k,\ \gamma_{\iota k},\ \gamma^{\iota k},\ \gamma_k^\iota. \tag{8}$$

Например,

$$\gamma_k^\iota = g^{\iota\sigma}g_{kl}\gamma_\sigma^l.$$

Рассмотрим сопоставление, определенное формулами (6) и (7), несколько подробнее. Прежде всего находим, что ранг матрицы

$$\|\gamma_\iota^k\|$$

равен четырем. Тогда $\gamma_\iota^k v_k$ (v_k — произвольный вектор) задает четырехмерное векторное пространство в пространстве V_5 — «выделенную плоскость A».

Уравнение

$$\gamma_\iota^k v_k = 0 \tag{9}$$

имеет единственное решение $v_k = 0$, уравнение же

$$\gamma_\iota^k A^\iota = 0 \tag{10}$$

имеет в качестве единственного решения определенный с точностью до множителя вектор A^ι, нормальный к выделенной плоскости A [поскольку для любого v_k произведение $\gamma_\iota^k v_k A^\iota$ обращается в нуль в силу уравнения (10)]. Назовем A^ι «выделенным направлением пространства V_5»

и нормируем его согласно условию[1]

$$g_{\iota\varkappa}A^{\iota}A^{\varkappa}=1. \qquad (11)$$

Выделенному направлению A^{ι}, согласно уравнению (10) и равенству (6), в пространстве V_4 сопоставляется нулевой вектор, а вследствие (7) каждому вектору (b_k) в пространстве V_4 сопоставляется вектор выделенной плоскости в пространстве V_5.

5-тензор $(g_{\iota\varkappa})$ вместе со смешанным тензором (γ^k_{ι}) определяет 4-тензор $(g_{\iota\varkappa}\cdot\gamma^{\iota}_i\gamma^{\varkappa}_k)$. Мы предположим, что он идентичен метрическому тензору g_{ik} пространства V_4. Тогда получаем соотношение[2]:

$$g_{\iota\varkappa}\gamma^{\iota}_i\gamma^{\varkappa}_k=g_{ik}. \qquad (12)$$

Соотношение (12) идентично соотношениям:

$$\gamma_{\varkappa p}\gamma^{\varkappa}_q=g_{pq}, \qquad (12а)$$

$$\gamma^p_{\varkappa}\gamma^{\varkappa}_q=\delta^p_q, \qquad (12б)$$

$$g^{\iota\varkappa}\gamma^p_{\iota}\gamma^q_{\varkappa}=g^{pq}. \qquad (12в) \text{ и т. д.}$$

Вычислим еще величину

$$\gamma^p_{\varkappa}\gamma^{\iota}_p=\Sigma^{\iota}_{\varkappa}. \qquad (13)$$

После умножения на $\gamma^{\varkappa}_q$ в силу (12б) получим

$$\gamma^{\iota}_q=\gamma^{\varkappa}_q\Sigma^{\iota}_{\varkappa}$$

или

$$\gamma^{\varkappa}_q(\delta^{\iota}_{\varkappa}-\Sigma^{\iota}_{\varkappa})=0.$$

Далее справедливо соотношение

$$\delta^{\iota}_{\varkappa}-\Sigma^{\iota}_{\varkappa}=\rho^{\iota}A_{\varkappa}. \qquad (14)$$

....

[1] Однако это определение заключает в себе некоторое предположение относительно характера метрики пространства V_5.

[2] Если тензор $g_{\varkappa\iota}$ не вырожден, а ранг матрицы $\|\gamma^{\iota}_p\|$ равен 4, то g_{pq} также не вырожден.

Доказательство: Покажем, что из соотношения

$$g_{pq}\sigma^p=0 \ (\alpha)$$

следует $\sigma^p=0$. Именно, из (α) в силу (12) имеем

$$0=g_{\varkappa\iota}\gamma^{\varkappa}_q\sigma^{\iota}=\sigma_k\gamma^{\varkappa}_q,$$

где мы положили $\sigma^{\iota}=\gamma^{\iota}_p\sigma^p$. Отсюда следует, что $\sigma_{\varkappa}=\rho A_{\varkappa}$, т. е. $\sigma^{\iota}=\rho A^{\iota}$. Из сравнения обоих выражений для σ^{ι} имеем $\rho A^{\iota}=\gamma^{\iota}_p\cdot\sigma^p$, откуда после умножения на A_{ι}, согласно уравнению (10), следует $\rho=0$ и далее, согласно (9), — обращение в нуль σ^p.

Из равенства (13) после умножения на $A^\varkappa$ находим

$$\Sigma^\iota_\varkappa A^\varkappa = 0.$$

Поэтому после умножения на $A^\varkappa$ соотношение (14) дает

$$A^\iota = \rho^\iota,$$

благодаря чему (14) принимает вид

$$\Sigma^\iota_\varkappa = \delta^\iota_\varkappa - A^\iota A_\varkappa.$$

Следовательно, равенство (13) будет:

$$\gamma^p_\varkappa \gamma^\iota_p = \delta^\iota_\varkappa - A_\varkappa A^\iota, \tag{13а}$$

или, опуская индекс ι,

$$g_{pq}\gamma^p_\varkappa\gamma^q_\iota + A_\varkappa A_\iota = g_{\varkappa\iota}. \tag{13б}$$

В уравнениях (12) и (13б) получены соотношения, связывающие друг с другом метрики пространств V_4 и V_5.

Задаваемая уравнением (7) связь между вектором (b_k) в V_4 и вектором b_ι в V_5 не взаимно однозначна. В самом деле, умножая (7) на γ^ι_r, вследствие соотношения (12б) получаем

$$b_r = \gamma^\iota_r b_\iota,$$

т. е. полностью определенный вектор b_r в пространстве V_4.

Напротив, умножая равенство (6) на γ^σ_k, получаем вследствие (13а)

$$\gamma^\sigma_k a^k = (\delta^\sigma_\iota - A_\iota A^\sigma)\, a^\iota = a^\sigma - \rho A^\sigma, \qquad (\rho = A_\iota a^\iota),$$

т. е.

$$a^\sigma = \gamma^\sigma_k a^k + \rho A^\sigma.$$

Таким образом, 5-вектор (a^σ) определяется 4-вектором (a^k) только с точностью до слагаемого, пропорционального (A^σ).

Тензоры произвольного ранга в V_5 можно определять совершенно аналогично, как и в V_4, учитывая лишь их ковариантность по отношению к преобразованиям типа (1). Таким же образом можно образовать смешанные тензоры с латинскими и греческими индексами. Примером этого может служить сам тензор γ^ι_k. Что касается образования тензоров из тензоров путем сложения, умножения и «свертывания», то пояснений не требуется. Последняя операция может, конечно, относиться только к двум индексам одинакового вида (обоим греческим или обоим латинским).

§ 2. Абсолютное дифференциальное исчисление

Абсолютный дифференциал и абсолютная производная 5-вектора. Преобразование (1)

$$a^\iota = M^\iota_{\cdot\tau} \bar{a}^\tau$$

теряет смысл, если вместо a^ι взять $da^\iota (= a^\iota (x^i + dx^i) - a^\iota (x^i))$, поскольку в общем случае $M^\iota_{\cdot\tau}$ является функцией x^i. Вводя величины с тремя значками, $\Gamma^\iota_{\pi q}$ (ι и π принимают значения от 1 до 5, а q — от 1 до 4), определяем абсолютный дифференциал следующим образом:

$$\mathfrak{d}a^\iota = da^\iota + \Gamma^\iota_{\pi q} a^\pi dx^q; \tag{15}$$

при этом должны выполняться соотношения:

$$\mathfrak{d}a^\iota = M^\iota_{\cdot\tau} \mathfrak{d}\bar{a}^\tau,$$

$$\mathfrak{d}\bar{a}^\tau = d\bar{a}^\tau + \bar{\Gamma}^\tau_{\pi q} \bar{a}^\pi dx^q.$$

Отсюда получаем закон преобразования для Γ:

$$M^\pi_{\cdot\sigma} \Gamma^\iota_{\pi q} = M^\iota_{\cdot\tau} \bar{\Gamma}^\tau_{\sigma q} - M^\iota_{\sigma,\, q,} \qquad \left(M^\iota_{\sigma,\, q,} = \frac{\partial}{\partial x^q} M^\iota_{\cdot\sigma} \right). \tag{16}$$

Точно так же определим абсолютный дифференциал ковариантного вектора

$$\mathfrak{d}b_\iota = db_\iota - \Gamma^\pi_{\iota q} b_\pi, \tag{17}$$

причем это определение выбрано так, что

$$d(b_\iota a^\iota) = b_\iota \mathfrak{d}a^\iota_k + a^\iota \mathfrak{d}b_\iota. \tag{18}$$

Тогда обычным способом можно образовать абсолютный дифференциал 5-тензора любого порядка. Абсолютный дифференциал некоторого 5-тензора является 5-тензором того же вида.

Обозначим коэффициент перед dx^q в $\mathfrak{d}a^\iota$ через $a^\iota_{;\,q}$. Тогда будем иметь:

$$a^\iota_{;\,q} = a^\iota_{,\,q} + \Gamma^\iota_{\pi q} a^\pi. \tag{15a}$$

Коэффициент $a^\iota_{;\,q}$ ведет себя при преобразовании координат (x^i), как ковариантный 4-вектор. Поэтому $a^\iota_{;\,q}$ представляет собой смешанный тензор, такой, как, например, γ^ι_q. Таким образом при дифференцировании 5-тензора получается смешанный тензор.

Абсолютное дифференцирование 4-вектора. Если (τ^i) представляет собой некоторый вектор в V_4, то мы будем определять абсолютную производную, как и в геометрии Римана, равенством

$$\tau^i_{;\,q} = \tau^i_{,\,q} + \left\{ {i \atop pq} \right\} \tau^p, \tag{19}$$

где $\left\{ {i \atop pq} \right\}$ — символ Кристоффеля, образованный из метрического тензора g_{ik} пространства V_4. Точно так же $T^{\cdot\cdot}_{\cdot;\,q}$ совпадает с соответствующей производной Риччи, если $T^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ имеет только латинские индексы.

Если же $S^{\cdot\cdot}_{\cdot}$ — смешанный тензор, то мы определим

$$S^{\cdot\cdot}_{\cdot;\,q} = S^{\cdot\cdot}_{\cdot,\,q} + \sum (\cdot), \tag{20}$$

где сумма имеет столько же слагаемых, сколько индексов имеет тензор, а именно:

Каждому греческому индексу у $S^{\cdot\cdot\,\tau}_{\cdot\cdot}$ соответствует слагаемое $+\Gamma^{\tau}_{\sigma q} S^{\cdot\cdot\,\sigma}_{\cdot\cdot}$

» » » » $S^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\pi}$ » » $-\Gamma^{\sigma}_{\pi q} S^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\sigma}$

Каждому латинскому индексу у $S^{\cdot\cdot i}_{\cdot\cdot}$ » » $+\left\{ {i \atop pq} \right\} S^{\cdot\cdot d}_{\cdot\cdot}$

» » » » $S^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot p}$ » » $-\left\{ {r \atop pq} \right\} S^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot r}$

Это обобщение абсолютного дифференциального исчисления, введенное впервые Варденом и Бартолотти в формально аналогичном случае, выбрано таким образом, что выполняются следующие правила:

$$\begin{gathered}
(A^{\cdot\cdot}_{\cdot} B^{\cdot})_{;\,q} = A^{\cdot\cdot}_{\cdot;\,q} B^{\cdot} + B^{\cdot}_{;\,q} A^{\cdot}_{\cdot\cdot}, \\
(A^{\cdot\cdot}_{\cdot} + B^{\cdot\cdot}_{\cdot})_{;\,q} = A^{\cdot\cdot}_{\cdot;\,q} + B^{\cdot\cdot}_{\cdot;\,q}, \\
\rho_{;\,q} = \rho_{,\,q} \qquad (\rho = \text{скаляр}).
\end{gathered} \tag{21}$$

Как и в обычном исчислении Риччи, здесь так же имеются равенства

$$0 = g_{ik;\,q} = g^{ik}_{;\,q} = \delta^k_{i;\,q}. \tag{22}$$

Если 5-вектор a^{ι}, определенный вдоль отрезка кривой в пространстве x^i, удовлетворяет условию

$$\mathfrak{d} a^{\iota} = 0 = da^{\iota} + \Gamma^{\iota}_{\pi q} a^{\pi} dx^q,$$

то мы будем называть его вектором, параллельно сдвинутым вдоль отрезка кривой. Тогда 5-вектор изменяется вдоль кривой согласно равенству

$$da^{\iota} = -\Gamma^{\iota}_{\pi q} a^{\pi} dx^{q}. \tag{23}$$

Далее формула

$$da^{i} = -\left\{ {i \atop pq} \right\} a^{p}\, dx^{q} \tag{24}$$

определяет параллельный перенос 4-вектора (a^i) вдоль кривой.

§ 3. Определение символа $\Gamma^{\iota}_{\pi q}$

Прежде всего следует считать, что многообразие задано, если заданы тензоры $g_{\iota\varkappa}$ и γ^{k}_{ι}, которые одновременно определяют, согласно (12в), и четырехмерный метрический тензор g_{pq}. При заданной гауссовой системе координат тензоры $(g_{\iota\varkappa})$ и (γ^{k}_{ι}) произвольны в той степени, в какой это допускается произвольным выбором координат в V_5. Поэтому из $15 + 20$ компонент этих тензоров можно произвольно выбирать, согласно (1), 25 компонент, так что при заданной гауссовой системе координат, как и в случае старой теории гравитации, остается только 10 компонент для полного описания многообразия. Последнее можно считать полностью заданным только тогда, когда определены величины $\Gamma^{\iota}_{\pi q}$, что мы теперь и сделаем. Для этого введем три определения.

Если (a^{ι}) или (a_{ι}) — 5-вектор, то имеется соотношение

$$a_{\iota} = g_{\iota\varkappa}\, a^{\varkappa}.$$

Образуя абсолютный дифференциал, получаем

$$\mathfrak{d}a_{\iota} = g_{\iota\varkappa}\, \mathfrak{d}a^{\varkappa} + a^{\varkappa}\mathfrak{d}g_{\iota\varkappa}.$$

Из $\mathfrak{d}a_{\iota} = 0$ только тогда следует $\mathfrak{d}a^{\varkappa} = 0$ (и обратно), если положить, что $\mathfrak{d}g_{\iota\varkappa}$ обращается в нуль, т. е. что [3]

$$g_{\iota\varkappa;\,q} = 0. \tag{I}$$

Только в силу этого определения (I) имеет смысл высказывание, что абсолютный дифференциал 5-вектора (в определенном направлении) может обращаться в нуль. Это определение можно также заменить равнозначным, а именно: при параллельном переносе двух 5-векторов (a^{ι})

[3] Ср. следующую работу (статья 107).— *Прим. ред.*

и $(b^\varkappa)$ остается неизменной форма

$$g_{\iota\varkappa}a^\iota b^\varkappa.$$

Определение (I) дает 60 уравнений для определения 100 величин $\Gamma^\iota_{\pi q}$.

Между вектором (a^ι) выделенной плоскости и сопоставленным ему вектором (a^k) в V_4 имеется одно однозначное соотношение

$$a^\iota = \gamma^\iota_k a^k.$$

Если (a^k) перенести каким-либо образом (не параллельно) вдоль отрезка кривой C четырехмерного пространства, то в соответствии с этим соотношением перенос вектора a^ι выделенной плоскости A будет осуществляться совершенно определенным образом, а именно так, что выполняется равенство

$$\mathfrak{d}a^\iota = \gamma^\iota_k \mathfrak{d}a^k + a^k \mathfrak{d}\gamma^\iota_k. \tag{25}$$

Наше второе определение будет следующим: *при параллельном переносе* (a^k) (*т. е.* $\mathfrak{d}a^k = 0$) *абсолютный дифференциал одновременно переносимого вектора в выделенном направлении* A^ι *должен уменьшаться.* Это означает, что в равенстве (25) для $\mathfrak{d}a^k = 0$ дифференциал $\mathfrak{d}a^\iota$ должен быть пропорционален A^ι или что (при произвольных a^k, dx_q) выражение

$$a^k dx^q \gamma^\iota_{k;\,q}$$

должно быть пропорциональным A^ι. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$\gamma^\iota_{k;\,q} = A^\iota F_{kq}, \tag{II}$$

где F_{kq} — 4-тензор второго ранга.

Наше третье определение уточняет второе: *если производится перенос вектора* (a^k) *параллельно самому себе в его собственном направлении* $(dx^q = \rho a^q)$, *то соответствующий ему в выделенной плоскости вектор* (a^ι) *также претерпевает параллельный перенос* $(\mathfrak{d}a^\iota = 0)$. Это дает условие

$$0 = \gamma^\iota_{k;\,q} \cdot a^k a^q = A^\iota F_{kq} a^k a^q,$$

или, поскольку a^k является произвольным 4-вектором,

$$F_{kq} = -F_{qk}. \tag{III}$$

Совместность условий (I)—(III) будет показана позднее.

Если соотношение (II) умножить на A_ι, то вследствие (11) и (10) получим

$$F_{kq} = A_\iota \gamma^\iota_{k;\,q} = -\gamma^\iota_k A_{\iota;\,q}. \tag{26}$$

Умножая полученное соотношение на γ^k_σ, в силу (13а) имеем

$$\gamma^k_\sigma F_{kq} = -(\delta^\iota_\sigma - A_\sigma A^\iota) A_{\iota;\, q} = -A_{\sigma;\, q} + A_\sigma A^\iota A_{\iota;\, q},$$

или вследствие обращения в нуль выражения $A^\iota A_{\iota;\, q}\left(= \frac{1}{2}(A^\iota A_\iota)_{;\, q}\right)$

$$A_{\sigma;\, q} = \gamma^k_\sigma F_{qk}. \tag{27}$$

Главный результат этого параграфа заключается в следующем. Если Г подчинить очевидным по своей простоте условиям (I) — (III), то они определяются при заданных $g_{\iota\varkappa}$ и γ^k_ι не полностью, а только с точностью до антисимметричного тензора F_{kq}, который остается еще произвольным. Оказывается, что этот тензор вместе с метрическим тензором Римана g_{ik} полностью определяет свойства рассматриваемого многообразия.

Поучительно, что рассматриваемая здесь проблема связана с проблемой вложения одного риманова пространства R_m в другое риманово пространство R_n более высокой размерности. В этой проблеме в каждой точке пространства R_m также существуют две метрики, из которых одна относится к R_m, а другая — к R_n. Пространство R_m соответствует четырехмерному пространству, в то время как роль R_n в нашем случае играет сопоставленное каждой точке пространства R_m векторное пространство $n = 5$ измерений. Далее $x^\iota = x^\iota(y^1 \ldots y^m)$ $(\iota = 1, \ldots, n)$ представляет собой аналитическое представление подпространства. Каждой точке R_m соответствует метрика $g_{pq}dy^p dy^q$ в R_m и метрика $g_{\iota\varkappa}dx^\iota dx^\varkappa$ в R_n. Здесь величина $\frac{\partial x^\iota}{\partial y^p} = \gamma^\iota_p$ является тензором сопоставления. Вектор A^ι, определенный соотношением $\frac{\partial x^\iota}{\partial y^p} A_\iota = 0$, представляет собой нормаль к R_m в рассматриваемой точке. В этом случае так же справедливы соотношения (I) и (II). Тензор F_{kq} в этой проблеме с и м м е т р и ч е н и известен для случая $n = m + 1$ как «вторая основная форма». Таким образом, рассматриваемая нами пространственная структура отличается от рассматриваемой в проблеме вложения многообразий только определением (III). Именно в этом заключается отличие развиваемой нами теории от теории Калуцы.

§ 4. Линия, прямейшая по отношению к V_5

Если производить параллельный перенос вектора (a^ι) пространства V_5 в сопоставленном ему в пространстве V_4 направлении $a^k = \gamma^k_\iota a^\iota$, то этим самым в координатном пространстве будет определена некоторая кривая, к установлению уравнения которой мы теперь и переходим.

При соответствующем выборе параметра t можно положить

$$a^k = \gamma^k_\iota a^\iota = \frac{dx^k}{dt}.$$

Тогда, дифференцируя равенство

$$a^k = \gamma^k_\iota a^\iota$$

и учитывая, что $\delta a^\iota = 0$, получаем

$$\delta a^k = \gamma^k_{\iota;\,r} a^\iota a^r dt,$$

или в силу соотношения (II)

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop pq} \right\} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt} = A_\iota a^\iota F^k_r \frac{dx^r}{dt}. \tag{28}$$

Далее имеем

$$\frac{\delta (A_\iota a^\iota)}{\delta t} = A_{\iota;\,p} a^p a^\iota + A_\iota \frac{\delta a^\iota}{\delta t},$$

где второй член в правой части обращается в нуль вследствие равенства $\delta a^\iota = 0$. Но первый член в правой части так же обращается в нуль, поскольку в силу соотношения (27)

$$A_{\iota;\,p} a^p a^\iota = \gamma^k_\iota F_{pk} a^p a^\iota = F_{pk} a^p a^k = 0.$$

Следовательно, величина $A_\iota a^\iota = \rho$ постоянна на кривой, так что уравнение (28) можно записать в виде

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop pq} \right\} \frac{dx^p}{dt} \cdot \frac{dx^q}{dt} = \rho F^k_r \frac{dx^r}{dt} \quad (\rho = \text{const}). \tag{28a}$$

Что касается параметра t. то вдоль кривой $\delta (g_{\iota\varkappa} a^\iota a^\varkappa) = 0$, т. е. $g_{\iota\varkappa} \cdot a^\iota a^\varkappa = \text{const}$, или вследствие равенства (13б)

$$g_{pq} \frac{dx^p}{dt} \cdot \frac{dx^q}{dt} + \rho^2 = \text{const},$$

или

$$g_{pq} \frac{dx^p}{dt} \cdot \frac{dx^q}{dt} = \text{const}.$$

Поэтому, ограничиваясь временно-подобной кривой в уравнении (28а), мы можем ввести в качестве параметра длину дуги, определяемую равенством

$$ds^2 = -g_{pq} dx^p dx^q.$$

Этим также фиксируется входящая в (28а) постоянная ρ.

Уравнение (28a) соответствует релятивистскому уравнению движения электрически заряженной точечной массы точно, а не приближенно, как в теории Калуцы. Особенно замечательно, что отношение ρ электрического заряда к весомой массе является строго постоянным.

§ 5. Кривизна относительно V_5

Условие интегрируемости относительно параллельного переноса

$$\mathfrak{d}a^\sigma = 0,$$

или

$$da^\sigma = -\Gamma^\sigma_{\iota p}a^\iota dx^p,$$

гласит:

$$P^\sigma_{\iota q p}a^\iota = 0, \tag{29}$$

где

$$P^\sigma_{\iota p q} = -\Gamma^\sigma_{\iota q,\,p} + \Gamma^\sigma_{\iota p,\,q} + \Gamma^\sigma_{\tau q}\Gamma^\tau_{\iota p} - \Gamma^\sigma_{\tau p}\Gamma^\tau_{\iota q}. \tag{30}$$

Из равенства (29) следует, что обращение в нуль (30) имеет инвариантный характер. Доказательство того, что $P^\sigma_{\iota p q}$ является смешанным тензором, можно провести следующим образом. Рассмотрим двумерное многообразие $x^q = x^q(u, v)$, в котором в каждой точке определены два направления $\frac{\partial x^i}{\partial u}$, $\frac{\partial x^i}{\partial v}$. Если в рассматриваемой точке и в ее окрестности задать 5-вектор a^ι, то получим

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}v}\left(\frac{\mathfrak{d}a^\iota}{\mathfrak{d}u}\right) - \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}u}\left(\frac{\mathfrak{d}a^\iota}{\mathfrak{d}v}\right).$$

Имеем

$$\frac{\mathfrak{d}a^\iota}{\mathfrak{d}u} = \frac{\partial a^\iota}{\partial u} + \Gamma^\iota_{\pi q}a^\pi\frac{\partial x^q}{\partial u}$$

и далее

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}v}\left(\frac{\mathfrak{d}a^\iota}{\mathfrak{d}u}\right) = \left(\frac{\partial a^\iota}{\partial u} + \Gamma^\iota_{\pi q}a^\pi\frac{\partial x^q}{\partial u}\right)_{,\,v} + \Gamma^\iota_{\sigma p}\left(\frac{\partial a^\sigma}{\partial u} + \Gamma^\sigma_{\pi q}a^\pi\frac{\partial x^q}{\partial u}\right)\frac{\partial x^p}{\partial v}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}v}\left(\frac{\mathfrak{d}a^\iota}{\mathfrak{d}u}\right) - \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}u}\left(\frac{\mathfrak{d}a^\iota}{\mathfrak{d}v}\right) = P^\iota_{\pi p q}a^\pi\frac{\partial x^p}{\partial v}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial u}, \tag{31}$$

откуда виден тензорный характер $P^\iota_{\pi p q}$.

Конечно, в рамках исследуемой нами пространственной структуры существует образованная обычным образом из g_{ik} риманова кривизна, так же как и определяемые g_{ik} геодезические линии. Однако новый результат, полученный здесь, в том и состоит, что физические законы связаны с метрикой, которая возникает при параллельном переносе 5-векторов, определяемом величинами Г.

С другой стороны, ясно, что полученные таким образом математические образы могут входить в физические законы лишь постольку, поскольку они относятся к четырехмерному пространству, или касательному пространству V_4. Это связано с тем, что окончательное выражение может быть выражено только через 4-тензоры g_{ik} и F_{ik}, так что в результат не могут входить γ^{ι}_{k} и $g_{\iota\varkappa}$ [см., например, уравнение (28a)]; это будет подробнее пояснено в следующем параграфе.

По этим причинам целесообразно попытаться найти соотношение, возникающее между 5-кривизной (30) и (римановой) 4-кривизной. Будем исходить из соотношений (II) и (27) [4]

$$\gamma_{\iota k;\,q} = A_{\iota} F_{kq}, \tag{II}$$

$$A_{\iota;\,p} = \gamma_{\iota k} F^{k}_{p}. \tag{27}$$

Еще раз беря ковариантную производную, получаем

$$\gamma_{\iota k;\,q;\,p} = F_{kq;\,p} A_{\iota} + F_{kq} F^{r}_{p} \gamma_{\iota r}, \tag{IIa}$$

$$A_{\iota;\,p;\,q} = F_{kq} F^{k}_{p} A_{\iota} + \gamma_{\iota k} F^{k}_{p;\,q}, \tag{27a}$$

откуда

$$\gamma_{\iota k;\,q;\,p} - \gamma_{\iota k;\,p;\,q} = A_{\iota}(F_{kq;\,p} - F_{kp;\,q}) + \gamma_{\iota r}(F_{kq} F^{r}_{p} - F_{kp} F^{r}_{q}), \tag{IIб}$$

$$A_{\iota;\,p;\,q} - A_{\iota;\,q;\,p} = \gamma_{\iota k}(F^{k}_{p;\,q} - F^{k}_{q;\,p}). \tag{27б}$$

После некоторых вычислений для левых частей последних уравнений получаем

$$\gamma_{\iota k;\,q;\,p} - \gamma_{\iota k;\,p;\,q} = P^{\sigma}_{\iota q p} \gamma_{\sigma k} - R^{r}_{kpq} \gamma_{\iota r}, \tag{32}$$

$$A_{\iota;\,p;\,q} - A_{\iota;\,q;\,p} = P^{\sigma}_{\iota p q} A_{\sigma}, \tag{33}$$

где R — риманова 4-кривизна:

$$R^{r}_{kqp} = -\left\{ {r \atop kq} \right\}_{,\,p} + \left\{ {r \atop kp} \right\}_{,\,q} + \left\{ {r \atop tq} \right\} \left\{ {t \atop kp} \right\} - \left\{ {r \atop tp} \right\} \left\{ {t \atop kq} \right\}. \tag{34}$$

[4] Из соотношений (II) и (27) однозначно определяется Г. Если $F_{pq} + F_{qp} = 0$, то, как легко видеть, выполняются (I) и (III), чем доказывается их совместность. Следует доказать лишь справедливость соотношения (I), что легко выполнить с помощью равенства (13б).

Из уравнений (II6), (27б), (32) и (33) получаем искомые соотношения

$$P^{\sigma}_{\iota q p}\gamma_{\sigma k} = A_{\iota}(F_{kq;\,p} - F_{kp;\,q}) + \gamma_{\iota r}\{R^{r}_{kpq} + F_{kq}F^{r}_{p} - F_{kp}F^{r}_{q}\}, \tag{35}$$

$$P^{\sigma}_{\iota q p}A_{\sigma} = \gamma_{\iota r}(F^{r}_{q;\,p} - F^{r}_{p;\,q}). \tag{36}$$

Умножая соотношение (35) на $\gamma^{\tau k}$, принимая во внимание соотношение (36) и равенства

$$\gamma_{\sigma k}\gamma^{\tau k} = \gamma^{k}_{\sigma}\gamma^{\tau}_{k} = \delta^{\tau}_{\sigma} - A_{\sigma}A^{\tau},$$

получаем

$$P^{\tau}_{\iota q p} = -\gamma_{\iota r}A^{\tau}(F^{r}_{p;\,q} - F^{r}_{q;\,p}) + \gamma^{\tau k}A_{\iota}(F_{kq;\,p} - F_{kp;\,q}) + \\ + \gamma_{\iota r}\gamma^{\tau k}(R^{r}_{kpq} + F_{kq}F^{r}_{p} - F_{kp}F^{r}_{q}). \tag{37}$$

Следует еще заметить, что для 5-тензора кривизны справедливо также тождество (Бианки)

$$P^{\tau}_{\iota p q;\,r} + P^{\tau}_{\iota q r;\,p} + P^{\tau}_{\iota r p q} \equiv 0. \tag{38}$$

Наиболее просто это доказывается, если в рассматриваемой точке символ $\left\{ {r \atop pq} \right\}$ обратить в нуль с помощью преобразования координат (x^i) и преобразования (1) 5-координат $\Gamma^{\tau}_{\sigma q}$, что возможно в силу соотношения (16).

Далее из (37) свертыванием получаем

$$P_{\iota p} = \gamma^{q}_{\tau}P^{\tau}_{\iota q p} = A_{\iota}F^{k}_{p;\,k} + \gamma_{\iota r}(R^{r}_{p} - F_{kp}\cdot F^{kr}), \tag{39}$$

$$P = \gamma^{\iota p}P_{\iota p} = R - F_{kp}F^{kp} \tag{40}$$

и

$$U_{\iota p} = P_{\iota p} - \frac{1}{4}\gamma_{\iota p}(P + R) = A_{\iota}F^{k}_{p;\,k} + \gamma^{r}_{\iota}\left\{\left(R_{rp} - \frac{1}{2}g_{rp}R\right) - \right. \\ \left. - \left(F_{kr}F^{k}_{p} - \frac{1}{4}g_{rp}F_{kl}F^{kl}\right)\right\}. \tag{41}$$ [5]

Наконец, умножая (37) на $-A_{\tau}\gamma^{\iota}_{i}$, совершая циклическую перестановку индексов ipq и беря полусумму, получаем антисимметричный тензор

$$N_{piq} = F_{pi;\,q} + F_{iq;\,p} + F_{qp;\,i} = F_{pi,\,q} + F_{iq,\,p} + F_{qp,\,i}. \tag{42}$$

[5] В определение (41) введен риманов тензор R, хотя его и нельзя получить путем алгебраических операций из тензора 5-кривизны. Оправдание этому дает тождество (45), в котором производная от R выражена (неявно) через 5-тензоры.

§ 6. Уравнения поля

Ниже мы будем пользоваться обоими известными тождествами

$$\left(R_r^p - \frac{1}{2}\delta_r^p R\right)_{;\,p} \equiv 0, \tag{43}$$

$$\left(F_{kr}F^{kp} - \frac{1}{4}\delta_r^p F_{kl}F^{kl}\right)_{;\,p} \equiv F_{kr}F^{kp}_{;\,p} + \frac{1}{2}\left(F_{pk;\,r} + F_{kr;\,p} + F_{rp;\,k}\right)F^{kp}, \tag{44}$$

первое из которых проще всего получить из тождества Бианки для обычного тензора кривизны двукратным свертыванием, а второе легко проверяется непосредственно. С помощью тождеств (43) и (44), а также соотношений (II) и (27) получаем из (41), беря дивергенцию по индексу p,

$$U^p_{\iota;\,p} - \frac{1}{2}\gamma^r_\iota N_{rkp}F^{kp} \equiv 0. \tag{45}$$

Если в качестве уравнений поля взять

$$U_{\iota p} = 0, \tag{46}$$

$$N_{rkp} = 0 = F_{rk,\,p} + F_{kp,\,r} + F_{pr,\,k}, \tag{47}$$

то они будут связаны тождеством (45). Умножая (41), с одной стороны, на γ^ι_q, а с другой стороны — на A^ι, видим, что уравнение (46) распадается на уравнения

$$\left(R_{qp} - \frac{1}{2}g_{qp}R\right) - \left(F_{kq}F^k_p - \frac{1}{4}g_{qp}F_{kl}F^{kl}\right) = 0, \tag{46а}$$

$$F^{pk}_{;\,k} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}F^{pk}\right) = 0, \tag{46б}$$

которые, так же как уравнение (47), содержат только g_{ik} и F_{ik}. Таким образом мы приходим к тем самым уравнениям, которые до сих пор рассматривались в общей теории относительности как законы гравитационного и электрического полей. Благодаря уравнению (46) уравнения гравитационного поля и первая группа уравнений Максвелла объединены в единую систему уравнений, и все три группы уравнений связаны с «кривизной». Корпускулы в этой теории отсутствуют или (как это следует из тех же уравнений) они описываются как сингулярности.

§ 7. Введение специальных координат в пространстве V_5

Среди всех возможных координат в V_5 наиболее естественными представляются те, которые связаны со специальным выбором γ^ι_p и A^ι — заменой соответственно на δ^ι_p и δ^ι_5 (δ^ι_p равно 1 при $\iota = p$ и 0 при $\iota \neq p$; δ^ι_5 равно 1 при $\iota = 5$ и 0 при $\iota \neq 5$).

Если новые 5-координаты преобразуются по закону

$$a^\iota = M^\iota_\tau \overline{a}^\tau,$$

то

$$\gamma^\iota_p = M^\iota_\tau \overline{\gamma}^\tau_p.$$

$$A^\iota = M^\iota_\tau \overline{A}^\tau.$$

Если мы хотим получить $\overline{\gamma}^\tau_p = \delta^\tau_p$, $\overline{A}^\tau = \delta^\tau_5$, то нам необходимо лишь выбрать

$$M^\iota_p = \gamma^\iota_p,$$

$$M^\iota_5 = A^\iota.$$

Тогда из соотношения

$$\overline{b}_\varkappa = M^\iota_\varkappa b_\iota$$

следуют также равенства

$$\overline{\gamma}^p_\varkappa = \delta^p_\varkappa = \begin{cases} 1 & \text{при } \varkappa = p, \\ 0 & \text{при } \varkappa \neq p, \end{cases}$$

$$\overline{A}_\varkappa = \delta^5_\varkappa = \begin{cases} 1 & \text{при } \varkappa = 5, \\ 0 & \text{при } \varkappa \neq 5. \end{cases}$$

Опуская после преобразования штрихи, имеем

$$\gamma^\iota_p = \delta^\iota_p, \ \gamma^p_\iota = \delta^p_\iota, \ A^\iota = \delta^\iota_5, \ A_\iota = \delta^5_\iota. \qquad (48)$$

Если теперь произведем преобразование пространственных координат x^ι, то для сохранения равенств (48) необходимо преобразовать одновременно 5-координаты таким образом, чтобы a^ι (или a_ι) ($\iota = 1, 2, 3, 4$) вели себя как компоненты контравариантного (или ковариантного) вектора, в то время как a^5 (или a_5) — как инвариант.

Однако было бы ошибочным заключить, что 5-вектор есть не что иное как некоторая «сумма» 4-вектора и скаляра. Две величины только тогда равны, когда они дают одинаковый результат при всех операциях. Однако абсолютный дифференциал 5-вектора отличается от абсолютного дифференциала равной ему «суммы» 4-вектора и скаляра.

В новой системе координат сам способ описания может привести к недоразумению, если мы не будем отличать четыре первые компоненты 5-вектора a^ι от численно равных им компонент сопоставленного ему 4-вектора $a^k = \gamma^k_\iota a^\iota$. Обозначим через $a^{\underline{k}}$ четыре первые компоненты 5-вектора a^k. Тогда справедливо численное равенство

$$a^{\underline{k}} = a^k, \tag{49}$$

заменяющее соотношение

$$\gamma^k_\iota a^\iota = a^k.$$

Аналогично будем пользоваться обозначением $T^{\cdot}_{\cdot\cdot\cdot\underline{k}}$, если речь будет идти о четырех первых компонентах тензора (по индексу k) $T^{\cdot}_{\cdot\cdot k}$.

В нашей системе координат уравнение выделенной плоскости A имеет вид $a^5 = a_5 = 0$. Из равенств $A_\iota a^\iota = g_{\iota\varkappa} a^\iota a^\varkappa = 0$ для векторов плоскости A получаем

$$g_{5\varkappa} = 0, \tag{50}$$

а из равенства $g_{\iota\varkappa} A^\iota A^\varkappa = 1$ находим

$$g_{55} = 1. \tag{51}$$

Равенство (12) принимает здесь вид

$$g_{\underline{ik}} = g_{ik}. \tag{52}$$

Рассмотрим параллельный перенос 5-вектора, характеризуемый величиной Г. Из определения (I) ($g_{\iota\varkappa;\,q} = 0$) с учетом равенств (50) — (52) имеем

$$\begin{aligned} g_{jk,\,q} - \Gamma^s_{\underline{j}q} g_{sk} - \Gamma^s_{\underline{k}q} g_{js} &= 0, \\ -\Gamma^s_{5q} g_{sk} - \Gamma^5_{\underline{k}q} &= 0, \\ -\Gamma^5_{5q} &= 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Из определения (II) следует, что при параллельном переносе 4-вектора a^i инвариантное приращение δa^ι сопоставленного ему в выделенной плоскости A вектора $a^\iota = \gamma^\iota_k a^k$ лежит в направлении A^ι, т. е. что при нашем выборе координат дифференциал δa^i должен обращаться в нуль.

Таким образом, из уравнения

$$da^{\underline{i}} + \begin{Bmatrix} i \\ pq \end{Bmatrix} a^p\, dx^q = 0$$

должно следовать

$$da^{\underline{i}} + \Gamma^{\underline{i}}_{\underline{p}q}\, a^{\underline{p}} dx^q = 0 \qquad (a^5 = 0),$$

или, ввиду равенства $a^{\underline{i}} = a^i$,

$$\Gamma^{\underline{i}}_{\underline{p}q} = \left\{ {i \atop pq} \right\}. \tag{54}$$

Определение (III) гласит: если вектор a^k переносится параллельно самому себе, то инвариантное приращение $\mathfrak{d}a^\iota$ сопоставленного ему в плоскости A вектора $a^\iota = \gamma^\iota_k a^k$ обращается в нуль. Таким образом, наряду с обращением в нуль $\mathfrak{d}a^{\underline{i}}$ должно равняться нулю также и $\mathfrak{d}a^5$:

$$\mathfrak{d}a^5 = da^5 + \Gamma^5_{\underline{p}q} a^{\underline{p}} a^q = 0,$$

откуда вследствие $a^5 = 0$ (и $da^5 = 0$) и $a^{\underline{p}} = a^p$ имеем

$$\Gamma^5_{\underline{p}q} = -\Gamma^5_{\underline{q}p}, \tag{55}$$

т. е. Γ^5_{pq} представляет собой величину, обозначенную нами через F_{pq} (напряженность электромагнитного поля). Соотношения (53), (54) и (55) показывают, что Γ полностью определяется через g_{ik} и F_{ik} (при фиксированной системе координат в пространстве V_5).

Использование специальных координат имеет то преимущество, что исключение лишних переменных поля позволяет записать уравнения проще. Однако для этого нужно выделять индекс «5», благодаря чему число уравнений увеличивается и внесение естественных формальных связей затрудняется. Поэтому в нашем рассуждении мы с самого начала пользовались общими координатами в V_5. Но следует заметить, что вся теория возникла благодаря рассуждениям, подобным проведенным в этом параграфе. Мы не будем повторять всех рассуждений и результатов в специальной системе координат.

§ 8. Уравнения поля и закон движения

Следует еще показать, что постулированные в § 6 уравнения поля находятся в естественной связи с установленным независимо от них в § 4 законом движения. При этом следует принять во внимание, что теория еще не включает материальных частиц, которые должны поэтому рассматриваться как сингулярные точки. Однако вместо этого можно для простоты ввести в уравнения фиктивный член, который задает плотность материи; благодаря этому при рассуждениях можно пользоваться непрерывными функциями, что проще с точки зрения вычислений.

Предположим, что всюду, в том числе и там, где имеется налицо «материя», справедливо уравнение (47) (отсутствие магнитных полюсов). Тогда из уравнения (45) следует, что всюду выполняется уравнение

$$U^{p}_{\iota;p} = 0. \tag{56}$$

В правую же часть уравнения (46) мы должны ввести фиктивный смешанный тензор материи. По аналогии с первоначальной формулой, которая представляла в старой теории гравитации (пылевидную) материю при давлении, равном нулю, вместо уравнения (46) подставим

$$U^{\iota p} = \mu \xi^{\iota} \xi^{p}. \tag{57}$$

Величина (ξ^{ι}) представляет собой 5-вектор, которому сопоставлен 4-вектор ($\gamma^{p}_{\iota}\xi^{\iota}$) или ($\xi^{p}$). В силу (56) имеем

$$(\mu\xi^{p})_{;p}\xi^{\iota} + \mu\xi^{\iota}_{;p}\xi^{p} = 0. \tag{58}$$

Из соотношения (57) следует, что μ определено лишь тогда, когда нормировкой определена «величина» ξ^{ι}, т. е. если, например, положить

$$\xi^{\iota}\xi_{\iota} = \text{const}. \tag{59}$$

Тогда из уравнения (58) после умножения на ξ_{ι} и с учетом равенств $\xi_{\iota}\xi^{\iota}_{;p} = \frac{1}{2}(\xi_{\iota}\xi^{\iota})_{;p} = 0$ имеем

$$(\mu\xi^{p})_{;p} = 0, \tag{60}$$

благодаря чему (58) принимает вид

$$\xi^{\iota}_{;p}\xi^{p} = 0. \tag{61}$$

Рассмотрим теперь те кривые в координатном пространстве, которые «касательны» полю ξ^{p}. При соответствующем выборе параметра t система

$$\frac{dx_p}{dt} = \xi^{p}(x_1, \ldots, x_4) \tag{62}$$

является системой дифференциальных уравнений, определяющих эти кривые.

Тогда из уравнения (61) следует, что вдоль такой кривой $\delta\xi^{\iota} = 0$, т. е. ξ^{ι} переносится параллельно сопоставленному ему направлению ($\xi^{p} = \gamma^{p}_{\iota}\xi^{\iota}$).

Появляющиеся при этом переносе кривые (62) рассмотрены в § 4 и удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} k \\ pq \end{matrix} \right\} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt} = \rho F_r^k \frac{dx^r}{dt} \quad (\rho = \mathrm{const}). \tag{63}$$

Из уравнения (60) можно теперь показать, что эти кривые представляют собой «траектории материи». Именно, если рассмотреть один из пучков таких кривых, то из уравнения (60) (уравнение непрерывности) следует, что равенство нулю или отличие от нуля плотности μ сохраняется вдоль пучка или, точнее, что вдоль такого пучка «масса» постоянна, что, по существу, эквивалентно высказанному утверждению.

Изложенная здесь теория приводит единым путем к уравнениям гравитационного и электромагнитного полей. Однако она ничего не дает для понимания природы корпускул, как и для понимания установленных в квантовой механике результатов.

Поступила 2 декабря 1931 г.

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА. II*

(Совместно с В. Майером)

В работе, появившейся в прошлом году [1], мы показали, что благодаря введению 5-векторов в четырехмерном пространстве возникает пространственная структура, естественно ведущая к единой теории гравитации и электричества. Получаемые при этом уравнения электромагнитного поля совпадают с записанными в релятивистской форме уравнениями Максвелла для пустого пространства. Эти уравнения не допускают отличных от нуля плотностей электрического заряда и тока; поэтому они непригодны внутри электрических корпускул. В такой теории электрические корпускулы могут фигурировать только как сингулярности поля. Однако, по-нашему мнению, удовлетворительная теория поля должна избегать введения сингулярностей при описании полного поля, т. е. должна включать в себя и поля внутри корпускул.

Поэтому мы поставили вопрос, не допускает ли рассмотренная нами пространственная структура обобщения, приводящего к уравнениям электромагнитного поля с отличной от нуля плотностью электрического заряда. Ниже будет показано, что имеется совершенно естественное обобщение такого рода, которое позволяет получить совместную систему уравнений поля. Вопрос пригодности этой системы уравнений для описания действительности здесь еще не рассматривается.

Единственное изменение по сравнению с ранее рассмотренной пространственной структурой состоит в том, что отпадает фигурирующая в § 3 цитированной выше работы гипотеза (II). Оказывается, что установление совместных уравнений поля для этой пространственной структуры связано с четырехмерностью континуума.

* *Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität. II.* (Mit W. Mayer). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1932, 130—137.

[1] Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1931, 541. (Статья 106.— *Ред.*)

§ 1. Пространственная структура

В цитированной работе следует оставить без изменения §§ 1 и 2, так же как и гипотезу (I) из § 3, которая утверждает:

$$g_{\iota\varkappa;\,q} = 0. \tag{I}$$

Вместо же остальной части § 3 цитированной работы следует сказать следующее.

Производная $\gamma^{\iota}_{k;\,q}$ должна всегда представляться в форме

$$\gamma^{\iota}_{k;\,q} = A^{\iota}F_{kq} + \gamma^{\iota r}V_{rkq}, \tag{1}$$

где F_{kq}, V_{rkq} — тензоры с заранее неизвестными свойствами симметрии. Из этого равенства вследствие обращения в нуль $\gamma^{\iota}_{k}A_{\iota}$, а также $(\gamma^{\iota}_{k}A_{\iota})_{;q}$, следует

$$A_{\iota;\,q} = -\gamma^{k}_{\iota}F_{kq}. \tag{2}$$

Равенство нулю $g_{lk;q} \equiv (\gamma_{\iota l}\gamma^{\iota}_{k})_{;\,q}$ требует, с учетом формулы (1), антисимметрии V_{rkq} по первым двум индексам. Этим обеспечивается также обращение в нуль ковариантной производной $g^{\iota\varkappa}\,(\equiv A^{\iota}A^{\varkappa} + \gamma^{\iota}_{k}\gamma^{\varkappa k})$, что необходимо потребовать в силу (I).

Теперь рассмотрим 4-вектор a^k и сопоставленный ему в «выделенной плоскости» 5-вектор

$$a^{\iota} = \gamma^{\iota}_{k}a^{k}.$$

Если произвести перенос a^k вдоль некоторой кривой, то a^{ι} также переносится и появляется соотношение

$$\delta a^{\iota} = \gamma^{\iota}_{k}\delta a^{k} + (A^{\iota}F_{kq} + \gamma^{\iota r}V_{rkq})\,a^{k}\,dx_{q}.$$

Согласно нашей гипотезе (III) [гипотеза (II) здесь отпадает], дифференциал δa^{ι} должен обращаться в нуль, если a^k переносится параллельно самому себе, т. е. если δa^k обращается в нуль и dx_q пропорционален a^q. Поэтому должны выполняться соотношения

$$F_{kq} = -F_{qk},$$

$$V_{rkq} = -V_{rqk}.$$

Так как тензор V_{rkq} антисимметричен также по первым двум индексам, то он вообще антисимметричен.

Следует заметить, что вывод § 4 цитированной работы о том, что линия, характеризующаяся параллельным переносом 5-вектора в сопоставленном ему направлении, дает классическое уравнение движения электрически заряженной точечной массы, остается здесь в силе.

§ 2. Кривизна и уравнения поля

Если для этой обобщенной структуры найти 5-кривизну, то с помощью изложенного в § 5 цитированной работы методу получим

$$P_{\sigma\iota qp} = (\gamma^k_\sigma A_\iota - \gamma^k_\iota A_\sigma)(F_{kq;p} - F_{kp;q} + V_{rkq}F^r_p - V_{rkp}F^r_q) + \\ + \gamma^k_\sigma \gamma^r_\iota (R_{krqp} - F_{kq}F_{rp} + F_{kp}F_{rq} - V_{tkq}V^t_{rp} + V_{tkp}V^t_{rq} - V_{krq;p} + V_{krp;q}). \tag{3}$$

Умножение на $\gamma^{\sigma q}$ (однократное свертывание) приводит к

$$P_{\iota p} = \gamma^r_\iota (R_{rp} - F_{rq}F^q_p - V_{t_q r}V^{tq}_p + V^q_{rp;q} + A_\iota (F^q_{p;q} - V_{prq}F^{rq}). \tag{4}$$

Выполняя еще раз свертывание, получаем

$$P = R - F_{rq}F^{rq} - V_{rqp}V^{rqp}. \tag{5}$$

Перейдем теперь к установлению уравнений поля. Они не могут выбираться произвольно, например приравниванием нулю простейшего выражения, полученного алгебраически из 5-кривизны. Выбираемая система уравнений должна удовлетворять по крайней мере условиям совместности: переменные должны быть определены полностью, но так, чтобы любое решение в некотором сечении (например, $x_4 = \text{const}$) можно было продолжить в согласии с системой уравнений.

Следуя цитированной работе, прежде всего положим, что должна выполняться система уравнений

$$G_{\iota p} \equiv P_{\iota p} - {}^1/_4 \gamma_{\iota p} P = 0. \tag{6}$$

Тогда, в частности, антисимметричная часть выражения $\gamma^\iota_q G_{\iota p}$, которое мы назовем H_{qp}, должна обращаться в нуль:

$$0 = V^{rpq}_{;q} (\equiv H^{rp}). \tag{7}$$

Из уравнения (7) можно заключить, что тензор V может быть выражен через скаляр. Используя известный антисимметричный псевдоскаляр

$$\eta^{lrpq} (\equiv (-g)^{-1/2} \delta^{lrpq})$$

(здесь $\delta^{lrpq} = \pm 1$ в зависимости от того, четным или нечетным числом перестановок получено $lrpq$ из 1 2 3 4), можно положить

$$V^{rpq} = \eta^{lrpq}\varphi_l.$$

Поскольку ковариантная производная от η обращается в нуль, то

$$V^{rpq}_{;q} = \eta^{lrpq}\varphi_{l;q},$$

что равно нулю, только если

$$0 = \varphi_{l;q} - \varphi_{q;l} = \varphi_{l,q} - \varphi_{q,l} = 0.$$

Следовательно, φ_l имеет вид $\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}$. Таким образом, полевые переменные первоначальной теории описываются фактически только одной переменной.

Теперь разобьем уравнение (6) на две системы уравнений:

$$0 = A^{\iota}G_{\iota p} = G_p = F^q_{p;q} - V_{prq}F^{rq}, \tag{6а}$$

$$0 = \gamma^{\iota}_r G_{\iota p} = G_{qp} = \left(R_{qp} - \frac{1}{4}g_{qp}R\right) - (F_{sq}F^s_p - {}^1/_4 g_{qp}F_{st}F^{st}) - \\ - \left(V_{stq}V^{st}_p - \frac{1}{4}g_{qp}V_{str}V^{str}\right). \tag{6б}$$

Уравнение (6а) соответствует первой группе уравнений Максвелла, где второй член играет роль плотности электрического тока. Уравнение (6б) соответствует уравнениям гравитационного поля, но без соответствующего скалярного уравнения, так как свертка (6б) дает тождественный нуль.

Чтобы получить вторую группу уравнений Максвелла, построим из $-A^{\sigma}\gamma^{\iota}_r P_{\sigma\iota qp} (= 2P_{rqp})$ путем циклической перестановки индексов антисимметричное выражение

$$G_{rqp} = P_{rqp} + P_{qpr} + P_{prq}$$

(или, следуя введенному Схоутеном сокращенному способу записи, $P_{[rqp]}$) и положим его равным нулю. Тогда при аналогичной записи получим [2]

$$0 = G_{rqp} = F_{[rq;p]} + V_{s[rq}F^s_{p]}. \tag{8}$$

[2] Существует также совместная система уравнений, в которой вместо (8) полагается

$$0 = F_{[rq;p]} + \beta V_{s[rq}F^s_{p]} \equiv G_{rqp},$$

где β — постоянная. В этом варианте формально выделен случай $\beta = 0$. Именно тогда вместо вывода второй группы Максвелла из тензора кривизны появляется возможность введения 4-потенциала и можно избежать появления магнитного 4-тока. В настоящей работе этот случай из физических соображений не рассматривается.

У нас еще отсутствует как скалярное уравнение гравитационного поля, так и уравнение, определяющее аналитическое продолжение для φ. Эти отсутствующие уравнения вытекают из условия совместности полной системы уравнений, которая в свою очередь основывается на существовании некоторых тождеств, как это будет показано позднее.

Из уравнения (6а) следует

$$G^p_{;\,p} \equiv F^{pq}_{;\,q;\,p} - V^{prq}_{;\,p} F_{rq} - V^{prq} F_{rq;\,p}.$$

Первый член в правой части тождественно обращается в нуль. Второй член в силу (7) можно записать как $-F_{rq}H^{rq}$; третий можно записать в виде $-\frac{1}{3} V^{prq} F_{[pr;\,q]}$ и ввиду соотношения (8) — в виде $-\frac{1}{3} V^{prq} G_{prq} + V^{prq} V_{spr} F^s_q$, где последний член обращается в нуль из соображений симметрии. Таким образом получаем тождество

$$G^p_{;\,p} + H^{rq} F_{rq} + \frac{1}{3} G^{prq} V_{prq} \equiv 0. \tag{9}$$

Аналогичное рассмотрение второй группы уравнений Максвелла (8) также приводит к тождеству. Введем сначала удобный для вычисления способ записи. Любой несимметричный по индексам ковариантный или контравариантный тензор $A_{ik\ldots}$ имеет антисимметричную часть $\{A_{ik\ldots}\}$, определяющуюся следующим образом. Образуем из всех тензоров, получающихся перестановкой индексов, многочлен, взяв каждый тензор со знаком «+» или «—» в зависимости от того, четна или нечетна соответствующая перестановка. Применяя этот способ записи, получаем

$$\{G_{rqp;\,t}\} \equiv 3\{F_{rq;\,p;\,t}\} + 3\{V_{srq;\,t} F^s_p\} + 3\{V_{srq} F^s_{p;\,t}\}.$$

Первый член в правой части обращается в нуль в силу антисимметрии тензора F. Второй член, который может быть записан в виде $3\{V^s_{rq;t} F_{sp}\}$, мы вычислим в некоторой точке пространства сначала для локальной системы координат, в которой $g_{ik} = \delta_{ik}$. Тогда при суммировании по s ввиду антисимметрии тензоров следует принимать во внимание только члены с $s = t$, так что можно записать в (первой) форме $3\{V^s_{rq;\,s} F_{tp}\}$ $(s = t)$. Однако согласно определению $\{\ \}$, их можно также записать в виде $-3\{V^s_{rq;\,p} F_{st}\}$ или $3\{V^s_{rq;\,p} F_{ts}\}$, где мы приняли во внимание лишь члены с $s = p$. Поэтому способ записи $3\{V^s_{rq;\,s} F_{tp}\}$ $(s = p)$ (вторая форма) правилен. Соединение обоих форм дает $(^3/_2)\{V^s_{rq;\,s} F_{tp}\}$, причем теперь на индекс суммирования s не накладывается никаких ограничений. Это может быть записано [ср. (8)] также в виде

$(^3/_2)\{H_{rq}F_{tp}\}$. Этот способ записи не зависит, конечно, от выбора координат.

