АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ

В ЧЕТЫРЕХ ТОМАХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

И. Е. ТАММА,
Я. А. СМОРОДИНСКОГО,
Б. Г. КУЗНЕЦОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1966

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ

II

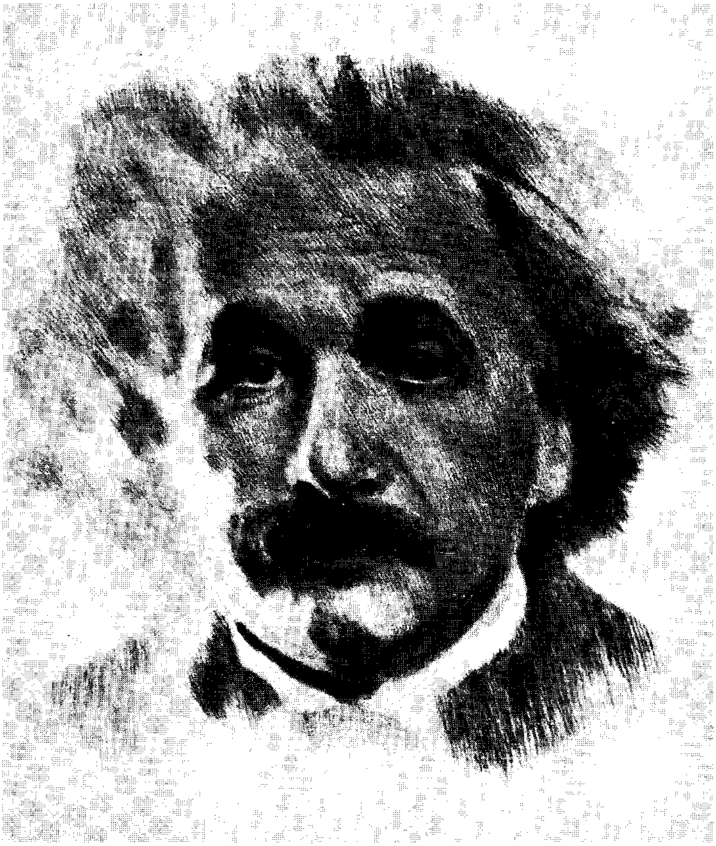
РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1921–1955

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1966

2—3—2

Подписное издание



A. Einstein

60

СУЩНОСТЬ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Лекция I

ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ В ДОРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ФИЗИКЕ

Теория относительности теснейшим образом связана с учением о пространстве и времени. Я начну поэтому с краткого исследования происхождения наших представлений о пространстве и времени, хотя отдаю себе отчет в том, что при этом касаюсь спорного предмета. Целью всякой науки, будь то естествознание или психология, является согласование между собой наших ощущений и сведение их в логическую систему. Как связаны наши привычные представления о пространстве и времени с характером наших ощущений?

Ощущения человека предстают перед нами как некоторая последовательность событий; в этой последовательности отдельные события, возникающие в нашей памяти, представляются нам упорядоченными критериями «раньше» и «позже», которые не удается подвергнуть дальнейшему анализу. Таким образом, для индивидуума существует «свое», или субъективное время («Ich-Zeit»). Само по себе оно не поддается измерению. Я могу, конечно, сопоставить события с числами таким образом, чтобы более позднему событию соответствовало большее число, но характер такого сопоставления остается совершенно произвольным. Я могу установить такое соответствие при помощи часов, сравнивая порядок событий, устанавливаемых часами, с порядком в данной последовательности событий. Под часами мы понимаем некоторый объект, воспроизводящий последователь-

* *The meaning of relativity*. Princeton Univ. Press. Princeton, N. Y., 1921. (Четыре лекции [Stafford Little Lectures], прочитанные Эйнштейном в Принстонском университете в мае 1921 г. Чтобы не нарушать хронологический порядок, приложения, добавленные при последующих изданиях, помещены ниже, среди современных им работ. (Статьи 126, 141 и 146).— *Прим. ред.*).

ность событий, которые можно пересчитать, и обладающий другими свойствами, о которых будет говориться ниже.

При помощи речи различные люди могут до некоторой степени сравнивать свои ощущения. При этом выясняется, что некоторые чувственные восприятия различных индивидуумов находятся в соответствии друг с другом, тогда как для других чувственных восприятий такого соответствия установить нельзя. Мы привыкли считать реальными такие чувственные восприятия, которые совпадают у различных индивидуумов и которые являются поэтому до известной степени внеличными. С такими чувственными восприятиями имеют дело естественные науки и, в частности, наиболее фундаментальная из них — физика. Представление о физическом теле, в частности о твердом теле, является относительно устойчивым комплексом таких чувственных восприятий. Часы — тоже тело или система в указанном смысле, но они обладают тем дополнительным свойством, что последовательность отсчитываемых ими событий состоит из элементов, которые можно рассматривать как равные.

Наши понятия и системы понятий оправданы лишь постольку, поскольку они служат для выражения комплексов наших ощущений; вне этого они неправомерны. Я убежден, что философы оказали пагубное влияние на развитие научной мысли, перенеся некоторые фундаментальные понятия из области опыта, где они находятся под нашим контролем, на недосягаемые высоты априорности. Ибо, если бы даже оказалось, что мир идей нельзя вывести из опыта логическим путем, а что в определенных пределах этот мир есть порождение человеческого разума, без которого никакая наука невозможна, все же он столь же мало был бы независим от природы наших ощущений, как одежда — от формы человеческого тела. Это в особенности справедливо по отношению к понятиям пространства и времени. Под давлением фактов физики были вынуждены низвергнуть их с Олимпа априорности, чтобы довести их до состояния, пригодного для использования.

Мы подходим теперь к нашему пониманию пространства и суждения о нем. Здесь также важно обратить особое внимание на отношение опыта к нашим понятиям. Мне кажется, что Пуанкаре ясно видел перед собой истину, когда писал свою книгу «Наука и гипотеза» [1]. Среди всех изменений, которые мы можем обнаружить в твердом теле, выделяются своей простотой те, которые можно произвести обратимым образом при помощи произвольного движения тела; Пуанкаре называет их изменениями положения. При помощи простых изменений положения мы можем привести два тела в соприкосновение. Теоремы конгруентности, имеющие фунда-

[1] А. Пуанкаре. Наука и гипотеза. СПб., 1906. Перевод со 2-го, исправленного французского издания.— *Прим. ред.*

ментальное значение в геометрии, выражают законы, управляющие этими изменениями положения. Для понятия пространства, по-видимому, существенно следующее: прикладывая тела B, C,... к телу A, мы можем образовывать новые тела; мы говорим, что мы *продолжаем* тело A. Тело A можно продолжить так, что оно соприкоснется с любым другим телом X. Совокупность всех продолжений тела A мы можем назвать «пространством тела A». Тогда справедливо утверждение, что все тела находятся в «пространстве (произвольно выбранного) тела A». В этом смысле мы не вправе говорить о пространстве вообще, а только о «пространстве, относящемся к телу A». Земная кора играет настолько важную роль в нашей повседневной жизни при определении относительных положений тел, что это привело к абстрактному понятию пространства, которое, конечно, не выдерживает критики. Чтобы освободиться от этой фатальной ошибки, мы будем говорить только о «телах отсчета» или «пространстве отсчета». Как мы увидим дальше, лишь в общей теории относительности потребуется уточнение этих понятий.

Я не стану подробно останавливаться на свойствах пространства отсчета, которые приводят нас к пониманию точки как элемента пространства, а пространства — как континуума. Я не буду также пытаться глубже анализировать те свойства пространства, которые оправдывают представление о непрерывных последовательностях точек, или линиях. Если считать эти понятия и их связь с существующими твердыми телами заданными, то легко выразить, чтó мы подразумеваем под трехмерностью пространства. Каждой точке можно поставить в соответствие три числа x_1, x_2, x_3 (координаты) таким образом, чтобы это соответствие было взаимно однозначным, и x_1, x_2 и x_3 менялись бы непрерывно, когда точка пробегает непрерывную последовательность точек (линию).

В дорелятивистской физике считалось, что законы ориентации абсолютно твердых тел находятся в соответствии с эвклидовой геометрией. Смысл этого можно выразить следующим образом. Две точки, отмеченные на твердом теле, определяют *интервал*. Такой интервал можно в нашем пространстве отсчета ориентировать в состоянии покоя множеством способов. Если теперь возможно сопоставить точки пространства с координатами x_1, x_2, x_3 так, чтобы разности координат Δx_1, Δx_2, Δx_3 двух концов интервала образовали одинаковую сумму квадратов

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \tag{1}$$

при любой ориентации интервала, то пространство отсчета называется эвклидовым, а координаты — декартовыми [2]. В действительности доста-

[2] Это соотношение должно выполняться при произвольном выборе начала координат и направления интервала (т. е. значения отношений $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$).

точно, чтобы это допущение было справедливо в предельном случае бесконечно малого интервала. В высказанном допущении содержится нечто более общее и фундаментальное по своему значению; на это мы должны обратить внимание читателя ввиду особой важности вопроса. Во-первых, предполагается, что абсолютно твердое тело можно перемещать произвольно. Во-вторых, принимается, что поведение абсолютно твердого тела по отношению к поворотам не зависит от вещества тела и изменений его положения в том смысле, что если два интервала однажды могли быть совмещены, то они всегда и всюду могут быть совмещены снова. Оба эти предположения, имеющие фундаментальное значение для геометрии и особенно для физических измерений, естественно, вытекают из опыта. В общей теории относительности достаточно предположить их справедливость для тел и пространств отсчета, бесконечно малых по сравнению с астрономическими размерами.

Величину s мы называем длиной интервала. Для однозначного определения этой величины необходимо зафиксировать произвольно длину какого-либо определенного интервала; например, мы можем положить ее равной 1 (единица длины). Тогда можно определить длины всех остальных интервалов. Если мы предположим, что x_ν линейно зависят от некоторого параметра λ:

$$x_\nu = a_\nu + \lambda b_\nu,$$

то получим линию, которая обладает всеми свойствами прямой линии эвклидовой геометрии. В частности, легко видеть, что, откладывая n раз, интервал s вдоль прямой линии, мы получаем интервал длиной $n \cdot s$. Длина, таким образом, означает результат измерения, выполненного вдоль прямой линии при помощи единичного измерительного стержня. Как будет видно из дальнейшего, понятие длины в той же мере не зависит от системы координат, как и понятие прямой линии.

Мы подходим теперь к цепи рассуждений, играющих похожие роли как в специальной, так и в общей теории относительности. Поставим вопрос: существуют ли, кроме декартовых координат, которыми мы пользовались, другие эквивалентные системы координат? Интервал имеет физический смысл независимо от выбора координат; то же верно и относительно сферической поверхности, которую можно получить как геометрическое место концов равных интервалов, отложенных от некоторой произвольной точки нашего пространства отсчета. Если x_ν и x'_ν ($\nu = 1, 2, 3$) являются декартовыми координатами в нашем пространстве отсчета, то сферическая поверхность будет задаваться в этих двух системах координат уравнениями:

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \text{const}, \tag{2}$$

$$\sum \Delta x_\nu'^2 = \text{const}. \tag{2a}$$

Как должны выражаться x'_ν через x_ν, чтобы уравнения (2) и (2a) были эквивалентны? Рассматривая x'_ν как функции от x_ν, мы можем записать, согласно теореме Тейлора, для малых значений Δx_ν:

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha} \Delta x_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'_\nu}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} \Delta x_\alpha \Delta x_\beta + \ldots$$

Если подставим это соотношение в (2a) и сравним с (1), то увидим, что x'_ν должны быть линейными функциями от x_ν. Если, поэтому, положить

$$x'_\nu = a_\nu + \sum_\alpha b_{\nu\alpha} x_\alpha \tag{3}$$

или

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha b_{\nu\alpha} \Delta x_\alpha, \tag{3a}$$

то эквивалентность уравнений (2) и (2a) выразится в форме условия:

$$\sum \Delta x'^2_\nu = \lambda \sum \Delta x^2_\nu \qquad (\lambda \text{ не зависит от } \Delta x_\nu). \tag{2б}$$

Отсюда следует, что величина λ должна быть постоянной. Если мы положим $\lambda = 1$, то (2б) и (3a) приводят к условиям

$$\sum_\nu b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

где $\delta_{\alpha\beta} = 1$, если $\alpha = \beta$ и $\delta_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$. Условия (4) называются условиями ортогональности, а преобразования (3) и (4) — линейными ортогональными преобразованиями. Если мы потребуем, чтобы $s^2 = \Sigma \Delta x^2_\nu$ равнялось квадрату длины во всякой системе координат, и если при измерении каждый раз будем пользоваться одним и тем же единичным масштабом, то λ должно быть равно 1. По этой причине линейные ортогональные преобразования являются единственными, при помощи которых мы можем переходить в нашем пространстве отсчета от одних декартовых координат к другим. Мы видим, что при таких преобразованиях уравнения прямой переходят также в уравнения прямой. Обращая равенства (3a) путем умножения обеих частей его на $b_{\nu\beta}$ и суммирования по всем ν, получаем

$$\sum_\nu b_{\nu\beta} \Delta x'_\nu = \sum_{\nu\alpha} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} \Delta x_\alpha = \sum_\alpha \delta_{\alpha\beta} \Delta x_\alpha = \Delta x_\beta. \tag{5}$$

Те же самые коэффициенты b определяют также обратную подстановку Δx_ν. Геометрически $b_{\nu\alpha}$ представляет собой косинус угла между осями x'_ν и x_α.

Подводя итог, мы можем сказать, что в эвклидовой геометрии существуют (в данном пространстве отсчета) избранные системы координат, а именно: декартовы системы, которые переходят одна в другую при линейных ортогональных преобразованиях. Расстояние s между двумя точками нашего пространства отсчета, измеренное при помощи измерительного стержня, выражается в таких координатах особенно просто. Всю геометрию можно построить на основе понятия расстояния. В нашем изложении геометрия связана с реальными предметами (твердыми телами) и ее теоремы, справедливость которых можно доказать или опровергнуть, являются утверждениями относительно поведения этих предметов.

Обычно принято изучать геометрию, отвлекаясь от какой-либо связи между ее понятиями и опытом. Есть свои преимущества в выделении вещей чисто логических и независимых от опыта, который по своей природе неполон. Это вполне может удовлетворить чистого математика. Он удовлетворен, если может вывести свои теоремы из аксиом корректно, т. е. без логических ошибок. Вопрос о том, справедлива ли эвклидова геометрия или нет, его не касается. Но для наших целей необходимо связать основные понятия геометрии с объектами природы; без такой связи геометрия не имеет для физика никакой цены. Физика интересует вопрос, верны теоремы геометрии или нет? То, что эвклидова геометрия с этой точки зрения содержит нечто большее, чем простые выводы, полученные из определений логическим путем, видно из следующего простого рассуждения.

Между n точками пространства существуют $\frac{n(n-1)}{2}$ расстояний $s_{\mu\nu}$; $s_{\mu\nu}$ и $3n$ координат связаны соотношениями

$$s_{\mu\nu}^2 = (x_{1(\mu)} - x_{1(\nu)})^2 + (x_{2(\mu)} - x_{2(\nu)})^2 + \dots$$

Из этих $\frac{n(n-1)}{2}$ соотношений можно исключить $3n$ координат, и тогда для $s_{\mu\nu}$ останется, по крайней мере, $\frac{n(n-1)}{2} - 3n$ соотношений [3]. Поскольку $s_{\mu\nu}$ — измеримые величины и по определению не зависят друг от друга, эти соотношения между величинами $s_{\mu\nu}$ не являются необходимыми априори.

Из предыдущего видно, что преобразования (3), (4) имеют фундаментальное значение в эвклидовой геометрии, определяя переход от одной декартовой системы координат к другой. Декартовы координаты характеризуются тем свойством, что с их помощью измеримое расстояние между двумя точками s выражается соотношением

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2.$$

[3] На самом деле останется $\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$ соотношений.

Если $K_{(x_\nu)}$ и $K'_{(x'_\nu)}$ — две системы декартовых координат, то

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \sum \Delta x_\nu'^2.$$

Правая часть этого соотношения тождественно равна левой в силу уравнений линейного ортогонального преобразования; при этом правая часть отличается от левой лишь тем, что x_ν заменены на x'_ν. Это обстоятельство выражается утверждением, что $\sum \Delta x_\nu^2$ есть инвариант по отношению к линейным ортогональным преобразованиям. Очевидно, что в эвклидовой геометрии имеют объективное значение, не зависящее от выбора декартовых координат, те и только те величины, которые можно выразить как инварианты по отношению к линейным ортогональным преобразованиям. В этом заключается причина того, что теория инвариантов, которая имеет дело с законами, управляющими видом инвариантов, имеет такое значение в аналитической геометрии.

В качестве другого примера геометрического инварианта рассмотрим объем. Он выражается формулой

$$V = \iiint dx_1 dx_2 dx_3.$$

Пользуясь теоремой Якоби, можно написать

$$\iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \iiint \frac{\partial (x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле есть функциональный определитель от x'_ν по x_ν, равный, согласно (3), определителю $|b_{\mu\nu}|$ из коэффициентов преобразования $b_{\nu\alpha}$. Если мы образуем определитель из $\delta_{\mu\alpha}$, то из соотношения (4), в силу теоремы об умножении определителей, получим

$$1 = |\delta_{\alpha\beta}| = \left|\sum_\nu b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta}\right| = |b_{\mu\nu}|^2; \qquad |b_{\mu\nu}| = \pm 1. \tag{6}$$

Если мы ограничимся преобразованиями с определителем, равным $+1$ (а только такие и возникают при непрерывных изменениях систем координат) [4], то V — инвариант.

---

[4] Существует, таким образом, два типа декартовых систем координат — так называемые «правые» и «левые» системы. Разница между ними хорошо знакома каждому физику и инженеру. Интересно отметить, что геометрически определить можно только различие между этими двумя типами систем, а не каждую из них саму по себе.

Инварианты, однако, не являются единственным средством, с помощью которого можно выразить независимость от частного выбора декартовых координат. Другие способы выражения дают векторы и тензоры. Попытаемся выразить тот факт, что точка с текущими координатами x_ν лежит на прямой. Мы имеем

$$x_\nu - A_\nu = \lambda B_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

Не ограничивая общности, можно положить

$$\sum B_\nu^2 = 1.$$

Если мы умножим эти уравнения на $b_{\beta\nu}$ [ср. (3а) и (5)] и просуммируем по всем ν, то получим

$$x'_\beta - A'_\beta = \lambda B'_\beta,$$

где

$$B'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} B_\nu; \qquad A'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} A_\nu.$$

Это уравнения прямой линии в другой декартовой системе K'. Форма у них та же, что и у уравнений в исходной системе координат. Очевидно поэтому, что прямые линии имеют смысл, не зависящий от системы координат. Формально это связано с тем, что величины $(x_\nu - A_\nu) - \lambda B_\nu$ преобразуются как компоненты интервала, Δx_ν. Совокупность трех величин, определенных в каждой системе декартовых координат и преобразующихся как компоненты интервала, называется вектором. Если три компоненты вектора обращаются в нуль в одной системе декартовых координат, то они будут равны нулю и во всех прочих, так как уравнения преобразований однородны. Мы можем, таким образом, придать смысл понятию вектора без ссылок на геометрические образы. Поведение уравнений прямой линии можно выразить утверждением, что они ковариантны по отношению к линейному ортогональному преобразованию.

Покажем теперь кратко, что существуют геометрические объекты, приводящие к понятию тензора. Пусть P_0 — центр поверхности второго порядка, P — любая точка этой поверхности, а ξ_ν — проекции интервала P_0P на оси координат. Тогда уравнение поверхности будет иметь вид

$$\sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu = 1.$$

В этом и аналогичных случаях мы будем опускать знак суммирования и подразумевать, что суммирование производится по всем индексам, повторяющимся дважды. Уравнение поверхности тогда запишется в виде

$$a_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu = 1.$$

Числа $a_{\mu\nu}$ полностью определяют поверхность при заданном расположении центра по отношению к выбранной системе координат. Из известного закона преобразования (3а) величин ξ_ν при линейных ортогональных преобразованиях мы легко найдем закон преобразования для $a_{\mu\nu}$ [5]:

$$a'_{\sigma\tau} = b_{\sigma\mu} b_{\tau\nu} a_{\mu\nu}.$$

Это преобразование является однородным и первой степени по $a_{\mu\nu}$. На этом основании $a_{\mu\nu}$ называются компонентами тензора второго ранга (последнее — благодаря двум индексам). Если все компоненты $a_{\mu\nu}$ тензора исчезают в какой-либо декартовой системе координат, то они исчезают и во всех других декартовых системах. Тензором (a) описываются форма и положение поверхности второго порядка.

Можно определить также аналитические тензоры высшего ранга (т. е. с большим числом индексов). Можно и это даже удобно рассматривать векторы как тензоры первого ранга, а инварианты (скаляры) как тензоры нулевого ранга. В этом отношении задачу теории инвариантов можно сформулировать так: по каким правилам можно из данных тензоров образовать новые? Мы сейчас рассмотрим эти правила, чтобы иметь возможность применять их в дальнейшем. Сначала мы будем иметь дело только со свойствами тензоров по отношению к переходам от одной декартовой системы к другой в том же пространстве отсчета путем линейных ортогональных преобразований. Поскольку эти правила совершенно не зависят от числа измерений n, сначала мы оставим это число неопределенным.

Определение. Если в n-мерном пространстве отсчета фигура определяется по отношению к каждой декартовой системе координат n^α числами $A_{\mu\nu\rho\ldots}$ (α — число индексов), то эти числа являются компонентами тензора ранга α, если они преобразуются по закону

$$A'_{\mu'\nu'\rho'\ldots} = b_{\mu'\mu} b_{\nu'\nu} b_{\rho'\rho} \ldots A_{\mu\nu\rho\ldots}. \tag{7}$$

З а м е ч а н и е. Из этого определения следует, что величина

$$A_{\mu\nu\rho\ldots} B_\mu C_\nu D_\rho \ldots \tag{8}$$

является инвариантом, если (B), (C), $(D)\ldots$ — векторы. Наоборот, если известно, что выражение (8) остается инвариантом при любом выборе векторов (B), (C) и т. д., то можно сделать вывод о тензорном характере A.

[5] Уравнение $a'_{\sigma\tau}\xi'_\sigma\xi'_\tau = 1$ можно, согласно (5), заменить на $a'_{\sigma\tau}b_{\mu\sigma}b_{\nu\tau}\xi_\sigma\xi_\tau = 1$, откуда немедленно следует приведенный результат.

Сложение и вычитание. При сложении и вычитании соответствующих компонент тензоров одинакового ранга получается тензор того же ранга.

$$A_{\mu\nu\rho\ldots} \pm B_{\mu\nu\rho\ldots} = C_{\mu\nu\rho\ldots}\,. \tag{9}$$

Доказательство следует из приведенного выше определения тензора.

Умножение. Из тензора ранга α и тензора ранга β можно составить тензор ранга $\alpha+\beta$, умножая каждую компоненту первого тензора на каждую компоненту второго

$$T_{\mu\nu\rho\ldots\alpha\beta\gamma\ldots} = A_{\mu\nu\rho\ldots}B_{\alpha\beta\gamma\ldots}\,. \tag{10}$$

Свертка. Из тензора ранга α можно получить тензор ранга $\alpha - 2$, полагая какие-либо два из его индексов равными и затем суммируя по ним

$$T_{\rho\ldots} = A_{\mu\mu\rho\ldots}\left(= \sum_{\mu} A_{\mu\mu\rho\ldots}\right). \tag{11}$$

Это вытекает из следующих равенств:

$$A'_{\mu\mu\rho\ldots} = b_{\mu\alpha}b_{\mu\beta}b_{\rho\gamma\ldots}A_{\alpha\beta\gamma\ldots} = \delta_{\alpha\beta}b_{\rho\gamma\ldots}A_{\alpha\beta\gamma\ldots} = b_{\rho\gamma\ldots}A_{\alpha\alpha\gamma\ldots}\,.$$

К этим простым правилам добавляется также образование тензоров путем дифференцирования («расширение»)

$$T_{\mu\nu\rho\ldots\alpha} = \frac{\partial A_{\mu\nu\rho\ldots}}{\partial x_\alpha}\,. \tag{12}$$

Согласно этим правилам, можно из одних тензоров образовывать новые тензоры относительно линейных ортогональных преобразований.

Свойства симметрии тензоров. Тензоры называются симметричными или антисимметричными по отношению к паре их индексов μ и ν, если обе компоненты, которые получаются при перестановке μ и ν, соответственно равны друг другу или отличаются только знаком.

Условие симметрии: $A_{\mu\nu\rho} = A_{\nu\mu\rho}$.

Условие антисимметрии: $A_{\mu\nu\rho} = -A_{\nu\mu\rho}$.

Теорема. Свойство симметрии или антисимметрии не зависит от выбора координат, и в этом его значение. Доказательство следует из равенства, определяющего тензор.

Частные случаи тензоров.

I. Величины $\delta_{\rho\sigma}$, определяемые равенством (4), являются компонентами тензора (фундаментальный тензор).

Для доказательства заменим $A_{\alpha\beta}$ в правой части уравнения преобразования $A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha}b_{\nu\beta}A_{\alpha\beta}$ на величины $\delta_{\alpha\beta}$ (равные единице, если $\alpha = \beta$, или нулю, если $\alpha \neq \beta$) мы получим

$$A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha}b_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu}.$$

Справедливость последнего равенства становится очевидной, если применить формулу (4) к обратной подстановке (5).

II. Существует тензор $(\delta_{\mu\nu\rho\ldots})$, антисимметричный по всем парам индексов, ранг которого равен числу измерений n, а компоненты равны $+1$ или -1 в зависимости от того, получается ли $\mu\nu\rho\ldots$ четной или нечетной подстановкой из $123\ldots$

Доказательство следует из установленной выше теоремы, согласно которой $|b_{\rho\sigma}| = 1$.

Эти несколько простых теорем составляют аппарат теории инвариантов, необходимый для построения уравнений дорелятивистской физики и специальной теории относительности.

Мы видели, что в дорелятивистской физике для установления пространственных соотношений требуются тело отсчета или пространство отсчета и вдобавок декартова система координат. Мы можем слить оба эти понятия воедино, представляя себе декартову систему координат как кубическую решетку, образованную из стержней единичной длины. Координаты узловых точек решетки — целые числа. Из основного соотношения

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \tag{13}$$

следует, что длины всех стержней, составляющих эту пространственную решетку, равны единице. Чтобы установить временны́е соотношения, нужны, кроме того, стандартные часы, расположенные в начале нашей декартовой системы отсчета (решетки). Где бы ни произошло событие, мы можем сопоставить с ним три координаты x_ν и время t, как только мы установили, какое показание часов, находящихся в начале координат, было одновременно с событием. Мы придаем тем самым объективное значение утверждению об одновременности удаленных событий, тогда как прежде мы касались лишь одновременности двух ощущений индивидуума. Определенное таким образом время, во всяком случае, не зависит от положения системы координат в нашем пространстве отсчета и поэтому инвариантно относительно преобразований (3).

В дорелятивистской физике постулируется, что система уравнений, выражающая ее законы, ковариантна по отношению к преобразованиям (3) так же, как и соотношения эвклидовой геометрии. Этим путем выражается изотропность и однородность пространства [6]. Рассмотрим с этой точки зрения некоторые из наиболее важных уравнений физики.

---

[6] Даже если бы в пространстве существовало выделенное направление, законы физики можно было бы сформулировать ковариантно по отношению к преобразованиям (3); но в этом случае такая формулировка была бы неудобной. При наличии выделенного направления в пространстве описание явлений приро-

Уравнения движения материальной точки имеют вид

$$m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}=X_\nu, \tag{14}$$

где (dx_ν) — вектор; dt, а следовательно, и $\frac{1}{dt}$ — инвариант, так что $\frac{dx_\nu}{dt}$ — вектор; таким же путем можно показать, что $\frac{d^2x_\nu}{dt^2}$ — вектор. Вообще дифференцирование по времени не меняет тензорных свойств. Поскольку m — инвариант (тензор ранга 0), то $m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}$ — вектор, или тензор ранга 1 (по теореме умножения тензоров). Если сила (X_ν) обладает свойствами вектора, то этим же свойством обладает разность $\left(m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}-X_\nu\right)$. Уравнения движения пригодны поэтому в любой другой декартовой системе координат в пространстве отсчета. Векторный характер (X_ν) легко обнаружить в случае консервативных сил. Тогда существует потенциальная энергия Φ, зависящая только от взаимных расстояний частиц и потому инвариантная. Векторный характер силы $X_\nu=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}$ здесь следует из нашей общей теоремы о производной от тензора ранга 0.