Аналогично поступим и с третьим членом, опять вводя локальную систему координат. Сначала имеем

$$\{V_{srq}F^s_{p;\,t}\} + \{V_{sqt}F^s_{p;\,r}\} + \{V_{str}F^s_{p;\,q}\},$$

причем в первом слагаемом s может иметь значение только t, во втором — только r, в третьем — только q. Поэтому третий член можно записать в виде

$$\{V_{trq}F^s_{p;\,s}\},$$

не накладывая ограничений на индекс s. Согласно уравнению (6а), можно записать

$$\{V_{trq}G_p\} + \{V_{trq}V_{plm}F^{lm}\}.$$

Второй член этого выражения равен нулю по соображениям симметрии. Заменим его на выражение

$$2\,[\{V_{trq}V_{prq}F^{rq}\} + \{V_{trq}V_{pqt}F^{qt}\} + \{V_{trq}V_{ptr}F^{tr}\}].$$

Здесь каждое слагаемое обращается в нуль; например, первое — вследствие симметрии $V_{trq}V_{prq}$ по индексам p и t. Таким образом рассматриваемое тождество принимает вид:

$$0 \equiv \{G_{rqp;\,t}\} + \frac{3}{2}\{H_{rq}F_{pt}\} - \{G_rV_{qpt}\}. \tag{10}$$

Оказывается, что совместность полной системы требует еще одного 4-тождества, которое получается в результате вычисления дивергенции от (6б). Принимая во внимание тождества (43) и (44) цитированной работы, получаем

$$G^p_{q;\,p} \equiv \frac{1}{4}\,R_{,\,q} - F^{kp}_{;\,p}F_{kq} + \frac{1}{2}\,F_{[kp;\,q]}F^{kp} - V^{stp}_{;\,p}V_{stq} - V_{stq;\,p}V^{stp} + \frac{1}{4}\,V_{,\,q},$$

где для краткости мы положили

$$V \equiv V_{stp}V^{stp}.$$

Все члены справа, кроме первого и последнего, преобразуются, согласно (6а) и (8), к виду

$$-F^{kp}_{;\,p}F_{kq} \equiv -G^kF_{kq} - V^{krt}F_{rt}F_{kq}.$$

Нетрудно видеть, что $V^{krt}F_{rt}F_{kq} \equiv \frac{1}{3}\,V^{krt}F_{[rt}F_{k]q}$, но тензор $F_{[rt}F_{k]q}$

антисимметричен по всем индексам, так что он тождественно равен $\frac{1}{8}\{F_{rt}F_{kq}\}$. Поэтому справедливо тождество

$$-F^{kp}_{;\,p}F_{kq} \equiv -G^k F_{kq} - \frac{1}{24}V^{krt}\{F_{rt}F_{kq}\}.$$

В силу соотношения (8), получаем

$$+\frac{1}{2}F_{[kp;\,q]}F^{kp} \equiv +\frac{1}{2}G_{kpq}F^{kp} - \frac{1}{2}V_{s[kp}F^s_{q]}F^{kp}.$$

При раскрытии символа Схоутена во втором члене в правой части два члена оказываются равными нулю по соображениям симметрии, так что остается лишь слагаемое $-\frac{1}{2}V_{skp}F^s_qF^{kp}$ или $-\frac{1}{2}V^{skp}F_{sq}F_{kp}$. Но это выражение, согласно сказанному выше, тождественно равно $-\frac{1}{48}V^{skp}\{F_{sq}F_{kp}\}$, так что имеем

$$+\frac{1}{2}F_{[kp;\,q]}F^{kp} \equiv \frac{1}{2}G_{kpq}F^{kp} - \frac{1}{48}V^{skp}\{F_{sq}F_{kp}\}.$$

Четвертый член записанного выше тождества, согласно уравнению (7), будет

$$-V^{stp}_{;\,p}V_{stq} \equiv -H^{st}V_{stq}.$$

С целью преобразования пятого члена рассмотрим выражение $-V^{stp}\{V_{stq;\,p}\}$. Те 18 перестановок индексов в $\{\ \}$, в которых q стоит перед значком дифференцирования, дают значение искомого пятого члена; шесть комбинаций индексов, при которых q стоит после значка дифференцирования, дают значение шестого члена $+\frac{1}{2}V_{,\,q}$. Следовательно:

$$-V_{stq;\,p}V^{stp} \equiv -\frac{1}{18}V^{stp}\{V_{stq;\,p}\} - \frac{1}{6}V_{,\,q}.$$

Учитывая все эти преобразования, получаем искомое тождество в виде

$$G^p_{q;\,p} + G^kF_{kq} - \frac{1}{2}G_{kpq}F^{kp} + H^{st}V_{stq} \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{4}\left(R + \frac{1}{3}V\right)_{,\,q} - \frac{1}{18}V^{skp}\left\{V_{qsk;\,p} - \frac{9}{8}F_{qs}F_{kp}\right\}.$$

Это тождество показывает, что если к уже установленным уравнениям поля надо добавить следующие два:

$$G \equiv R + \frac{1}{3}V_{pqr}V^{pqr} - \lambda = 0, \qquad (11)$$

где λ — универсальная постоянная, и

$$G_{qskp} \equiv \left\{V_{qsk;\,p} - \frac{9}{8} F_{qs} F_{kp}\right\} = 0. \qquad (12)$$

Это уравнение нетрудно привести к виду

$$(V_{123;\,4} - V_{234;\,1} + V_{341;\,2} - V_{412;\,3}) - \frac{3}{2}(F_{12}F_{34} + F_{13}F_{42} + F_{14}F_{23}) = 0,$$

или короче

$$V_{[123;\,4]} - \frac{3}{2} F_{1[2} F_{34]} = 0.$$

Тогда написанное выше тождество принимает вид

$$G^{p}_{q;\,p} + G^{k} F_{kq} - \frac{1}{2} G_{kpq} F^{kp} + H^{st} V_{stq} - \frac{1}{4} G_{,\,q} + \frac{1}{18} G_{qskp} V^{skp} \equiv 0. \qquad (13)$$

Наконец, еще следует указать, что уравнения поля (7) удовлетворяют тождеству

$$H^{rp}_{;\,p} \equiv 0. \qquad (14)$$

§ 3. Совместность уравнений поля

Имеем установленные уравнения поля:

$$G_{qp} \equiv \left(R_{qp} - \frac{1}{4} g_{qp} R\right) - \left(F_{sq} F^{s}_{p} - \frac{1}{4} g_{qp} F_{st} F^{st}\right) -$$

$$- \left(V_{stq} V^{st}_{p} - \frac{1}{4} g_{qp} V_{rst} V^{str}\right) = 0, \qquad (6б)$$

$$G_{p} \equiv F^{q}_{p;\,q} - V_{prq} F^{rq} = 0, \qquad (6а)$$

$$G_{rqp} \equiv F_{[rq;\,p]} + V_{s[rq} F^{s}_{p]} = 0, \qquad (8)$$

$$G \equiv R + \frac{1}{3} V_{prq} V^{prq} - \lambda = 0, \qquad (11)$$

$$G_{qskp} \equiv \left\{V_{qsk;\,p} - \frac{9}{8} F_{qs} F_{kp}\right\} = 0, \qquad (12)$$

$$H^{qp} \equiv V^{qpr}_{;\,r} = 0. \qquad (7)$$

Они связаны следующими тождествами:

$$G^p_{q;\,p} - \frac{1}{4} G_{,\,q} + G^k F_{kq} - \frac{1}{2} G_{kpq} F^{kp} + \frac{1}{18} G_{qskp} V^{skp} + H^{sk} V_{skq} \equiv 0, \qquad (13)$$

$$G^p_{;\,p} + H^{rq} F_{rq} + \frac{1}{3} G^{prq} V_{prq} \equiv 0, \qquad (9)$$

$$\{G_{rqp;\,t}\} + \frac{3}{2} \{H_{rq} F_{pt}\} - \{G_r V_{qpt}\} \equiv 0, \qquad (10)$$

$$H^{rp}_{;\,p} \equiv 0. \qquad (14)$$

Число зависимых функций равно $10 + 6 + 4 = 20$. Число независимых друг от друга дифференциальных уравнений, необходимых для их (релятивистского) определения, равно $20 - 4 = 16$. Число установленных нами дифференциальных уравнений равно $9 + 4 + 4 + 1 + 1 + 6 = 25$; необходимо, следовательно, доказать их совместность. Для этого доказательства целесообразно, как показывает структура тождества (13), объединить уравнения (6б) и (11) в одно уравнение

$$\overline{G}_{qp} \equiv G_{qp} - \frac{1}{4} g_{qp} G = 0.$$

Отберем 9 уравнений:

$$\overline{G}^{14},\ \overline{G}^{24},\ \overline{G}^{34},\ \overline{G}^{44},\ G^4,\ G_{1\,2\,3},\ H^{14},\ H^{24},\ H^{34}$$

и назовем их W-уравнениями, а все остальные — B-уравнениями, число которых равно $25 - 9 = 16$.

Рассмотрение тождеств показывает следующее. Если 16 B-уравнений выполняются во всем пространстве (что, конечно, достижимо) и, кроме того, выполняются W-уравнения в некотором сечении $x_4 = \overline{x}_4 = \mathrm{const}$, то W-уравнения выполняются также и в «бесконечно близком» сечении $x_4 = \overline{x}_4 + dx_4$. Отсюда, согласно известным методам, следует совместность представленной системы уравнений.

Отметим, что Э. Картан в общем и исчерпывающем исследовании[3] глубоко проанализировал те свойства систем дифференциальных уравнений, которые мы назвали в этой и в более ранних работах «совместностью».

Наконец, пользуюсь случаем, чтобы поблагодарить фонд Дж. Мейси в Нью-Йорке за присуждение стипендии одному из нас, что позволило продлить нашу совместную работу в этом году.

Поступила 30 апреля 1932 г.]

---

[3] E. Cartan. Bulletin de la Societe Mathematique de France. Paris, 1931. «Теория систем в инволюции и ее приложение к теории относительности».

О СВЯЗИ МЕЖДУ РАСШИРЕНИЕМ И СРЕДНЕЙ ПЛОТНОСТЬЮ ВСЕЛЕННОЙ*

(Совместно с У. де Ситтером)

В недавней заметке в «Göttinger Nachrichten» доктор О. Хекман указал на то, что нестатические решения уравнений поля общей теории относительности, отвечающие постоянной плотности, не обязательно приводят к положительной кривизне трехмерного пространства и что эта кривизна может быть отрицательной или равной нулю.

Сейчас нет прямых экспериментальных указаний на существование кривизны, и единственными непосредственно наблюдаемыми величинами являются средняя плотность и расширение. Последнее доказывает, что в действительности Вселенной отвечает нестатический случай. Поэтому ясно, что из результатов прямых наблюдений мы не можем получить ни знака, ни абсолютной величины кривизны, и возникает вопрос, возможно ли описание опытных данных вообще без введения кривизны.

Исторически член, содержащий «космологическую постоянную» λ, был введен в уравнения поля с целью теоретически объяснить существование конечной средней плотности в статической Вселенной. Однако теперь ясно, что в динамическом случае этой цели можно достичь, не вводя λ.

Если мы предположим, что кривизна равна нулю, то квадрат линейного элемента имеет вид

$$ds^2 = -R^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + c^2\,dt^2, \qquad (1)$$

где R — функция только от t, а c — скорость света. Если для простоты пренебречь давлением [1] p, то уравнения поля без λ-члена приводят к двум

* *On the Relation between the Expansion and the Mean Density of the Universe.* (With W. de Sitter). Proc. Nat. Acad. Sci., 1932, 18, 213—214.

[1] По-видимому, можно считать твердо установленным, что давлением p в реальной Вселенной можно пренебречь по сравнению с плотностью вещества ρ_0. Однако те же самые рассуждения остаются справедливыми, если и не пренебрегать давлением p.

дифференциальным уравнениям, из которых нам понадобится только одно, сводящееся в случае нулевой кривизны к уравнению

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{c\,dt}\right)^2 = \frac{1}{3}k\rho. \tag{2}$$

Наблюдения дают нам коэффициент расширения и среднюю плотность:

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{dR}{c\,dt} = h = \frac{1}{R_B}, \qquad \rho = \frac{2}{kR_A^2}.$$

Поэтому из уравнения (2) мы получаем теоретическое соотношение

$$h^2 = \frac{1}{3}k\rho \tag{3}$$

или

$$R_A^2/R_B^2 = 2/3. \tag{3'}$$

Взяв для коэффициента расширения h значение 500 *км/сек* на 10^6 *парсек*, или

$$R_B = 2\cdot 10^{27}\ \textit{см}, \tag{4}$$

находим

$$R_A = 1{,}63\cdot 10^{27}\ \textit{см}$$

или

$$\rho = 4\cdot 10^{-28}\ \textit{г}\cdot\textit{см}^{-3}, \tag{5}$$

что в точности совпадает с верхним пределом плотности, принятым одним из нас [2].

Определение коэффициента расширения h зависит от измеряемого красного смещения, что не вносит никаких существенных неточностей, и от расстояния до внегалактических туманностей, данные о которых пока очень неопределенны. Плотность зависит от предполагаемых масс этих туманностей и от шкалы расстояний. Кроме того, оценка плотности включает предположение, что вся масса вещества во Вселенной сосредоточена в туманностях. Кажется маловероятным, что последнее предположение вносит сколько-нибудь значительную неточность. Принимая это предположение, мы приходим к выводу, что получаемые из опыта отношения h^2/ρ или R_A^2/R_B^2 становятся пропорциональными Δ/M, где Δ — сторона куба, содержащего в среднем одну туманность, а M — средняя масса туманности. Принятые выше значения величин соответствуют значениям $\Delta = 10^6$ световых лет и $M = 2\cdot 10^{11}\odot$, что почти совпадает с оценкой массы нашей Галактики, полученной доктором Оортом. Поэтому,

[2] De Sitter. Bull. Astron. Inst. Netherlands, Haarlem, 6, 1931, 142.

хотя значение плотности (5), соответствующее предположению о нулевой кривизне и значению (4) коэффициента расширения, является, возможно, завышенным, оно наверняка имеет правильный порядок величины, и мы должны заключить, что в настоящее время можно описывать факты, не предполагая трехмерное пространство искривленным. Однако кривизну в принципе можно измерить, и повышение точности получаемых из опыта данных позволит в будущем определить ее знак и величину.

Представлена Обсерваторией Маунт-Вильсон 27 января 1932 г.

Сейчас нет основания считать кривизну трехмерного пространства равной нулю. Пересмотр шкалы расстояния привел к уменьшению постоянной Хэббла h. Современные значения $h \sim 170$ *км/сек* на 10^6 *парсек* и $\rho \sim 2 \cdot 10^{-29}$ *г·см*$^{-3}$. Это, вероятно, несколько больше, чем плотность видимого вещества; однако возможно, что учет вклада нейтрино увеличивает действительную плотность вещества.

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Положение людей науки отягощается тем, что различие языков тормозит их взаимопонимание. Жажда познания *космических связей*, воспринимаемых нами в виде символов, которые доставляются нашими несовершенными чувствами, сглаживает эти трудности. Никогда еще стремление к познанию истины не было таким сильным, как теперь, и пока оно будет существовать, можно смотреть в будущее с надеждой. Такая точка зрения помогает смягчить страдания человечества, а также является *существенной для преодоления современного кризисного периода.*

I

В физической науке существовали единые понятия. *Ныне они расщепились на две ветви*, одна из которых принадлежит *квантовой теории*, вторая — (*релятивистской*) *теории поля.* Их объединение желательно, но еще не достигнуто. Вторая ветвь могла бы развиваться на основе идей Фарадея—Максвелла о замене понятия массы понятием электромагнитного поля. Идею, что вещество можно рассматривать как места особого сгущения поля, реализовать пока не удалось. *Однако сохраняется стремление к тому, чтобы многообразие явлений сводилось в чисто теоретическую систему из как можно меньшего числа элементов.*

Так возникли *специальная теория относительности и общая теория относительности.* Задача последней заключается в однозначном описании движения точки в пространстве и времени без использования вспомогательного понятия отклоняющей силы. Необходимо найти с и с т е м у к о о р д и н а т, в которой движение точки выглядит прямолинейным

* *Der gegenwärtige Stand der Relativitätstheorie.* Die Quelle (Pädagogischer Führer), 82, 1932, 440—442. (По лекции, прочитанной 14 октября 1931 г. в Физическом институте Венского университета).

и равномерным. Это представляется несколько нелогичным. Мах ясно понимал это и искал формулировку, описывающую движение без ссылки на систему координат. *Теория относительности не исключает систему координат, но выбирает из них одну, соответствующую некоторым условиям*, и пытается найти законы движения, независимые от выбора системы координат.

Без введения Фарадеем и Максвеллом *понятия электромагнитного поля* теория относительности была бы невозможна. Это понятие ведет к понятию гравитационного поля, которое объясняет явления тяготения, но не включает в себя электромагнитные явления. Правда, хотя их и удалось уложить в рамки теории относительности, но в архитектурном построении теории отсутствовало логическое единство.

II

Представив себе мысленно, с целью получить возможно более простые математические формулировки, что вещество во Вселенной распределяется всюду равномерно с некоторой средней плотностью, можно считать, что оно находится внутри большого шара, количество вещества в котором пропорционально третьей степени радиуса, а поверхность — второй степени радиуса. В центре шара напряженность гравитационного поля равна нулю, но возрастает вдоль радиуса к внешней поверхности пропорционально радиусу шара. Следовательно, гравитационное поле усиливается в направлении к перефирии. Однако такой мир не мог бы существовать, если сохраняется закон тяготения Ньютона. Эту трудность можно преодолеть, добавляя в формулы новый член. Из уравнений следует, что *пространство* должно быть не *эвклидовым*, т. е. определяемым с помощью прямолинейной прямоугольной системы координат, а сферическим. Между радиусом этого сферического мира и средней плотностью существует определенное соотношение. *Чем меньше плотность массы, тем больше радиус.* Зная среднюю плотность массы, можно было бы определить и размеры мира.

III

Астрономия заключает из опыта, что чем дальше находятся от нас небесные светила, тем меньше их яркость и далее, что они движутся от нас тем быстрее, чем дальше они расположены. Это нашло свое выражение в сдвиге спектральных линий по сравнению с их положением в спектре, получаемом на Земле. Открытие и спектроскопическое изучение туманности вне Млечного Пути наблюдателями обсерватории Маунт-Вильсон подтвердило это предположение. Это привело одного русского математика[1] к мысли, что *видимая материя* находится в состоянии *расширения*. Наблюдения де Ситтера и других показали, что это движение расширения вполне вероятно. Тогда возникла мысль, нельзя ли *объяснить* его, *применяя старое уравнение гравитации без прибавления каких-либо новых членов*. Оказалось, что тогда можно сразу вычислить расширение, предполагая, что сдвиг спектральных линий действительно соответствует движению небесного тела.

При этом *значение радиуса мира по порядку величины* исчисляется *сотнями миллионов световых лет*. Этот порядок величины приблизительно соответствует значениям, доступным нам с нашими инструментами, а средняя плотность изображается дробью, в числителе которой стоит единица, а в знаменателе единица с 26 или 27 нулями. Если мир расширяется, то его *объем* должен был начаться с *нуля*. Однако это кажется невозможным. Для достижения современных размеров тогда потребовалось бы от *одного до десяти миллиардов лет*. Возраст же Земли, определенный по *радиевому методу*, составляет около 800 миллионов лет[2]. Следовательно, Земля должна была образоваться тогда, когда начиналось расширение. А будущее? Уравнения предсказывают, что расширение на определенной стадии кончится и тогда должно начаться *сжатие, которое будет продолжаться до нулевого объема*.

IV

Попытки найти единые законы материи, породнить теорию поля и квантовую теорию не прекращались. Речь идет о том, чтобы найти структуру пространства, удовлетворяющую условиям, выдвигаемым обеими теориями. Результатом оказалось *кладбище погребенных надежд*. Я также с 1928 года пытался найти решение, но снова отказался от этого пути. В противовес этому удалось построение теории на основе идеи, выдвинутой наполовину мной, наполовину моим сотрудником профессором доктором Майером. Уже десять лет назад один француз высказал интересную мысль — рассматривать мир как *пятимерное пространство*. В этом случае получается теория, в которой находят свое место и электромагнитные явления, причем архитектурное единство теории не нарушается. Однако я и Майер полагаем, что пятое измерение не должно появляться. Оно используется только математически для построения компонент, при-

[1] А. А. Фридман. И это было сделано *до* открытия красного смещения на опыте. Ср. также примеч. на стр. 398. — *Прим. ред.*

[2] Около 5 млрд. лет по современным оценкам.— *Прим. ред.*

менение которых дает уравнения для электромагнитных явлений, совершенно аналогичные тем, которые получаются в теории относительности для закона тяготения. При этом, конечно, выясняется одна трудность, которая, однако, преодолевается *новым математическим построением*, посредством которого можно ввести *соотношение* между гипотетическим *пятимерным пространством* и *четырехмерным пространством*. Таким образом удалось *охватить логическим единством и гравитационное* и *электромагнитное поля*.

Однако надежда не сбылась. Я полагал, что если бы удалось найти этот закон, то получилась бы теория, применимая к квантам и материи. Но это не так. Построенная теория, по-видимому, разбивается о проблему материи и квантов. Между обеими идеями все еще сохраняется пропасть.

110

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ВОЗНИКНОВЕНИИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Я охотно принял предложение рассказать об истории своей научной деятельности. Разумеется не потому, что мне хотелось бы восхвалять свой труд! Ведь чтобы писать об истории работы другого человека, требуется понимание процесса его мышления; этого гораздо легче добиться профессиональным историкам. Объяснить же ход своих собственных мыслей прежних лет, конечно, намного легче. Здесь автор находится в несравненно более выгодном положении, чем кто-либо другой; упускать такую возможность вовсе не значит проявлять скромность.

Когда в 1905 году специальная теория относительности провозгласила равноправие всех так называемых инерциальных систем для формулировки законов природы, со всей остротой встал вопрос: не существует ли и более всеобъемлющее равноправие систем координат? Иными словами: если понятие скорости может иметь только относительный смысл, то почему ускорение, несмотря на это, должно оставаться абсолютным понятием? Ведь с чисто кинематической точки зрения относительность любого движения не вызывает сомнения; с физической же точки зрения инерциальные системы находятся в привилегированном положении, что делает искусственным использование иначе движущихся систем координат.

Конечно, мне была известна мысль Маха, что инерция представляет собой сопротивление не столько ускорению самому по себе, сколько ускорению по отношению к массам всех остальных тел, существующих во Вселенной. Эта мысль казалась мне привлекательной, но для новой теории она не предлагала никакой приемлемой основы.

* *Einiges über die Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie.* George A. Gibson Foundation Lecture, Glasgow [20 th June 1933. Glasgow-Jackson. [Гибсонова лекция, прочитанная в Университете Глазго. (Перевод выполнен по перепечатке в «Mein Weltbild». Frankfurt am Main, 1955, 170—175. Франц. перевод в сб. «Comment je vous les monde», Flammarion, Paris, 1937. — *Прим. ред.*)]

Первый шаг на пути решения этой задачи я впервые сделал, пытаясь рассматривать закон тяготения в рамках специальной теории относительности. Как и большинство других исследователей того времени, я старался отыскать *полевой закон* тяготения, так как ввиду отказа от понятия абсолютной одновременности уже невозможно было бы сколько-нибудь естественным образом ввести непосредственное действие на расстоянии.

Конечно, проще всего было сохранить лапласов скалярный потенциал тяготения и дополнить уравнение Пуассона производной по времени так, чтобы удовлетворить требованиям специальной теории относительности. Следовало также привести в соответствие со специальной теорией относительности и закон движения материальной точки в гравитационном поле. Путь к этому был не столь очевиден, поскольку инертная масса тела могла зависеть от гравитационного потенциала. Этого даже следовало ожидать в силу закона инерции энергии.

Однако эти исследования привели к результату, который вызывал у меня глубокое недоверие. Согласно классической механике, ускорение тела в вертикальном поле тяготения не зависит от горизонтальной составляющей скорости. С этим связано то обстоятельство, что ускорение механической системы (или ее центра тяжести) в подобном поле тяготения не зависит от ее внутренней кинетической энергии. Согласно же разрабатывавшейся мною теории, ускорение падения зависело от горизонтальной скорости и, следовательно, от внутренней энергии системы.

Это противоречило давно известному опытному факту, что все тела падают в поле тяжести с одинаковым ускорением. Этот закон, который иначе можно сформулировать как закон равенства инертной и тяжелой масс, представлялся мне имеющим глубокий смысл. Я крайне удивился, что этот закон существует, и предположил, что он и даст ключ к более глубокому пониманию инерции и тяготения. В том, что этот закон выполняется строго, я не сомневался, даже не зная результатов изящных опытов Этвеша, которые — если я правильно вспоминаю — стали мне известны позже. Тогда я отказался от попытки рассматривать упомянутым выше образом проблему гравитации в рамках специальной теории относительности. Эта попытка, конечно, оказалась несостоятельной, поскольку не принималось во внимание наиболее фундаментальное свойство гравитации. Закон равенства инертной и тяжелой масс можно сформулировать очень наглядно следующим образом: в однородном гравитационном поле все движения происходят точно так же, как в равномерно ускоренной системе координат в отсутствие поля тяготения. Если бы этот закон выполнялся для любых явлений («принцип эквивалентности»), то это указывало бы на то, что принцип относительности должен быть распространен на неравномерно движущиеся системы координат, если стремиться к естественной теории гравитационного поля. Подобные размышления занимали меня с 1908 по 1911 год, и я старался вывести из них конкретные следствия, о которых я не предполагал говорить здесь. Важно было прежде всего понять, что разумную теорию гравитации можно построить лишь в результате обобщения принципа относительности.

Следовательно, необходимо было построить теорию, уравнения которой сохраняют форму при нелинейных преобразованиях координат. Удовлетворяют ли этому условию совершенно произвольные (непрерывные) или только некоторые преобразования координат, заранее я не знал.

Скоро я увидел, что при нелинейных преобразованиях, требуемых принципом эквивалентности, утрачивается простая физическая интерпретация координат, т. е. что больше уже нельзя требовать, чтобы разности координат были непосредственными результатами измерений с помощью идеальных линеек или часов. Уяснение этого обстоятельства доставило мне много беспокойства, так как я долго не мог понять, что же вообще должны означать координаты в физике. Решение этой дилеммы было найдено лишь в 1912 году, причем благодаря следующему рассуждению.

Требовалось все-таки найти новую формулировку закона инерции, которая в отсутствие истинного «гравитационного поля в инерциальной системе координат» переходила бы в галилееву формулировку принципа инерции. Согласно последней, материальная точка, на которую не действуют никакие силы, изображается в четырехмерном пространстве прямой линией, т. е. кратчайшей или, более точно, экстремальной линией. Это понятие предполагает существование длины линейного элемента, т. е. метрики. В специальной теории относительности — как показал Г. Минковский — эта метрика была квазиэвклидовой, т. е. квадрат «длины» ds линейного элемента представлял собой определенную квадратичную функцию дифференциалов координат.

Если же вводятся другие координаты с помощью нелинейного преобразования, то ds^2 остается однородной функцией дифференциалов координат, но коэффициенты этой функции ($g_{\mu\nu}$) будут уже не постоянными, а некоторыми функциями координат. Математически это означает, что физическое (четырехмерное) пространство обладает римановой метрикой. Временно-подобные экстремальные линии этой метрики определяют движение материальной точки, на которую не действуют другие силы, кроме гравитационных. Коэффициенты ($g_{\mu\nu}$) этой метрики одновременно описывают гравитационное поле по отношению к выбранной системе координат. Тем самым была найдена естественная формулировка принципа эквивалентности, распространение которой на произвольные гравитационные поля представлялось весьма естественным.

Таким образом, указанная выше дилемма разрешилась следующим образом: реальный физический смысл имеют не дифференциалы координат, а только соответствующая им риманова метрика. Тем самым были заложены основы общей теории относительности. Однако остались нерешенными еще две проблемы.

1. Если уравнения поля выражены в терминах специальной теории относительности, то как перенести их на случай римановой метрики?

2. Каковы дифференциальные уравнения, определяющие саму риманову метрику (т. е. $g_{\mu\nu}$)?

Над этими вопросами я работал с 1912 до 1914 года вместе с моим другом Марселем Гроссманом. Мы обнаружили, что математические методы для решения первой проблемы уже существовали в готовом виде в абсолютном дифференциальном исчислении Риччи и Леви-Чивиты.

Что касается второй проблемы, то для ее решения, очевидно, требовались дифференциальные выражения второго порядка из $g_{\mu\nu}$. Мы скоро увидели, что эти выражения уже были составлены Риманом (тензор кривизны). Еще за два года до опубликования общей теории относительности мы изучали правильные уравнения гравитационного поля, но не были убеждены в их физической применимости. Напротив, я даже полагал, что они не могут подтвердиться на опыте. К тому же мне еще казалось, будто из весьма общих соображений можно показать, что закон тяготения, инвариантный относительно произвольных преобразований координат, несовместим с принципом причинности. Это заблуждение стоило мне двух лет чрезвычайно тяжелой работы, пока я, наконец, не убедился в этом в конце 1915 года и нашел связь теории с данными астрономических наблюдений, после чего я с раскаянием вернулся к римановой кривизне.

В свете уже достигнутых результатов счастливо найденное кажется почти само собой разумеющимся, и любой толковый студент усваивает теорию без большого труда. Позади остались долгие годы поисков в темноте, полных предчувствий, напряженное ожидание, чередование надежд и изнеможения и, наконец, прорыв к ясности. Но это поймет только тот, кто пережил все сам.

О КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВА *

Когда мы называем пространство и время дорелятивистской физики «абсолютными», то в это надо вкладывать следующий смысл. Прежде всего пространство и время и, следовательно, система отсчета там реальны в том же смысле, что и, например, масса. Выбранным системам отсчета непосредственно соответствуют результаты измерений [1]. В силу этого постулаты геометрии и кинематики приобретают значение связей между измерениями, имеющих определенный физический смысл, который может быть истинным или ложным. Инерциальная система обладает физической реальностью постольку, поскольку выбором такой системы определяется закон инерции. Физическая реальность, которая обозначается словами пространство + время, независима по своим законам от поведения остальных физических реальностей, например от поведения тел. Совокупность связей между результатами измерений, которые могут быть получены с помощью одних только линеек и часов, не зависит, согласно классической теории, от распределения и движения тел, так же как и инерциальная система. Пространство мыслится как нечто физическое, но не испытывает никакого физического влияния.

Некоторые приверженцы теории относительности, ссылаясь на эти факты, ошибочно объявили, что классическая механика логически несостоятельна. Однако подобная теория ни коим образом не является логически несостоятельной, но она мало удовлетворительна с теоретико-познавательной точки зрения. Пространство и время в ней играют в

* *Sur la Structure cosmologique de l'Espace*. Из сборника статей Эйнштейна, изданного в Париже (Hermann et Cie Editeurs, 1933, 99—109. (Статья написана специально для сборника статей Эйнштейна, переведенных на французский язык М. Соловиным; сборник содержит также переводы статей 38 — том I — и 106. — *Прим. ред.*).

[1] Это верно, если по крайней мере в принципе можно иметь идеальные часы и линейки.

некоторой степени роль априорной реальности, в отличие от реальности тел (и полей), которые выступают как реальности, так сказать, вторичные. Это разделение физической реальности на две различные части порождает именно ту неудовлетворенность, которой в общей теории относительности удается избежать. С точки зрения систематичности построения системы — это ее главное достоинство. Она позволила соединить в едином понятии как вес, так и инерцию. Употребление обобщенных гауссовых координат, сделавшее возможным простую непрерывную нумерацию точек пространства-времени без всякого обращения к метрике, является в связи с вышесказанным не более чем средством (конечно, необходимым), позволяющим связать метрические свойства континуума с его другими свойствами (гравитационное поле, электромагнитное поле, закон движения)[2].

Итак, примем, что, согласно общей теории относительности, метрические свойства пространства-времени причинно не зависят от того, чем это пространство-время наполнено, но определены этим последним. Это придает континууму метрический неэвклидов характер и приводит к проблемам, чуждым классической теории. Действительно, так как можно предположить, что всюду во Вселенной звезды распределены с конечной средней плотностью, т. е. что существует некоторая отличная от нуля средняя плотность материи, то возникает вопрос о том, какое влияние оказывает эта средняя плотность на (метрическую) структуру пространства в целом. Это и есть так называемая космологическая проблема, которой мы займемся в этой короткой заметке. Из соображений простоты мы хотим отвлечься от того факта, что материя сконцентрирована в звездах и системах звезд, отделенных друг от друга пустым пространством, и будем рассматривать ее так, как если бы оно было непрерывно распределено на больших астрономических пространствах.

Предположение об отличной от нуля средней плотности материи, впрочем, приводит — как это уже с давних пор известно астрономам — к трудностям, даже с точки зрения ньютоновской теории. Действительно, по теореме Гаусса, число силовых гравитационных линий, пересекающих замкнутую поверхность с точностью до постоянного множителя, равно тяготеющей массе, заключенной внутри поверхности. Если эта материя обладает постоянной плотностью ρ, число силовых линий, пересекающих

[2] Это хорошо видно, если использовать обобщенные координаты в классической механике. Нужно положить риманов тензор четвертого ранга $R_{ik\,lm}$ равным нулю. Тогда определяются все компоненты метрического поля $g_{\mu\nu}$, так что они не будут зависеть от других физических величин. Именно в этом, с точки зрения релятивистского описания, находит свое выражение абсолютный характер времени и пространства классической теории.

сферу радиуса P пропорционально P^3. Поток напряженности поля через единицу поверхности сферы также пропорционален ее радиусу P и, следовательно, тем больше, чем больше радиус рассматриваемой сферы. Таким образом, материя, распределенная с постоянной средней плотностью, согласно теории Ньютона, не может находиться в равновесии. Чтобы избежать вытекающих отсюда трудностей, астроном Зеелигер предложил изменить ньютоновский закон тяготения на больших расстояниях. Но этот вопрос, естественно, не имел ничего общего с проблемой пространства.

Проблема, относящаяся к общей теории относительности, приводит к следующему вопросу: как может существовать пространство, в котором материя имеет постоянную пространственную плотность и находится в состоянии относительного покоя? Такое пространство следует рассматривать как очень грубую идеализацию, сделанную для того, чтобы как-то теоретически подступить к вопросу о реальном пространственно-временном континууме.

В соответствии с общей теорией относительности метрическое, или гравитационное, поле, описываемое с помощью $g_{\mu\nu}$, связано с тензором энергии $T_{\mu\nu}$, или, что то же самое, с тензором плотности энергии, уравнениями

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\varkappa T_{\mu\nu}. \qquad (1)$$

Здесь $R_{\mu\nu}$ — свернутый один раз риманов тензор кривизны:

$$R_{\mu\nu}=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\,\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\,\nu}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}, \qquad (1a)$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}=g^{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \beta\end{bmatrix}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\mu\beta,\,\nu}+g_{\nu\beta,\,\mu}-g_{\mu\nu,\,\beta}),$$

где обычное дифференцирование обозначено запятой перед соответствующим индексом.

Если «материю» можно считать свободной от всякого давления и если пренебречь действием других сил, кроме сил тяготения, необходимо положить

$$T^{\mu\nu}=\rho u^{\mu}u^{\nu}, \qquad (2)$$

где u^{μ} — контравариантный 4-вектор скорости[3] $\frac{dx_{\mu}}{d\tau}$ и ρ — скаляр плотности материи.

Здесь, естественно, предполагается, что плотность энергии весомой материи настолько превышает плотность энергии излучения, что этой

[3] Величина $d\tau$ есть элемент собственного времени. Следовательно, если перед пространственными компонентами ds^2 ставить знак плюс [как в формуле (3)], то $d\tau^2=-ds^2$.

последней можно пренебречь. Конечно, это предположение не совсем точно, но вносимая таким образом погрешность в дальнейших рассмотрениях и результатах ничего существенно не меняет.

Во-первых, очевидно, что Вселенная, обладающая отличной от нуля средней плотностью массы, не может быть эвклидовой. Этот случай в специальной теории относительности характеризуется фундаментальным инвариантом

$$g_{\mu\nu}\,dx^{\mu}\,dx^{\nu} = ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2\,dt^2, \tag{3}$$

т. е. постоянными значениями $g_{\mu\nu}$. Итак, $R_{\mu\nu}$ и R, а следовательно, и первый член уравнения (1) обращаются в нуль. Второй член уравнения (1) должен соответственно тоже быть равным нулю, а следовательно, обращается в нуль и ρ, что противоречит нашему предположению.

Наиболее простой возможной структурой пространства после эвклидовой структуры должна быть статическая структура (все компоненты $g_{\mu\nu}$ не зависят от t) с постоянной кривизной в «пространственных» сечениях (t = const).

Трехмерное пространство постоянной положительной кривизны (в частности, «сферическое» пространство) характеризуется, как известно, квадратом линейного элемента $d\sigma^2$ вида [4]

---

[4] Эта формула наиболее просто получается, если рассмотреть трехмерную сферу в четырехмерном эвклидовом пространстве с декартовыми координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 и центром 0, 0, 0, $-P$. Тогда уравнение сферы будет $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + (\xi_4 + P)^2 = P^2$ и элемент длины на ней —

$$d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2 = d\sigma^2.$$

Одна из четырех координат или их дифференциалов может быть исключена с помощью уравнения сферы. (Введение трех координат на сфере вместо четырех координат $\xi_1, \ldots, \xi_4$.)

К этому легче всего прийти (если мы хотим избежать квадратных корней) с помощью стереографической проекции точек сферы на гиперповерхность $\xi_4 = -2P$, как это показано на рис. 1.

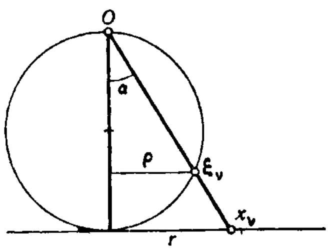


Рис. 1.

$$d\sigma^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{\left(1 + \frac{r^2}{(2P)^2}\right)^2} \qquad (r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

где точка $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ только кажется выделенной.

С пространственной точки зрения статический сферический мир описывается линейным элементом

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{\left(1 + \frac{r^2}{(2P)^2}\right)^2} - c^2\,dt^2. \tag{3a}$$

Априори представляется правдоподобным (с точки зрения свойств симметрии), что в таком мире материя может находиться в состоянии покоя ($u^1 = u^2 = u^3 = 0$) при постоянной плотности в пространстве и времени. С другой стороны, имеем:

$$u^4 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c},$$

так что $u_4 = g_{44}u^4 = c$.

Следовательно, приходится во втором члене уравнения (1) положить равными нулю все компоненты $T_{\mu\nu}$ кроме T_{44}. Только $T_{44} = \rho u_4 u_4 = \rho c^2$ отлично от нуля.

Из формулы (3а), согласно (1а), для $R_{\mu\nu}\,(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ получаем значения

$$\begin{matrix} -\frac{2}{P^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{P^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{P^2} & 0\,; \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

....

Вместо ξ_ν вводятся x_ν, удовлетворяющие соотношению

$$\frac{x_\nu}{\xi_\nu} = \frac{r}{\rho} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = 1 + \frac{r^2}{(2P)^2} \qquad (\nu = 1, \ldots, 4).$$

Это дает $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ ($\xi_4 = -2P$) как функции x_ν ($\nu = 1, 2, 3$), откуда дифференцированием получаются $d\xi$ и, следовательно, $d\sigma^2$ как функция x_ν и dx_ν в соответствии с формулой, указанной в тексте.

для $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ — значения

$$\begin{matrix} \frac{1}{P^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{P^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{P^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3c^2}{P^2} \end{matrix};$$

а для $-\varkappa T$ — значения

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varkappa\rho c^2. \end{matrix}$$

Таким образом из уравнений (1) вытекают два взаимно противоречивых уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P^2} &= 0, \\ \frac{3c^2}{P^2} &= \varkappa\rho c^2. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Следовательно, уравнения (1) исключают возможность Вселенной с постоянной отличной от нуля плотностью материи. В этом заключается реальная трудность общей теории относительности, если исходить из того, что нельзя представить себе других пространственных структур, независимых от времени, кроме тех, которые даются линейным элементом (3а) (с положительным или отрицательным P^2).

Чтобы выйти из этого затруднения, я сначала нашел следующее средство. Постулат относительности позволяет добавить в левую часть уравнений (1) член вида $\lambda\, g_{\mu\nu}$, где λ — универсальная постоянная (космологическая постоянная), которая должна быть достаточно малой, чтобы добавленный член был практически несущественным при расчетах гравитационного поля Солнца и движения планет. Дополненные таким членом уравнения имеют вид

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) + \lambda g_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu}. \quad (1б)$$

Теперь вместо уравнений (4) получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P^2} &= \lambda, \\ \frac{3c^2}{P^2} &= -\lambda c^2 + \varkappa\rho\tau^2. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Эти уравнения согласуются между собой и для «космического» радиуса дают значение

$$P = \frac{2}{\sqrt{\varkappa\rho}} = \frac{c}{\sqrt{2\pi K\rho}}, \tag{5}$$

где K — гравитационная постоянная в обычной системе единиц.

Но исследования Фридмана и Леметра показали впоследствии, что этот выход из трудности неудовлетворителен по следующим причинам.

Эти авторы также взяли за основу уравнение (1б). Но они обобщили формулу (3а) так, что ввели вместо постоянного «космического» радиуса P (и плотности ρ) функцию времени. Тогда уравнения (1б) показали, что решение уравнений (4а), (5) имеет неустойчивый характер. Это значит, что в решениях, которые в некоторый момент очень мало отличаются от (4а), P не колеблется вокруг величины, заданной выражением (5), но постепенно все больше и больше отклоняется от нее как для бо́льших, так и для меньших значений времени. При переходе к этим «динамическим» решениям задачи остается неопределенной величина λ и ее знак, а также знак $\frac{1}{P^2}$, так что кажутся в равной степени возможными отрицательные значения пространственной кривизны [5]. Таким образом концепция пространственно замкнутого мира вновь теряет свою базу.

Если же теория приводит нас к динамическим решениям для структуры пространства, то исчезает необходимость введения универсальной константы λ, так как уравнения (1) имеют динамические решения типа (3а), для которых $\lambda = 0$.

В последнее время решение проблемы получило сильный толчок благодаря экспериментальным результатам в астрофизике. Измерения доплеровского смещения (в особенности измерения Хэббла), проведенные для внегалактических туманностей, похожих на Млечный Путь, показали, что эти туманности отдаляются от нас со скоростью тем бо́льшей, чем больше расстояние до них. Исследования Хэббла кроме всего прочего показали, что эти объекты распределены в пространстве статистически равномерно. Таким образом, предположение теории о равномерной сред-

[5] Первым, кто обратил внимание на этот момент, был Хекман. (Как указывает А. А. Фридман, на это еще раньше обратил внимание Я. Д. Тамаркин.— *Прим. ред.*)

ней плотности материи получает экспериментальное подтверждение. Открытие разбегания внегалактических туманностей оправдывает переход к динамическим решениям для структуры пространства, что ранее должно было казаться лишь следствием неудовлетворительного положения в теории.

Итак, без введения члена с λ можно теоретически объяснить на основе уравнений (1) существование конечной (средней) плотности материи ρ, считая в формуле (3а) P (и ρ) зависящими от времени. Следует отметить, что постоянными во времени остаются не координаты частицы x_1, x_2, x_3, а величины

$$\frac{x_1}{P}, \quad \frac{x_2}{P}, \quad \frac{x_3}{P},$$

в чем нетрудно убедиться из простого геометрического рассмотрения. Мы все же введем в качестве новых координат не эти величины, а величины

$$P_0\frac{x_1}{P}, \quad P_0\frac{x_2}{P}, \quad P_0\frac{x_3}{P},$$

где P_0 означает длину порядка «космического радиуса». Мы положили также, что разности координат имеют тот же порядок величины, что и длины, измеряемые линейкой[6].

Используя теперь новые координаты x_1, x_2, x_3 и полагая в новой системе $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, находим, что соотношение (3а) приобретает вид

$$ds^2 = \left(\frac{P}{P_0}\right)^2 \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{\left(1 + \frac{r^2}{(2P_0)^2}\right)^2} - c^2\,dt^2. \tag{3б}$$

Мы можем рассматривать P_0 как космический радиус P в определенный момент t_0. Единственной переменной во времени величиной остается «коэффициент расширения» P/P_0 $(= A)$.

Мы уже отмечали, что нельзя согласовать равномерную плотность материи ρ, сделав предположение о кривизне пространства при A, постоянном во времени, т. е. без «расширения» пространства. Напротив, будет видно, что конечная плотность ρ не требует с необходимостью существования кривизны пространства (трехмерного). Иначе говоря, соотношение (3б) мы заменяем на

$$ds^2 = A^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - c^2\,dt^2, \tag{3в}$$

где единственной функцией времени t $(= x_4)$ является A. Действительно,

....

[6] Исследование проблемы в целом, так же как и различных частных случаев, было выполнено Толменом, который использовал весьма сложный выбор координат. Де Ситтеру принадлежит ясное и исчерпывающее обсуждение всех возможных случаев.

подставляя это выражение в уравнения (1), получаем

$$2A\frac{d^2A}{dt^2}+\left(\frac{dA}{dt}\right)^2=0, \tag{6}$$

$$3\left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}\right)^2=\varkappa\rho c^2. \tag{7}$$

Уравнение (6) дает

$$A=c\,(t-t_0)^{2/3}. \tag{6а}$$

Если l есть расстояние $\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\Delta x_3^2}$ между двумя массами, измеренное в координатной мере и независимое от времени, то Al является, согласно соотношению (3в), расстоянием D между этими материальными точками, измеренным линейкой. Следовательно, соотношение (6а) выражает расширение, которое начинается в определенный момент t_0. Из уравнения (7) вытекает, что в этот момент плотность бесконечна. Измерения, выполненные Хэбблом для внегалактических туманностей, показали, что величина

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dt}\left(=\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}\right)$$

оказывается в настоящее время постоянной (h). Считая, что t отвечает настоящему моменту, согласно соотношению (6а), имеем

$$t-t_0=\frac{2}{3h}. \tag{8}$$

Это время достигает примерно 10^{10} лет. Естественно, что плотность в момент t_0 не должна была быть на самом деле бесконечно большой. Лауэ справедливо заметил, что для этого момента времени наше грубое приближение, основанное на независимости плотности ρ, неверно.

Применение уравнения (7) к настоящему времени дает

$$3h^2=\varkappa\rho c^2\,(=8\pi K\rho). \tag{9}$$

Эта формула устанавливает соотношение между константой Хэббла h, полученной на основе эффекта Доплера, и средней плотностью ρ. Численно это уравнение дает для ρ значение порядка 10^{-28}, что хорошо согласуется с оценкой астрономов.

Из приведенных соображений следует, что при современном состоянии наших знаний отличие плотности материи от нуля не должно теоретически связываться с пространственной кривизной, а должно связываться с расширением пространства. Мы, естественно, не хотим сказать этим, что такая кривизна (положительная или отрицательная) не существует. В настоящее время у нас нет никаких указаний на ее существование. Во всяком случае она должно быть значительно меньше, чем это следовало из примитивной теории [см. формулу (5)].

112

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ*

Специальная теория относительности возникла из максвелловых уравнений электромагнитного поля. Так уж случилось, что даже при выводе основных законов и понятий механики существенную роль сыграли законы электромагнитного поля. Вопрос о независимости этих законов является совершенно естественным, так как преобразования Лоренца, фактически являющиеся базисом специальной теории относительности, сами по себе не связаны непосредственно с теорией Максвелла и так как мы не знаем, в какой степени понятие энергии в теории Максвелла не изменится под влиянием молекулярной физики. В приведенных ниже рассуждениях мы будем основываться, помимо преобразований Лоренца, лишь на законах сохранения энергии и импульса.

Мы начнем с попытки обосновать выражения для энергии и импульса материальной частицы хорошо известным путем. Фундаментальным инвариантом преобразований Лоренца является

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

или

$$ds = dt\,(1 - u^2)^{1/2},$$

где

$$u^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

* *Elementary Derivation of the Equivalence of Mass and Energy.* Bull. Amer. Math. Soc., 1935, 61, N 4, 223—230. (Одиннадцатая гибсонова лекция, прочитанная 28 декабря 1934 г. в Питтсбурге на совместном заседании Американского математического общества, Американского физического общества и секции А Американского общества развития науки [AAAS]).

Если компоненты контравариантного вектора (dt, dx, dy, dz) разделить на ds, то получается вектор

$$\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}}, \quad \frac{u_1}{(1-u^2)^{1/2}}, \quad \frac{u_2}{(1-u^2)^{1/2}}, \quad \frac{u_3}{(1-u^2)^{1/2}}.$$

Пусть вектор (dt, dx, dy, dz) направлен вдоль мировой линии частицы с массой m. Мы получим связанный с ее движением вектор, если умножим на m 4-вектор скорости, который мы только что выписали. Таким образом получаем

$$(\eta^\sigma) = \left(\frac{m}{(1-u^2)^{1/2}}, \frac{mu_i}{(1-u^2)^{1/2}}\right),$$

где индекс i пробегает значения от 1 до 3.

Пренебрегая третьей степенью скорости, мы можем выразить компоненты этого вектора следующим образом:

$$(\eta^\sigma) = \left(m + \frac{1}{2} mu^2, mu_i\right).$$

Пространственные компоненты (η^σ) в этом приближении совпадают с компонентами импульса в классической механике, а временна́я компонента, с точностью до аддитивной постоянной m, совпадает с кинетической энергией материальной точки.

Снова возвращаясь к точному выражению для (η^σ), естественно рассматривать

$$\frac{mu_i}{(1-u^2)^{1/2}}$$

как импульс, а

$$m\left(\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}} - 1\right)$$

как кинетическую энергию частицы. Но как следует интерпретировать временну́ю компоненту $\frac{m}{(1-u^2)^{1/2}}$, выражение для которой имеет вполне реальный смысл? Здесь естественно прямо придать ей смысл энергии и, таким образом, приписать покоящейся частице *энергию покоя* m (mc^2 в обычных единицах).

Этот вывод, конечно, нельзя рассматривать как доказательство, так как ниоткуда не следует, что при взаимодействии нескольких одинаковых частиц друг с другом именно этот импульс удовлетворяет закону сохранения импульса, а эта энергия — закону сохранения энергии; априори могло бы случиться, что в законы сохранения входят другие выражения для скорости.

Кроме того, не так уж ясно, что следует понимать под *энергией покоя*, так как энергия определена лишь с точностью до неопределенной аддитивной постоянной; в этой связи, однако, следует заметить следующее. Любую систему можно рассматривать как материальную точку, пока мы не имеем дела ни с какими другими процессами, кроме изменения скорости трансляции ее как целого. Однако совершенно четкий смысл имеет рассмотрение изменения энергии покоя в случае процессов, не сводящихся к простому изменению скорости трансляции. Тогда приведенная выше интерпретация требует, чтобы при таких процессах инертная масса материальной точки менялась как энергия покоя; это требование, конечно, нуждается в доказательстве.

Сейчас мы покажем, что если законы сохранения энергии и импульса справедливы во всех системах координат, связанных друг с другом преобразованиями Лоренца, то энергия и импульс действительно определяются приведенными выше формулами и предполагаемая эквивалентность массы и энергии покоя также существует.

Начнем с простых кинематических следствий преобразований Лоренца:

$$t = \frac{t' + vx'}{(1-v^2)^{1/2}}, \qquad x = \frac{x' + vt'}{(1-v^2)^{1/2}}, \qquad y = y', \qquad z = z',$$

где v — относительная скорость координатных систем K и K'. Те же самые соотношения выполняются и для дифференциалов dx и т. д. Производя соответствующие вычисления, легко получить закон преобразования компонент скорости:

$$u_1 = \frac{u_1' + v}{1 + u_1'v}, \qquad u_2 = \frac{u_2'(1-v^2)^{1/2}}{1 + u_1'v}, \qquad u_3 = \frac{u_3'(1-v^2)^{1/2}}{1 + u_1'v}.$$

Отсюда следует

$$u^2 = \frac{u'^2 + 2u_1'v + v^2 - u_2'^2 v^2 - u_3'^2 v^2}{(1 + u_1'v)^2}$$

и

$$\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}} = \frac{1 + u_1'v}{(1-u'^2)^{1/2}(1-v^2)^{1/2}},$$

равно как и

$$\frac{u_1}{(1-u^2)^{1/2}} = \frac{u_1' + v}{(1-u'^2)^{1/2}(1-v^2)^{1/2}},$$

$$\frac{u_2}{(1-u^2)^{1/2}} = \frac{u_2'}{(1-u'^2)^{1/2}}, \quad \frac{u_3}{(1-u^2)^{1/2}} = \frac{u_3'}{(1-u'^2)^{1/2}}.$$

Для дальнейшего нам понадобится понятие *пары частиц*. Под парой частиц мы будем понимать две материальные точки, скорости которых в системе K' равны по величине и противоположны по направлению (дальше мы будем рассматривать случай частиц равной массы). Две частицы пары мы будем обозначать индексами «+» и «—». Итак, $u'_+ = u'_-$; $u'_{1+} = -u'_{1-}$ и т. д. Применяя к ним наши преобразования, мы получаем после сложения:

$$\frac{1}{(1-u_+^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1-u_-^2)^{1/2}} = \frac{2}{(1-u'^2)^{1/2}(1-v^2)^{1/2}},$$

$$\frac{u_{1+}}{(1-u_+^2)^{1/2}} + \frac{u_{1-}}{(1-u_-^2)^{1/2}} = \frac{2v}{(1-u'^2)^{1/2}(1-v^2)^{1/2}}, \tag{1}$$

$$\frac{u_{2+}}{(1-u_+^2)^{1/2}} + \frac{u_{2-}}{(1-u_-^2)^{1/2}} = 0,$$

$$\frac{u_{3+}}{(1-u_+^2)^{1/2}} + \frac{u_{3-}}{(1-u_-^2)^{1/2}} = 0.$$

Суммы в левых частях этих уравнений зависят только от скорости пары u' по отношению к избранной нами системе K' и от относительной скорости v систем K' и K, но не от направления движения частиц.

Отметим, что уравнения (1) можно вывести более простым способом, рассматривая непосредственно преобразования для суммы 4-векторов скоростей частиц пары. Однако я выбрал другой путь, так как законы сохранения подсказывают именно такую трехмерную систему записи.

Перейдем теперь к сути дела. Предположим, что импульс и энергия материальной точки даются выражениями вида

$$I_\nu = mu_\nu F(u), \qquad E = E_0 + mG(u) \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

где F и G — универсальные четные функции скорости u, обращающиеся в нуль при $u = 0$. Тогда $mG(u)$ будет представлять собой кинетическую энергию, E_0 — *энергию покоя* материальной точки, а m — *массу покоя*, или просто массу. Здесь предположено, что импульс и энергия *точечной массы* не зависят от направления движения и от ориентации *точечной массы* относительно ее скорости. Далее предполагается, что в выражения для импульса и энергии входит *одна и та же* постоянная масса m. Позднее мы найдем этому частичное обоснование.

Рассмотрим теперь упругое нецентральное соударение двух частиц одинаковой массы. Всегда можно выбрать систему координат K' так, чтобы по отношению к ней скорости масс перед столкновением были бы равны друг другу по величине и противоположны по направлению. Каковы скорости частиц после столкновения по отношению к системе K'? Если бы скорости после соударения не были, как и раньше, равны и противоположны, то это противоречило бы закону сохранения импульса. Если бы по величине равные скорости обеих масс после столкновения не равнялись бы соответствующим скоростям до столкновения, то в случае упругого столкновения это противоречило бы закону сохранения энергии. Эти заключения совершенно не зависят от конкретного вида зависимости импульса и энергии от скорости. Таким образом соударение лишь изменяет направление движения двух точечных масс по отношению к системе K'. Коротко это можно выразить так: пара частиц перед соударением преобразуется после соударения в пару частиц с той же самой скоростью u'.