Умножая на скорость (тензор ранга 1), мы получаем тензорное уравнение

$$\left(m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}-X_\nu\right)\frac{dx_\mu}{dt}=0.$$

После свертки и умножения на скаляр dt мы получим соотношение для кинетической энергии

$$d\left(\frac{mq^2}{2}\right)=X_\nu dx_\nu.$$

Если через ξ_ν обозначены разности координат материальной частицы и фиксированной точки пространства, то ξ_ν обладает свойствами вектора. В силу очевидного соотношения $\frac{d^2x_\nu}{dt^2}=\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2}$, уравнения движения частицы могут быть записаны в виде

$$m\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2}-X_\nu=0.$$

ды можно было бы упростить, ориентируя определенным способом систему координат в этом направлении. Вместе с тем, если выделенного направления в пространстве нет, нелогично формулировать законы природы, замалчивая эквивалентность различным образом ориентированных систем координат. Мы снова столкнемся с этой точкой зрения в специальной и общей теориях относительности.

Умножая это уравнение на ξ_μ, мы получаем тензорное уравнение

$$\left(m\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2} - X_\nu\right)\xi_\mu = 0.$$

Свертывая этот тензор и усредняя по времени, получаем теорему вириала, на которой, однако, мы не будем останавливаться. Путем замены индексов и последующего вычитания мы приходим после простого преобразования к теореме моментов

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\xi_\mu\frac{d\xi_\nu}{dt} - \xi_\nu\frac{d\xi_\mu}{dt}\right)\right] = \xi_\mu X_\nu - \xi_\nu X_\mu. \tag{15}$$

Отсюда очевидно, что момент вектора является не вектором, а тензором. В систему уравнений (15), в силу ее антисимметрии, входят не девять, а лишь три независимых уравнения. Возможность замены в трехмерном пространстве антисимметричного тензора второго ранга вектором связана с существованием вектора

$$A_\mu = \frac{1}{2}A_{\sigma\tau}\delta_{\sigma\tau\mu}.$$

Если мы умножим антисимметричный тензор второго ранга на введенный нами выше особый антисимметричный тензор δ и свернем его дважды, то получим вектор, компоненты которого численно равны компонентам тензора. Это так называемые аксиальные векторы, которые при переходе от правой системы координат к левой преобразуются иначе, чем Δx_ν. Рассмотрение антисимметричного тензора второго ранга как трехмерного вектора дает некоторое преимущество в наглядности, но сущность соответствующей величины при этом проявляется не так ясно, как при рассмотрении ее как тензора.

Рассмотрим теперь уравнения движения сплошной среды. Пусть ρ — плотность, u_ν — компоненты скорости, рассматриваемые как функции координат и времени, X_ν — объемные силы на единицу массы и $p_{\nu\sigma}$ — напряжения на поверхности, перпендикулярной к оси σ в направлении возрастания x_ν. Тогда уравнения движения, согласно закону Ньютона, имеют вид

$$\rho\frac{du_\nu}{dt} = -\frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma} + \rho X_\nu,$$

где $\frac{\partial u_\nu}{\partial t}$ — ускорение частицы, находившейся в момент t в точке с координатами x_ν. Если мы запишем это ускорение с помощью частных производных, то после деления на ρ получим

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma} u_\sigma = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma} + X_\nu. \tag{16}$$

Мы должны показать, что это уравнение выполняется независимо от конкретного выбора декартовой системы координат. Здесь u_ν — вектор, и поэтому $\frac{\partial u_\nu}{\partial t}$ тоже вектор; $\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma}$ — тензор второго ранга, а $\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma} u_\tau$ — тензор третьего ранга. Второй член слева получается сверткой последнего по индексам σ и τ. Векторный характер второго члена справа очевиден. Для того чтобы первый член справа также был вектором, необходимо, чтобы величина $p_{\nu\sigma}$ была тензором. Тогда при помощи дифференцирования и свертки получаем величину $\frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma}$, которая, таким образом, является вектором и остается таковым после умножения на скаляр $1/\rho$. Тот факт, что $p_{\nu\sigma}$ — тензор и потому преобразуется согласно уравнению

$$p'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} p_{\alpha\beta},$$

доказывается в механике интегрированием этого равенства по бесконечно малому тетраэдру. Там доказывается также путем применения теоремы моментов к бесконечно малому параллелепипеду, что $p_{\nu\sigma} = p_{\sigma\nu}$, т. е. что тензор напряжений является симметричным тензором. Из сказанного можно, следуя сформулированным выше правилам, найти, что это равенство ковариантно по отношению к ортогональным преобразованиям в пространстве (вращениям); правила, согласно которым должны преобразовываться величины в этом равенстве, чтобы оно было ковариантным, также становятся очевидными.

Ковариантность уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_\nu)}{\partial x_\nu} = 0 \tag{17}$$

после всего сказанного не требует особых пояснений.

Проверим также ковариантность уравнений, выражающих зависимость компонент напряжения от свойств вещества, и с помощью условия ковариантности выпишем эти уравнения для случая сжимаемой вязкой жидкости. Если пренебречь вязкостью, то давление p будет скаляром, зависящим только от плотности и температуры жидкости. Тензор напряжений тогда, очевидно, равен

$$p\delta_{\mu\nu},$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — симметричный тензор специального вида. В случае вязкой жидкости этот член также будет присутствовать, но, кроме него, в выражении для давления будут еще члены, зависящие от пространственных производных скорости u_ν. Мы предположим, что зависимость эта линейна. Поскольку эти члены должны быть симметричными тензорами, в общее выражение может войти только комбинация

$$a\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right)+\beta\delta_{\mu\nu}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

$\left(\text{так как } \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \text{ — скаляр}\right)$. Из физических соображений (отсутствие скольжения) принимается, что в случае симметричного расширения по всем направлениям, т. е. когда

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \text{ и т. д.} = 0,$$

сил трения нет, откуда следует, что $\beta=-\frac{2}{3}a$[7]. Если отлична от нуля только производная $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$, то полагаем $p_{31}=-\eta\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$, откуда определяется a. Таким образом, для полного тензора напряжений получается формула

$$p_{\mu\nu}=p\delta_{\mu\nu}-\eta\left[\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\delta_{\mu\nu}\right]. \qquad (18)$$

Из этого примера становится ясным эвристическое значение теории инвариантов, основанной на изотропности пространства (эквивалентности всех направлений).

Рассмотрим, наконец, уравнения Максвелла в той форме, в которой они явились основой электронной теории Лоренца:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial h_3}{\partial x_2}-\frac{\partial h_2}{\partial x_3}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_1}{\partial t}+\frac{1}{c}j_1\\&\frac{\partial h_1}{\partial x_3}-\frac{\partial h_3}{\partial x_1}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_2}{\partial t}+\frac{1}{c}j_2\\&\dots\dots\dots\dots\dots\\&\frac{\partial e_1}{\partial x_1}+\frac{\partial e_2}{\partial x_2}+\frac{\partial e_3}{\partial x_3}=\rho\end{aligned}\right\}, \qquad (19)$$

[7] Это условие равенства нулю так называемого «второго коэффициента вязкости», выполняющееся лишь в специальных случаях (одноатомный газ, слабо сжимаемая жидкость и т. п.).— *Прим. ред.*

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial e_3}{\partial x_2}-\frac{\partial e_2}{\partial x_3}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_1}{\partial t}\\ \frac{\partial e_1}{\partial x_3}-\frac{\partial e_3}{\partial x_1}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_2}{\partial t}\\ \cdots\cdots&\cdots\cdots\\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1}+\frac{\partial h_2}{\partial x_2}+\frac{\partial h_3}{\partial x_3}&=0\end{aligned}\right\}. \qquad (20)$$

Здесь $\mathbf{j}$ — вектор, поскольку плотность тока определяется как плотность электричества, умноженная на вектор скорости электричества. Из первых трех уравнений очевидно, что $\mathbf{e}$ также следует рассматривать как вектор. Но тогда нельзя считать вектором $\mathfrak{h}$ [8]. Однако эти уравнения легко интерпретировать, если рассматривать $\mathfrak{h}$ как антисимметричный тензор второго ранга. В этом смысле мы будем писать h_{23}, h_{31}, h_{12} вместо h_1, h_2, h_3. В силу антисимметричности $h_{\mu\nu}$ первые три уравнения (19) и (20) можно записать в виде

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_\mu}{\partial t}+\frac{1}{c}j_\mu, \qquad (19а)$$

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial e_\nu}{\partial x_\mu}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}. \qquad (20а)$$

Вектор $\mathfrak{h}$, в отличие от $\mathbf{e}$, выступает как величина того же типа симметрии, что и угловая скорость. Уравнения с дивергенцией тогда принимают вид

$$\frac{\partial e_\nu}{\partial x_\nu}=\rho, \qquad (18б)$$

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\rho}+\frac{\partial h_{\nu\rho}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x_\nu}=0. \qquad (20б)$$

Последнее уравнение является антисимметричным тензорным равенством третьего ранга (антисимметрию выражения слева по отношению к любой паре индексов легко проверить, если учесть антисимметрию $h_{\mu\nu}$). Эти обозначения более естественны, чем обычные, поскольку, в отличие от последних, они справедливы как в правых, так и в левых декартовых системах без изменения знака.

[8] Эти рассуждения ознакомят читателя с тензорными операциями без специфических трудностей четырехмерной трактовки; соответствующие формулы в специальной теории относительности (интерпретация поля по Минковскому) встретят тогда меньшие затруднения.

Лекция II

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Предыдущие рассуждения, касающиеся взаимного расположения твердых тел, опирались, кроме предположения о применимости эвклидовой геометрии, на гипотезу физической эквивалентности всех направлений в пространстве или всех ориентаций декартовых систем координат. Мы можем назвать это утверждение «принципом относительности по направлениям», и мы показали, как при помощи тензорного исчисления могут быть найдены уравнения (законы природы), находящиеся в соответствии с этим принципом. Поставим теперь вопрос: существует ли относительность по отношению к состоянию движения пространства отсчета? Другими словами, существуют ли физически эквивалентные пространства отсчета, движущиеся друг относительно друга? С точки зрения механики такие эквивалентные пространства отсчета должны существовать. Действительно, опыты на Земле не дают нам никаких указаний на то, что мы движемся вокруг Солнца со скоростью около 30 *км/сек*. С другой стороны, пространства отсчета, движущиеся произвольно, вовсе не представляются физически эквивалентными: механические явления подчиняются разным законам в трясущемся железнодорожном поезде и в поезде, движущемся равномерно, с постоянной скоростью; при написании уравнений движения относительно Земли следует учитывать ее вращение. Таким образом, дело обстоит так, как если бы существовали декартовы системы координат, так называемые инерциальные системы, в которых законы механики (и вообще законы физики) принимают наиболее простой вид. Мы можем сделать заключение о справедливости следующей теоремы: если K — инерциальная система, то любая другая система K', движущаяся равномерно и без вращения относительно K, также является инерциальной; во всех инерциальных системах координат законы природы имеют одну и ту же форму. Это положение мы назовем «специальным принципом относительности». Из этого принципа «относительности по отношению к перемещениям» мы выведем некоторые следствия так же, как это было сделано для относительности по направлениям.

Чтобы иметь возможность выполнить это, мы должны сначала решить следующую задачу. Пусть нам даны декартовы координаты x_ν и время t события в одной инерциальной системе координат K; как вычислить координаты x'_ν и время t' того же события в инерциальной системе K', которая движется равномерно относительно K? В дорелятивистской физике эту задачу решали, молчаливо принимая две гипотезы.

1. Время абсолютно; время t' события в системе K' то же, что и время в системе K. Если бы на расстоянии можно было сообщаться мгновенными

сигналами и если бы было известно, что состояние движения часов не влияет на их показания, тогда это предположение было бы физически обоснованным. Ибо тогда по системам K и K' можно было бы распределить покоящиеся по отношению к ним одинаковые и одинаково выверенные часы; их показания не зависели бы от состояния движения, и время каждого события определялось бы по часам, находящимся в непосредственной близости от этого события.

2. Длина абсолютна; если покоящийся в системе K интервал имеет длину s, то он имеет ту же длину s в любой системе K', которая движется относительно K.

Если соответствующие оси систем K и K' параллельны, простое вычисление, опирающееся на эти два предположения, приводит к уравнениям преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x'_\nu &= x_\nu - a_\nu - b_\nu t \\ t' &= t - b \end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

Эти преобразования известны под названием «галилеевых». Дифференцируя дважды по времени, получаем

$$\frac{\partial^2 x'_\nu}{dt^2} = \frac{d^2 x_\nu}{dt^2}.$$

Далее мы получаем, что для двух одновременных событий

$$x'^{(1)}_\nu - x'^{(2)}_\nu = x^{(1)}_\nu - x^{(2)}_\nu.$$

Возведение в квадрат и сложение приводят к инвариантности расстояния между двумя точками. Отсюда легко вывести ковариантность уравнений движения Ньютона относительно преобразований Галилея (21). Таким образом, классическая механика согласуется со специальным принципом относительности, если принять две гипотезы относительно часов и масштабов.

Однако эта попытка обосновать с помощью галилеевых преобразований относительность по отношению к перемещениям терпит неудачу, когда дело касается электромагнитных явлений. Уравнения Максвелла — Лоренца не ковариантны по отношению к преобразованиям Галилея. В частности, из (21) мы видим, что световой луч, который в системе K имел скорость c, обладает другой, зависящей от его направления скоростью в системе K'. Пространство отсчета системы K выделяется поэтому своими физическими свойствами среди всех других пространств отсчета, которые движутся относительно него (неувлекаемый эфир). Но все опыты показывают, что поступательное движение Земли не влияет на электромагнитные и оптические явления по отношению к Земле как телу отсчета. Наиболее важными из этих опытов являются опыты Майкельсона и Морли, которые я предполагаю известными. Таким образом, справедливость специального принципа относительности вряд ли может вызвать сомнения.

С другой стороны, доказана применимость уравнений Максвелла — Лоренца при рассмотрении задач оптики в движущихся телах. Никакая другая теория не дает удовлетворительного объяснения аберрации, распространения света в движущихся средах (Физо) и явлений, наблюдаемых в двойных звездах (де Ситтер). По этой причине можно считать установленным, что свет, как это вытекает из уравнений Максвелла — Лоренца, распространяется в пустоте со скоростью c, по крайней мере, в определенной инерциальной системе координат K. В согласии со специальным принципом относительности мы должны считать, что этот принцип справедлив также и в любой другой инерциальной системе.

Прежде чем делать какие-либо выводы из этих двух принципов, мы должны пересмотреть физический смысл понятий «время» и «скорость». Из предыдущего следует, что координаты в инерциальной системе физически определяются путем измерений и построений, выполняемых при помощи твердых тел. Чтобы измерять время, мы вводим часы U, покоящиеся где-либо в системе K. Однако при помощи этих часов мы не можем определить время событий, расстояниями которых до часов нельзя пренебречь, ибо нет никаких «мгновенных сигналов», которые мы могли бы употребить, чтобы сравнить время события с показаниями часов. Чтобы завершить определение времени, можно воспользоваться принципом постоянства скорости света в пустоте. Предположим, что мы разместили в различных точках системы K одинаковые часы, покоящиеся относительно нее. Будем выверять их по следующей схеме. В тот момент, когда часы U_m показывают время t_m, от них посылается луч света, который распространяется в пустоте на расстояние r_{mn} до часов U_n. В тот момент, когда луч света достигает часов U_n, их устанавливают так, чтобы они показывали время [9]

$$t_n = t_m + \frac{r_{nm}}{c}.$$

Принцип постоянства скорости света утверждает, что такой способ регулировки часов не приводит к противоречиям. Пользуясь часами, выверенными таким способом, можно приписать время любому событию поблизости от них. Существенно отметить, что при этом время

---

[9] Строго говоря, было бы более правильным сначала определить одновременность, например, так: два события, происшедшие в точках A и B системы K, одновременны, если при наблюдении из точки M, лежащей посредине интервала AB, их замечают в один и тот же момент. Время тогда определяется как совокупность показаний одинаковых часов, покоящихся относительно K, которые одновременно имеют одинаковые показания.

определено только в инерциальной системе K, поскольку мы пользовались системой часов, покоящихся относительно K. Делавшееся в дорелятивистской физике предположение об абсолютном характере времени (т. е. о независимости времени от выбора инерциальной системы) ни коим образом не следует из нашего определения.

Теорию относительности часто критиковали за то, что она неоправданно приписывает центральную теоретическую роль явлению распространения света, основывая понятие времени на его законах. Положение дел, однако, примерно таково. Чтобы придать понятию времени физический смысл, нужны какие-то процессы, которые дали бы возможность установить связь между различными точками пространства. Вопрос о том, какого рода процессы выбираются при таком определении времени, несуществен. Для теории выгодно, конечно, выбирать только те процессы, относительно которых мы знаем что-то определенное. Распространение света *в пустоте* благодаря исследованиям Максвелла и Лоренца подходит для этой цели в гораздо большей степени, чем любой другой процесс, который мог бы стать объектом рассмотрения.

Из всего изложенного выше следует, что пространственные и временные данные имеют не фиктивное, а физически реальное значение. В частности, это относится ко всем соотношениям, в которые входят координаты и время, например к соотношениям (21). Поэтому имеет смысл спросить, справедливы ли указанные уравнения и каковы истинные уравнения преобразований, при помощи которых мы переходим от одной инерциальной системы, K, к другой, K', движущейся относительно первой. Можно показать, что на основе принципа постоянства скорости света и специального принципа относительности эта задача решается однозначно.

Теперь представим себе пространство и время определенными физически по отношению к двум инерциальным системам K и K' указанным выше способом. Пусть, далее, луч света идет в пустоте от точки P_1 к другой точке P_2 в системе K. Если r — измеренное расстояние между двумя точками, то распространение света должно удовлетворять условию

$$r = c\Delta t.$$

Возводя это уравнение в квадрат и выражая r^2 через разности координат Δx_ν, мы можем записать

$$\sum (\Delta x_\nu)^2 - c^2 \Delta t^2 = 0. \tag{22}$$

Этим соотношением формулируется принцип постоянства скорости света в системе K. Оно должно выполняться, каким бы ни было движение источника, испускающего луч света.

То же самое распространение света можно рассмотреть и в системе K'. И в этом случае должен выполняться принцип постоянства скорости света. Следовательно, в системе K' мы получаем соотношение

$$\sum(\Delta x'_\nu)^2 - c^2\Delta t'^2 = 0. \tag{22a}$$

Соотношения (22) и (22a) должны переходить друг в друга при преобразовании координат и времени, описывающем переход от K к K'. Преобразования, удовлетворяющие этому условию, мы будем называть «преобразованиями Лоренца».

Прежде чем подробно рассматривать эти преобразования, мы сделаем несколько общих замечаний о пространстве и времени. В дорелятивистской физике пространство и время были раздельными понятиями. Время приписывалось событиям независимо от выбора пространства отсчета. Механика Ньютона обладала относительностью по отношению к пространству отсчета, так что, например, утверждение, что два неодновременных события произошли в одном и том же месте, не имело объективного (т. е. независимого от пространства отсчета) содержания. Но эта относительность не сказывалась на построении теории. О точках пространства и моментах времени говорили так, как будто они были абсолютной реальностью. Не замечалось, что истинным элементом пространственно-временнóй локализации является событие, определенное четырьмя числами x_1, x_2, x_3, t. Представление о чем-либо происходящем есть всегда представление о четырехмерном континууме, но понимание этого было затемнено абсолютным характером дорелятивистского времени. После отказа от абсолютности времени, и особенно одновременности, сразу проявилась четырехмерность пространственно-временнóго представления.

Физической реальностью обладает не точка пространства и не момент времени, когда что-либо произошло, а только само событие. Нет абсолютного (независимого от пространства отсчета) соотношения в пространстве и нет абсолютного соотношения во времени, но есть абсолютное (независимое от пространства отсчета) соотношение в пространстве и времени, как это будет видно из дальнейшего. Факт отсутствия разумного объективного способа разделить четырехмерный континуум на трехмерное пространство и одномерный временнóй континуум указывает, что законы природы примут наиболее удовлетворительный, с точки зрения логики, вид, будучи выражены как законы в четырехмерном пространственно-временнóм континууме. На этом основаны большие преимущества метода, которым теория относительности обязана Минковскому. С его точки зрения, мы должны рассматривать x_1, x_2, x_3, t как четыре координаты события в четырехмерном континууме. Наглядное представление соотношений в четырехмерном континууме удается нам гораздо меньше, чем в трехмерном эвклидовом континууме; однако следует подчеркнуть, что даже понятия и соотношения эвклидовой трехмерной геометрии являются абстракциями нашего разума, совершенно не совпадающими с теми образами, которые складываются у нас благодаря зрению и осязанию. Неразделимость четырехмерного континуума событий вовсе не означает эквивалентности пространственных координат временнóй координате. Наоборот, мы должны помнить, что временнáя координата определена физически совершенно иначе, чем пространственные координаты. Кроме того, соотношения (22) и (22а), условие совместимости которых определяет преобразования Лоренца, свидетельствуют о различной роли пространственных и временнóй координат, так как член Δt^2 входит в уравнение со знаком, противоположным знаку пространственных членов Δx_1^2, Δx_2^2, Δx_3^3.

Прежде чем подвергнуть дальнейшему анализу условия, которые определяют преобразования Лоренца, мы введем вместо времени t световое время $l=ct$, чтобы в последующие формулы постоянная c не входила в явном виде. Тогда преобразования Лоренца определяются так, чтобы соотношение

$$\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta l^2 = 0 \tag{22б}$$

было ковариантным, т. е. так, чтобы оно выполнялось во всех инерциальных системах, если оно выполняется в той инерциальной системе, к которой мы относим два данных события (испускание и прием светового луча). Наконец, мы, следуя Минковскому, введем вместо вещественной временнóй координаты $l = ct$ мнимую

$$x_4 = il = ict \qquad (\sqrt{-1} = i).$$

Тогда соотношение, которое определяет распространение света и которое должно быть ковариантным по отношению к лоренцовым преобразованиям, запишется в виде

$$\sum_{(4)} \Delta x_\nu^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 = 0. \tag{22в}$$

Это условие выполняется всегда, если выполняется более общее условие инвариантности величины

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 \tag{23}$$

по отношению к преобразованиям Лоренца. Последнее выполняется только при линейных преобразованиях, т. е. при преобразованиях вида

$$x'_\mu = a_\mu + b_{\mu\alpha} x_\alpha, \tag{24}$$

где суммирование по α распространяется от $\alpha = 1$ до $\alpha = 4$. Из уравнений (23) и (24) сразу видно, что если отвлечься от числа измерений и условий вещественности, преобразования Лоренца, определенные таким образом, совпадают со сдвигами и вращениями в эвклидовой геометрии. Мы можем заключить также, что коэффициенты $b_{\mu\alpha}$ должны удовлетворять условиям

$$b_{\mu\alpha}b_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu} = b_{\alpha\mu}b_{\alpha\nu}. \tag{25}$$

Из формулы (24) видно, что все числа a_μ и $b_{\mu\alpha}$ вещественны, за исключением a_4, b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{14}, b_{24}, b_{34}, являющихся чисто мнимыми.

Преобразование Лоренца частного вида

Простейшие преобразования типа (24), (25) получатся, если преобразуются только две координаты и если все a_μ, определяющие положение нового начала координат, равны нулю. Тогда для индексов 1 и 2, в силу трех независимых условий, которые дают нам соотношения (25), получаем

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi \\ x_2' &= x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= x_4 \end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

Это — простое вращение в пространстве (пространственной) системы координат вокруг оси x_3. Мы видим, что рассматривавшиеся ранее пространственные вращения (без преобразования времени) содержатся в преобразованиях Лоренца как частный случай. Аналогично для индексов 1 и 4 получаем

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\psi - x_4 \sin\psi \\ x_4' &= x_1 \sin\psi + x_4 \cos\psi \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}\right\}. \tag{26a}$$

Так как координата x_4 чисто мнимая, величину ψ нужно взять мнимой. Чтобы интерпретировать физически полученные уравнения, введем вместо мнимого угла ψ вещественное световое время l и скорость v системы K' по отношению к K. Мы получим прежде всего

$$x_1' = x_1 \cos\psi - il \sin\psi,$$

$$l' = -ix_1 \sin\psi + l \cos\psi.$$

Поскольку для начала координат системы K', т. е. для $x_1' = 0$, мы должны получить $x_1 = vl$, из первого из этих уравнений следует

$$v = i \operatorname{tg} \psi, \tag{27}$$

а также

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= -\frac{iv}{\sqrt{1-v^2}} \\ \cos\psi &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}\right\}, \tag{28}$$

так что мы получаем

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - vl}{\sqrt{1-v^2}} \\ l' &= \frac{l - vx_1}{\sqrt{1-v^2}} \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

Эти уравнения формулируют известное частное преобразование Лоренца, которое в общей теории описывает вращение четырехмерной системы координат на мнимый угол. Если мы введем вместо светового времени l обычное время t, то в (29) мы должны будем заменить l на ct и v на v/c.

Мы должны теперь восполнить один пробел. Из принципа постоянства скорости света вытекает. что уравнение

$$\sum \Delta x_\nu^2 = 0$$

имеет смысл, не зависящий от выбора инерциальной системы, но отсюда еще вовсе не следует инвариантность величины $\Sigma \Delta x_\nu^2$, которая может при преобразовании приобретать численный множитель. Это связано с тем, что правую часть уравнения (29) можно умножить на коэффициент λ, не зависящий от v. Мы покажем сейчас, однако, что в силу принципа относительности этот коэффициент не может отличаться от единицы.

Пусть мы имеем твердый круговой цилиндр, движущийся в направлении своей оси. Если его радиус, измеренный в покое при помощи измерительного стержня единичной длины, равен R_0, то при движении его радиус R может отличаться от R_0, так как в теории относительности не делается предположения о независимости формы тел в пространстве отсчета от их движения относительно этого пространства отсчета. Однако все направления в пространстве должны быть эквивалентны друг другу. Поэтому радиус R может зависеть только от величины q скорости, но не от ее направления, и, следовательно, должен быть четной функцией от q. Если цилиндр покоится относительно системы K', то уравнением его боковой поверхности будет

$$x'^2 + y'^2 = R_0^2.$$

Если мы запишем последние два уравнения (29) в более общей форме

$$x_2' = \lambda x_2,$$
$$x_3' = \lambda x_3,$$

то получим, что боковая поверхность цилиндра задается в системе K уравнением

$$x^2 + y^2 = \frac{R_0^2}{\lambda^2}.$$

Множитель λ характеризует, таким образом, поперечное сокращение и, согласно предыдущему, может быть только четной функцией от v.

Если мы введем третью систему координат K'', которая движется относительно K' со скоростью v в направлении убывающих x', то получим, применяя дважды уравнения преобразования (29)

$$x_1'' = \lambda(v)\,\lambda(-v)\,x_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l'' = \lambda(v)\,\lambda(-v)\,l.$$

Далее, поскольку $\lambda(v)$ должно совпадать с $\lambda(-v)$ и поскольку мы условились пользоваться во всех системах одним и тем же измерительным стержнем, преобразование от K'' к K должно быть тождественным преобразованием (случай $\lambda = -1$ не нуждается в рассмотрении). Для всех этих рассуждений существенно предположение о независимости свойств измерительных стержней от истории их предшествующего движения.

Движущиеся измерительные стержни и часы

В определенный момент времени в K', а именно при $l = 0$, положения точек с целочисленными координатами $x_1' = n$ даются в системе K равенством $x_1 = n\sqrt{1 - v^2}$. Этот факт следует из первого уравнения (29) и выражает собой лоренцово сокращение. Часы, покоящиеся в начале координат системы $K (x_1 = 0)$, удары которых определяются равенством $l = n$, будут бить, согласно наблюдениям из системы K', в моменты времени

$$l' = \frac{n}{\sqrt{1 - v^2}},$$

что следует из второго уравнения (29). Часы идут медленнее, чем такие же часы, покоящиеся в K'. Два этих следствия, которые выполняются (с соответствующими видоизменениями) во всех системах отсчета и не связаны с какими-либо дополнительными условиями, составляют физическое содержание преобразования Лоренца.

Теорема сложения скоростей

Если мы скомбинируем какие-либо два частные преобразования Лоренца с относительными скоростями v_1 и v_2, то скорость, соответствующая результирующему преобразованию Лоренца, заменяющему два исходных, равна, согласно (27),

$$v_{12} = i\,\mathrm{tg}\,(\psi_1 + \psi_2) = i\,\frac{\mathrm{tg}\,\psi_1 + \mathrm{tg}\,\psi_2}{1 - \mathrm{tg}\,\psi_1\,\mathrm{tg}\,\psi_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}\,. \qquad (30)$$

Общие замечания о преобразованиях Лоренца и их теория инвариантов

Вся теория инвариантов специальной теории относительности связана с инвариантом s^2 (23). В четырехмерном пространственно-временно́м континууме он играет формально ту же роль, что и инвариант $\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2$ в эвклидовой геометрии и в дорелятивистской физике. Последняя величина неинвариантна по отношению ко всем лоренцовым преобразованиям; роль такого инварианта переходит к величине s^2, определяемой равенством (23). Мы можем измерить s^2 в любой инерциальной системе координат; при заданной единице измерения s^2 является строго определенной величиной, связанной с любой парой событий.

Кроме числа измерений, s^2 отличается от соответствующего инварианта эвклидовой геометрии еще следующими особенностями. В эвклидовой геометрии величина s^2 непременно положительна. Она обращается в нуль только тогда, когда две рассматриваемые точки совпадают. Напротив, из обращения в нуль величины

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta l^2$$

еще нельзя сделать заключения о совпадении двух пространственно-временны́х точек. Обращение в нуль величины s^2 является инвариантным условием того, что две пространственно-временны́е точки можно связать в пустоте световым сигналом. Если P — точка (событие) в четырехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3, l), то все «точки», которые можно связать с P световым сигналом, лежат на конусе $s^2 = 0$ (рис. 1; измерение x_3 опущено). «Верхняя» половина конуса содержит «точки», в которые можно послать световой сигнал из P; «нижняя» же половина будет содержать «точки», из которых можно послать световые сигналы в P. Интервал s^2 между точкой P и точками P', лежащими внутри конической поверхности, отрицателен; согласно Минковскому, интервал PP' (так же как и $P'P$) временноподобен. Такие интервалы являются элементами возможных траекторий движений со скоростями, меньшими скорости света [10]. В этом случае, выбрав подходящее состояние движения инерциальной системы, можно направить ось l по PP'. Если P' лежит вне светового конуса, интервал PP' пространственноподобен; в этом случае подходящим выбором инерциальной системы можно Δl обратить в нуль.

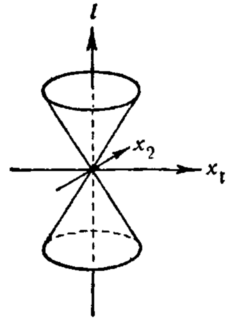


Рис. 1.

Введя мнимую временну́ю координату $x_4 = il$, Минковский сделал теорию инвариантов для четырехмерного континуума физических явлений полностью подобной теории инвариантов для трехмерного континуума эвклидова пространства. Исчисление четырехмерных тензоров специальной теории относительности отличается от тензорного исчисления в трехмерном пространстве только числом измерений и соотношениями вещественности.

Физическая величина, которая в произвольной инерциальной системе координат x_1, x_2, x_3, x_4 задается четырьмя числами A_ν, называется четырехмерным вектором (4-вектором) с компонентами A_ν, если A_ν своими соотношениями вещественности и законами преобразования соответствуют величинам Δx_ν; 4-вектор может быть временноподобным или пространственно подобным. Шестнадцать величин $A_{\mu\nu}$ составляют тензор второго ранга, если они преобразуются по закону

$$A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} A_{\alpha\beta}.$$

Отсюда ясно, что числа $A_{\mu\nu}$ ведут себя в смысле преобразований координат и соотношений вещественности как произведения компонент U_μ и V_ν двух 4-векторов (U) и (V). Все $A_{\mu\nu}$ вещественны, за исключением тех, которые содержат один раз индекс 4; последние чисто мнимы. Сходным образом можно определить тензоры третьего и четвертого рангов. Операции сложения, вычитания, умножения, свертывания и дифференцирования совершенно аналогичны соответствующим операциям над тензорами в трехмерном пространстве.

[10] Скорости материальных тел, превышающие скорости света, невозможны, что вытекает из появления радикала $\sqrt{1 - v^2}$ в формулах (29) частного преобразования Лоренца.

Преже чем использовать тензорное исчисление в четырехмерном пространственно-временнóм континууме, рассмотрим более внимательно антисимметричные тензоры. У тензора второго ранга, вообще говоря, $16=4\times4$ компонент. В случае антисимметрии компоненты с двумя равными индексами обращаются в нуль, а с двумя неравными — попарно равны по величине и противоположны по знаку. Остается только шесть независимых компонент, как и в случае электромагнитного поля. Действительно, когда мы будем рассматривать уравнения Максвелла, мы покажем, что их можно считать тензорными уравнениями, если принять электромагнитное поле за антисимметричный тензор. Ясно, далее, что антисимметричный (по всем парам индексов) тензор третьего ранга имеет только четыре назависимые компоненты, так как возможны только четыре сочетания из трех различных индексов.

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла (19а), (19б), (20а), (20б) и введем следующие обозначения[11]:

$$\left.\begin{array}{cccccc} \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} & \varphi_{14} & \varphi_{24} & \varphi_{34} \\ h_{23} & h_{31} & h_{12} & -ie_x & -ie_y & -ie_z \end{array}\right\}, \tag{31а}$$

$$\left.\begin{array}{cccc} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\ \frac{1}{c}\,j_x & \frac{1}{c}\,j_y & \frac{1}{c}\,j_z & i\rho \end{array}\right\} \tag{31б}$$

с условием, что $\varphi_{\mu\nu}$ должно равняться $-\varphi_{\nu\mu}$. Тогда уравнения Максвелла можно записать в виде

$$\frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=J_\mu, \tag{32}$$

$$\frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial\varphi_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\varphi_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}=0, \tag{33}$$

что нетрудно проверить, используя (31а) и (31б). Уравнения носят тензорный характер и поэтому ковариантны по отношению к лоренцовым преобразованиям, если только $\varphi_{\mu\nu}$ и J_μ — тензоры, как мы и предполагаем. Тем самым однозначно определены законы преобразования этих величин от одной допустимой (инерциальной) системы координат к другой. Прогресс в методе, которым электродинамика обязана специальной теории

[11] Во избежание путаницы мы будем пользоваться здесь и дальше вместо индексов 1, 2, 3 индексами x, y, z для трехмерного пространства, оставляя численные индексы 1, 2, 3, 4 для четырехмерного пространственно-временнóго континуума.

относительности, заключается главным образом в уменьшении числа независимых гипотез. Если рассмотреть, например, уравнения (19а) только с точки зрения относительности по направлениям, как мы и делали выше, то мы увидим, что в него входят три логически несвязанных слагаемых. Электрическое поле входит в это уравнение так, что оно кажется совершенно независимым от того, как входит магнитное поле. Не было бы ничего удивительного, если бы вместо $\frac{\partial e_\mu}{\partial t}$ стояло, например, $\frac{\partial^2 e_\mu}{\partial t^2}$, или если бы этот член отсутствовал. В отличие от этого, в уравнение (32) входят только два независимых члена. Электромагнитное поле выступает формально как единое целое, и способ, которым электрическое поле входит в это уравнение, определяется тем, как входит в него магнитное поле. Кроме электромагнитного поля, только плотность электрического тока выступает как независимая величина. Причина этого успеха в методе заключается в том, что электрическое и магнитное поля приобретают раздельное существование лишь благодаря относительности движения. Поле, которое кажется в одной системе координат чисто электрическим, в другой инерциальной системе обладает и магнитными компонентами. В применении к электромагнитному полю, общий закон преобразований приводит в случае частного преобразования Лоренца к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} e'_x &= e_x, & h'_x &= h_x, \\ e'_y &= \frac{e_y - vh_z}{\sqrt{1-v^2}}, & h'_y &= \frac{h_y + ve_z}{\sqrt{1-v^2}}, \\ e'_z &= \frac{e_z + vh_y}{\sqrt{1-v^2}}, & h'_z &= \frac{h_z - ve_y}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Если относительно K существует только магнитное поле $\mathbf{h}$ и нет электрического поля $\mathbf{e}$, то относительно K' есть также и электрическое поле $\mathbf{e}'$, которое будет действовать на электрический заряд, покоящийся относительно K'. Наблюдатель, покоящийся относительно K, назовет эту силу силой Био-Савара или Лоренца. Дело обстоит так, как если бы эта сила оказалась объединенной в единое целое с напряженностью электрического поля.

Чтобы формально вывести это соотношение, рассмотрим выражение для силы, действующей на электрический заряд в единице объема,

$$\mathbf{k} = \rho\mathbf{e} + [\mathbf{j}, \mathbf{h}], \tag{35}$$

где $\mathbf{j}$ — вектор скорости электрического заряда; скорость света принята за единицу. Если мы введем обозначения J_μ и φ_μ, согласно (31а) и (31б), то получим для первой компоненты силы выражение

$$\varphi_{12}J_2 + \varphi_{13}J_3 + \varphi_{14}J_4.$$

Поскольку φ_{11} равно нулю в силу антисимметрии тензора (φ), компоненты **k** даются первыми тремя компонентами четырехмерного вектора

$$K_\mu = \varphi_{\mu\nu}J_\nu, \tag{36}$$

четвертая компонента которого равна

$$K_4 = \varphi_{41}J_1 + \varphi_{42}J_2 + \varphi_{43}J_3 = i\,(e_x j_x + e_y j_y + e_z j_z) = i\lambda. \tag{37}$$

Существует, следовательно, четырехмерный вектор силы, первые три компоненты которого k_1, k_2, k_3 являются составляющими пондеромоторной силы, действующей на единичный объем, а четвертая компонента есть работа, производимая полем в единичном объеме и в единицу времени, умноженная на $\sqrt{-1}$.

Сравнение выражений (35) и (36) показывает, что теория относительности формально объединяет пондеромоторную силу электрического поля $\rho\mathbf{e}$ с силой Био — Савара или Лоренца [**j**, **h**].

Масса и энергия

Из того факта, что существует осмысленный четырехмерный вектор K_μ, можно вывести одно важное заключение. Представим себе тело, находящееся в течение некоторого времени под воздействием электромагнитного поля. На символическом рисунке (рис. 2) Ox_1 означает ось x_1 и в то

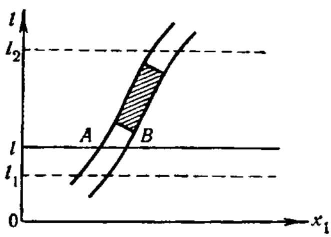


Рис. 2.

же время заменяет три пространственные оси Ox_1, Ox_2, Ox_3; Ol означает вещественную временнýю ось. Тело конечного размера в определенный момент времени l изображается на этой диаграмме интервалом AB; все существование тела A в пространстве и времени представляется полосой, граница которой всюду наклонена к оси l под углом, меньшим 45°. Между двумя временны́ми сечениями $l = l_1$ и $l_1 = l_2$, но не вплотную к ним, часть полосы заштрихована. Этим отмечена та часть пространственно-временно́го многообразия, в которой электромагнитное поле воздействует на тело или на содержащиеся в нем электрические заряды, передающие это воздействие на самое тело. Рассмотрим изменения, которые претерпевают импульс и энергия тела в результате такого воздействия.

Мы будем предполагать, что для тела справедливы законы сохранения импульса и энергии. Изменения импульса ΔI_x, ΔI_y, ΔI_z и изменение энергии ΔE задаются тогда выражениями

$$\Delta I_x = \int_{l_1}^{l_2} dl \int k_x dx\, dx\, dz = \frac{1}{i}\int K_1 dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4,$$

. . . .

. . . .

$$\Delta E = \int_{l_4}^{l_2} dl \int \lambda dx\, dy\, dz = \frac{1}{i}\int \frac{1}{i} K_4 dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4.$$

Поскольку элемент четырехмерного объема является инвариантом, а совокупность величин (K_1, K_2, K_3, K_4) образует 4-вектор, четырехмерный интеграл, распространенный на заштрихованную область, преобразуется как 4-вектор; то же справедливо и для интеграла в пределах от l_1 до l_2, поскольку незаштрихованная часть области интегрирования ничего не добавляет к интегралу. Отсюда следует, что ΔI_x, ΔI_y, ΔI_z, $i\,\Delta E$ образуют 4-вектор. Поскольку сами величины преобразуются так же, как и их приращения, совокупность четырех величин

$$I_x,\ I_y,\ I_z,\ iE$$

сама обладает свойствами вектора; эти величины относятся к мгновенному состоянию тела (например, ко времени $l = l_1$).

Этот 4-вектор можно выразить также через массу m и скорость тела, рассматриваемого как материальная точка. Чтобы образовать это выражение, заметим сначала, что величина

$$-ds^2 = d\tau^2 = -(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - dx_4^2 = dl^2(1 - q^2) \tag{38}$$

является инвариантом, который связан с бесконечно малым элементом четырехмерной линии, отвечающей движению материальной точки. Легко уяснить себе физический смысл инварианта $d\tau$. Если выбрать направление оси времени вдоль рассматриваемого линейного элемента, т. е., если привести материальную точку в состояние покоя, мы получим $d\tau = dl$. Эта величина будет, таким образом, измеряться проградуированными в световых секундах часами, которые покоятся относительно материальной точки и находятся в одном с ней месте. Поэтому мы называем τ собственным временем материальной точки. В отличие от dl, дифференциал $d\tau$ — инвариант; $d\tau$ практически совпадает с dl для движений со скоростями, много меньшими скорости света. Отсюда мы видим, что величина

$$u_\sigma = \frac{dx_\sigma}{d\tau}, \tag{39}$$

так же как и dx_ν, обладает векторными свойствами; мы будем называть (u_σ) четырехмерным вектором скорости. Согласно (38), его компоненты удовлетворяют условию

$$\sum u_\sigma^2 = -1. \tag{40}$$

Мы видим также, что этот 4-вектор, компоненты которого в обычных обозначениях равны

$$\frac{q_x}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \frac{q_y}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \frac{q_z}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \frac{i}{\sqrt{1-q^2}}, \tag{41}$$

является единственным 4-вектором, который можно образовать из компонент скорости материальной точки, определенных в трехмерном виде равенствами

$$q_x = \frac{dx}{dl}, \quad q_y = \frac{dy}{dl}, \quad q_z = \frac{dz}{dl}.$$

Мы видим, таким образом, что

$$\left(m\frac{dx_\mu}{d\tau}\right) \tag{42}$$

и есть тот 4-вектор, который следует приравнять 4-вектору энергии и импульса, существование которого было доказано раньше. Приравнивая соответствующие компоненты, мы получаем в трехмерных обозначениях

$$\left.\begin{array}{l} I_x = \dfrac{mq_x}{\sqrt{1-q^2}}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ E = \dfrac{m}{\sqrt{1-q^2}}. \end{array}\right\} \tag{43}$$

Мы действительно убеждаемся, что эти компоненты импульса согласуются с величинами, получаемыми в классической механике при скоростях, малых по сравнению со скоростью света. При больших скоростях импульс возрастает со скоростью быстрее, чем линейно, обращаясь в бесконечность при приближении к скорости света.

Если последнее из равенств (43) применить к покоящейся материальной точке ($p' = 0$), мы найдем, что энергия E тела в состоянии покоя равна его массе. Если бы мы выбрали в качестве единицы времени секунду, мы получили бы

$$E_0 = mc^2. \tag{44}$$

Таким образом, масса и энергия сходны по существу — это только различные выражения одного и того же. Масса тела не постоянна; она меняется вместе с его энергией [12]. Из последнего равенства (43) видно, что E стремится к бесконечности, когда q стремится к единице, т. е. к скорости света. Если мы разложим E по степеням q^2, то получим

$$E = m + \frac{m}{2} q^2 + \frac{3}{8} mq^4 + \cdots \tag{45}$$

Второй член разложения соответствует кинетической энергии материальной точки в классической механике.

Уравнения движения материальной точки

Дифференцируя равенства (43) по времени l, используя закон сохранения количества движения и переходя к трехмерным векторам, получаем

$$\mathbf{k} = \frac{d}{dl}\left(\frac{m\mathbf{q}}{\sqrt{1 - q^2}}\right). \tag{46}$$

Справедливость этого уравнения, впервые написанного Г. А. Лоренцом для движения электронов, была доказана с большой степенью точности в опытах с β-лучами.

[12] Выделение энергии в радиоактивных процессах, очевидно, связано с тем фактом, что атомные веса не являются целыми числами. Эквивалентность между массой покоя и энергией покоя, выражаемая соотношением (44), неоднократно подтверждалась за последние годы. При радиоактивном распаде сумма получающихся масс всегда меньше, чем масса распадающегося ядра. Разность проявляется как в виде кинетической энергии порожденных частиц, так и в виде высвобожденной энергии излучения.

Тензор энергии электромагнитного поля

Еще до создания теории относительности было известно, что законы сохранения энергии и импульса для электромагнитного поля можно выразить в дифференциальной форме. Четырехмерная формулировка этих законов приводит к важному понятию о тензоре энергии, которое существенно для дальнейшего развития теории относительности.

Если в формуле для четырехмерного вектора силы, действующей на единицу объема,

$$K_\mu = \varphi_{\mu\nu} J_\nu$$

выразить J_μ, используя уравнения поля (32), через напряженности поля $\varphi_{\mu\nu}$, то после некоторых преобразований и повторного применения уравнений поля (32) и (33) получится выражение

$$K_\mu = -\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \tag{47}$$

где введено обозначение [13]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\varphi^2_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\alpha}\varphi_{\nu\alpha}. \tag{48}$$

Физический смысл уравнения (47) становится очевидным, если вместо него написать:

$$\left.\begin{aligned} k_x &= -\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial (ib_x)}{\partial (il)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ i\lambda &= -\frac{\partial (is_x)}{\partial x} - \frac{\partial (is_y)}{\partial y} - \frac{\partial (is_z)}{\partial z} - \frac{\partial (-\eta)}{\partial (il)}, \end{aligned}\right\} \tag{47а}$$

или, по исключении мнимой единицы,

$$\left.\begin{aligned} k_x &= -\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial b_x}{\partial l}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda &= -\frac{\partial s_x}{\partial x} - \frac{\partial s_y}{\partial y} - \frac{\partial s_z}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial l}. \end{aligned}\right\} \tag{47б}$$

Из последней записи мы видим, что первые три уравнения выражают закон сохранения импульса, $p_{xx}, \dots, p_{zz}$ — максвелловы натяжения

[13] По α и β следует просуммировать.

электромагнитного поля, а (b_x, b_y, b_z) — вектор количества движения единицы объема поля. Последнее из уравнений (47б) выражает закон сохранения энергии; s — вектор потока энергии, а η — энергия единицы объема поля. Действительно, вводя известные из электродинамики выражения для компонент напряженности поля, мы получаем из (48)

$$\left.\begin{aligned}
p_{xx} &= -h_x h_x + \frac{1}{2}(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2) - e_x e_x + \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2),\\
p_{xy} &= -h_x h_y - e_x e_y,\\
p_{xz} &= -h_x h_z - e_x e_z,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_x &= s_x = e_y h_z - e_z h_y\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta &= \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2).
\end{aligned}\right\} \tag{48а}$$

Из (48) мы можем заключить, что тензор энергии электромагнитного поля симметричен; это связано с тем фактом, что количество движения единицы объема равно потоку энергии (связь между энергией и инерцией).

Из этих рассуждений мы, таким образом, заключаем, что энергия единицы объема обладает свойствами тензора. Этот факт был доказан непосредственно только для электромагнитного поля, но мы можем утверждать, что он имеет всеобщую применимость. Уравнения Максвелла определяют электромагнитное поле, когда известно распределение электрических зарядов и токов. Однако законы, управляющие этими токами и зарядами, нам неизвестны. Мы знаем, конечно, что электричество состоит из элементарных частиц (электронов, положительно заряженных ядер), но мы не можем построить из этого теорию. Нам неизвестны энергетические факторы, определяющие распределение электричества в частицах с определенным размером и зарядом, и все попытки завершить теорию в этом направлении потерпели неудачу. Поэтому, если мы вообще можем основываться на уравнениях Максвелла, тензор энергии электромагнитного поля известен нам только вне заряженных частиц [14]. В этой области, вне заря-

[14] Этот пробел в наших знаниях пытались восполнить, рассматривая заряженные частицы как некоторые сингулярности. На мой взгляд, однако, это означает отказ от действительного выяснения строения вещества. Мне кажется, что гораздо лучше сознаться в нашей нынешней несостоятельности, чем удовлетворяться кажущимся решением.

женных частиц, единственной области, где мы можем быть уверены, что располагаем полным выражением для тензора энергии, мы, согласно (47), имеем

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{47в}$$

Общие выражения для законов сохранения

Вряд ли можно обойтись без предположения, что и во всех других случаях пространственное распределение энергии задается симметричным тензором $T_{\mu\nu}$ и что этот тензор полной энергии всюду удовлетворяет соотношению (47в). Во всяком случае, мы увидим, что с помощью этого предположения мы получаем правильное выражение для интегрального закона сохранения энергии.

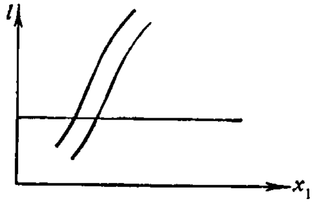


Рис. 3.

Рассмотрим ограниченную в пространстве замкнутую систему, которую на четырехмерном языке можно представить полосой, вне которой $T_{\mu\nu}$ обращается в нуль (рис. 3). Проинтегрируем соотношение (47в) по пространственной области. Поскольку вследствие равенства $T_{\mu\nu}$ нулю на пределах интегрирования интегралы от $\frac{\partial T_{\mu 1}}{\partial x_1}$, $\frac{\partial T_{\mu 2}}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial T_{\mu 3}}{\partial x_3}$ обращаются в нуль, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial l}\left\{\int T_{\mu 4} dx_1\, dx_2\, dx_3\right\} = 0. \tag{49}$$

Выражение в скобках содержит выражения для импульса всей системы, умноженного на i, и для энергии системы с обратным знаком, так что равенство (49) выражает законы сохранения в их интегральной форме. То, что это равенство ведет к правильному представлению об энергии и законах сохранения, станет очевидным из последующего рассмотрения.

Феноменологическое представление тензора энергии материи

Уравнения гидродинамики

Мы знаем, что вещество состоит из электрически заряженных частиц, но законы, управляющие строением этих частиц, нам неизвестны. При рассмотрении задач механики мы вынуждены поэтому пользоваться неточным описанием вещества, соответствующим классической механике. Такое описание опирается на фундаментальные понятия гидродинамического давления и плотности σ материальной субстанции.

Пусть σ_0 — плотность вещества в некоторой точке, определенная в системе координат, движущейся с веществом. Тогда σ_0 — плотность в системе покоя — является инвариантом. Если мы представим себе произвольно движущееся вещество и пренебрежем давлением (например, частицы пыли в пустоте, если пренебречь размерами частиц и температурой), то тензор энергии будет зависеть только от компонент скорости u_ν и σ_0. Тензорный характер величины $T_{\mu\nu}$ будет обеспечен, если положить

$$T_{\mu\nu} = \sigma_0 u_\mu u_\nu, \tag{50}$$

где u_μ в трехмерном представлении дается формулами (41). Действительно, из (50) следует, что при $q = 0$ мы имеем $T_{44} = -\sigma_0$ (т. е. T_{44} равно энергии единицы объема с обратным знаком), как и должно было быть, согласно теореме об эквивалентности массы и энергии и в соответствии с данной выше физической интерпретацией тензора энергии. Если на вещество действует внешняя сила (четырехмерный вектор K_μ), то по законам сохранения импульса и энергии должно выполняться уравнение

$$K_\mu = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}.$$

Покажем, что это уравнение приводит к полученному выше закону движения материальной точки. Представим себе, что вещество сосредоточено в бесконечно малой области пространства, т. е. что мы имеем четырехмерную нить. Тогда, после интегрирования вдоль всей нити по пространственным координатам x_1, x_2, x_3, мы получим

$$\int K_1 dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int \frac{\partial T_{14}}{\partial x_4} dx_1\, dx_2\, dx_3 = -i \frac{d}{dl}\left\{\int \sigma_0 \frac{dx_1}{d\tau}\frac{dx_4}{d\tau} dx_1\, dx_2\, dx_3\right\}.$$

Далее, $\int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ есть инвариант, так же, как и $\int \sigma_0 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$. Вычислим этот интеграл сначала в выбранной нами инерциальной системе, а затем в системе, где скорость вещества равна нулю. Интегрирование следует распространить на волокно нити, для которого σ_0 можно считать постоянной по всему сечению. Если пространственные объемы волокна в двух системах координат равны соответственно dV и dV_0, мы имеем

$$\int \sigma_0 dV\, dl = \int \sigma_0 dV_0 d\tau$$

следовательно,

$$\int \sigma_0 dV = \int \sigma_0 dV_0 \frac{d\tau}{dl} = \int dm\, i \frac{d\tau}{dx_4}.$$

Если мы используем это равенство для преобразования интервала, написанного выше, то, вынося $\frac{dx_1}{d\tau}$ за знак интегрирования, получаем

$$K_x = \frac{d}{dl}\left(m \frac{dx_1}{d\tau}\right) = \frac{d}{dl} \frac{mq_x}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Мы убеждаемся, таким образом, что обобщенное понятие тензора энергии согласуется с нашим прежним результатом.

Эйлеровы уравнения для идеальной жидкости

Чтобы ближе подойти к описанию поведения реального вещества, мы должны добавить к тензору энергии член, соответствующий давлению. Простейшим случаем является случай идеальной жидкости, когда давление определяется некоторым скаляром p. Вклад в тензор энергии должен иметь вид $p\delta_{\mu\nu}$, поскольку тангенциальные напряжения p_{xy} и т. д. в этом случае обращаются в нуль. Мы должны, следовательно, положить

$$T_{\mu\nu} = \sigma u_\mu u_\nu + p\delta_{\mu\nu}. \tag{51}$$

В системе покоя плотность вещества, или энергия единицы объема, равна в этом случае не σ, а $\sigma - p$, так как

$$-T_{44} = -\sigma \frac{dx_4}{d\tau}\frac{dx_4}{d\tau} - p\delta_{44} = \sigma - p.$$

В отсутствие каких-либо сил мы имеем

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \sigma u_\nu \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + u_\mu \frac{\partial(\sigma u_\nu)}{\partial x_\nu} + \frac{\partial p}{\partial x_\mu} = 0.$$

Если мы умножим это уравнение на $u_\mu \left(= \frac{dx_\mu}{d\tau}\right)$ и просуммируем по μ, то получим, использовав (40),

$$-\frac{\partial(\sigma u_\nu)}{\partial x_\nu}+\frac{dp}{d\tau}=0, \tag{52}$$

где мы положили

$$\frac{\partial p}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{d\tau}=\frac{dp}{d\tau}.$$

Это — уравнение непрерывности, которое отличается от классического членом $\frac{dp}{d\tau}$, который практически является исчезающе малым. В силу (52) закон сохранения принимает вид

$$\sigma\frac{du_\mu}{d\tau}+u_\mu\frac{dp}{d\tau}+\frac{\partial p}{\partial x_\mu}=0. \tag{53}$$

При первых трех значениях индексов эти уравнения соответствуют эйлеровым. То обстоятельство, что уравнения (52) и (53) в первом приближении соответствуют уравнениям гидродинамики в классической механике, служит дальнейшим подтверждением обобщенного закона сохранения энергии. Плотность вещества и энергии обладает свойствами симметричного тензора.

Лекция III

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Все, что рассказывалось выше, основывалось на предположении, что для описания физических явлений все инерциальные системы эквивалентны, но что при выражении законов природы они обладают преимуществами перед пространствами отсчета, находящимися в других состояниях движения. Из всего сказанного выше следует, что мы не можем искать причины, по которым некоторые состояния движения имеют преимущество перед всеми другими, в телах, с которыми мы имеем дело, или в самом понятии движения; напротив, это преимущество следует рассматривать как независимое свойство пространственно-временнóго континуума. В частности, закон инерции, по-видимому, вынуждает нас приписать пространственно-временнóму континууму объективные свойства. Точно так же, как с ньютоновской точки зрения оказалось необходимым ввести постулаты *tempus est absolutum, spatium est absolutum*[15], так с точки зрения

[15] Время абсолютно, пространство абсолютно (лат.).— *Прим. ред.*

специальной теории относительности мы должны объявить *continuum spatii et temporis est absolutum*[16]. В этом последнем утверждении *absolutum* означает не только «физически реальный», но также «независимый по своим физическим свойствам, оказывающий физическое действие, но сам от физических условий не зависящий».