Итак, правая часть уравнений (1) при столкновении не изменяется. Из уравнений (1) далее следует, что по отношению к системе K мы имеем следующие уравнения для состояний до и после столкновения:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(1-u_+^2)^{1/2}}+\frac{1}{(1-u_-^2)^{1/2}}=\frac{1}{(1-\bar{u}_+^2)^{1/2}}+\frac{1}{(1-\bar{u}_-^2)^{1/2}},\\ \frac{u_{i+}}{(1-u_+^2)^{1/2}}+\frac{u_{i-}}{(1-u_-^2)^{1/2}}=\frac{\bar{u}_{i+}}{(1-\bar{u}_+^2)^{1/2}}+\frac{\bar{u}_{i-}}{(1-\bar{u}_-^2)^{1/2}}.\end{gathered}\tag{2}$$

Величины, над символами которых стоит черта, относятся к состоянию после столкновения. Эти уравнения, справедливые для общего случая упругих соударений равных масс, имеют форму законов сохранения; поэтому можно считать доказанным, что не существует никаких других симметричных или антисимметричных функций от компонент скорости, которые в рассматриваемом случае упругих столкновений двух одинаковых точечных масс давали бы похожие соотношения. В соответствии с этим мы должны рассматривать

$$\frac{mu_i}{(1-u^2)^{1/2}}\tag{3}$$

как импульс и

$$m\left(\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}}-1\right)\tag{4}$$

как кинетическую энергию частицы [1].

....

[1] Это выражение, естественно, должно обращаться в нуль при $u=0$; вследствие этого оно определяется как энергия, которую необходимо сообщить (без внутренних изменений) первоначально покоящейся частице для достижения скорости u.

Перейдем теперь к доказательству того, что масса равна *энергии покоя*. Для полной энергии E движущейся частицы мы должны взять выражение

$$E = E_0 + m\left(\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}} - 1\right), \tag{4a}$$

причем мы будем предполагать, что E_0 (энергия покоя) и m могут изменяться в случае, если взаимодействие точечных масс не является *упругим*.

Теперь рассмотрим неупругое соударение двух частиц с одинаковыми массами и энергиями покоя, которые перед соударением образовывали *пару частиц* по отношению к системе K' (скорости равны и противоположны). Далее мы предположим для простоты, что частицы при соударении претерпевают одинаковые внутренние изменения. Из закона сохранения импульса следует, что в системе K' конечные скорости частиц должны быть одинаковы по величине и противоположны по направлению ($\overline{u'_+} = -\overline{u'_-}$). Закон сохранения энергии в системах K' и K соответственно дает

$$2E_0 + 2m\left(\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}} - 1\right) = 2\bar{E}_0 + 2\bar{m}\left(\frac{1}{(1-\bar{u}^2)^{1/2}} - 1\right),$$

$$2E_0 + m\left(\frac{1}{(1-u_+^2)^{1/2}} - 1\right) + m\left(\frac{1}{(1-u_-^2)^{1/2}} - 1\right) =$$

$$= 2\bar{E}_0 + \bar{m}\left(\frac{1}{(1-\bar{u}_+^2)^{1/2}} - 1\right) + \bar{m}\left(\frac{1}{(1-\bar{u}_-^2)^{1/2}} - 1\right).$$

Поскольку частицы составляли пару до и после соударения, последнее уравнение можно с помощью равенств (1) переписать в следующем виде:

$$E_0 - m + \frac{m}{(1-u^2)^{1/2}(1-v^2)^{1/2}} = \bar{E}_0 - \bar{m} + \frac{\bar{m}}{(1-\bar{u}^2)^{1/2}(1-v^2)^{1/2}}.$$

Аналогичным образом преобразуем первое уравнение:

$$E_0 - m + \frac{m}{(1-u^2)^{1/2}} = \bar{E}_0 - \bar{m} + \frac{\bar{m}}{(1-\bar{u}^2)^{1/2}}. \tag{5}$$

Умножая последнее уравнение на $1/(1-v^2)^{1/2}$ и вычитая результат из предыдущего уравнения, получаем

$$[(\bar{E}_0 - E_0) - (\bar{m} - m)]\left[\frac{1}{(1-v^2)^{1/2}} - 1\right] = 0,$$

или

$$\bar{E}_0 - E_0 = \bar{m} - m_0. \tag{6}$$

Таким образом энергия покоя при неупругом соударении изменяется аддитивно, так же как масса. Что касается энергии покоя, то она определяется, как это следует из самого понятия энергии, лишь с точностью до аддитивной постоянной, и мы можем наложить условие, чтобы E_0 обращалось в нуль вместе с m. При этом

$$E_0 = m,$$

что и является доказательством принципа эквивалентности инертной массы и энергии покоя.

Из закона сохранения x-компоненты импульса следует (для неупругого столкновения):

$$m \frac{u_{+1}}{(1-u_+^2)^{1/2}} + m \frac{u_{-1}}{(1-u_-^2)^{1/2}} = \bar{m} \frac{\bar{u}_{+1}}{(1-\bar{u}_+^2)^{1/2}} + \bar{m} \frac{\bar{u}_{-1}}{(1-\bar{u}_-^2)^{1/2}},$$

что после применения второго из уравнений (1) дает для состояний до и после соударения

$$\frac{m}{(1-u^2)^{1/2}} = \frac{\bar{m}}{(1-\bar{u}^2)^{1/2}}.$$

Это же соотношение следует также из уравнений (5) и (6), полученных из закона сохранения энергии. Если бы мы с самого начала приняли, что в выражение для импульса входит постоянная масса, отличная от той, которая входит в выражение для энергии, то с помощью аналогичных соображений можно было бы показать, что при неупругом столкновении «импульсная масса» изменяется точно так же, как «энергетическая масса». Это является частичным обоснованием принятого равенства друг другу обеих масс.

Наши результаты можно резюмировать следующим образом. Если при столкновении точечных масс законы сохранения выполняются во всех (лоренцовых) системах координат, то из одного этого следуют известные выражения для импульса и энергии, равно как и справедливость принципа эквивалентности массы и энергии покоя.

Профессор Биркхоф обратил мое внимание на то, что в его книге «Relativity and Modern Physics», написанной совместно с профессором Лэнджером, приведены сходные соображения относительно столкновений частиц, а также относительно энергии и импульса. Несмотря на это, мне кажется, что приведенный выше вывод представляет определенный интерес.

Так, в только что упомянутой книге существенно используется понятие *силы*, которая в релятивистской теории не имеет такого непосредственного смысла, как в классической механике. Это связано с тем фактом, что в последней силу следует рассматривать как заданную функцию координат всех частиц, что, очевидно, невозможно в релятивистской теории. Поэтому я не ввел понятие силы.

Кроме того, я избегал делать какие бы то ни было предположения о трансформационных свойствах энергии и импульса по отношению к преобразованиям Лоренца.

ПРОБЛЕМА ЧАСТИЦ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

(Совместно с Н. Розеном)

Несмотря на большие успехи в различных областях, современная теоретическая физика еще далека от единой системы, которая позволяла бы теоретически рассматривать все явления. Существует релятивистская теория макроскопических явлений, которая, однако, пока не может объяснить атомистическую структуру вещества и квантовые эффекты; кроме того, существует квантовая теория, удовлетворительно описывающая большой класс атомных и квантовых явлений, но, в силу своей природы, плохо согласующаяся с принципом относительности. При таком положении вещей кажется не лишним поднять вопрос о том, в какой степени метод общей теории относительности открывает новые пути для объяснения атомных явлений. В этой работе мы хотим привлечь внимание к существованию такого пути, хотя мы и не можем сейчас решить вопрос, способна ли эта теория описать квантовые эффекты. Тем не менее мы считаем, что публикация этого теоретического метода оправдана, поскольку он дает четкую процедуру при минимуме предположений, следование которой наталкивается лишь на математические трудности.

Вопрос, о котором идет речь, может быть сформулирован следующим образом: можно ли считать приемлемой такую атомистическую теорию вещества и электричества, которая не содержит особенности поля, и использует только переменные гравитационного поля ($g_{\mu\nu}$) и переменные электромагнитного поля в смысле Максвелла (векторный потенциал φ_μ)?

На этот вопрос хочется дать отрицательный ответ, основываясь на том, что решение Шварцшильда для сферически симметричного статического гравитационного поля и обобщение этого решения Рейснером на случай электростатического поля имеют сингулярности. Кроме того, последнее из уравнений Максвелла, выражающее равенство нулю диверген-

* *The Particle Problem in the General Theory of Relativity.* (With N. Rosen). Phys. Rev., 1935, 48, 73—77.

ции (контравариантной) плотности электрического поля, по-видимому, вообще исключает существование плотности заряда и, стало быть, электрически заряженных частиц.

Исходя из этих соображений, различные авторы иногда отмечали, что существует возможность описания материальных частиц как сингулярностей поля. С такой точкой зрения мы, однако, никак не можем согласиться. Дело в том, что сингулярности приводят к такому произволу в теории, который делает ее бессодержательной. Хорошее подтверждение этого содержалось в письме Зильберштейна к одному из авторов [1]. Как известно, Леви-Чивита и Вейль дали общий метод отыскания аксиально симметричных статических решений уравнений гравитационного поля. Пользуясь этим методом, можно без труда получить решение, эвклидово на бесконечности и регулярное всюду, кроме двух (особых) точек на оси симметрии. Если считать теперь, что особенности соответствуют частицам, то этот пример отвечает случаю двух частиц, не ускоряемых их гравитационным взаимодействием, что, конечно, недопустимо с точки зрения физики. Поэтому мы думаем, что любая теория поля должна оставаться верной основному принципу отсутствия особенностей. Ниже мы покажем, что существует естественная возможность прийти к утвердительному ответу на поставленный нами вопрос.

§ 1. Специальный класс сингулярностей и их исключение

Первым шагом к общей теории относительности явился так называемый принцип эквивалентности: если в свободном от гравитационного поля пространстве равномерно ускорять какую-либо систему отсчета, то эта система отсчета может рассматриваться как «покоящаяся», при условии, что состояние пространства по отношению к ней можно интерпретировать как однородное гравитационное поле. Известно, что последнее точно описывается метрическим полем [2]

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + \alpha^2 x_1^2\, dx_4^2. \tag{1}$$

---

[1] Ср. S i l b e r s t e i n. Phys. Rev., 1936, 49, 268, а также статью 114.— *Прим. ред.*

[2] Следует отметить, что это метрическое поле охватывает не все пространство Минковского, а только часть его. Так, например, преобразование, превращающее $ds^2 = -d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2 + d\xi_4^2$ в соотношение (1), имеет вид $\xi_1 = x_1 \operatorname{ch} h\alpha x_4$, $\xi_2 = x_2$, $\xi_3 = x_3$, $\xi_4 = x_1 \operatorname{sh} h\alpha x_4$. Отсюда следует, что только те точки, в которых $\xi_1^2 \geqslant \xi_4^2$, соответствуют точкам, для которых соотношение (1) представляет собой определение метрики.

Компоненты $g_{\mu\nu}$ этого поля удовлетворяют в общем случае уравнению

$$R^{i}_{klm} = 0, \tag{2}$$

и, следовательно, уравнениям

$$R_{kl} = R^{m}_{klm} = 0. \tag{3}$$

Компоненты $g_{\mu\nu}$, соответствующие (1), регулярны во всех конечных точках пространства-времени. Тем не менее нельзя утверждать, что уравнению (3) удовлетворяет решение (1) для *всех* конечных значений $x_1, \ldots, x_4$. Это связано с тем фактом, что определитель g, составленный из величин $g_{\mu\nu}$, обращается в нуль при $x_1 = 0$. Поэтому контравариантные тензоры $g^{\mu\nu}$ становятся бесконечными, а тензоры R^{i}_{klm} и R_{kl} принимают вид 0/0. Поэтому уравнение (3) на гиперплоскости $x_1 = 0$ имеет особенность.

Теперь мы задаемся вопросом, нельзя ли естественным образом и без значительных изменений сформулировать закон гравитационного поля (а позже и закон гравитационного и электрического полей) так, чтобы решение (1) удовлетворяло уравнениям поля во всех конечных точках, т. е. и при $x_1 = 0$. В. Майер обратил наше внимание на тот факт, что тензоры R^{i}_{klm} и R_{kl} можно путем их умножения на соответствующие степени g превратить в рациональные функции компонент $g_{\mu\nu}$ и их двух первых производных. Легко показать, что знаменатель выражения g^2R_{kl} не больше единицы. Поэтому, если мы заменим уравнения (3) на

$$\overset{*}{R}_{kl} = g^2 R_{kl} = 0, \tag{3a}$$

то эта система уравнений удовлетворяется решением (1) во всех конечных точках. Таким образом, исключение знаменателей сводится к замене тензора $g^{\mu\nu}$ произведением величин $g_{\mu\nu}$ в g. Поэтому вместо тензоров приходится оперировать с тензорными плотностями соответствующего веса. Таким путем удается избежать особенностей этого специального класса, характеризуемых обращением в нуль определителя g.

Решение (1), естественно, не имеет более глубокого физического смысла, поскольку дело касается пространственной бесконечности. Однако оно позволяет увидеть, в какой степени регуляризация гиперповерхностей $g = 0$ приводит к теоретическому описанию вещества, рассматриваемого с точки зрения первоначальной теории. В рамках первоначальной теории уравнения гравитационного поля имели вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -T_{ik}, \tag{4}$$

где T_{ik} — тензор плотности массы или энергии. Для интерпретации соотношения (1) с точки зрения этой теории мы должны аппроксимировать линейный элемент каким-либо другим выражением, не имеющим особенности при $g = 0$. Соответственно этому мы вводим малую постоянную σ и полагаем

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + (\alpha^2 x_1^2 + \sigma)\, dx_4^2. \tag{1a}$$

Чем меньше выбрана величина σ (>0), тем меньше будет разница между этим гравитационным полем и полем, соответствующим линейному элементу (1).

Если теперь вычислить (фиктивный) тензор энергии T_{ik}, то для отличных от нуля компонент его получим

$$T_{22} = T_{23} = \frac{\alpha^2/\sigma}{(1 + \alpha^2 x_1^2/\sigma)^2}.$$

Отсюда видно, что чем меньше постоянная σ, тем сильнее этот тензор сконцентрирован в окрестности гиперповерхности $x_1 = 0$. В первоначальной теории решение (1) содержит сингулярность, соответствующую энергии или массе, сосредоточенной на поверхности $x_1 = 0$; однако в видоизмененной теории соотношение (1) представляет собой решение уравнения (3a), свободное от особенностей и описывающее массы, создающие поле; при этом не требуется введения новых переменных поля.

Ясно, что все дифференциальные уравнения могут быть записаны в форме, в которой отсутствуют знаменатели и где тензоры заменены тензорными плотностями соответствующих весов.

Следует заметить, что в случае решения (1) все поле состоит из двух равных частей, разделяемых такой поверхностью симметрии $x_1 = 0$, что для соответствующих точек (x_1, x_2, x_3, x_4) и $(-x_1, x_2, x_3, x_4)$ величины g_{ik} равны. В результате мы нашли, что определитель g, хотя и может обращаться в нуль (для $x_1 = 0$), тем не менее изменения знака g и вообще изменения сигнатуры квадратичной формы (1) при этом не происходит. Эти результаты имеют фундаментальное значение для физической интерпретации теории и мы с этим еще столкнемся при обсуждении рассматриваемых ниже решений.

§ 2. Решение Шварцшильда

Как известно, Шварцшильд нашел сферически симметричное статическое решение уравнений гравитационного поля:

$$ds^2 = -\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}\, dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2, \tag{5}$$

($r > 2m$, θ меняется от 0 до π, а φ — от 0 до 2π); вместо переменных x_1, x_2, x_3, x_4 здесь введены переменные r, θ, φ, t. Обращение в нуль при $\theta = 0$ определителя, составленного из величин $g_{\mu\nu}$, несущественно, так как соответствующее (пространственное) направление ничем не выделено. С другой стороны, величина g_{11} при $r = 2m$ обращается в бесконечность и, следовательно, здесь возникает особенность.

Если вместо r ввести новую переменную в соответствии с равенством

$$u^2 = r - 2m,$$

то для ds^2 получается выражение

$$ds^2 = -4(u^2 + 2m)\,du^2 - (u^2 + 2m)^2\,(d\theta^2 + \sin\theta\,d\varphi^2) + \frac{u^2}{u^2 + 2m}\,dt^2. \quad (5а)$$

Полученные таким образом новые величины $g_{\mu\nu}$ оказываются регулярными функциями при всех значениях переменных. Однако при $u = 0$ величина g_{44}, а следовательно и определитель g, обращаются в нуль. Это не противоречит тому, что уравнения поля (3а), не имеющие знаменателей, удовлетворяются при всех значениях независимых переменных. Таким образом мы имеем дело с решением (новых) уравнений поля, которое не имеет особенностей на конечном расстоянии. Гиперповерхность $u = 0$ (в первоначальных переменных $r = 2m$) играет здесь ту же роль, что и гиперповерхность $x_1 = 0$ в предыдущем примере.

Когда u меняется от $-\infty$ до $+\infty$, переменная r изменяется от $+\infty$ до $2m$ и затем снова от $2m$ до $+\infty$. Попытка интерпретации регулярного решения (5а) в пространстве r, θ, φ, t приводит к следующему результату. Четырехмерное пространство математически описывается двумя конгруэнтными областями или «листами», соответствующими значениям $u > 0$ и $u < 0$, которые соединяются гиперплоскостью $r = 2m$ или $u = 0$, на которой g обращается в нуль [3]. Такое соединение двух листов мы назовем «мостом».

Решение, свободное от сингулярностей, мы можем теперь рассматривать как математическое описание элементарной частицы (нейтрона или нейтрино). Характерной чертой развиваемой нами теории является то, что она описывает пространство с помощью двух листов. Пространственно конечный «мост», соединяющий эти листы, описывает электрически нейтральную элементарную частицу. С помощью этой концепции мы получаем возможность описывать элементарную частицу, используя лишь уравнения поля, без введения новых переменных для описания плотности

....

[3] Вследствие симметрии относительно гиперповерхности $u = 0$ знак g на этой поверхности не меняется.

вещества. Такой подход позволяет понять атомистический характер материи, так же как и понять, почему не могут существовать частицы с отрицательной массой. Последнее становится ясным из следующих соображений. Если мы будем исходить из решения Шварцшильда с отрицательным m, то мы не сможем получить регулярное решение, вводя вместо r новую переменную u; иначе говоря, для частицы с отрицательной массой «моста» не существует.

Если мы рассмотрим еще раз решение (1) с точки зрения той информации, которую мы получили из решения Шварцшильда, то увидим, что две конгруэнтные области для $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$ опять могут быть истолкованы как два листа, соответствующие одному и тому же физическому пространству. Гравитационное поле в этом примере представляет собой не зависящее от x_2 и x_3 поле, кончающееся на плоскости с конечной плотностью массы, образующей границу пространства. В этом примере, так же как и в случае Шварцшильда, можно построить решение, свободное от особенностей на конечных расстояниях, если ввести видоизмененные уравнения гравитационного поля (3а).

Основной смысл приведенных нами рассуждений состоит в том, что они указывают путь к удовлетворительной трактовке движения в гравитационном поле. Одним из недостатков первоначальной релятивистской теории гравитации являлось то, что она как полевая теория была неполной; она вводила независимый постулат, согласно которому закон движения частицы задавался уравнением геодезической [4]. Полная полевая теория может включать в себя только поле, но не частицы и величины, характеризующие их движения. Последние не могут существовать независимо от поля, а должны рассматриваться как его часть. На основе описания частицы без особенностей можно дать логически более удовлетворительное решение этой проблемы: при этом проблемы поля и движения совпадают.

Если имеется несколько частиц, то этот случай соответствует отысканию такого свободного от особенностей решения видоизмененных уравнений (3а), которое описывает пространство в виде двух листов, соединенных несколькими «мостами». Каждое такое решение является одновременно решением проблемы поля и проблемы движения.

В этом случае невозможно с помощью одной координатной системы описать все поле, не вводя при этом особенностей. Наиболее простым способом выбора системы координат оказывается следующий.

---

[4] Ради справедливости следует отметить, что в первоначальной теории относительности эта трудность формально обходилась путем введения тензора энергии в уравнения поля. Однако с самого начала было ясно, что это было лишь феноменологическим описанием, которое не могло быть окончательным.

1. Одна система координат описывает один из листов. По отношению к этой системе поле будет иметь особенность на каждом из мостов.

2. Каждому из мостов отвечает особая система координат, не имеющая особенностей поля на мосте и в его окрестностях.

Вне гиперповерхности $g = 0$ между координатами системы, описывающей лист, и координатами систем, описывающих поле на мостах, должно существовать регулярное преобразование координат с отличным от нуля определителем.

§ 3. Объединенное поле. Электромагнетизм

Наиболее простой метод включения электромагнетизма в рамки концепций общей теории относительности основан на следующих соображениях. Если кроме чисто гравитационного поля присутствуют также и другие переменные поля, то гравитационные уравнения имеют вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -T_{ik}, \tag{4}$$

где T_{ik} — тензор энергии вещества, т. е. та часть математического выражения энергии, которая зависит не только от $g_{\mu\nu}$. При феноменологическом описании вещества — если его рассматривать как пылевидную материю, т. е. пренебречь давлением — следует положить

$$T^{ik} = \rho \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{dx^k}{ds},$$

где ρ — это скалярная плотность, $\frac{dx^i}{ds}$ — вектор скорости вещества. Следует отметить, что компонента T_4^4 оказывается при этом положительной величиной.

Дополнительные переменные поля в принципе удовлетворяют таким дифференциальным уравнениям, вследствие которых дивергенция $T_{ik,m}g^{km}$ обращается в нуль. Поскольку дивергенция левой части уравнения (4) тождественно обращается в нуль, это означает, что между величинами, входящими во все уравнения поля, существует четыре тождественных соотношения, необходимые для совместности этих уравнений. Благодаря этому условию в некоторых случаях удается определить структуру тензора T_{ik}, но не его знак. Представляется естественным выбрать этот знак так, чтобы компонента T_4^4 (в случае специальной теории относительности) всегда была положительной.

Как известно, электромагнитное поле Максвелла описывается антисимметричным тензором $\varphi_{\mu\nu} (\equiv \partial\varphi_\mu / dx^\nu - \partial\varphi_\nu / dx^\mu)$, который удовлетворяет уравнениям поля

$$\varphi_{\mu\nu;\,\sigma}\, g^{\nu\sigma} = 0. \tag{6}$$

Из этих уравнений вытекает известное следствие, что дивергенция тензора

$$T_{ik} = \frac{1}{4}\, g_{ik}\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} - \varphi_{i\alpha}\varphi_k^{\alpha} \tag{7}$$

обращается в нуль. Здесь знак выбран так, что компонента T_4^4 оказывается положительной в случае специальной теории относительности. Если подставить это выражение для T_{ik} в уравнения гравитационного поля (4), то последние вместе с уравнениями (6) и (7) составляют систему уравнений теории гравитации и электромагнетизма.

Чтобы оказалось возможным получить статическое сферически симметричное решение этих уравнений, не имеющее особенностей и описывающее заряженные частицы, необходимо подставить в уравнения гравитационного поля тензор T_{ik} с обратным знаком. Делая эту замену знака, получаем решение

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad \varphi_4 = \varepsilon/r,\\ &ds^2 = -\frac{1}{1-\dfrac{2m}{r}-\dfrac{\varepsilon^2}{2r^2}}\,dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) + \left(1-\frac{2m}{r}-\frac{\varepsilon^2}{2r^2}\right)dt^2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Здесь m, очевидно, имеет смысл тяготеющей массы, а ε — электрического заряда.

Оказывается, что и в этом случае не представляет труда построить свободное от особенностей решение, соответствующее приведенному выше решению [5]. Любопытно, что масса m при этом не определяется электрическим зарядом ε и что m и ε оказываются независимыми постоянными интегрирования. Кроме того, для устранения особенностей вовсе не обязательно считать тяготеющую массу m положительной. Действительно, как мы сейчас увидим, существует свободное от особенностей решение, в котором масса m равна нулю. Поскольку мы считаем, что это решение с нулевой массой представляет физический интерес, рассмотрим случай $m = 0$.

Уравнения поля без знаменателей могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\mu,\,\nu} - \varphi_{\nu.\,\mu}, \qquad g^2\varphi_{\mu\nu;\,\sigma}\, g^{\nu\sigma} = 0,\\ &g^2\left(R_{ik} + \varphi_{i\alpha}\varphi_k^{\alpha} - \frac{1}{4}\, g_{ik}\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta}\right) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

[5] Если для T_{ik} принять обычный знак, то решение будет содержать $+\varepsilon^2$ вместо $-\varepsilon^2$. В этом случае с помощью преобразования координат оказывается невозможным получить свободное от сингулярностей решение.

При этом в последнем уравнении член с R опущен, так как он обращается в нуль вследствие соотношения (7), согласно которому компоненты T^{α}_{α} равны нулю.

Если в соотношении (8) (при $m = 0$) переменную r заменить на u, согласно равенству

$$u^2 = r^2 - \varepsilon^2/2,$$

то получается

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad \varphi_4 = \varepsilon \Big/ \left(u^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{1/2}, \tag{8a}$$
$$ds^2 = -du^2 - (u^2 + \varepsilon^2/2)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + [2u^2/(2u^2 + \varepsilon^2)]\, dt.$$

Это решение не имеет особенностей на конечном расстоянии в пространстве, состоящем из двух листов, и заряду опять соответствует мост между листами. Таково описание элементарной электрически заряженной частицы с нулевой массой.

§ 4. Заключение и общие замечания

Если решить уравнения общей теории относительности для статического сферически симметричного случая, то независимо от того, присутствует электрическое поле или нет, решение будет содержать особенности. При незначительной модификации уравнений, при которой отбрасываются знаменатели, оказывается возможным получить регулярное решение, если физическое пространство рассматривать состоящим из двух листов. Нейтральная, так же как и электрически заряженная, частица, есть не что иное, как часть пространства (мост), соединяющая эти два листа. На соединяющей два листа гиперповерхности определитель, составленный из величин $g_{\mu\nu}$, обращается в нуль.

Можно ожидать, что процесс, в котором принимают участие несколько элементарных частиц, соответствует регулярному решению уравнений поля с несколькими мостами между двумя экивалентными листами, соответствующими физическому пространству. Только исследование этих решений может показать, насколько эта теория соответствует фактам. Пока мы даже не знаем, существуют ли вообще регулярные решения, которые имеют более чем один мост.

Оказывается, что наиболее простой электрической частицей в этой теории является частица без тяготеющей массы. Проблема электрона или протона представляет собой проблему двух мостов.

В пользу теории говорит то, что она объясняет атомистический характер вещества, а также и то, что в ней не существует нейтральных частиц с отрицательной массой. Кроме того, теория не вводит никаких новых переменных, кроме $g_{\mu\nu}$ и φ_μ, и в принципе может претендовать на полноту (или замкнутость). С другой стороны, априори не видно, включает ли она и теорию квантовых явлений. Тем не менее априори нельзя исключать возможность, что теория их содержит. Так, может оказаться, что существуют только такие регулярные решения с многими мостами, для которых «заряды» электрических мостов численно равны друг другу, а для «масс» мостов возможны только два значения, и для которых стационарные «движения» подчинены ограничениям, аналогичным тем, с которыми мы сталкиваемся в квантовой теории.

Во всяком случае здесь мы встречаемся с возможностью построения общей релятивистской теории вещества, которая с точки зрения логики является совершенно удовлетворительной и которая не содержит никаких новых гипотез.

Поступила 8 мая 1935 г.

ПРОБЛЕМА ДВУХ ТЕЛ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

(Совместно с Н. Розеном)

В недавней работе Зильберштейн [1] пытался доказать несправедливость общей теории относительности. Он рассуждал следующим образом:

а) Я построил статическое решение гравитационных уравнений, которое имеет две особые точки и не имеет других особенностей.

б) Представляемые этими точками частицы не ускоряют друг друга своими гравитационными полями, что противоречит опыту. Следовательно, гравитационные уравнения общей теории относительности неверны.

Мы хотим указать на следующее. Даже если утверждение «а» действительно справедливо, заключение «б» необоснованно. Дело в том, что в теории поля приемлемым является только такое описание масс, которое свободно от особенностей, поскольку в особых точках законы поля нарушаются. Однако даже утверждение «а» неверно. Мы покажем, что решение Зильберштейна имеет особенности и вне этих двух точек. Мы не отметили этого в нашей предыдущей работе [2], где мы ссылались на решение Зильберштейна, сообщенное перед этим одному из нас.

Чтобы линейный элемент вида (1) (см. работу Зильберштейна) представлял собою регулярное гравитационное поле вне двух частиц, необходима не только непрерывность функций ν и λ и их первых производных, но функция λ, кроме того, должна обращаться в нуль при $x_1 = 0$ всюду, за исключением двух точек, в которых расположены массы. Последнее условие необходимо для того, чтобы бесконечно малая окружность в плоскости $x_2 = \text{const}$, $x_4 = \text{const}$ с центром в точке $x_1 = 0$ имела бы отношение длины окружности к диаметру, в естественных единицах (интеграл от ds)

---

* *Two-body Problem in General Theory of Relativity* (With N. Rosen). Phys. Rev., 1936, 49, 404—405.

[1] Silberstein, Phys. Rev., 1936, 49, 268.

[2] A. Einstein, N. Rosen, Phys. Rev., 1935, 48, 73 (Статья 113).

равное π. Можно показать, что рассматриваемое нами решение, насколько это касается функции λ, не удовлетворяет этому условию.

Для этого мы перепишем соотношение (10) в более удобном виде, вводя угол α между двумя радиус-векторами r_1 и r_2. Этот угол удовлетворяет соотношению

$$r_1 r_2 \cdot \sin\alpha = D x_1.$$

В формуле (10) член в скобках можно теперь записать в виде:

$$[\ ] = \pm\cos\alpha - 1,$$

где двойной знак получается при извлечении квадратного корня. Согласно Зильберштейну, квадратный корень всегда должен быть положительным, и поэтому следует писать

$$[\ ] = |\cos\alpha| - 1.$$

Это очевидным образом ведет, в противоречии с условием регулярности, к разрывности производной функции λ на поверхности $\alpha = \pi/2$.

Более подробное исследование показывает, что на самом деле все вычисления можно провести, не вводя квадратного корня и сопутствующей ему неопределенности в знаке. При этом в правильное решение входит

$$[\ ] = \cos\alpha - 1.$$

Однако это также не удовлетворяет условиям регулярности, так как λ не обращается в нуль на оси ($x_1 = 0$) между двумя точками, в которых расположены точечные массы.

Мы хотим отметить, что в письме к одному из нас профессор Ланчос из университета в Пардю также обнаружил эту ошибку в работе Зильберштейна.

Принстон, 17 февраля 1936 г.

Уравнение (1) в статье Зильберштейна, на которую ссылается Эйнштейн, определяет аксиально-симметричную метрику

$$ds^2 = e^{2\nu}dx_4^2 - e^{-2\nu}\left[e^{2\lambda}\left(dx_1^2 + dx_2^2\right) + x_1^2 dx_3^2\right],$$

где ν и λ — функции координат.

Располагая частицы на оси x_2 на расстоянии D друг от друга и обозначая через r_1 и r_2 расстояния точки до обеих частиц и через L_1 и L_2 две постоянные, Зильберштейн получает

$$\nu = -\frac{L_1}{r_1} - \frac{L_2}{r_2},$$

$$\lambda = -\frac{x_1^2}{2} + \left(\frac{L_1^2}{r_1^4} + \frac{L_2^2}{r_2^4}\right) + \frac{2L_1L_2}{D}\left[\left(1 - \frac{D^2x_1^2}{r_1^2 r_2^2}\right)^{1/2} - 1\right].$$

Это и есть формула (10).

ЛИНЗОПОДОБНОЕ ДЕЙСТВИЕ ЗВЕЗДЫ ПРИ ОТКЛОНЕНИИ СВЕТА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ*

Некоторое время тому назад меня навестил Р. Мандл и попросил опубликовать результаты небольшого расчета, который я провел по его просьбе. Уступая его желанию, я решил опубликовать эту заметку.

Свет, идущий из звезды A, проходит через гравитационное поле другой звезды B, радиус которой равен R_0. Пусть наблюдатель находится на расстоянии D от B и на расстоянии x, малом по сравнению с D, от продолжения линии $\overline{AB}$, соединяющей центры звезд A и B. Обозначим через α_0 величину получаемого в общей теории относительности отклонения светового луча, проходящего мимо звезды B на расстоянии R_0 от ее центра. Ради простоты предположим, что $\overline{AB}$ велико по сравнению с расстоянием наблюдателя от «отклоняющей» звезды B. Будем пренебрегать также эффектом перекрытия (геометрическое затемнение) звездой B, который действительно ничтожен во всех практически важных случаях. Для этого необходимо, чтобы D намного превышало радиус R_0 «отклоняющей» звезды.

Из закона отклонения следует, что наблюдатель, расположенный точно на продолжении линии $\overline{AB}$, увидит вместо точечной звезды A светящийся круг с угловым радиусом β вокруг центра B. Здесь

$$\beta = \sqrt{\alpha \cdot \frac{R_0}{D}}.$$

Следует заметить, что этот радиус β уменьшается с увеличением расстояния D не как $\frac{1}{D}$, а как $\frac{1}{\sqrt{D}}$.

* *Lens-like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field.* Science, 1936, 84, 506—507.

Конечно, нельзя надеяться на то, что удастся прямо наблюдать это явление. Во-первых, едва ли мы когда-нибудь приблизимся достаточно близко к такой линии центров. Во-вторых, угол β слишком мал по сравнению с разрешающей силой наших инструментов. Действительно, отклонение α_0 по порядку величины равно одной секунде, угол R_0/D, под которым видна «отклоняющая» звезда,— много меньше. Поэтому свет, идущий из светящегося круга, не может быть отделен наблюдателем от света, испускаемого звездой B; возрастет лишь кажущаяся яркость звезды B.

Похожее явление будет иметь место, если наблюдатель расположен на малом расстоянии x от линии центров $\overline{AB}$. Однако в этом случае наблюдатель увидит вместо A два точечных источника света, отклоненных приблизительно на угол β от истинного геометрического положения A.

Кажущаяся яркость звезды A увеличивается в q раз благодаря линзоподобному действию гравитационного поля звезды B. Величина q значительно больше единицы только в том случае, если x настолько мало, что наблюдаемые положения A и B совпадают в пределах разрешающей силы наших инструментов. Простое геометрическое рассмотрение приводит к выражению

$$q = \frac{l}{x} \cdot \frac{1 + \frac{x^2}{2l^2}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4l^2}}},$$

где

$$l = \sqrt{\alpha_0 D R_0}.$$

Если нас интересует случай $q \gg 1$, то формула

$$q = \frac{l}{x}$$

является достаточно хорошим приближением, так как величиной x^2/l^2 можно пренебречь. Даже в наиболее благоприятных случаях длина l равна нескольким световым секундам и расстояние x должно быть мало по сравнению с этой величиной, если мы хотим, чтобы благодаря линзоподобному действию B видимая яркость A значительно увеличилась.

Следовательно, у нас мало шансов наблюдать это явление, даже если пренебречь ослепляющим действием света намного более близкой звезды B. Кажущееся увеличение q вследствие линзоподобного действия звезды B представляет собой чрезвычайно любопытный эффект не только потому, что q стремится к бесконечности с уменьшением x, но и потому, что с увеличением расстояния до наблюдателя эффект не уменьшается, но даже растет пропорционально $\sqrt{D}$.

О ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ*

(Совместно с Н. Розеном)

В статье дается строгое решение для цилиндрических гравитационных волн. Для удобства читателя в первой части статьи излагается уже известная в основном теория гравитационных волн и их излучения. После того как были получены соотношения, вызывающие сомнение в существовании *строгих* решений для волнообразных гравитационных полей, строго исследуется случай цилиндрических гравитационных волн. При этом оказывается, что строгие решения существуют и что задача сводится к обычным цилиндрическим волнам в эвклидовом пространстве.

I. Приближенное решение задачи о плоских волнах и излучение гравитационных волн

Хорошо известно, что применение приближенного метода интегрирования уравнений гравитационного поля общей теории относительности обнаруживает существование гравитационных волн. Упомянутый метод состоит в следующем. Исходим из уравнений поля

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - T_{\mu\nu}; \tag{1}$$

заменим величины $g_{\mu\nu}$ выражениями:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{2}$$

где

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ при } \mu = \nu, \\ 0 \text{ при } \mu \neq \nu, \end{cases}$$

если временна́я координата взята мнимой, как это было сделано Минковским. Предполагается, что величины $\gamma_{\mu\nu}$ малы, т. е. что гравитационное

---

* *On Gravitational Waves.* (With N. Rosen). J. Franklin Inst., 1937, 223, 43—54.

поле слабое. В уравнениях поля величины $\gamma_{\mu\nu}$ и их производные будут встречаться в различных степенях. Если $\gamma_{\mu\nu}$ всюду достаточно малы по сравнению с единицей, можно получить решение уравнений в первом приближении, пренебрегая в уравнениях (1) более высокими степенями величин $\gamma_{\mu\nu}$ (и их производных) по сравнению с низшими. Если, далее, ввести $\overline{\gamma}_{\mu\nu}$ вместо $\gamma_{\mu\nu}$ с помощью соотношений

$$\overline{\gamma}_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\alpha},$$

то уравнения (1) принимают вид

$$\overline{\gamma}_{\mu\nu,\alpha\alpha}-\overline{\gamma}_{\mu\alpha,\alpha\nu}-\overline{\gamma}_{\nu\alpha,\alpha\mu}+\overline{\gamma}_{\alpha\alpha,\mu\nu}=-2T_{\mu\nu}. \tag{3}$$

Специализация вида $g_{\mu\nu}$, содержащаяся в соотношении (2), сохраняется при бесконечно малом преобразовании координат

$$x'_{\mu}=x_{\mu}+\xi^{\mu}, \tag{4}$$

где ξ^{μ} — произвольные бесконечно малые функции. Поэтому можно задать четыре значения $\overline{\gamma}_{\mu\nu}$ или четыре условия, которым должны удовлетворять $\overline{\gamma}_{\mu\nu}$ наряду с уравнениями (3); это сводится к специальному выбору системы координат, в которой описывается поле. Выберем систему координат обычным образом — с помощью требования

$$\overline{\gamma}_{\mu\alpha,\alpha}=0. \tag{5}$$

Легко убедиться в том, что эти четыре условия совместны с приближенными уравнениями гравитационного поля, если дивергенция $T_{\mu\alpha,\alpha}$ тензора $T_{\mu\nu}$ равна нулю, что необходимо предположить согласно специальной теории относительности.

Однако оказывается, что эти условия неполностью определяют систему координат. Если $\gamma_{\mu\nu}$ — решения уравнений (2) и (5), то $\gamma'_{\mu\nu}$, после преобразования типа (4),

$$\gamma'_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}+\xi^{\mu}_{,\nu}+\xi^{\nu}_{,\mu}, \tag{6}$$

также являются решениями, если ξ^{μ} удовлетворяют условиям

$$\left[\xi^{\mu}_{,\nu}+\xi^{\nu}_{,\mu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\xi^{\alpha}_{,\alpha}+\xi^{\alpha}_{,\alpha})\right]_{,\nu}=0,$$

или

$$\xi^{\mu}_{,\alpha\alpha}=0. \tag{7}$$

Если можно добиться обращения γ-поля в нуль добавлением членов, подобных входящим в соотношение (6), т. е. посредством бесконечно малого преобразования, то описываемое гравитационное поле является лишь фиктивным.

Принимая во внимание соотношения (2), можно записать уравнения гравитационного поля для пустого пространства в виде

$$\left.\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\mu\nu,\alpha\alpha} &= 0, \\ \gamma_{\mu\alpha,\alpha} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Плоские гравитационные волны, распространяющиеся в направлении положительной оси x_1, получаются, если взять $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ в виде $\varphi(x_1 + ix_4)$ $(= \varphi(x_1 - t))$, причем эти $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ должны удовлетворять условиям:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\gamma}_{11} + i\bar{\gamma}_{14} &= 0, \\ \bar{\gamma}_{41} + i\bar{\gamma}_{44} &= 0, \\ \bar{\gamma}_{21} + i\bar{\gamma}_{24} &= 0, \\ \bar{\gamma}_{31} + i\bar{\gamma}_{34} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Соответственно (бегущие) плоские гравитационные волны наиболее общего вида можно подразделить на три типа:

а) чисто продольные волны:

только $\bar{\gamma}_{11}$, $\bar{\gamma}_{14}$, $\bar{\gamma}_{44}$ отличны от нуля;

б) полупродольные, полупоперечные волны:

только $\bar{\gamma}_{21}$ и $\bar{\gamma}_{24}$, или только $\bar{\gamma}_{31}$ и $\bar{\gamma}_{34}$ отличны от нуля;

в) чисто поперечные волны:

только $\bar{\gamma}_{22}$, $\bar{\gamma}_{23}$, $\bar{\gamma}_{33}$ отличны от нуля.

На основе предыдущих замечаний можно, далее, показать, что любая волна типа «а» или типа «б» представляет собой фиктивное поле, т. е. поле, которое может быть получено посредством бесконечно малого преобразования из эвклидова поля $(\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} = 0)$.

Проведем доказательство на примере волны типа «а». Если φ — соответствующая функция аргумента $x_1 + ix_4$, то, согласно условиям (9), следует положить

$$\bar{\gamma}_{11} = \varphi, \quad \bar{\gamma}_{14} = i\varphi, \quad \bar{\gamma}_{44} = -\varphi,$$

и, следовательно, также

$$\gamma_{11} = \varphi, \quad \gamma_{14} = i\varphi, \quad \gamma_{44} = -\varphi.$$

Если теперь выбрать ξ^1 и ξ^4 (при $\xi^2 = \xi^3 = 0$) так, что

$$\xi^1 = \chi(x_1 + ix_4), \qquad \xi^4 = i\chi(x_1 + ix_4),$$

то получим

$$\xi^1 + \xi^4_{,1} = 2\chi', \qquad \xi^1_{,4} + \xi^4_{,1} = 2i\chi', \qquad \xi^4_{,4} + \xi^4_{,4} = -2\chi'.$$

Это согласуется со значениями, приведенными выше для γ_{11}, γ_{14}, γ_{44}, если выбрать $\chi' = \frac{1}{2}\varphi$. Тем самым показано, что эти волны являются фиктивными. Аналогичное доказательство может быть проведено для волн типа «б».

Далее, мы хотим показать, что тип «в» также содержит фиктивные поля, а именно, те, у которых $\bar{\gamma}_{22} = \bar{\gamma}_{33} \neq 0$, $\gamma_{23} = 0$. Соответствующими значениями $\gamma_{\mu\nu}$ являются $\gamma_{11} = \gamma_{44} \neq 0$, все остальные компоненты равны нулю. Такую волну можно получить, положив $\xi' = \chi$, $\xi^4 = -i\chi$, т. е. посредством бесконечно малого преобразования эвклидова пространства. Соответственно, в качестве реальных волн остаются только оба типа чисто поперечных волн, неисчезающими компонентами которых являются

$$\gamma_{22} = -\gamma_{33} \tag{в$_1$}$$

или

$$\gamma_{23}. \tag{в$_2$}$$

Однако из закона преобразования тензоров следует, что оба эти типа волн могут быть преобразованы один в другой путем пространственного вращения системы координат вокруг оси x_1 на угол $\frac{\pi}{4}$. Они представляют просто разложение на составляющие чисто поперечной волны (единственной, имеющей реальный смысл). Тип (в$_1$) характеризуется тем, что его компоненты не изменяются при преобразованиях

$$x_2' = -x_2, \qquad x_1' = x_1, \qquad x_3' = x_3, \qquad x_4' = x_4$$

или

$$x_3' = -x_3, \qquad x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2, \qquad x_4' = x_4,$$

в противоположность типу (в$_2$), т. е. волны типа (в$_1$) симметричны относительно плоскостей x_1x_2 и x_1x_3.

Исследуем теперь излучение волн в рамках приближенных (линеаризованных) уравнений гравитационного поля. Система уравнений, которую надо проинтегрировать, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\mu\nu,\alpha\alpha} &= -2T_{\mu\nu}, \\ \bar{\gamma}_{\mu\alpha,\alpha} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Предположим, что физическая система, описываемая тензором $T_{\mu\nu}$, находится вблизи от начала координат. Тогда поле определяется формально так же, как электромагнитное поле определяется системой электромагнитных токов. Обычным решением является решение в виде запаздывающих потенциалов

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{[T_{\mu\nu}]_{(t-r)}}{r}\,dv. \tag{11}$$

Здесь r означает пространственное расстояние рассматриваемой точки от элемента объема, $t = x_4/i$ — рассматриваемый момент времени.

Если рассматривать материальную систему, находящуюся в объеме с размерами, малыми по сравнению с r_0 — расстоянием рассматриваемой точки от начала координат, а также малыми по сравнению с длинами излучаемых волн, то можно заменить r на r_0, что дает

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi r_0}\int [T_{\mu\nu}]_{(t-r_0)}\,dv,$$

или

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi r_0}\left[\int T_{\mu\nu}\,dv\right]_{(t-r_0)}. \tag{12}$$

Компоненты $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ тем точнее аппроксимируются плоской волной, чем больше выбранное значение r_0. Если рассматриваемую точку выбрать вблизи от оси x_1, то нормаль волны параллельна направлению x_1, и только компоненты $\bar{\gamma}_{22}$, $\bar{\gamma}_{23}$, $\bar{\gamma}_{33}$ отвечают, согласно предыдущему, истинной гравитационной волне. Соответствующие интегралы (12) для излучающей системы, состоящей из движущихся друг относительно друга масс, не имеют, взятые сами по себе, простого смысла. Заметим, однако, что T имеет смысл взятой с обратным знаком плотности энергии, которая в случае медленного движения практически совпадает с плотностью массы в смысле обычной механики. Как будет показано, интегралы (12) могут быть выражены через эту величину. Это можно сделать благодаря существованию закона сохранения энергии-импульса физической системы

$$T_{\mu\alpha,\alpha} = 0. \tag{13}$$

Умножая второе из этих уравнений на x_2, а четвертое — на $\frac{1}{2}x_2^2$ и интегрируя по всей системе, получаем два интегральных соотношения, которые вместе дают

$$\int T_{22}\,dv = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\int x_2^2 T_{44}\,dv. \tag{13a}$$

Аналогично получаем

$$\int T_{33}dv = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\int x_3^2 T_{44}dv,$$

$$\int T_{23}dv = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\int x_2 x_3 T_{44}dv.$$

Отсюда видно, что производные по времени от моментов инерции определяют излучение гравитационных волн, если весь метод приближенных уравнений оправдан. В частности, видно также, что случай волн, симметричных относительно плоскостей x_1x_2 и x_1x_4, мог бы быть реализован с помощью упругих колебаний материальной системы, обладающей теми же свойствами симметрии. Примером могут служить две равные массы, соединенные пружиной и колеблющиеся навстречу друг другу в направлении, параллельном оси x_3.

Из закона сохранения энергии следует, что система, излучающая гравитационные волны, должна излучать и энергию, что приводит к затуханию движения. Тем не менее можно представить себе и случай незатухающих колебаний, если предположить, что кроме волн, излучаемых системой, имеется еще второе концентрическое волновое поле, распространяющееся внутрь, которое сообщает системе столько же энергии, сколько уносят расходящиеся волны. Тогда будет существовать незатухающий механический процесс, происходящий внутри системы стоячих волн.

Математически это связано со следующим обстоятельством, выясненным в свое время Ритцем и Тетроде. Интегрирование волнового уравнения

$$\Box \varphi = -4\pi\rho$$

с помощью *запаздывающего* потенциала

$$\varphi = \int \frac{[\rho]_{(t-r)}}{r} dv$$

математически не является единственной возможностью. Можно провести это интегрирование также с помощью «опережающего» потенциала

$$\varphi = \int \frac{[\rho]_{(t+r)}}{r} dv,$$

или же с помощью наложения решений обоих типов, например

$$\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{[\rho]_{(t+r)} + [\rho]_{(t-r)}}{r} dv.$$

Последняя возможность соответствует отсутствию затухания — случаю стоячей волны.

Следует отметить, что можно получить волны, генерируемые описанным выше образом, сколь угодно точно аппроксимирующие плоские волны. Их можно получить, например, путем предельного перехода, предполагая, что источник волн все более и более удаляется от рассматриваемой точки, причем переменный момент инерции тела должен одновременно пропорционально возрастать.

II. Строгое решение для цилиндрических волн

Выберем координаты x_1, x_2 в меридиональной плоскости так, чтобы через $x_1 = 0$ проходила ось вращения, а x_2 изменялась от 0 до бесконечности. Пусть x_3 — угловая координата, определяющая положение меридиональной плоскости. Пусть также поле симметрично относительно каждой плоскости $x_2 = \mathrm{const}$ и относительно каждой меридиональной плоскости. Требуемая симметрия приводит к обращению в нуль всех компонент $g_{\mu\nu}$, содержащих один, и только один, индекс 2; то же справедливо и для индекса 3. В таком гравитационном поле только компоненты

$$g_{11},\ g_{22},\ g_{33},\ g_{44},\ g_{14}$$

могут быть отличны от нуля. Для удобства выберем все координаты вещественными. Далее можно преобразовать координаты x_1, x_4 так, чтобы удовлетворить еще двум условиям. В качестве этих условий возьмем

$$\left.\begin{aligned} g_{14} &= 0, \\ g_{11} &= -g_{44}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Легко показать, что это можно сделать, не вводя никаких особенностей.

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned} -g_{11} = g_{44} &= A, \\ -g_{22} &= B, \\ -g_{33} &= C, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $A, B, C > 0$.

В этих обозначениях вычисление дает

$$
\left.
\begin{aligned}
2\left(R_{11}-\frac{1}{2}g_{11}R\right) &= \frac{B_{44}}{B}+\frac{C_{44}}{C}-\frac{1}{2}\left[\frac{B_4^2}{B^2}+\frac{C_4^2}{C^2}-\frac{B_4C_4}{BC}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{A_4}{A}\left(\frac{B_4}{B}+\frac{C_4}{C}\right)+\frac{B_1C_1}{BC}+\frac{A_1}{A}\left(\frac{B_1}{B}+\frac{C_1}{C}\right)\right],\\
\frac{2A}{B}\left(R_{22}-\frac{1}{2}g_{22}R\right) &= \frac{A_{44}}{A}+\frac{C_{44}}{C}-\frac{A_{11}}{A}-\frac{C_{11}}{C}+\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[\frac{C_1^2}{C^2}-\frac{C_4^2}{C^2}+\frac{2A_1^2}{A^2}-\frac{2A_4^2}{A^2}\right],\\
\frac{2A}{C}\left(R_{33}-\frac{1}{2}g_{33}R\right) &= \frac{A_{44}}{A}+\frac{B_{44}}{B}-\frac{A_{11}}{A}-\frac{B_{11}}{B}+\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[\frac{2A_1^2}{A^2}-\frac{2A_4^2}{A^2}+\frac{B_1^2}{B^2}-\frac{B_4^2}{B^2}\right],\\
2\left(R_{44}-\frac{1}{2}g_{44}R\right) &= \frac{B_{11}}{B}+\frac{C_{11}}{C}-\frac{1}{2}\left[\frac{B_1^2}{B^2}+\frac{C_1^2}{C^2}-\frac{B_1C_1}{BC}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{A_1}{A}\left(\frac{B_1}{B}+\frac{C_1}{C}\right)+\frac{B_4C_4}{BC}+\frac{A_4}{A}\left(\frac{B_4}{B}+\frac{C_4}{C}\right)\right],\\
2R_{14} &= \frac{B_{14}}{B}+\frac{C_{14}}{C}-\frac{1}{2}\left[\frac{B_1B_4}{B^2}+\frac{C_1C_4}{C^2}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{A_4}{A}\left(\frac{B_1}{B}+\frac{C_1}{C}\right)+\frac{A_1}{A}\left(\frac{B_4}{B}+\frac{C_4}{C}\right)\right],
\end{aligned}
\right\}
\tag{16}
$$

где индексами у членов в правой части обозначено дифференцирование. Если взять в качестве уравнений поля эти выражения, приравненные нулю, заменить второе и третье их суммой и разностью, и ввести в качестве новых переменных

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha &= \ln A,\\
\beta &= \frac{1}{2}\ln(B/C),\\
\gamma &= \frac{1}{2}\ln(BC),
\end{aligned}
\right\}
\tag{15a}
$$

то получим:

$$2\gamma_{44}+\frac{1}{2}\left[\beta_4^2+3\gamma_4^2+\beta_1^2-\gamma_1^2-2\alpha_1\gamma_1-2\alpha_4\gamma_4\right]=0, \tag{17}$$

$$2(\alpha_{11}-\alpha_{44})+2\gamma_{11}-2\gamma_{44}+\left[\beta_1^2+\gamma_1^2-\beta_4^2-\gamma_4^2\right]=0, \tag{18}$$

$$\beta_{11} - \beta_{44} + [\beta_1\gamma_1 + \beta_4\gamma_4] = 0, \tag{19}$$

$$2\gamma_{11} + \frac{1}{2}[\beta_1^2 + 3\gamma_1^2 + \beta_4^2 - \gamma_4^2 - 2\alpha_1\gamma_1 - 2\alpha_4\gamma_4] = 0, \tag{20}$$

$$2\gamma_{14} + [\beta_1\beta_4 + \gamma_1\gamma_4 - 2\alpha_1\gamma_4 - 2\alpha_4\gamma_1] = 0. \tag{21}$$

Первое и четвертое уравнения этой группы дают

$$\gamma_{11} - \gamma_{44} + (\gamma_1^2 - \gamma_4^2) = 0. \tag{22}$$

Подстановка

$$\gamma = \ln \sigma, \qquad \sigma = (BC)^{1/2} \tag{23}$$

приводит к волновому уравнению

$$\sigma_{11} - \sigma_{44} = 0, \tag{24}$$

имеющему решение

$$\sigma = f(x_1 + x_4) + g(x_1 - x_4), \tag{25}$$

где f и g — произвольные функции. Уравнение (18) сводится к уравнению:

$$\alpha_{11} - \alpha_{44} + \frac{1}{2}(\beta_1^2 - \beta_4^2 + \gamma_4^2 - \gamma_1^2) = 0. \tag{18a}$$

Тогда из уравнения (17) видно, что γ не может всюду обращаться в нуль.

Теперь необходимо выяснить, существуют ли волнообразные процессы, для которых γ не равно нулю. Заметим, что такой волнообразный процесс представляется в первом приближении «волнообразной» функцией β, т. е. β-функцией, зависимость которой от x_1 и x_4 обнаруживает максимумы и минимумы; того же следует ожидать и для строгого решения. В отношении γ известно, что $e^\gamma = \sigma$ удовлетворяет волновому уравнению (24) и потому принимает вид (25). Однако из этого не следует с необходимостью «волнообразный» характер этой величины. Действительно, мы покажем, что γ не может иметь минимумов.

Наличие такого минимума означало бы существование минимумов у функций f и g из (25). В точке минимума (x_1, x_4) должно было бы быть $\gamma_1 = \gamma_4 = 0$, $\gamma_{11} \geqq 0$, $\gamma_{44} \geqq 0$. Но, согласно соотношениям (17) и (20), это невозможно. Следовательно, γ не имеет минимумов, т. е. не имеет волнообразного характера, а изменяется (по крайней мере, в области пространства, произвольно протяженной в одном направлении) монотонно. Рассмотрим теперь такую область пространства.

Полезно установить, при каких преобразованиях координат x_1 и x_4 система уравнений (14) остается инвариантной. Для этой инвариантности необходимо и достаточно, чтобы преобразование удовлетворяло уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_4},\\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_4} &= \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_1}.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Следовательно, мы можем произвольно выбрать $\bar{x}_1(x_1, x_4)$ так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{x}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_4^2} = 0, \tag{26a}$$

и тогда система (26) определит соответствующее $\bar{x}_4$. Поскольку e^{γ} инвариантно относительно этого преобразования и также удовлетворяет волновому уравнению, существует такое преобразование, при котором $\bar{x}_1$ соответственно равно или пропорционально e^{γ}. В новой системе координат имеем

$$e^{\gamma} = a x_1$$

или

$$\gamma = \ln a + \ln x_1. \tag{27}$$

Если вместо γ подставить в (17) — (27) это выражение для γ, то уравнения приводятся к эквивалентной системе:

$$\beta_{11} - \beta_{44} + \frac{1}{x_1}\beta_1 = 0, \tag{28}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} x_1 (\beta_1^2 + \beta_4^2) - \frac{1}{2x_1} \tag{29}$$

и

$$\alpha_4 = x_1 \beta_1 \beta_4. \tag{30}$$

Уравнение (28) представляет собой уравнение для цилиндрических волн в трехмерном пространстве, если под x_1 понимать расстояние от оси вращения. При заданном β уравнения (29) и (30) определяют функцию α с точностью до (произвольной) аддитивной постоянной, в то время как γ уже определено равенством (27).