До тех пор, пока закон инерции рассматривается как краеугольный камень физики, такая точка зрения является единственно оправданной. Однако такая обычная концепция встречает два серьезных возражения. Во-первых, представление о чем-то (пространственно-временно́й континуум), что воздействует само, но на что нельзя воздействовать, противоречит присущему науке методу мышления. Именно это побудило Э. Маха сделать попытку исключить пространство как активную причину из системы механики. Согласно Маху, материальная точка при неускоренном движении движется не относительно пространства, а относительно центра всех прочих масс во Вселенной; таким путем, в противовес механике Ньютона и Галилея, замыкается причинная цепь механических явлений. Чтобы развить эту идею в рамках современной теории действия через среду, свойства пространственно-временно́го континуума, определяющие инерцию, должны рассматриваться как полевые свойства пространства, аналогично электромагнитному полю. Понятия классической механики не дают нам возможности выразить это, и по указанной причине попытка Маха потерпела в то время неудачу. Позже мы вернемся к этой точке зрения.

Во-вторых, классическая механика указывает на одно ограничение, которое непосредственно требует распространения принципа относительности и на такие пространства отсчета, которые не находятся в состоянии равномерного движения друг относительно друга. Отношение масс двух тел определяется в механике двумя принципиально различными способами: с одной стороны, через обратное отношение ускорений, которые сообщает им одна и та же ускоряющая сила (инертная масса), и, с другой стороны, через отношение сил, действующих на них в одном и том же гравитационном поле (гравитационная масса). Равенство этих двух масс, столь различно определяемых, является фактом, подтвержденным опытами с весьма большой точностью (опыты Этвеша), но классическая механика не дает никакого объяснения этому равенству. Однако ясно, что утверждение о численном равенстве двух величин становится вполне научно обоснованным лишь после того, как доказано совпадение истинной природы обоих понятий.

То, что этой цели действительно можно достичь путем расширения принципа относительности, вытекает из следующих соображений. Простое рассуждение показывает, что теорема о равенстве инертной и гравитацион-

[16] Пространственно-временно́й континуум абсолютен (лат.).— *Прим. ред.*

ной масс эквивалентна теореме о независимости ускорения, сообщаемого телу гравитационным полем, от природы тела. Действительно, выписанное полностью уравнение Ньютона для движения в гравитационном поле имеет вид

(Инертная масса) × (ускорение) =
= (напряженность гравитационного поля) × (гравитационная масса).

Только в случае численного равенства между инертной и гравитационной массами ускорение не зависит от природы тела. Пусть теперь K — некоторая инерциальная система. Массы, достаточно удаленные друг от друга и от остальных тел, будут тогда относительно K свободны от ускорения. Рассмотрим теперь те же массы в системе координат K', движущейся равномерно ускоренно относительно K. По отношению к K' все эти массы обладают равными по величине и параллельными по направлению ускорениями; они ведут себя по отношению к K' так, как если бы существовало гравитационное поле, а система K' была неускоренной. Если оставить пока в стороне вопрос о «причине» такого гравитационного поля, которым мы займемся дальше, ничто не мешает нам считать гравитационное поле реально существующим; таким образом, представление о том, что система K' находится «в состоянии покоя», но имеется гравитационное поле, мы можем считать эквивалентным представлению о том, что только система K является «дозволенной» системой координат и никакого гравитационного поля нет. Предположение о полной физической эквивалентности систем координат K и K' мы назовем «принципом эквивалентности». Этот принцип, очевидно, теснейшим образом связан с теоремой о равенстве инертной и гравитационной масс и знаменует распространение принципа относительности на системы координат, движущиеся неравномерно друг относительно друга. Действительно, такая концепция приводит нас к признанию единства природы инерции и тяготения; в зависимости от того, каким образом мы их рассматриваем, одни и те же массы могут представляться находящимися под действием только сил инерции (по отношению к K) или под совместным действием как сил инерции, так и тяготения (по отношению к K'). Возможность объяснить численное равенство между инерцией и тяготением на основе единства их природы доставляет общей теории относительности, по моему убеждению, столь большое превосходство над представлениями классической механики, что все трудности, с которыми она сталкивается в своем развитии, следует по сравнению с этим считать незначительными.

Что же оправдывает наш отказ от предпочтительности инерциальных систем перед всеми другими системами координат, от предпочтительности, которая казалась так надежно установленной опытами, основанными на принципе инерции? Уязвимым местом принципа инерции было то обстоятельство, что он содержал порочный круг: масса движется без ускорения, если она достаточно удалена от других тел; но мы знаем о ее достаточной удаленности от других тел только по ее движению без ускорения. Существуют ли вообще какие-либо инерциальные системы для весьма протяженных областей пространственно-временнóго континуума или, скажем, для всей Вселенной. Закон инерции мы можем считать установленным с большой степенью точности в пространстве нашей планетной системы, если только мы пренебрегаем возмущениями, обусловливаемыми Солнцем и планетами. Выражаясь более точно, существуют конечные области, где по отношению к выбранному должным образом пространству отсчета материальные точки движутся свободно, без ускорений, и где с замечательной точностью выполняются законы развитой выше специальной теории относительности. Такие области будем называть «галилеевыми областями». Мы начнем с рассмотрения такого рода областей как частного случая, свойства которого нам известны.

Принцип эквивалентности требует, чтобы при рассмотрении галилеевых областей в равной степени могли использоваться и неинерциальные системы, т. е. системы координат, не свободные от вращений и ускорений по отношению к инерциальным системам. Если мы, кроме того, хотим полностью снять трудный вопрос об объективных причинах, по которым определенные системы координат оказываются предпочтительными, мы должны разрешить пользоваться произвольно движущимися системами координат. Но как только мы серьезно производим эту попытку, мы вступаем в конфликт с той физической интерпретацией пространства и времени, к которой нас привела специальная теория относительности. Пусть, например, система координат K', ось z' которой совпадает с осью z системы K, вращается вокруг последней оси с постоянной угловой скоростью. Согласуется ли взаимное расположение твердых тел, покоящихся в K', с законами эвклидовой геометрии? Поскольку K' — неинерциальная система, мы, вообще говоря, не знаем непосредственно ни законов, определяющих расположение твердых тел в системе K', ни вообще законов природы в этой системе. Но эти законы нам известны в инерциальной системе K, так что мы можем определить их и в системе K'. Представим себе, что вокруг начала координат в плоскости (x', y') системы K' нарисованы окружность и ее диаметр. Представим себе далее, что в нашем распоряжении имеется большое число совершенно одинаковых жестких стержней. Допустим, что они уложены друг за другом по окружности и по диаметру этого круга и находятся в покое относительно K'. Если U — число стержней, уложенных по окружности, а D — число стержней, уложенных по диаметру, то при отсутствии вращения K' относительно K мы имели бы

$$\frac{U}{D} = \pi.$$

Но если K' вращается, мы получим другой результат. Предположим, что в некоторый момент времени t в системе K мы определили положение концов всех стержней. Все стержни, расположенные вдоль окружности, претерпевают лоренцово сокращение по отношению к K, но стержни на диаметре не испытывают этого сокращения (вдоль своих длин!)[17]. Следовательно,

$$\frac{U}{D} > \pi.$$

Таким образом, получается, что законы конфигурации твердых тел в K' не согласуются с теми законами конфигурации твердых тел, которые соответствуют эвклидовой геометрии. Далее, если мы расположим два экземпляра одинаковых часов (вращающихся вместе с K'), одни — на окружности, а другие — в ее центре, то при наблюдении из системы K часы на окружности будут идти медленнее, чем часы в центре. То же самое должно происходить с точки зрения системы K', если только мы не ввели противоестественного определения времени по отношению к K', при котором законы в K' зависели бы явно от времени. Поэтому пространство и время нельзя определить в K' так же, как они определялись в специальной теории относительности для инерциальных систем. Но, согласно принципу эквивалентности, K' также может рассматриваться как покоящаяся система, в которой есть гравитационное поле (поле центробежных сил и сил Кориолиса). Мы приходим, таким образом, к следующему результату: гравитационное поле оказывает воздействие и даже определяет метрические законы пространственно-временнóго континуума. Если выразить законы конфигурации абсолютно твердых тел на языке геометрии, то эта геометрия в присутствии гравитационного поля не будет эвклидовой.

Рассмотренный нами пример аналогичен тому, с которым мы встречаемся при двумерном описании поверхностей. В последнем случае на поверхности (например, на поверхности эллипсоида) также невозможно ввести координаты, которые имели бы простой метрический смысл, тогда как на плоскости декартовы координаты x_1, x_2 непосредственно означают длины, измеренные единичным измерительным стержнем. Гаусс преодолел эту трудность в своей теории поверхностей, введя совершенно произвольные, если не считать условия непрерывности, криволинейные координаты; впоследствии эти координаты были связаны с метрическими свойствами поверхности. Аналогичным образом и мы в общей теории относительности введем произвольные координаты x_1, x_2, x_3, x_4, которыми однозначно

---

[17] В этих рассуждениях предполагается, что поведение часов и стержней зависит только от скоростей, но не от ускорений, или, по крайней мере, что влияние ускорения не компенсирует влияния скорости.

пронумеруем пространственно-временные точки так, чтобы близким событиям отвечали близкие значения координат; в остальном выбор координат произволен. Мы останемся верными принципу относительности в его наиболее широком смысле, если придадим такую форму законам, что они окажутся применимыми в любой четырехмерной системе координат, т. е. если уравнения, выражающие эти законы, будут ковариантны по отношению к произвольным преобразованиям.

Наиболее важной точкой соприкосновения между гауссовой теорией поверхностей и общей теорией относительности являются метрические свойства, на которых в основном базируются понятия обеих теорий. В теории поверхностей Гаусс рассуждает следующим образом. Плоскую геометрию можно основать на понятии расстояния ds между двумя бесконечно близкими точками. Понятие такого расстояния имеет физический смысл, поскольку это расстояние можно непосредственно измерить при помощи жесткого измерительного стержня. При подходящем выборе декартовых координат это расстояние можно выразить формулой $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$. На этой величине мы можем основать понятия прямой как геодезической линии ($\delta\int ds = 0$), интервала, окружности и угла — понятия, на которых построено здание эвклидовой геометрии на плоскости. Можно построить геометрию и на другой поверхности с непрерывно изменяющейся кривизной, если заметить, что бесконечно малую часть этой поверхности можно рассматривать как плоскую, с точностью до бесконечно малых величин. Тогда на этой малой части поверхности существуют декартовы координаты X_1, X_2 и расстояние между двумя точками, измеренное измерительным стержнем, дается формулой

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2.$$

Если ввести на поверхности произвольные криволинейные координаты x_1, x_2, то dX_1, dX_2 можно будет выразить линейно через dx_1, dx_2. Тогда всюду на поверхности мы будем иметь

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1\,dx_2 + g_{22}dx_2^2,$$

где g_{11}, g_{12}, g_{22} определяются характером поверхности и выбором координат. Если известны эти величины, то известно также, как можно уложить на поверхности сетку жестких стержней. Другими словами, геометрию поверхностей можно построить на этом выражении для ds^2 точно так же, как строится на соответствующем выражении плоская геометрия.

В физическом четырехмерном пространственно-временно́м континууме существуют аналогичные соотношения. В непосредственной близости от свободно падающего в гравитационном поле наблюдателя гравитационного поля нет. Поэтому мы всегда можем рассматривать бесконечно малые области пространства как галилеевы. Тогда в такой бесконечно малой области будет существовать инерциальная система (с пространственными координатами X_1, X_2, X_3 и временно́й координатой X_4), в которой мы должны считать применимыми законы специальной теории относительности. Величина, непосредственно измеримая нашими единичными измерительными стержнями и часами,

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 - dX_4^2,$$

или, с обратным знаком,

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2, \tag{54}$$

является поэтому однозначно определенным инвариантом для двух соседних событий (точек в четырехмерном континууме), если мы только используем измерительные стержни, которые, будучи поднесены друг к другу и наложены, оказываются равными, и часы, показания которых одинаковы, когда они поднесены друг к другу. Здесь существенное значение имеет физическое предположение, что относительные длины двух измерительных стержней и относительные показания двух пар часов в принципе не зависят от их предшествующей истории. Но это предположение, конечно, подтверждается опытом; если бы оно не выполнялось, то не существовало бы резких спектральных линий, так как отдельные атомы одного и того же элемента, конечно, имеют различную историю, и было бы абсурдно допускать, что существует какое-либо относительное различие в строении отдельных атомов, обусловленное их предшествующей историей, поскольку массы и частоты отдельных атомов одного и того же элемента всегда одинаковы.

Пространственно-временны́е области конечной протяженности, вообще говоря, не будут галилеевыми, так что в конечной области никаким выбором координат нельзя исключить гравитационное поле. Поэтому нет таких координат, в которых метрические соотношения специальной теории относительности выполнялись бы в конечной области. Но для двух соседних точек (событий) континуума всегда существует инвариант ds. Его можно выразить в произвольных координатах. Если заметить, что местные dX_ν всегда можно выразить линейно через дифференциалы координат dx_ν, то ds^2 можно представить в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu \, dx_\nu. \tag{55}$$

Функции $g_{\mu\nu}$ описывают в произвольно выбранной системе координат как метрические соотношения в пространственно-временно́м континууме, так и гравитационное поле. Так же как и в специальной теории относительности, мы должны различать между временноподобными и пространственноподобными линейными элементами в четырехмерном континууме; благодаря произведенному изменению знака пространственноподобным линейным элементам отвечает мнимый, а временноподобным — вещественный интервал ds. Временноподобный интервал можно непосредственно измерить выбранными подходящим образом часами.

Из того, что сказано выше, ясно, что для формулировки общей теории относительности необходимо обобщение теории инвариантов и теории тензоров; возникает вопрос о форме уравнений, ковариантных по отношению к произвольному точечному преобразованию. Обобщенное тензорное исчисление было развито математиками задолго до теории относительности. Риман первый распространил цепь рассуждений Гаусса на континуумы произвольного числа измерений; он пророчески предвидел физическое значение этого обобщения эвклидовой геометрии. Затем последовало развитие теории в виде тензорного исчисления, особенно благодаря трудам Риччи и Леви-Чивиты. Здесь уместно кратко остановиться на наиболее важных математических понятиях и операциях тензорного исчисления.

Четыре величины, определенные как функции от x_ν в каждой системе координат, мы обозначим как компоненты A^ν контравариантного вектора, если они преобразуются при замене координат как дифференциалы координат dx_ν. Мы имеем, следовательно,

$$A^{\mu'} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} A^\nu. \tag{56}$$

Кроме этих контравариантных векторов, существуют также ковариантные векторы. Эти векторы преобразуются согласно правилу

$$B'_\mu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} B_\nu, \tag{57}$$

где B_ν — компоненты ковариантного вектора. Определение ковариантного вектора выбрано так, чтобы произведение ковариантного и контравариантного векторов представляло собой скаляр по схеме

$$\varphi = B_\nu A^\nu \quad (\text{суммирование по } \nu).$$

Действительно

$$B'_\mu A^{\mu'} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta} B_\alpha A^\beta = B_\alpha A^\alpha.$$

В частности, производные $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$ скаляра φ являются компонентами ковариантного вектора, которые вместе с дифференциалами координат образуют скаляр $\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\,dx_\alpha$; мы видим на этом примере, насколько естественно определение ковариантных векторов.

Существуют также тензоры любого ранга, которые могут обладать контравариантными или ковариантными свойствами по каждому индексу; как и в случае векторов, эти свойства указываются положением индекса. A_μ^ν, например, означает тензор второго ранга, ковариантный по индексу μ и контравариантный по индексу ν. Тензорные свойства этих величин указывают на то, что уравнениями преобразования будут

$$A_\mu^{\nu'} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta}\,A_\alpha^\beta. \tag{58}$$

Так же как в теории линейных ортогональных преобразований, можно образовывать тензоры, складывая и вычитая тензоры равного ранга и одинакового характера, например

$$A_\mu^\nu + B_\mu^\nu = C_\mu^\nu. \tag{59}$$

Доказательство тензорного характера C_μ^ν опирается на преобразование (58).

Можно образовывать тензоры путем умножения, не нарушая характера индексов, точно так же, как в теории инвариантов линейных ортогональных преобразований, например

$$A_\mu^\nu B_{\sigma\tau} = C_{\mu\sigma\tau}^\nu. \tag{60}$$

Доказательство этого равенства непосредственно следует из правила преобразования.

Тензоры можно образовывать путем свертки по двум индексам разного характера, например,

$$A_{\mu\sigma\tau}^\mu = B_{\sigma\tau}. \tag{61}$$

Тензорные свойства $A_{\mu\sigma\tau}^\mu$ определяют тензорные свойства $B_{\sigma\tau}$. Доказательство:

$$A_{\mu\sigma\tau}^{\mu'} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta}\frac{\partial x_s}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_t}{\partial x'_\tau}\qquad A_{\alpha st}^\beta = \frac{\partial x_s}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_t}{\partial x'_\tau}\,A_{\alpha st}^\alpha.$$

Симметрия и антисимметрия тензора по отношению к паре индексов одинакового характера имеют тот же смысл, что и в специальной теории относительности.

Этим сказано все существенное об алгебраических свойствах тензоров.

Фундаментальный тензор. Из инвариантности ds^2 относительно произвольного выбора dx_ν и условия симметрии, совместимого с (55), следует, что $g_{\mu\nu}$ являются компонентами симметричного ковариантного тензора (фундаментальный тензор). Образуем из $g_{\mu\nu}$ определитель g, а также деленные на g миноры для каждого $g_{\mu\nu}$. Эти деленные на g миноры будут обозначаться через $g^{\mu\nu}$; их трансформационные свойства пока еще неизвестны. Мы имеем тогда

$$g_{\mu\alpha}g^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta \equiv \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha = \beta, \\ 0, \text{ если } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{62}$$

Если мы образуем бесконечно малые величины (ковариантные векторы)

$$d\xi_\mu = g_{\mu\alpha}\, dx_\alpha, \tag{63}$$

умножим их на $g^{\mu\beta}$ и просуммируем по μ, то получим, используя (62),

$$dx_\beta = g^{\beta\mu}\, d\xi_\mu. \tag{64}$$

Поскольку отношения $d\xi_\mu$ произвольны, а dx_β, так же как и dx_μ являются компонентами вектора, то, следовательно, $g^{\mu\nu}$ — компоненты контравариантного тензора [18] (контравариантный фундаментальный тензор). Тензорные свойства δ_α^β (смешанный фундаментальный тензор) следуют соответственно из (62). При помощи фундаментального тензора мы можем вместо тензоров с ковариантным характером индексов вводить тензоры с контравариантным характером индексов и наоборот, например

$$A^\mu = g^{\mu\alpha} A_\alpha,$$

$$A_\mu = g_{\mu\alpha} A^\alpha,$$

$$T_\mu^\sigma = g^{\sigma\nu} T_{\mu\nu}.$$

---

[18] Если мы умножим (64) на $\dfrac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}$, просуммируем по β и заменим $d\xi_\mu$ путем перехода к штрихованным координатам, то получим

$$dx'_\alpha = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} g^{\mu\beta}\, d\xi'_\sigma.$$

Отсюда следует сделанное выше утверждение, поскольку, согласно (64), справедливо также и равенство $dx'_\alpha = g'^{\sigma\alpha}\, d\xi'_\sigma$ и оба уравнения должны выполняться при любом выборе $d\xi'_\sigma$.

Инвариантный объем. Элемент объема

$$\int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = dx$$

не является инвариантом. В самом деле, по теореме Якоби

$$dx' = \left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right| dx. \qquad (65)$$

Но мы можем дополнить элемент объема dx так, чтобы он превратился в инвариант. Составляя определители от обеих частей равенства

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} g_{\alpha\beta}$$

и дважды используя теорему об умножении определителей, получаем

$$g' = |g'_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\right|^2 \cdot |g_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right|^{-2} g.$$

Таким образом, мы приходим к инварианту

$$\sqrt{g'}\, dx' = \sqrt{g}\, dx. \qquad (66)$$

Образование тензоров путем дифференцирования. Хотя образование тензоров при помощи алгебраических операций оказалось столь же простым, как и в частном случае инвариантности по отношению к линейным ортогональным преобразованиям, тем не менее в общем случае инвариантные дифференциальные операции, к сожалению, значительно усложняются. Причина этого заключается в следующем. Если A^μ — контравариантный вектор, то его коэффициенты преобразования $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}$ не зависят от места только для линейных преобразований, так как в этом случае компоненты вектора в соседней точке $A^\mu + \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\alpha} dx_\alpha$ преобразуются точно так же, как A^μ, откуда следует векторный характер дифференциалов векторов и тензорный характер $\frac{\partial A'^\mu}{\partial x_\alpha}$. Но если коэффициенты $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}$ изменяются, это уже не так.

То, что, несмотря на это, и в общем случае существуют инвариантные дифференциальные операции, наиболее убедительно можно показать следующим путем, предложенным Леви-Чивитой и Вейлем. Пусть (A^μ) — контравариантный вектор с компонентами, заданными в системе координат x_ν. Пусть P_1 и P_2 — две бесконечно близкие точки континуума.

В бесконечно малой области, содержащей точку P_1, существует, согласно развитым нами представлениям, система координат X_ν (с мнимыми координатами X_4), в которой континуум становится эвклидовым. Пусть $A^\mu_{(1)}$ — координаты вектора в точке P_1. Представим себе вектор с теми же координатами, построенный в точке P_2 в локальной системе координат X_ν (параллельный вектор в точке P_2); тогда этот параллельный вектор полностью определяется вектором в P_1 и смещением. Назовем эту операцию, однозначность которой станет ясной из дальнейшего, параллельным переносом вектора (A^μ) из точки P_1 в бесконечно близкую точку P_2. Если мы составим векторную разность вектора (A^μ) в точке P_2 и вектора, полученного параллельным переносом из P_1 в P_2, то получим вектор, который можно рассматривать как дифференциал вектора (A^μ) для данного переноса (dx_ν).

Этот векторный перенос можно, конечно, рассматривать и в системе координат x_ν. Если A^ν — координаты вектора в точке P_1 и $A^\nu + \delta A^\nu$ — координаты вектора, перенесенного в точку P_2 вдоль интервала (dx_ν), то в этом случае величины δA^ν не обращаются в нуль. Относительно этих величин, не обладающих векторными свойствами, нам известно, что они должны зависеть линейно и однородно от dx_ν и A^ν. Поэтому положим

$$\delta A^\nu = -\Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\alpha dx_\beta. \tag{67}$$

Кроме того, можно утверждать, что символ $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ должен быть симметричен по индексам α и β, так как из представления в локальной эвклидовой системе координат мы можем заключить, что при переносе некоторого элемента $d^{(1)}x_\nu$ вдоль другого элемента $d^{(2)}x_\nu$ описывается тот же параллелограмм, что и при переносе $d^{(2)}x_\nu$ вдоль $d^{(1)}x_\nu$. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$d^{(2)} x_\nu + (d^{(1)} x_\nu - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} d^{(1)} x_\alpha d^{(2)} x_\beta) = d^{(1)} x_\nu + (d^{(2)} x_\nu - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} d^{(2)} x_\alpha d^{(1)} x_\beta).$$

Отсюда после перестановки в правой части равенства индексов суммирования α и β и следует сделанное выше утверждение.

Поскольку величины $g_{\mu\nu}$ определяют все метрические свойства континуума, они должны определять также $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$. Рассмотрим инвариант вектора A^ν, т. е. квадрат его модуля

$$g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu.$$

Он является инвариантом и не может изменяться при параллельном переносе. Следовательно, мы имеем

$$0 = \delta (g_{\mu\nu} A^\lambda A^\nu) = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} A^\mu A^\nu dx_\alpha + g_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu + g_{\mu\nu} A^\nu \delta A^\mu,$$

или, согласно (67),

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - g_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}\right) A^\mu A^\nu \, dx_\alpha = 0.$$

В силу симметрии стоящего в скобках выражения по индексам μ и ν, это уравнение только тогда может остаться справедливым при любом выборе векторов (A^μ) и dx_ν, когда выражение в скобках обращается в нуль при всех комбинациях индексов. Путем циклической перестановки индексов μ, ν, α получается всего три соотношения, из которых, принимая во внимание свойства симметрии $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, мы получаем

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{bmatrix} = g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu}, \tag{68}$$

где, следуя Кристоффелю, введено сокращенное обозначение

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{69}$$

Если мы умножим (68) на $g^{\sigma\alpha}$ и просуммируем по α, то получим

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right) = \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{Bmatrix}, \tag{70}$$

где $\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{Bmatrix}$ — символ Кристоффеля второго рода. Таким образом, величины Γ выведены из $g_{\mu\nu}$. Соотношения (67) и (70) послужат нам основой для последующих рассуждений.

Ковариантное дифференцирование тензоров. Если $(A^\mu + \delta A^\mu)$ — вектор, получившийся после бесконечно малого параллельного переноса из P_1 в P_2, а $(A^\mu + dA^\mu)$ — вектор A^μ в точке P_2, то их разность

$$dA^\mu - \delta A^\mu = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} A^\alpha\right) dx_\sigma$$

также есть вектор. Поскольку выбор dx_σ произволен, величина

$$A^\mu_{;\sigma} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} A^\alpha \tag{71}$$

является тензором, который мы назовем ковариантной производной от тензора первого ранга (вектора). Свертывая этот тензор, мы получаем дивергенцию контравариантного вектора A^μ. При этом мы должны учесть, что согласно (70),

$$\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\mu}. \tag{72}$$

Если мы введем, далее, величину

$$A^{\mu}\sqrt{g} = \mathfrak{A}^{\mu}, \tag{73}$$

названную Вейлем контравариантной тензорной плотностью [19] первого ранга, то отсюда следует, что

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\mu}}{\partial x_{\mu}} \tag{74}$$

есть скалярная плотность.

Правило параллельного переноса ковариантного вектора B_{μ} мы получим, потребовав, чтобы при таком параллельном переносе скаляр

$$\varphi = A^{\mu}B_{\mu}$$

не менялся и, следовательно, величина

$$A^{\mu}\delta B_{\mu} + B_{\mu}\delta A^{\mu}$$

была бы равна нулю при любых значениях A^{μ}. Мы получим, таким образом,

$$\delta B_{\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} B_{\alpha}\, dx_{\sigma}. \tag{75}$$

Тем же путем, который привел нас к (71), мы приходим отсюда к ковариантной производной ковариантного вектора

$$B_{\mu;\sigma} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} B_{\alpha}. \tag{76}$$

Меняя местами индексы μ и σ и вычитая, мы получаем антисимметричный тензор

$$\varphi_{\mu\sigma} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} - \frac{\partial B_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}. \tag{77}$$

Для ковариантного дифференцирования тензоров второго и высшего рангов можно использовать прием, которым выведено соотношение (75). Пусть, например, $(A_{\sigma\tau})$ — ковариантный тензор второго ранга. Тогда выражение $A_{\sigma\tau}E^{\sigma}F^{\tau}$ будет скаляром, если E и F — векторы. Оно не должно меняться при δ-переносе; выражая это математически, получаем,

[19] Это название оправдывается тем, что величина $A^{\mu}\sqrt{g}\,dx = \mathfrak{A}^{\mu}\,dx$ обладает тензорными свойствами. Каждый тензор, будучи умножен на $\sqrt{g}$, превращается в тензорную плотность. Для тензорных плотностей мы используем прописные буквы готического алфавита.

согласно (67), $\delta A_{\sigma\tau}$. откуда находим нужную нам ковариантную производную

$$A_{\sigma\tau;\,\rho}=\frac{\partial A_{\sigma\tau}}{\partial x_{\rho}}-\Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho}A_{\alpha\tau}-\Gamma^{\alpha}_{\tau\rho}A_{\sigma\alpha}. \qquad (78)$$

Чтобы отчетливо выявить общее правило ковариантного дифференцирования тензоров, выпишем две выведенные сходным образом ковариантные производные

$$A^{\tau}_{\sigma;\,\rho}=\frac{\partial A^{\tau}_{\sigma}}{\partial x_{\rho}}-\Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho}A^{\tau}_{\alpha}+\Gamma^{\tau}_{\alpha\rho}A^{\alpha}_{\sigma}, \qquad (79)$$

$$A^{\sigma\tau}_{;\,\rho}=\frac{\partial A^{\sigma\tau}}{\partial x_{\rho}}+\Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho}A^{\alpha\tau}+\Gamma^{\tau}_{\alpha\rho}A^{\sigma\alpha}. \qquad (80)$$

Общее правило образования ковариантных производных становится теперь очевидным. Из этих формул можно получить и другие формулы, представляющие интерес для физических приложений теории.