Чтобы волны можно было считать волнами в эвклидовом пространстве, решения, отвечающие эвклидову пространству в случае поля, не зависящего от x_4, должны удовлетворять этим уравнениям. Такое поле описывается равенствами

$$A = 1, \qquad B = 1, \qquad C = x_1^2,$$

если обозначить через x_3 угол поворота вокруг оси вращения. Эти значения дают

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\ln x_1, \quad \gamma = \ln x_1,$$

откуда и видно, что уравнения (27) — (30) действительно удовлетворяются.

Мы должны еще исследовать, существуют ли *стационарные* волны, т. е. волны, чисто периодические во времени.

Непосредственно ясно, что для β такие решения существуют. Хотя такое ограничение несущественно, мы рассмотрим случай, когда изменение β во времени синусоидально. Пусть β имеет вид

$$\beta = X_0 + X_1 \sin \omega x_4 + X_2 \cos \omega x_4,$$

где X_0, X_1, X_2 — функции только x_1. Тогда из уравнения (30) следует, что α периодично в том и только в том случае, когда интеграл

$$\int \beta_1 \beta_4 dx_4,$$

взятый по целому числу периодов, обращается в нуль.

В случае стационарного колебания, описываемого функцией

$$\beta = X_0 + X_1 \sin \omega x_4,$$

это условие действительно выполняется, поскольку

$$\int \beta_1 \beta_4 dx_4 = \int (X_0' + X_1' \sin \omega x_4)\, \omega X_1 \cos \omega x_4 dx_4 = 0.$$

С другой стороны, в общем случае, включающем случай бегущих волн, для этого интеграла получается значение

$$\frac{1}{2}(X_1 X_2' - X_2 X_1')\, \omega T,$$

где T — промежуток времени, по которому берется интеграл. Это значение, вообще говоря, не равно нулю. На расстояниях x_1 от $x_1 = 0$, больших по сравнению с длинами волн, и в области, содержащей большое число волн, бегущая волна с хорошим приближением может быть представлена в виде

$$\beta = X_0 + a \sin \omega (x_4 - x_1),$$

где a — постоянная (происходящая от функции, слабо зависящей от x_1). В этом случае $X_1 = a \cos \omega x_1$, $X_2 = -a \sin \omega x_1$, так что интеграл может быть (приблизительно) представлен в виде: $-\frac{1}{2} a\omega^2 T$. Таким образом, он не может обращаться в нуль и имеет всегда один и тот же знак. Следовательно, бегущие волны вызывают вековое изменение метрики.

Это явление обусловлено переносом энергии волнами, связанным с непрерывным изменением во времени гравитирующей массы, локализованной на оси $x_1 = 0$.

Примечание. Вторая часть настоящей статьи была значительно изменена мной после отъезда Н. Розена в Россию, поскольку мы вначале ошибочно интерпретировали наши формальные результаты. Я хочу поблагодарить моего коллегу проф. Робертсона за его дружескую помощь в выяснении первоначальной ошибки. Я благодарю также Гоффмана за любезную помощь при переводе.

А. Эйнштейн.

117

ГРАВИТАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОБЛЕМА ДВИЖЕНИЯ*

(Совместно с Л. Инфельдом и Б. Гоффманом)

Введение

В этой статье мы исследуем наиболее простой вопрос о том, в какой степени релятивистские уравнения гравитационного поля определяют движение весомых тел.

Предыдущие попытки решения этой проблемы [1] были основаны на гравитационных уравнениях, в которые входил некоторый специальный тензор энергии-импульса для материи. Однако такие тензоры энергии-импульса следует рассматривать как чисто временные и более или менее феноменологические способы представления структуры материи, и их присутствие в уравнениях делает невозможным определение того, насколько полученные результаты не зависят от специального предположения относительно состава материи.

В действительности, единственными уравнениями гравитационного поля, которые бесспорно следуют из основных предположений общей теории относительности, являются уравнения для пустого пространства, и важно знать, способны ли они *одни* определить движение тел. Ответ на этот вопрос вовсе не очевиден. В классической физике можно найти примеры, ведущие к обоим ответам: да и нет. Например, в обычных уравнениях Максвелла для пустого пространства, в которых электрические частицы рассматриваются как точечные сингулярности поля, движение этих сингулярностей не определяется линейными уравнениями поля. С другой стороны, известная теория Гельмгольца о движении вихрей в невязкой

* *Gravitational Equations and Problems of Motion* (With L. Infeld and B. Hoffmann). Ann. Math., 1938, 39, 65—100.

[1] Droste. Ac. van Wet. Amsterdam, 1916, 19, 447; De Sitter. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1916, 67, 155; Mathisson. Z. Phys., 1931, 67, 270, 826; 1931, 69, 389; Levi-Civita. Amer. J. Math., 1937, 3, 225.

жидкости представляет собой пример того, как движение линейных сингулярностей в действительности определяется только дифференциальными уравнениями в частных производных, которые в этом случае являются нелинейными.

В этой статье мы покажем, что гравитационных уравнений для пустого пространства фактически достаточно для определения движения материи, представленной в виде точечных сингулярностей поля. Гравитационные уравнения нелинейны и, вследствие необходимой свободы в выборе координатной системы, таковы, что между ними существует четыре дифференциальных соотношения, так что они образуют переопределенную систему уравнений. Переопределение ответственно за существование уравнений движения, а нелинейный характер — за существование членов, выражающих взаимодействие движущихся тел.

К определению движения ведут два существенных шага. 1. Посредством нового метода приближения, специально приспособленного для рассмотрения квазистационарных полей, определяется гравитационное поле, обусловленное движущимися частицами. 2. Показывается, что для двумерных пространственных поверхностей, содержащих сингулярности, справедливы некоторые условия в виде поверхностных интегралов, определяющие движение.

Во второй части статьи мы фактически вычисляем первые два нетривиальные приближения. В первом из них уравнения движения принимают форму Ньютона. Во втором приближении уравнения движения, которые мы вычисляем только для случая двух массивных частиц, принимают более сложный вид, но не включают третьих и более высоких производных по времени.

В принципе такой метод применим для приближения любого порядка, причем на каждом этапе задача сводится к вычислению определенных интегралов; но мы не доказали, что производные по времени выше второй в конечном счете не могут появиться в уравнениях движения.

Для определения поля и уравнений движения необходимо исключить из уравнений поля негалилеевы величины на бесконечности и сингулярности типа диполей, квадруполей и высших мультиполей с тем, чтобы решение было единственным.

Существенно, что наши уравнения движения не ограничивают движение сингулярностей сильнее, чем уравнения Ньютона; но это, возможно, связано с нашим упрощающим предположением о том, что материя представляется сингулярностями, и этого могло не быть, если бы мы могли описывать материю в рамках полевой теории, из которой сингулярности исключены. Представление материи посредством сингулярностей дает возможность фиксировать знак массы с помощью уравнений поля так, что, поскольку это касается настоящей теории, лишь условно взаимодействие двух тел всегда является притяжением, а не отталкиванием. Возможный ответ на вопрос, почему масса должна быть положительной, можно ожидать только из теории, которая дает представление материи, свободное от сингулярностей [2].

Наш метод может быть применен к случаю, когда в уравнения поля включен максвелловский тензор энергии-импульса, и как показано во второй части настоящей работы, это ведет к определению силы Лоренца.

В электродинамике Максвелла — Лоренца, так же как и в прежнем приближенном методе решения гравитационных уравнений, задача определения поля, создаваемого движущимися телами, решается путем интегрирования волновых уравнений с помощью запаздывающих потенциалов. Знак (направление) времени играет при этом решающую роль, поскольку, в известном смысле, поле разлагается только по тем волнам, которые расходятся в бесконечности. Однако в нашей теории уравнения, которые необходимо решать на каждой ступени приближения, являются не волновыми уравнениями, а всего лишь уравнениями для пространственного потенциала. Поскольку такие уравнения, как уравнения гравитационного и электромагнитного полей, в действительности инвариантны относительно обращения времени, может оказаться, что излагаемый здесь метод является естественным для их решения. Наш метод, в котором направление времени не выделено, соответствует введению стоячих волн, и он не может привести к заключению, что при круговом движении двух точечных масс энергия излучается в бесконечность в форме волн.

I. Общая теория

1. *Уравнения поля и координатные условия.* Поскольку существенной частью работы является то, что мы будем различать пространство и время, условимся, что латинские индексы принимают только пространственные значения 1, 2, 3, тогда как греческие индексы относятся к пространству и времени, пробегая значения 0, 1, 2, 3.

Как указано во введении, мы обсудим только гравитационные уравнения для пустого пространства, рассматривая источники поля как сингулярности. Если обычную производную величины обозначить соответствующим индексом, следующим за вертикальной чертой

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \to g_{\mu\nu|\sigma}, \quad \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \to g_{\mu\nu|\sigma\rho}, \tag{1.1}$$

---

[2] A. Einstein, N. Rosen, Phys. Rev., 48, 1935, 73 (Статья 113).

то уравнения поля можно записать в виде

$$R_{\mu\nu} = -\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}_{|\lambda} + \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\lambda\end{matrix}\right\}_{|\nu} + \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\sigma\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \lambda\nu\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \lambda\sigma\end{matrix}\right\} = 0. \tag{1.2}$$

Пусть символы $\eta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu}$, определяемые матрицей

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

представляют метрику пустого пространства-времени. Тогда если ввести величины $h_{\mu\nu}$ и $h^{\mu\nu}$ с помощью соотношений

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}, \tag{1.4}$$

эти величины $h_{\mu\nu}$ и $h^{\mu\nu}$ будут представлять отклонение пространства-времени от плоского случая. Величины $h^{\mu\nu}$, как функция $h_{\mu\nu}$, можно вычислить с помощью соотношений

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta^{\sigma}_{\mu}. \tag{1.5}$$

В общем случае $h_{\mu\nu}$ малы по сравнению с единицей, но здесь мы не делаем предположений относительно их порядка величины.

С помощью соотношений (1.4) и (1.5) компоненты $R_{\mu\nu}$ можно выразить через $h_{\mu\nu}$, и по причинам, которые станут ясными, когда мы перейдем к используемому в настоящей работе методу приближения, полученные таким образом разные члены мы разделим на две группы следующим образом. Прежде всего члены, линейные по h, отделим от квадратичных и членов более высокой степени. На этой ступени разделения уравнения поля имеют вид

$$R_{00} = \frac{1}{2}\{-h_{00|ss} + 2h_{0s|0s} - h_{ss|00}\} + L'_{00} = 0, \tag{1.6}$$

$$R_{0n} = \frac{1}{2}\{-h_{0n|ss} + h_{0s|ns} + h_{ns|0s} - h_{ss|n0}\} + L'_{0n} = 0, \tag{1.7}$$

$$R_{mn} = \frac{1}{2}\{-h_{mn|ss} + h_{ms|ns} + h_{ns|ms} - h_{ss|mn} + h_{mn|00} - h_{m0|n0} - h_{n0|m0} + h_{00|mn}\} + L'_{mn} = 0, \tag{1.8}$$

где тензор $L'_{\mu\nu}$ представляет нелинейные члены. Возьмем теперь

$$\text{из выражения для } R_{00} \text{ члены } h_{0s|0s} - \frac{1}{2}h_{ss|00}, \tag{1.9}$$

из выражения для R_{0n} — ни одного члена, (1.10)

из выражения для R_{mn} члены $-\frac{1}{2}h_{0m|0n}-\frac{1}{2}h_{0n|0m}+\frac{1}{2}h_{mn|00}$, (1.11)

и прибавим их к нелинейным членам. Обозначая нелинейные члены $L'_{\mu\nu}$ вместе с этими добавлениями символом $L_{\mu\nu}$, мы можем переписать уравнения поля в разделенном виде:

$$R_{00}=-\frac{1}{2}h_{00|ss}+L_{00}=0, \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}R_{0n}=-\frac{1}{2}h_{0n|ss}+\frac{1}{2}\left(h_{ns}-\frac{1}{2}\delta_{ns}h_{ll}+\frac{1}{2}\delta_{ns}h_{00}\right)_{|0s}-\\ -\frac{1}{4}(h_{00}+h_{ss})_{|0n}+\frac{1}{2}h_{0s|ns}+L_{0n}=0,\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}R_{mn}=-\frac{1}{2}h_{mn|ss}+\frac{1}{2}\left(h_{ms}-\frac{1}{2}\delta_{ms}h_{ll}+\frac{1}{2}\delta_{ms}h_{00}\right)_{|ns}+\\ +\frac{1}{2}\left(h_{ns}-\frac{1}{2}\delta_{ns}h_{ll}+\frac{1}{2}\delta_{ns}h_{00}\right)_{|ms}+L_{mn}=0,\end{aligned} \tag{1.14}$$

где элементы L в явном виде выражаются формулами:

$$\begin{aligned}L_{00}=h_{0s|0s}-\frac{1}{2}h_{ss|00}-(h^{\lambda\sigma}[00,\sigma])_{|\lambda}+(h^{\lambda\sigma}[0\lambda,\sigma])_{|0}+\\ +\left\{{\lambda \atop 0\sigma}\right\}\left\{{\sigma \atop \lambda 0}\right\}-\left\{{\lambda \atop 00}\right\}\left\{{\sigma \atop \lambda\sigma}\right\},\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$L_{0n}=-(h^{\lambda\sigma}[0n,\sigma])_{|\lambda}+(h^{\lambda\sigma}[n\lambda,\sigma])_{|0}+\left\{{\lambda \atop n\sigma}\right\}\left\{{\sigma \atop \lambda 0}\right\}-\left\{{\lambda \atop n0}\right\}\left\{{\sigma \atop \lambda\sigma}\right\}, \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}L_{mn}=-\frac{1}{2}h_{0m|0n}-\frac{1}{2}h_{0n|0m}+\frac{1}{2}h_{mn|00}-(h^{\lambda\sigma}[mn,\sigma])_{|\lambda}+\\ +(h^{\lambda\sigma}[m\lambda,\sigma])_{|n}+\left\{{\lambda \atop m\sigma}\right\}\left\{{\sigma \atop \lambda n}\right\}-\left\{{\lambda \atop mn}\right\}\left\{{\sigma \atop \lambda\sigma}\right\}.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Если ввести величины $\gamma_{\mu\nu}$, определяемые равенством

$$\gamma_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}h_{\sigma\rho}, \tag{1.18}$$

или, в подробной записи,

$$\gamma_{00}=\frac{1}{2}h_{00}+\frac{1}{2}h_{ll}, \tag{1.19}$$

$$\gamma_{0n}=h_{0n}, \tag{1.20}$$

$$\gamma_{mn}=h_{mn}-\frac{1}{2}\delta_{mn}h_{ll}+\frac{1}{2}\delta_{mn}h_{00}, \tag{1.21}$$

то уравнения поля (1.12) — (1.14) можно записать в виде:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} h_{00|ss} + L_{00} = 0, \tag{1.22}$$

$$R_{0n} = -\frac{1}{2} h_{0n|ss} + \frac{1}{2} \gamma_{ns|0s} + \frac{1}{2} (\gamma_{0s|s} - \gamma_{00|0})_{|n} + L_{0n} = 0, \tag{1.23}$$

$$R_{mn} = -\frac{1}{2} h_{mn|ss} + \frac{1}{2} \gamma_{ms|sn} + \frac{1}{2} \gamma_{ns|sm} + L_{mn} = 0. \tag{1.24}$$

Поскольку между этими уравнениями поля существуют четыре тождественных соотношения, мы можем наложить четыре координатных условия в форме четырех нетензорных уравнений, включающих гравитационные потенциалы, тем самым ограничив произвол в решении. Оказывается, что проще всего использовать координатные условия, которые включают только величины, входящие в выписанные в явном виде части уравнений поля (1.23) и (1.24). Действительно, эти уравнения позволяют нам в качестве координатных условий [3] принять соотношения

$$\gamma_{0s|s} - \gamma_{00|0} = 0, \tag{1.25}$$

$$\gamma_{ms|s} = 0. \tag{1.26}$$

С этими координатными условиями уравнения поля принимают вид

$$h_{00|ss} = 2L_{00}, \tag{1.27}$$

$$h_{0n|ss} = 2L_{0n}, \tag{1.28}$$

$$h_{mn|ss} = 2L_{mn}. \tag{1.29}$$

Для дальнейшего рассуждения необходимо записать эти уравнения таким образом, чтобы вместо лапласианов γ в них входили лапласианы h. С этой целью заменим приведенные выше уравнения эквивалентными:

$$\gamma_{00,ss} = 2\Lambda_{00}, \tag{1.30}$$

$$\gamma_{0n,ss} = 2\Lambda_{0n}, \tag{1.31}$$

$$\gamma_{mn,ss} = 2\Lambda_{mn}, \tag{1.32}$$

---

[3] Выбор координатных условий в большой степени произволен, и может показаться более естественным использовать инвариантные относительно преобразований Лоренца условия

$$\eta^{\nu\mu}\gamma_{\alpha\nu|\mu} = 0.$$

Однако, как оказывается, вычисления проще, если использовать координатные условия, приведенные в тексте; поэтому мы и используем их в общей теории.

где матрица Λ связана с матрицей L точно так же, как γ связана с h:

$$\Lambda_{00} = \frac{1}{2} L_{00} + \frac{1}{2} L_{ll}, \tag{1.33}$$

$$\Lambda_{0n} = L_{0n}, \tag{1.34}$$

$$\Lambda_{mn} = L_{mn} - \frac{1}{2} \delta_{mn} L_{ll} + \frac{1}{2} \delta_{mn} L_{00}. \tag{1.35}$$

Эти уравнения поля (1.33) — (1.35) вместе с координатными условиями (1.25) и (1.26) будут положены в основу нашего дальнейшего рассмотрения.

2. *Основные интегральные свойства поля.* Рассмотрим три функции A_n ($n = 1, 2, 3$). Они не обязательно должны быть тензорами. Из этих функций можно образовать следующие три функции

$$(A_{n|s} - A_{s|n})_{|s}, \tag{2.1}$$

которые в явном виде можно записать так:

$$\begin{gathered} \{(A_{1|2} - A_{2|1})_{|2} - (A_{3|1} - A_{1|3})_{|3}\}, \\ \{(A_{2|3} - A_{3|2})_{|3} - (A_{1|2} - A_{2|1})_{|1}\}, \\ \{(A_{3|1} - A_{1|3})_{|1} - (A_{2|3} - A_{3|2})_{|2}\}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Таким образом, эти три функции составляют ротор трех функций

$$(A_{2|3} - A_{3|2}), \quad (A_{3|1} - A_{1|3}), \quad (A_{1|2} - A_{2|1}). \tag{2.3}$$

Рассмотрим любую поверхность S, не проходящую через сингулярности поля. Поскольку выражение (2.1) является ротором вектора (2.3), из теоремы Стокса следует, что интеграл по S от «нормальной»[4] составляющей выражения (2.1) равен линейному интегралу от тангенциальной составляющей вектора (2.3), взятому по контуру, ограничивающему S. Если S — замкнутая поверхность, то длина ограничивающего контура равна нулю, и этот последний интеграл обращается в нуль. Следовательно, мы имеем следующую теорему: если S — любая замкнутая поверхность, не проходящая через сингулярности поля, то

$$\int (A_{n|s} - A_{s|n})_{|s} \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})\, dS = 0, \tag{2.4}$$

[4] Слова «нормаль», «угол», «сфера» и т. д. употребляются здесь в чисто условном смысле, обозначая соответствующие функции координат x^m и соотношения, которые подразумеваются под этими терминами в эвклидовой геометрии. Содержание этого параграфа не зависит от какой-либо специальной метрики, и мы используем термины эвклидовой геометрии только потому, что они удобны.

где $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})$ означает «угол» между направлением x^n и «нормалью» к поверхности S, а к n применяется условие суммирования. Эта теорема справедлива независимо от того, содержатся внутри поверхности S сингулярности или нет, и мы применим ее сейчас к нашей задаче.

Из координатных условий (1.25), (1.26) и уравнений поля (1.31), (1.32) имеем

$$(\gamma_{0n|s}-\gamma_{0s|n})_{|s}=2\Lambda_{0n}-\gamma_{00|0n}, \tag{2.5}$$

$$(\gamma_{mn|s}-\gamma_{ms|n})_{|s}=2\Lambda_{mn}. \tag{2.6}$$

Мы видим, что левые части уравнений (2.5) и (2.6) образуют четыре величины вида (2.1), причем одна из них вытекает из соотношения (2.5), а три остальные — из (2.6) для $m=1, 2, 3$. Из соотношения (2.4) следует, что если S — поверхность, не проходящая через сингулярности поля, то

$$\int(\gamma_{00|0n}-2\Lambda_{0n})\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS=0, \tag{2.7}$$

$$\int 2\Lambda_{mn}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS=0. \tag{2.8}$$

Из уравнений (2.5), (2.6) видно, что в тех местах, где сингулярности отсутствуют,

$$(\gamma_{00|0n}-2\Lambda_{0n})_{|n}=0, \tag{2.9}$$

$$(2\Lambda_{mn})_{|n}=0. \tag{2.10}$$

Следовательно, теорема Гаусса показывает, что если две замкнутые поверхности S и S' таковы, что на них или между ними нет сингулярностей, то интегралы по поверхностям S и S' дают одинаковый результат. Однако справедливость интегральных условий для поверхностей, которые окружают сингулярности или, в более общем случае, замыкают области, где не выполняются уравнения поля для пустого пространства, можно показать только с помощью теоремы Стокса.

Мы рассматриваем материю как сингулярности поля. Предположим, что существует p тел, каждое из которых представлено точечной сингулярностью. Координаты каждой такой сингулярности будут функциями только времени. Поскольку соотношения (2.7) и (2.8) справедливы для любой поверхности S, если только она не проходит через сингулярность, мы можем выбрать p таких поверхностей, что каждая из них окружает лишь одну из p сингулярностей, и получим таким образом $4p$ интегральных условий. Каждое из них, будучи теперь независимым от формы поверхности S, даст соотношение между координатами сингулярностей и их производными по времени; позднее мы увидим, что интегральные условия действительно определяют *уравнения движения* сингулярностей. Эти уравнения выводятся здесь только из уравнений поля и координатных условий без каких-либо добавочных предположений.

Если вместо интегрирования вокруг одной сингулярности мы возьмем интеграл по поверхности, содержащей все сингулярности, то мы получим законы сохранения энергии и импульса для всей системы. Эти законы, конечно, являются просто следствиями законов движения отдельных частиц, но благодаря серии упрощений они принимают сравнительно простой вид.

3. *Метод приближения.* До сих пор в теории относительности использовался следующий метод приближения. Предположим, что в соотношении

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

величины $h_{\mu\nu}$ непрерывно зависят от положительного параметра таким образом, что они обращаются в нуль при $\lambda = 0$, т. е. при $\lambda = 0$ пространство-время становится галилеевым. Следовательно, предположим, что величины $h_{\mu\nu}$ можно разложить в степенные ряды [5] по λ:

$$h_{\mu\nu} = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l \underset{l}{h}_{\mu\nu}. \tag{3.2}$$

Это разложение подставляется в уравнения поля, которые после группирования членов по различным степеням λ принимают вид

$$0 = R_{\mu\nu} = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l \underset{l}{R}_{\mu\nu}. \tag{3.3}$$

Чтобы набор величин $h_{\mu\nu}$, зависящих от параметра λ, мог быть решением уравнений поля, с необходимостью должно удовлетворяться каждое из уравнений

$$\underset{l}{R}_{\mu\nu} = 0. \tag{3.4}$$

Наиболее известной иллюстрацией этого метода является его применение к первому приближению.

Покажем теперь, почему этот метод приближения непригоден для рассмотрения квазистационарных полей. Если мы введем тензор энергии для материи, которая порождает поле, то в первом приближении, пользуясь мнимым временем, получим известные уравнения

$$\gamma_{\mu\nu|\sigma\sigma} = -2T_{\mu\nu}, \tag{3.5}$$

[5] В выражении λ^l число l будет всегда показателем степени, а не контравариантным индексом!

причем система координат определяется соотношениями

$$\gamma_{\mu\sigma|\sigma} = 0. \tag{3.6}$$

В простейшем случае пылевидного вещества, которое порождает поле, $T_{\mu\nu}$ имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \rho \frac{d\xi^{\mu}}{ds} \frac{d\xi^{\nu}}{ds}, \tag{3.7}$$

где величины $d\xi^{\mu}/ds$ являются компонентами скорости, измеренными в шкале собственного времени s. Если мы имеем дело с квазистатическим случаем, то компонента $d\xi^0/ds$ по порядку величины равняется единице, в то время как компоненты $d\xi^m/ds$ относительно малы. Таким образом, в этом случае получим

$$|T_{00}| \gg |T_{0n}| \gg |T_{mn}|, \tag{3.8}$$

и из уравнений (3.5) мы должны получить соответственно

$$|\gamma_{00}| \gg |\gamma_{0n}| \gg |\gamma_{mn}|. \tag{3.9}$$

Обычный метод приближения не принимает этого во внимание, так как в нем все компоненты γ рассматриваются как величины одного порядка, хотя в квазистатическом случае компонента γ_{00} значительно больше других компонент $\gamma_{\mu\nu}$. Действительно хороший метод приближения для квазистатического случая должен существенным образом использовать соотношения (3.9).

Наиболее просто мы приходим к нашему новому методу, рассматривая задачу построения приближения, пригодного для решения приближенных уравнений поля (3.5) в квазистатическом случае. Получаемый таким путем метод оказывается применимым и для решения строгих гравитационных уравнений даже в случаях, не являющихся квазистатическими.

Первый шаг заключается в том, чтобы явно выразить то обстоятельство, что производная от составляющих поля по времени мала по сравнению с самой величиной поля и ее пространственными производными. Для этого введем вспомогательную временную координату

$$\tau = \lambda x^0 \tag{3.10}$$

и предположим, что каждая переменная поля является функцией координат (τ, x^1, x^2, x^3) вместо (x^0, x^1, x^2, x^3). Если такой переменной является φ, то мы предположим теперь, что φ, $\varphi_{|m}$ и $\partial\varphi/\partial\tau$ имеют одинаковый порядок величины, так что $\varphi_{|0}$ есть величина порядка $\lambda\varphi$.

Отсюда мы заключаем, что если компонента T_{00}, определяемая равенством (3.7), имеет порядок величины λ^q, то компоненты T_{0n} будут порядка λ^{q+1}, а компоненты T_{mn} — порядка λ^{q+2}.

Далее из известных рассуждений, касающихся первого приближения (сохранение энергии при движении точки), следует, что величина γ_{00}, т. е. потенциальная энергия единицы массы, по порядку величины равна квадрату скорости и, таким образом, в наших обозначениях оказывается порядка λ^2. Отсюда для компонент γ по порядку величины имеем

$$\gamma_{00} \sim \lambda^2, \qquad \gamma_{0n} \sim \lambda^3, \qquad \gamma_{mn} \sim \lambda^4. \tag{3.11}$$

Если разложить компоненты γ в степенные ряды по λ, то мы должны взять наименьшие степени разложений, чтобы получить порядки, указанные в соотношениях (3.11). Тот факт, что в уравнения (3.5) входят только вторые производные компонент γ по времени, показывает, что степени λ в последовательных членах разложений компонент γ могут отличаться на две единицы [6]. Таким образом, мы приходим к простому предположению, что

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{00} &= \lambda^2 \underset{2}{\gamma_{00}} + \lambda^4 \underset{4}{\gamma_{00}} + \lambda^6 \underset{6}{\gamma_{00}} + \ldots, \\ \gamma_{0n} &= \lambda^3 \underset{3}{\gamma_{0n}} + \lambda^5 \underset{5}{\gamma_{0n}} + \ldots, \\ \gamma_{mn} &= \lambda^4 \underset{4}{\gamma_{mn}} + \lambda^6 \underset{6}{\gamma_{mn}} + \ldots. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Мы не можем обсуждать вопрос о сходимости в общем случае, но интересно показать, что новый метод приближения может дать сходящиеся результаты даже в тех случаях, когда с первого взгляда этого нельзя ожидать. Рассмотрим случай одномерного волнового уравнения в его простейшей форме

$$f_{xx} - f_{tt} = 0. \tag{3.13}$$

Если, в соответствии с основной идеей нового метода приближения, мы запишем

$$\left.\begin{aligned} f &= \underset{0}{f} + \lambda^2 \underset{2}{f} + \lambda^4 \underset{4}{f} + \ldots, \\ f_{xx} &= \underset{0}{f_{xx}} + \lambda^2 \underset{2}{f_{xx}} + \lambda^4 \underset{4}{f_{xx}} + \ldots, \\ f_{tt} &= \lambda^2 f_{\tau\tau} = \lambda^2 \underset{0}{f_{\tau\tau}} + \lambda^4 \underset{2}{f_{\tau\tau}} + \lambda^6 \underset{4}{f_{\tau\tau}} + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

---

[6] Пренебрежение членами с λ^{2l+1} в выражениях для компонент γ_{00}, γ_{mn} и членов с λ^{2l} в выражениях для компонент γ_{0m} возможно и естественно, хотя логически не является строго необходимым. Добавление опущенных членов в соотношения (3.12) можно было бы провести таким образом, чтобы оно соответствовало введению запаздывающего потенциала (расходящейся волны). Однако такая процедура была бы искусственной, хотя, как будет показано позднее, и не повлияла бы на уравнения движения, полученные во второй части работы.

то из уравнения (3.13) получим последовательно уравнения:

$$\underset{0}{f}_{xx} = 0, \tag{3.15а}$$

$$\underset{2}{f}_{xx} - \underset{0}{f}_{\tau\tau} = 0, \tag{3.15б}$$

$$\underset{4}{f}_{xx} - \underset{2}{f}_{\tau\tau} = 0. \tag{3.15в}$$

Из этих уравнений можно найти общее решение волнового уравнения (3.13) в виде разложения в степенной ряд по λ. Для простоты рассмотрим случай синусоидальной волны, т. е. из множества решений уравнения (3.15а),

$$\underset{0}{f} = A(\tau) + xB(\tau), \tag{3.16}$$

выберем частное решение [7]

$$\underset{0}{f} = \sin\tau \tag{3.17а}$$

и на каждой последующей ступени процедуры будем пренебрегать всеми произвольными функциями, которые могут встретиться. Таким образом, из уравнений (3.15б) и (3.15в) находим:

$$\underset{2}{f} = -\frac{x^2}{2!}\sin\tau, \tag{3.17б}$$

$$\underset{4}{f} = \frac{x^4}{4!}\sin\tau, \tag{3.17в}$$

так что решение принимает вид

$$f = \sin\tau\left\{1 - \frac{(x\lambda)^2}{2!} + \frac{(x\lambda)^4}{4!} - \ldots\right\} = \cos(\lambda x)\sin\tau.$$

Заменяя τ на λt, получаем точное решение уравнения (3.13)

$$f = \cos(\lambda x)\sin(\lambda t). \tag{3.18}$$

4. *Свойства переменных поля по отношению к разложению в ряд.* В этом разделе мы покажем, что существует простое общее правило, определяющее типы разложений, которые будут встречаться в процессе рассмотрения гравитационных уравнений нашим методом. Это правило гласит:

---

[7] Нетрудно увидеть, что включение решения $\underset{0}{f} = x\sin\tau$ также ведет к синусоидальным волнам.

Любая составляющая с нечетным числом нулевых индексов будет иметь в своем разложении только нечетные степени λ, тогда как в разложении любой составляющей, имеющей четное число таких индексов, будут присутствовать только четные степени λ.

Основные уравнения (3.12) показывают, что компоненты $\gamma_{\mu\nu}$ согласуются с этим правилом. Соотношения (1.19) — (1.21) между компонентами тензоров $\gamma_{\mu\nu}$ и $h_{\mu\nu}$ имеют обратные соотношения точно такого же вида с взаимно замененными компонентами γ и h, а именно:

$$h_{00} = \frac{1}{2}\gamma_{00} + \frac{1}{2}\gamma_{ll}, \tag{4.1}$$

$$h_{0n} = \gamma_{0n}, \tag{4.2}$$

$$h_{mn} = \gamma_{mn} - \frac{1}{2}\delta_{mn}\gamma_{ll} + \frac{1}{2}\delta_{mn}\gamma_{00}. \tag{4.3}$$

Из соотношений (3.12) следует, что разложения компонент h по степеням λ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} h_{00} &= \lambda^2 \underset{2}{h_{00}} + \lambda^4 \underset{4}{h_{00}} + \lambda^6 \underset{6}{h_{00}} + \ldots, \\ h_{0n} &= \lambda^3 \underset{3}{h_{0n}} + \lambda^5 \underset{5}{h_{0n}} + \ldots, \\ h_{mn} &= \lambda^2 \underset{2}{h_{mn}} + \lambda^4 \underset{4}{h_{mn}} + \lambda^6 \underset{6}{h_{mn}} + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

откуда видно, что компоненты h также согласуются с общим правилом.

Далее, поскольку компоненты $\eta_{\mu\nu}$ находятся в тривиальном согласии с этим правилом в силу обращения в нуль компонент η_{0n}, из соотношений (1.4) следует, что компоненты $g_{\mu\nu}$ также согласуются с ним.

Соотношение

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta^{\sigma}_{\mu} \tag{4.5}$$

можно записать в виде

$$g_{\mu n} g^{n\sigma} + g_{\mu 0} g^{0\sigma} = \delta^{\sigma}_{\mu}. \tag{4.6}$$

Две группы членов в левой части отличаются четным числом нулевых индексов. Поэтому ввиду тривиального согласия тензора δ^{σ}_{μ} с общим правилом мы получим в каждом приближении достаточное число уравнений для нахождения разложений компонент $g^{\mu\nu}$, если предположим, что общее правило справедливо также и для этих компонент. Однако величины $g^{\mu\nu}$ единственным образом определены через $g_{\mu\nu}$ соотношением (4.5), так что, согласно общему правилу, разложения будут давать единственное решение и коэффициенты при лишней степени λ с необходимостью будут равны нулю. Таким образом, это правило применимо к компонентам $g^{\mu\nu}$, а следовательно, и к компонентам $h^{\mu\nu}$.

Рассмотрим теперь символы Кристоффеля обоих родов. Мы имеем

$$[\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2}(g_{\nu\sigma|\mu} + g_{\sigma\mu|\nu} - g_{\mu\nu|\sigma}). \tag{4.7}$$

Поскольку операция «$_{|0}$» вводит множитель λ, в то время как операции «$_{|m}$» оставляют порядок величины неизменным, и так как компоненты $g_{\mu\nu}$ подчиняются общему правилу, то величины $[\mu\nu, \sigma]$ также подчиняются ему.

Символы Кристоффеля второго рода определяются равенством

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = g^{\lambda\sigma} [\mu\nu, \sigma]. \tag{4.8}$$

Так как при наличии немого индекса у нас или не будет лишних нулевых индексов или будет два таких индекса, входящих в любой член подразумеваемого суммирования, то тот факт, что компоненты $g^{\lambda\sigma}$ и $[\mu\nu, \sigma]$ по отдельности подтверждают общее правило, показывает, что оно справедливо и для компонент символа $\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$.

В изложенном выше рассмотрении мы показали, что общее правило не нарушается ни наличием немых индексов, ни операциями «$_{|m}$», «$_{|0}$». Следовательно, если мы, пользуясь только этими операциями, образуем новые величины из величин, которые согласуются с этим правилом, то эти новые величины также должны подчиняться общему правилу. Примером этого служит наше обсуждение символов Кристоффеля; поскольку все величины, с которыми мы будем иметь дело, например

$$R\,(\equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}), \qquad \Lambda_{\mu\nu} \text{ и т. д.},$$

являются новыми величинами того же типа, мы видим, что все они будут разлагаться в ряды по степеням λ, общий характер которых зафиксирован утверждением, приведенным в начале этого раздела.

5. *Другая форма уравнений в отсутствие сингулярностей.* В этом и следующем разделах мы рассмотрим случай, когда поле не имеет сингулярностей. Разумеется, с физической точки зрения этот случай тривиален, поскольку он соответствует полному отсутствию вещества; действительно, согласно нашему методу, он приводит к галилееву решению. Тем не менее обсуждение этого случая будет небесполезным, поскольку оно поможет выявить общий механизм теории и послужит удобным введением к дальнейшему, более сложному рассмотрению случая с сингулярностями.

Резюмируем некоторые из полученных нами результатов. На поле накладывается два ограничения:

(I) уравнения гравитационного поля,

(II) координатные условия, из которых мы нашли

(III) интегральные условия на поверхности.

Иначе говоря, если принять координатные условия

$$\gamma_{00|0} - \gamma_{0n|n} = 0, \tag{1.25}$$

$$\gamma_{nm|n} = 0, \tag{1.26}$$

то уравнения поля будут иметь вид

$$\gamma_{00|ss} = 2\Lambda_{00}, \tag{1.30}$$

$$\gamma_{0n|ss} = 2\Lambda_{0n}, \tag{1.31}$$

$$\gamma_{mn|ss} = 2\Lambda_{mn}; \tag{1.32}$$

из этих двух групп уравнений мы получаем интегральные условия на поверхности

$$\int (\gamma_{00|0n} - 2\Lambda_{0n}) \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0, \tag{2.7}$$

$$\int 2\Lambda_{mn} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0, \tag{2.8}$$

а также соотношения

$$(\gamma_{00|0n} - 2\Lambda_{0n})_{|n} = 2\Lambda_{00|0} - 2\Lambda_{0n|n} = 0, \tag{2.9}$$

$$2\Lambda_{mn|n} = 0, \tag{2.10}$$

которые существенны при оценке интегральных условий на произвольных поверхностях.

Покажем теперь, что в отсутствие сингулярностей следующие два ряда уравнений (5.1) и (5.2) эквивалентны:

$$\gamma_{00|ss} = 2\Lambda_{00}, \tag{5.1а}$$

$$\gamma_{0n|ss} = 2\Lambda_{0n}, \tag{5.1б}$$

$$\gamma_{00|0} - \gamma_{0n|n} = 0, \tag{5.1в}$$

$$\gamma_{mn|ss} = 2\Lambda_{mn}, \tag{5.1г}$$

$$\gamma_{mn|n} = 0. \tag{5.1д}$$

$$\gamma_{00|ss} = 2\Lambda_{00}, \tag{5.2а}$$

$$\gamma_{0n|ss} = 2\Lambda_{0n}, \tag{5.2б}$$

$$\Lambda_{00|0} - \Lambda_{0n|n} = 0, \tag{5.2в$'$}$$

$$\int (\gamma_{00|0n} - 2\Lambda_{0n}) \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0, \tag{5.2в$''$}$$

$$\gamma_{mn|ss} = 2\Lambda_{mn}, \tag{5.2г}$$

$$\Lambda_{mn|n} = 0, \tag{5.2д$'$}$$

$$\int 2\Lambda_{mn} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0. \tag{5.2д$''$}$$

В уравнениях (5.1) содержатся только уравнения поля и координатные условия, и мы покажем, что координатные условия можно, по существу, заменить интегральными условиями на поверхности [8] и условиями (2.9) и (2.10). В рассматриваемом случае доказательство тривиально. Так как мы уже показали, что из уравнений (5.1) следуют уравнения (5.2), то обратное немедленно доказывается из следующих соображений.

Из уравнений (5.2а), (5.2б) и (5.2в) имеем

$$(\gamma_{00|0} - \gamma_{0n|n})_{|ss} = 2\Lambda_{00|0} - 2\Lambda_{0n|n} = 0;$$

поскольку поле не имеет сингулярностей и компоненты γ должны обращаться в нуль на бесконечности, в результате получаем уравнение (5.1в)

$$\gamma_{00|0} - \gamma_{0n|n} = 0.$$

Доказательство для компонент γ_{mn} аналогично.

6. *Расщепление гравитационных уравнений в отсутствие сингулярностей.* В первом разделе мы дали способ разделения членов в каждом из уравнений поля на две определенные группы. В настоящем разделе мы рассмотрим расщепление гравитационных уравнений по степеням λ и покажем, почему именно этот метод разделения применяется в нашем методе.

Прежде всего необходимо ввести некоторые обозначения. Рассмотрим величину

$$h_{mn|0s}. \tag{6.1}$$

При разложении h_{mn} по степеням λ получаем

$$h_{mn} = \lambda^2 \underset{2}{h_{mn}} + \lambda^4 \underset{4}{h_{mn}} + \ldots + \lambda^{2l} \underset{2l}{h_{mn}} + \ldots, \tag{6.2}$$

где числа под буквой h в правой части последнего равенства имеют двоякое назначение — различать в правой части разные функции h и показывать, с какой степенью λ каждая из них связана в разложении.

Фундаментальное предположение нашего метода приближения теперь требует, чтобы величины h_{mn} были такими функциями $(\lambda x^0, x^1, x^2, x^3)$, что

$$h_{mn|s} = \frac{\partial h_{mn}}{\partial s},$$

но

$$h_{mn|0} = \frac{\partial h_{mn}}{\partial x^0} = \lambda \frac{\partial h_{mn}}{\partial \tau}.$$

[8] В отсутствие сингулярностей уравнения (5.2в′) и (5.2в″), а также (5.2д′) и (5.2д″) эквивалентны, однако мы приводим их здесь все, чтобы облегчить сравнение с соответствующими уравнениями в случае наличия сингулярностей.

Чтобы различать однократное дифференцирование по (x^0, x^1, x^2, x^3) и однократное дифференцирование по (τ, x^1, x^2, x^3), мы будем обозначать последнее запятой перед соответствующим индексом:

$$h_{mn|s} = \frac{\partial h_{mn}}{\partial x^s} = h_{mn,s}\,, \tag{6.3}$$

$$h_{mn|0} = \frac{\partial h_{mn}}{\partial x^0} = \lambda\,\frac{\partial h_{mn}}{\partial \tau} = \lambda h_{mn,0}. \tag{6.4}$$

Таким образом функции h_{mn}, $h_{mn,s}$ и $h_{mn,0}$ — все одного порядка по λ, но функция $h_{mn|0}$ принадлежит на единицу большей степени λ.

С этим условием разложение (6.1) можно записать в виде

$$h_{mn|0s} = \lambda h_{mn,0s} = \lambda^3 \underset{2}{h}_{mn,0s} + \lambda^5 \underset{4}{h}_{mn,0s} + \ldots + \lambda^{2l+1} \underset{2l}{h}_{mn,0s} + \ldots \tag{6.5}$$

Однако здесь число под буквой h в правой части больше не указывает непосредственно степень λ, с которой она связана. Поэтому мы будем писать единицу под каждым нулевым индексом, следующим за запятой, для каждой функции h, под символом которой стоит число; тогда разложение (6.5) запишется так:

$$h_{mn|0s} = \lambda^3 \underset{2}{h}_{mn,\underset{1}{0}s} + \lambda^5 \underset{4}{h}_{mn,\underset{1}{0}s} + \ldots + \lambda^{2l+1} \underset{2l}{h}_{mn,\underset{1}{0}s} + \ldots . \tag{6.6}$$

Таким образом, сумма чисел под каждой функцией h дает степень λ, с которой она связана, тогда как первое из этих чисел указывает на ту функцию h, которую мы рассматриваем. В этом случае обозначение согласуется с естественным обозначением для произведения функций h.

Посмотрим теперь, что происходит, когда мы подставляем в уравнения (1.27) — (1.29) разложения функций h в степенные ряды. Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем:

$$\underset{2l}{h}_{00,ss} = 2\underset{2l}{L}_{00}, \tag{6.7}$$

$$\underset{2l+1}{h}_{0n,ss} = 2\underset{2l+1}{L}_{0n}, \tag{6.8}$$

$$\underset{2l}{h}_{mn,ss} = 2\underset{2l}{L}_{mn}. \tag{6.9}$$

Самыми низшими являются функции $\underset{2}{h}_{00}$, $\underset{3}{h}_{0n}$ и $\underset{2}{h}_{mn}$, которые, следовательно, будут определяться в первом приближении. Они соответствуют $l = 1$ в системе уравнений (6.7) — (6.9). Таким образом, на каждой ступени (например, l-ой) неизвестными величинами будут функции $\underset{2l}{h_{00}}$, $\underset{2l+1}{h_{0n}}$, $\underset{2l}{h_{mn}}$, а величинами, известными из решений в предыдущих приближениях, будут функции h с меньшими числами внизу.

Однако если мы посмотрим на формы компонент L, приведенные в формулах (1.15) — (1.17), то увидим, что на каждой стадии l у нас будут квадратичные или линейные члены, содержащие дифференцирование по x^0. Квадратичные члены могут содержать лишь функции h порядка, более низкого чем l, а линейные члены можно записать в виде:

$$\underset{2l-1}{h_{0s}}{}_{,\underset{1}{0s}} - \frac{1}{2}\underset{2l-2}{h_{ss}}{}_{,\underset{11}{00}} \qquad \text{в } \underset{2l}{L_{00}}, \tag{6.10}$$

$$\text{нет} \qquad \text{в } \underset{2l+1}{L_{0n}}, \tag{6.11}$$

$$\frac{1}{2}\underset{2l-2}{h_{mn}}{}_{,\underset{11}{00}} - \frac{1}{2}\underset{2l-1}{h_{0m}}{}_{,\underset{1}{0n}} - \frac{1}{2}\underset{2l-1}{h_{0n}}{}_{,\underset{1}{0m}} \qquad \text{в } \underset{2l}{L_{mn}}. \tag{6.12}$$

Это — функции, известные из предыдущих приближений. Следовательно, $\underset{2l}{L_{00}}$, $\underset{2l+1}{L_{0n}}$, $\underset{2l}{L_{mn}}$ для данного l в целом известны из решений в предыдущих приближениях. Это лежит в основе описанного в первом разделе специального метода разделения уравнений поля на две группы. После того, как такое разделение будет проведено и разложения величин h в степенные ряды будут подставлены в уравнения (1.27)—(1.29), коэффициенты при каждой степени λ автоматически группируются в такие величины, которые входят в рассматриваемое приближение в первый раз, и в такие, которые уже известны, по крайней мере в принципе, из предыдущих приближений. Эти две группы в точности соответствуют левой и правой частям уравнений (1.27) — (1.29).

Прежде чем мы сможем решить приближенные уравнения, необходимо произвести соответствующее расщепление координатных условий (1.25) и (1.26) и соотношений между компонентами h и γ. Оказывается, что на каждой ступени можно принять

$$\underset{2l}{\gamma_{00}}{}_{,ss} = 2\underset{2l}{\Lambda_{00}}, \quad \underset{2l+1}{\gamma_{0n}}{}_{,ss} = 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}}, \quad \underset{2l}{\gamma_{00}}{}_{,\underset{1}{0}} - \underset{2l+1}{\gamma_{0n}}{}_{,n} = 0, \tag{6.13}$$

$$\underset{2l}{\gamma_{mn}}{}_{,ss} = 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}, \quad \underset{2l}{\gamma_{mn}}{}_{,n} = 0, \tag{6.14}$$

причем компоненты Λ известны из решений в предыдущих приближениях.

Можно также расщепить альтернативные уравнения (5.2) и вместо них использовать на каждой ступени соотношения:

$$\underset{2l}{\gamma}_{00,ss} = 2\underset{2l}{\Lambda}_{00}, \qquad \underset{2l+1}{\gamma}_{0n,ss} = 2\underset{2l+1}{\Lambda}_{0n}, \qquad \underset{2l}{\Lambda}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{2l+1}{\Lambda}_{0n,n} = 0,$$
$$\int (\underset{2l}{\gamma}_{00,\underset{1}{0n}} - 2\underset{2l+1}{\Lambda}_{0n}) \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0; \tag{6.15}$$

$$\underset{2l}{\gamma}_{mn,ss} = 2\underset{2l}{\Lambda}_{mn}, \qquad 2\underset{2l}{\Lambda}_{mn,n} = 0, \qquad \int 2\underset{2l}{\Lambda}_{mn} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0. \tag{6.16}$$

Как и в случае нерасщепленных уравнений, интегральные условия на поверхности являются, в силу отсутствия сингулярностей, следствием других условий, в этом случае расщепление в целом не представляет принципиальных затруднений.

7. *Общая теория при наличии сингулярностей.* Существование сингулярностей поля приводит к тому, что теория становится непохожей на теорию, развитую для случая отсутствия сингулярностей. В самом деле, хотя уравнения поля в сингулярных точках не определены, их справедливость в регулярной области оказывается достаточной для определения движения этих сингулярностей. Малейшее изменение положения сингулярности вызывает сколь угодно большое изменение для точки, достаточно близкой к сингулярности, и поэтому, развивая наш метод приближения, мы не имеем права применять приближенные выражения для уравнений движения. Этот факт ведет к новому затруднению, на котором следует остановиться более подробно.

Пусть поле создается p частицами. Их положение в любой момент времени можно представить пространственными координатами $\overset{\varkappa}{\xi}{}^m(\tau)$, где $\varkappa = 1, 2, \ldots, p$. В точках, где находятся частицы, поле имеет сингулярность, но каждую из этих сингулярностей можно окружить малой поверхностью[9]; тогда в области, внешней по отношению к этим p поверхностям, поле будет регулярным.

Хотя уравнения (5.1) и (5.2) в сингулярных точках не определены, они имеют смысл в такой области, и мы покажем, что их еще можно считать в некотором смысле эквивалентными. Рассуждения можно разделить на две части, в одной из которых рассматриваются уравнения (5.1а) — (5.1в) и (5.2а) — (5.2в), включающие нулевой индекс, а во второй — остальные уравнения, имеющие только пространственные индексы. Рассмотрим последние. Существенное в структуре уравнений (5.1г), (5.1д) и

---

[9] Для доказательства мы предполагаем, что положение задано в некоторый определенный момент времени τ, считая его постоянным при проведении доказательства.

(5.2г), (5.2д) сохраняется, если опустить индекс m и для всего поля написать:

$$\gamma_{n|ss} = 2\Lambda_n, \qquad (7.1г) \qquad\qquad \gamma_{n|ss} = 2\Lambda_n, \qquad (7.2г)$$

$$\gamma_{n|n} = 0, \qquad (7.2д) \qquad\qquad \Lambda_{n|n} = 0, \qquad (7.2д')$$

$$\int 2\Lambda_n \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0. \qquad (7.2д'')$$

Доказательство того, что уравнения (7.1) имеют следствием уравнения (7.2), в сущности уже было дано в разделе 2. Докажем обратное. Для этого сначала из уравнения (7.2г) получим уравнение

$$\gamma_{n|nss} = 2\Lambda_{n|n}, \qquad (7.3)$$

которое справедливо вне поверхностей, окружающих сингулярности. Для решения этого уравнения аналитически продолжим функции Λ_n внутрь этих поверхностей таким образом, чтобы величина $\Lambda_{n|n}$ всюду была равна нулю. Это, разумеется, возможно вследствие справедливости уравнения (7.2д''). Таким образом уравнение (7.3) переходит в

$$\gamma_{n|nss} = 0.$$

Это уравнение, выполняющееся всюду, имеет единственное решение

$$\gamma_{n|n} = 0,$$

т. е. (7.1д).

Таким образом, мы показали, что если произвести аналитическое продолжение функций Λ_n так, чтобы уравнение (7.1д') было всюду справедливым, то совокупности уравнений (7.1) и (7.2) вне поверхностей, окружающих сингулярности, эквивалентны.

Из доказательства ясно, что результат справедлив для любых поверхностей, окружающих сингулярности.

Аналогичное доказательство можно также дать для уравнений (5.1а) — (5.1в) и (5.2а) — (5.2в). В этом случае необходимо аналитически продолжить функции Λ_{00} и Λ_{0n} так, чтобы уравнение (5.2в') выполнялось всюду, что возможно в силу уравнения (5.2в''). Детали этой части доказательства того, что уравнения (5.1) и (5.2) можно считать эквивалентными даже при наличии сингулярностей, мы опустим и будем полагать доказательство завершенным.

Чтобы увидеть трудность, вносимую использованием нашего метода приближения, рассмотрим теперь только уравнения (7.2г) и (7.2д'), опуская поверхностный интеграл (7.2д''). Эти уравнения определяют поле на каждой ступени приближения, если задано движение сингулярностей. В таком случае движение частиц произвольно, как, например, в электродинамической задаче, и поле определяется на каждой ступени приближения уравнениями:

$$\underset{2l}{\gamma}_{n,\,ss} = 0,$$

$$\underset{2l}{\Lambda}_{n,\,n} = 0.$$

Мы придем к очевидному противоречию, если попытаемся прибавить к этим уравнениям условие на поверхности, расщепленное в соответствии с нашим методом приближения. Тогда получим добавочное уравнение

$$\int^{\times} 2\underset{2l}{\Lambda}_n \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0, \tag{7.4}$$

где индекс $\varkappa$ у символа интеграла означает, что поверхность интегрирования окружает только $\varkappa$-ую сингулярность. В интеграле (7.4) мы имеем бесконечный ряд уравнений, содержащих функции $\overset{\times}{\xi}$ и их производные по времени. Эти уравнения не могут быть удовлетворены произвольно заданными функциями $\overset{\times}{\xi}$, характеризующими движение.

Это показывает также, каким образом можно избежать этих трудностей. Вместо совокупностей уравнений (5.1) или (5.2) мы должны рассмотреть более общий ряд условий, налагаемых на поле, в которых эти уравнения содержатся как частный случай. Поскольку трудности вызываются именно интегральными условиями на поверхности, мы удалим уравнения (5.2в′′) и (5.2д′′) из совокупности уравнений (5.2) и рассмотрим смысл оставшихся.

Проводя это обобщение, мы, конечно, вышли за пределы гравитационных уравнений и пришли к другим, которые содержат гравитационные уравнения как частный случай, и теперь должны обсудить, какие изменения внесены в совокупности уравнений (5.1) этим обобщением.

Так как поверхностные интегралы не зависят от поверхностей, то они будут зависеть от времени только через ξ и их производные. Поэтому без ограничения общности эти интегралы, взятые по p поверхностям, окружающим разные сингулярности, можно обозначить через $4\pi\overset{\times}{C}_0(\tau)$ и $4\pi\overset{\times}{C}_m(\tau)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\int^{\times} (\gamma_{00|0} - 2\Lambda_{0n}) \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS &= \overset{\times}{C}_0(\tau), \\ \frac{1}{4\pi}\int^{\times} 2\Lambda_{mn} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS &= \overset{\times}{C}_m(\tau). \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

Мы должны доказать, что следующие два ряда уравнений (7.6) и (7.7) эквивалентны:

$$\gamma_{00|ss} = 2\Lambda_{00}, \quad (7.6а) \qquad \gamma_{00|ss} = 2\Lambda_{00}, \quad (7.7а)$$

$$\gamma_{0n|ss} = 2\Lambda_{0n}, \quad (7.6б) \qquad \gamma_{0n|ss} = 2\Lambda_{0n}, \quad (7.7б)$$

$$\gamma_{00|0} - \gamma_{0n|n} = -\sum_{\varkappa=1}^{p} \{\overset{\varkappa}{C}_0/\overset{\varkappa}{r}\}, \quad (7.6в) \qquad \Lambda_{00|0} - \Lambda_{0n|n} = 0, \quad (7.7в')$$

$$\gamma_{mn|ss} = 2\Lambda_{mn}, \quad (7.6г) \qquad \gamma_{mn|ss} = 2\Lambda_{mn}, \quad (7.7г)$$

$$\gamma_{mn|n} = -\sum_{\varkappa=1}^{p} \{\overset{\varkappa}{C}_m/\overset{\varkappa}{r}\}, \quad (7.6д) \qquad \Lambda_{mn|n} = 0. \quad (7.7д')$$

Здесь $\overset{\varkappa}{r}$ означает «расстояние» от x^n до $\varkappa$-й сингулярности:

$$\overset{\varkappa}{r} = [(x^s - \overset{\varkappa}{\xi}{}^s)(x^s - \overset{\varkappa}{\xi}{}^s)]^{1/2}, \tag{7.8}$$

Как и прежде, мы можем ввести поверхности, окружающие сингулярности, и эти уравнения, разумеется, будут иметь смысл вне этих поверхностей. Доказательство эквивалентности записанных выше совокупностей уравнений также можно разбить на две части, и мы докажем лишь эквивалентность для уравнений (7.6г), (7.6д) и (7.7г), (7.7д'). Опуская, как и раньше, индекс m, получаем:

$$\gamma_{n|ss} = 2\Lambda_n, \quad (7.9г) \qquad \gamma_{n|ss} = 2\Lambda_n, \quad (7.10г)$$

$$\gamma_{n|n} = -\sum_{\varkappa=1}^{p} \{\overset{\varkappa}{C}/\overset{\varkappa}{r}\}, \quad (7.9д) \qquad \Lambda_{n|n} = 0, \quad (7.10д')$$

где введено обозначение

$$\frac{1}{4\pi}\overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_n \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = \overset{\varkappa}{C}(\tau). \tag{7.11}$$

Начнем с доказательства того, что при определенных условиях аналитическое продолжение уравнений (7.10) имеет следствием уравнения (7.9). Теперь уже нельзя осуществлять аналитическое продолжение Λ_n таким образом, чтобы уравнение (7.10д') всюду удовлетворялось, поскольку отсюда следовало бы, что поверхностный интеграл обращается в нуль.