Если $A_{\sigma\tau}$ — антисимметричный тензор, то путем циклических перестановок и сложения мы получаем антисимметричный по всем парам индексов тензор:

$$A_{\sigma\tau\rho}=\frac{\partial A_{\sigma\tau}}{\partial x_{\rho}}+\frac{\partial A_{\tau\rho}}{\partial x_{\sigma}}+\frac{\partial A_{\rho\sigma}}{\partial x_{\tau}}. \qquad (81)$$

Если в (78) мы заменим $A_{\sigma\tau}$ на фундаментальный тензор $g_{\sigma\tau}$, то правая часть тождественно обратится в нуль; аналогичное утверждение справедливо для формулы (80) по отношению к $g^{\sigma\tau}$. Таким образом, ковариантные производные фундаментального тензора равны нулю. В том, что это должно быть так, мы непосредственно убеждаемся, перейдя к локальной системе координат.

В случае антисимметричного тензора $A^{\sigma\tau}$ мы получаем из (80), свертывая по τ и ρ,

$$\mathfrak{A}^{\sigma}=\frac{\partial\mathfrak{A}^{\sigma\tau}}{\partial x_{\tau}}. \qquad (82)$$

В общем случае, свертывая по индексам τ и ρ, мы получаем из (79) и (80) соотношения

$$\mathfrak{A}_{\sigma}=\frac{\partial\mathfrak{A}^{\alpha}_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}}-\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}\mathfrak{A}^{\beta}_{\alpha}, \qquad (83)$$

$$\mathfrak{A}^{\sigma}=\frac{\partial\mathfrak{A}^{\sigma\alpha}}{\partial x_{\alpha}}+\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\mathfrak{A}^{\alpha\beta}. \qquad (84)$$

Тензор Римана. Если мы имеем кривую, соединяющую точки континуума P и G, то вектор A^{μ}, заданный в точке P, можно перенести параллельно вдоль нашей кривой в точку G (рис. 4). В случае эвклидова континуума (или в более общем случае, если при подходящем выборе координат $g_{\mu\nu}$ оказываются постоянными) вектор, полученный в точке G

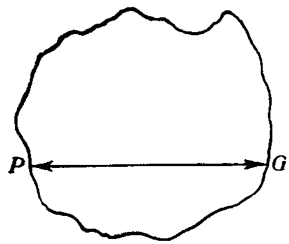


Рис. 4.

в результате этого переноса, не зависит от выбора кривой, соединяющей P и G. Однако в других случаях результат зависит от пути переноса. В этих случаях, следовательно, вектор изменяется (по направлению, но не по величине) на ΔA^{μ}, когда он из точки P, лежащей на замкнутой кривой, переносится вдоль этой кривой и возвращается обратно в P. Вычислим это изменение вектора

$$\Delta A^{\mu} = \oint \delta A^{\mu}.$$

Эту задачу можно свести к интегрированию вдоль замкнутой кривой бесконечно малых линейных размеров так же, как это делается в теореме Стокса для контурных интегралов от вектора вдоль замкнутой кривой; этим случаем мы и ограничимся.

Прежде всего, согласно (67), имеем

$$\Delta A^{\mu} = -\oint \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha}\, dx_{\beta}.$$

Здесь значение $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ берется в переменной точке G пути интегрирования. Если мы положим

$$\xi^{\mu} = (x_{\mu})_G - (x_{\mu})_P$$

и обозначим значение $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ в P через $\overline{\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}$, то с достаточной степенью точности будем иметь

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}} + \overline{\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}}\, \xi^{\nu}.$$

Пусть, далее, A^{α} получается из $\overline{A^{\alpha}}$ при параллельном переносе вдоль кривой из P в G. Тогда при помощи соотношения (67) легко доказать, что $A^\mu - \overline{A^\mu}$ — бесконечно малая первого порядка, тогда как для кривой с бесконечно малыми размерами первого порядка ΔA^μ — бесконечно малая второго порядка. Поэтому с ошибкой лишь во втором порядке можно положить

$$A^\alpha = \overline{A^\alpha} - \overline{\Gamma^\alpha_{\sigma\tau}}\,\overline{A^\sigma}\,\xi^\tau.$$

Если подставить эти значения $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ и A^α в интеграл, то, пренебрегая всеми величинами выше второго порядка малости, получаем

$$\Delta A^\mu = -\left(\frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\beta}}{\partial x_\alpha} - \Gamma^\mu_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha}\right) A^\sigma \oint \xi^\alpha d\xi^\beta. \qquad (85)$$

Величины, вынесенные из-под знака интеграла, взяты в точке P. Вычитая $\frac{1}{2} d(\xi^\alpha \xi^\beta)$ из подынтегрального выражения, получаем

$$\frac{1}{2}\oint (\xi^\alpha d\xi^\beta - \xi^\beta d\xi^\alpha).$$

Этот антисимметричный тензор второго ранга $f_{\alpha\beta}$ характеризует величину и ориентацию элемента поверхности, ограниченного кривой. Если бы выражение в скобках в правой части равенства (85) было антисимметричным по индексам α и β, мы могли бы из (85) заключить о его тензорном характере. Это можно сделать, переставляя в (85) суммирование по α и β и прибавляя к (85) получившееся уравнение. Проделав это, мы получим

$$2\Delta A^\mu = -R^\mu_{\sigma\alpha\beta} A^\sigma f^{\alpha\beta}, \qquad (86)$$

где [20]

$$R^\mu_{\sigma\alpha\beta} = -\frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\beta}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\beta} - \Gamma^\mu_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha}. \qquad (87)$$

Тензорный характер величины $R^\mu_{\sigma\alpha\beta}$ вытекает из (86); это — тензор кривизны Римана четвертого ранга. Нам нет необходимости рассматривать его свойства симметрии. Обращение его в нуль служит достаточным условием (не считая условия вещественности выбранных координат) того, что континуум эвклидов.

Свертывая тензор Римана по индексам μ и β, получаем симметричный тензор второго ранга

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}. \qquad (88)$$

[20] Теперь в литературе определение этого тензора отличается знаком.— *Прим. ред.*

Последние два члена обращаются в нуль, если система координат выбрана так, чтобы величина g была постоянной. Из $R_{\mu\nu}$ мы можем получить скаляр

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{89}$$

Прямейшие (*геодезические*) *линии*. Можно построить линию таким образом, чтобы ее последовательные элементы получились один из другого параллельными переносами. Это естественное обобщение прямой линии эвклидовой геометрии. Для таких линий мы имеем

$$\delta\left(\frac{dx_\mu}{ds}\right) = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}dx_\beta.$$

Левую часть последнего равенства следует заменить на $\frac{d^2x_\mu}{ds^2}$ [21], так что,

$$\frac{d^2x_\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0.$$

Ту же линию можно получить, если найти линию, вдоль которой интеграл, взятый между двумя точками,

$$\int ds, \quad \text{или} \int \sqrt{g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu}$$

принимает стационарное значение (геодезическая линия).

Лекция IV

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(продолжение)

У нас теперь есть математический аппарат, необходимый для формулировки законов общей теории относительности. Мы не преследуем цель дать систематическое и полное изложение, но из того, что нам уже известно, и из полученных результатов мы будем последовательно выводить отдельные новые результаты и указывать на открывающиеся перспективы. Такой метод изложения наилучшим образом соответствует современному незавершенному характеру наших знаний.

---

[21] Вектор направления в соседней точке кривой получается из вектора направления в рассматриваемой точке путем параллельного переноса его вдоль линейного элемента (dx_β).

Согласно закону инерции, материальная точка, на которую не действуют никакие силы, равномерно движется по прямой линии. В четырехмерном континууме специальной теории относительности (с вещественной временнóй координатой) это обычная прямая линия. Самым естественным, т. е. самым простым, обобщением прямой линии в системе понятий римановой общей теории инвариантов является «прямейшая», или геодезическая линия. Мы должны поэтому, в духе принципа эквивалентности, предположить, что движение материальной точки, находящейся под действием только сил инерции и тяготения, описывается уравнением

$$\frac{d^2x_\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}=0. \tag{90}$$

Действительно, это уравнение превращается в уравнение прямой, если все компоненты гравитационного поля $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль.

Как связаны эти уравнения с уравнениями движения Ньютона? Согласно специальной теории относительности, как $g_{\mu\nu}$, так и $g^{\mu\nu}$ имеют в инерциальной системе координат (при условии вещественности временнóй координаты и при соответствующем выборе знака ds^2) следующие значения:

$$\left.\begin{matrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\}. \tag{91}$$

Тогда уравнения движения принимают вид

$$\frac{d^2x_\mu}{ds^2}=0.$$

Мы будем называть это «первым приближением» для поля $g_{\mu\nu}$. При рассмотрении приближений часто бывает полезно, так же как и в специальной теории относительности, пользоваться мнимой координатой x_4, так как тогда компоненты $g_{\mu\nu}$ в первом приближении принимают значения

$$\left.\begin{matrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{matrix}\right\}. \tag{91a}$$

Эти значения можно записать в форме

$$g_{\mu\nu}=-\delta_{\mu\nu}.$$

Тогда во втором приближении мы должны положить

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{92}$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ должны рассматриваться как величины первого порядка малости.

Оба члена нашего уравнения движения будут тогда величинами первого порядка малости. Если мы пренебрегаем членами, которые по сравнению с этими являются малыми первого порядка, то мы должны положить

$$ds^2 = dx_\nu^2 = dl^2\ (1 - q^2), \tag{93}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = -\delta_{\mu\sigma}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\gamma_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\gamma_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{94}$$

Введем теперь приближение другого рода. Пусть скорость материальной точки очень мала по сравнению со скоростью света. Тогда ds совпадает с дифференциалом времени dl, а производные $\frac{dx_1}{ds}$, $\frac{dx_2}{ds}$, $\frac{dx_3}{ds}$ пренебрежимо малы по сравнению с $\frac{dx_4}{ds}$. Кроме того, мы будем предполагать, что гравитационное поле так слабо меняется с течением времени, что производными $\gamma_{\mu\nu}$ по x_4 можно пренебречь. В этом случае уравнения движения (для $\mu = 1, 2, 3$) принимают вид

$$\frac{d^2x_\mu}{dl^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\gamma_{44}}{2}\right). \tag{90a}$$

Это уравнение совпадает с уравнением движения Ньютона для материальной точки в гравитационном поле, если мы отождествим $(\gamma_{44}/2)$ с потенциалом гравитационного поля. Допустимо ли такое отождествление или нет, зависит, очевидно, от уравнений гравитации, т. е. от того, удовлетворяет ли эта величина в первом приближении тому же самому уравнению поля, что и потенциал тяготения в теории Ньютона. Достаточно одного взгляда на уравнения (90) и (90а), чтобы убедиться, что $\Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}$ действительно играют роль напряженности гравитационного поля. Эти величины на имеют тензорного характера.

Уравнения (90) выражают влияние инерции и тяготения на материальную точку. Единство инерции и тяготения формально выражается тем фактом, что левая часть уравнения (90) в целом имеет характер тензора (по отношению к любому преобразованию координат), но каждый из двух членов, взятый в отдельности, не имеет тензорного характера. По аналогии с уравнениями Ньютона первый член должен рассматриваться как выражение для силы инерции, а второй — как выражение для гравитационной силы.

Попытаемся теперь найти законы гравитационного поля. При этом нам в качестве модели послужит уравнение Пуассона в теории Ньютона

$$\Delta\varphi = 4\pi K\rho.$$

В основе этого уравнения лежит идея, что источником гравитационного поля является плотность вещества ρ. Так же должно быть и в общей теории относительности. Но специальная теория относительности показывает, что вместо скалярной плотности вещества мы должны оперировать с тензором энергии, отнесенным к единице объема. В последний включен не только тензор энергии вещества, но и электромагнитного поля. Однако на самом деле, как мы видели, описание вещества с помощью тензора энергии, с точки зрения более точной теории, следует рассматривать только как предварительное. В действительности вещество состоит из электрически заряженных частиц и должно само рассматриваться как часть, и притом главная часть, электромагнитного поля. И только тот факт, что мы недостаточно знаем законы электромагнитного поля сконцентрированных зарядов, вынуждает нас при изложении теории оставить истинную форму этого тензора пока неопределенной. С этой точки зрения наша задача теперь состоит во введении тензора второго ранга $T_{\mu\nu}$, структура которого нам пока известна лишь приблизительно и который включает в себя плотность энергии электромагнитного поля и вещества. В дальнейшем мы будем его называть «тензором энергии материи».

Согласно нашим прежним результатам, законы сохранения энергии и импульса сводятся к требованию, чтобы дивергенция этого тензора обращалась в нуль [см. (47в)]. Мы будем предполагать, что в общей теории относительности выполняется соответствующее общековариантное уравнение. Если через $(T_{\mu\nu})$ обозначить ковариантный тензор энергии материи, а через $\mathfrak{T}_\sigma^\alpha$ — соответствующую смешанную тензорную плотность, то в соответствии с (83) мы должны потребовать, чтобы удовлетворялось уравнение

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathfrak{T}_\sigma^\alpha - \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \mathfrak{T}_\alpha^\beta. \qquad (95)$$

Необходимо помнить, что, кроме плотности энергии материи, должна быть задана и плотность энергии гравитационного поля, так что не может быть и речи о законах сохранения энергии и импульса одной только материи. Математическим выражением этого факта является наличие второго члена в (95), который не допускает существования интегрального уравнения типа (49). Гравитационное поле передает «материи» энергию и импульс, подвергая ее действию сил и сообщая ей энергию; это выражается вторым членом в уравнении (95).

Если в общей теории относительности существует уравнение, аналогичное уравнению Пуассона, то оно должно быть тензорным уравнением для тензора гравитационного потенциала $g_{\mu\nu}$. Правая часть его должна содержать тензор энергии материи, а левая — тензор, составленный из производных от $g_{\mu\nu}$. Мы должны найти этот дифференциальный тензор. Он полностью определяется следующими тремя условиями: 1) он не может содержать производных от $g_{\mu\nu}$ выше второго порядка; 2) он должен быть линейным и однородным относительно вторых производных от $g_{\mu\nu}$; 3) его дивергенция должна тождественно обращаться в нуль.

Первые два из этих условий естественным образом вытекают из уравнения Пуассона. Поскольку может быть доказано математически, что все такие дифференциальные тензоры могут быть образованы алгебраическим путем (т. е. без дифференцирования) из тензора Римана, наш тензор должен иметь вид

$$R_{\mu\nu} + a g_{\mu\nu} R,$$

где $R_{\mu\nu}$ и R определяются соответственно соотношениями (88) и (89). Далее можно показать, что из третьего условия вытекает, что $a = -\,^1/_2$, и поэтому для уравнения гравитационного поля получаем

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\varkappa T_{\mu\nu}. \tag{96}$$

Уравнение (95) есть следствие этого уравнения. Здесь $\varkappa$ означает постоянную, связанную с гравитационной постоянной Ньютона.

В дальнейшем я укажу на те стороны теории, которые представляют интерес с точки зрения физики; при этом я постараюсь как можно меньше пользоваться довольно сложным математическим аппаратом теории. Прежде всего должно быть показано, что дивергенция левой части действительно равна нулю. Закон сохранения энергии для материи при помощи (83) может быть выражен уравнением

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \mathfrak{T}_\sigma^\alpha - \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \mathfrak{T}_\alpha^\beta, \tag{97}$$

где

$$\mathfrak{T}_\sigma^\alpha = T_{\sigma\tau} g^{\tau\alpha} \sqrt{-g}.$$

Произведя аналогичную операцию над левой частью уравнения (96), мы получим тождественно нуль.

В окрестности любой мировой точки существуют системы координат, относительно которых (при выборе мнимой координаты x_4) в этой точке

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1, & \text{если } \mu = \nu \\ 0, & \text{если } \mu \neq \nu \end{cases}$$

и первые производные от $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ обращаются в нуль. Покажем, что в этой точке дивергенция левой части обращается в нуль. В этой точке компоненты $\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}$ равны нулю, так что мы должны доказать равенство нулю выражения

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\sqrt{-g}\,g^{\nu\sigma}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R\right)\right].$$

Подставляя (88) и (70) в это выражение, мы видим, что в нем остаются только члены, содержащие третьи производные от $g^{\mu\nu}$. Так как $g_{\mu\nu}$ должно быть заменено на $-\delta_{\mu\nu}$, то в результате останется всего несколько членов, которые, как легко видеть, взаимно уничтожаются. Так как образованное нами выражение имеет тензорный характер, то обращение его в нуль доказано и для всех остальных систем координат, а также, естественно, и для любой другой мировой точки. Таким образом, закон сохранения энергии (97) оказывается математическим следствием уравнений поля (96).

Чтобы выяснить, согласуются ли уравнения (96) с опытом, мы должны прежде всего исследовать, приводят ли они в качестве первого приближения к теории Ньютона. Для этого мы должны сделать в этих уравнениях ряд приближений. Мы уже знаем, что эвклидова геометрия и закон постоянства скорости света справедливы с хорошей точностью в таких больших областях, как наша солнечная система. Это значит, что если мы выберем, как в специальной теории относительности, четвертую координату мнимой, то мы должны положить

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{98}$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ настолько малы по сравнению с единицей, что можно пренебречь как более высокими степенями $\gamma_{\mu\nu}$, так и их производными. Если мы это сделаем, мы не получим никаких сведений о структуре гравитационного поля или о метрическом пространстве космических размеров, но мы сможем изучить влияние соседних масс на физические явления.

Прежде чем вводить эти приближения, преобразуем уравнения (96). Умножим (96) на $g^{\mu\nu}$ и просуммируем по μ и ν. Учитывая соотношение

$$g_{\mu\nu}\,g^{\mu\nu} = 4,$$

вытекающее из определения $g^{\mu\nu}$, мы получаем уравнение

$$R = \varkappa g^{\mu\nu}\,T_{\mu\nu} = \varkappa T.$$

Подставляя это значение R в (96), получаем

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) = -\varkappa T^{*}_{\mu\nu}. \tag{96a}$$

Вводя приближения, о которых говорилось выше, получаем для левой части уравнения

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}\right),$$

или

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \gamma'_{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha}\right),$$

где мы положили

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\sigma\sigma}\delta_{\mu\nu}. \tag{99}$$

Вспомним теперь, что уравнения (96) справедливы в любой системе координат. Мы уже специализировали систему координат, выбрав ее таким образом, чтобы в изучаемой области $g_{\mu\nu}$ бесконечно мало отклонялись от постоянных значений — $\delta_{\mu\nu}$. Но это условие остается удовлетворенным при любом бесконечно малом преобразовании координат, так что мы можем наложить на $\gamma_{\mu\nu}$ еще четыре условия, если только они не меняют порядка величины $\gamma_{\mu\nu}$. Пусть система координат выбрана так, что удовлетворяются следующие четыре соотношения:

$$0 = \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{\sigma\sigma}}{\partial x_\mu}. \tag{100}$$

Тогда (96а) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = 2\varkappa T^{*}_{\mu\nu}. \tag{96б}$$

Эти уравнения могут быть решены обычным в электродинамике методом запаздывающих потенциалов; вводя не требующие разъяснений обозначения, мы получаем

$$\gamma_{\mu\nu} = -\frac{\varkappa}{2\pi}\int \frac{T^{*}_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t - r)}{r}\, dV_0. \tag{101}$$

Чтобы увидеть, в каком смысле эти уравнения содержат теорию Ньютона, мы должны более подробно рассмотреть тензор энергии материи. Феноменологически этот тензор представляет собой сумму тензоров энергии электромагнитного поля и вещества. Что касается относительной величины этих двух членов, то из результатов специальной теории относительности следует, что вклад электромагнитного поля в тензор энергии практически несуществен по сравнению с частью, соответствующей веществу. В нашей системе единиц энергия одного грамма вещества равна единице. По сравнению с ней можно пренебречь энергией электрического поля, а также энергией деформации вещества и даже химической энергией. Мы получим совершенно достаточное для наших целей приближение, если положим

$$\left.\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \sigma \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \\ ds^2 &= g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \end{aligned}\right\}. \tag{102}$$

Здесь σ — плотность в состоянии покоя, т. е. плотность вещества в обычном смысле слова, измеренная с помощью единичного измерительного стержня и отнесенная к галилеевой системе координат, движущейся вместе с веществом.

Заметим далее, что в выбранной нами системе координат замена $g_{\mu\nu}$ на $-\delta_{\mu\nu}$ приведет лишь к сравнительно малой ошибке. Поэтому мы примем, что

$$ds^2 = -\sum dx_\mu^2. \tag{102a}$$

Предыдущие выводы не зависят от того, с какой скоростью движутся относительно избранной нами системы квазигалилеевых координат создающие поле массы. В астрономии, однако, приходится иметь дело с массами, скорости которых относительно используемой системы координат всегда малы по сравнению со скоростью света, т. е. при нашем выборе единицы времени малы по сравнению с 1. Следовательно, мы получим достаточное почти для всех практических целей приближение, если в (101) заменим запаздывающий потенциал обычным (незапаздывающим) потенциалом, и для масс, создающих поле, положим

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_2}{ds} = \frac{dx_3}{ds} = 0. \\ &\frac{dx_4}{ds} = \frac{\sqrt{-1}\,dl}{dl} = \sqrt{-1}. \end{aligned} \tag{103}$$

Тогда для $T^{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$ мы получим значения

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{matrix}\right\}. \tag{104}$$

При этом T равно σ, а компоненты $T^{*}_{\mu\nu}$ равны

$$\left.\begin{array}{cccc} \frac{\sigma}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sigma}{2} \end{array}\right\} . \qquad (104а)$$

Используя эти значения, из (101) получаем

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -\frac{\varkappa}{4\pi}\int \frac{\sigma dV_0}{r}; \qquad \gamma_{44} = \frac{\varkappa}{4\pi}\int \frac{\sigma dV_0}{r}, \qquad (101а)$$

а все остальные компоненты $\gamma_{\mu\nu}$ равны нулю. Последнее из этих уравнений, совместно с уравнением (90а), содержит в себе теорию тяготения Ньютона. Если мы заменим l на ct, то получим

$$\frac{d^2x_\mu}{dt^2} = \frac{\varkappa c^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\int \frac{\sigma dV_0}{r}. \qquad (90б)$$

Мы видим, что ньютоновская гравитационная постоянная K связана с постоянной $\varkappa$, входящей в наши уравнения, соотношением

$$K = \frac{\varkappa c^2}{8\pi}. \qquad (105)$$

Из известного численного значения K следует, что

$$\varkappa = \frac{8\pi K}{c^2} = \frac{8\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-8}}{9 \cdot 10^{20}} = 1,86 \cdot 10^{-27}. \qquad (105а)$$

Из соотношения (101) видно, что даже в первом приближении структура гравитационного поля коренным образом отличается от структуры поля, которая вытекает из теории Ньютона. Отличие заключается в том, что гравитационный потенциал является тензором, а не скаляром. Это не было обнаружено ранее, поскольку в уравнения движения материальных тел в первом приближении входит только одна компонента g_{44}.

Чтобы на основании наших результатов сделать заключение о поведении измерительных стержней и часов, необходимо обратить внимание на следующие факты. Согласно принципу эквивалентности, метрические соотношения эвклидовой геометрии остаются справедливыми относительно декартовой системы координат бесконечно малых размеров, находящейся в соответствующем состоянии движения (свободное падение без вращения). Это утверждение верно и для локальных систем координат, имеющих малое ускорение относительно последней, а следовательно, и для систем координат, покоящихся относительно избранной нами системы. Для интервала между двумя соседними событиями в такой локальной системе координат мы имеем

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dT^2 = -dS^2 + dT^2,$$

где dS непосредственно измеряется при помощи измерительного стержня, а dT — при помощи часов, покоящихся относительно этой системы; это — естественно измеренные длина и время. Поскольку, с другой стороны, для ds^2 известно выражение через координаты x_ν, используемые в конечных областях,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

мы можем получить соотношение между естественным образом измеренными длиной и временем и соответствующими разностями координат. Так как разделение на пространство и время происходит в обеих системах координат одинаково, то, приравнивая два выражения для ds^2, мы получаем два соотношения. Если, согласно (101а), положим

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(1 - \frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right) dl^2,$$

то с хорошим приближением получим

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2} &= \left(1 + \frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}, \\ dT &= \left(1 - \frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right) dl. \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

Следовательно, в избранной нами системе координат единичный измерительный стержень имеет длину

$$1 - \frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}.$$

Сделанный нами выбор системы координат гарантирует, что длина стержня зависит только от местонахождения стержня, но не от его ориентации. При другом выборе системы координат это было бы не так. Но какую бы мы ни выбрали систему координат, законы конфигурации твердых стержней не совпадут с законами эвклидовой геометрии. Другими словами, мы не можем подобрать такую систему координат, в которой разности координат Δx_1, Δx_2, Δx_3, соответствующие концам произвольно ориентированного единичного измерительного стержня, всегда бы удовлетворяли соотношению $\Delta x_1{}^2 + \Delta x_2{}^2 + \Delta x_3{}^2 = 1$. В этом смысле пространство не является эвклидовым, оно «искривлено». Из второго соотношения (106) следует, что промежутку времени между двумя ударами часов ($dT = 1$) в принятых в нашей системе координат единицах соответствует «время»

$$1 + \frac{\varkappa}{8\pi} \int \frac{\sigma dV_0}{r}.$$

В соответствии с этим часы идут тем медленнее, чем больше масса вещества, находящегося вблизи них. Отсюда мы заключаем, что спектральные линии излучения солнечной поверхности будут сдвинуты в красную сторону спектра по сравнению с соответствующими линиями земного происхождения на величину, примерно равную $2 \cdot 10^{-6}$ их длины волны. Сначала казалось, что этот важный вывод теории не согласуется с экспериментом, однако результаты последних лет делают существование этого эффекта более вероятным. Вряд ли можно сомневаться, что это следствие теории будет экспериментально подтверждено в ближайшем будущем.[22]

Другое важное следствие теории, которое может быть подвергнуто экспериментальной проверке, касается траектории светового луча. В общей теории относительности скорость распространения света тоже постоянна, если ее измерять в локальной инерциальной системе координат. При нашем естественном выборе единицы времени эта скорость равна 1. Таким образом, согласно общей теории относительности, закон распространения света в произвольной системе координат описывается уравнением

$$ds^2 = 0.$$

В используемом нами приближении в избранной системе координат скорость света характеризуется, согласно (106), уравнением

$$\left(1 + \frac{\varkappa}{4\pi} \int \frac{\sigma dV_0}{r}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = \left(1 - \frac{\varkappa}{4\pi} \int \frac{\sigma dV_0}{r}\right) dl^2.$$

Следовательно, скорость света L в нашей системе координат получается равной

$$\frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}}{dl} = 1 - \frac{\varkappa}{4\pi} \int \frac{\sigma dV_0}{r}. \qquad (107)$$

Отсюда можно сделать заключение, что при прохождении вблизи большой массы луч света отклоняется от первоначального направления. Если мы вообразим себе массу Солнца M сосредоточенной в начале нашей системы координат, то луч света, распространяющийся в плоскости (x_1, x_3)

[22] Эффект красного смещения качественно подтвержден.— *Прим. ред.*

параллельно оси x_3 на расстоянии Δ от начала координат, в итоге отклонится по направлению к Солнцу на величину

$$\alpha = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L} \frac{dL}{dx_1} dx_3.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$\alpha = \frac{\varkappa M}{2\pi\Delta}. \tag{108}$$

Наличие этого отклонения, которое равно 1,7'' для Δ, равного радиусу Солнца, было с замечательной точностью подтверждено английской экспедицией по изучению солнечного затмения в 1919 г.; были проведены тщательные приготовления для получения более точных данных во время солнечного затмения 1922 г. Следует заметить, что и этот результат теории не зависит от выбора системы координат.

Здесь же уместно указать и на третье следствие теории, поддающееся экспериментальной проверке; оно связано с движением перигелия планеты Меркурий. Вековые изменения планетных орбит известны с такой точностью, что использовавшееся нами приближение становится недостаточным для сравнения теории с данными опыта. Нам необходимо вернуться к общим уравнениям поля (96). При решении этой проблемы я пользовался методом последовательных приближений. С тех пор, однако, проблема статического центрально-симметричного гравитационного поля была полностью решена Шварцшильдом и др.; особенно изящен вывод, данный Г. Вейлем в его книге «Пространство, время, материя»[23]. Вычисления несколько упрощаются, если исходить не из уравнения (96) непосредственно, а из вариационного принципа, эквивалентного этому уравнению. Укажем здесь лишь общий ход рассуждений, чтобы дать понятие о методе решения.

В случае статического поля ds^2 должно иметь вид

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= -d\sigma^2 + f^2\,dx_4^2 \\ d\sigma^2 &= \sum_1^3 \gamma_{\alpha\beta}\,dx_\alpha\,dx_\beta \end{aligned}\right\}, \tag{109}$$

где в последнем равенстве суммирование распространяется лишь на пространственные координаты. Центральная симметрия поля требует, чтобы $\gamma_{\mu\nu}$ имели вид

$$\gamma_{\alpha\beta} = \mu\delta_{\alpha\beta} + \lambda x_\alpha x_\beta, \tag{110}$$

[23] См. примечание на стр. 108.— *Прим. ред.*

а f^2, μ и λ были бы функциями только от $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Одна из этих трех функций может быть выбрана произвольно, так как выбор нашей системы координат a priori совершенно произволен; действительно, подстановкой

$$x'_4 = x_4,$$
$$x'_\alpha = F(r)\, x_\alpha,$$

всегда можно добиться того, чтобы одна из этих трех функций была любой наперед заданной функцией r'. Поэтому без ограничения общности вместо (110) можно положить

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \lambda x_\alpha x_\beta. \tag{110a}$$

Таким образом, $g_{\mu\nu}$ выражаются через две величины λ и f. Зависимость этих величин от r определяется путем подстановки их в уравнение (96), в котором $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ вычислены с помощью соотношений (107) и (108):

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{x_\sigma}{r}\frac{\lambda x_\alpha x_\beta + 2\lambda r \delta_{\alpha\beta}}{1+\lambda r^2} && (\text{при } \alpha, \beta, \sigma = 1, 2, 3), \\ &\Gamma^4_{44} = \Gamma^\alpha_{4\beta} = \Gamma^4_{\alpha\beta} = 0 && (\text{при } \alpha, \beta = 1, 2, 3), \\ &\Gamma^4_{4\alpha} = \frac{1}{2} f^{-2}\frac{\partial f^2}{\partial x_\alpha}, \quad \Gamma^\alpha_{44} = -\frac{1}{2} f^{-2}\frac{\partial f^2}{\partial x_\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{108a}$$

С помощью этих соотношений из уравнений поля получается следующее решение Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{A}{r}\right) dl^2 - \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{A}{r}} + r^2 (\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\right], \tag{109}$$

мы положили

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 1 \\ x_1 &= r\sin\theta\,\sin\varphi \\ x_2 &= r\sin\theta\,\cos\varphi \\ x_3 &= r\cos\theta \\ A &= \frac{\varkappa M}{\pi 4} \end{aligned}\right\}. \tag{109a}$$

Здесь M — масса Солнца, сферически-симметрично распределенная вокруг начала координат. Решение (109) справедливо только вне этой массы, где все $T_{\mu\nu}$ равны нулю. Если движение планеты происходит в плоскости (x_1, x_2), то мы должны заменить (109) на

$$ds^2 = \left(1 - \frac{A}{r}\right) dl^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{A}{r}} - r^2 d\varphi^2. \tag{109б}$$

При расчете орбиты планеты будем исходить из уравнения (90). Из первых соотношений (108а) и уравнения (90) мы получаем (для индексов 1, 2, 3)

$$\frac{d}{ds}\left(x_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} - x_\beta \frac{dx_\alpha}{ds}\right) = 0,$$

или, после интегрирования и перехода к полярным координатам,

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{const}. \tag{111}$$

Для $\mu = 4$ из (90) получаем

$$0 = \frac{d^2 l}{ds^2} + \frac{1}{f^2}\frac{df^2}{dx_\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds} = \frac{d^2 l}{ds^2} + \frac{1}{f^2}\frac{df^2}{ds}.$$

Отсюда, после умножения на f^2 и интегрирования, имеем:

$$f^2 \frac{dl}{ds} = \text{const}. \tag{112}$$

Соотношения (109б), (111) и (112) дают нам три уравнения для четырех переменных s, r, l и φ, из которых орбита планеты может быть вычислена таким же образом, как и в классической механике. Наиболее важным результатом этих вычислений является вековое вращение эллиптической орбиты планеты в направлении обращения планеты по орбите, причем угол поворота орбиты за одно обращение планеты равен

$$\frac{24\pi^3 a^2}{(1 - e^2)\, c^2 T^2}, \tag{113}$$

где a — большая полуось орбиты в сантиметрах, e — эксцентриситет орбиты, $c = 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек* — скорость света в пустоте, T — период обращения планеты в секундах. Таким путем удается объяснить движение перигелия Меркурия, которое было известно еще сто лет назад (со времен Леверье), но которому теоретическая астрономия до сих пор не могла дать удовлетворительного объяснения.

Не представляет труда изложить теорию электромагнитного поля Максвелла на языке общей теории относительности. Для этого необходимо использовать правила образования тензоров (81), (82) и (77). Введем четырехмерный вектор-потенциал электромагнитного поля φ_μ, являющийся тензором первого ранга. Тензор электромагнитного поля может быть определен с помощью соотношения

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{dx_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{114}$$

Вторая пара уравнений Максвелла записывается тогда в виде тензорного уравнения, вытекающего из (114):

$$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial \varphi_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \varphi_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{114a}$$

а первая пара уравнений Максвелла может быть представлена с помощью тензорной плотности в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathfrak{F}^{\mu\nu} = \mathfrak{J}^\mu, \tag{115}$$

где

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \varphi_{\sigma\tau},$$

$$\mathfrak{J}^\mu = \sqrt{-g}\rho \frac{dx_\mu}{ds}.$$

Если подставить тензор энергии электромагнитного поля в правую часть уравнения (96) и взять дивергенцию от обеих частей, то получится уравнение (115) для частного случая $\mathfrak{J}^\mu = 0$. Такое включение теории электричества в схему общей теории относительности многие теоретики считали необоснованным и неудовлетворительным. Кроме того, таким путем нельзя объяснить равновесие электрических зарядов, из которых построены элементарные заряженные частицы. Более предпочтительной была бы теория, в которой гравитационное и электромагнитное поля не выступали бы как логически разобщенные понятия. Г. Вейль и недавно Т. Калуца установили в этом направлении ряд замечательных теорем, но я уверен, что они не приближают нас к действительному решению основной проблемы. Я не буду здесь входить в подробности этого вопроса, а вкратце остановлюсь на так называемой космологической проблеме, так как без этого остаются в некотором смысле неудовлетворительными соображения, приведшие нас к общей теории относительности.

Наши прежние рассуждения, основывавшиеся на уравнениях поля (96), исходили из предположения, что пространство в целом является пространством Эвклида — Галилея и что этот характер пространства нарушается только присутствием масс. Такое предположение безусловно оправдано до тех пор, пока мы имеем дело с областями пространства, с которыми обычно работают астрономы. Однако совсем другой вопрос, остаются ли квазиэвклидовыми сколь угодно большие области пространства. Чтобы пояснить это, рассмотрим пример из теории поверхностей, которым мы уже неоднократно пользовались. Если какая-то часть поверхности на глаз кажется практически плоской, то это вовсе не означает, что вся поверхность является плоскостью; эта поверхность с таким же успехом может быть сферой достаточно большого радиуса. Вопрос о том, является ли Вселенная в целом неэвклидовой, многократно обсуждался с геометрической точки зрения еще до создания теории относительности. Однако с развитием последней эта проблема вступила в новый этап, так как, согласно общей теории относительности, геометрические свойства тел не задаются сами по себе, а связаны с распределением масс.

Если бы Вселенная была квазиэвклидова, то это означало бы, что Мах был совершенно неправ, полагая, что инерция так же, как и тяготение, зависит от характера взаимодействия между телами. Действительно, в этом случае при удачном выборе системы координат $g_{\mu\nu}$ были бы постоянными на бесконечности, как это принимается в специальной теории относительности, а в конечных областях при подходящем выборе системы координат лишь немного отклонялись бы от этих постоянных значений вследствие влияния масс в этих областях. Физические свойства пространства тогда были бы в общих чертах не связаны с материей, хотя и не были бы полностью независимыми от нее, но были бы обусловлены ею в весьма слабой степени. Такая дуалистическая концепция неудовлетворительна уже сама по себе; кроме того, против нее можно выдвинуть веские физические соображения, которые мы и рассмотрим ниже.

Гипотеза, согласно которой Вселенная бесконечна и эвклидова на бесконечности, является, с точки зрения теории относительности, довольно сложной гипотезой. На языке общей теории относительности такая гипотеза требует, чтобы тензор Римана четвертого ранга R_{iklm} обращался бы в нуль на бесконечности, что дает 20 независимых условий, тогда как только 10 компонент тензора кривизны $R_{\mu\nu}$ входят в уравнения гравитационного поля. Нельзя удовлетвориться постулированием столь далеко идущего ограничения, не имея для этого каких-либо физических оснований.

Между тем теория относительности дает основания полагать, что Мах был на правильном пути, когда он высказал мысль о зависимости инерции от характера взаимодействия между телами. Ниже мы покажем, что, согласно нашим уравнениям, инертные массы действуют друг на друга в смысле относительности инерции, хотя и очень слабо. Что мы можем ожидать, если будем следовать идеям Маха?

1. Инерция тела должна возрастать по мере скопления весомых масс вблизи него.

2. Тело должно испытывать ускоряющую силу, когда близлежащие массы ускоряются; эта сила по направлению должна совпадать с направлением ускорения.

3. Вращающееся полое тело должно создавать внутри себя «поле кориолисовых сил», стремящееся отклонить движущиеся тела в направлении вращения, а также создавать радиальное поле центробежных сил.

Мы сейчас покажем, что все эти три эффекта, существование которых следует ожидать с точки зрения идей Маха, действительно существуют согласно нашей теории; величина этих эффектов так мала, что об их экспериментальном подтверждении в лабораторных условиях нечего и думать. Для этого мы вернемся к уравнениям движения материальной точки (90) и исследуем более высокие приближения, чем то, которое привело нас к уравнению (90а).

Прежде всего мы будем считать γ_{44} величиной первого порядка малости. Квадрат скорости тела, движущегося под влиянием гравитационных сил, согласно выражению для энергии, есть величина того же порядка. Поэтому логично считать скорости как рассматриваемых тел, так и тел, создающих гравитационное поле, малыми величинами порядка $^1/_2$. Уравнения, следующие из уравнений движения (90) и уравнений поля (101), мы примем в том виде, который получится, если во втором слагаемом в (90) оставить лишь члены, линейные по скоростям. Далее, мы не будем считать ds и dl равными друг другу, а, учтя дальнейшие члены разложения, положим

$$ds = \sqrt{g_{44}}\,dl = \left(1 - \frac{\gamma_{44}}{2}\right)dl.$$

Из (90) мы получаем сначала

$$\frac{d}{dl}\left[\left(1 + \frac{\gamma_{44}}{2}\right)\frac{dx_\mu}{dl}\right] = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dl}\frac{dx_\beta}{dl}\left(1 + \frac{\gamma_{44}}{2}\right). \tag{116}$$

Из (101) в нашем приближении следует

$$\left.\begin{aligned} -\gamma_{11} = -\gamma_{22} = -\gamma_{33} = \gamma_{44} &= \frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r},\\ \gamma_{4\alpha} &= -\frac{i\varkappa}{2}\int\frac{\sigma\frac{dx_\alpha}{ds}dV_0}{r},\\ \gamma_{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{117}$$

где α и β означают только пространственные индексы.

В правой части уравнения (116) мы можем заменить $1 + (\gamma_{44}/2)$ на 1 и $-\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ на $\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{bmatrix}$. Кроме того, легко видеть, что в нашем приближении мы должны положить

$$\begin{bmatrix}44\\ \mu\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial\gamma_{4\mu}}{\partial x_4},$$

$$\begin{bmatrix}\alpha 4\\ \mu\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{4\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\gamma_{4\alpha}}{\partial x_\mu}\right),$$

$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{bmatrix} = 0,$$

где α, β и μ обозначают только пространственные индексы. Мы получаем тогда из (116) в обычных векторных обозначениях

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dl}[(1+\bar{\sigma})\mathrm{v}] &= \operatorname{grad}\bar{\sigma} + \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial l} + [\operatorname{rot}\mathfrak{A}, \mathrm{v}], \\ \bar{\sigma} &= \frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}, \\ \mathfrak{A} &= \frac{\varkappa}{2}\int\frac{\sigma\dfrac{dx_\alpha}{dl}dV_0}{r} \end{aligned}\right\}. \tag{118}$$

Из уравнений движения (118) действительно следует, что:

1. Инертная масса пропорциональна $1+\bar{\sigma}$ и поэтому возрастает по мере приближения весомых масс к нашему «пробному телу».

2. Ускоряющиеся массы оказывают индукционное действие на пробное тело в направлении ускорения, что описывается членом $\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial l}$.

3. Материальная точка, движущаяся внутри полого вращающегося тела перпендикулярно оси вращения, отклоняется в направлении вращения (силы Кориолиса). Упоминавшийся выше центробежный эффект внутри вращающегося полого тела также следует из теории, как это было показано Тиррингом [24].

Хотя вследствие малости постоянной $\varkappa$ все эти эффекты нельзя наблюдать на опыте, они, несомненно, существуют. Это следует из общей теории относительности. Существование этих эффектов является сильным аргументом в пользу идей Маха об относительности всех инерциальных воздействий. Последовательно проводя эту точку зрения до конца, мы должны ожидать, что *вся* инерция, т. е. *все* поле $g_{\mu\nu}$, определяется в первую очередь распределением материи во Вселенной, а не граничными условиями на бесконечности.

Для построения удовлетворительной концепции поля $g_{\mu\nu}$ космических размеров, по-видимому, важен тот факт, что относительные скорости

[24] То, что центробежное действие неразрывно связано с существованием кориолисова поля, можно понять даже без вычислений. Для этого достаточно рассмотреть координатную систему, равномерно вращающуюся по отношению к инерциальной системе. Наши общековариантные уравнения, конечно, применимы и в такой системе координат.

звезд малы по сравнению со скоростью света. Действительно, отсюда следует, что при соответствующем выборе координатной системы, g_{44} почти постоянна во Вселенной, по крайней мере в той ее части, в которой имеется материя. Более того, кажется естественным допустить, что звезды имеются во всех частях Вселенной. Тогда можно предположить, что непостоянство g_{44} связано только с тем обстоятельством, что вещество не распределено непрерывно, а сосредоточено в отдельных небесных телах или системах тел. Если мы, желая изучить геометрические свойства Вселенной как целого, захотим пренебречь этими местными неоднородностями плотности вещества и поля $g_{\mu\nu}$, то естественно заменить фактическое распределение масс непрерывным распределением и, кроме того, приписать этому распределению постоянную плотность σ. В такой воображаемой Вселенной все пространственные точки и направления в пространстве будут геометрически эквивалентны; в своих пространственных измерениях она будет обладать постоянной кривизной и будет цилиндрической по отношению к x_4-координате. Особенно привлекательным в этой схеме является то, что Вселенная оказывается пространственно ограниченной и, согласно нашему предположению о постоянстве плотности σ, обладает постоянной кривизной, будучи сферической или эллиптической. В этом случае граничные условия на бесконечности, столь неудобные с точки зрения общей теории относительности, заменяются гораздо более естественными условиями для замкнутой поверхности [25].

Итак, согласно сказанному, положим

$$ds^2 = dx_4^2 - \gamma_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \tag{119}$$

где индексы μ и ν пробегают только значения от 1 до 3. Величины $\gamma_{\mu\nu}$ должны быть такими функциями x_1, x_2 и x_3, чтобы описывать трехмерный континуум с постоянной положительной кривизной. Мы должны теперь исследовать, можно ли удовлетворить такому предположению, исходя из уравнений гравитационного поля.

Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны сначала найти дифференциальные соотношения, которым удовлетворяет трехмерное многообразие постоянной кривизны. Сферическое трехмерное многообразие, погруженное в эвклидово пространство четырех измерений [26], определяется уравнениями:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$
$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = ds^2.$$

[25] Ср. статью 69.— *Прим. ред.*

[26] Четвертое пространственное измерение вводится здесь, конечно, исключительно из соображений математического удобства.

Исключая из обоих уравнений x_4, получаем

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}.$$

Пренебрегая членами, содержащими x_ν в третьей и более высоких степенях, мы можем вблизи начала координат положить

$$ds^2 = \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{a^2}\right) dx_\mu \, dx_\nu.$$

Выражение в скобках дает $g_{\mu\nu}$ рассматриваемого многообразия в окрестности начала координат. Поскольку первые производные $g_{\mu\nu}$, а следовательно и $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$, обращаются в нуль в начале координат, величина $R_{\mu\nu}$ для этого многообразия может быть очень легко вычислена в начале координат при помощи формулы (88). Тогда получим

$$R_{\mu\nu} = \frac{2}{a^2}\,\delta_{\mu\nu} = \frac{2}{a^2}\,g_{\mu\nu}.$$

Поскольку равенство $R_{\mu\nu} = (2/a^2) g_{\mu\nu}$ ковариантно, а все точки нашего многообразия геометрически эквивалентны, это соотношение справедливо для любой системы координат и в любой точке многообразия. Во избежание путаницы, с четырехмерным континуумом будем в дальнейшем величины, относящиеся к трехмерному континууму, обозначать греческими буквами, соответственно чему перепишем приведенное выше равенство в виде

$$\mathrm{P}_{\mu\nu} = -\frac{2}{a^2}\,\gamma_{\mu\nu}. \tag{120}$$

Применим теперь уравнения поля (96) к нашему случаю. Из (119) мы получим для четырехмерного многообразия:

$$\left.\begin{array}{l} R_{\mu\nu} = \mathrm{P}_{\mu\nu} \ \text{ для индексов от 1 до 3} \\ R_{14} = R_{24} = R_{34} = R_{44} = 0 \end{array}\right\}. \tag{121}$$

Чтобы написать правую часть уравнения (96), рассмотрим тензор энергии для вещества, распределенного наподобие облака пыли. Согласно сказанному выше, мы должны положить

$$T^{\mu\nu} = \sigma \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds},$$

считая при этом, что все находится в покое. Но дополнительно мы добавим к этому выражению член, описывающий давление. Необходимость его можно физически обосновать следующим образом. Вещество состоит из электрически заряженных частиц. В рамках теории Максвелла они не могут быть описаны как свободные от особенностей электромагнитные поля. Чтобы не противоречить фактам, в выражение для энергии необходимо ввести дополнительные члены, не содержащиеся в теории Максвелла, которые обеспечили бы устойчивость электрически заряженных частиц, несмотря на взаимное отталкивание составляющих их одноименно заряженных частей. Именно в связи с этим Пуанкаре предположил, что внутри этих частиц существует давление, которое и компенсирует электростатическое отталкивание. Нельзя, однако, определенно утверждать, что это давление обращается в нуль вне частиц. Мы придем к согласию с этими представлениями, если в нашем феноменологическом рассмотрении добавим член, описывающий давление. Это давление, однако, не следует смешивать с гидродинамическим, поскольку оно служит лишь энергетическим выражением динамических связей внутри вещества. В этом смысле мы полагаем

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \sigma \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} - g_{\mu\nu} p. \tag{122}$$

В нашем частном случае мы должны, следовательно, положить

$$T_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} p \quad (\text{для } \mu \text{ и } \nu \text{ от 1 до 3}),$$

$$T_{44} = \sigma - p,$$

$$T = -\gamma^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} p + \sigma - p = \sigma - 4p.$$

Замечая, что уравнения поля (96) можно записать в форме

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right),$$

из (96) получаем уравнения:

$$\frac{2}{a^2}\gamma_{\mu\nu} = \varkappa \left(\frac{\sigma}{2} - p \right) \gamma_{\mu\nu},$$

$$0 = -\varkappa \left(\frac{\sigma}{2} + p \right).$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{\sigma}{2} \\ a &= \sqrt{\frac{2}{\varkappa\sigma}} \end{aligned} \right\}. \tag{123}$$

Если Вселенная квазиэвклидова, и, следовательно, ее радиус кривизны бесконечен, то σ должна быть равна нулю. Однако маловероятно, чтобы средняя плотность вещества во Вселенной была бы действительно равна нулю. Это является нашим третьим аргументом против предположения, что Вселенная квазиэвклидова. Вряд ли можно также ожидать, что обращается в нуль наше гипотетическое давление, хотя физическая природа этого давления сможет быть выяснена только после того, как мы глубже поймем законы электромагнитного поля. Согласно второму из уравнений (123), радиус Вселенной a определяется через полную массу материи M с помощью соотношения

$$a = \frac{M\varkappa}{4\pi^2}. \tag{124}$$

Из этого соотношения становится совершенно ясной полная зависимость геометрических свойств от физических.

Итак, мы можем выдвинуть следующие аргументы против концепции пространственно-бесконечной Вселенной, которые в то же время являются аргументами в пользу представлений о пространственно-ограниченной Вселенной.

1. С точки зрения теории относительности условия для замкнутой поверхности гораздо проще, чем соответствующие граничные условия на бесконечности в случае квазиэвклидовой структуры Вселенной.

2. Высказанная Махом идея, что инерция определяется взаимодействием тел, содержится в первом приближении в уравнениях теории относительности; из этих уравнений следует, что инерция, по крайней мере частично, зависит от взаимодействия между массами. Поскольку кажется неудовлетворительным предположение о том, что инерция частично зависит от взаимодействия, а частично от независимых свойств пространства, идеи Маха становятся более правдоподобными. Но идеи Маха согласуются только с предположением о конечной Вселенной, ограниченной в пространстве, и не согласуются с концепцией квазиэвклидовой бесконечной Вселенной. С гносеологической точки зрения, гораздо более оправдана мысль, что механические свойства пространства полностью определяются материей, а это может быть только в случае пространственно-ограниченной Вселенной.

3. Бесконечная Вселенная возможна только, если средняя плотность материи во Вселенной равна нулю. Хотя такое предположение и возможно логически, оно менее вероятно, чем предположение о конечной средней плотности материи во Вселенной.

Книга вышла первоначально в английском переводе в издании Принстонского университета (США), где в мае 1921 г. были прочитаны лекции Эйнштейна.

Немецкое издание вышло годом позже (1922 г.) под названием: «Vier Vorlesungen über Relativitätheorie, gehalten in Mai, 1921 an der Universität Princeton» (Vieweg, Braunschweig). Во втором принстонском издании 1945 г. было добавлено приложение I (см. статью 126) «О космологической проблеме» (это издание было повторено в Англии в 1946 г.).

Третье принстонское издание (1945 г.) содержало второе приложение, посвященное единой теории поля. Это приложение было полностью переработано в четвертом принстонском издании (1953 г.), в котором еще была сделана отдельная вкладка (в таком виде приложение II напечатано как статья 140). В пятом издании приложение II полностью переработано (см. статью 145).

С четвертого издания был сделан и русский перевод (М., ИЛ, 1955). Русский перевод первого издания выходил дважды под названием «Основы теории относительности» (издательство «Сеятель», Пг., 1923 и М.— Л., ГТТИ, 1935).

В Англии выходило пять изданий. Пятое английское издание вышло в 1955 г. (Metheun, London, 1955). Оно повторяет четвертое принстонское издание.

Существуют переводы на польский язык (1923 г.), французский (1924 г.), испанский (1948 г.).

«Сущность теории относительности», кроме педагогического значения, замечательна тем, что в ней отражены этапы развития идей Эйнштейна и, в частности, его взглядов на общий принцип относительности и на связь этого принципа с вопросами космологии. В основном тексте книги Эйнштейн приходит к выводу о необходимости пространственной ограниченности мира и необходимости введения отрицательного давления — космологической постоянной.

В приложении ко второму изданию Эйнштейн рассматривает уже все решения уравнений тяготения и отбрасывает космологическую постоянную. После признания работы Фридмана (см. статью 69) Эйнштейн оставляет идею статической Вселенной. Приложение II, несколько раз переделывавшееся (см. примечание редактора после статьи 140), отражает изменяющиеся взгляды на возможность включения электромагнитных полей в геометрическую схему.

ГЕОМЕТРИЯ И ОПЫТ*

Из всех наук математика пользуется особым уважением, потому что ее теоремы абсолютно верны и неоспоримы, тогда как законы других наук в известной степени спорны и всегда существует опасность их опровержения новыми открытиями. Однако исследователю, работающему в какой-либо другой области науки, не приходится завидовать математику, так как положения математики покоятся не на реальных объектах, а исключительно на объектах нашего воображения. В самом деле, нет ничего удивительного в том, что можно прийти к логически согласованным выводам, если сначала пришли к соглашению относительно основных положений (аксиом), а также относительно тех приемов, при помощи которых из этих основных положений выводятся другие теоремы. В то же время это глубокое уважение к математике имеет и другое основание, а именно: математика является тем, что дает точным наукам известную меру уверенности; без математики они ее не могли бы достичь.

В связи с этим возникает вопрос, который волновал исследователей всех времен. Почему возможно такое превосходное соответствие математики с реальными предметами, если сама она является произведением только человеческой мысли, не связанной ни с каким опытом? Может ли человеческий разум без всякого опыта, путем только одного размышления понять свойства реальных вещей?

На мой взгляд, ответ на этот вопрос вкратце таков: если теоремы математики прилагаются к отражению реального мира, они не точны; они точны до тех пор, пока они не ссылаются на действительность. Полной ясности в этом вопросе, как мне кажется, можно достичь лишь с помощью того направления в математике, которое известно как «аксиоматика».

* *Geometrie und Erfahrung*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1921, T. 1, 123—130. (Расширенное изложение доклада на торжественном заседании Прусской академии наук в Берлине 27 января 1921 г.).

Прогресс, достигнутый аксиоматикой, заключается в том, что она четко разграничила логически-формальное от его объективного или наглядного содержания. Согласно аксиоматическому подходу, только логически-формальное составляет предмет математики; но наглядное или какое-либо другое содержание математики, не связанное с логически-формальным, не имеет отношения к математике.

Рассмотрим с этой точки зрения какую-либо аксиому геометрии, например, следующую: через любые две точки в пространстве всегда можно провести одну и только одну прямую. Как истолковать эту аксиому в старом смысле и как — в более современном?

Старая интерпретация. Всякий знает, что такое прямая и что такое точка. Математику нет необходимости решать вопрос о том, откуда мы черпаем эти знания: из мощи человеческого духа или из опыта, из некоторого взаимодействия того и другого или из какого-либо иного источника. Решение этого вопроса математик предоставляет философам. Будучи основанной на этих знаниях, происходящих из всей математики, упомянутая выше аксиома (как и все другие аксиомы) очевидна; иначе говоря, она, априори, представляет выражение некоторой части этого знания.

Более современная интерпретация. Геометрия трактует объекты, обозначаемые словами: прямая, точка и т. д. При этом предполагается не знание этих объектов или представление о них, но только справедливость аксиом, таких же чисто формальных, т. е. лишенных всякого наглядного и врожденного содержания, как в приведенном выше примере. Эти аксиомы—свободные творения человеческого разума. Все остальные теоремы геометрии являются логическими следствиями этих аксиом (не имеющих реального прообраза). Аксиомы прежде всего определяют объекты, которые рассматриваются в геометрии. Поэтому Шлик в своей книге о теории познания очень метко назвал аксиомы «скрытыми определениями».

Такое понимание аксиом в современной аксиоматике очищает математику от всех не относящихся к ней элементов и устраняет тот мистический мрак, который прежде окутывал основания математики. Но такое очищенное представление делает также очевидным, что сама по себе математика ничего не может сказать о реальных объектах, или о каких-либо наглядных образах. Под точкой, прямой и т. д. в аксиоматической геометрии следует понимать только лишенные содержания понятия. То, что дает им содержание, лежит вне математики.

Однако, с другой стороны, верно и то, что математика вообще и геометрия в частности обязаны своим происхождением необходимости узнать что-либо о поведении реально существующих предметов. На это указывает даже само слово «геометрия», означающее «измерение земли». Измерение же земли имеет дело с возможными расположениями различных тел в природе, таких как части самого земного шара, измерительные ленты, измерительные стержни и т. д. Ясно, что из системы понятий аксиоматической геометрии нельзя получить никаких суждений о таких реально существующих предметах, которые мы называем практически твердыми телами. Чтобы такого рода суждения были возможны, мы должны лишить геометрию ее формально-логического характера, сопоставив пустой схеме понятий аксиоматической геометрии реальные объекты нашего опыта. Для этой цели достаточно прибавить только такое утверждение:

Твердые тела ведут себя в смысле различных возможностей взаимного расположения, как тела эвклидовой геометрии трех измерений; таким образом, теоремы эвклидовой геометрии содержат в себе утверждения, определяющие поведение практически твердых тел.

Дополненная таким утверждением геометрия становится, очевидно, естественной наукой; мы можем рассматривать ее фактически как самую древнюю ветвь физики. Ее утверждения покоятся существенным образом на выводах из опыта, а не только на логических заключениях. Будем в дальнейшем называть дополненную таким образом геометрию «практической геометрией» в отличие от «чисто аксиоматической геометрии». Вопрос о том, является ли практическая геометрия эвклидовой или нет, приобретает совершенно ясный смысл; ответ на него может дать только опыт. Всякие измерения длины в физике точно так же, как и геодезические или астрономические измерения, в этом смысле составляют предмет практической геометрии, если при этом исходить из того опытного закона, что свет распространяется по прямой линии, и именно по прямой в смысле практической геометрии.