Действительно, из равенства (7.11) в силу теоремы Гаусса видно, что аналитическое продолжение должно быть таким, чтобы

$$\frac{1}{4\pi}\overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_{n|n} dv = \frac{1}{4\pi}\overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_n \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = \overset{\varkappa}{C}(\tau). \tag{7.12}$$

Для наших целей аналитическое продолжение проще всего осуществить таким образом, чтобы функции Λ_n и $\Lambda_{n|n}$ были непрерывны на поверхностях, а $\Lambda_{n|n}$ имела постоянный знак внутри каждой поверхности и удовлетворяла соотношению (7.12).

Такое продолжение возможно для любых поверхностей, окружающих сингулярности, и оно может быть проведено так, чтобы при стягивании этих поверхностей в точку функция $\Lambda_{n|n}$ переходила в сумму δ-функций Дирака:

$$\Lambda_{n|n} \to 4\pi \sum_{\varkappa=1}^{p} \overset{\varkappa}{C}(\tau)\cdot\delta(x^1 - \overset{\varkappa}{\xi}{}^1)\,\delta(x^2 - \overset{\varkappa}{\xi}{}^2)\,\delta(x^3 - \overset{\varkappa}{\xi}{}^3). \tag{7.13}$$

Теперь из уравнения (7.10г) мы получаем

$$\gamma_{n|nss} = 2\Lambda_{n|n},$$

так что

$$\gamma_{n|n}(x) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Lambda_{n|n}(x')}{r(x, x')} dv', \tag{7.14}$$

где интеграл должен быть взят по всей области x^n, а $r(x, x')$ — «расстояние» от x^n до x'^n:

$$r(x, x') = [(x^s - x'^s)(x^s - x'^s)]^{1/2}. \tag{7.15}$$

В силу уравнения (7.10д′), вне поверхностей соотношение (7.14) можно записать в виде

$$\gamma_{n|n}(x) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\varkappa=1}^{p}\overset{\varkappa}{\int} \frac{2\Lambda_{n|n}(x')}{r(x, x')} dv'; \tag{7.16}$$

здесь интегралы берутся только по областям внутри поверхностей. При стягивании этих поверхностей в точку мы можем считать $r(x, x')$ постоянными во всех областях интегрирования и записать

$$\gamma_{n|n}(x) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\varkappa=1}^{p}\frac{1}{\overset{\varkappa}{r}(x)}\overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_{n|n} dv,$$

а согласно равенству (7.12), это представляет собой

$$\gamma_{n|n} = -\sum_{\varkappa=1}^{p} \{\overset{\varkappa}{C}(\tau)/\overset{\varkappa}{r}\},$$

т. е. уравнение (7.9д).

Таким образом, мы показали, что с использованным выше аналитическим продолжением из уравнений (7.10) следуют уравнения (7.9).

Для доказательства обратного образуем из уравнений (7.9) соотношение

$$(\gamma_{n|s} - \gamma_{n|n})_{|s} = 2\Lambda_n + \sum_{\varkappa=1}^{p} \left\{ \overset{\varkappa}{C}(\tau) \Big/ \overset{\varkappa}{r} \right\}_{|n}. \qquad (7.17)$$

Если теперь образовать поверхностные интегралы от «нормальных» составляющих обеих частей этого уравнения по очереди для каждой из поверхностей, окружающих сингулярности, то левая часть даст нуль, как показано в разделе 2, и в результате получим

$$\overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_n \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, nS = -\overset{\varkappa}{\int} \left\{ \overset{\varkappa}{C} \Big/ \overset{\varkappa}{r} \right\}_{|n} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS =$$

$$= -\overset{\varkappa}{C} \overset{\varkappa}{\int} \left\{ 1/\overset{\varkappa}{r} \right\} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 4\pi \overset{\varkappa}{C}(\tau),$$

т. е. равенство (7.11).

Тот факт, что справедливость уравнения (7.10д′) для регулярной области следует из уравнений (7.9), тривиален, а эквивалентность уравнений (7.6г, д) и (7.7г, д′), следовательно, доказана.

Доказательство эквивалентности для остальных уравнений (7.6) и (7.7), содержащих индекс нуль, не представляет ничего существенно нового и здесь опущено.

Суть нашей сложной процедуры выписывания всех уравнений поля в двух эквивалентных формах теперь ясна, поскольку наше обобщение уравнений (5.1), которое привело к уравнениям (7.6), не могло быть проведено убедительным образом без использования аналогии с уравнениями (5.2) и (7.7).

Благодаря отсутствию в уравнениях (7.7) интегральных условий на поверхности больше не существует никаких возражений против применения нашего метода приближения для решения этого ряда уравнений. Точно так же, как и раньше, за исключением отсутствия интегральных условий, на поверхности выполняется расщепление уравнений по степеням параметра λ. Однако на каждой ступени приближения можно написать:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int^{\varkappa}(\underset{2l\quad 1}{\gamma_{00,0n}}-2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}})\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS&=\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}}(\tau),\\ \frac{1}{4\pi}\int^{\varkappa}2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS&=\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}(\tau).\end{aligned}\right\}\tag{7.18}$$

В этих обозначениях мы получим, точно так же, как для уравнений (7.6) и (7.7), что для каждой ступени приближения эквивалентны следующие системы уравнений:

$$\underset{2l}{\gamma_{00,ss}}=2\underset{2l}{\Lambda_{00}},\qquad(7.19\text{а})\qquad\qquad \underset{2l}{\gamma_{00,ss}}=2\underset{2l}{\Lambda_{00}},\qquad(7.20\text{а}')$$

$$\underset{2l+1}{\gamma_{0n,ss}}=2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}},\qquad(7.19\text{б})\qquad\qquad \underset{2l+1}{\gamma_{0n,ss}}=2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}},\qquad(7.20\text{б}')$$

$$\underset{2l\quad 1}{\gamma_{00,0}}-\underset{2l+1}{\gamma_{0n,n}}=-\sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}}(\tau)/\overset{\varkappa}{r}\right\},\qquad(7.19\text{в})\qquad\qquad \underset{2l\quad 1}{\Lambda_{00,0}}-\underset{2l+1}{\Lambda_{0n,n}}=0,\qquad(7.20\text{в}')$$

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,ss}}=2\underset{2l}{\Lambda_{mn}},\qquad(7.19\text{г})\qquad\qquad \underset{2l}{\gamma_{mn,ss}}=2\underset{2l}{\Lambda_{mn}},\qquad(7.20\text{г})$$

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,n}}=-\sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}(\tau)\Big/\overset{\varkappa}{r}\right\},\qquad(7.19\text{д})\qquad\qquad \underset{2l}{\Lambda_{mn,n}}=0.\qquad(7.20\text{д}')$$

При фактическом решении уравнений проще работать с системой (7.19), чем с системой (7.20). На каждой ступени мы должны решать уравнения типа $\gamma_{,ss}=2\Lambda$.

Чтобы сделать решение в целом непротиворечивым, мы должны наложить условия, что поле должно быть галилеевым на бесконечности и что к частным решениям нельзя добавить гармонических функций более высокого порядка, чем с простыми полюсами, если только их добавление не вынуждается координатными условиями (7.19в) и (7.19д). Предположим, что мы в состоянии найти все последовательные приближения. Тогда величины $C_0^{\varkappa}(\tau)$, $C_m^{\varkappa}(\tau)$ будут иметь вид

$$\overset{\varkappa}{C}_0(\tau)=\sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{2l+1}\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}_0}(\tau),\tag{7.21}$$

$$\overset{\varkappa}{C}_m(\tau)=\sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{2l}\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}(\tau).\tag{7.22}$$

Вообще говоря, наше решение не будет решением гравитационных уравнений, поскольку системы уравнений (7.6) и (7.7) являются более общими, чем гравитационные уравнения. Однако, если теперь положить

$$\overset{\times}{C}_0(\tau)=0, \qquad \overset{\times}{C}_m(\tau)=0, \tag{7.23}$$

то на движение сингулярностей накладываются такие условия, что наши решения действительно станут искомыми решениями гравитационных уравнений.

Дифференциальные уравнения (7.23) для функций ξ в действительности не зависят от λ, поскольку они должны быть выражены не через вспомогательное время τ, а через истинное время x^0; когда это будет проделано, λ с необходимостью исчезнет.

На практике, разумеется, невозможно продвинуться в вычислениях дальше нескольких первых ступеней. Предположим, однако, что мы смогли найти последовательные приближения до некоторой ступени $l=q$.

В этом случае, если положить

$$\sum_{2=l}^{q}\lambda^{2l+1}\underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0}(\tau)=0, \qquad \sum_{l=1}^{q}\lambda^{2l}\underset{2l}{\overset{\times}{C}_m}(\tau)=0, \tag{7.24}$$

мы получим решения гравитационных уравнений с точностью до членов порядка $(2q+1)$, и уравнения (7.24) дадут приближенные уравнения движения с точностью до членов этого порядка.

8. *Нулевое координатное условие.* В этом разделе мы покажем, что решение наших уравнений всегда можно построить так, что

$$\underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0}(\tau)=0; \tag{8.1}$$

отсюда следует, что условия

$$\overset{\times}{C}_0(\tau)=\sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{2l+1}\underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0}(\tau) \tag{7.21}$$

не налагают никаких ограничений на движение сингулярностей. Этот результат существен потому, что одних лишь условий (7.22) достаточно для полного описания движения и любое добавление условий привело бы к переопределенности движения.

В действительности мы используем уравнения (8.1) как условия нормировки для каждой ступени приближения; они существенны для обеспечения единственности решения.

Для нашего рассуждения существенны следующие уравнения:

$$\underset{2l}{\gamma}_{00,ss} = 2\underset{2l}{\Lambda}_{00}, \tag{7.19а}$$

$$\underset{2l+1}{\gamma}_{0n,ss} = 2\underset{2l+1}{\Lambda}_{0n}, \tag{7.19б}$$

$$\underset{2l}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{2l+1}{\gamma}_{0n,n} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}}_0(\tau)\Big/\overset{\varkappa}{r}\right\}, \tag{7.19в}$$

причем функции Λ известны из решений предыдущих приближений (мы предположим, что нашли эти решения). Если ввести величины $\overset{\varkappa}{\Gamma}(\tau)$ с помощью равенств

$$\underset{2l}{\overset{\varkappa}{\Gamma}}_{,\underset{1}{0}}(\tau) = \underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}}_0(\tau), \tag{8.2}$$

то уравнение (7.19в) можно записать в виде

$$\underset{2l}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{2l+1}{\gamma}_{0n,n} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\left(\overset{\varkappa}{\Gamma}\Big/r\right)_{,\underset{1}{0}} - \underset{2l}{\overset{\varkappa}{\Gamma}}\left(1\Big/\overset{\varkappa}{r}\right)_{,\underset{1}{0}}\right\} =$$

$$= -\sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\left(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{\Gamma}}\Big/\overset{\varkappa}{r}\right)_{,\underset{1}{0}} + \left(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{\Gamma}}\,\underset{1}{\overset{\varkappa}{\dot{\xi}}}{}^{n}\Big/\overset{\varkappa}{r}\right)_{,n}\right\}, \tag{8.3}$$

где $\dot{\xi} = d\xi/dr$.

Из уравнений (7.19а) и (7.19б) видно, что величины $\underset{2l}{\gamma}_{00}$ и $\underset{2l+1}{\gamma}_{0}$ произвольны с точностью до аддитивных гармонических функций, и поэтому к ним можно добавить простые полюса, образовав новые величины:

$$\underset{2l}{\gamma'}_{00} = \underset{2l}{\gamma}_{00} + \sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\underset{2l}{\overset{\varkappa}{\Gamma}}\Big/\overset{\varkappa}{r}\right\}, \tag{8.4}$$

$$\gamma'_{0n} = \underset{2l+1}{\gamma}_{0n} - \sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\underset{2l}{\overset{\varkappa}{\Gamma}}\,\underset{1}{\overset{\varkappa}{\dot{\xi}}}{}^{n}\Big/\overset{\varkappa}{r}\right\}. \tag{8.5}$$

Однако эти новые функции γ', по-прежнему удовлетворяя уравнениям (7.19а) и (7.19б), будут такими, что

$$\underset{2l}{\gamma'}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{2l+1}{\gamma'}_{0n,n} = 0. \tag{8.6}$$

Поскольку теперь величины C_0 равны нулю, поверхностные интегралы также обращаются в нуль; следовательно, нулевое координатное условие не оказывает влияния на уравнение движения. Эта теорема и наши предыдущие результаты показывают, что уравнения, которые должны лечь в основу фактического вычисления поля, и уравнения движения сингулярностей имеют вид:

$$\underset{2l}{\gamma}_{00,ss} = 2\underset{2l}{\Lambda}_{00}, \tag{8.7а}$$

$$\underset{2l+1}{\gamma}_{0n,ss} = 2\underset{2l+1}{\Lambda}_{0n}, \tag{8.7б}$$

$$\underset{2l}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{2l+1}{\gamma}_{0n,n} = 0; \tag{8.7в}$$

$$\underset{2l}{\gamma}_{mn,ss} = 2\underset{2l}{\Lambda}_{mn} \tag{8.7г}$$

и

$$\underset{2l}{\gamma}_{mn,n} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}_m(\tau)\Big/\overset{\varkappa}{r}\right\}, \tag{8.7д}$$

причем

$$\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}_m(\tau) = \frac{1}{4\pi}\overset{\varkappa}{\int} 2\underset{2l}{\Lambda}_{mn}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS. \tag{8.8}$$

Приближенными уравнениями движения для ступени $l = q$ будут

$$\sum_{\varkappa=1}^{q}\lambda^{2l}\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}_m(\tau) = 0. \tag{8.9}$$

II. Приложение общей теории

Замечание. В первой части настоящей работы мы развили общую теорию нового метода решения гравитационных уравнений последовательными приближениями и получения уравнений движения, в принципе с любой желаемой степенью точности. В этой части работы мы применим этот метод, проводя вычисления до такой ступени, когда определится главное отклонение от ньютоновых законов движения.

К сожалению, вычисления становятся все более громоздкими и включают большое количество технических деталей, которые сами по себе не могут представлять интереса. Приводить здесь все эти вычисления в явном виде нецелесообразно, и мы решили ограничиться изложением общих идей работы и просто привести окончательные результаты. Все вычисления этой части нашей работы хранятся в институте и доступны для всех, кого могут заинтересовать детали вычислений [10].

9. *Приближение* $l = 1$. Приближение $l = 0$ тривиально и приводит к галилееву решению, так что мы сразу перейдем к следующему приближению $l = 1$.

Поскольку величины $\underset{2}{\Lambda_{00}}$, $\underset{3}{\Lambda_{0n}}$ и $\underset{2}{\Lambda_{mn}}$ все равны нулю и, как показано в разделе 3, функции $\underset{2}{\gamma_{mn}}$ также равны нулю, из всех уравнений (8.7) у нас останутся лишь

$$\underset{2}{\gamma_{00,ss}} = 0, \tag{9.1}$$

$$\underset{3}{\gamma_{0n,ss}} = 0, \tag{9.2}$$

$$\underset{2}{\gamma_{00,\underset{1}{0}}} - \underset{3}{\gamma_{0n,n}} = 0. \tag{9.3}$$

Характер всего нашего решения существенно зависит от выбора гармонической функции, взятой в качестве решения уравнения (9.1). Предположим, что рассматриваемые частицы обладают сферической симметрией и что в бесконечности поле галилеево. В этом случае решение уравнения (9.1) единственно, поскольку каждая сингулярность функции $\underset{2}{\gamma_{00}}$ должна быть теперь простым полюсом, согласно уравнению (9.1). Следовательно, для функции $\underset{2}{\gamma_{00}}$ мы имеем решение

$$\underset{2}{\gamma_{00}} = 2\varphi, \qquad \varphi = \sum_{\varkappa=1}^{2p} \left\{-2\overset{\varkappa}{m}/\overset{\varkappa}{r}\right\}, \qquad \overset{\varkappa}{r} = \left[(x^s - \overset{\varkappa}{\xi^s})(x^s - \overset{\varkappa}{\xi^s})\right]^{1/2}, \tag{9.4}$$

причем p величин $\overset{\varkappa}{m}$ не зависят от пространственных координат x^s и могут зависеть лишь от времени.

Из уравнения (9.2) мы видим, что функция $\underset{3}{\gamma_{0n}}$ также является гармонической, и для более точного ее определения мы должны использовать координаты (9.3). Из уравнений (9.3) и (9.4) имеем

$$\underset{3}{\gamma_{0n,n}} = \underset{2}{\gamma_{00,\underset{1}{0}}} = \sum_{\varkappa=1}^{p} (-4\overset{\varkappa}{m}/\overset{\varkappa}{r})_{,0} =$$
$$= \sum_{\varkappa=1}^{p} \left\{(4\overset{\varkappa}{m}/\overset{\varkappa}{r})\,\dot{\overset{\varkappa}{\xi^n}}\right\}_{,n} - \sum_{\varkappa=1}^{p} (-4\dot{\overset{\varkappa}{m}}/\overset{\varkappa}{r}).$$

---

[10] c/o Secretary of the School of Mathematics, Institute for Advanced Study, Princeton, N. J. (U.S.A.).

Это уравнение можно решить, не вводя новые сингулярности, лишь в случае $\dot{\overset{\varkappa}{m}} = 0$. Другими словами, величины $\overset{\varkappa}{m}$, которые в действительности представляют собой массы точечных сингулярностей, с необходимостью являются постоянными. Теперь очевидно, что при наших общих ограничивающих условиях функция $\underset{3}{\gamma}_{0n}$ определена единственным образом

$$\underset{3}{\gamma}_{0n} = \sum_{\varkappa=1}^{p} \left\{(4\overset{\varkappa}{m}/\overset{\varkappa}{r})\,\dot{\overset{\varkappa}{\xi}}{}^{n}\right\}. \tag{9.5}$$

В дальнейшем мы ограничим наше рассмотрение случаем только двух частиц. Это не приведет к существенным ограничениям результатов до конца раздела 15, поскольку обобщение на случай p частиц тривиально, и позволяет упростить довольно неудобные обозначения, используемые в общем случае.

В случае двух частиц запишем

$$-2\overset{1}{m}/\overset{1}{r} = \psi, \qquad -2\overset{2}{m}/\overset{2}{r} = \chi; \tag{9.6а}$$

$$\varphi = \psi + \chi; \tag{9.6б}$$

$$\overset{1}{\xi}{}^{s} = \eta^{s}, \quad \overset{2}{\xi}{}^{s} = \zeta^{s}. \tag{9.6в}$$

В результате равенства (9.4) и (9.5) можно представить в виде

$$\underset{2}{\gamma}_{00} = 2\varphi = 2\psi + 2\chi, \tag{9.7а}$$

$$\underset{3}{\gamma}_{0n} = -2\psi\dot{\eta}^{n} - 2\chi\dot{\zeta}^{n}. \tag{9.7б}$$

Из равенства (1.18) имеем также

$$\underset{2}{h}_{00} = \varphi = \psi + \chi, \tag{9.8а}$$

$$\underset{3}{h}_{0n} = -2\psi\dot{\eta}^{n} - 2\chi\dot{\zeta}^{n}, \tag{9.8б}$$

$$\underset{2}{h}_{mn} = \delta_{mn}\varphi = \delta_{mn}(\varphi + \chi). \tag{9.8в}$$

Это показывает, что приближение $l = 1$ имеет ньютонов характер, но благодаря обращению в нуль $\underset{2}{\overset{\varkappa}{C}}_{m}$ не налагает никаких ограничений на движение.

10. *Вычисление функций* Λ *для* $l = 2$. Первым шагом в вычислении функций Λ для $l = 2$ является определение компонент $h_{\mu\nu}$.

С помощью метода, изложенного в разделе 4, мы можем вычислить разложения компонент $h^{\mu\nu}$ в любом желаемом приближении. Для $l = 1$ находим:

$$\underset{2}{h}^{00} = -\underset{2}{h}_{00} = -\varphi, \tag{10.1}$$

$$\underset{3}{h}^{0n} = \underset{3}{h}_{0n} = \underset{3}{\gamma}_{0n}, \tag{10.2}$$

$$\underset{2}{h}^{mn} = -\underset{2}{h}_{mn} = -\delta_{mn}\varphi. \tag{10.3}$$

Далее, нам необходимо вычислить для $l = 2$ величины $2L_{\mu\nu}$, определенные в формулах (1.15) — (1.17). Линейные члены в выражении для $2\underset{4}{L}_{00}$ дают

$$\varphi_{,00}.$$

Из нелинейных членов дают вклад только три, а именно

$$-2\{\underset{2}{h}^{sr}\,[\underset{2}{00}, r]\}_{,s} = -\varphi_{,s}\varphi_{,s} \quad (\text{поскольку } \varphi_{,ss} = 0),$$

$$-2\,[0\underset{2}{0}, s]\,[\underset{2}{0s}, 0] = \frac{1}{2}\,\varphi_{,s}\varphi_{,s},$$

$$-2\,[0\underset{2}{0}, r]\,[\underset{2}{rs}, s] = \frac{3}{2}\,\varphi_{,s}\varphi_{,s},$$

где $[r, s, p]$ — символы Кристоффеля. Следовательно,

$$2\underset{4}{L}_{00} = \varphi_{,00} + \varphi_{,s}\varphi_{,s}. \tag{10.4}$$

Аналогичные, но довольно утомительные вычисления приводят к следующим результатам:

$$2\underset{5}{L}_{0n} = \varphi_{,s}\underset{3}{h}_{0s,n} - \varphi_{,sn}\underset{3}{h}_{0s} - 3\varphi_{,0}\varphi_{,n}, \tag{10.5}$$

$$2\underset{4}{L}_{mn} = -\underset{3}{h}_{0m,0n} - \underset{3}{h}_{0n,0m} + \delta_{mn}\varphi_{,00} - 2\varphi\varphi_{,mn} - \varphi_{,m}\varphi_{,n} - \delta_{mn}\varphi_{,s}\varphi_{,s}. \tag{10.6}$$

Поэтому, в соответствии с уравнениями (1.30) — (1.35) имеем:

$$\underset{4}{\gamma}_{00,ss} = 2\underset{4}{\Lambda}_{00} = -\frac{3}{2}\varphi_{,s}\varphi_{,s}, \tag{10.7а}$$

$$\underset{5}{\gamma}_{0n,ss} = 2\underset{5}{\Lambda}_{0n} = \varphi_{,s}\underset{3}{\gamma}_{0s,n} - \varphi_{,sn}\underset{3}{\gamma}_{0s} - 3\varphi_{,0}\varphi_{,n}, \tag{10.7б}$$

$$\underset{4}{\gamma}_{mn,ss} = 2\underset{4}{\Lambda}_{mn} = -\underset{3}{\gamma}_{0m,0n} - \underset{3}{\gamma}_{0n,0m} + 2\delta_{mn}\varphi_{,00} - 2\varphi\varphi_{,mn} - \varphi_{,m}\varphi_{,n} + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\varphi_{,s}. \tag{10.7в}$$

Как указывалось в разделах 7 и 8, эти уравнения (10.7), вместе с соответствующими координатными условиями:

$$\underset{4}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}} + \underset{5}{\gamma}_{0n,n} = 0, \tag{10.8а}$$

$$\underset{4}{\gamma}_{mn,n} = -(\overset{1}{\underset{4}{C}}_m/\overset{1}{r}) - (\overset{2}{\underset{4}{C}}_m/\overset{2}{r}), \tag{10.8б}$$

составляют уравнения, определяющие поле в следующем приближении.

11. *Ньютоновы уравнения движения.* Теперь нам необходимо вычислить поверхностные интегралы

$$\overset{\varkappa}{\underset{4}{C}}_m(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int^{\varkappa} 2\underset{4}{\Lambda}_{mn}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS, \qquad \varkappa = 1,2. \tag{11.1}$$

Согласно общей теории, изложенной в первой части настоящей работы, эти интегралы не будут зависеть от конкретных форм поверхностей интегрирования, так как дивергенция их подынтегральных выражений должна обращаться в нуль вследствие уравнений поля в предыдущем приближении. Покажем теперь прямым вычислением, что это выполняется для величин, приведенных в формуле (10.7в).

Поскольку функции φ и $\underset{3}{\gamma}_{0n}$ — гармонические, имеем

$$2\underset{4}{\Lambda}_{mn,n} = -\underset{3}{\gamma}_{0n,mn} + 2\varphi_{,00m},$$

что обращается в нуль, как легко видеть из уравнений (9.3) и (9.7а).

При фактическом вычислении поверхностных интегралов мы оценим отдельные вклады разных членов в величину $2\underset{4}{\Lambda}_{mn}$. Так как значение всего интеграла не зависит от формы поверхности интегрирования, то, взяв эту поверхность конечных размеров и всегда на конечном расстоянии от ее сингулярности, мы видим, что весь интеграл не может быть бесконечным. Однако отдельные члены в выражении для $2\underset{4}{\Lambda}_{mn}$ не обладают тем свойством, что их дивергенция обращается в нуль, и поэтому, прежде чем начать вычисления, мы должны выбрать поверхности интегрирования определенным образом. Наиболее удобно взять определенные бесконечно малые сферы, центры которых лежат в сингулярных точках; но в этом случае в значениях отдельных интегралов могут встретиться бесконечности типа

$$\lim_{r\to 0} \mathrm{const}/r^n,$$

где n — положительное целое число. Однако, поскольку они должны взаимно уничтожаться в окончательном результате, мы можем просто пренебрегать ими в ходе всего вычисления поверхностных интегралов.

Рассмотрим интеграл по поверхности, окружающей первую сингулярность. Благодаря бесконечно малым размерам поверхности интегрирования, единственными членами, которые могут дать вклад, отличный от нуля или от бесконечности, являются члены порядка $(1/\overset{1}{r}{}^2)$.

Первым слагаемым величины $2\underset{4}{\Lambda}_{mn}$ является функция $-\underset{3}{\gamma}_{0m,0n}$, которая в соответствии с уравнением (8.7б) может быть записана в виде

$$-\underset{3}{\gamma}_{0m,0n} = -2\psi_{,ns}\dot{\eta}^m\dot{\eta}^s + 2\psi_{,n}\ddot{\eta}^m - 2\chi_{,ns}\dot{\zeta}^m\dot{\zeta}^s + 2\chi_{,n}\ddot{\zeta}^m.$$

Таким образом, нам необходимо рассматривать лишь второе слагаемое; тогда будем иметь:

$$\frac{1}{4\pi}\overset{1}{\int}(-\underset{3}{\gamma}_{0m,0n})\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS = \frac{1}{4\pi}\overset{1}{\int}2\psi_{,n}\ddot{\eta}^m\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS =$$

$$= (4\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m)\,\frac{1}{4\pi}\overset{1}{\int}\{(x^n-\eta^n)(x^n-\eta^n)/\overset{1}{r}{}^2\}\,dS =$$

$$= (4\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m)\,\frac{1}{4\pi}\overset{1}{\int}\{1/\overset{1}{r}{}^2\}\,dS = 4\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m. \tag{11.2}$$

Подобным же образом находим, что

$$\frac{1}{4\pi}\overset{1}{\int}(-\underset{3}{\gamma}_{0n,0m})\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS = \frac{4}{3}\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m. \tag{11.3}$$

Четвертый член $(-2\varphi_{,}\varphi_{,m})$ требует несколько отличного рассмотрения. При этом интерес может представлять лишь часть

$$-2\psi_{,mn}\chi.$$

Чтобы вычислить соответствующий вклад в поверхностный интеграл, мы должны разложить функцию χ в степенной ряд в окрестности первой сингулярности

$$\chi = \widetilde{\chi} + (\chi^s - \eta^s)\,\widetilde{\chi}_{,s} + \ldots, \tag{11.4}$$

где

$$\widetilde{\chi} = \chi(\eta^n), \quad \widetilde{\chi}_{,s} = \chi_{,s}(\eta^n) \text{ и т. д.} \tag{11.5}$$

Подставляя это разложение для χ, мы видим, что единственным членом в подынтегральном выражении, который может дать конечный вклад, является член

$$-2\psi_{,mn}(x^s - \eta^s)\,\widetilde{\chi}_{,s}. \tag{11.6}$$

Для определения поверхностного интеграла от этого члена необходимо вычислить интеграл

$$\int^{1} (x^s - \eta^s)\,\psi_{,mn} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS.$$

Имеем

$$(x^s - \eta^s)\,\psi_{,mn} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}) =$$

$$= 2\overset{1}{m}(x^s - \eta^s)\{-3(x^m - \eta^m)(x^n - \eta^n)/\overset{1}{r}{}^3 + \delta_{mn}/\overset{1}{r}{}^3\}(x^n - \eta^n)/\overset{1}{r} =$$

$$= -4\overset{1}{m}(x^s - \eta^s)(x^m - \eta^m)/\overset{1}{r}{}^4.$$

Отсюда

$$\frac{1}{4\pi}\int (x^s - \eta^s)\,\psi_{,mn} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS =$$

$$= -\frac{4\overset{1}{m}}{4\pi}\int (x^s - \eta^s)(x^m - \eta^m)/\overset{1}{r}{}^4\,dS = -\frac{4}{3}\overset{1}{m}\delta_{ms}, \tag{11.7}$$

и, следовательно, поверхностный интеграл от члена (11.6) равен

$$+\frac{8\overset{1}{m}}{3}\widetilde{\chi}_{,m}, \tag{11.8}$$

что является также значением поверхностного интеграла от всего члена $(-\varphi\varphi_{,mn})$.

Для поверхностных интегралов от оставшихся членов аналогичным путем получаем значения:

$$\left.\begin{aligned} 2\delta_{mn}\varphi_{,00} &\rightarrow -\frac{4\overset{1}{m}}{3}\ddot{\eta}^m, \\ -\varphi_{,m}\varphi_{,n} &\rightarrow -\frac{8\overset{1}{m}}{3}\widetilde{\chi}_{,m}, \\ \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\varphi_{,s} &\rightarrow 2\overset{1}{m}\widetilde{\chi}_{,m}. \end{aligned}\right\} \tag{11.9}$$

Отсюда имеем

$$\underset{4}{\overset{1}{C}}_m(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int \underset{4}{\overset{1}{2\Lambda}}_{mn}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS = 4\overset{1}{m}\left\{\ddot{\eta}^m + \frac{1}{2}\chi_{,m}\right\}. \tag{11.10}$$

Предположим, что мы не собираемся вычислять следующее приближение. В этом случае наши приближенные уравнения для каждой частицы будут иметь вид

$$\lambda^4\left\{\ddot{\eta}^m + \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_{,m}\right\} = 0. \tag{11.11}$$

Интересно отметить, что уравнения движения в этой форме на самом деле не зависят от переменных x^s, поскольку, согласно формулам (11.5) и (9.6),

$$\chi_{,s} = \chi_{,s}(\eta^n), \qquad \chi = -2\overset{2}{m}/\overset{2}{r}. \tag{11.12}$$

Для доказательства мы можем взять в качестве функции χ любую функцию $\overset{2}{r}$. Соотношения (11.12) показывают, что для получения $\widetilde{\chi}_{,s}$ необходимо прежде всего дифференцировать функцию χ по координате x^s и затем заменить аргумент x^s на η^s. Но результат не изменится, если сначала заменить x^s на η^s, а потом продифференцировать по η^s или по $(-\zeta^s)$. Следовательно,

$$\widetilde{\chi}_{,s} = \frac{\partial\chi(r)}{\partial\eta^s} = -\frac{\partial\chi(r)}{\partial\zeta^s}, \tag{11.13}$$

где r — «расстояние» между точками с координатами η^s и ζ^s:

$$r = [(\eta^s - \zeta^s)(\eta^s - \zeta^s)]^{1/2}. \tag{11.14}$$

Поэтому мы можем считать, что наши уравнения движения включают дифференцирование функций, зависящих только от положений сингулярностей, что характерно для теорий, основанных на концепции дальнодействия.

Записав уравнение (11.11) в векторной форме,

$$\overset{1}{m}\ddot{\eta} = \nabla (\overset{1}{m}\overset{2}{m}/r), \tag{11.15}$$

мы видим, что уравнение (11.11) дает в точности ньютоновы законы движения [11].

Таким образом, мы получили уравнения механики Ньютона только из уравнений поля, без дополнительного предположения, которое до сих пор считалось необходимым, в виде закона геодезических или специального выбора тензора энергии-импульса.

Из приведенного выше вывода ньютоновых уравнений движения становится очевидным общий механизм, с помощью которого можно получить лоренцовы уравнения движения электрических частиц. В этом случае мы должны рассматривать гравитационные уравнения, в правой части которых стоит максвеллов тензор энергии-импульса, а также уравнения поля Максвелла, и затем применить наш метод приближения ко всей системе уравнений. Однако теперь каждой сингулярности помимо ее массы m необходимо приписывать электрический заряд e. В новых уравнениях поля мы можем заведомо пренебречь вкладом от произведений гравитационных потенциалов. Это пренебрежение имеет следствием обращение в нуль второго члена в уравнении (11.11), в то время как включение тензора Максвелла приводит к появлению в правой части уравнений (11.11) соответствующего поверхностного интеграла, который дает электростатическую силу, действующую на частицу. В следующем приближении мы получим полную силу Лоренца вместе с релятивистской поправкой к массе.

Пока мы имеем дело с сингулярностями, мы не имеем оснований, в рамках теории, исключать отрицательные массы, иными словами, исключать гравитационное отталкивание между частицами. Однако, если мы решим считать массу всегда положительной, то знак максвеллова тензора энергии-импульса в уравнении определяет, должны ли одинаковые заряды притягиваться или отталкиваться. Это также вскрывает ограниченность любой теории, основанной на существовании сингулярностей.

12. *Нормировка величины* $\underset{4}{\gamma_{00}}$. Значение величины $\underset{4}{\gamma_{00}}$, полученное из уравнения (10.7а), определено с точностью до аддитивной гармонической функции, и эту функцию следует найти из соотношений (8.4), (8.2) вместе с нашим основным требованием о том, что следует избегать, насколько это возможно, гармонических функций более высокого порядка, чем функции с простыми полюсами.

---

[11] Уравнения (11.11) и (11.15) записаны через вспомогательное время и вспомогательные массы. К этому вопросу мы вернемся в разделе 17.

Из уравнения (10.7a) и факта гармоничности функции φ немедленно получаем

$$\underset{4}{\gamma_{00}} = -\frac{3}{4}\varphi\varphi + \alpha_{00}\psi + \beta_{00}\chi, \tag{12.1}$$

где мы записали аддитивные функции (8.4) в другой форме, более соответствующей нашим обозначениям в последних разделах; при этом α_{00} и β_{00} зависят только от времени τ через η и ζ и их производные. Величины α_{00} и β_{00} можно определить из условия, что

$$\frac{1}{4\pi}\int \{\underset{4}{\gamma_{00,0n}} - 2\underset{5}{\Lambda_{0n}}\} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0. \tag{12.2}$$

Значение величины α_{00} можно найти, беря этот интеграл по малой сфере с центром в первой сингулярности. Проводя вычисления, аналогичные вычислениям в разделе 3, после использования уравнений движения первого порядка находим

$$\alpha_{00} = \left\{\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s + \frac{1}{2}\widetilde{\chi}\right\}; \tag{12.3}$$

аналогично, интегрируя по малой сфере с центром во второй сингулярности, находим

$$\beta_{00} = \left\{\dot{\zeta}^s\dot{\zeta}^s + \frac{1}{2}\widetilde{\psi}\right\}. \tag{12.4}$$

Здесь

$$\widetilde{\chi} = \chi(\eta^s), \quad \widetilde{\psi} = \psi(\zeta^s). \tag{12.5}$$

Эти результаты ясно показывают физический смысл специальной нормировки, требуемой условиями (8.4) и (8.2). Теперь мы имеем

$$\lambda^2\underset{2}{\gamma_{00}} + \lambda^4\underset{4}{\gamma_{00}} = \lambda^2\left\{\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\alpha_{00}\right)2\psi + \left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\beta_{00}\right)2\chi - \frac{3}{4}\lambda^2\varphi\varphi\right\}, \tag{12.6}$$

и из формул (12.3) и (12.4) видно, что выражения $\overset{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\alpha_{00}\right)$ и $\overset{2}{m}\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\beta_{00}\right)$ включают в себя первые релятивистские поправки к массам.

Вычисления до этой стадии соответствуют вычислениям Дросте, де Ситтера и Леви-Чивиты, цитированным во Введении.

13. *Решение уравнений поля для* $l = 2$. Поскольку наша конечная цель состоит в определении уравнений движения в следующих приближениях, мы интересуемся только теми выражениями, которые дают вклад в соответствующие поверхностные интегралы. Перечислим, что необхо-

димо для этих вычислений, поскольку обоснование нашего утверждения не может быть дано без указания деталей вычислений.

1. Вычисление величин $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ и $\underset{5}{\gamma}_{0m}$ в окрестности сингулярностей. Мы можем не учитывать в $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ те члены, которые стремятся к бесконечности при $\overset{1}{r} \to 0$.

2. Вычисление величин $\underset{4}{\gamma}_{33}$ во всем пространстве. Выражение $2\underset{4}{\Lambda}_{mn}$ в уравнениях (10.7) можно разделить на две части, одна из которых содержит линейные члены вместе со всеми другими членами, не включающими взаимодействие между двумя частицами, а другая содержит все члены, описывающие взаимодействие. Обозначим эти две группы членов соответственно через X_{mn} и Y_{mn}. Интегрирование уравнений

$$\underset{4}{\gamma}'_{mn,ss} = X_{mn} \tag{13.1}$$

не представляет каких-либо трудностей, но уравнения

$$\underset{4}{\gamma}''_{mn,ss} = Y_{mn}, \tag{13.2}$$

очевидно, не интегрируются элементарно, и мы должны ввести упрощение. Поскольку значения величин $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ нам необходимы главным образом для вычисления интегралов $\underset{6}{C}_m$ по поверхности, окружающей, например, первую частицу, мы можем ввести разложение величины $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ в степенной ряд в окрестности этой точки и получить таким образом решение для $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ также в виде разложения. Действительно, из уравнений (13.1) и (13.2) мы находим для величин $\underset{4}{\gamma}'_{mn}$ и $\underset{4}{\gamma}''_{mn}$ следующие выражения:

$$\begin{aligned}\underset{4}{\gamma}'_{mn} = {} & \{\psi\,[(x^n - \eta^n)\,\dot\eta^m + (x^m - \eta^m)\,\dot\eta^n - \delta_{mn}(x^s - \eta^s)\,\dot\eta^s]\}_{,0} + \\ & + \{\psi\,[(x^n - \zeta^n)\,\dot\zeta^m + (x^m - \zeta^m)\,\dot\zeta^n - \delta_{mn}(x^s - \zeta^s)\,\dot\zeta^s]\}_{,0} + \\ & + \frac{7}{4}\overset{1}{r}{}^2\psi_{,m}\psi_{,n} + \frac{7}{4}\overset{2}{r}{}^2\chi_{,m}\chi_{,n},\end{aligned} \tag{13.3}$$

и

$$\underset{4}{\gamma}''_{mn} = -\psi_{,m}(x^n - \eta^n)\,\widetilde{\chi}, \tag{13.4}$$

причем в уравнение (13.4) включены только те члены, которые важны для окончательного вычисления поверхностных интегралов $\underset{6}{\overset{1}{C}}_m$.

Величины $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ определяются выражением

$$\underset{4}{\gamma}_{mn} = \underset{4}{\gamma}'_{mn} + \underset{4}{\gamma}''_{mn} + \alpha_{mn}\psi, \tag{13.5}$$

где α_{mn} — функции времени, которые определяются из координатных условий.

Аналогичным образом значения величин $\underset{5}{\gamma}_{0n}$ можно вычислить в два приема. Включая лишь члены, существенные для поверхностных интегралов $\underset{6}{\overset{1}{C}}_m$, в подынтегральные выражения которых $\underset{5}{\gamma}_{0n}$ входят только линейно, находим:

$$\underset{5}{\gamma}'_{0m} = -\frac{7}{4}\,\overset{1}{r}{}^2\psi_{,m}\psi_{,s}\dot{\eta}^s + \frac{3}{4}\,\psi\psi\dot{\eta}^m; \tag{13.6}$$

$$\begin{aligned}\underset{5}{\gamma}''_{0m} = &-\frac{3}{2}(x^s-\eta^s)\,\psi\widetilde{\chi}_{,m}\dot{\zeta}^s - (x^m-\eta^m)\,\psi\,\widetilde{\chi}_{,s}\dot{\eta}^s + \\ &+\frac{1}{2}\,\psi_{,m}(x^s-\eta^s)(x^l-\eta^l)\,\widetilde{\chi}_{,l}\dot{\zeta}^s + (x^m-\eta^m)\,\psi\,\widetilde{\chi}_{,s}\dot{\zeta}^s + \\ &+\frac{1}{2}(x^s-\eta^s)\psi\widetilde{\chi}_{,s}\dot{\zeta}^m + \frac{3}{2}(x^s-\eta^s)\,\psi\widetilde{\chi}_{,m}\dot{\eta}^s + \\ &+(x^s-\eta^s)\,\psi_{,m}\,\widetilde{\chi}\dot{\zeta}^s.\end{aligned} \tag{13.7}$$

Величины $\underset{5}{\gamma}_{0n}$ определяются суммой

$$\underset{5}{\gamma}_{0n} = \underset{5}{\gamma}'_{0n} + \underset{5}{\gamma}''_{0n} + \alpha_{0n}\psi, \tag{13.8}$$

где α_{0n} — функция времени, которую следует определить из условия нормировки.

Остается лишь вычислить величину $\underset{4}{\gamma}_{rr}$ во всем пространстве. Из уравнения (10.7в) имеем

$$\underset{4}{\gamma}_{rr,ss} = 2\varphi_{,00} + \frac{7}{2}\,\varphi_{,s}\varphi_{,s}, \tag{13.9}$$

откуда

$$\underset{4}{\gamma}_{rr} = -2\overset{1}{m}\overset{1}{r}_{,00} - 2\overset{2}{m}\overset{2}{r}_{,00} + \frac{7}{4}\,\varphi^2 + \alpha\psi + \beta\chi, \tag{13.10}$$

где α и β представляют собой функции времени, которые следует определить таким образом, чтобы вблизи сингулярностей выражение (13.10) для $\underset{4}{\gamma}_{rr}$ совпадало с выражением (13.5).

14. *Определение величин α_{mn} и α_{0n}.* Для определения α_{mn} и α_{0n} из условий (8.7д) и (8.7в) необходимо воспользоваться значениями $\underset{4}{\overset{1}{C}}_{mn}$,

найденными в разделе 3. В результате с точностью до желаемого порядка получаем

$$\alpha_{mn} = \{2\dot{\eta}^m\dot{\eta}^n + \delta_{mn}\widetilde{\chi}\} \tag{14.1}$$

и

$$\alpha_{0n} = -\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s\dot{\eta}^n + \widetilde{\chi}\dot{\eta}^n - \widetilde{\chi}\dot{\zeta}^n. \tag{14.2}$$

Наконец, из нашего последнего замечания в разделе 13 следует:

$$\alpha = 2\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s + \frac{1}{2}\widetilde{\chi}, \quad \beta = 2\dot{\varphi}^s\dot{\varphi}^s + \frac{1}{2}\widetilde{\psi}. \tag{14.3}$$

15. *Вычисление величин* $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$. Как мы теперь покажем, при вычислении величин $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$ для наших целей можно предположить, что поверхностный интеграл $\underset{6}{C}_m$ обращается в нуль. После вычисления поверхностных интегралов $\underset{4}{C}_m$ приближенные уравнения движения можно записать в виде

$$\lambda^4\underset{4}{C}_m + \lambda^6\underset{6}{C}_m = 0. \tag{15.1}$$

Но это показывает, что если движение происходит в соответствии с уравнениями (15.1), то $-\lambda^4\underset{4}{C}_m$ и $\lambda^6\underset{6}{C}_m$ будут величинами одного порядка. Очевидно, что $\lambda^4\underset{4}{C}_m$ может входить в $\lambda^6\underset{6}{\Lambda}_{mn}$ только в комбинации с величиной типа $\lambda^2\underset{2}{\theta}$. Поэтому $\lambda^4\underset{4}{C}_m$ будет входить фактически только в члены порядка λ^8 и выше, и поскольку при вычислении уравнений движения мы не намерены выходить за пределы порядка λ^6, то можно пренебречь всеми членами в $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$, содержащими $\underset{4}{C}_m$. Однако даже если учесть это обстоятельство, вычисления остаются все еще очень утомительными, и в разложении $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$ имеются фактически члены 41 типа. Находим:

$$\begin{aligned}
2\underset{6}{\Lambda}_{mn} = &-\underset{5}{\gamma}_{0m,0n} - \underset{5}{\gamma}_{0n,0m} + \delta_{mn}\underset{4}{\gamma}_{00,00} + \underset{4}{\gamma}_{mn,00} - \varphi\underset{4}{\gamma}_{00,mn} - \\
&- \varphi\underset{4}{\gamma}_{ss,mn} - \varphi_{,mn}\underset{4}{\gamma}_{00} - \varphi_{,mn}\underset{4}{\gamma}_{ss} + \varphi_{,ms}\underset{4}{\gamma}_{ns} + \varphi_{,ns}\underset{4}{\gamma}_{ms} - \delta_{mn}\varphi_{,sr}\underset{4}{\gamma}_{sr} - 2\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{mn,s} + \\
&+ \varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{ms,n} + \varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{ns,m} - \frac{1}{2}\varphi_{,m}\underset{4}{\gamma}_{ss,n} - \frac{1}{2}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{ss,m} - \frac{1}{2}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{00,m} - \\
&- \frac{1}{2}\varphi_{,m}\underset{4}{\gamma}_{00,n} + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{rr,s} + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{00,s} - \underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0n,ms} - \underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0m,ns} +
\end{aligned}$$

$$+2\underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0s,mn}+\frac{1}{2}\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}\underset{3}{\gamma}_{0r,s}-\frac{3}{2}\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}+\underset{3}{\gamma}_{0s,m}\underset{3}{\gamma}_{0s,n}+\underset{3}{\gamma}_{0m,s}\underset{3}{\gamma}_{0,ns}-$$
$$-\varphi_{,0n}\underset{3}{\gamma}_{0m}-\varphi_{,0m}\underset{3}{\gamma}_{0n}+2\delta_{mn}\varphi_{,0s}\underset{3}{\gamma}_{0s}-\psi_{,0}\underset{3}{\gamma}_{0m,n}-\varphi_{,0}\underset{3}{\gamma}_{0n,m}-\varphi_{,n}\underset{3}{\gamma}_{0m,0}-\varphi_{,m}\underset{3}{\gamma}_{0n,0}+$$
$$+2\varphi\underset{3}{\gamma}_{0m,0n}+2\varphi\underset{3}{\gamma}_{0n,0m}-2\delta_{mn}\varphi\varphi_{,00}+2\varphi\varphi\varphi_{,mn}-\varphi\varphi_{,m}\varphi_{,n}+$$
$$+\frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi\varphi_{,s}\varphi_{,s}+\frac{1}{2}\delta_{mn}\varphi_{,0}\varphi_{,0}. \quad (15.2)$$

Условие обращения величин $\Lambda_{mn,\,n}$ в нуль требует дополнительной проверки правильности этой формулы. Мы вычислили дивергенцию величины $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$, исходя из формулы (15.2), и нашли, что она действительно обращается в нуль.

16. *Поверхностные интегралы для* $l=3$. Для нахождения главных отклонений от ньютоновых законов движения осталось, по существу, вычислить значения поверхностных интегралов $\underset{6}{C}_m$. Для этого мы должны прежде всего подставить в формулу (15.2) найденные ранее значения $\underset{4}{\gamma}_{00}$, $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ и $\underset{5}{\gamma}_{0n}$, а затем вычислить один за другим вклады от получившихся членов и сложить полученные выражения. Общая процедура похожа на ту, которая была использована в разделе 11 при вычислении величин $\underset{4}{C}_{mn}$, но значительно сложнее последней.

Пользуясь тем, что величину $\underset{4}{C}_m$ можно считать равной нулю, мы можем выразить результат в следующей форме:

$$\underset{6}{\overset{1}{C}}_m=\frac{1}{4}\overset{1}{\int}2\underset{6}{\Lambda}_{mn}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS=-4\overset{1}{m}\overset{2}{m}\{[\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s+$$
$$+\frac{3}{2}\dot{\zeta}^s\dot{\zeta}^s-4\dot{\eta}^s\dot{\zeta}^s-4\frac{\overset{2}{m}}{r}-5\frac{\overset{1}{m}}{r}\right]\frac{\partial}{\partial\eta^m}\left(\frac{1}{r}\right)\times[4\dot{\eta}^s(\dot{\zeta}^m-$$
$$-\dot{\eta}^m)+3\dot{\eta}^m\dot{\zeta}^s-4\dot{\zeta}^s\dot{\zeta}^m]\frac{\partial}{\partial\eta^s}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial\eta^s\,\partial\eta^r\,\partial\eta^m}\dot{\zeta}^s\dot{\zeta}^r. \quad (16.1)$$

17. *Главное отклонение от ньютоновых законов движения.* Для получения уравнений движения, соответствующих этой ступени нашего приближения, следует написать:

$$\lambda^4\underset{4}{\overset{\varkappa}{C}}_m+\lambda^6\underset{6}{\overset{\varkappa}{C}}_m=0, \qquad \varkappa=1,\,2, \quad (17.1)$$

и затем исключить λ, переходя от вспомогательного времени $\tau=\lambda x^0$ к обычному времени x^0 и вводя массу M вместо m, где $M=\lambda^2 m$. Для новых величин можно сохранить старые обозначения, не внося какой-либо путаницы, так что теперь $\dot{\xi}$ будет равна $d\xi/dx^0$ вместо $d\xi/d\tau$, а для новой массы M можно ввести прежнее обозначение m. Тогда уравнения движения (17.1) можно с учетом соотношений (11.10) и (16.1) записать в виде:

$$\ddot{\eta}^m - m^2 \frac{\partial (1/r)}{\partial \eta^m} = \overset{2}{m} \left\{ \left[\dot{\eta}^s \dot{\eta}^s + \frac{3}{2} \dot{\zeta}^s \dot{\zeta}^s - 4 \dot{\eta}^s \dot{\zeta}^s - 4 \frac{\overset{2}{m}}{r} - 5 \frac{\overset{1}{m}}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \eta^m} (1/r) + \right.$$

$$\left. + [4 \dot{\eta}^s (\dot{\zeta}^m - \dot{\eta}^m) + 3 \dot{\eta}^m \dot{\zeta}^s - 4 \dot{\zeta}^s \dot{\zeta}^m] \frac{\partial}{\partial \eta^s} (1/r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 r}{\partial \eta^s \partial \eta^r \partial \eta^m} \dot{\zeta}^s \dot{\zeta}^r \right\}. \quad (17.2)$$

Уравнения движения для второй частицы получаются путем замены символов $\overset{1}{m}$, $\overset{2}{m}$, η, ζ на $\overset{2}{m}$, $\overset{1}{m}$, ζ, η, соответственно.

С точки зрения практических приложений эти уравнения, описывающие в релятивистском приближении движение двух тяжелых гравитирующих тел, составляют главный результат наших вычислений.

Эти уравнения были затем проинтегрированы Г. П. Робертсоном; его результаты приведены в статье «Задача двух тел в общей теории относительности» в этом же журнале [12].

Мы выражаем благодарность проф. Робертсону за проявленный интерес к этой проблеме и помощь.

Поступила 16 июня 1937 г.

Постановка задачи о получении уравнений движения источников поля в форме движения сингулярностей не удовлетворяла Эйнштейна (ср. статью 110). Однако в нескольких статьях (статьи 120, 136) задача была подробно исследована. В частности, в статье 120 показано, что задача может быть изложена значительно компактнее, чем это сделано в настоящей работе. Дальнейшее упрощение и развитие это направление получило в работах Л. Инфельда [ср. книгу: Л. Инфельд и И. Плебанский. Движение и относительность. ИЛ, 1962].

Уравнение движения пылевидной материи было изучено В. А. Фоком [ср. книгу. В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. Изд. 2, М., 1960].

А. Эддингтон и Дж. Кларк [A. Eddington a. G. Clark. Proc. Roy. Soc., 166, 465 (1938)] получили эти уравнения непосредственно из вариационного принципа.

[12] G. P. Robertson. Math. Ann. 1938, 39, 101.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА КАЛУЦЫ *

(Совместно с П. Бергманом)

Введение

До сих пор были сделаны две довольно простые и естественные попытки связать гравитацию и электричество с помощью единой теории поля: одна — Вейлем, другая — Калуцой. Кроме того, предпринимались попытки формально воспроизвести теорию Калуцы таким образом, чтобы избежать введения пятого измерения в физический континуум. Излагаемая здесь теория отличается от теории Калуцы в одном существенном пункте: мы приписываем пятому измерению физическую реальность, тогда как в теорию Калуцы пятое измерение вводится лишь с целью получить новые компоненты метрического тензора, описывающие электромагнитное поле. Выбирая соответствующую систему координат, Калуца предполагает, что переменные пóля зависят от четырех координат x^1, x^2, x^3, x^4, но не от пятой x^0. Это отражает тот факт, что физический континуум, согласно нашему опыту, является четырехмерным. Однако мы покажем, что пятому измерению можно придать некоторый смысл, не вступая в противоречие с четырехмерным характером физического континуума.

Чтобы облегчить чтение, изложим в первой части настоящей работы первоначальную теорию Калуцы, а во второй — ее новое обобщение. В Приложении мы упростим вывод уравнений поля путем обобщения тензорного исчисления на случай тензорных плотностей.

* *Generalisation of Kaluza's Theory of Electricity.* (With P. Bergmann). Ann. Math., ser. 2, 1938, 39, 683—701.

I. ТЕОРИЯ КАЛУЦЫ[1]

1. Рассмотрим пятимерное пространство (4 + 1 измерение) с метрикой

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu. \tag{1}$$

2. Предположим, что пространство «цилиндрическое» по отношению к определенному векторному полю. Аналитически это означает следующее. Существует контравариантный вектор A^ν, такой что если τ — бесконечно малая постоянная, то

$$\delta x^\nu = \tau A^\nu \tag{2}$$

есть бесконечно малое смещение точек пространства. Линейный элемент не должен менять своей длины, определенной формулой (1), если его концы смещаются согласно соотношению (2). Это условие выражается уравнением

$$\gamma_{\mu\nu,\sigma} A^\sigma + \gamma_{\mu\sigma} A^\sigma_{,\nu} + \gamma_{\nu\sigma} A^\sigma_{,\mu} = 0. \tag{3а}$$

Нетрудно показать инвариантный характер этого уравнения. Полагая

$$\gamma_{\mu\sigma} A^\sigma = A_\mu, \tag{3б}$$

получаем

$$A_{\mu,\nu} = A_{\nu,\mu} - A^\sigma \{\gamma_{\mu\sigma,\nu} + \gamma_{\nu\sigma,\mu} - \gamma_{\mu\nu,\sigma}\} = 0, \tag{3в}$$

или

$$\{A_{\mu,\nu} - A_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\} + \{A_{\nu,\mu} + A_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\} = 0, \tag{3г}$$

где $\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}$ — символы Кристоффеля второго рода. В терминах абсолютного тензорного исчисления уравнение (3г) имеет вид[2]

$$A_{\mu;\nu} + A_{\nu;\mu} = 0. \tag{3}$$

Из уравнения (3) следует, что $\gamma_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$, т. е. норма A^μ постоянна вдоль линий, к которым A^μ является касательным. Умножая уравнение (3) на $A^\mu A^\nu$, получаем

$$A^\nu A^\mu A_{\mu;\nu} + A^\mu A^\nu A_{\nu;\mu} = A^\nu (A^\mu A_\mu)_{,\nu} = 0. \tag{4}$$

[1] Изложение теории Калуцы см. в работах O. Klein. Zeischr. Phys., 1926, 37, 895—906; A. Einstein. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 23. (Статья 83).