Такому пониманию геометрии я придаю особое значение, поскольку без него я не смог бы установить теорию относительности. Именно, без нее было бы невозможно следующее соображение: в системе отсчета, которая вращается относительно некоторой инерциальной системы, законы расположения твердых тел не соответствуют правилам эвклидовой геометрии вследствие лоренцова сокращения; таким образом, допуская равноправное существование неинерциальных систем, мы должны отказаться от эвклидовой геометрии. Без такой интерпретации был бы невозможен и решительный шаг к общековариантным уравнениям. Если же отвлечься от связи между телом аксиоматической эвклидовой геометрии и реальным практически твердым телом, то мы легко приходим к точке зрения, которой придерживался такой оригинальный и глубокий мыслитель как Анри Пуанкаре: эвклидова геометрия отличается от всевозможных мыслимых аксиоматических геометрий своей простотой. А так как аксиоматическая геометрия сама по себе никаких высказываний о реальной действительности не содержит и может это делать лишь совместно с физическими законами, то представлялось бы возможным и разумным придерживаться эвклидовой геометрии, какими бы свойствами ни обладала действительность. Если же будет обнаружено противоречие между теорией и опытом, то легче согласиться с изменением физических законов, чем с изменением аксиоматической эвклидовой геометрии. Если забыть о связи между практически твердым телом и геометрией, то будет нелегко отказаться от соглашения, что эвклидову геометрию следует сохранить как простейшую.

Почему Пуанкаре и другие исследователи отклоняли напрашивающуюся эквивалентность практически твердого тела из реального опыта и геометрического тела? Просто потому, что реальные твердые тела в природе при ближайшем рассмотрении оказываются совсем не твердыми, потому что их геометрическое поведение, т. е. их возможное взаимное расположение, зависит от температуры, внешних сил и т. п. Тем самым первоначальная непосредственная связь между геометрией и физической реальностью оказывается уничтоженной и мы чувствуем себя вынужденными перейти к следующему, более общему представлению, характерному для точки зрения Пуанкаре. О поведении реальных вещей геометрия (Г) ничего не говорит; это поведение описывает только геометрия вместе с совокупностью физических законов (Ф). Выражаясь символически, мы можем сказать, что только сумма (Г) + (Ф) является предметом проверки на опыте. Таким образом, можно произвольно выбрать как (Г), так и отдельные части (Ф): все эти законы представляют собой соглашения. Во избежание противоречий необходимо оставшиеся части (Ф) выбрать так, чтобы (Г) и полная (Ф) вместе оправдывались на опыте. При таком воззрении аксиоматическая геометрия, с точки зрения теории познания, равноценна возведенной в ранг соглашения части законов природы.

По моему мнению, такое воззрение Пуанкаре с принципиальной точки зрения совершенно правильно. В реальном мире не существует объектов, в точности соответствующих понятию измерительных стержней, или связанному с ним в теории относительности понятию часов. Ясно также, что твердое тело и часы не являются первоначальными понятиями в системе понятий физики, но представляют собой понятия сложные, которые не могут играть самостоятельную роль в теоретической физике. Однако, по моему убеждению, при современном состоянии теоретической физики этими понятиями следует пользоваться как независимыми, поскольку мы пока еще далеки от такого понимания теоретических оснований атомистики, которое позволило бы построить теоретически понятия твердых тел и часов из более элементарных.

Что же касается возражения, что в природе нет абсолютно твердых тел и что приписываемые им свойства не соответствуют физической реальности, то оно никоим образом не является столь серьезным, каким оно может показаться на первый взгляд. В самом деле, нетрудно задать состояние измерительного тела достаточно точно, чтобы его поведение по отношению к другим измерительным телам было настолько определенно и что им можно было бы пользоваться как «твердым» телом. Именно такие измерительные тела надо иметь в виду, когда говорят о твердых телах.

Всякая практическая геометрия основывается на одном доступном опыту принципе, о котором полезно теперь вспомнить. Предположим, что на практически твердом теле нанесены две отметки; пару таких отметок мы будем называть отрезком. Представим себе два практически твердых тела, на каждом из которых отметим по отрезку. Эти два отрезка называются «равными друг другу», если концы одного отрезка можно длительное время совмещать с концами другого. Теперь сделаем следующее предположение.

Если два отрезка в какой-то момент времени и в каком-то месте оказались равными, то они будут равны всегда и везде.

Не только практическая эвклидова геометрия, но и ее непосредственное обобщение — практическая риманова геометрия, а вместе с ней и общая теория относительности, покоятся на этом предположении. Из опытных фактов, которые подтверждают это предположение, отмечу лишь один. Явление распространения света в пустом пространстве позволяет каждому интервалу местного времени сопоставить некоторый отрезок, а именно, путь, который проходит свет, и наоборот. Отсюда следует, что в теории относительности указанное выше предположение об отрезках должно также выполняться для промежутков времени, измеряемых часами. Тогда его можно формулировать следующим образом: если двое идеальных часов в какой-нибудь момент времени и в каком-нибудь месте идут совершенно одинаково (причем они находятся в непосредственной близости друг к другу), то они всегда будут иметь одинаковый ход, независимо от того, где и когда (в одном и том же месте) их будут сравнивать. Если бы это положение не выполнялось для часов в природе, то собственные частоты разных атомов одного и того же элемента не согласовывались бы между собой с той точностью, какую демонстрирует эксперимент. Существование спектральных линий является убедительным экспериментальным доказательством правильности упомянутого выше принципа практической геометрии. В конечном счете это и служит основанием для возможности осмысленных высказываний о метрике в смысле четырехмерного риманова пространственно-временнóго континуума.

Согласно выдвинутому здесь взгляду, вопрос о том, имеет этот континуум эвклидову, риманову или какую-либо другую структуру, является вопросом физическим, ответ на который должен дать опыт, а не вопросом соглашения о выборе на основе простой целесообразности. Риманова геометрия будет справедлива в том случае, если законы взаимного расположения практически твердых тел будут тем точнее переходить в законы эвклидовой геометрии, чем меньше размеры рассматриваемой пространственно-временнóй области.

Предложенная здесь физическая интерпретация геометрии не может быть непосредственно применена к областям пространства субмолекулярных размеров. Тем не менее, даже в вопросах строения элементарных частиц она сохраняет некоторый смысл. В самом деле, в том случае, когда мы описываем электрические элементарные частицы, составляющие материю, можно сделать попытку сохранить физический смысл за теми аспектами поля, которые использовались в физике для описания геометрического поведения тел, бóльших по сравнению с молекулами. Только успех может служить оправданием такой попытки приписать физическую реальность основным понятиям римановой геометрии вне области их физического определения. Однако может оказаться, что подобная экстраполяция имеет не больше оснований, чем распространение понятия температуры на части тела молекулярных размеров.

Менее спорным представляется экстраполяция понятий практической геометрии на пространства космических размеров. Можно, конечно, возразить, что жесткость конструкции из твердых стержней тем больше отклоняется от идеальной, чем больше их пространственное протяжение. Однако вряд ли можно считать принципиальным такое возражение. Поэтому вопрос о том, является мир пространственно конечным или нет, представляется мне особенно важным в смысле практической геометрии. Я даже считаю возможным, что в недалеком будущем астрономия даст ответ на этот вопрос. Напомним, чему учит в этом отношении общая теория относительности. Согласно этой теории, существует две возможности.

1. Мир пространственно бесконечен. Это возможно только в том случае, если в мировом пространстве средняя пространственная плотность материи, сосредоточенной в звездах, исчезающе мала, т. е., если отношение общей массы звезд к объему пространства, по которому они рассеяны, неограниченно приближается к нулю, если мы будем рассматривать все бóльшие и бóльшие объемы пространства.

2. Мир пространственно конечен. Это должно быть в том случае, если существует некоторая средняя плотность весомой материи во Вселенной, отличная от нуля. Чем меньше эта средняя плотность, тем больше объем мирового пространства.

Я должен отметить, что в пользу гипотезы конечного мира можно привести теоретические аргументы. Общая теория относительности учит, что инерция некоторого определенного тела тем больше, чем больше весомые массы, находящиеся вблизи него; поэтому представляется весьма естественным свести всю инерцию тела к взаимодействию между ним и остальными телами во Вселенной, так же как со времен Ньютона тяжесть полностью сводится к взаимодействию между телами. Из уравнений общей теории относительности можно прийти в выводу, что такое полное сведéние инерции к взаимодействию между массами — как этого требовал, например, Э. Мах — возможно только в том случае, если мир пространственно конечен.

Этот аргумент не производит никакого впечатления на многих физиков и астрономов. В конце концов, на деле только опыт может решить, какая из двух возможностей осуществляется в природе; каким образом опыт может дать ответ? Прежде всего можно думать, что среднюю плотность материи можно определить путем наблюдения доступной нашему восприятию части Вселенной. Эта надежда иллюзорна. Распределение видимых звезд крайне неравномерно, так что никоим образом нельзя считать среднюю плотность звездной материи во Вселенной равной, скажем, средней плотности в нашей Галактике. Вообще говоря, как бы велико ни было исследованное пространство, можно подозревать, что есть звезды вне этого пространства. Таким образом, оценка средней плотности кажется невозможной.

Но есть еще второй путь, который представляется мне более перспективным, хотя и он также встречает большие трудности. Именно, если мы исследуем отклонения доступных опытной проверке следствий общей теории относительности от следствий теории Ньютона, то мы прежде всего обнаружим расхождения, которые проявляются в непосредственной близости к тяготеющим массам и которые подтверждаются для планеты Меркурий. Но если мир пространственно конечен, имеется второе расхождение с теорией Ньютона, которое на языке последней можно выразить так: гравитационное поле обладает такими свойствами, как если бы кроме весомых масс оно создавалось также равномерно распределенной в пространстве плотностью массы, имеющей отрицательный знак. Так как эта фиктивная плотность массы крайне мала, то ее можно заметить только в случае очень больших гравитирующих систем.

Предположим, что мы примерно знаем статистическое распределение звезд в Галактике, а также и их массы. Тогда на основе закона Ньютона мы можем рассчитать гравитационное поле и те средние скорости звезд, которые они должны иметь для того, чтобы в Галактике не произошел коллапс вследствие взаимного притяжения звезд и она сохраняла бы свои размеры. Если бы теперь средние скорости звезд—которые могут быть измерены—оказались в действительности меньше вычисленных, мы бы имели указание на то, что на больших расстояниях реальные притяжения меньше, чем следует из закона Ньютона. Из такого расхождения можно было бы косвенным образом доказать конечность мира и даже оценить его пространственные размеры [1].

[1] Этой фразой заканчивается немецкий текст статьи, включенной в сборник «Mein Weltbild».— *Прим. ред.*

Можем ли мы отчетливо представить себе трехмерный мир, который является конечным и в то же время безграничным?

Обычно на этот вопрос отвечают отрицательно; однако это неправильный ответ. Цель последующего изложения — показать, что ответ на данный вопрос должен быть положительным. Я хочу показать, что мы без особых трудностей можем проиллюстрировать теорию конечного мира с помощью наглядной картины, к которой после некоторой практики нетрудно привыкнуть.

Прежде всего сделаем некоторое замечание гносеологического характера. Геометрико-физическую теорию невозможно описать наглядно; она представляет собой просто некоторую систему понятий. Но эти понятия служат для того, чтобы мысленно установить связи между множеством реальных или воображаемых опытов. Поэтому сделать теорию «наглядной» — это значит представить себе то множество чувственных ощущений, которые теория располагает в определенном порядке. В данном случае мы можем спросить себя: «Как можно представить себе поведение твердых тел в смысле их взаимного расположения (контакта), чтобы оно соответствовало теории конечного мира?». В том, что я должен сказать об этом, нет ничего нового; однако адресованные мне бесчисленные вопросы показывают, что любознательность тех, кто интересуется этим предметом, еще неполностью удовлетворена. Надеюсь меня простят за то, что я буду излагать давно известное.

Что мы хотим выразить, когда говорим, что наше пространство бесконечно? Ничего, кроме того, что мы можем прикладывать одно к другому любое число тел равных размеров и при этом никогда не наполним пространство. Представим себе, что мы имеем огромное множество кубических ящиков одинаковых размеров. Согласно эвклидовой геометрии, мы можем поместить их один на другой, один возле другого и один за другим и таким образом заполнить сколь угодно большую часть пространства; но такое построение никогда не может быть закончено: мы могли бы продолжать укладывать все больше и больше кубов и никогда не придем к тому, что больше места не останется. Это то, что мы хотим выразить, когда говорим о бесконечном пространстве. Лучше было бы сказать, что пространство бесконечно относительно практически твердых тел, предполагая, что законы их расположения определяются эвклидовой геометрией.

Другим примером бесконечного континуума является плоскость. На плоскости мы можем так укладывать квадраты из картона, что каждая сторона любого квадрата прилегает к стороне другого квадрата, соседнего с ним. Построение никогда не будет закончено; всегда можно продолжать укладывать новые квадраты, если только законы расположения их соответствуют законам расположения плоских фигур в эвклидовой геометрии. Таким образом, плоскость бесконечна относительно картонных квадратов. Соответственно говорят, что плоскость представляет собой бесконечный континуум двух измерений, а пространство — бесконечный континуум трех измерений. Я думаю, можно считать известным, что́ понимается здесь под числом измерений.

Теперь приведем пример двумерного континуума, который конечен, но безграничен. Представим себе поверхность большого глобуса и множество одинаковых маленьких круглых бумажных дисков. Поместим один из них где-нибудь на поверхности глобуса. Если мы будем передвигать его как угодно по поверхности глобуса, то при этом путешествии мы нигде не натолкнемся на границу. Поэтому мы говорим, что сферическая поверхность глобуса является безграничным континуумом. Кроме того, сферическая поверхность является конечным континуумом. Действительно, если наклеивать бумажные диски на глобус таким образом, чтобы нигде два диска не накладывались один на другой, то в конце концов мы так заполним поверхность глобуса, что для нового диска уже не останется места. Это и означает, что сферическая поверхность глобуса конечна относительно бумажных дисков. Далее, сферическая поверхность является неэвклидовым континуумом двух измерений; иначе говоря, законы расположения жестких фигур на этой поверхности не согласуются с теми же законами эвклидовой плоскости. Это можно показать следующим образом. Возьмем один из дисков и расположим вокруг него еще шесть других дисков, вокруг каждого из которых в свою очередь расположим еще шесть и т. д. (см. рис. 1). Если это построение делается на плоскости, то мы получим непрерываемое расположение, при котором каждый из дисков, не лежащий на краю построения, соприкасается с шестью другими. На сферической поверхности такое построение кажется вначале успешным, в тем большей степени, чем меньше радиус дисков по сравнению с радиусом сферы. Но по мере продолжения подобного построения, становится все более очевидным, что невозможно расположить диски указанным выше образом, без перерывов, как это было возможно в случае эвклидовой геометрии на плоскости. Существа, которые не могут не только покинуть сферическую поверхность, но даже и «выглянуть» из сферической поверхности в трехмерное пространство, могли бы установить путем опыта с дисками, что их двумерное «пространство» не эвклидово, а сферическое.

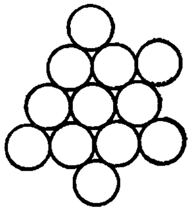


Рис. 1.

Из последних результатов теории относительности представляется вероятным, что наше трехмерное пространство также является приблизительно сферическим, т. е. что законы расположения в нем твердых тел определяются не эвклидовой геометрией, а приближенно описываются сферической геометрией, если только рассматривать области достаточно большой протяженности. В этом месте воображение отказывает читателю. «Этого не может представить себе ни один человек, — воскликнет он в раздражении.— Это можно сказать, но нельзя вообразить. Я могу достаточно хорошо представить себе сферическую поверхность, но ничего подобного ей в трех измерениях».

Мы должны попытаться мысленно преодолеть этот барьер, и терпеливый читатель увидит, что это совсем не такая трудная задача. С этой целью мы еще раз обратимся к двумерной сферической поверхности. Пусть, как изображено на рис. 2, K — сферическая поверхность, касающаяся

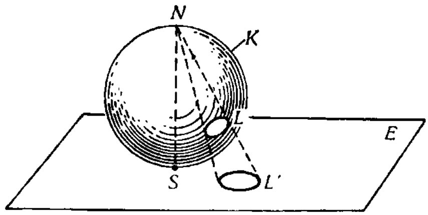


Рис. 2.

в точке S плоскости E, показанной для удобства на рисунке в виде небольшого куска поверхности. Пусть, далее, L — диск на сферической поверхности. Представим теперь, что на поверхности сферы в точке N, расположенной диаметрально противоположно точке S, помещен точечный источник света, так что диск L отбрасывает тень на плоскость E. Каждой точке на сфере соответствует тень на плоскости. Если диск на сфере K движется, то его тень L' также движется. Когда диск L находится в точке S, то он почти точно совпадает со своей тенью. Если он движется по сферической поверхности от точки S вверх, то тень L' на плоскости удаляется от точки S, причем эта тень будет становиться все больше и больше. При приближении кружка L к светящейся точке N, тень удаляется в бесконечность и становится бесконечно большой.

Теперь поставим вопрос: каковы законы расположения теней L' диска на плоскости E? Очевидно, они совершенно такие же, как и законы расположения дисков L' на сферической поверхности. В самом деле, каждой фигуре на сфере K соответствует теневая фигура на плоскости E. Если два диска на K касаются, то их тени на E также касаются. Геометрия теневых фигур на плоскости согласуется с геометрией дисков на сфере. Если мы назовем тени дисков жесткими фигурами, то по отношению к ним на плоскости E выполняется сферическая геометрия. В частности, по отношению к теням дисков плоскость конечна, так как только конечное число таких теней может уместиться на плоскости.

В этом месте кто-нибудь скажет: «Это бессмыслица; тени дисков не являются твердыми фигурами. Стоит нам только подвигать по плоскости E линейку, чтобы убедиться в том, что размеры теней непрерывно возрастают, если удаляться по плоскости от точки S к бесконечности». Но что будет, если такое же явление происходит с самим масштабом на плоскости E? Тогда невозможно было бы показать, что тени увеличиваются в размере по мере удаления от точки S; в таком случае только что высказанное утверждение теряет всякий смысл. Фактически, единственное объективное утверждение, которое можно сделать о тенях дисков, состоит как раз в том, что они ведут себя в смысле эвклидовой геометрии так же, как твердые диски на сферической поверхности.

Мы должны всегда помнить, что наше утверждение об увеличении теней дисков с удалением от точки S к бесконечности само по себе не имеет никакого объективного смысла, пока мы не можем сравнивать тени дисков с эвклидовыми твердыми телами, которые могли бы передвигаться по плоскости E. В отношении законов расположения теней L' точка S не имеет никаких особых преимуществ на плоскости, по сравнению с теми, которые у нее были на поверхности сферы.

Рассмотренная выше иллюстрация сферической геометрии на плоскости важна для нас, поскольку она позволяет распространить подобную геометрию на случай трехмерного пространства.

Представим себе некоторую точку S нашего пространства и большое число небольших сфер L', которые могут быть точно совмещены друг с другом. Но эти сферы не являются твердыми в смысле эвклидовой геометрии; их радиус (с точки зрения эвклидовой геометрии) должен возрастать, когда они движутся от точки S к бесконечности, по тому же самому закону, что и радиусы теней L' дисков на плоскости E.

После того как мы пришли к отчетливому представлению о геометрическом поведении наших сфер L', допустим, что в нашем пространстве вообще не существует твердых тел в смысле эвклидовой геометрии и есть лишь тела, которые ведут себя как наши сферы L'. Тогда мы будем иметь перед собой ясную картину трехмерного сферического пространства или, скорее, трехмерной сферической геометрии. При этом наши сферы должны называться «твердыми» сферами. Возрастание их размеров с удалением от точки S не должно обнаруживаться путем измерений с помощью масштабов, так же как нельзя этого было обнаружить в случае теней дисков на плоскости E, поскольку масштабы ведут себя так же, как и сферы. Пространство является однородным, т. е. около каждой точки возможны те же самые расположения сфер [2]. Пространство является конечным,

[2] Это станет понятным без вычислений (но только для двумерного случая), если мы еще раз вернемся к случаю дисков на поверхности сферы.

так как — вследствие «раздувания» сфер — только конечное число их вмещается в пространство.

Итак, пользуясь, как костылем, способностью мыслить и строить наглядные образы, которую воспитала в нас эвклидова геометрия, мы получили наглядную картину сферической геометрии. Мы можем без труда придать бо́льшую глубину и строгость этим представлениям, с помощью специальных воображаемых построений. Аналогичным образом нетрудно было бы также представить случай так называемой эллиптической геометрии. Сейчас нашей единственной задачей было показать, что человеческая способность мысленного представления ни в коем случае не должна капитулировать перед неэвклидовой геометрией.

«Геометрия и опыт» — изданный отдельной книжкой в Берлине в 1921 г. (Springer Verlag), дополненный вариант доклада Эйнштейна, который он сделал 27 января 1921 г. на заседании Прусской академии наук. Этим заседанием традиционно отмечался день рождения императора Фридриха II Великого (1712—1786), который считался основателем Академии.

Доклад сыграл большую роль в пропаганде идей теории относительности, так как они изложены в нем с предельной доступностью. Эйнштейн еще находится на дофридмановских позициях, считая, что конечность мира есть необходимое следствие наличия вещества.

Доклад издавался неоднократно (большей частью вместе с работой «Эфир и принцип относительности»). Существуют французское и польское (раздельные), английское и итальянское издания. На русском языке обе работы выходили под названием «О физической природе пространства» (Берлин, Изд-во «Слово», 1922) и отдельной брошюрой в «Научном книгоиздательстве» (1923). Доклад включен в сборники работ Эйнштейна: «Mein Weltbild» (Frankfurt am Main, 1955, 151; сокращенный вариант) и «Ideas and Opinions» (N. Y., 1956, 232).

ПРОСТОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА К ШАРОВОМУ СКОПЛЕНИЮ ЗВЕЗД*

Едва ли можно сомневаться в том, что закон Ньютона можно экстраполировать на расстояния, бóльшие, чем те, для которых он проверен на опыте. Этого придерживается и общая теория относительности, которая дает рациональное обоснование закона Ньютона, так что экстраполяция взаимодействия тел на большие расстояния выглядит вполне оправданной. Правда, в случае, если наш мир конечен в пространстве, общая теория относительности предсказывает значительные отклонения от закона Ньютона, но только при условии, что средняя плотность звездного вещества в исследуемом гравитирующем образовании не намного больше средней плотности звездного вещества во Вселенной вообще.

Ниже закон тяготения Ньютона применяется к так называемому шаровому скоплению звезд. При этом задача состоит в том, чтобы получить какие-нибудь следствия, проверяемые на опыте; дело в том, что наши знания о движении звезд такого скопления в действительности крайне малы. Изменения положений звезд за доступные нам промежутки времени слишком незначительны, чтобы их можно было заметить имеющимися средствами наблюдения. Кроме того, ввиду большого расстояния до звезд их свет слишком слаб, чтобы можно было изучать движение звезд в направлении луча зрения с помощью принципа Допплера. Мы видим лишь проекцию скопления звезд, образованную параллельными лучами зрения, и то только для наиболее ярких звезд скопления.

Но мы все же приближенно знаем расстояние от нас до таких шаровых скоплений, а следовательно, и их истинный радиус. Эта оценка основана на проверенной гипотезе, что звезды одинакового спектрального типа обладают приблизительно одинаковой величиной и приблизительно одина-

---

* *Eine einfache Anwendung des Newtonschen Gravitationsgesetzes auf die kugelförmigen Sternhaufen.* Festschrift zum 10-jährigen Bestehen der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaft. Springer Verlag, 1921, 50—52.

ковой абсолютной яркостью. Сравнивая видимые яркости удаленных и ближайших к нам звезд одного спектрального типа, мы можем с помощью этой гипотезы делать заключение о расстоянии звезд от нас. Таким образом, зная расстояние до ближайших звезд, мы определяем и расстояние до звездного скопления. По-видимому радиусу звездного скопления мы можем найти — по крайней мере по порядку величины — истинный радиус скопления звезд; для этого радиуса получаются значения в 100—150 световых лет.

Весьма вероятно, что яркие звезды звездного скопления приблизительно соответствуют абсолютно ярким звездам нашей Галактики в окрестности Солнца. Для последних с помощью принципа Допплера было найдено, что они движутся со средней скоростью около 26 *км/сек* относительно друг друга [1]; поэтому мы будем предполагать, что по порядку величины это соответствует средней скорости наиболее ярких звезд скопления относительно его центра тяжести; тем более, что средние скорости звезд разных спектральных типов по порядку величины совпадают.

Предположим теперь, что распределение звезд в скоплении стационарно в том смысле, что и радиус и само распределение (в статистическом смысле) существенно не меняются за время, в течение которого отдельные звезды скопления проходят (криволинейный) путь, большой по сравнению с радиусом скопления. В том, что это условие выполняется при радиально-симметричном и одинаковом для многих звездных скоплений статистическом распределении звезд, вряд ли можно сомневаться. Тогда ко всему скоплению звезд можно применить теорему вириала Клаузиуса, рассматривая отдельные звезды как материальные точки. В случае ньютоновских сил эта теорема, как впервые показал А. Пуанкаре, дает

$$L = \frac{1}{2}\Phi. \tag{1}$$

Здесь L — кинетическая энергия всех звезд скопления, Φ — их отрицательная потенциальная энергия, определенная так, что при бесконечно большом расстоянии между звездами она обращается в нуль.

Чтобы получать следствия из соотношения (1), сделаем некоторые предположения о строении скопления. Будем считать, что звезды, дающие изображения на фотопластинках при более коротких экспозициях, обладают одинаковой массой m и что общее число таких звезд в скоплении равно N. Далее, временно предположим, что менее яркие, т. е. меньшие по размерам, звезды скопления существенно не влияют на гравитационное поле, так что при вычислении L и Φ их можно не учитывать. Тогда, обозначая

[1] Точнее, относительно центра тяжести системы, к которой они принадлежат.

через v среднюю квадратичную скорость $(v=\sqrt{\overline{v^2}})$, сразу получаем

$$L=\frac{mv^2}{2}\,. \tag{2}$$

Для вычисления Φ необходимо знать пространственную плотность ρ звезд в скоплении. Как известно, она удовлетворительно представляется эмпирической формулой

$$\rho=\frac{3}{4\pi}\frac{N}{a^3}\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{5}{2}}, \tag{3}$$

где a означает длину, пропорциональную радиусу звездного скопления; тогда $2a$ — радиус, на котором плотность снижается до 2% плотности в центре. Далее, ρm есть средняя плотность звездного вещества в скоплении в определенном месте. Величину Φ можно вычислить без большой ошибки, считая, что вещество распределено с постоянной плотностью ρm. Таким образом, получаем

$$\Phi=A\frac{kN^2m^2}{a}\,, \tag{4}$$

где k — гравитационная постоянная, A — числовой коэффициент, по нашим оценкам равный примерно 0,6.

Из соотношения (1) с учетом формул (2) и (4) для радиуса звездного скопления получаем

$$2a=1{,}2\frac{kNm}{v^2}\,. \tag{5}$$

Подставляя для звездного скопления в созвездии Геркулеса $N=2000$, $m=15$ солнечных масс, $v=26$ *км/сек*, получаем

$$2a=0{,}65\cdot10^{18}\ \textit{см}=0{,}65\ \text{световых лет}.$$

По видимой яркости самых ярких звезд скопления мы должны считать расстояние до него настолько большим, что радиус его должен составлять не менее чем 100 световых лет. Следовательно, в нашем предположении должна содержаться ошибка.

Я имел возможность подробно обсудить изложенное здесь противоречие с моими коллегами в Астрофизическом институте в Потсдаме. При этом выяснилось, что, согласно современным астрономическим данным о массах и распределении неподвижных звезд, одно из сделанных здесь предположений в значительной мере ошибочно. В скоплении может существовать намного больше неподвижных звезд с очень малой яркостью, чем 2000 звезд, дающих изображения на фотопластинке при короткой экспозиции, и их массу нельзя считать малой по сравнению с самыми яркими звездами. По снимкам звездного скопления с большой экспозицией, а также по распределению неподвижных звезд в ближайшей окрестности Солнца можно оценить, что число неподвижных звезд в скоплении, определяющих гравитационное поле, примерно в 100 раз больше, чем мы полагали выше. Тогда мы приходим к радиусу звездного скопления, равному 65 световым годам, что не так далеко от нижнего предела, полученного другим способом.