[2] Уравнение Киллинга.

3. Теория Калуцы налагает на векторное поле A^μ другое ограничение, помимо выраженного в уравнении (3): линии, к которым поле A^μ является касательным («A-линии»), должны быть геодезическими. Аналитически это означает, что линии, определенные уравнением

$$\frac{dx^\nu}{d\sigma} = \lambda A^\nu \tag{5}$$

(где $1/\lambda^2$ равно норме A), удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2x^\nu}{d\sigma^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} = 0 \tag{6а}$$

или, согласно (5),

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial x^\alpha} A^\alpha A^\nu + A^\alpha A^\nu_{;\,\alpha} = 0. \tag{6б}$$

Первый член этого уравнения благодаря соотношению (4) обращается в нуль $\left(\frac{\partial \ln \lambda}{\partial x^\alpha} A^\alpha\right.$ — производная функции от нормы A по направлению A). Поэтому

$$A^\alpha A^\nu_{;\,\alpha} = 0 \tag{6в}$$

или

$$A^\alpha A_{\nu;\,\alpha} = 0. \tag{6г}$$

Из уравнения (3) следует

$$A^\alpha A_{\alpha;\,\nu} = \frac{1}{2}(A^\alpha A_\alpha)_{,\,\nu} = 0. \tag{6}$$

Это значит, что норма A постоянна не только вдоль A-линий, но и во всем пространстве. Таким способом мы характеризуем структуру пространства в теории Калуцы.

Замечание. Из «цилиндрического» характера пространства следует существование вектора A, *симметричные* производные которого обращаются в нуль. Но остаются *антисимметричные* производные A_μ, которые в теории Калуцы представляют электромагнитное поле.

Специальная система координат

Рассмотрим четырехмерную поверхность, пересекающую каждую из A-линий один и только один раз. Введем на этой поверхности четыре координаты x^a ($a = 1 \ldots 4$) и положим, что координата x^0 равна нулю на этой поверхности. Через каждую точку поверхности проходит A-линия, на которой одно из двух направлений выбирается в качестве положительного; этот выбор должен быть одинаков на всех A-линиях. В качестве координаты x^0 мы выбираем расстояние вдоль A-линии, вычисленное с помощью формулы (1), отправляясь от начальной четырехмерной поверхности $x^0 = 0$; знак определяется по выбранному направлению. Поэтому на x^0-линии

$$x^0 = \int_0^{x^0} \sqrt{\gamma_{00}}\, dx^0; \tag{7a}$$

в силу последнего соотношения во всем пространстве

$$\gamma_{00} = 1. \tag{7}$$

Так как абсолютное значение A всегда равно единице, мы имеем

$$\gamma_{00} A^0 A^0 = 1, \tag{8a}$$

или

$$A^0 = 1, \tag{8}$$

поскольку благодаря выбору нашей системы координат $A^1 = A^2 = A^3 = A^4 = 0$.

Отсюда и из уравнения (3a) получаем условие цилиндричности

$$\gamma_{\mu\nu,\,0} = 0. \tag{9}$$

Поскольку вообще

$$A_\mu = \gamma_{\mu\nu} A^\nu,$$

в специальной системе координат имеем

$$A_m = \gamma_{0m}, \qquad A_0 = \gamma_{00} = 1. \tag{10}$$

Ни одна из компонент A_μ, в силу соотношения (9), не зависит от x^0. Поэтому в антисимметричных производных

$$A_{\mu\nu} = A_{\mu,\,\nu} - A_{\nu,\,\mu}$$

все компоненты с одним из индексов, равным нулю, тождественно обращаются в нуль.

В нашей специальной системе координат структура пространства описывается десятью функциями γ_{mn} и четырьмя функциями γ_{0m} $(= A_m)$, которые не зависят от x^0. (Здесь и далее латинские индексы меняются в пределах только от 1 до 4.) Поэтому настоящее описание пространства является четырехмерным. Но, как скоро будет показано, введенные переменные не являются с точки зрения нашего описания наиболее естественными.

Возникает вопрос, какие преобразования координат еще разрешены при сохранении нашей специальной системы координат.

а. Координаты x^a были выбраны произвольно на четырехмерной поверхности ($x^0 = 0$). Поэтому еще допустимы следующие преобразования:

$$\bar{x}^a = \bar{x}^a (x^1 \ldots x^4),$$
$$\bar{x}^0 = x^0. \tag{11}$$

Мы назовем их *4-преобразованиями.*

б. Четырехмерная поверхность была выбрана произвольно. Ее можно заменить на другую поверхность, не меняя координат x^a, отвечающих A-линиям. Соответствующее преобразование будет

$$\begin{aligned} \bar{x}^a &= x^a, \\ \bar{x}^0 &= x^0 + f(x^1 \ldots x^4). \end{aligned} \tag{12}$$

Мы назовем его *0-преобразованием.*

Величины γ_{mn} ведут себя при 4-преобразовании как четырехмерный тензор, а A_n ($= \gamma_{0n}$) — как 4-вектор. При 0-преобразовании получаем

$$\bar{A}_m = A_m - \frac{\partial f}{\partial x^m}, \tag{13}$$

$$\bar{\gamma}_{mn} = \gamma_{mn} = \gamma_{m0} \frac{\partial f}{\partial x^n} - \gamma_{n0} \frac{\partial f}{\partial x^m} + \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{\partial f}{\partial x^n}. \tag{14}$$

Вместо величин γ_{mn}, которые не инвариантны относительно 0-преобразования [согласно (14)], мы введем новые величины g_{mn}, рассуждая следующим образом. Пусть две бесконечно близкие A-линии L и L' проходят через две бесконечно близкие точки P и P'. Между L и L' существует экстремальное расстояние благодаря существованию метрики. Это расстояние определяется формулой

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - A_\mu A_\nu. \tag{15}$$

Определенные таким образом величины $g_{\mu\nu}$ являются компонентами пятимерного тензора. В специальной системе координат не обращаются в нуль лишь те его компоненты, у которых нет нулевого индекса, т. е. его компонентами являются лишь g_{mn}. Компоненты g_{mn} ведут себя как четырехмерный тензор при 4-преобразовании и инвариантны относительно 0-преобразования.

Поэтому весьма естественно выбрать в качестве переменных поля в специальной системе координат g_{mn} и A_m; g_{mn} — компоненты физического метрического тензора. Относительно 0-преобразования инвариантны антисимметричные производные от A_m (т. е. $A_{m,n} - A_{n,m}$), но не сами компоненты A_m. Это отвечает тому факту, что электромагнитные потенциалы определены лишь с точностью до аддитивных членов — градиентов произвольной функции.

Этот результат можно резюмировать следующим образом: пятимерное пространство эквивалентно четырехмерному с метрическим тензором (g_{mn}) и векторным полем (A_m), определенными с точностью только до аддитивных градиентов произвольных функций.

Введенный в теории Калуцы пятимерный континуум позволяет рассматривать гравитационные и электромагнитные поля как единую структуру пространства. Этот результат существен. На первый взгляд здесь можно было бы возразить: будет ли на самом деле шагом вперед введение пятимерной метрики и 5-векторов, на которые налагаются какие-то произвольные ограничения, вместо четырехмерной метрики и 4-векторов? Чтобы правильно судить о теории Калуцы, следует иметь в виду, что действительно произвольный шаг был сделан только при введении пятимерного описания четырехмерного пространства. Однако если это сделано, то введение 5-вектора является лишь необходимым следствием четырехмерного характера реального пространства. Описание электромагнитного поля векторным потенциалом, достигнутое этим путем, не является, конечно, тривиальным результатом.

Если же отвлечься от этого пункта, то результат оказывается весьма неутешительным. Цель Калуцы несомненно заключалась в том, чтобы прийти к новому физическому взгляду на гравитацию и электричество путем введения единой структуры пространства. Однако эта цель не была достигнута.

Уравнения поля в данной теории можно вывести, например, из вариационного принципа. Это подразумевает выбор функции действия $\mathfrak{H}$, которая должна быть скалярной плотностью, т. е. $\frac{1}{\sqrt{g}}\mathfrak{H}$ должно быть инвариантом по отношению к 4- и 0-преобразованиям. Поэтому в нашей специальной системе координат инвариант следует составлять из g_{mn} и A_m, а также из тех производных этих величин, которые не меняются при замене A_m на $A_m - \partial f/\partial x^m$. Поэтому мы заключаем, что A_m могут входить в функцию действия только через их антисимметричные производные. Если функция Гамильтона $\mathfrak{H}$ должна содержать только вторые производные от потенциалов g_{mn}, A_m или выражения второй степени, содержащие только первые производные, то наиболее общая функция действия должна иметь вид

$$\mathfrak{H} = \sqrt{g}\,(R + cM), \tag{16}$$

где R — инвариант кривизны и M — максвелловский инвариант. Однако многочисленные бесплодные попытки найти, исходя из этой теории, полевое описание материи, свободное от сингулярностей, убедили нас, что такого решения не существует [3].

II. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ КАЛУЦЫ

Общие замечания о структуре пространства

Если попытка Калуцы и является реальным шагом вперед, то лишь ценой введения пятимерного пространства. Было много попыток удержать существенные формальные результаты, полученные Калуцой, не принося в жертву четырехмерный характер физического пространства. Это показывает, как сопротивляется наша интуиция введению пятого измерения. Но рассматривая и сравнивая все эти попытки, приходим к заключению, что все старания не исправили дела. Представляется невозможным формулировать идею Калуцы простым путем, не вводя пятого измерения.

Поэтому мы вынуждены принимать пятое измерение всерьез, хотя прямой опыт и не побуждает нас к этому. Если структура пространства вынуждает нас принять пятимерную теорию, то, хотим мы того или нет, следует задать вопрос, будет ли ощутимо предположение о строгой сводимости к четырехмерному пространству. Мы думаем, что ответ на этот вопрос должен быть отрицательным, учитывая, что можно понять квазичетырехмерный характер физического пространства из пятимерного континуума, упростив тем самым основные геометрические предположения.

Чтобы пояснить лежащие в основе теории идеи, рассмотрим двумерное пространство (вместо пятимерного), т. е. квазиодномерный континуум (вместо четырехмерного) (см. рис. 1).

Рассматриваемое пространство образует узкую полоску, ограниченную линиями ST и $S'T'$. Координатами в этом пространстве будут x^0 и x'. Для простоты пространство взято эвклидовым. Представим себе, что полоска свернута в трубку так, чтобы линия ST совпала с $S'T'$. При этом каждая точка P на линии ST совпадает с некоторой точкой P' на $S'T'$, так что образуется небольшая цилиндрическая поверхность. Если ширина полоски (обозначенная через b), т. е. длина окружности цилиндра,

[3] Мы пытались найти строгое решение гравитационных уравнений, свободное от сингулярностей, учтя электромагнитное поле. Мы думали, что симметричное относительно вращений решение, вероятно, могло бы описывать элементарную частицу. Наши исследования были основаны на теории «мостов». [См. A. Einstein, N. Rosen. Phys. Rev., 1935 48, 73. (Статья 113.—*Ред.*).] Однако мы убеждены, что решения с такими свойствами не существует.

мала и если задана непрерывная медленно меняющаяся функция $\varphi(x^0, x^1)$, т. е. если выражение $b\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^0}$ мало по сравнению с φ, то значения φ в точках, принадлежащих сегменту PP', очень мало отличаются друг от друга и φ можно рассматривать приближенно как функцию только x^1.

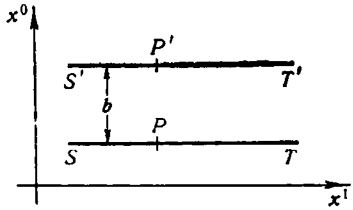


Рис. 1.

Уменьшение числа измерений пространства достигнуто потому, что пространство замкнуто в измерении x^0 и «ширина» его очень мала. Однако пространство не будет иметь квазиодномерного характера, если функция φ меняется слишком быстро.

Предположение об эвклидовости пространства, конечно, несущественно в наших рассуждениях. Существенным для наших доводов может оказаться выбор метрики такого рода, что можно говорить об окружности в направлении x^0; во всяком случае мы интересуемся лишь пространствами с римановой метрикой.

В дальнейшем более удобно рассматривать вместо «замкнутых» в направлении x^0 пространств [4] пространства «периодические» в направлении x^0. «Периодические» и «замкнутые» пространства эквивалентны, если соответствующие точки P, P', P'',... рассматриваются как «одна и та же» точка.

Вводя в нашу картину четырехмерный континуум $x^1 \ldots x^4$ вместо одномерного континуума x^1, мы приходим к модели физического пространства, которая послужит основой для наших последующих рассуждений.

Наиболее существенным пунктом нашей теории является замена предположения «2» о строгой цилиндричности предположением о замкнутости (или периодичности) пространства в направлении x^0.

---

[4] Это выражение имеет не вполне ясный смысл; им, однако, можно пользоваться, если иметь в виду только наглядное описание свойств пространства.

Структура пространства

Мы будем характеризовать пространство в соответствии с нашими предыдущими замечаниями о видоизмененной форме теории Калуцы.

1. Мы рассматриваем пятимерное пространство с метрикой (1).

2. Пространство замкнуто в одном измерении. Замкнутое пространство заменяется пространством открытым, но периодическим по этому измерению. Поэтому точка P физического пространства будет представлена бесконечным числом точек P, P', P'',...

Замечание. Этот постулат заменяет условие цилиндричности в теории Калуцы.

3. Через каждую точку пространства проходит геодезическая, замкнутая на себя и свободная от сингулярностей. Или, для «периодического» пространства: если две точки P, P', соответствующие друг другу, но в остальном произвольные, связаны геодезической [5], то эта линия проходит через все остальные точки, соответствующие P, т. е. через точки P'', P''' и т. д.

Эта аксиома соответствует аксиоме 3 первоначальной теории Калуцы. Введенные здесь геодезические соответствуют A-линиям в теории Калуцы и мы снова назовем их A-линиями.

Мы снова вводим специальную систему координат. Рассматриваем четырехмерную поверхность $x^0 = 0$, пересекающую все A-линии один и только один раз. Четыре координаты $x^1...x^4$ на этой поверхности определяют точку на ней, а также A-линию, проходящую через эту точку. Любая точка P на этой A-линии определяется расстоянием, измеренным вдоль этой линии с помощью формулы (1), между $\overset{0}{P}$ (точка пересечения A-линии и поверхности $x^0 = 0$) и P. Для точек с «положительной» стороны поверхности $x^0 = 0$ имеем:

$$x^0 = \frac{1}{b}\int\limits_{\overset{0}{P}}^{P} d\sigma, \tag{17}$$

где

$$b = \int\limits_{P}^{P'} d\sigma. \tag{17a}$$

Здесь P, P' — последовательные соответственные точки на A-линии. Поэтому b зависит только от $x^1, \ldots, x^4$. При таком соглашении разность x^0-координат двух последовательных соответственных точек (лежащих, конечно, на одной x^0-линии) равна 1.

[5] Мы рассматриваем случай, когда существует лишь одна геодезическая.

При сделанных предположениях каждой точке пространства соответствуют пять координат $x^0, x^1, \ldots, x^4$.

Линии с постоянными $x^1, \ldots, x^4$ являются геодезическими. На этих линиях

$$\frac{dx^1}{d\sigma} = \frac{dx^2}{d\sigma} = \frac{dx^3}{d\sigma} = \frac{dx^4}{d\sigma} = 0, \qquad \frac{dx^0}{d\sigma} = b \quad \frac{d^2x^0}{d\sigma^2} = 0. \tag{18а}$$

Поэтому уравнение геодезической дает

$$\Gamma^0_{00} = 0. \tag{18б}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{bmatrix} & \alpha & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} = 0, \tag{18в}$$

или

$$\gamma_{00,0} = 0 \tag{18г}$$

и

$$2\gamma_{a0,0} - \gamma_{0,0a} = 0. \tag{18}$$

Уравнение (18г) не содержит ничего нового, поскольку на A-линиях

$$d\sigma^2 = b^2\, dx^{02} \tag{19а}$$

и

$$\gamma_{00} = b^2. \tag{19}$$

Проинтегрируем (18) по одному периоду вдоль A-линии. Интеграл от первого члена в левой части (18) дает нуль вследствие периодического характера пространства. С учетом соотношений (17) и (19) мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \int\limits_{P'}^{P''} \gamma_{00} dx_0 = \frac{\partial}{\partial x^a} \left\{ b \int\limits_{P'}^{P''} d\sigma \right\} = \frac{\partial}{\partial x^a} (b^2) = 0. \tag{20}$$

Поэтому b и γ_{00} не зависят также от $x^1, \ldots, x^4$, т. е. постоянны во всем пространстве. Мы можем положить

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= 1, \\ b &= 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Строго говоря, наш выбор значения для γ_{00} не оправдан, так как мы уже выбрали разность Δx^0 координат последовательных соответственных точек равной 1. Принимая во внимание этот факт, положим разность Δx^0 равной не единице, а некоторой малой величине λ. Тогда, в силу равенств (21), λ одновременно представляет собой метрическое расстояние $P'P''$.

Далее, из (18) благодаря (21) следует

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\gamma_{a0} = 0. \tag{22}$$

Поэтому в обобщенной теории γ_{0a} (но не γ_{ab}) также не зависят от x^0. Мы можем ввести в обобщенную теорию так же, как и раньше, поле контравариантных единичных векторов A^μ, компоненты которых в специальной системе координат равны 0, 0, 0, 0, 1. Поэтому снова имеем

$$A_a = A^\beta\gamma_{\beta a} = \gamma_{0a}. \tag{22a}$$

Мы можем ввести также вместо

$$g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - A_\alpha A_\beta, \tag{23}$$

метрический тензор, у которого не обращаются в нуль лишь компоненты без индекса нуль. Здесь также существует в этом смысле четырехмерный метрический тензор g_{ab}. *Однако его компоненты, вообще говоря, являются периодическими функциями* x^0. Все различие между новой теорией и теорией Калуцы лежит именно в этом факте. (A_m в обеих теориях не зависит от x^0.)

Охарактеризовав структуру пространства, после некоторого математического введения мы обратимся к формулировке уравнений поля, которые можно вывести из вариационного принципа в рассматриваемом пространстве. Мы снова потребуем, чтобы гамильтониан состоял из слагаемых, в которые входят либо вторые производные (линейно), либо произведения двух первых производных.

Тензорный анализ в специальной системе координат

Из нашего определения специальной системы координат следует, что снова существует свобода в «4-преобразованиях» и «0-преобразованиях». Чтобы избежать формальных трудностей, связанных с общими системами координат, мы должны исследовать трансформационные свойства построенных величин относительно 4- и 0-преобразований. Определим контравариантный 4-вектор: четыре величины a^s (функции x^0, $x^1, \ldots, x^4$) образуют контравариантный вектор, если при 4-преобразованиях выполняется следующий закон преобразования:

$$\bar{a}^s = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^t}a^t, \tag{24}$$

и если величины a^s инвариантны относительно 0-преобразований. Определение ковариантного вектора совершенно аналогично. Отсюда также следует определение тензора.

В силу этого g_{mn} является тензором. Однако A_m ($=\gamma_{0m}$) не вектор, поскольку его компоненты преобразуются при 0-преобразованиях согласно соотношению (13). В то же время величины $A_{mn} = A_{m,n} - A_{n,m}$ являются компонентами тензора.

Тензорная алгебра совпадает с обычной четырехмерной и здесь нет нужды воспроизводить ее.

Теперь обратим наше внимание на образование новых тензоров путем дифференцирования.

1. Как для 4-, так и для 0-преобразований мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^0} = \frac{\partial}{\partial x^0}. \tag{25}$$

Поэтому из каждого тензора можно образовать новый путем дифференцирования по x^0.

2. Ковариантное дифференцирование по x^a: если ψ — скаляр, то при 0-преобразованиях

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}^a} = \frac{\partial \psi}{\partial x^a} - \frac{\partial \psi}{\partial x^0} f_{,a}. \tag{26a}$$

Из этого соотношения и из соотношения (13), исключая $f_{,a}$, находим, что выражение

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^a} - A_a \frac{\partial \psi}{\partial x^0}$$

инвариантно относительно 0-преобразований. Поэтому оператор

$$\frac{\partial}{\partial x^a} - A_a \frac{\partial}{\partial x^0}, \tag{26}$$

действующий на тензор, оставляет его компоненты инвариантными при 0-преобразованиях.

С другой стороны, из абсолютного дифференциального исчисления мы знаем, что выражение

$$B_{s,a} - \frac{1}{2} B_l g^{lm} (g_{ms,a} + g_{am,s} - g_{as,m}) \tag{27a}$$

(B_s — произвольный ковариантный вектор) обладает тензорными свойствами по отношению к 4-преобразованию (но не к 0-преобразованию). Заменяя всюду в этом выражении $\frac{\partial}{\partial x^a}$ на оператор (26), мы добавляем новые члены, которые снова обладают тензорными свойствами по отношению к 4-преобразованиям, что справедливо для $B_{s,0}$, $g_{mn,0}$ и A_s. Полученное таким образом выражение, конечно, обладает тензорными свойствами по отношению к 4-преобразованиям. Поскольку оно также инвариантно относительно 0-преобразования, оно удовлетворяет нашему определению тензора.

Поэтому мы можем определить ковариантное дифференцирование следующим образом:

$$B_{s;a} = B_{s,a} - A_a B_{s,0} - B_l \Gamma^l_{sa}, \tag{27}$$

где

$$\Gamma^l_{sa} = \frac{1}{2} g^{lm} [(g_{ms,a} - A_a g_{ms,0}) + (g_{m0,s} - A_s g_{ma,0}) - (g_{as,m} - A_m g_{as,0})]. \tag{27б}$$

Для контравариантного вектора с тем же Γ^l_{sa} аналогичным образом получаем

$$B^s_{;a} = B^s_{,a} - A_a B^s_{,0} + B^l \Gamma^s_{la}. \tag{28}$$

Отсюда сразу следует соответствующее правило для более общих тензоров. Определенное нами абсолютное дифференцирование удовлетворяет правилу дифференцирования произведений. Прямым подсчетом получается

$$g_{mn;a} = g^{mn}_{;a} = 0. \tag{29}$$

3. Тензор кривизны. Путем непосредственного вычисления мы находим [6]

$$B_{s;a;b} - B_{s;b;a} = -B_l R^l_{.sab} - B_{s,0} A_{ab}, \tag{30}$$

где

$$R^l_{.sab} = (\Gamma^l_{sa,b} - A_b \Gamma^l_{sa,0}) - (\Gamma^l_{sb,a} - A_a \Gamma^l_{sb,0}) - \Gamma^l_{am} \Gamma^m_{sb} + \Gamma^l_{bm} \Gamma^m_{sa}. \tag{30a}$$

Из соотношения (30), благодаря тензорному характеру последнего члена, следует, что $R^l_{.sab}$ — тензор (тензор кривизны), антисимметричный по двум своим последним индексам.

4. Правило перестановки операторов «$,_0$» и «$;_a$» имеет вид

$$(u_{m,0})_{;a} - (u_{m;a})_{,0} = u_s \Gamma^s_{am,0}. \tag{31}$$

Следовательно, производные от Γ^s_{am} по x^0 обладают тензорными свойствами.

---

[6] Здесь $A_{ab} = A_{a,b} - A_{b,a}$.

Вариационный принцип и уравнения поля

С помощью развитого здесь формализма сформулируем наиболее общие уравнения поля, удовлетворяющие следующим условиям:

1. Уравнения поля должны получаться из вариационного принципа.

2. Функция действия должна состоять исключительно из членов, в которые линейно входят вторые производные или произведения двух первых производных.

Тензорами, из которых можно было бы алгебраически построить такую функцию действия, являются:

$$R^{i}_{.klm},\quad A_{mn},\quad g_{mn},\quad g_{mn,0},\quad g_{mn,00},\quad A_{mn,0},\quad A_{mn;s}.$$

Некоторые инварианты, образованные из этих тензоров, можно свести к остальным путем интегрирования по частям. Остаются только следующие инварианты, независимые в этом смысле друг от друга:

$$\begin{aligned} H_1 &= R^{i}_{.klm}\delta^{l}_{i}g^{km} = R_{km}g^{km} = R,\\ H_2 &= A_{mn}A_{st}g^{ms}g^{nt} = A_{mn}A^{mn}, \\ H_3 &= g^{mn}_{,0}g_{mn,0},\qquad H_4 = g^{mn}g_{mn,0}g^{rs}g_{rs,0}. \end{aligned}\tag{32}$$

Поэтому наиболее общий вариационный принцип, который удовлетворяет нашим условиям, сформулированным выше, имеет вид

$$\delta\int \mathfrak{H}\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4 = 0,\tag{33}$$

где

$$\mathfrak{H} = \sqrt{-g}\,(\underset{1}{\alpha}\underset{1}{H} + \underset{2}{\alpha}\underset{2}{H} + \underset{3}{\alpha}\underset{3}{H} + \underset{4}{\alpha}\underset{4}{H});$$

здесь $\underset{1}{\alpha}, \ldots, \underset{4}{\alpha}$ — произвольные постоянные. Варьирование должно производиться по g^{mn} и A_s. Интеграл следует брать по произвольной мировой области координат $x^1, \ldots, x^4$ и по одному периоду координаты x'. Последнее ограничение необходимо, поскольку δA_s должно выбираться независимым от x^0. [Ср. (22).] Поэтому вклады от границ области не входят в обычные операции, производимые над функцией действия, если только интеграл берется точно по одному периоду координаты x^0.

Выкладки, которые можно произвести с помощью методов, изложенных в Приложении, дают:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\delta\int \underset{1}{\mathfrak{H}}\, dx^0 \ldots dx^4 = \int\Big\{\Big[\frac{1}{2} R_{kl} + \frac{1}{2} R_{lk} - \frac{1}{2} g_{kl} R\Big]\delta g^{kl} + \\
&\qquad + [g^{mn}\Gamma^s_{mn,0} - g^{ms}\Gamma^n_{mn,0}]\,\delta A_s \sqrt{-g}\, dx^0 \ldots dx^4, \\
&\delta\int \underset{2}{\mathfrak{H}}\, dx^0 \ldots dx^4 = \int\Big\{\Big[2A_{km}A_l^m - \frac{1}{2} g_{kl} A_{mn} A^{mn}\Big]\delta g^{kl} - \\
&\qquad - [4A^{st}_{;t}]\,\delta A_s\Big\}\sqrt{-g}\, dx^0 \ldots dx^4, \\
&\delta\int \underset{3}{\mathfrak{H}}\, dx^0 \ldots dx^4 = \int [-2g_{kl,00} + 2g^{ls} g_{kl,0} g_{ls,0} - g^{rs} g_{rs,0} g_{kl,0} - \\
&\qquad - \frac{1}{2} g^{rs}_{,0} g_{rs,0} g_{kl}\Big]\delta g^{kl} \sqrt{-g}\, dx^0 \ldots dx^4, \\
&\delta\int \underset{4}{\mathfrak{H}}\, dx^0 \ldots dx^4 = \int g_{kl}\Big[\frac{1}{2}(g^{mn} g_{mn,0})^2 + 2g^{mn} g_{mn,00} + \\
&\qquad + 2g^{mn}_{,0} g_{mn,0}]\,\delta g^{kl} \sqrt{-g}\, dx^0 \ldots dx^4.
\end{aligned}
\right\} \quad (34)
$$

Здесь δg^{kl} — произвольные функции координат $x^0, \ldots, x^4$. Поэтому сумма коэффициентов при δg^{kl}, умноженных на соответствующую постоянную α, должна обращаться в нуль. Однако, как мы упоминали раньше, δA_s являются функциями только $x^1, \ldots, x^4$ и не зависят от x^0. Поэтому в данном случае обращается в нуль только интеграл от суммы коэффициентов при δA_s (умноженных на свои $\underset{i}{\alpha}$), взятый по одному периоду x^0.

Четырнадцать уравнений поля, выведенных таким образом из вариационного принципа (33), принимают вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\underset{1}{\alpha}\Big(\frac{1}{2} R_{kl} + \frac{1}{2} R_{lk} - \frac{1}{2} g_{kl} R\Big) + \underset{2}{\alpha}\Big(2A_{km}A_l^m - \frac{1}{2} g_{kl} A_{mn} A^{mn}\Big) + \\
&\quad + \underset{3}{\alpha}(-2g_{kl,00} + 2g^{rs} g_{kr,0} g_{ls,0} - g^{rs} g_{rs,0} g_{kl,0} - \frac{1}{2} g^{rs}_{,0} g_{rs,0} g_{kl} + \\
&+ \underset{4}{\alpha} g_{kl}\Big[\frac{1}{2}(g^{mn} g_{mn,0})^2 + 2g^{mn} g_{mn,00} + 2g^{mn}_{,0} g_{mn,0}\Big] = 0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\mathfrak{G}_{kl},
\end{aligned}
\right\} \quad (35)
$$

$$
\int \{\underset{1}{\alpha}(g^{mn}\Gamma^s_{mn,0} - g^{ms}\Gamma^n_{mn,0}) - 4\underset{2}{\alpha} A^{st}_{;t}\}\sqrt{-g}\, dx^0 = 0 = \int \mathfrak{J}^s dx^0. \qquad (36)
$$

Наконец, мы выведем тождества, которым удовлетворяют уравнения поля. Как обычно эти тождества мы найдем, выражая аналитически инвариантность интеграла от гамильтониана по отношению к бесконечно малым преобразованиям координат. Если мы введем вариации δg^{mn} и δA_s, вызванные бесконечно малыми преобразованиями координат, то вариация интеграла обращается в нуль. Следует заметить, что варьирование нужно производить не при фиксированных точках пространства, а при фиксированных значениях координат. Обозначая бесконечно малые преобразования координат через

$$\begin{aligned} x^a &= \bar{x}^a + \xi^a(\bar{x}^1 \ldots \bar{x}^4), \\ x^0 &= \bar{x}^0 + \xi^0(\bar{x}^1 \ldots \bar{x}^4), \end{aligned} \tag{37а}$$

для δg^{mn} и δA_s получаем:

$$\begin{aligned} \delta g^{kl} &= -g^{sl}\xi^k_{,s} - g^{sk}\xi^l_{,s} + g^{kl}_{,s}\xi^s + g^{kl}_{,0}\xi^0, \\ \delta A_s &= A_r\xi^r_{,s} + \xi^0_{,s} + A_{s,r}\xi^r. \end{aligned} \tag{37б}$$

Эти выражения легко привести к виду, более ясно обнаруживающему их тензорный характер:

$$\begin{aligned} \delta g^{kl} &= -g^{sl}\xi^k_{;s} - g^{sk}\xi^l_{;s} + g^{kl}_{,0}(A_r\xi^r + \xi^0), \\ \delta A_s &= (A_r\xi^r + \xi^0)_{;s} + A_{sr}\xi^r. \end{aligned} \tag{37в}$$

Выражение $(A_r\xi^r + \xi^0)$ представляет собой скалярное произведение двух пятимерных векторов. После выполнения некоторых интегрирований по частям (с помощью методов, изложенных в Приложении) мы получаем

$$\delta \int \mathfrak{H}\, dx^\alpha = \int \{[\mathfrak{S}^s_{k\cdot;s} + A_{sk}\mathfrak{I}^s]\,\xi^k + [\mathfrak{S}_{rs}g^{rs}_{,0} - \mathfrak{I}^s_{;s}]\,(A_r\xi^r + \xi^0)\}\, dx^\alpha = 0. \tag{37г}$$

Поскольку ξ^k, ξ^0 — произвольные функции $x^1,\ldots,x^4$ и не зависят от x^0, интеграл (37г) тождественно обращается в нуль в том и только в том случае, если интегралы от выражений в квадратных скобках по одному периоду x^0 равны нулю:

$$\begin{aligned} &2\int \mathfrak{S}^s_{k\cdot;s}\, dx^0 + A_{sk}\int \mathfrak{I}^s dx^0 = 0, \\ &\int \mathfrak{S}_{rs}g^{rs}_{,0}\, dx^0 - \left\{\int \mathfrak{I}^s dx^0\right\}_{;s} = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Это и есть тождества для уравнений поля (35), (36).

В теорию входят четыре универсальные постоянные: $\underset{2\,1}{\alpha/\alpha}$, $\underset{3\,1}{\alpha/\alpha}$, $\underset{4\,1}{\alpha/\alpha}$ и λ. Постоянная $\underset{2\,1}{\alpha/\alpha}$ соответствует гравитационной постоянной, связывающей (произвольные) единицы длины и массы. Одна из остальных постоянных, например λ, зависит от единицы длины. Остальные две являются «истинными» универсальными постоянными, которые не могут быть исключены из теории.

Резюме

Пятимерная теория физического пространства, предложенная Калуцой, приводит к единому описанию гравитации и электромагнетизма. Если ее последовательно интерпретировать как пятимерную теорию, из нее следует существование вектора A, симметричные ковариантные производные которого обращаются в нуль во всем пространстве. Это предположение, если отвлечься от его физического смысла, кажется искусственным. Кроме того, описание чисто четырехмерного континуума с помощью пятимерного представляется недостаточно оправданным.

В предлагаемом в данной работе обобщении мы пытались устранить эти недостатки. Гипотеза цилиндричности (т. е. существования вектора A с обращающимися в нуль симметричными производными) была заменена на предположение, что пространство замкнуто по пятой координате. В результате этой замены основные предположения теории значительно упрощаются. Кроме того, пятое измерение вводится не формально, а ему приписывается некоторый физический смысл. При этом не возникает противоречия с эмпирическим четырехмерным характером физического пространства.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Анализ тензорных плотностей

Помимо понятия тензора, важную роль в релятивистских исследованиях играет тензорная плотность. Хотя понятие тензорной плотности легко свести к понятию тензора, все же весь формализм и особенно вывод уравнений поля из вариационного принципа значительно упрощается, если ввести тензорные плотности независимо. Хотя аналитические свойства тензорных плотностей уже полностью исследованы [7], но чтобы облегчить чтение, мы сделаем несколько замечаний по этому поводу.

Тензорная плотность отличается от тензора множителем (общим для всех компонент), обладающим трансформационными свойствами скаляр-

[7] V. Hlavatý. Ann. mat., V, Ser. IV (1927/28): Théorie des densités dans les displacement général.

ной плотности. Скалярная плотность $\underset{(n)}{\rho}$ с «весом» n есть величина со следующим законом преобразования:

$$\underset{(n)}{\bar{\rho}} = \underset{(n)}{\rho} \left| \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \right|^{n}. \tag{A1}$$

Существуют, соответственно, скалярные плотности с различными весами. (Обычные тензоры представляют собой скалярные плотности с весом нуль.) Перемножая две тензорные плотности с весами m и n, мы получаем тензорную плотность с весом $(m+n)$. Алгебра тензорных плотностей непосредственно следует из тензорной алгебры и нет нужды выводить ее правила здесь.

Ради простоты мы рассмотрим здесь только величины в четырехмерном континууме; однако результаты не зависят от числа измерений.

В любом четырехмерном пространстве существуют две тензорные плотности Леви-Чивиты:

$$\underset{(-1)}{\delta_{iklm}}$$

и

$$\underset{(+1)}{\delta_{iklm}},$$

антисимметричные по всем индексам, компоненты которых равны $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли $(iklm)$ четной или нечетной перестановкой цифр (1234). Характер этих тензорных плотностей следует непосредственно из закона преобразования тензорных плотностей. Из тензорных плотностей Леви-Чивиты можно получить известный тензор Кронекера $\delta_m^{m'}$ (с компонентами, равными 1 при $m = m'$ и 0 при $m \neq m'$):

$$\delta_m^{m'} = \frac{1}{6} \underset{(-1)}{\delta_{iklm}} \underset{(+1)}{\delta^{iklm'}}. \tag{A2}$$

Предположим, что в рассматриваемом пространстве существуют симметричные компоненты параллельного переноса (функции $\Gamma_{ik}^{l} = \Gamma_{ki}^{l}$), с помощью которых ковариантные производные тензора определяются обычным способом:

$$B_{i\ldots;s}^{k\ldots} = B_{i\ldots;s}^{k\ldots} + B_{i\ldots}^{l\ldots}\Gamma_{ls}^{k} + \ldots - B_{l\ldots}^{k\ldots}\Gamma_{is}^{l} - \ldots \tag{A3}$$

Такое определение ковариантного дифференцирования обладает двумя важными свойствами:

1) оно удовлетворяет правилу дифференцирования произведений в обычном анализе

$$(AB)_{;s} = AB_{;s} + BA_{;s};$$

2) ковариантная производная от тензора Кронекера тождественно обращается в нуль

$$\delta^k_{i;\,s} = 0.$$

Мы определим теперь ковариантную производную тензорной плотности так, чтобы 1) сохранилось правило дифференцирования произведений и 2) тождественно обращались в нуль абсолютные производные от ковариантных и контравариантных тензорных плотностей Леви-Чивиты.

Непосредственным расчетом мы убеждаемся, что эти требования удовлетворяются при следующем определении:

$$\underset{(n)}{B^{k\ldots}_{i\ldots;\,s}} = \underset{(n)}{B^{k\ldots}_{i\ldots,\,s}} + \underset{(n)}{B^{l\ldots}_{i\ldots}}\Gamma^k_{ls} + \ldots - \underset{(n)}{B^{k\ldots}_{l\ldots}}\Gamma^l_{is} - \ldots - n\underset{(n)}{B^{k\ldots}_{i\ldots}}\Gamma^r_{sr}\,. \tag{A4}$$

Это и есть правило дифференцирования тензорных плотностей с весом n.

Далее, если мы требуем, чтобы пространство было римановым, то компоненты параллельного переноса определяются равенством

$$\Gamma^s_{mn} = \frac{1}{2}g^{s\iota}(g_{m\iota,\,n} + g_{n\iota,\,m} - g_{mn,\,\iota}) \tag{A5}$$

и, следовательно,

$$\Gamma^n_{sn} = \frac{1}{2}\frac{g_{,\,s}}{g}\,, \qquad g = |g_{ik}|\,. \tag{A6}$$

Определитель g представляет собой скалярную плотность с весом 2. Используя соотношение (A4), мы получаем

$$\underset{(2)}{g_{;\,s}} = g_{,\,s} - 2g\left(\frac{1}{2}\frac{g_{,\,s}}{g}\right) = 0. \tag{A7}$$

Поэтому ковариантная производная от $\sqrt{g}$ и, в силу правила дифференцирования произведений, ковариантные производные от $g^{mn}\sqrt{g}$ и $g_{mn}\sqrt{g}$ также обращаются в нуль.

Теперь мы покажем, как пользоваться тензорными плотностями при варьировании.

1. *Вывод уравнений гравитации путем варьирования риманова тензора кривизны*

$$\left.\begin{aligned} &\delta\int \underset{(1)}{\mathfrak{H}}\,d\tau = 0,\\ &\underset{(1)}{\mathfrak{H}} = \sqrt{-g}\,g^{km}\delta^l_i R^i_{\cdot klm}\,. \end{aligned}\right\} \tag{A8}$$

Палатини показал, что варьирование по g^{km} можно упростить, если учесть соотношение

$$\delta R^{i}_{\cdot klm} = (\delta\Gamma^{i}_{kl})_{;m} - (\delta\Gamma^{i}_{km})_{;l}, \tag{A9}$$

которое нетрудно проверить (заметим, что $\delta\Gamma^{i}_{kl}$ — тензор!). Тогда в силу соотношения

$$\delta(\sqrt{-g}g^{km}) = \sqrt{-g}\left(\delta g^{km} - \frac{1}{2}g^{km}g_{al}\cdot\delta g^{al}\right) \tag{A10а}$$

мы получаем

$$\delta\int\underset{(1)}{\mathfrak{H}}\,d\tau = \int\sqrt{-g}\left(R_{km} - \frac{1}{2}g_{km}R\right)\delta g^{km}\,d\tau +$$

$$+\int\sqrt{-g}g^{km}\left[(\delta\Gamma^{l}_{kl})_{;m} - (\delta\Gamma^{l}_{km})_{;l}\right]d\tau. \tag{A10б}$$

Поскольку $(g^{km}\sqrt{-g})_{;l}$ обращается в нуль, подынтегральное выражение во втором интеграле можно переписать в виде

$$[\sqrt{-g}(g^{kl}\delta\Gamma^{m}_{km} - g^{km}\delta\Gamma^{l}_{km})]_{;l}, \tag{A10в}$$

где выражение в квадратных скобках (которое обозначим через $\underset{(1)}{K^{l}}$) — векторная плотность с весом 1. Поэтому из соотношения (A4) следует, что $\underset{(1)}{K^{l}}_{;l}$ можно заменить на $\underset{(1)}{K^{l}}_{,l}$. Согласно теореме Гаусса, этот интеграл равен нулю, если вариации g_{ik} и Γ^{l}_{ik} обращаются в нуль на границе области интегрирования. В уравнении (A10б) остается только первый интеграл, так что в результате находим

$$R_{km} - \frac{1}{2}g_{km}R = 0. \tag{A10}$$

2. *Тензорные плотности в пространстве обобщенной теории Калуцы.* В таком пространстве, в специальной системе координат скалярную плотность с весом n можно определить законом преобразования:

$$\begin{aligned} \underset{(n)}{\bar{\rho}} &= \underset{(n)}{\rho}\left|\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial\bar{x}^{\beta}}\right|^{n} && \text{для 4-преобразований,} \\ \bar{\rho}_{(n)} &= \rho_{(n)} && \text{для 0-преобразований.} \end{aligned} \tag{A11}$$

Закон преобразования тензорных плотностей также задается этим определением, т. е. сводится к закону преобразования тензоров.

Ковариантное дифференцирование тензорных плотностей. Благодаря соотношениям (A4), (27) и (28) можно ожидать, что правило дифференцирования выражается следующей формулой:

$$\underset{(n)}{B^{k\ldots}_{i\ldots;\,s}} = B^{k\ldots}_{i\ldots,\,s} - A_s B^{k\ldots}_{i\ldots,\,0} + B^{l\ldots}_{i\ldots}\Gamma^k_{ls} + \ldots - \\ - B^{k\ldots}_{l\ldots}\Gamma^l_{is} - \ldots - nB^{k\ldots}_{i\ldots}\Gamma^l_{sl}; \qquad \text{(A12)}$$

$\underset{(1)}{\delta_{iklm}}$ — тензорная плотность по отношению к 4-преобразованиям и инвариант по отношению к 0-преобразованиям. Поэтому, в силу нашего определения, она является тензорной плотностью. Ковариантная производная от этой тензорной плотности, определенная формулой (A12), обращается в нуль. Нетрудно видеть также, что формула (A12) сохраняет в силе правило дифференцирования произведений.

Из нашего определения следует, что $\underset{(2)}{g} = |g_{mn}|$ является скалярной плотностью с весом 2, а его ковариантные производные [в силу соотношения (27б)]

$$\underset{(2)}{g_{;\,s}} = g_{,\,s} - A_s g_{,\,0} - 2g\Gamma^l_{sl} = 0. \qquad \text{(A13)}$$

Далее выполняется уравнение

$$g_{mn,\,s} = 0. \qquad \text{(A14)}$$

Образуем дивергенцию $\underset{(1)}{B^s_{;\,s}}$ векторной плотности $\underset{(1)}{B^s}$ с весом 1. Согласно формуле (A12), мы имеем

$$\underset{(1)}{B^s_{;\,s}} = \underset{(1)}{B^s_{,\,s}} - A_s \underset{(1)}{B^s_{,\,0}} \qquad \text{(A15a)}$$

и, поскольку A_s не зависит от x^0,

$$\underset{(1)}{B^s_{;\,s}} = \underset{(1)}{B^s_{,\,s}} - (A_s B^s)_{,\,s}. \qquad \text{(A15)}$$

Существенно отметить, что оба члена в правой части последнего равенства имеют вид обычных производных.

Теперь мы должны, как и в теории гравитации, образовать вариацию интеграла [ср. (32) и (33)]:

$$\int \sqrt{-g}\, g^{km} \delta^l_i R^i_{.klm}\, d\tau. \qquad \text{(A16a)}$$

Однако этот интеграл следует брать по области переменных $x^0, x^1, \ldots, x^4$, содержащей в точности один период по координате x^0 и произвольной по координатам $x^1, \ldots, x^4$. Тензор $R^i_{.klm}$ определен формулой (30a). Вариация этой величины имеет вид

$$\delta R^i_{.klm} = (\delta\Gamma^i_{kl})_{,\,m} - (\delta\Gamma^i_{km})_{;\,l} - \delta A_m \Gamma^i_{kl,\,0} + \delta A_l \Gamma^i_{km,\,0}. \qquad \text{(A16б)}$$

Поскольку нас интересует вариация выражения $\sqrt{-g}g^{km}$, варьирование этого интеграла дает

$$\int \sqrt{-g}\,(g^{km}\Gamma^{l}_{km,0}-g^{kl}\Gamma^{m}_{km,0})\,\delta A_l\,d\tau. \tag{А16в}$$

Варьирование $R^{i}_{.klm}$, благодаря двум последним членам в (А16б), дает

$$\int \sqrt{-g}\,(g^{km}\Gamma^{l}_{km,0}-g^{kl}\Gamma^{m}_{km,0})\,\delta A_l\,d\tau. \tag{А16г}$$

Первые два члена в правой части (А16б) не дают, однако, какого-либо вклада. Поскольку доказательство этого одинаково для обоих членов, мы покажем это лишь для первого. Подынтегральное выражение

$$\sqrt{-g}g^{km}(\delta\Gamma^{l}_{kl})_{;m},$$

благодаря соотношению

$$(\sqrt{-g}g^{km})_{;m}=0$$

[что следует из формул (А13) и (А14)], можно привести к виду

$$\underset{(1)}{B^{m}_{;m}}.$$

Но такой интеграл равен нулю в силу (А15). Это следует частично из обращения в нуль вариаций на x^a-границе, а частично из периодичности B^m по координате x^0. Окончательный результат варьирования таков:

$$\int \sqrt{-g}\left\{\left(\frac{1}{2}R_{km}+\frac{1}{2}R_{mk}-\frac{1}{2}g_{km}R\right)\delta g^{km}+\right.$$
$$\left.+(g^{km}\Gamma^{l}_{km,0}-g^{kl}\Gamma^{m}_{km,0})\,\delta A_l\right\}d\tau, \tag{А16}$$

где δg^{km} произвольно зависят от x^a и x^0, а δA_s — только от x^a.

Выкладки при выводе тождеств совершенно аналогичны.

Поступила 8 апреля 1938 г.

Больше Эйнштейн не возвращался к пятимерной теории (ср., однако, статью 123). Следующим вариантом единой теории поля явилась теория бивекторных полей (статьи 123, 124).— *Прим. ред.*

119

О СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ, СОСТОЯЩИХ ИЗ МНОГИХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ И ОБЛАДАЮЩИХ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ *

Рассматривая решение Шварцшильда для статического гравитационного поля, обладающего сферической симметрией,

$$ds^2 = -\left(1+\frac{\mu}{2r}\right)^4 (dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2) + \left(\frac{1-\frac{\mu}{2r}}{1+\frac{\mu}{2r}}\right)^2 dt^2, \tag{1}$$

можно заметить, что

$$g_{44} = \left(\frac{1-\frac{\mu}{2r}}{1+\frac{\mu}{2r}}\right)^2$$

обращается в нуль при $r=\mu/2$. Это означает, что находящиеся в этих точках часы могут идти с нулевой скоростью. Далее легко показать, что и лучу света, и материальной частице понадобится бесконечно долгое время (измеренное в единицах «координатного времени»), чтобы достичь точки $r=\mu/2$, если они начали свой путь в точке $r>\mu/2$. В этом смысле сфера $r=\mu/2$ образует геометрическое место точек, где поле сингулярно (μ — гравитационная масса).

Возникает вопрос, можно ли действительно построить поле, обладающее такой сингулярностью, с помощью гравитирующих масс или такие области с обращающейся в нуль компонентой g_{44} в реальных случаях не осуществляются? Шварцшильд сам исследовал гравитационное поле, создаваемое несжимаемой жидкостью. Он нашел, что и здесь появляются области с обращающейся в нуль компонентой g_{44}, если только при данной

* *On a Stationary System with Spherical Symmetry Consisting of many Gravitating Masses.* Ann. Math., 1939, 40, 922—936.

плотности жидкости радиус сферы, создающей поле, выбран достаточно большим.

Однако этот аргумент не является убедительным; концепция несжимаемой жидкости не совместима с теорией относительности, ибо упругие волны в этом случае распространялись бы с бесконечной скоростью. Поэтому необходимо рассматривать сжимаемую жидкость, уравнение состояния которой исключает возможность распространения звуковых сигналов со скоростью, превышающей скорость света. Но рассмотрение любой такой проблемы представляет чрезвычайно сложную задачу. Кроме того, выбор соответствующего уравнения состояния является в широких пределах произвольным. В результате нельзя быть уверенным, что при этом не было сделано физически неоправданных предположений.

Таким образом, возникает вопрос, нельзя ли ввести в теорию вещество так, чтобы с самого начала исключить сомнительные предположения. Фактически это можно сделать, выбрав в качестве массы, создающей поле, большое число малых гравитирующих частиц, свободно движущихся под действием поля, которое они все порождают. Эта система напоминает сферическое скопление звезд. Следовательно, мы можем далее действовать так, как если бы поле, в котором движутся частицы, создавалось непрерывным распределением масс, обладающим сферической симметрией и соответствующим всей совокупности частиц.

Мы можем далее упростить наше рассмотрение, предположив, что все частицы движутся по круговым траекториям вокруг центра симметрии скопления. Но и в этом случае еще остается возможность произвольного выбора радиального распределения плотности массы. Результатом последующего рассмотрения является вывод, что компонента g_{44} нигде не может обращаться в нуль и что полная гравитирующая масса частиц, распределенных в пределах заданного радиуса, всегда остается меньше некоторой определенной величины.

1. О траекториях частиц и их пространственном распределении

С помощью соответствующего выбора радиальной координаты гравитационное поле сферически симметричного скопления может быть задано следующей формой:

$$ds^2 = -a\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + b\,dt^2, \qquad (2)$$

где a и b являются функциями $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$.

Исследуем сначала круговое движение частиц вокруг центра симметрии. Предположим, например, что это движение происходит в плоскости

$x_3 = 0$. После введения полярных координат

$$x_3 = r\cdot\cos\vartheta, \quad x_1 = r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\vartheta\cdot\sin\varphi$$

соотношение (2) принимает вид

$$ds^2 = -a\,[dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)] + bdt^2. \tag{2a}$$

Это гравитационное поле характеризуется следующими значениями:

$$g_{11} = -a, \qquad g_{33} = -ar^2\sin^2\vartheta,$$
$$g_{22} = -ar^2, \qquad g_{44} = b,$$

а все остальные компоненты $g_{\mu\nu}$ равны нулю. Движение рассматриваемой частицы описывается уравнением

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\cdot\frac{dx_\beta}{ds} = 0. \tag{3}$$

Кроме того, имеются дополнительные условия:

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{dr}{ds} = 0, \quad \frac{d^2x_3}{ds^2} = \frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0, \quad x_2 = \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d^2x_4}{ds^2} = \frac{d^2t}{ds^2} = 0.$$

Оказывается, что уравнение (3) удовлетворяется, если

$$\Gamma^1_{33}\frac{dx_3}{ds}\cdot\frac{dx_3}{ds} + \Gamma^1_{44}\frac{dx_4}{ds}\cdot\frac{dx_4}{ds} = 0,$$

или

$$-(ar^2)'\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + b = 0. \tag{4}$$

Из соотношения (2a) следует

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -ar^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + b. \tag{5}$$

Таким образом, величины $\frac{d\varphi}{dt}$ и $\frac{ds}{dt}$ определяются, как только задано поле.

Поскольку значение ds^2 положительно, для мировой линии движущейся частицы получаем

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = b - ar^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = b - ar^2\frac{b'}{(ar^2)'} > 0,$$

или

$$1 - \frac{b'/b}{(ar^2)'/ar^2} > 0. \tag{6}$$

Применение этого условия к полю Шварцшильда (1) дает

$$r > \frac{\mu}{2}(2+\sqrt{3}). \tag{6a}$$

Отсюда следует, что в случае поля Шварцшильда частица должна двигаться по траектории, радиус которой в $(2+\sqrt{3})$ раза превышает радиус сингулярности этого поля. Этот факт имеет важное значение для всего последующего исследования; во внешних частях нашего скопления частиц и за его пределами гравитационное поле описывается уравнением (1). Поэтому полная гравитирующая масса скопления определяет нижний предел его радиуса. Этот радиус (в координатной мере) не менее чем в $(2+\sqrt{3})$ раза превышает радиус сингулярности поля Шварцшильда, который определяется полем в пустом пространстве вне скопления.

Нормаль к плоскости, в которой движется рассматриваемая частица, направлена по оси x_3. Если предположить, что нормали к бесконечному числу таких плоскостей и фазовые углы траекторий распределены случайно, то мы получим сферически симметричное скопление частиц, траектории которых имеют радиус r. Ниже мы ограничимся рассмотрением только таких скоплений более общего типа, которые состоят из бесконечного числа скоплений этого специального типа, соответствующих всем значениям r. (Следует помнить, что скопление состоит, разумеется, из конечного числа частиц, так что создаваемое им поле является лишь приближенно сферически симметричным.)

Чтобы сформулировать условия динамического равновесия скопления под влиянием его собственного гравитационного поля, сначала вычислим тензор энергии этого скопления. При этом для простоты предположим, что массы всех частиц одинаковы и равны m.

2. Тензор энергии материи для скопления

Мы рассматриваем движение частиц внутри элемента объема по оси x_3. Векторы скоростей имеют одинаковую величину, перпендикулярны направлению x_3 и с равной вероятностью имеют все направления в плоскости x_1x_2. Мы знаем далее, что тензор энергии материи зависит также от плотности частиц и от гравитационного потенциала, но не от производных последнего. Следовательно, этот тензор можно получить прямыми вычислениями.

Сначала мы рассмотрим частицы с массой m и плотностью n_0 частиц на единицу объема, покоящиеся относительно координатной системы специальной теории относительности. В этом случае отлична от нуля только одна компонента T^{44} тензора энергии

$$T^{44} = mn_0 \frac{dx_4}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds}.$$

В системе координат, движущейся в направлении x_1, мы имеем

$$T^{11} = mn_0 \frac{dx_1}{ds} \cdot \frac{dx_1}{ds}, \qquad T^{44} = mn_0 \frac{dx_4}{ds}\frac{dx_4}{ds}, \qquad T^{14} = mn_0 \frac{dx_1}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds}.$$

Плотность частиц n относительно этой новой системы координат определяется равенствами

$$n_0 V_0 = nV, \qquad V_0\, ds = V\, dt,$$

где V_0 и V — соответственно покоящийся объем и объем в новой системе. Поэтому выполняется соотношение

$$n_0 = n \frac{ds}{dx_4}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда вектор скорости частицы составляет угол α с осью x_1 и перпендикулярен оси x_3. Используя полученные выше равенства и вводя обозначение

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2,$$

находим

$$T^{11} = mn \frac{ds}{dx_4}\left(\frac{dl}{ds}\right)^2 \cos^2\alpha, \qquad T^{12} = mn \frac{ds}{dx_4}\left(\frac{dl}{ds}\right)^2 \cos\alpha \sin\alpha,$$

$$T^{22} = mn \frac{ds}{dx_4}\left(\frac{dl}{ds}\right)^2 \sin^2\alpha, \qquad T^{14} = mn \frac{ds}{dx_4}\frac{dl}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds}\cos\alpha,$$

$$T^{44} = mn \frac{ds}{dx_4}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2, \qquad T^{24} = mn \frac{ds}{dx_4}\frac{dl}{ds}\frac{dx_4}{ds}\sin\alpha,$$

а все остальные компоненты тензора энергии равны нулю. Для случайного распределения векторов скорости по углам α получаем

$$T^{11} = T^{22} = \frac{1}{2} mn \frac{ds}{dx_4}\left(\frac{dl}{ds}\right)^2 = T_{11} = T_{22},$$

$$T^{44} = mn \frac{dx_4}{ds} = T_{44}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -a$, а $g_{44} = b$. Компоненты тензора энергии в этом случае можно получить, применяя закон преобразования тензоров и вводя новые координаты

$$dx_a = a^{1/2}\, d\bar{x}_a, \qquad dx_4 = b^{1/2}\, d\bar{x}_4.$$

Тогда получаем

$$\bar{T}_{11} = \left(\frac{dx_a}{d\bar{x}_a}\right)^2 T_{11} = aT_{11},$$

$$\bar{T}_{44} = \left(\frac{ax_4}{d\bar{x}_4}\right)^2 T_{44} = bT_{44},$$

причем dl и dx_4, входящие в компоненты T_{11} и T_{44}, надо заменить соответственно на $a^{1/2}d\bar{l}$ и $b^{1/2}d\bar{x}_4$. Далее мы должны ввести плотность $\bar{n}$ частиц относительно новых координат, согласно равенству

$$n dx_1 dx_2 dx_3 = \bar{n} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3,$$

или

$$n = \bar{n} a^{-3/2}.$$

Выполняя все эти преобразования и подстановки и опуская черту, которой мы обозначали величины в новой системе координат, получаем

$$\begin{aligned} T_{11} = T_{22} &= \frac{1}{2} mna^{1/2}b^{-1/2} \frac{ds}{dx_4} \left(\frac{dl}{ds}\right)^2, \\ T_{44} &= mna^{-3/2} b^{3/2} \frac{dx_4}{ds}. \end{aligned} \tag{7}$$

В этих равенствах ds/dx_4 и dl/ds следует заменить выражениями, получаемыми из соотношений (4) и (5), которые были выведены из уравнений геодезической. Далее мы пишем dt вместо dx_4 и $rd\varphi$ вместо dl. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} T_{11} = T_{22} &= \frac{1}{2} mna^{-1/2} \beta' / \alpha' \left(\frac{\alpha'}{\alpha' - \beta'}\right)^{1/2}, \\ \frac{a}{b} T_{44} &= mna^{-1/2} \left(\frac{\alpha'}{\alpha' - \beta'}\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{7а}$$

где α и β имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned} \alpha &= \ln(ar^2), \\ \beta &= \ln b. \end{aligned} \tag{7б}$$

3. Дифференциальные уравнения гравитационного поля

Дифференциальное уравнение гравитационного поля, связанного с тензором энергии материи, имеет вид

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + kT_{\mu\nu} = 0. \tag{8}$$

Мы должны написать эти уравнения для частного случая статического поля типа (2). Прямые вычисления приводят к следующим уравнениям для точки на оси x_3:

$$-G_{33}=\frac{a'}{ra}+\frac{b'}{rb}+\frac{1}{4}\left(\frac{a'}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{a'}{a}\frac{b'}{b}=0, \tag{9}$$

$$G_{11}=-\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{b'}{b}\right)'-\frac{1}{2}\frac{a'}{ra}-\frac{1}{2}\frac{b'}{rb}-\frac{1}{4}\left(\frac{b'}{b}\right)^2+kT_{11}=0, \tag{10}$$

$$\frac{a}{b}G_{44}=\left(\frac{a'}{a}\right)'+2\frac{a'}{ra}+\frac{1}{4}\left(\frac{a'}{a}\right)^2+kT_{44}\frac{a}{b}=0. \tag{11}$$

Вместо T_{11} и T_{44} мы должны подставить их выражения (7а) и (7б). Поскольку m следует рассматривать как заданную константу, функциями координат в этих уравнениях являются лишь величины n, a и b. Прежде всего следует ожидать, что n, т. е. радиальное распределение материи, не определяется этими уравнениями. Поэтому с необходимостью должно существовать тождественное соотношение между уравнениями (9)—(11). Такое тождественное соотношение действительно существует. Оно имеет вид

$$0\equiv G_{33}'+\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{2}\frac{b'}{b}\right)G_{33}-\left(\frac{2}{r}+\frac{a'}{a}\right)G_{11}+\frac{1}{2}\frac{b'}{b}G_{44}. \tag{12}$$

Получить его можно следующим образом. Мы сконструировали $T_{\mu\nu}$, рассматривая частицы, подчиняющиеся уравнениям движения в гравитационном поле. Поэтому ковариантная дивергенция этого тензора должна тождественно обращаться в нуль. С другой стороны, дивергенция разности $R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ тождественно равна нулю вследствие тождеств Бианки. Из этих четырех уравнений, имеющих форму дивергенции, только одно уравнение с индексом 3 дает выражение, которое уже не равно нулю тождественно относительно $G_{\mu\nu}$; это и есть соотношение (12). Из формы соотношения (12) следует, что уравнение (10) является следствием уравнений (9) и (11). Таким образом задача сводится к решению уравнений (9) и (11) и, как и следовало ожидать, плотность частиц остается при этом неопределенной.

Этот результат делает возможным дальнейшее упрощение задачи. Если в уравнение (9) ввести величины $\alpha=\ln(ar^2)$ и $\beta=\ln b$, то получается уравнение

$$-\frac{2}{r^2}+\frac{1}{2}\alpha'^2+\alpha'\beta'=0. \tag{13}$$

Уравнение (11) с помощью (13) и (7а) приводится к виду

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} + \frac{1}{4}\alpha'^2 - \frac{1}{r^2} + \varkappa m n a^{-1/2}\left(\frac{\alpha'^2}{{}^3/_2\alpha'^2 - \frac{2}{r^2}}\right)^{1/2} = 0. \qquad (14)$$

Это дифференциальное уравнение содержит только a. Когда a известно, получить b можно простым интегрированием выражения

$$\beta' = \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{2}{r^2} - \frac{1}{2}\alpha'^2\right). \qquad (13a)$$

4. Локализация частиц в тонком сферическом слое

Вне скопления гравитационное поле описывается решением Шварцшильда, которое при нашем выборе системы координат задается равенством (1). Внутри скопления поле определяется уравнением (14). Поэтому функция n должна рассматриваться как заданная. Однако n не является полностью произвольной, так как полный радиус скопления ограничен снизу условием (6а).

Уравнение (14) задает сложное соотношение между плотностью частиц n и функцией a, описывающей гравитационное поле. Однако предельный случай, когда гравитирующие частицы сконцентрированы внутри бесконечно тонкого сферического слоя, ограниченного сферами с радиусами $r = r_0 - \Delta$ и $r = r_0$, является сравнительно простым. Этот случай, конечно, может реализовываться, только если собственный объем каждой частицы равен нулю, чего на самом деле нет. Однако эта идеализация представляет определенный интерес в качестве предельного случая радиального распределения частиц.

Разделим все пространство на три области, каждую из которых будем рассматривать отдельно: область O, включающая пространство вне слоя, $r \geqslant r_0$, область I, включающая пространство внутри слоя, $r \leqslant r_0 - \Delta$, и область S, включающая сам слой, $r_0 - \Delta \leqslant r \leqslant r_0$. В области O гравитационное поле задается соотношением (1), в области I — соотношением (2) с постоянными значениями величин a и b. Отсюда следует, что a' (и α') должны изменяться в области S тем быстрее, чем меньше выбранное нами Δ. Однако поскольку a' остается конечной в S, само a меняется внутри S на бесконечно малую величину. Поэтому в области S можно пренебречь α' по сравнению с α''. Тогда уравнение (14) внутри S заменяется уравнением

$$\alpha'' + \varkappa m n a^{-1/2}\left(\frac{\alpha''}{\frac{3}{2}\alpha'^2 - \frac{2}{r^2}}\right)^{1/2} = 0, \qquad (14a)$$

где a и r следует рассматривать при интегрировании как постоянные. Вводя новую переменную

$$z^2 = \frac{3}{4} r^2 \alpha'^2 - 1$$

и «постоянную»

$$C = \varkappa m a^{-1/2} \frac{r}{\sqrt{2}},$$

мы получаем уравнение

$$\left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right) dz = Cn\, dr, \tag{14б}$$

которое определяет зависимость z от r в области S, если n задана как функция r. Производя интегрирование в пределах от $r_0 - \Delta$ до r_0, получаем

$$\left| z - \operatorname{arc\,tg} z \right|_{r_0}^{r_0-\Delta} = \frac{C}{4\pi r_0^2} N = \frac{\varkappa}{8\pi} \sqrt{2} a^{-1/2} \frac{mN}{r_0}, \tag{15}$$

где N — полное число частиц в области S. Из соотношения (1) следует, что при $r = r_0$

$$z_{r_0} = \sqrt{2} \frac{(1 - 4\sigma + \sigma^2)^{1/2}}{1+\sigma}, \quad \text{где } \sigma = \frac{\mu}{2r_0}, \tag{15а}$$

а из соотношения (2), поскольку a и b постоянны в области I, находим, что в области I

$$z_{r_0-\Delta} = \sqrt{2}. \tag{15б}$$

Вследствие (6а) мы имеем неравенство

$$\sigma < \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Оказывается, что это неравенство совпадает с условием вещественности числителя в выражении для z_{r_0}. Соотношение (15) для каждого возможного значения r_0 задает соотношение между суммой масс частиц mN и полной гравитирующей массой μ скопления. Для больших значений r_0 при фиксированном μ получаем в пределе

$$\mu = \frac{\varkappa}{8\pi} mN. \tag{16}$$

Множитель $\varkappa/8\pi$ обусловлен тем, что m измеряется в граммах, а μ — в гравитационных единицах. Поэтому равенство (16) просто выражает тот факт, что в этом предельном случае гравитационная масса скопления равна сумме масс частиц.

Наиболее наглядный путь выражения этого результата следующий. Вне слоя ($r > r_0$) гравитационное поле описывается соотношением

$$ds^2 = -\left(1+\frac{\mu}{2r}\right)^4 (dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2) + \left(\frac{1-\frac{\mu}{2r}}{1+\frac{\mu}{2r}}\right)^2 dt^2.$$

Внутри слоя поле описывается этим же соотношением с той лишь разницей, что r заменено на постоянную r_0, вследствие чего должно выполняться неравенство

$$r_0 > \frac{\mu}{2}(2+\sqrt{3}).$$

Число N частиц с массой m, образующих слой, можно определить из следующих соображений. Вводя обозначения

$$\Sigma = \frac{\varkappa}{8\pi}\frac{mN}{2r_0} = \frac{M}{2r_0}, \qquad \sigma = \frac{\mu}{2r_0},$$

получаем

$$\Sigma = \varphi(\sigma) = \frac{[(\sqrt{2}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2})-(z_{r_0}-\operatorname{arc\,tg} z_{r_0})]}{\sqrt{8}}(1+\sigma)^2,$$

где

$$z_{r_0} = \sqrt{2}\,\frac{(1-4\sigma+\sigma^2)^{1/2}}{1+\sigma},$$

а σ может принимать значения между нулем и $2-\sqrt{3}$ ($\approx 0{,}27$). Величина

$$\frac{\Sigma-\sigma}{\sigma}$$

очень близка к нулю во всей области изменения σ. Несколько типичных значений этой величины приведено в следующей таблице.

σ	$\frac{\Sigma-\sigma}{\sigma}$
0,05	0,042
0,14	0,06
0,2	0,055
0,23	0,013
0,27	−0,022

Это приводит к весьма интересному следствию: прежде всего ясно, что выражение $(\Sigma-\sigma)/\sigma$ можно с хорошей точностью заменить на $(\Sigma-\sigma)/\Sigma$, а это, в свою очередь, на $(M-\mu)/M$. Последнее выражение равно относительному уменьшению энергии скопления при его сжатии от бесконечного радиуса до r_0. Таблица показывает, что максимум энергии такого сжатия находится около $\sigma = 0{,}15$ и при бо́льших или меньших значениях σ она уменьшается. Физическая причина этого эффекта состоит в том, что при уменьшении r_0 потенциальная энергия скопления уменьшается, но зато растет его кинетическая энергия. При достаточно малых значениях r_0 последний эффект превалирует над первым.

Поэтому ясно, что уменьшение радиуса с уменьшением энергии прекращается где-то вблизи значения $\sigma = 0{,}15$, т. е. при значении радиуса, равном примерно 6,7 $(\mu/2r_0)$, тогда как нижняя граница радиуса, определяемая скоростью света, равна $(2+\sqrt{3})\,(\mu/2r_0)$. Величина r_0, соответствующая минимуму энергии, ограничивает сверху тангенциальную скорость частиц значением, равным примерно $0{,}65\ c$, где c — скорость света.

5. Качественное обсуждение случая произвольного радиального распределения масс

Рассмотрим случай заданных массы μ и радиуса слоя r_0, удовлетворяющих неравенству (6а). Когда число частиц N, помещенных в этот слой, определяется уравнением (15), внешнее гравитационное поле полностью экранируется от внутренней области I, так что поле в этой области будет эвклидовым. Это означает, что линейный элемент в области I характеризуется постоянными величинами a и b, причем b не может быть равным своему нижнему пределу $1/\sqrt{3}$.

Однако если число частиц в области S меньше, чем это следует из соотношения (15), то поле не будет экранировано полностью (μ считается заданным). Мы можем тогда формально удовлетворить требованиям теории, заменяя эвклидово выражение для линейного элемента в области I шварцшильдовским выражением вида

$$a = A\left(1+\frac{\mu_1}{2r}\right)^4, \qquad b = B\left(\frac{1-\mu_1/2r}{1+\mu_1/2r}\right)^2,$$

где A, B и μ_1 — постоянные. Величина μ_1 меньше, чем величина μ, которая характеризует поле вне слоя. Внутреннее поле имеет сингулярность шварцшильдовского типа ($b = 0$) при $r = \mu_1/2$.

Однако эту сингулярность можно удалить, вводя внутри S второй слой S_1, такой, чтобы поле внутри него было эвклидовым. Таким образом, все скопление будет состоять из двух слоев S и S_1 и уже не будет иметь шварцшильдовской сингулярности.

Эту систему опять можно видоизменить, уменьшая число частиц в S_1 так, чтобы слой S_1 не экранировал полностью *свое* внешнее поле (между S

и S_1). Тогда можно ввести третий слой S_2 еще меньшего радиуса так, чтобы область внутри него была полностью экранированной от *его* внешнего поля.

Это рассуждение можно продолжать до тех пор, пока мы не достигнем центра скопления. Таким образом получаются скопления с самыми различными радиальными распределениями массы. Возможны различные стационарные распределения, но b нигде не может обращаться в нуль. Радиус скопления будет во всех случаях больше предельного радиуса $\frac{1}{2}\mu(2+\sqrt{3})$, так что концентрация материи скопления с произвольной плотностью около его центра невозможна.

6. Случай непрерывной плотности частиц

Приведенные в разделе 5 настоящей статьи соображения позволяют построить решение для непрерывного распределения плотности частиц. Разделим интервал $0 \leqslant r \leqslant r_0$ на бесконечное число равных частей dr. Представим себе, что в центре каждой части dr существует двумерный слой того типа, о котором речь шла в разделе 4. Эти слои можно выбрать так, чтобы они были эквивалентны некоторому непрерывному распределению массы. Между двумя любыми слоями существует гравитационное поле шварцшильдовского типа:

$$ds^2 = -A\left(1+\frac{\tau}{2r}\right)^4 (dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2) + B\left(\frac{1-\tau/2r}{1+\tau/2r}\right)^2 dt^2, \qquad (17)$$

где A, B и τ — постоянные, бесконечно мало изменяющиеся при переходе между двумя соседними областями. Гравитационное поле внутри скопления равно сумме всех этих частных решений. Нашей задачей является определение A, B и τ как функций r.

Рассмотрим два соседних шварцшильдовских решения, соответствующих областям от $r-\frac{1}{2}dr$ до $r+\frac{1}{2}dr$ и от $r+\frac{1}{2}dr$ до $r+\frac{3}{2}dr$. В первой области величины A, B и τ соответствуют радиусу r, во второй области — радиусу $r+dr$. Используя введенные соотношением (2) величины, мы можем записать эти два локальных решения в форме

$$a(r;\ A,\tau) \qquad a(r;\ A+dA,\ \tau+d\tau)$$

и

$$b(r;\ B,\tau) \qquad b(r;\ B+dB,\ \tau+d\tau),$$

где a и b, в соответствии с формулой (17), являются функциями r. Эти два решения предполагают, что a и b принимают одинаковые значения в точке $r + \frac{1}{2}dr$. Поэтому величины a и b не должны меняться при переходе через заполненный частицами слой. Отсюда с точностью до величин первого порядка следует

$$\frac{\partial a}{\partial A}dA + \frac{\partial a}{\partial \tau}d\tau = 0,$$

$$\frac{\partial b}{\partial B}dB + \frac{\partial b}{\partial \tau}d\tau = 0,$$

или, в соответствии с (17),

$$\begin{gathered}\frac{dA}{A} + \frac{4}{r}\frac{r\,d\sigma + \sigma\,dr}{1+\sigma} = 0,\\ \frac{dB}{B} - \frac{4}{r}\frac{r\,d\sigma + \sigma\,dr}{(1+\sigma)(1-\sigma)} = 0,\end{gathered} \tag{18}$$

где σ означает $\tau/2r$.

Если известна зависимость σ или τ от r, то из этих уравнений можно определить A и B как функции r. Оказывается, что значения α и β, вычисленные из решений (A и B) уравнения (18), являются параметрическими решениями уравнения (13) (параметром служит функция σ). Функция τ в широких пределах остается произвольной, поскольку она тесно связана с распределением масс. С другой стороны, A, B и τ должны удовлетворять тому условию, чтобы соотношение (17) допускало круговые орбиты частиц при всех значениях r. Поэтому величины a и b должны удовлетворять неравенству (6). Используя соотношение (17), мы получаем неравенство

$$1 - \frac{B'/B - 4\dfrac{\sigma'}{(1+\sigma)(1-\sigma)}}{A'/A + 2/r + 4\dfrac{\sigma'}{1+\sigma}} > 0. \tag{19}$$

Соотношения (18) и (19) полностью определяют решение задачи внутри скопления. На функцию σ накладывается только одно условие: найденные из уравнений (18) функции A и B должны удовлетворять неравенству (19).

При $r \geqslant r_0$ мы имеем, конечно, $A = B = 1$, $\tau = \text{const} = \mu$.

Используя уравнения (18), мы можем переписать неравенство (19) в виде

$$1 - \frac{4\dfrac{\sigma}{(1+\sigma)(1-\sigma)}}{2 - 4\dfrac{\sigma}{1+\sigma}} > 0,$$

или после некоторых преобразований

$$\frac{(\sigma-2+\sqrt{3})(\sigma-2-\sqrt{3})}{(1-\sigma)^2}>0. \qquad (19а)$$

Это неравенство должно выполняться как вне, так и внутри скопления. При бесконечно больших значениях r величина σ обращается в нуль. Далее σ должна быть положительной, так как отрицательные массы исключены. Поскольку в (19а) величина σ стоит в знаменателе, то она нигде не может превышать единицы. Поэтому числитель в левой части неравенства должен быть положителен. Поскольку второй множитель в числителе всегда отрицателен, первый множитель также должен быть меньше нуля. Отсюда получаем

$$\sigma<2-\sqrt{3}. \qquad (19б)$$

Это условие является обобщением условия (6а), так как последнее было доказано только для области вне скопления.

Величина τ определяет массу, заключенную в сфере радиуса r. Для исключения отрицательных масс необходимо, чтобы всюду выполнялось условие

$$\frac{d\tau}{dr}\geqslant 0. \qquad (20)$$

Необходимо далее, чтобы τ обращалась в нуль при $r=0$. За исключением этих условий, на τ не накладывается никаких других ограничений, если только σ удовлетворяет неравенству (19б). Когда τ, а следовательно, и σ заданы, задача нахождения гравитационного поля вида (17) сводится, согласно уравнениям (18), к двум квадратурам.

Уравнения (18) позволяют проинтегрировать уравнения (13) в случае произвольного распределения плотности массы, задаваемого функцией τ или σ. Уравнение (14) определяет соответствующую плотность частиц n. Выразим n через σ. Мы имеем

$$0=\frac{2}{r}\left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right)'-\frac{4}{r^2}\frac{\sigma}{(1+\sigma)^2}+\varkappa m n a^{-1/2}\frac{1-\sigma}{\sqrt{1-4\sigma+\sigma^2}}; \qquad (21)$$

кроме того, имеем

$$a=A(1+\sigma)^4, \qquad A'/A=-\frac{4}{r}\cdot\frac{r\sigma'+\sigma}{1+\sigma}. \qquad (22)$$

Следовательно, когда σ как функция r задана, мы получаем плотность n, выполнив только одну интеграцию.

Функция σ положительна и всегда меньше, чем $2-\sqrt{3}$. Поэтому квадратный корень в знаменателе последнего члена в уравнении (21) всегда положителен. Далее мы имеем $\tau/2r$, где τ — гравитационная масса, содержащаяся в сфере радиуса r. Вследствие этого τ монотонно увеличивается с ростом r. Если плотность массы должна оставаться конечной в окрестности $r=0$, то τ должна уменьшаться в этой окрестности не медленнее, чем r^3, а σ — не медленнее, чем r^2. При этих условиях первые два члена в уравнении (21), как и $\frac{A'}{A}$, A и a всюду конечны. Поэтому уравнение (21) дает для n конечное значение. Пользуясь свойствами τ, нетрудно показать, что сумма двух первых членов уравнения (21) всюду отрицательна.

Продолжая эти рассуждения, легко убедиться, что a и b конечны и нигде не обращаются в нуль.

Комбинируя равенства (2), (4), (17) и (18), можно показать, что отношение V скорости частиц к скорости света (в направлении движения частиц) равно

$$V^2 = \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{2\sigma}{(1-\sigma)^2}. \tag{23}$$

Если σ не превышает своего предельного значения, то V также не превышает определенного предела.

7. Частный случай непрерывного распределения масс

Представляет интерес исследовать случай, когда σ внутри скопления постоянна и равна некоторому значению σ_0. Строго говоря, этот случай не удовлетворяет поставленным выше условиям, так как для того, чтобы плотность в окрестности центра скопления оставалась конечной, σ должна уменьшаться при $r \to 0$ по крайней мере, как r^2. Мы можем удовлетворить этому условию, выбрав для σ, например, следующее выражение:

$$\sigma = \sigma_0 (1 - e^{-cr^2}), \tag{24}$$

где c — произвольная постоянная. В дальнейшем мы сразу будем рассматривать предельный случай, соответствующий $c=\infty$. Этот частный случай рассматривается здесь для того, чтобы дополнить рассуждения раздела 4. В рассмотренном в разделе 4 случае вся масса была сосредоточена максимально далеко (в пределах радиуса r_0) от центра; здесь же мы имеем сильную концентрацию массы вблизи центра скопления.

Так как τ представляет собой гравитационную массу, содержащуюся в сфере радиуса r, то $d\tau/4\pi r^2 dr$ равняется средней плотности гравитационной массы в точке r. Поскольку $\tau = 2\sigma_0 r$, то для этой средней плотности мы получаем выражение $\sigma_0/2\pi r^2$, т. е. с приближением к границе скопления $r = r_0$ плотность уменьшается, как $1/r^2$.

Из уравнений (18), в согласии с формулой (24) (в предельном случае обращения в нуль экспоненциального члена), мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{dA}{A} &= -\frac{4\sigma_0}{1+\sigma_0}\frac{dr}{r}, \\ \frac{dB}{B} &= \frac{4\sigma_0}{1-\sigma_0^2}\frac{dr}{r}, \end{aligned} \tag{18а}$$

и, поскольку при $r = r_0$ A и B, по предположению, равны 1,

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-4\sigma_0/(1+\sigma_0)}, \\ B &= \left(\frac{r}{r_0}\right)^{4\sigma_0/(1-\sigma_0^2)}. \end{aligned} \tag{18б}$$

При $r = 0$ мы получаем $a = \infty$ и $b = 0$. Эту сингулярность, однако, не следует принимать во внимание, так как она исключается, если учесть экспоненциальный член в формуле (24). Следует заметить, что при соответствующем выборе распределения масс можно, хотя и не достигнуть, но достаточно близко подойти к этой сингулярности.

Для определения соотношения, существующего между суммой M масс покоя частиц

$$M = \frac{\varkappa}{8\pi} m \int_0^{r_0} n 4\pi r^2\, dr,$$

и полной гравитационной массой скопления μ, мы воспользуемся уравнением (21). Можно показать, что первый член в уравнении (21) для случая бесконечно больших значений c не дает никакого вклада в распределение масс. Это следует из того факта, что $\left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right)'$ обращается в нуль везде, где становится несущественным влияние экспоненциального члена в формуле (24). Мы вычислили вклад от второго члена в уравнении (21), с самого начала опуская экспоненциальный член. После несложных выкладок получается окончательный результат:

$$M = \mu\,(1 - 4\sigma_0 + \sigma_0^2)^{1/2}\,\frac{1+\sigma_0}{(1-\sigma_0)^2}, \tag{25}$$

где $\mu = 2r_0\sigma_0$. Сопоставляя эту формулу с равенством $\mu = 2r_0\sigma_0$, нетрудно получить основные свойства скоплений такого типа.

Прежде всего, легко видеть, что особенно простые соотношения получаются, когда мы изменяем M, фиксируя σ_0 $(0 < \sigma_0 < 2-\sqrt{3})$ и тем самым тангенциальную скорость частиц, измеренную в единицах скорости света. При умножении M на z гравитационная масса становится равной $z\mu$, а диаметр скопления — равным $z \cdot 2r$. При этом средняя плотность умножится на $1/z^2$.

Чтобы не упустить ни одной из возможностей, достаточно фиксировать число частиц в скоплении, а следовательно, и M, меняя σ_0, диаметр $2r_0$ и гравитационную массу μ. Для $M = 1$ мы получаем

$$\mu = \frac{(1-\sigma_0)^2}{(1+\sigma_0)} (1 - 4\sigma_0 + \sigma_0^2)^{-1/2}.$$

В нижеследующей таблице для случая $M = 1$ приведены приближенные значения μ и $2r_0$ как функций σ_0:

σ_0	μ	$2r_0$
0	1	∞
0,05	0,988	19,76
0,1	0,948	9,48
0,15	0,97	6,56
0,2	1,13	5,65
0,23	1,32	5,63
0,25	1,82	7,40
0,26	2,63	10,1
0,268	∞	∞

Когда скопление сжимается, начиная с бесконечно большого диаметра, его масса уменьшается не больше, чем примерно на 5%. Эта минимальная масса достигается при диаметре $2r_0$, приблизительно равном 9. Диаметр можно еще уменьшить до величины примерно 5,6 путем колоссального увеличения энергии скопления. Однако дальше сжать скопление уже невозможно, не меняя при этом выбранного нами распределения масс. Дальнейшее увеличение энергии приведет лишь к увеличению диаметра. Таким образом энергия, т. е. гравитационная масса скопления, может произвольно увеличиваться без разрушения скопления. Каждому значению диаметра (при заданном числе частиц) отвечают два скопления, отличающиеся скоростями частиц.

В реальном, физическом мире, конечно, нет таких объектов, в которых осуществлялись бы эти парадоксальные явления. Лишь ветвь, соответствующая малым значениям σ_0 и значениям диаметра от ∞ до $9M$, содержит случаи, в какой-то степени напоминающие реальные звезды.

Скопления оболочечного типа, рассмотренные ранее в настоящей работе, ведут себя точно так же, несмотря на совершенно различные распределения масс. Однако в скоплениях оболочечного типа при данном M значение μ не может быть бесконечным.

Основным результатом проведенного исследования является четкое понимание того, что в реальном мире отсутствуют «шварцшильдовские сингулярности». Хотя приведенная теория рассматривает только такие скопления, в которых частицы движутся по круговым траекториям, вряд ли следует сомневаться в том, что рассмотрение и самого общего случая приведет к тем же результатам. Шварцшильдовская сингулярность отсутствует, так как вещество нельзя концентрировать произвольным образом; в противном случае частицы, образующие скопление, достигнут скорости света.

Настоящее исследование возникло из дискуссий автора с профессором Робертсоном и с докторами В. Баргманом и П. Бергманом о математическом и физическом смысле шварцшильдовской сингулярности. Эта проблема совершенно естественно привела к вопросу о том, допускают ли физические модели существование такой сингулярности. Настоящая работа отвечает на этот вопрос отрицательно.

Поступила 10 мая 1939 г.

ГРАВИТАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОБЛЕМА ДВИЖЕНИЯ. II*

(Совместно с Л. Инфельдом)

Введение

Настоящая работа содержит обобщение и существенное упрощение теории, касающейся проблемы движения в общей теории относительности, которая рассмотрена в нашей предыдущей работе по этому вопросу [1]. Используемый там метод заключался в выделении некоторой специальной координатной системы, в представлении вещества сингулярностями и, наконец, в использовании нового метода приближения, особенно удобного для рассмотрения квазистационарных полей. Введенное здесь изменение состоит в том, что о координатной системе заранее не делается никаких предположений, кроме того, что она галилеева на бесконечности.

Оказывается возможным развить всю теорию без каких-либо специальных уравнений, выражающих выбор координатной системы. Данное ниже представление оказывается не только более общим, но и более простым, чем в работе I. Прежний случай с его явно сформулированными координатными условиями получается из наших более общих рассуждений как частный случай, отличающийся естественным характером принятых координатных условий.

1. Уравнение поля

Выпишем уравнения гравитационного поля, разделяя линейные выражения:

$$-\gamma_{mn|ss}+\gamma_{ms|ns}+\gamma_{ns|ms}-\delta_{mn}\gamma_{ls|ls}-\gamma_{0m|0n}-$$
$$-\gamma_{0n|0m}+2\delta_{mn}\gamma_{0s|0s}+\gamma_{mn|00}-\delta_{mn}\gamma_{00|00}+2\Lambda'_{mn}=0, \qquad (1.1)$$

---

* *Gravitational Equations and the Problems of Motion II.* (With L. Infeld). Ann. Math., 1940, 41, 455—464.

[1] Ann. Math., 1938, 39, 66. (Статья 117. Далее цитируется как «I».— *Ред.*)

$$\gamma_{00\,|\,ss} + \gamma_{ls\,|\,ls} + 2\Lambda'_{00} = 0, \tag{1.2}$$

$$-\gamma_{0n\,|\,ss} + \gamma_{0s\,|\,sn} + \gamma_{ns\,|\,s0} - \gamma_{00\,|\,0n} + 2\Lambda'_{0n} = 0. \tag{1.3}$$

В выписанных здесь уравнениях (1.1) — (1.3) мы воспользовались теми же обозначениями и условиями, что и в работе I, т. е. латинские индексы принимают значения от 1 до 3; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование; черточки перед индексом означают обычное дифференцирование; величины $\gamma_{\mu\nu}$ (греческие индексы пробегают значения от 0 до 3) определяются равенством:

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}h_{\sigma\rho},$$

где

$$\eta_{mn} = -\delta_{mn} \qquad (\delta_{mn} \text{— символы Кронекера}),$$

$$\eta_{0n} = 0, \quad \eta_{00} = 1$$

и

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}.$$

В $\Lambda'_{\mu\nu}$ входят нелинейные по $h_{\mu\nu}$ члены. Мы не пишем их в явном виде, поскольку не будем ими пользоваться. Все вычисления, приводящие к уравнениям (1.1) — (1.3), представляют собой лишь небольшое видоизменение вычислений в работе I (стр. 68, 69)[2]. Единственная разница состоит в том, что здесь мы не предполагаем координатных условий

$$\gamma_{ls\,|\,s} = 0, \qquad \gamma_{0s\,|\,s} - \gamma_{00\,|\,0} = 0,$$

и, следовательно, уравнения (1.1) — (1.3) отличаются от соответствующих уравнений в работе I некоторыми новыми дополнительными линейными выражениями.

Перепишем уравнение (1.1) — (1.3) в виде

$$\Phi_{mn} + 2\Lambda_{mn} = 0, \tag{1.4}$$

$$\Phi_{00} + 2\Lambda_{00} = 0, \tag{1.5}$$

$$\Phi_{0m} + 2\Lambda_{0m} = 0, \tag{1.6}$$

где

$$\Phi_{mn} = -\gamma_{mn\,|\,ss} + \gamma_{ms\,|\,ns} + \gamma_{ns\,|\,ms} - \delta_{mn}\gamma_{ls\,|\,ls}, \tag{1.7}$$

$$\Phi_{00} = -\gamma_{00\,|\,ss} + \gamma_{ls\,|\,ls}, \tag{1.8}$$

$$\Phi_{0n} = -\gamma_{0n\,|\,ss} + \gamma_{0s\,|\,sn}, \tag{1.9}$$

[2] Стр. 454—455 этого тома.— *Ред.*

и, следовательно,

$$2\Lambda_{mn} = -\gamma_{0m\,|\,0n} - \gamma_{0n\,|\,0m} + 2\delta_{mn}\gamma_{0s\,|\,0s} + \gamma_{mn\,|\,00} - \delta_{mn}\gamma_{00\,|\,00} + 2\Lambda'_{mn}, \quad (1.10)$$

$$2\Lambda_{00} = 2\Lambda'_{00}, \quad (1.11)$$

$$2\Lambda_{0n} = \gamma_{ns\,|\,s0} - \gamma_{00\,|\,n0} + 2\Lambda'_{0n}. \quad (1.12)$$

Причина объединения некоторых из линейных выражений в $\Phi_{\mu\nu}$, а других — с нелинейными выражениями Λ' станет ясной позднее.

2. Лемма

Рассмотрим систему функций

$$F_{ab\ldots kl},$$

антисимметричных по индексам k, l и произвольных по всем другим индексам. Образуем интеграл

$$\int\limits_{(S)} F_{ab\ldots kl\,|\,l} \cos(x^k, \mathrm{N})\, dS, \quad (2.1)$$

по любой замкнутой поверхности S, не проходящей через сингулярность поля. Здесь (x^k, N) означает «угол» между направлением x^k и «нормалью» к S.

Полагая

$$F_{ab\ldots 23} = A_1, \qquad F_{ab\ldots 31} = A_2, \qquad F_{ab\ldots 12} = A_3,$$

интеграл (2.1) можно написать в виде

$$\int\limits_{(S)} \mathrm{rot}_n \mathbf{A}\, dS; \quad (2.2)$$

последний интеграл тождественно обращается в нуль, поскольку он по теореме Стокса может быть преобразован в линейный интеграл по контуру, ограничивающему поверхность (при этом, если поверхность замкнута, интеграл равен нулю). Этот результат не зависит от того, окружает данная поверхность сингулярность или нет. Следовательно, мы доказали, что интеграл (2.1) обращается в нуль.

3. Уравнения движения

Как и в работе I, мы рассматриваем вещество как сингулярности поля. Предположим, что имеется p тел, каждое из которых представляется точечной сингулярностью. Пространственные координаты каждой такой сингулярности будут функциями только времени. Положения сингулярностей в любой момент времени можно представить их пространственными координатами $\overset{\varkappa}{\xi}{}^m(x^0)$, $\varkappa = 1 \ldots p$. Индекс $\varkappa$ над ξ^m означает, что ξ^m относится к $\varkappa$-й сингулярности.

Запишем определенные равенствами (1.7) — (1.9) функции $\Phi_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$\Phi_{mk} = (-\gamma_{mk|l} + \gamma_{ml|k} - \delta_{mk}\gamma_{ls|s} + \delta_{ml}\gamma_{ks|s})_{|l}, \tag{3.1}$$

$$\Phi_{0k} = (-\gamma_{0k|l} + \gamma_{0l|k})_{|l}. \tag{3.2}$$

Выражения в скобках в (3.1) и (3.2) антисимметричны по индексам k, l и, следовательно, к ним можно применить лемму раздела 2. Отсюда

$$\overset{\varkappa}{\int} \Phi_{mk} \cos(x^k, \mathrm{N})\, dS = 0, \qquad \overset{\varkappa}{\int} \Phi_{0k} \cos(x^k, \mathrm{N})\, dS = 0. \tag{3.3}$$

Здесь индекс $\varkappa$ вверху у символа интеграла означает, что интеграл берется по поверхности, окружающей $\varkappa$-ю сингулярность. Из последних равенств и из уравнений (1.4) – (1.6) следует:

$$2\Lambda_{mn|n} = 0, \qquad 2\Lambda_{0n|n} = 0, \tag{3.4}$$

$$\overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_{mn} \cos(x^n, \mathrm{N})\, dS = 0, \qquad \overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_{0n} \cos(x^n, \mathrm{N})\, dS = 0. \tag{3.5}$$

Уравнения (3.4) указывают на то, что интегралы (3.5) не могут зависеть от формы поверхности, пока она окружает одну и ту же сингулярность. Однако уравнение (3.5), полученное с помощью нашей леммы, утверждает большее: поверхностные интегралы обращаются в нуль.

Каждый из поверхностных интегралов, будучи независим от формы поверхности, может дать лишь связь между координатами сингулярностей и их производными по времени. Уравнения (3.5) содержат систему $4p$ дифференциальных уравнений, которые мы будем называть *«уравнениями движения p частиц»*.

4. Применение нового метода приближения

В новом методе приближения, более полно изложенном в работе I, мы вводим вспомогательную временную координату $\tau = \lambda x^0$ и считаем каждую полевую величину функцией (τ, x^1, x^2, x^3). Далее, мы предполагаем, что производные каждой полевой величины по x^0 малы по сравнению с пространственными производными; иначе говоря, мы предполагаем, что производные по τ и по пространственным координатам одного порядка величины. Мы предполагаем также следующие разложения для γ:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{mn} &= \lambda^4 \underset{4}{\gamma}_{mn} + \lambda^6 \underset{6}{\gamma}_{mn} + \lambda^8 \underset{8}{\gamma}_{mn} + \ldots, \\
\gamma_{00} &= \lambda^2 \underset{2}{\gamma}_{00} + \lambda^4 \underset{4}{\gamma}_{00} + \lambda^6 \underset{6}{\gamma}_{00} + \ldots, \\
\gamma_{0n} &= \lambda^3 \underset{3}{\gamma}_{0n} + \lambda^5 \underset{5}{\gamma}_{0n} + \lambda^7 \underset{7}{\gamma}_{0n} + \ldots .
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Величина l в λ^l означает показатель степени, а не индекс. Числа, написанные внизу под буквой γ, указывают степень λ, с которой связана в разложении каждая компонента γ. Дифференцирование по (τ, x^1, x^2, x^3) обозначается запятой перед индексом, т. е.

$$\gamma_{mn|s} = \gamma_{mn,s}, \text{ но } \gamma_{mn|0} = \lambda \gamma_{mn,0}.$$

Обозначаемое чертой дифференцирование по нулевому индексу можно заменять обозначаемым запятой дифференцированием по нулевому индексу, если одновременно увеличивать на единицу степень λ, с которой эта величина связана. Чтобы найти явное выражение этого условия, мы воспользуемся числами под нулевыми индексами, написанными после запятой, т. е.

$$\lambda^{2l} \underset{2l}{\gamma}_{mn|0} = \lambda^{2l+1} \underset{2l}{\gamma}_{mn,\underset{1}{0}}, \quad \lambda^{2l} \underset{2l}{\gamma}_{mn|00} = \lambda^{2l+2} \underset{2l}{\gamma}_{mn,\underset{2}{00}} \text{ и т. д.}$$

Далее, мы можем показать, что наше предположение (4.1) вводит следующее простое общее правило разложения [3].

Любая компонента, имеющая нечетное число нулевых индексов, будет иметь в своем разложении только нечетные степени λ и, наоборот, любая составляющая, имеющая четное число нулевых значков, будет иметь в своем разложении только четные степени λ.

Мы хотим найти решение уравнений поля (1.4) – (1.6), применяя этот метод приближения. Для этого, казалось бы, надо расщепить их в соответствии с нашим методом на следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
\underset{2l}{\Phi}_{mn} + 2\underset{2l}{\Lambda}_{mn} &= 0, \\
\underset{2l}{\Phi}_{00} + 2\underset{2l}{\Lambda}_{00} &= 0, \\
\underset{2l+1}{\Phi}_{0n} + 2\underset{2l+1}{\Lambda}_{0n} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Однако такая процедура вообще возможна лишь при отсутствии сингулярностей. В случае, когда «уравнениям движения», выраженным соотношением (3.5), не удовлетворяют произвольные функции $\overset{\times}{\xi}{}^m(\tau)$,

[3] См. I, стр. 78. (Статья 117, стр. 465.— *Ред.*)

эта процедура недопустима. Это можно видеть из следующих соображений. Разложим, например, первое уравнение (3.5) по параметру λ:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{2l} \overset{\times}{\int} \underset{2l}{2\Lambda_{mn}} \cos(x^n, \mathbf{N})\, dS = 0, \ \varkappa = 1, \ldots p,$$

или, полагая

$$\overset{\times}{\int} \underset{2l}{2\Lambda_{mn}} \cos(x^n, \mathbf{N})\, dS = 4\pi \underset{2l}{\overset{\times}{C}_m},$$

получаем

$$\sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{2l} \underset{2l}{\overset{\times}{C}_m} = 0, \tag{4.3}$$

где $\underset{2l}{\overset{\times}{C}_m}$ зависят от τ через $\overset{\times}{\xi}{}^m$ и их производные. Уравнения (4.3) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую λ входит в качестве параметра. Решение этой системы дает движение сингулярностей. Из уравнений (4.3) мы не должны заключать, что

$$\frac{1}{4\pi} \overset{\times}{\int} \underset{2l}{2\Lambda_{mn}} \cos(x^n, \mathbf{N})\, dS = \underset{2l}{\overset{\times}{C}_m} = 0, \tag{4.4}$$

поскольку это может дать нам, в общем случае, бесконечное число уравнений; удовлетворить же последним какой-либо системой функций $\overset{\times}{\xi}{}^m$ может оказаться невозможным. Однако разложение уравнений поля способом, основанным на уравнениях (4.2), ведет к неправильным уравнениям (4.4); точно так же, рассуждение, которое прежде приводило к уравнениям (3.5), теперь ведет к (4.4). На каждой ступени приближения мы можем получить разные уравнения, описывающие движения сингулярностей, несовместимые друг с другом. Поэтому мы должны отказаться от применения метода приближения, который дают уравнения (4.2).

Чтобы избежать этой трудности, мы должны, следовательно, идти другим путем. Поскольку этот пункт является существенным, сформулируем общую идею наших рассуждений, прежде чем переходить к деталям. Они состоят из двух этапов.

1. Вместо гравитационных уравнений мы вводим новые уравнения, которые для краткости будем называть «обобщенными уравнениями». Гравитационные уравнения имеют вид

$$\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu} = 0, \tag{4.5}$$

тогда как обобщенные уравнения будут

$$\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}, \tag{4.6}$$

где $C_{\mu\nu}$ — некоторые специально выбранные функции τ, x^s и λ. Функции $C_{\mu\nu}$ должны быть выбраны таким образом, чтобы уравнения (4.6) можно было разложить по параметру λ и чтобы можно было применить к ним прямой метод приближения, не сталкиваясь с трудностями, которые только что были указаны.

2. Поскольку нашим методом мы решаем обобщенные, а не гравитационные уравнения, мы должны иметь возможность так специализировать наше решение, чтобы при определенных значениях λ получилось решение нашей системы (4.5), т. е. решение наших гравитационных уравнений.

Следовательно, наш метод заключается в обобщении уравнений (4.5), в использовании нашего метода приближения и, наконец, в специализации нашего решения (ограничением λ) так, чтобы оно удовлетворяло уравнениям (4.5).

Приведем здесь без доказательств наш выбор $C_{\mu\nu}$; это будет доказано позднее, когда мы покажем, что наш метод приближения можно провести без всяких затруднений принципиального характера. Возьмем

$$C_{mn} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\overset{\varkappa}{C}_m/\overset{\varkappa}{r})_{,n} + (\overset{\varkappa}{C}_n/\overset{\varkappa}{r})_{,m} - \delta_{mn}(\overset{\varkappa}{C}_s/\overset{\varkappa}{r})_{,s}\}, \tag{4.7}$$

$$C_{00} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}(\overset{\varkappa}{C}_s/\overset{\varkappa}{r})_{,s}, \tag{4.8}$$

$$C_{0n} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\overset{\varkappa}{C}_0/\overset{\varkappa}{r})_{,n} + (\overset{\varkappa}{C}_n/\overset{\varkappa}{r})_{,0}\}. \tag{4.9}$$

В правых частях последних равенств стоят величины $\underset{r}{r}$, определяемые как

$$\overset{\varkappa}{r}{}^2 = (x^1 - \overset{\varkappa}{\xi}{}^1)^2 + (x^2 - \overset{\varkappa}{\xi}{}^2)^2 + (x^3 - \overset{\varkappa}{\xi}{}^3)^2,$$

т. е. как квадрат «расстояния» точки поля от $\varkappa$-й сингулярности. Функции $\overset{\varkappa}{C}$ зависят от τ и λ и могут быть разложены в ряды по параметру λ:

$$\overset{\varkappa}{C}_m = \sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{2l}\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}, \tag{4.10}$$

$$\overset{\varkappa}{C}_0 = \sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{2l+1}\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}_0}. \tag{4.11}$$

Здесь $\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}$, $\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}_0}$ — функции только τ, которые мы определим позднее.

Теперь мы можем расщепить уравнения (4.6). Применение нашего метода приближения приводит к следующей системе уравнений:

$$\underset{2l}{\Phi_{mn}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_m/\overset{\varkappa}{r})_{,n} + (\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_n/\overset{\varkappa}{r})_{,m} - \delta_{mn}(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_s/\overset{\varkappa}{r})_{,s}\}, \tag{4.12}$$

$$\underset{2l}{\Phi_{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{00}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_s/\overset{\varkappa}{r})_{,s}\}, \tag{4.13}$$

$$\underset{2l+1}{\Phi_{0n}} + 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}}{}_0/\overset{\varkappa}{r})_{,n} + (\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_n/\overset{\varkappa}{r})_{,\underset{1}{0}}\}. \tag{4.14}$$

Обсуждение этих уравнений начнем с уравнений (4.12). В левой части последних, как следует из (1.7) и (1.10), имеем

$$\underset{2l}{\Phi_{mn}} = -\underset{2l}{\gamma_{mn,ss}} + \underset{2l}{\gamma_{ms,ns}} + \underset{2l}{\gamma_{ns,ms}} - \delta_{mn}\underset{2l}{\gamma_{ls,ls}}, \tag{4.15}$$

$$2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} = -\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}{}_{,\underset{1}{0n}} - \underset{2l-1}{\gamma_{0n}}{}_{,\underset{1}{0m}} + 2\delta_{mn}\underset{2l-1}{\gamma_{0l}}{}_{,\underset{1}{0l}} + \underset{2l-2}{\gamma_{mn}}{}_{,\underset{2}{00}} - \delta_{mn}\underset{2l-2}{\gamma_{00}}{}_{,\underset{2}{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda'_{mn}}. \tag{4.16}$$

Неизвестные функции $\underset{2l}{\gamma_{mn}}$, которые нужно определить из уравнений (4.12), содержатся только в $\underset{2l}{\Phi_{mn}}$. Все γ в Λ_{mn}, как видно из равенства (4.16), уже известны из предшествующих ступеней приближения, если учесть, что Λ'_{mn} не содержит линейных выражений. Это и было причиной нашего разделения уравнений поля на Φ и Λ. Теперь мы можем дать недостающее определение величин $\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_m$. Они определяются таким образом, чтобы поверхностные условия выполнялись на каждой ступени приближения тождественно и не налагали ограничений на движение. Мы покажем теперь, что всегда можно выбрать $\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_m$ так, чтобы движение не было ограничено. Образуя наши поверхностные интегралы, из уравнений (4.12) получаем

$$\overset{\varkappa}{\int} 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}\cos(x^n, \mathrm{N})\, dS = 4\pi \underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_m, \tag{4.17}$$

поскольку

$$\overset{\varkappa}{\int} (1/\overset{\varkappa}{r})_{,n}\cos(x^n, \mathrm{N})\, dS = -4\pi,$$

если выбрать поверхность в виде малой сферы, окружающей $\varkappa$-ю сингулярность. Однако Λ_{mn} можно определить из предыдущих ступеней приближения. Следовательно, функции $\underset{2l}{\overset{\times}{C}}_m$ известны, если известны $\underset{l'}{\gamma}$ для $l' < 2l$. В уравнениях (4.12) правая часть и Λ_{mn} известны и $\underset{2l}{\gamma}_{mn}$ можно вычислить без каких-либо затруднений с поверхностными интегралами.

В соответствии с соотношениями (1.8) и (1.11) уравнение (4.13) в явном виде имеет вид

$$\underset{2l}{\gamma}_{00,ss} = \underset{2l}{\gamma}_{ls,ls} + 2\underset{2l}{\Lambda}'_{00} + \sum_{\varkappa=1}^{p} (\underset{2l}{\overset{\times}{C}}_s / \overset{\times}{r})_{,s}, \tag{4.18}$$

где $\underset{2l}{\gamma}_{ls}$, $\underset{2l}{\Lambda}'_{00}$, $\underset{2l}{\overset{\times}{C}}_s$ — известны. Если в $\underset{2l}{\gamma}_{00}$ исключить полюса высшего порядка, все еще остается возможность прибавить к $\underset{2l}{\gamma}_{00}$ произвольную гармоническую функцию типа простого полюса. К этому вопросу мы вернемся позднее.

Наконец, имеется уравнение (4.14), в котором, как следует из соотношений (1.9) и (1.12),

$$\underset{2l+1}{\Phi}_{0n} = -\underset{2l+1}{\gamma}_{0n,ss} + \underset{2l+1}{\gamma}_{0s,ns}, \tag{4.19}$$

$$2\underset{2l+1}{\Lambda}_{0n} = -\underset{2l}{\gamma}_{00,\underset{1}{n0}} + \underset{2l}{\gamma}_{ns,\underset{1}{0s}} + 2\underset{2l+1}{\Lambda}'_{0n}, \tag{4.20}$$

а величина $\underset{2l+1}{\overset{\times}{C}}_0$ определяется, как прежде $\underset{2l}{\overset{\times}{C}}_m$, путем вычисления поверхностного интеграла. Единственными неизвестными функциями опять являются $\underset{2l+1}{\gamma}_{0n}$ в $\underset{2l+1}{\Phi}_{0n}$.

В этом случае обобщенных уравнений поверхностные интегралы, вместо (3.5), равны

$$\overset{\times}{\int} 2\Lambda_{mn} \cos(x^n, \mathrm{N})\, dS = 4\pi \overset{\times}{C}_m, \tag{4.21}$$

$$\overset{\times}{\int} 2\Lambda_{0n} \cos(x^n, \mathrm{N})\, dS = 4\pi \left\{ \overset{\times}{C}_0 - \frac{1}{3} \overset{\times}{C}_s \overset{\times}{\ddot{\xi}}{}^s \right\}. \tag{4.22}$$

Чтобы получить решения наших гравитационных уравнений, мы должны предположить:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{2l} \underset{2l}{\overset{\times}{C}}_m = \overset{\times}{C}_m = 0,$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{2l+1} \underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0} = \overset{\times}{C}_0 = 0; \tag{4.23}$$

это и есть $4p$ *уравнений движения.*

Следовательно, на каждой ступени приближения мы действуем так, как будто нашей целью является решение не гравитационных уравнений (4.5), а более общих уравнений (4.6), которые не ограничивают движение. Заканчивая нашу процедуру приближения, мы возвращаемся к гравитационным уравнениям, ограничивая движение посредством условий (4.23).

5. Условие $\overset{\times}{C}_0 = 0$.

В соотношениях (4.23) мы имеем $4p$ уравнений для определения $3p$ функций $\overset{\times}{\xi}{}^m(\tau)$. Можно показать, что движение переопределено, поскольку $\underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0}$ могут быть выбраны произвольно, так что можно положить

$$\underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0} \equiv 0, \qquad \overset{\times}{C}_0 \equiv 0. \tag{5.1}$$

Предположение (5.1) совместимо с уравнениями поля и ограничивает свободное добавление полюсов к $\underset{2l}{\gamma}{}_{00}$, упомянутое в разделе 4.

Замена

$$\underset{2l}{\gamma_{00}} \text{ на } \underset{2l}{\gamma_{00}} = \underset{2l}{\gamma'_{00}} + \sum_{\varkappa=1}^{p} \underset{2l}{\overset{\times}{\sigma}_0}/r, \qquad \overset{\times}{\sigma}_0 = \overset{\times}{\sigma}_0(\tau) \tag{5.2}$$

не изменит уравнения (4.18). Кроме этого, заменим

$$\underset{2l+1}{\gamma_{0m}} \text{ на } \underset{2l+1}{\gamma_{0m}} = \underset{2l+1}{\gamma'_{0m}} - \sum_{\varkappa=1}^{p} \left(\underset{2l}{\overset{\times}{\sigma}_0}/r\right) \underset{1}{\overset{\times}{\dot{\xi}}}{}^m. \tag{5.3}$$

Единственное изменение, которое может быть внесено в уравнение (4.14), как показывает сравнение с равенствами (4.19) и (4.20), возникает из выражения

$$\left(\underset{2l+1}{\gamma_{0s,s}} - \underset{2l}{\gamma_{00,0}}\right)_{,\underset{1}{n}}. \tag{5.4}$$

Выражение (5.4) после замен (5.2) и (5.3) переходит в

$$\underset{2l+1}{\gamma'_{0s,s}} - \underset{2l}{\gamma'_{00,\underset{1}{0}}} - \sum_{\varkappa=1}^{p} \left(\underset{2l+1}{\overset{\times}{\dot{\sigma}}_0}/r\right)_{,n}. \tag{5.5}$$

Сравнение с уравнением (4.14) показывает, что всегда можно положить $\underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0} \equiv 0$, определяя соответствующим образом функции $\underset{2l+1}{\overset{\times}{\sigma}_0}$ в (5.2) и (5.3).

Следовательно, уравнения поля и уравнения движения имеют вид:

$$\underset{2l}{\Phi_{mn}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\underset{2l}{\overset{\times}{C}_m}/\overset{\times}{r})_{,n} + (\underset{2l}{\overset{\times}{C}_n}/\overset{\times}{r})_{,m} - \delta_{mn}(\underset{2l}{\overset{\times}{C}_s}/\overset{\times}{r})_{,s}\}, \tag{5.6}$$

$$\underset{2l}{\Phi_{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{00}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\underset{2l}{\overset{\times}{C}_s}/\overset{\times}{r})_{,s}\}, \tag{5.7}$$

$$\underset{2l+1}{\Phi_{0n}} + 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{\underset{1}{(\underset{2l}{\overset{\times}{C}_n}/\overset{\times}{r})_{,0}}\}, \tag{5.8}$$

$$\overset{\times}{C}_m = \sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{2l}\underset{2l}{\overset{\times}{C}_m} = 0. \tag{5.9}$$

Эти уравнения и представляют результат наших рассмотрений и обобщения теории, развитой в работе I.

Действительно, можно показать, что уравнения поля в работе I являются частным случаем уравнений (5.6) — (5.9).

Выбирем координатные условия, принятые в работе I:

$$\underset{2l}{\gamma_{rs,s}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\underset{2l}{\overset{\times}{C}_r}/\overset{\times}{r}, \tag{5.10}$$

$$\underset{2l+1}{\gamma_{0s,s}} - \underset{2l}{\gamma_{00,0}}{}_{1} = 0. \tag{5.11}$$

Вследствие соотношений (1.7) — (1.9) уравнения поля (5.6) — (5.9) принимают вид

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,ss}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}, \tag{5.12}$$

$$\underset{2l}{\gamma_{00,ss}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{00}}, \tag{5.13}$$

$$\underset{2l+1}{\gamma_{0m,ss}} = 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0m}}, \tag{5.14}$$

и поверхностные интегралы равны

$$\overset{\times}{\int} 2\Lambda_{mn}\cos(x^n, \mathrm{N})\,dS = 4\pi\underset{2l}{\overset{\times}{C}_m}, \tag{5.15}$$

$$\overset{\times}{\int}(2\underset{2l+1}{\Lambda'_{0n}} - \underset{2l}{\gamma_{00,n0}}{}_{1})\cos(x^n, \mathrm{N})\,dS = 0, \tag{5.16}$$

точно так же, как в работе 1.

Поступила 29 мая 1939 г.

121

О ПЯТИМЕРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА*

(Совместно с В. Баргманом и П. Бергманом)

В ранее опубликованной работе мы рассмотрели уравнения поля для переменных, определенных в пятимерном римановом пространстве частного вида. Четыре из этих уравнений были интегродифференциальными. В настоящей работе показано, что можно найти систему уравнений поля, в которую входят только дифференциальные уравнения, не меняя при этом геометрической структуры пространства. Такая система однозначно определяется путем наложения некоторых условий однородности.

Введение

В 1921 году Калуца построил единую полевую теорию гравитации и электричества. Он рассматривал компоненты четырехмерного метрического тензора и 4-потенциала электромагнитного поля как компоненты одной геометрической величины, а именно метрического тензора $\gamma_{\mu\nu}$ в пятимерном римановом пространстве, описываемом переменными $x^0, \ldots, x^4$.

Поскольку физический континуум имеет только четыре измерения, Калуца предполагает, что в должным образом выбранной системе координат все переменные пóля не зависят от x^0 (условие «цилиндричности»). Кроме того, он вынужден был предположить, что в этой системе координат $\gamma_{00} = 1$, так как гравитационное и электромагнитное поля описываются $10+4$ переменными, тогда как число компонент тензора $\gamma_{\mu\nu}$ равно 15. Вследствие этого он строит свою теорию на основе только 14 уравнений поля.

С точки зрения пятимерной римановой геометрии предположения Калуцы представляются искусственными. Введение специальной системы координат, в которой переменные пóля не зависят от x^0, отвечает введению в пятимерном пространстве поля единичных векторов $A^\mu(x)$, которое легко

....

* *On Five-dimentional Representation of Gravitation and Electricity* (With V. Bargmann and P. Bergmann). Theodore von Karman Anniversary Volume, Pasadena, Calif. Inst. Technol., 1941, 212—225.

описать с помощью ковариантных уравнений. (В специальной системе координат компоненты A^μ равны 1, 0, 0, 0, 0.)

В нашей предыдущей работе [1] было показано, что более общие предположения приводят к введению более простого векторного поля. Основные результаты этой работы приведены в следующем разделе.

Сводка основных результатов предыдущей работы

Наша система аксиом такова.

1. Многообразие, с которым мы имеем дело, является пятимерным римановым пространством.

2. Пространство является замкнутым в одном из измерений. Оно может быть представлено как пространство открытое и периодическое в этом измерении, такое что точке P замкнутого пространства отвечает бесконечное число соответственных точек, P, P', P'',..., периодического пространства.

3. Через каждую точку пространства проходит замкнутая и лишенная сингулярностей геодезическая. Иными словами, на языке «периодического пространства», геодезическая, проходящая через любые две соответственные точки P и P', проходит также через все остальные точки P', P'',..., отвечающие точке P.

Третья аксиома определяет поле единичных векторов $A^\mu(x)$, касательных к замкнутым геодезическим. Можно показать, что расстояние по геодезической между двумя точками P и P' не зависит от P; оно является постоянной, которая характеризует наше пространство.

В специальной системе координат, в которой геодезические являются линиями $x^a = \text{const}$ $(a = 1,.., 4)$ [2], компоненты векторов A^μ равны 1, 0, 0, 0, 0 и можно показать, что [3]

$$\gamma_{00} = 1, \gamma_{a0,0} = 0 \qquad (a = 1, \ldots, 4). \tag{1}$$

Остальные компоненты метрического тензора, однако, зависят (периодически) от x^0. Поэтому уравнения поля, которые будут рассматриваться ниже, отличаются от уравнений теории Калуцы.

---

[1] A. Einstein, P. Bergmann. Ann. Math., 1938, 39, 683. (Статья 118. Далее цитируется как I.— *Прим. ред.*).

[2] Латинские индексы всегда пробегают значения от 1 до 4, а греческие — от 0 до 4.

[3] Дифференцирование мы обозначаем запятой перед соответствующим индексом:

$$f_{,\rho} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\rho}.$$

Уравнения (1) эквивалентны следующим соотношениям:

$$\gamma_{00} = 1, \quad \underset{(5)}{\Gamma^{\lambda}_{00}} = 0, \tag{2}$$

а также соотношениям:

$$\gamma_{00} = 1 \quad \underset{(5)}{\Gamma^{l}_{00}} = 0 \qquad (l = 1, \ldots, 4), \tag{3}$$

если через $\underset{(5)}{\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}$ обозначить символы Кристоффеля для пятимерной римановой геометрии. Из уравнений (1) с очевидностью следуют уравнения (2) и (3), но справедливо и обратное утверждение. Действительно, из соотношения $\gamma_{00} = 1$ следует, что

$$\underset{(5)}{\Gamma^{l}_{00}} = \gamma^{lm}\gamma_{m0,0} = 0,$$

т. е. $\gamma_{m0,0} = 0$. (Определитель γ^{lm} равен γ_{00}/γ и, следовательно, отличен от нуля.)

Специальная система координат определяется замкнутыми геодезическими неоднозначно. Мы можем еще произвести «4-преобразование»:

$$\begin{aligned} \bar{x}^a &= \bar{x}^a(x^1, \ldots, x^4), \\ \bar{x}^0 &= x^0, \end{aligned} \tag{4}$$

и «0-преобразование»:

$$\begin{aligned} \bar{x}^a &= x^a, \\ \bar{x}^0 &= x^0 + f(x^1, \ldots, x^4). \end{aligned} \tag{5}$$

Эти преобразования порождают группу, которую мы назовем «специальной группой» в отличие от группы всех пятимерных преобразований координат.

Тензорный анализ по отношению к специальной группе был развит в работе I. Напомним следующие результаты.

Метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ можно представить в виде суммы двух независимых геометрических величин

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu, \tag{6}$$

и, следовательно, заменить на тензор $g_{\mu\nu}$ и вектор A_μ. В специальной системе координат отличны от нуля только компоненты $g_{\mu\nu}$:

$$g_{mn} = \gamma_{mn} - A_m A_n. \tag{7}$$

Компоненты же A_μ будут:

$$A_m = \gamma_{m0} \tag{8}$$

и

$$A_0 = \gamma_{00} = 1.$$

Относительно специальной группы векторы, тензоры и т. д. определены как величины (с индексами, пробегающими значения от 1 до 4), которые преобразуются по обычным законам при 4-преобразованиях и остаются инвариантными при 0-преобразованиях.

Согласно этому определению, g_{mn} являются компонентами тензора. Величины A_m преобразуются как компоненты ковариантного вектора при 4-преобразованиях, но не остаются инвариантными относительно 0-преобразований. Для последних мы получаем

$$\overline{A}_m = A_m - \frac{\partial f}{\partial x^m}. \tag{9}$$

Антисимметричные производные

$$A_{mn} = A_{m,n} - A_{n,m} \tag{10}$$

образуют антисимметричный тензор.

Производная тензора по x^0 является тензором того же ранга. Однако дифференцирование по x^a не является инвариантным относительно 0-преобразования и должно быть заменено операцией

$$\frac{\partial}{\partial x^a} - A_a \frac{\partial}{\partial x^0}. \tag{11}$$

Ковариантные производные определяются таким образом, чтобы производные от метрического тензора g_{mn} обращались в нуль. Это определение отличается от обычного только тем, что дифференцирование по x^a должно быть заменено на 0-инвариантную операцию (11). Например, для произвольного вектора B_s мы получаем

$$B_{s;a} \equiv (B_{s,a} - A_a B_{s,0}) - B_t \Gamma^t_{sa}, \tag{12}$$

где

$$\Gamma^t_{sa} = \frac{1}{2} g^{tn} [(g_{ns,a} - A_a g_{ns,0}) + (g_{na,s} - A_s g_{na,0}) - (g_{as,n} - A_n g_{as,0})]. \tag{13}$$

Тензор кривизны определяется коммутацией ковариантных производных вектора B_s:

$$B_{s;a;b} - B_{s;b;a} = -B_t R^t_{\cdot sab} - A_{ab} B_{s,0}, \tag{14}$$

причем

$$R^t_{\cdot sab} = (\Gamma^t_{sa,b} - A_b \Gamma^t_{sa,0}) - (\Gamma^t_{sb,a} - A_a \Gamma^t_{sb,0}) - \Gamma^t_{an}\Gamma^n_{sb} + \Gamma^t_{bn}\Gamma^n_{sa}. \tag{15}$$

Приведем еще несколько соотношений, которые не были выписаны в работе I.

1. Производная от Γ^t_{sa} по x^0 является тензором и может быть выражена через ковариантные производные величины $g_{mn,0}$:

$$\Gamma^t_{sa,0} = \frac{1}{2} g^{tn} (g_{ns,0;a} + g_{na,0;s} - g_{sa,0;n}). \tag{16}$$

2. Из соотношений (14) при помощи обычной для римановой геометрии процедуры получаются тождества Бианки:

$$R^{s}_{\cdot tkl;m} + R^{s}_{\cdot tlm;k} + R^{s}_{\cdot tmk;l} + \Gamma^{s}_{tk,0}A_{lm} + \Gamma^{s}_{tl,0}A_{mk} + \Gamma^{s}_{tm,0}A_{kl} \equiv 0. \qquad (17)$$

3. Как и в частном случае (А16б) работы I, мы получаем соотношения

$$R^{i}_{\cdot klm;0} = \Gamma^{i}_{kl,0;m} - \Gamma^{i}_{km,0;l}. \qquad (18)$$

В работе I мы выводили уравнения поля из вариационного принципа. Переменные поля определены в пятимерном пространстве. Величины g_{mn}, соответствующие гравитационному полю, зависят от пяти переменных; величины A_l, соответствующие 4-потенциалу электромагнитного поля, зависят только от четырех переменных x^a. Поэтому 10 уравнений из нашей системы (возникающих при варьировании по g_{mn}) являются *дифференциальными уравнениями*; остающиеся четыре уравнения (получающиеся при варьировании по A_l) оказываются *интегродифференциальными*. Интегралы берутся по периоду координаты x^0.

Различие между нашей теорией и теорией Калуцы связано с тем, что g_{mn} зависит от x^0. Это, в частности, приводит к существованию 4-вектора плотности тока. Если мы положим $g_{mn,0} = 0$, то теория сведется к теории Калуцы.

Мы требуем, чтобы лагранжиан в нашем вариационном принципе был однородной функцией с «весом» 2 по отношению к производным от переменных по́ля. Произведение производных m-го, n-го и т. д. порядков имеет «вес» $m + n + \ldots$. (Этот вес, конечно, не имеет никакого отношения к весу тензорной плотности.) Каждый лагранжиан, удовлетворяющий этому условию однородности, представляет собой линейную комбинацию (с постоянными коэффициентами) четырех скалярных плотностей. Как указывалось в работе I, не все четыре коэффициента являются существенными; остаются два существенных параметра, которые нельзя определить только из соображений инвариантности.

Существование и однозначность ковариантных уравнений поля в дифференциальной форме

Мы видели, что вариационный принцип дает не только дифференциальные уравнения, так как переменные по́ля A_l не зависят от x^0. Рассмотрим вопрос о том, можно ли построить систему уравнений поля, ковариантных относительно специальной группы (4), (5), состоящую только из *дифференциальных уравнений*, если мы откажемся от вывода уравнений из вариационного принципа. Если да, то будет ли такая система однозначно определенной?

Мы не можем пользоваться любой системой ковариантных дифференциальных уравнений для 14 переменных γ_{ab} и γ_{a0}. Так как должны выполняться также четыре уравнения $\underset{(5)}{\Gamma^l_{00}} = 0$ [ср. уравнения (3)], то для наших 14 переменных будет существовать $14 + 4$ уравнений. Поэтому мы должны предположить, что эти 18 уравнений связаны *четырьмя тождественными соотношениями.*

Мы покажем в явном виде, что такого рода система действительно существует. Затем мы докажем, что если сами уравнения и тождественные соотношения удовлетворяют определенным условиям однородности, то система является *однозначно определенной.*

Нам удобно исходить из тождеств Бианки в пятимерной римановой геометрии. Как известно, путем свертывания получаются пять тождеств [4]:

$$\underset{(5)}{\mathfrak{M}^\lambda} \equiv \underset{(5)}{\mathfrak{G}^{\lambda\mu}_{;\mu}} \equiv 0, \tag{19}$$

где

$$\underset{(5)}{\mathfrak{G}^{\lambda\mu}} \equiv \sqrt{-\gamma}\left(\underset{(5)}{R^{\lambda\mu}} - \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\mu}\underset{(5)}{R}\right). \tag{20}$$

[В соотношениях (19) используются ковариантные производные пятимерной римановой геометрии, а не производные, определенные соотношениями (12) и (13)].

Пользуясь пятимерными символами Кристоффеля $\underset{(5)}{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}$, мы запишем тождества (19) в более явном виде:

$$\underset{(5)}{\mathfrak{M}^\lambda} \equiv \underset{(5)}{\mathfrak{G}^{\lambda\mu}_{,\mu}} + \underset{(5)}{\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}}\underset{(5)}{\mathfrak{G}^{\rho\sigma}} \equiv 0. \tag{21}$$

Чтобы приспособить эти формулы к специальной группе, отделим индекс 0 от остальных индексов. Тогда для $\lambda = 1, \ldots, 4$ получим

$$\underset{(5)}{\mathfrak{M}^l} \equiv \underset{(5)}{\mathfrak{G}^{lm}_{,m}} + \underset{(5)}{\mathfrak{G}^{l0}_{,0}} + \underset{(5)}{\Gamma^l_{mn}}\underset{(5)}{\mathfrak{G}^{mn}} + 2\underset{(5)}{\Gamma^l_{m0}}\underset{(5)}{\mathfrak{G}^{m0}} + \underset{(5)}{\Gamma^l_{00}}\underset{(5)}{\mathfrak{G}^{00}} \equiv 0, \tag{22}$$

а для $\lambda = 0$:

$$\underset{(5)}{\mathfrak{G}^{0m}_{,m}} + \underset{(5)}{\Gamma^0_{mm}} + 2\underset{(5)}{\Gamma^0_{m0}}\underset{(5)}{\mathfrak{G}^{m0}} + \Gamma^0_{00}\mathfrak{G}^{00} \equiv -\mathfrak{G}^{00}_{,0}. \tag{23}$$

Соотношения (22) являются тождественными соотношениями между

---

[4] J. A. Schouten. Der Ricci Kalkül. Berlin, 1923, 91.

следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \underset{(5)}{\Gamma^l_{00}} &= 0 \\ \underset{(5)}{\mathfrak{S}^{lm}} &= 0 \\ \underset{(5)}{\mathfrak{S}^{l0}} &= 0 \end{aligned}\right\} (l,\, m = 1, \ldots, 4). \qquad \begin{aligned} &(24) \\ &(25) \\ &(26) \end{aligned}$$

Кроме того, эта система из 18 уравнений, в которые не входят ни $\underset{(5)}{\mathfrak{S}^{00}}$, ни $\underset{(5)}{\Gamma^0_{00}}$, является ковариантной относительно специальной группы. Действительно, из уравнений (4) мы получаем для 4-преобразований

$$\begin{gathered} \underset{(5)}{\bar{\Gamma}^i_{00}} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \underset{(5)}{\Gamma^k_{00}}, \\ \underset{(5)}{\bar{\mathfrak{S}}^{ik}} = \det\left(\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^b}\right) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^s} \underset{(5)}{\mathfrak{S}^{rs}}, \quad \underset{(5)}{\bar{\mathfrak{S}}^{i0}} = \det\left(\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^b}\right) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \underset{(5)}{\mathfrak{S}^{r0}}, \end{gathered} \tag{27}$$

и для 0-преобразования:

$$\begin{gathered} \underset{(5)}{\bar{\Gamma}^i_{00}} = \underset{(5)}{\Gamma^i_{00}}, \qquad \underset{(5)}{\bar{\mathfrak{S}}^{ik}} = \underset{(5)}{\mathfrak{S}^{ik}}, \\ \underset{(5)}{\bar{\mathfrak{S}}^{i0}} = \underset{(5)}{\mathfrak{S}^{i0}} + \frac{\partial f}{\partial x^r} \underset{(5)}{\mathfrak{S}^{ir}}. \end{gathered} \tag{28}$$

Отсюда следует, что соотношения (24) — (26) можно выбрать в качестве уравнений поля, поскольку они обладают необходимыми свойствами инвариантности и удовлетворяют четырем тождественным соотношениям (22). Так как из соотношений $\gamma_{00} = 1$ и $\underset{(5)}{\Gamma^l_{00}} = 0$ следует $\underset{(5)}{\Gamma^0_{00}} = 0$ [ср. уравнения (3)], то из уравнений (23) мы видим, что $\underset{(5)}{\mathfrak{S}^{00}}$ не зависит от x^0, если выполняются соотношения (24) — (26). Однако сама величина $\underset{(5)}{\mathfrak{S}^{00}}$, вообще говоря, не равна нулю.

Показав, что система уравнений существует, докажем теперь, что при определенных условиях однородности она является единственно возможной. Наша цель состоит в нахождении системы уравнений:

$$G^{ik} = 0 \tag{29}$$

и

$$G^i = 0, \tag{30}$$

таких, что G^{ik} является тензором, а G^i — вектором по отношению к специальной группе. Как G^{ik}, так и G^i должны быть однородны с весом 2 относительно производных от переменных поля. [Мы с самого начала предполагаем здесь, что $A_{l,0} = 0$, так что уравнения (24) тождественно выполняются.]

Если мы снова перейдем к обозначениям четырехмерного тензорного анализа специальной группы, то наиболее общее выражение, удовлетворяющее нашим условиям, можно записать в следующем виде:

$$G^{ik} = \frac{1}{2}\left(R^{ik} + R^{ki} - \gamma_1 g^{ik} R\right) + \gamma_2 g^{ik} A^{rs} A_{rs} + \gamma_3 A^{is} A^k_s + \gamma_4 [g^{ir} A^{ks} + g^{kr} A^{is}] g_{rs,0} +$$
$$+ \gamma_5 g^{ik} g^{mr} g^{ns} g_{mn,0} g_{rs,0} + \gamma_6 g^{ir} g^{ks} g^{mn} g_{rm,0} g_{sn,0} + \gamma_7 g^{ik} (g^{mn} g_{mn,0})^2 +$$
$$+ \gamma_8 g^{im} g^{kn} g_{mn,0} g^{rs} g_{rs,0} + \gamma_9 g^{ir} g^{ks} g_{rs,00} + \gamma_{10} g^{ik} g^{mn} g_{mn,00} \qquad (31)$$

и

$$G^i = A^{im}_{;m} + \varepsilon_1 g^{im} g^{rs} g_{mr,0;s} + \varepsilon_2 g^{im} g^{rs} g_{rs,0;m}, \qquad (32)$$

где γ_n и ε_n — постоянные.

Потребуем, чтобы существовала ковариантная система из *четырех тождественных соотношений* $B^i = 0$ между уравнениями, линейных и однородных по G^{ik} и G^i и однородных с весом 3 по производным от уравнений поля. Это требование приводит к соотношениям

$$B^i \equiv G^{im}_{;m} + \beta_1 G^i_{,0} + (\beta_2 g^{il} g_{ml,0} + \beta_3 A^i_m) G^m + \beta_4 g^{mn} g_{mn,0} G^i \equiv 0. \qquad (33)$$

Используя соотношения (16) — (18), можно показать путем простых, но довольно длинных выкладок, что такого рода тождества существуют лишь при следующем выборе постоянных:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2} & \beta_3 = \frac{a}{2} & \beta_4 = \frac{1}{4} & \varepsilon_1 = -\frac{1}{a} & \varepsilon_2 = \frac{1}{a} \\
\gamma_1 = 1 & \gamma_2 = -\frac{a}{8} & \gamma_3 = \frac{a}{2} & \gamma_4 = 0 & \gamma_5 = \frac{3}{8a} \\
\gamma_6 = -\frac{1}{2a} & \gamma_7 = -\frac{1}{8a} & \gamma_8 = \frac{1}{4a} & \gamma_9 = \frac{1}{2a} & \gamma_{10} = -\frac{1}{2a}
\end{array}\right\}. \qquad (34)$$

Здесь a — произвольное число. Его можно исключить, если ввести новые переменные

$$A'_k = \tau A_k \qquad (35)$$

и одновременно заменить координату x^0 на

$$x^{0'} = \tau x^0, \qquad (36)$$

где $\tau^2 = \pm a$. В новой системе a оказывается равным ± 1. Значение $a = -1$ следует исключить, поскольку γ_8 соответствует коэффициенту $\varkappa$ в электромагнитном члене в уравнениях поля общей теории относительности, если A_{mn} интерпретировать как компоненты напряженности электромагнитного поля. По этой причине a должно быть положительным.

При $a = 1$ после перестановки некоторых членов мы окончательно получаем

$$G^{ik} \equiv \frac{1}{2}(R^{ik} + R^{ki} - g^{ik}R) + \frac{1}{2}\left(A^{is}A^k_s - \frac{1}{4}g^{ik}A^{rs}A_{rs}\right) - \\ - g^{ik}\left[\frac{3}{8}g^{rs}_{,0}g_{rs,0} + \frac{1}{8}(g^{rs}g_{rs,0})^2\right] + \frac{1}{2}g^{im}_{,0}g^{ks}g_{sm,0} - \\ - \frac{1}{4}g^{ik}_{,0}(g^{rs}g_{rs,0}) + \frac{1}{2}(g^{ir}g^{ks} - g^{ik}g^{rs})g_{rs;00} = 0 \quad (37)$$

и

$$G^i \equiv A^{im}_{;m} - g^{im}g^{rs}g_{mr,0;s} + g^{im}g^{rs}g_{rs,0;m}. \quad (38)$$

Из соотношений (33) мы получаем тождества

$$\sqrt{-g}B_i \equiv \mathfrak{A}_i + \frac{1}{2}(\sqrt{-g}G_i)_{,0} \equiv 0, \quad (39)$$

где

$$\mathfrak{A}_i = (\sqrt{-g}G^k_i)_{;k} + \frac{1}{2}A_{ik}\sqrt{-g}G^k.$$

Уравнения (24) — (26) также приводят к $a = +1$, если метрический тензор выбрать так, чтобы $\gamma_{44} < 0$ и пространственные компоненты γ_{11}, γ_{22}, γ_{33} были положительны. Выражения $\mathfrak{G}^{lm}$ и $\mathfrak{G}^{l0}$ являются линейными комбинациями G^{ik} и G^i. Используя теперь уравнения (37) и (38), находим

$$\underset{(5)}{\mathfrak{G}}{}^{ik} = \sqrt{-g}G^{ik}, \\ \underset{(5)}{\mathfrak{G}}{}^{i0} = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}G^i - A_kG^{ik}\right). \quad (40)$$

Аналогичное соотношение выполняется для тождеств. В соответствии с тождеством (21) мы получаем

$$\sqrt{-g}B^i \equiv \underset{(5)}{\mathfrak{M}}{}^i, \\ \sqrt{-g}B_i = (\underset{(5)}{\mathfrak{M}}{}_{,i} - A_i\underset{(5)}{\mathfrak{M}}{}_0). \quad (41)$$

Тождество $\underset{(5)}{2\mathfrak{M}_0} \equiv 0$ приводит к следующему соотношению:

$$\mathfrak{N} \equiv (\sqrt{-g}G^m)_{;\,m} + \sqrt{-g}g^{lm}_{,\,0}G_{lm} \equiv -2\underset{(5)}{\mathfrak{S}}_{00,0}. \qquad (42)$$

Оно не является тождеством обычного рода. Выражение $\mathfrak{N}$, линейное и однородное по G^{ik} и G^i, равно производной по x^0 некоторой функции от переменных пóля, однако оно не обращается в нуль.

Если все переменные периодически зависят от x^0, то мы получаем как следствие уравнений (24) соотношение

$$\int \mathfrak{N}\, dx^0 \equiv 0, \qquad (43)$$

где интеграл берется по периоду переменной x^0. По этой причине соотношение типа (42) мы называем «интегральным тождеством».

Некоторые свойства новых уравнений поля

1. В предыдущем разделе мы вывели уравнения поля и тождественные соотношения между ними, не пользуясь тем обстоятельством, что имеем дело с замкнутым пространством, или, иначе говоря, что наши переменные пóля являются периодическими по переменной x^0. Рассмотрение было основано только на уравнениях (1) и на требовании ковариантности уравнений поля относительно специальной группы.

Условие периодичности естественным образом приводит к уравнениям (1). Но эти уравнения с таким же успехом можно взять в качестве исходных, не выводя их из других предположений. Поэтому можно отказаться от условия периодичности и допустить более общие решения наших уравнений поля (37) и (38). Это связано с тем, что в уравнения не входят интегралы. Для теории, развитой в работе I, где интегралы играют важную роль, условие периодичности является существенным.

2. Уравнения (39) и (40) тесно связаны с уравнениями нашей предыдущей теории лишь в том случае, если постоянным α, входящим в уравнения (35) и (36) работы I, придать значения

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = -\frac{1}{4}. \qquad (44)$$

Тогда эти уравнения приводятся к следующему виду:

$$G^{ik} = 0, \qquad (45)$$

$$\int \sqrt{-g}G^i\, dx^0 = 0. \qquad (46)^5$$

[5] Мы имеем $\mathfrak{J}^k = -\sqrt{-g}G^k$.

Отсюда следует, что каждое периодическое решение уравнений (37) и (38) является a fortiori решением этих уравнений. Хотя выбор постоянных α не может быть ограничен соображениями инвариантности, набор (44) оказывается выделенным, поскольку лишь в этом случае на переменные пóля можно наложить более сильные требования: $G^i = 0$ вместо уравнений (46). Уравнения (35) и (36) работы I, вообще говоря, могут быть связаны только интегральными тождествами вида

$$\int \mathfrak{A}_i \, dx^0 \equiv 0. \tag{47}$$

Однако в случае, когда выполняются соотношения (44), уравнения связаны более сильным тождеством

$$\mathfrak{A}_i + (\sqrt{-g}G_i)_{,0} \equiv 0,$$

обычного типа [ср. тождество (39)]. Пятое тождество, выражающее закон сохранения электрического заряда, остается интегральным. Оно совпадает с уравнением (42).

3. Как известно из общей теории относительности (в обычной четырехмерной формулировке), каждая ковариантная система уравнений допускает четыре тождества. Поскольку преобразования координат, оставляющие уравнения поля инвариантными, содержат четыре произвольных функции от четырех переменных, на переменные пóля можно наложить четыре произвольных условия. Следовательно, к исходной системе уравнений можно присоединить еще четыре уравнения, которые не являются ковариантными. Расширенная система, содержащая больше уравнений, чем переменных, должна все же иметь решение. Отсюда следует существование четырех тождественных соотношений между уравнениями поля.

В случае системы уравнений, ковариантной относительно специальной группы, допустимые преобразования координат (4) и (5) содержат пять произвольных функций. Эти функции зависят лишь от четырех переменных. Мы все еще можем наложить пять условий на переменные пóля; правда эти условия являются более слабыми, чем если бы мы имели дело с полной группой всех пятимерных преобразований координат. Этим и объясняется тот факт, что мы, вообще говоря, получаем только интегральные тождества.

Эти соображения применимы лишь тогда, когда число уравнений не превышает числа переменных. В случае уравнений (24)—(26) тождества должны быть более сильными [тождество (22)]. Мы уже указывали, что более слабые тождества предыдущей теории содержатся в них [при специальном выборе (44) постоянных α].

Наконец, мы хотим более подробно рассмотреть вопрос о том, как из существования тождеств (39) можно доказать совместность уравнений поля

(37) и (38). Уравнения $G^{ik} = 0$ можно разрешить относительно вторых производных g_{mn} по x^0. Поэтому они допускают единственное решение при произвольном выборе поля $A_l\,(x^a)$ и при заданных начальных условиях (например, во всех точках многообразия $x^0 = 0$) для g_{mn} и $g_{mn,0}$. Величины G^i содержат только первые производные от g_{mn} по x^0. Следовательно, при заданном поле $A^l\,(x^a)$ уравнения $G^i = 0$ ограничивают выбор начальных значений для g_{mn} и $g_{mn,0}$ при $x^0 = 0$. Но если уравнения $G^i = 0$ выполняются при $x^0 = 0$, то они выполняются при всех значениях x^0. Это следует непосредственно из тождеств (39). Поскольку уравнения $G^{ik} = 0$ уже удовлетворены, уравнения $B_i = 0$ являются линейными однородными уравнениями первого порядка для G^k и допускают единственное решение $G^k = 0$, если начальные условия при $x^0 = 0$ имеют вид $G^k = 0$. Это доказывает совместность уравнений поля.

Заключение

В настоящей работе мы показали, что в рамках геометрии, постулированной в работе I, можно построить систему уравнений поля, состоящую только из дифференциальных уравнений. Требования ковариантности и однородности определяют эту систему однозначно. В этом определенное преимущество настоящей теории по сравнению с предшествующей, которая содержала произвольные постоянные.

Но именно однозначная определенность системы приводит к серьезным трудностям в физической интерпретации теории. Описание частиц несингулярными решениями уравнений поля представляется невозможным. Поскольку в уравнениях не содержится произвольных постоянных, теория должна приводить к электромагнитному и гравитационному полям одного порядка величины. Поэтому невозможно объяснить тот эмпирический факт, что электростатические силы, действующие между двумя частицами, намного превышают гравитационные. Это означает, что, основываясь на полученных уравнениях, нельзя построить непротиворечивую теорию материи.

Тем не менее представляется вполне вероятным, что формальные соотношения, полученные в настоящей работе, сохранят свое значение, даже несмотря на то, что их нельзя интерпретировать в прямом теоретикополевом смысле.

ДЕМОНСТРАЦИЯ НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ С НЕИСЧЕЗАЮЩЕЙ МАССОЙ, СВОБОДНЫХ ОТ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ *

Как известно, решение Шварцшильда для гравитационного поля становится сингулярным вблизи начала координат. Обычно считают невероятным, что в рамках обобщенной теории относительности чисто гравитационного поля может существовать решение, которое отвечало бы частице с конечной отличной от нуля полной массой и не имело бы сингулярностей.

Мы ограничимся здесь случаем таких решений в эвклидовом пространстве.

§ 1. Теорема о бесконечно близких решениях

Пусть g_{ik} представляет собой произвольное всюду регулярное поле, а $g_{ik} + \delta g_{ik}$ — другое поле, бесконечно мало отличающееся от первого. Пусть R_{ik} — один раз свернутый риманов тензор кривизны. Согласно Палатини, δR_{ik} можно записать в виде

$$\delta R_{ik} = -(\delta\Gamma^s_{ik})_{;s} + (\delta\Gamma^\alpha_{i\alpha})_{;k},$$

или

$$\delta R_{ik} = U^s_{ik;s}, \tag{1}$$

где

$$U^s_{ik} = -\delta\Gamma^s_{ik} + \frac{1}{2}(\delta\Gamma^b_{ib}\delta^s_k + \delta\Gamma^b_{kb}\delta^s_i) \tag{1a}$$

представляет собой тензор.

Из равенства (1) после свертывания с помощью метрического тензора и умножения на $\sqrt{-g}$ следует

$$\sqrt{-g}g^{ik}\delta R_{ik} = \sqrt{-g}g^{ik}U^s_{ik;s}. \tag{2}$$

---

* *Demonstration of the Non-existence of Gravitational Fields with a Non-vanishing Total Mass free Singularities.* Revista Univ. nac. Tucuman, ser. A, 1941, 2, N 1—2, 11—15.

Поскольку абсолютная производная метрического тензора (а также и производная его тензорной плотности) равна нулю, правая часть равенства (2) может быть записана в форме

$$(\sqrt{-g}g^{ik}U^s_{ik})_{;s}.$$

Так как даже выражение в скобках представляет собой тензорную плотность, то абсолютное дифференцирование может быть заменено обычным

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}g^{ik}\delta R_{ik} &= \mathfrak{U}^s_{,s}, \\ \mathfrak{U}^s &= \sqrt{-g}g^{ik}U^s_{ik}. \end{aligned} \tag{3}$$

Если теперь как исходное, так и варьированное поля удовлетворяют уравнениям гравитации

$$R_{ik} = 0,$$

то вариация δR_{ik} в (3) обращается в нуль. Следовательно, в этом случае мы получаем уравнение

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{U}^s_{,s} = 0, \\ &\mathfrak{U}^s = \sqrt{-g}g^{ik}\left[-\delta\Gamma^s_{ik} + \frac{1}{2}\left(\delta\Gamma^b_{ib}\delta^s_k + \delta\Gamma^b_{kb}\delta^s_i\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

§ 2. Применение доказанной теоремы к решениям с конечной полной массой, свободным от сингулярностей

Рассмотрим теперь свободное от сингулярностей решение гравитационных уравнений в эвклидовом пространстве (или пространстве Минковского). Будем предполагать, что решение либо не зависит от x_4, либо является периодическим (или квазипериодическим) относительно x_4. Такое решение представляет собой теоретическое представление тела (или системы тел), которое в среднем покоится относительно координатной системы.

На большом расстоянии от начала координат поле такой системы можно всегда заменить полем покоящейся массы, если только можно пренебречь волнами, излучаемыми системой. Такое асимптотическое представление оправдано, так как все члены в решении, не обладающие сферической симметрией (и не описывающие вóлны), убывают с расстоянием быстрее, чем члены, отвечающие полной массе.

Поэтому, такое асимптотическое поле можно описать с достаточной точностью с помощью соответствующего решения линеаризованных уравнений поля.

Если метрика пространства в отсутствие поля задается тензором

$$\eta_{ik} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

то для этого асимптотического решения мы можем положить

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \gamma_{ik}$$

и пренебречь в уравнениях поля членами, квадратичными по γ. Решение этих уравнений будет иметь вид

$$\gamma_{st} = -\frac{2m}{r}\delta_{st}, \quad \gamma_{44} = -\frac{2m}{r} \tag{6}$$

(s, $t = 1, 2, 3$; δ — символ Кронекера). Это и есть искомое асимптотическое решение, в котором $m \neq 0$.

Для этого асимптотического решения мы получаем из (4) и (6), ограничиваясь членами, линейными по m:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{U}^s &= -2\delta m \left(\frac{1}{r}\right)_{,s}, \\ \mathfrak{U}^4 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Эти уравнения справедливы для бесконечно близких асимптотических решений. Однако уравнения (4) справедливы строго во всей области.

Проинтегрируем теперь уравнения (4) по четырехмерной области, ограниченной в пространстве трехмерной сферой с очень большим радиусом R и во времени заданными значениями 0 и T. С четырехмерной точки зрения эта область представляет собой цилиндр, основания которого задаются уравнениями: $x_4 = 0$ и $x_4 = T$. Поэтому интеграл преобразуется по теореме Гаусса в интеграл по 3-мерной поверхности цилиндра от векторной плотности $\mathfrak{U}$.

Рассмотрим сначала вклады, которые вносят в интеграл «основания» $x_4 = 0$ и $x_4 = T$. Если решение, статическое во всем пространстве (либо, соответственно, стационарное или периодическое с периодом T), то эти вклады в точности компенсируют друг друга. Если решение квазипериодично, то вклад оснований цилиндра будет лишь осциллировать квазипериодично с T, но не будет возрастать с T неограниченно.

Теперь рассмотрим интеграл по боковой поверхности цилиндра. При вычислении этой части мы должны будем использовать асимптотическое решение и, следовательно, формулы (4а). Интегрирование дает

$$8\pi\delta m T.$$

Эта часть растет с T неограниченно: поэтому, чем больше T, до которого мы интегрируем, тем более оправдывается пренебрежение вкладом оснований по сравнению с вкладом от боковой поверхности. Так как интеграл, согласно уравнениям (4), равен нулю, то отсюда следует

$$\delta m = 0. \tag{7}$$

Результат: два бесконечно близкие решения без сингулярностей имеют обязательно одну и ту же полную массу m.

§ 3. Бесконечно близкие подобные решения

Дифференциальные уравнения

$$R_{ik} = 0$$

состоят из членов, линейных по вторым производным от переменных по́ля или членов, квадратичных по первым производным. Отсюда следует эта теорема.

Если поле $g_{ik}(x_s)$ является решением дифференциальных уравнений, то $g_{ik}(cx_s)$, где c — постоянная, также есть решение («подобные решения»). Это справедливо, в частности, и для асимптотических решений.

Поэтому, если (6) есть решение, отвечающее первому полю, то существует и второе решение, которое асимптотически будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \gamma^*_{st} &= -\frac{2m}{cr}\,\delta_{st}, \\ \gamma^*_{44} &= -\frac{2m}{cr}. \end{aligned}\right\} \tag{6a}$$

Это тоже есть асимптотическое решение типа (6), но отвечающее массе всей системы, равной m/c. Если исходное решение было свободно от сингулярностей, то и любое подобное решение будет от них свободно.

Если мы выберем c бесконечно мало отличающимся от 1, то предыдущее утверждение сводится к следующему: для каждого решения, в частности для решения с массой m, свободного от сингулярностей, существует бесконечно близкое (подобное) решение, свободное от сингулярностей, с бесконечно мало отличающейся массой

$$\delta m \neq 0. \tag{7a}$$

§ 4. Заключение

Предполагая существование решения рассматриваемого типа, свободного от сингулярностей, мы пришли к противоречию.

Согласно (7), для такого решения не может существовать другого решения, бесконечно близкого и отвечающего другой массе. Согласно (7а), всегда должно существовать близкое решение (подобное исходному) с отличной массой.

Это противоречие могло возникнуть только из-за того, что была принята гипотеза о существовании решения, свободного от сингулярностей и принадлежащего массе, отличной от нуля.

Наблюдение. Противоречие исчезает, если мы отбросим гипотезу о несуществовании сингулярностей. Действительно, в этом случае уравнение (4) уже несправедливо всюду, и поэтому мы не можем заключить, что интеграл по поверхности обращается в нуль.

Кроме следующей, 123-й статьи, см. также кн.: A. Lichnerowicz. Theories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnetisme. Paris, 1955.

НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ*

(Совместно с В. Паули)

Показано, что уравнения поля релятивистской теории тяготения и ее пятимерного обобщения не допускают существования никакого регулярного стационарного решения, которое описывало бы поле отличной от нуля полной массы или заряда.

Введение

Некоторое время тому назад один из нас доказал [1], что не существует решений уравнений гравитационного поля $R_{ik} = 0$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) поле стационарно (т. е. компоненты g_{ik} не зависят от x^4);

2) оно не имеет особых точек;

3) оно «погружено» в эвклидово пространство (типа Минковского) и при больших значениях r (r — расстояние от начала пространственной системы координат) g_{44} имеет асимптотический вид:

$$g_{44} = -1 + \frac{\mu}{r},$$

где $\mu \neq 0$.

Третье условие означает, что полная гравитирующая масса поля отлична от нуля.

Следующие ниже соображения побудили нас вновь проанализировать это доказательство и обобщить на случай бóльшего числа измерений.

При попытке построить единую теорию гравитационного и электромагнитного полей нельзя не увидеть некоторой доли истины в пятимерной теории Калуцы. Однако ее обоснование неудовлетворительно постольку, поскольку в группе допустимых преобразований координат пятая, про-

* *Non-existence of Regular Stationary Solutions of Relativistic Field Equations.* (With W. Pauli). Ann. Math., 1943, 44, 131—137. (Перепечатано в W. Pauli. Coll. Sci. Paper, v. 2, 1964.— *Ред.*)

[1] A. Einstein. Rev. Univ. nac. Tucuman, 1941, A 2, 11. (Статья 122).

странственноподобная координата преобразуется совсем иначе, чем остальные. Следовательно, компоненты электромагнитного поля преобразуются независимо от компонент гравитационного поля, и оба поля оказываются объединенными лишь кажущимся образом. Возникает вопрос, можно ли построить теорию на основе полной группы пятимерных точечных преобразований, не жертвуя ее главными достоинствами.

Это может показаться невозможным, так как, согласно всему нашему опыту, физический континуум имеет $3+1$, а не $4+1$ измерений, поскольку его объекты имеют три, а не четыре пространственных измерения. Однако можно представить себе, что эта трудность могла бы быть преодолена следующим образом. Предположим, что в такой теории поля, соответствующие несингулярным решениям, определяют не в точках, а на линиях четырехмерного пространства. Тогда геометрическая конфигурация нескольких сосуществующих полей такого типа более или менее напоминала бы конфигурацию объектов трехмерного пространства.

В связи с этим мы должны исследовать вопрос о том, будут ли в пятимерном метрическом континууме (с сигнатурой 1) уравнения

$$R_{ik} = 0$$

допускать несингулярные стационарные решения с полем g_{ik}, имеющим асимптотический вид:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & D \\ 0 & 0 & 0 & D & C \end{bmatrix},$$

где по крайней мере одна из величин A, B, C, D имеет вид

$$\pm 1 + \frac{\text{const}}{r}$$

с отличной от нуля постоянной. Это асимптотический вид поля, описывающего частицу, у которой по крайней мере одна из двух масс, электрическая или весомая, отлична от нуля.

При обсуждении уравнений поля В. Баргман [2] показал, что не существует *сферически симметричных* решений такого типа. Ниже мы докажем, что регулярные решения требуемого вида вообще не существуют вне зависимости от каких-либо предположений о характере симметрии поля (в областях с конечной напряженностью поля).

[2] V. Bargmann. Частное сообщение.

Это доказательство показывает, почему всегда возникают особенности при попытке описывать материальные частицы решениями уравнений поля, основанных на тензоре Римана.

1. Согласно Палатини, вариация свернутого риманова тензора кривизны [3]

$$R_{IK} = \Gamma^{S}_{IS,K} - \Gamma^{S}_{IK,S} + \Gamma^{R}_{SI}\Gamma^{S}_{RK} - \Gamma^{R}_{IK}\Gamma^{S}_{RS} \tag{1}$$

может быть записана в виде

$$\delta R_{IK} = (\delta\Gamma^{S}_{IS})_{;K} - (\delta\Gamma^{S}_{IK})_{;S}, \tag{2}$$

или

$$\delta R_{IK} = U^{S}_{IK;S}, \tag{3}$$

где

$$U^{S}_{IK} = -\delta\Gamma^{S}_{IK} + \frac{1}{2}(\delta\Gamma^{A}_{IA}\delta^{S}_{K} + \delta\Gamma^{A}_{KA}\delta^{S}_{I}). \tag{4}$$

Это приводит к равенству

$$\sqrt{|g|}\,g^{IK}\delta R_{IK} = \sqrt{|g|}\,g^{IK}U^{S}_{IK;S}, \tag{5}$$

где $|g|$ — абсолютное значение определителя ковариантного метрического тензора. Поскольку ковариантные производные метрического тензора и его плотности равны нулю, мы можем записать правую часть в виде

$$(\sqrt{|g|}\,g^{IK}U^{S}_{IK})_{;S}$$

и, наконец, заменить ковариантное дифференцирование обычным; при этом выражение в скобках остается контравариантной векторной плотностью.

Отсюда получаем

$$\sqrt{|g|}\,g^{IK}\delta R_{IK} = -\mathfrak{A}^{S}_{,S}, \tag{6}$$

где

$$\mathfrak{A}^{S} = \sqrt{|g|}\,(g^{IK}\delta\Gamma^{S}_{IK} - g^{AS}\delta\Gamma^{B}_{AB}). \tag{7}$$

Если как первоначальное, так и проварьированное поля удовлетворяют гравитационным уравнениям $R_{IK} = 0$, то величины δR_{IK} в соотношении (6) обращаются в нуль, и мы получаем

$$\mathfrak{A}^{S}_{,S} = 0. \tag{6a}$$

. . . .

[3] Индексы, обозначенные прописными латинскими буквами, принимают все значения $1, \ldots, n$, где n—число измерений рассматриваемого пространства. Обычное дифференцирование обозначается запятой перед соответствующим индексом, а ковариантное дифференцирование — точкой с запятой.

Это справедливо всегда, когда варьирование поля обусловлено бесконечно малым изменением системы координат. Производя такое варьирование, мы должны сравнивать значения Γ или R не в одной и той же мировой точке, а должны *сместить* эту мировую точку так, чтобы скомпенсировать вариацию ее координат, обусловленную изменением системы координат. Только тогда можно поменять местами варьирование и дифференцирование, так что мы получим, например,

$$(\delta\Gamma^S_{IK})_{,L} = \delta(\Gamma^S_{IK,L}).$$

Для вариации, обусловленной преобразованием координат,

$$x^{I'} = x^I + \xi^I(x),$$

мы получим, сохраняя только члены первого порядка относительно ξ^I,

$$\delta\Gamma^4_{IK} = -\xi^4_{,IK} + \xi^4_{,R}\Gamma^R_{IK} - \xi^R_{,I}\Gamma^4_{RK} - \xi^R_{,K}\Gamma^4_{RI} - \xi^R\Gamma^4_{IK,R}. \tag{8}$$

Если подставить выражение (8) для $\delta\Gamma$ в соотношение (7), то, как следует из уравнений поля $R_{IK} = 0$, соотношения (6а) должны оставаться справедливыми для произвольных функций ξ^I.

2. Разложим теперь n-мерный континуум координат x^I на обычное трехмерное пространство координат x^i (здесь латинские индексы принимают значения 1, 2, 3) и на подпространство остальных координат x^ρ (греческие индексы принимают значения 4,..., n). Будем считать, что величины g_{IK} не зависят от координат x^ρ:

$$\frac{\partial g_{IK}}{\partial x^\rho} = 0. \tag{9}$$

В физической интерпретации этого формализма x^4 означает временну́ю координату, а x^5 — пятую координату, введенную в теории *Калуцы* (в которой метрика пространственноподобна относительно этой пятой координаты). Однако для последующих математических рассуждений более удобно не ограничивать ни число измерений пространства, ни сигнатуру его метрики, за исключением допущения, что метрика трехмерного пространства положительно определенна.

Рассмотрим теперь выводы из соотношений (6а) для тех вариаций (8), которые не нарушают условия (9) (условия цилиндричности). Тогда в соотношениях (6а) должны быть сохранены только члены с $S = i$. Пользуясь теоремой Гаусса, мы заключаем из равенства $\mathfrak{A}^i_{,i} = 0$, что

$$\oint \mathfrak{A}^i n_i\, df = 0, \tag{10}$$

если интеграл берется по замкнутой двумерной поверхности, не охватывающей никаких особых точек поля. Здесь n_i — ковариантные компоненты единичного вектора, нормального к этой поверхности. В том случае, когда существуют особые точки метрического тензора, мы рассматриваем две различных замкнутых поверхности F_1 и F_2 в качестве внутренней и внешней границ трехмерной области, не имеющей особых точек. Тогда из теоремы Гаусса следует

$$\oint_{F_1} \mathfrak{A}^i n_i \, df = \oint_{F_2} \mathfrak{A}^i n_i \, df. \tag{10a}$$

Существуют два различных типа бесконечно малых преобразований координат, оставляющих инвариантным условие стационарности поля [условие (9)]. Преобразования *первого типа* характеризуются функциями ξ^I, которые *не зависят* от x^ρ, но могут зависеть произвольным образом от x^i. В этом случае мы можем выбрать ξ^I вместе с их первыми и вторыми производными равными нулю на внутренней поверхности F_1, так что $\mathfrak{A}^i$ также обращаются в нуль на F_1. Следовательно, для этого типа вариаций более сильное соотношение (10) справедливо даже тогда, когда поверхность охватывает особые точки поля, если только на самой поверхности нет особых точек.

Преобразования *второго типа*, не нарушающие стационарного характера поля, приводят к интегральной теореме, которая отбирает *регулярные* решения уравнений поля $R_{IK} = 0$. Эти преобразования определяются формулами

$$\xi^i = 0, \qquad \xi^\rho = c^\rho_\sigma x^\sigma \tag{11}$$

с постоянными коэффициентами c^ρ_σ. Тогда из соотношений (8) и (9) следует, что

$$\left.\begin{aligned} &\delta\Gamma^l_{ik} = 0, \quad \delta\Gamma^B_{iB} = \delta\Gamma^\rho_{i\rho} = 0, \quad \delta\Gamma^B_{\rho B} = \delta\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} = 0, \\ &\delta\Gamma^i_{\rho\sigma} = -(c^\tau_\rho \Gamma^i_{\tau\sigma} + c^\tau_\sigma \Gamma^i_{\rho\tau}), \qquad \delta\Gamma^l_{i\rho} = -c^\tau_\rho \Gamma^l_{i\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Подставляя эти выражения в формулу (7), получаем

$$\mathfrak{A}^i = -2c^\tau_\rho \sqrt{|g|}\, g^{\rho A} \Gamma^i_{A\tau}.$$

Поскольку коэффициенты c^τ_ρ могут быть выбраны произвольно, уравнение (6а), с учетом уравнений поля и стационарного характера решения, означает, что

$$(\sqrt{|g|}\, g^{\rho A} \Gamma^i_{A\sigma})_{,i} = 0 \tag{13}$$

для всех значений ρ и σ. Для *несингулярных* решений это приводит к равенству

$$\oint \sqrt{|g|}\, g^{\rho A} \Gamma^i_{A\sigma} n_i \, df = 0 \tag{13a}$$

по аналогии с (10), тогда как сингулярные решения удовлетворяют только более слабому условию типа (10а).

3. Чтобы использовать эту теорему, сделаем допущение, что рассматриваемое поле g_{IK} асимптотически стремится к полю эвклидова пространства. Поэтому на больших расстояниях от начала координат мы можем положить

$$g_{IK} = \overset{\circ}{g}_{IK} + \gamma_{IK}. \tag{14}$$

Здесь постоянные $\overset{\circ}{g}_{IK}$ могут быть приведены к виду $\delta_{IK}\varepsilon_I$ (суммирования нет!), причем $\varepsilon_i = +1$, $\varepsilon_\rho = \pm 1$; величины γ_{IK} считаются малыми первого порядка. Тогда определитель g равен

$$g = \left(\prod_I \varepsilon_I\right) \cdot (1 + \gamma), \tag{15}$$

где

$$\gamma = \overset{\circ}{g}{}^{IK} \gamma_{IK} = \sum_I \varepsilon_I \gamma_{II}. \tag{15a}$$

Сохраняя только члены первого порядка, из формулы (1), в силу стационарного характера поля, заключаем, что уравнения $R_{IK} = 0$ принимают вид

$$\gamma_{IK,\,ss} - \gamma_{Is,\,sK} - \gamma_{Ks,\,sI} + \gamma_{,\,IK} = 0, \tag{16}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{ik,\,ss} - \gamma_{is,\,sk} - \gamma_{ks,\,si} + \gamma_{,ik} = 0,\\ \gamma_{i\rho,\,ss} - \gamma_{\rho s,\,si} = 0, \qquad \gamma_{\rho\sigma,\,ss} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16a}$$

Как известно, систему координат всегда можно выбрать таким образом, что

$$\gamma_{Is,s} - \frac{1}{2}\gamma_{,I} = 0, \tag{17}$$

или

$$\gamma_{is,\,s} - \frac{1}{2}\gamma_{,\,i} = 0, \qquad \gamma_{\rho s,\,s} = 0. \tag{17a}$$

Тогда уравнение (16) сводится к уравнению Лапласа

$$\gamma_{IK,\,ss} = 0. \tag{18}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только те члены, которые на бесконечности убывают не быстрее, чем r^{-1}, где $r^2 = \Sigma_i (x^i)^2$. Следовательно, мы имеем

$$\gamma_{IK} = \frac{m_{IK}}{r}. \tag{19}$$

Так как

$$\gamma = \frac{(\sum_l \varepsilon_l m_{ll})}{r} = \frac{(\sum_i m_{ii} + \sum_\rho \varepsilon_\rho m_{\rho\rho})}{r},$$

то из соотношения (17а) мы заключаем, что

$$m_{ik} = \frac{1}{2}\delta_{ik}\Big(\sum_j m_{jj} + \sum_\rho \varepsilon_\rho m_{\rho\rho}\Big), \qquad m_{i\rho} = 0,$$

или

$$m_{i\rho} = 0, \qquad m_{ik} = m\delta_{ik}, \qquad m + \sum_\rho \varepsilon_\rho m_{\rho\rho} = 0. \tag{20}$$

Отсюда, пренебрегая членами порядка выше первого, имеем

$$g_{ik} = \delta_{ik}\left(1 + \frac{m}{r}\right), \qquad g_{i\rho} = 0, \qquad g_{\rho\sigma} = \varepsilon_\rho \delta_{\rho\sigma} + \frac{m_{\rho\sigma}}{r}, \tag{21}$$

где m удовлетворяет последнему из уравнений (20). С помощью этого результата можно вычислить интеграл (13а) для достаточно большой сферы. Поскольку на поверхности сферы можно положить

$$\Gamma^i_{\rho\sigma} = \Gamma_{i,\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\gamma_{\rho\sigma,i} = -\frac{1}{2}m_{\rho\sigma}\left(\frac{1}{r}\right)_{,i} = \frac{1}{2}m_{\rho\sigma}\frac{x^i}{r^3} = \frac{1}{2}m_{\rho\sigma}\frac{n_i}{r^2},$$

окончательно получаем

$$\oint \sqrt{|g|}\, g^{\rho A}\Gamma^i_{A\sigma} n_i\, df = 2\pi\varepsilon_\rho m_{\rho\sigma}. \tag{22}$$

Согласно этому равенству, интегральные теоремы (13а) означают, что

$$m_{\rho\sigma} = 0 \quad \text{при всех } \rho \text{ и } \sigma \tag{23}$$

для любого решения, не зависящего от x^ρ, всюду регулярного и асимптотически стремящегося к эвклидовой метрике. Кроме того, из уравнений (20) получается

$$m = 0. \tag{23a}$$

Это показывает, что для такого регулярного решения уравнений поля $R_{IK} = 0$ отклонения компонент g_{IK} от эвклидовых (типа Минковского) $\overset{\circ}{g}_{IK}$ должны убывать быстрее чем $\frac{1}{r}$ для всех значений I и K. Если бы вообще существовало решение, отличное от решения с эвклидовой метрикой, то оно не могло бы описывать частицы с *отличной от нуля массой или зарядом*, что и утверждалось во Введении.

Дополнение

В частном случае четырехмерного континуума Р. Серини[4] показал (правда, при ограничивающем предположении, что компоненты g_{44} всюду равны нулю), что, за исключением случая эвклидовой метрики, не существует регулярного решения требуемого вида. Его доказательство основано на том, что при указанном предположении для равенства (13) мы получаем

$$(\sqrt{|g|}\, g^{44} g^{ik} g_{44,\,k})_{,\,i} = 0.$$

Умножая это равенство на $-g_{44}$, интегрируя по трехмерной области и учитывая, что $g^{44} g_{44} = -1$, находим

$$\int \sqrt{|g|}\, g^{44} g^{ik} g_{44,i} g_{44,\,k}\, d^3x + \oint \sqrt{|g|}\, g^{ik} g_{44,\,k} n_i\, df = 0.$$

Согласно равенству (13а), интеграл по поверхности стремится к 0 при удалении поверхности на бесконечность, так как при этом $g_{44} \to -1$, $g_{ik} \to \delta_{ik}$. Поскольку $g^{44} \neq 0$, $g \neq 0$ и форма $g^{ik} x_i x_k$ положительно определенна, обращение в нуль интеграла по объему (распространенного на все пространство) означает, что $g_{44} = \text{const}$. Однако для трехмерного пространства уравнения поля $R_{ik} = 0$ эквивалентны требованию обращения в нуль несвернутого риманова тензора кривизны. Следовательно, они означают, что пространство эвклидово. Что же касается тех стационарных решений уравнений поля, для которых величины γ_{IK} (т. е. отклонения компонент g_{IK} от постоянных значений $\overset{\circ}{g}_{IK}$) убывают быстрее, чем $\frac{1}{r}$, то не представляется возможным рассмотреть их с помощью методов настоящей статьи, т. е. с помощью интегральных теорем и линеаризованных уравнений поля. Для исследования этих решений необходимо подробнее рассмотреть более высокие приближения или точные уравнения поля.

Поступила 4 января 1943 г.

---

[4] R. Serini. Atti Acad. Lincei (5), 1918, 27^1, 235.