Неполнота имеющихся в настоящее время наблюдательных данных вынуждает нас пока довольствоваться этим согласием по порядку величины. Более точные результаты требуют лучшего знания масс и скоростей звезд. Но полученное согласие по порядку величины уже позволяет сделать вывод, представляющий значительный интерес: вклад несветящих масс в полную массу по порядку величины не больше, чем вклад светящих масс.

КРАТКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Есть нечто привлекательное в изложении эволюции идей, максимально кратком и в то же время достаточно полном, чтобы передать непрерывность их развития. Мы попытаемся изложить таким образом теорию относительности и показать, что все движение вперед слагается из небольших, почти самоочевидных шагов.

Первым и определяющим моментом развития была идея Фарадея и Максвелла, согласно которой все физические процессы характеризуются непрерывностью действия (противопоставляемого действию на расстоянии), или, выражаясь языком математики, описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Максвелл сумел успешно осуществить такое описание для электромагнитных процессов в покоящихся телах, опираясь на представление о магнитном эффекте тока смещения в вакууме и на постулат о тождестве электромагнитного поля, возникающего вследствие индукции, и электростатического поля.

Распространение электродинамики на случай движущихся тел выпало на долю многочисленных последователей Максвелла. Герц попытался решить эту проблему, приписав пустому пространству (эфиру) физические свойства, подобные тем, которыми обладает весомая материя; в частности, аналогично весомой материи эфир должен был иметь в каждой точке определенную скорость. Как и в покоящихся телах, электромагнитную или магнитоэлектрическую индукцию следовало определять скоростью изменения соответственно электрического или магнитного потока при условии, что эти скорости изменения относились к элементам поверхности, движущимся вместе с телом. Но теория Герца противоречила фундаментальному эксперименту Физо по распространению света в движущейся жидкости.

---

* *A Brief Outline of the Development of the Theory of Relativity.* Nature, 1921, 106, 782—784.

Наиболее очевидное обобщение теории Максвелла на случай движущихся тел оказалось несовместимым с результатами эксперимента.

Выход из этого положения указал Г.А.Лоренц. Ввиду своей приверженности к атомной теории вещества, Лоренц чувствовал себя неспособным рассматривать последнее как прибежище непрерывных электромагнитных полей. Поэтому он представлял себе эти поля как свойства эфира, который он считал непрерывным. Лоренц полагал эфир независимым от вещества как с механической, так и с физической точек зрения. Эфир не принимал участия в движениях вещества и связь между эфиром и веществом могла предполагаться лишь в той мере, в какой последнее рассматривалось как носитель связанных электрических зарядов. Фундаментальное значение теории Лоренца заключается в том, что всю электродинамику покоящихся и движущихся тел она сводит к уравнениям Максвелла для пустого пространства. Она превосходит теорию Герца не только с точки зрения метода; с ее помощью Г. А. Лоренц достиг выдающегося успеха в объяснении экспериментальных фактов.

Теория представлялась неудовлетворительной лишь в одном фундаментально важном пункте. Она, казалось, отдавала предпочтение некоторой системе координат, связанной с определенным состоянием движения (состоянием покоя по отношению к эфиру), по сравнению со всеми прочими системами координат, движущимися относительно этой. В данном пункте теория казалась находящейся в прямом противоречии с классической механикой, в которой все инерциальные системы, равномерно движущиеся относительно друг друга, были в равной мере пригодны в качестве систем координат (специальный принцип относительности). В этом отношении все опытные данные, в том числе в сфере электродинамики (в частности, опыт Майкельсона), подтвердили идею эквивалентности всех инерциальных систем, т. е. свидетельствовали в пользу специального принципа относительности.

Специальная теория относительности обязана своим происхождением этой трудности, которая, ввиду ее фундаментального характера, представлялась нетерпимой. Первой целью этой теории было решение вопроса: противоречит ли на самом деле специальный принцип относительности уравнениям Максвелла для пустого пространства? Ответ на этот вопрос, казалось, был утвердительным: если уравнения Максвелла справедливы в системе координат K, и мы вводим новую систему K', согласно (по-видимому без труда устанавливаемым) законам преобразования,

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t, \end{aligned} \qquad \text{(Преобразования Галилея)}$$

то уравнения Максвелла более неприменимы в новых координатах (x', y', z', t'). Но видимость обманчива. Более тщательный анализ физического смысла пространства и времени с очевидностью показал, что в основе преобразований Галилея лежат произвольные допущения, в частности утверждение, что понятие одновременности имеет смысл независимо от состояния движения используемой системы координат. Было показано, что уравнения поля в пустоте удовлетворяют специальному принципу относительности при условии, что мы используем другие уравнения преобразования:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}},$$
$$y' = y,$$
$$z' = z, \qquad \text{(Преобразования Лоренца)}$$
$$t' = \frac{t - (v/c^2)\,x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

В этих уравнениях x, y, z представляют собой координаты, измеренные с помощью масштабов, покоящихся относительно системы координат, и t — время, измеренное надлежащим образом выбранными часами тождественного устройства, находящимися в состоянии покоя.

Чтобы специальный принцип относительности мог выполняться, необходимо, чтобы все уравнения физики не изменяли своего вида при переходе из одной инерциальной системы в другую, если использовать преобразования Лоренца для подсчета этого изменения. Говоря на языке математики, все системы уравнений, выражающие законы физики, должны быть ковариантны относительно преобразований Лоренца. Таким образом, с методологической точки зрения специальный принцип относительности можно сравнить с принципом Карно о невозможности вечного двигателя второго рода, ибо подобно последнему он дает нам общее условие, которому должны удовлетворять все законы природы.

Впоследствии Г. Минковский нашел особенно изящное и плодотворное выражение этого условия ковариантности, выражение, которое раскрывает формальную связь между эвклидовой геометрией трех измерений и пространственно-временным континуумом физики.

Эвклидова геометрия трех измерений

Существует численная мера (расстояние ds), которая ставится в соответствие двум соседним точкам пространства и выражается уравнением

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Специальная теория относительности

Существует численная мера (расстояние ds), которая ставится в соответствие двум соседним точкам пространства-времени (точечным событиям) и выражается уравнением

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Она не зависит от выбора системы координат и может быть измерена единичным измерительным стержнем.	Она не зависит от выбора инерциальной системы и может быть измерена единичным измерительным стержнем и стандартными часами. Здесь x_1, x_2, x_3 —прямоугольные координаты, а $x_4 = \sqrt{-1}\, ct$ — время, умноженное на мнимую единицу и на скорость света.
Допустимыми преобразованиями являются те, при которых выражение для ds^2 является инвариантом, т. е. допустимы линейные ортогональные преобразования.	Допустимыми преобразованиями являются те, при которых выражение для ds^2 является ковариантом, т. е. допустимы линейные ортогональные преобразования координат, сохраняющие вещественность x_1, x_2, x_3, x_4. Такими преобразованиями являются преобразования Лоренца.
По отношению к этим преобразованиям законы эвклидовой геометрии инвариантны.	По отношению к этим преобразованиям законы физики инвариантны.

Отсюда следует, что по своему месту в физических уравнениях, хотя и не по физическому смыслу, время эквивалентно пространственным координатам (если отвлечься от мнимости). С этой точки зрения, физика есть эвклидова геометрия четырех измерений, или точнее, статика в четырехмерном эвклидовом континууме.

Построение специальной теории относительности сводится к двум основным шагам, а именно: к приспособлению пространственно-временной «метрики» к уравнениям электродинамики Максвелла и к приспособлению остальной части физики к этой видоизмененной «метрике». Первый из этих этапов приводит к относительности одновременности, к учету влияния движения на измерительные стержни и часы, к модификации кинематики и, в частности, к новому правилу сложения скоростей. Второй этап дает нам видоизменение ньютоновского закона движения на случай больших скоростей, а также сведения фундаментальной важности о природе инертной массы.

Оказалось, что инерция не есть фундаментальное свойство вещества и, конечно, не является простейшей величиной, но представляет собой свойство энергии. Если сообщить телу энергию E, то его инертная масса возрастает на величину E/c^2, где c — скорость света в пустоте. Другими словами, тело с массой m можно рассматривать как сгусток энергии, равной по величине mc^2.

Более того, вскоре оказалось,что специальную теорию относительности нельзя связать с гравитацией сколько-нибудь естественным образом. В этом отношении меня поразило то, что сила тяготения обладает одним фундаментальным свойством, отличающим ее от электромагнитных сил.

Все тела падают в гравитационном поле с одинаковым ускорением, или, иначе говоря, тяготеющая и инертная массы тела численно равны друг другу. Это численное равенство наводит на мысль о тождественной природе масс. Могут ли инерция и тяготение быть тождественными? Этот вопрос ведет непосредственно к общей теории относительности. Разве нельзя рассматривать Землю как лишенную вращения, если представлять себе центробежные силы, которые действуют на все тела, покоящиеся относительно Земли, как «истинное» поле тяготения или часть такого поля? Если мы сумеем провести такую идею, то мы докажем тождественность инерции и тяготения по самой их природе, так как то же самое свойство, которое рассматривается как *инерция* с точки зрения системы, не принимающей участия во вращении, можно интерпретировать как *тяготение*, если рассматривать его по отношению к системе координат, участвующей во вращении. Согласно Ньютону, такая интерпретация невозможна, поскольку по закону Ньютона центробежное поле нельзя считать порожденным веществом и поскольку в теории Ньютона нет места для «истинного» поля типа «кориолисовых сил». Но быть может, закон поля Ньютона можно заменить другим законом, согласующимся с полем, возникающим по отношению к «вращающейся» системе координат? Мое убеждение в тождестве инертной и тяготеющей масс породило во мне чувство абсолютной уверенности в справедливости такой интерпретации. В этой связи меня ободряла следующая идея. Мы знакомы с «кажущимися» полями, которые существуют в системах координат произвольно движущихся относительно инерциальной системы. С помощью этих полей мы смогли бы изучать закон, которому подчиняются в общем случае гравитационные поля. При этом мы должны учесть то, что определяющим для возникновения полей являются весомые массы, или, согласно фундаментальному результату специальной теории относительности, плотность энергии — величина, обладающая трансформационными свойствами тензора.

С другой стороны, соображения, основанные на метрических результатах специальной теории относительности, приводят к выводу, что эвклидова метрика уже неприменима в ускоренных системах координат. Хотя это задержало развитие теории на несколько лет, возникшая трудность была смягчена знанием того факта, что эвклидова метрика справедлива для малых областей. В результате, величина ds, которая была физически определена до сих пор только в специальной теории относительности, сохранила свой смысл и в общей теории относительности. Но сами координаты потеряли свое прямое значение и выродились просто в числа, не обладающие никаким физическим смыслом, единственным назначением которых является нумерация пространственно-временных точек. Таким образом, в общей теории относительности координатам принадлежит та же функция, что и гауссовым координатам в теории поверхностей.

Необходимое условие выбора заключается в том, чтобы в таких общих координатах измеримая величина ds могла представляться в виде

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

где символы $g_{\mu\nu}$ означают функции пространственно-временны́х координат. Из сказанного выше следует также, что характер изменения $g_{\mu\nu}$ в пространстве и во времени определяет, с одной стороны, пространственно-временну́ю метрику, и с другой,— гравитационное поле, управляющее механическим поведением материальных точек.

Закон гравитационного поля определяется в основном следующими условиями: во-первых, он должен быть справедлив при любом выборе системы координат; во-вторых, он должен определяться тензором энергии вещества; и, в-третьих, он не должен содержать производных от функций $g_{\mu\nu}$ выше второго порядка и должен быть линейным по этим функциям. На этом пути был найден закон, хотя и сильно отличающийся от закона Ньютона, но настолько тесно соответствующий последнему по следствиям, которые можно получить из него, что оказалось возможным найти лишь очень небольшое число критериев, по которым теория могла подвергнуться решительному испытанию на опыте.

Остался еще ряд важных вопросов, которые ждут решения в настоящее время. Действительно ли электрическое и гравитационное поля настолько различны по своей природе, что они не могут быть формально объединены? Играют ли гравитационные поля какую-либо роль в строении вещества, и следует ли рассматривать континуум внутри атомного ядра ощутимо неэвклидовским? Наконец, вопрос, имеющий отношение к космологической проблеме. Следует ли относить инерцию к взаимному влиянию отдаленных масс? И вопрос, связанный с предыдущим: является ли Вселенная пространственно ограниченной? В этом пункте я расхожусь во мнениях с Эддингтоном. Вместе с Махом я ощущаю, что положительный ответ настоятельно необходим, но доказать пока ничего нельзя. Пока не будет проведено динамическое исследование больших систем неподвижных звезд с точки зрения пределов применимости закона тяготения Ньютона для огромных областей пространства, до тех пор, по-видимому, нельзя будет получить точную основу для решения этой увлекательной задачи.

ОБ ОДНОМ ЕСТЕСТВЕННОМ ДОПОЛНЕНИИ ОСНОВ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Как известно, Г. Вейль попытался дополнить общую теорию относительности, введя дальнейшее условие инвариантности, и создал при этом теорию, заслуживающую большого внимания, хотя бы уже в силу смелости и логичности его математической мысли. Эта теория базируется главным образом на двух соображениях.

а) В общей теории относительности, отношению компонент потенциала гравитационного поля $g_{\mu\nu}$ придается значительно большее физическое содержание, чем самим компонентам $g_{\mu\nu}$. Это объясняется тем, что совокупность мировых линий, исходящих из некоторой точки Вселенной, по которым из этой точки могут распространяться световые сигналы, или световая сфера, определяется, по-видимому, непосредственно пространственно-временным континуумом; сфера же определяется уравнением

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0,$$

в которое входят только отношения $g_{\mu\nu}$. Вообще, в уравнения электромагнитного поля в вакууме входят только отношения $g_{\mu\nu}$. Величина же ds, которая определяется лишь через $g_{\mu\nu}$, не выражает никаких свойств пространственно-временного континуума, так как для измерения этих величин требуется материальный объект (часы). Поэтому напрашивается вопрос: нельзя ли изменить теорию относительности, предположив, что инвариантной является не непосредственно величина ds как таковая, а только соотношение $ds^2 = 0$?

б) Вторая мысль Вейля относится к обобщению метрики Римана, а также к физическому истолкованию появляющихся в ней величин φ_ν. Эту мысль можно изложить в общих чертах следующим образом. Метрика

* *Eine naheliegende Ergänzung des Fundamentes der allgemeinen Relativitätstheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1921, T. 1, 261—264.

предполагает перенесение отрезков (масштабов). Риманова геометрия предполагает далее, что поведение (длина) масштаба в данном месте не зависит от того пути, по которому он попал в это место; она включает, таким образом, следующие две предпосылки: 1) существование переносимых масштабов; 2) независимость их длины от пути переноса.

Данное Вейлем обобщение римановской метрики сохраняет первое условие, опуская второе. Согласно Вейлю, измеряемая длина масштаба зависит от интеграла, распространенного по пути переноса и зависящего, вообще говоря, от этого пути,

$$\int \phi_\nu dx_\nu$$

где ϕ_ν представляют собой функции пространственных координат; эти функции также определяют метрику. При физическом истолковании теории ϕ_ν отождествляются с электромагнитными потенциалами.

Отдавая должное стройности и изящности построений Вейля, я все же думаю, что они не соответствуют физической реальности. Мы не знаем в природе таких используемых для измерений предметов, относительная протяженность которых зависела бы от их предыстории. Я не вижу также непосредственного физического смысла ни во введенной Вейлем кратчайшей линии, появляющейся в этом и других уравнениях теории, ни в электрических потенциалах.

Однако изложенная в пункте «а» мысль Вейля кажется мне естественной и удачной, хотя и трудно предсказать заранее, сможет ли она привести к созданию соответствующей действительности физической теории. При таком положении вещей естественно может возникнуть вопрос: нельзя ли создать стройную теорию, заранее отказавшись не только вместе с Вейлем от предположения 2, но и от предположения 1 (о существовании переносимых масштабов и, соответственно, часов). В дальнейшем должно быть показано, что можно беспрепятственно строить теорию, исходя исключительно из ковариантности соотношения

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = 0$$

и не используя понятия расстояния ds или (применяя физическую терминологию) не используя понятия масштаба и измерительных часов.

Пытаясь создать такую теорию, я пользовался активной поддержкой коллеги Виртингера в Вене. Я спросил у него, существует ли обобщение уравнения геодезической линии, в котором имеют значение только отношения компонент $g_{\mu\nu}$. Он сообщил мне следующее: Под термином «тензор Римана» или «инвариант Римана» мы понимаем тензор или инвариант относительно произвольных точечных преобразований, инвариантный характер которых сохраняется при условии инвариантности $ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$. Под термином «тензор Вейля» или «инвариант Вейля веса n» мы понимаем тензор Римана или инвариант Римана со следующим дополнительным свойством: величина компоненты тензора или инварианта умножается на λ^n при замене $g_{\mu\nu}$ на $\lambda g_{\mu\nu}$, где λ — произвольная функция координат. Это условие может быть символически выражено уравнением

$$T(\lambda g) = \lambda^n T(g).$$

Если J — инвариант Вейля веса —1, зависящий только от компонент $g_{\mu\nu}$ и их производных, то величина

$$d\sigma^2 = J g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{1}$$

представляет собой инвариант веса 0, т. е. инвариант, зависящий только от отношений компонент $g_{\mu\nu}$. Искомое обобщение геодезической линии дается, следовательно, уравнением

$$\delta\left\{\int d\sigma\right\} = 0. \tag{2}$$

Такое решение предполагает, конечно, существование инварианта Вейля указанного вида. Исследования Вейля указывают путь к такому решению. Именно он показал, что тензор

$$H_{iklm} = R_{iklm} - \frac{1}{d-2}\left(g_{il}R_{km} + g_{km}R_{il} - g_{im}R_{kl} - g_{kl}R_{im}\right) + \\ + \frac{1}{(d-1)(d-2)}\left(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}\right) R \tag{3}$$

представляет собой тензор Вейля, вес которого равен 1. Здесь R_{iklm} — римановский тензор кривизны, R_{km} $(= g^{il}R_{iklm})$ — тензор второго ранга, получаемый при однократном свертывании тензора Римана, R — скаляр, получаемый при повторном свертывании последнего, а d — размерность пространства. Отсюда непосредственно следует, что

$$H = H_{iklm}H^{iklm} \tag{4}$$

представляет собою инвариант Вейля веса —2. Следовательно,

$$J = \sqrt{H} \tag{5}$$

является инвариантом Вейля веса —1. Этот результат в сочетании с (1) и (2) приводит к обобщению геодезической линии по методу Виртингера. Конечно, для вынесения суждения о значении этого и последующих выводов очень важен вопрос о том, является ли J единственным инвариантом Вейля веса —1, не содержащим производных от $g_{\mu\nu}$ выше второго порядка.

На основе изложенного выше теперь уже легко привести в соответствие каждому тензору Римана тензор Вейля и, таким образом, представить законы природы в форме дифференциальных уравнений, зависящих главным образом от соотношений между компонентами $g_{\mu\nu}$. Пусть

$$g'_{\mu\nu} = Jg_{\mu\nu};$$

тогда

$$d\sigma^2 = g'_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$$

представляет собой инвариант, зависящий только от отношений компонент $g_{\mu\nu}$. Все тензоры Римана, получаемые обычным путем из $d\sigma$ как основного инварианта, являются, если рассматривать их как функции компонент $g_{\mu\nu}$ и их производных, тензорами Вейля веса 0. Символически мы можем это представить следующим образом: если $T(g)$ — тензор Римана, который может зависеть не только от $g_{\mu\nu}$ и их производных, но и от других величин, таких, как компоненты $\phi_{\mu\nu}$ электромагнитного поля, то тензор $T(g')$, рассматриваемый как функция $g_{\mu\nu}$ и их производных, представляет собой тензор Вейля с весом 0. Следовательно, любому закону природы $T(g) = 0$ в общей теории относительности соответствует закон $T(g') = 0$, в который входят только отношения компонент $g_{\mu\nu}$.

Следующие соображения делают этот результат еще более наглядным. Так как в $g_{\mu\nu}$ один из множителей остается произвольным, его можно выбрать таким образом, чтобы всюду

$$J = J_0, \tag{6}$$

где J_0 — константа. Тогда компонента $g'_{\mu\nu}$, с точностью до постоянного коэффициента, равна компоненте $g_{\mu\nu}$, и в новой теории законы природы снова принимают вид

$$T(g) = 0.$$

Вся новизна относительно первоначальной формы общей теории относительности заключается, таким образом, в добавлении дифференциального уравнения (6), которому должны удовлетворять $g_{\mu\nu}$.

Мы задались целью изложить здесь только логическую возможность, заслуживающую опубликования, независимо от того, будет она использована в физике или нет. Это покажут дальнейшие исследования, которые должны будут также ответить на вопрос, надо ли рассматривать и другие инварианты Вейля, помимо

$$J = \sqrt{H}.$$

Поступила 17 марта 1921 г.

Теория Вейля изложена в книге Эддингтона «Теория относительности» (М.— Л., 1934) и в книге самого Вейля (H. W e i l. Raum, Zeit, Materie. 5 Aufl. Berlin, 1923).

О ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Особую радость доставляет мне возможность произнести эту речь в столице страны, в которой родились важнейшие основополагающие идеи теоретической физики. Я имею в виду теорию всемирного тяготения и теорию движения масс, подаренные нам Ньютоном, а также концепцию электромагнитного поля, которая благодаря Фарадею и Максвеллу легла в основу физики. Можно также сказать, что теория относительности, распространившая представление о поле на все явления, включая тяготение, явилась своего рода венцом великолепного создания Максвелла и Лоренца

Прежде чем перейти к существу теории относительности, мне хотелось бы подчеркнуть тот факт, что эта теория возникла не умозрительным путем, а в результате стремления как можно лучше удовлетворить данным опыта. Здесь мы имеем совсем не революционный акт, а естественное продолжение линии развития, проходящей через века. Отказ от некоторых понятий о пространстве, времени и движении, считавшихся до последнего времени фундаментальными, вовсе не был произвольным; напротив, он был обусловлен опытными данными.

Закон постоянства скорости света в пустоте, подтвержденный развитием электродинамики и оптики, вместе с равноправностью всех инерциальных систем отсчета (специальный принцип относительности), с особой резкостью подчеркнутой в известном опыте Майкельсона, привел прежде всего к тому, что понятию времени пришлось придать относительный смысл, причем каждой инерциальной системе должно соответствовать свое особое время. При развитии этой идеи выяснилось, что связь между непосредственными ощущениями, с одной стороны, и координатами и временем, с другой,— была определена недостаточно точно. Вообще

---

* *Über die Relativitätstheorie.* Речь в Королевском колледже (Лондон) в 1921 г.

для теории относительности характерно, что она стремится установить как можно лучшее соответствие между общими понятиями и опытными данными. Главное правило состоит в том, что то или иное физическое понятие может основываться только на ясной, недвусмысленной связи с наблюдаемыми явлениями. Согласно специальной теории относительности, пространственные координаты и время еще сохраняют абсолютный характер постольку, поскольку они поддаются непосредственному измерению твердыми масштабами и часами. Однако они относительны постольку, поскольку зависят от движения выбранной инерциальной системы отсчета. Четырехмерный континуум, образованный объединением пространства и времени (Минковский), сохраняет в специальной теории такой же абсолютный характер, какой в прежней теории имели пространство и время в отдельности. Следствием интерпретации координат и времени как результатов измерений является влияние движения (относительно системы координат) на размеры тела и ход часов, а также эквивалентность энергии и инертной массы.

Общая теория относительности обязана своим существованием прежде всего опытному факту численного равенства инертной и тяжелой массы тел, причем классическая механика не могла дать никакой интерпретации этому фундаментальному обстоятельству. Такую интерпретацию удалось получить, распространяя принцип относительности на ускоренные относительно друг друга системы отсчета. Введение систем координат, ускоренных относительно инерциальных систем, обусловливает появление гравитационных полей по отношению к последним. В связи с этим общая теория относительности, основанная на равенстве инертной и тяжелой масс, и дает теорию гравитационного поля.

Введение ускоренных относительно друг друга систем координат в качестве равноправных, подсказываемое тождественностью инерции и тяжести, в соединении с результатами специальной теории относительности, приводит к заключению, что законы, обусловливающие расположение твердых тел при наличии гравитационных полей, не соответствуют эвклидовой геометрии. Аналогичный результат получается для хода часов. Отсюда вытекает необходимость еще одного обобщения теории пространства и времени, поскольку непосредственная интерпретация пространственно-временных координат как результатов измерений, полученных с помощью масштабов и часов, теперь отпадает. Это обобщение метрики, которое было уже получено в области чистой математики в трудах Римана и Гаусса, основывается главным образом на том, что метрика специальной теории относительности сохраняется для малых областей и в общем случае.

Обрисованный здесь процесс развития лишает пространственно-временные координаты всякой самостоятельной реальности. Метрически реальное теперь дается только объединением пространственно-временных координат с математическими величинами, описывающими гравитационное поле.

Существует и вторая причина, способствовавшая созданию общей теории относительности. Еще Эрнст Мах убедительно отмечал неудовлетворительность теории Ньютона в следующем отношении. Если движение рассматривать не с причинной, а с чисто описательной точки зрения, то оно существует только как относительное движение предметов по отношению друг к другу. Однако с этой точки зрения ускорение, появляющееся в уравнениях Ньютона, оказывается непонятным. Ньютон вынужден был придумать физическое пространство, по отношению к которому должно существовать ускорение. Хотя это специально введенное понятие абсолютного пространства логически корректно, оно тем не менее кажется неудовлетворительным. Поэтому Эрнст Мах пытался изменить уравнения механики так, чтобы инерция тел сводилась к движению их не по отношению к абсолютному пространству, а по отношению к совокупности всех остальных весомых тел. При существовавшем тогда уровне знаний попытка Маха была заведомо обречена на неудачу.

Однако постановка проблемы представляется вполне разумной. С особой силой эти рассуждения звучат в общей теории относительности, так как в последней физические свойства пространства определяются весомой материей. По моему мнению, в общей теории относительности эту проблему можно удовлетворительно решить, лишь считая мир пространственно замкнутым. К этому убеждению ведут математические результаты теории, если предположить, что средняя плотность весомой материи во Вселенной имеет хотя и малую, но конечную величину.

В докладе еще раз подчеркивается уверенность в физической необходимости замкнутого мира — уверенность, от которой Эйнштейн вскоре отказывается. Впервые опубликован в «Mein Weltbild». Amsterdam, Querido Verlag, 1934. Сообщение о докладе было опубликовано в «Nation a. Athenaeum», 29, 431; «Times», 1921, London, June 14, 8 и «Nature», 1921, 107, 504).

66

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ ФРАНЦА СЕЛЕТИ „К КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ“ *

Следует признать, что гипотеза о «молекулярно-иерархическом» строении звездного мира с точки зрения теории Ньютона привлекательна, хотя предположение о том, что Млечный путь является спиральной туманностью, можно считать опровергнутым последними наблюдениями [1]. Эта гипотеза, естественно, объясняет фотометрический парадокс и устраняет конфликт теории Зеелигера с законом Ньютона, не рассматривая вещество как остров в пустом пространстве.

С точки зрения общей теории относительности гипотеза о молекулярно-иерархическом строении Вселенной также возможна. Но тем не менее эту гипотезу следует считать все же неудовлетворительной. Ниже это утверждение будет обосновано еще раз. Если геометрические и инерциальные свойства пространства хотя бы частично обусловлены веществом, то напрашивается мысль, что эта обусловленность должна быть полной, как и в общей теории относительности для случая, когда средняя плотность материи является конечной и мир — пространственно замкнутым. Я попытаюсь пояснить это на простейшем, хотя и грубом, гипотетическом примере.

Предположим, что мы изучаем тяготение, точно исследуя законы механики масс, имеющихся в наших лабораториях. Пусть мы не знаем, что Земля шарообразна. Тогда можно было бы построить следующую теорию. Существует прежде всего вертикальное «космическое» поле тяжести, всюду простирающееся до бесконечности. Земля тоже простирается до бесконечности вниз. Ее гравитационным действием по сравнению с космическим полем тяжести можно пренебречь [2]. Космическое поле тяжести

* *Bemerkung zu der Franz Seletyschen Arbeit «Beiträge zum kosmologischen System».* Ann. Phys., 1922, 69, 436—438.

[1] Сейчас установлено, что наша Галактика является спиральной.— *Прим. ред.*
[2] Я должен извиниться, что эта гипотеза противоречит закону Ньютона.

изменяется вследствие гравитационного воздействия масс, с которыми можно экспериментировать на поверхности Земли.

Хотя гипотетическое космическое поле тяжести удовлетворяет уравнению Пуассона совершенно так же, как и поля тяжести масс, находящихся на поверхности Земли, наша теория была бы неудовлетворительной потому, что само космическое поле, по предположению, не имеет материальной причины. Идея о том, что поле тяжести, служащее главной причиной падения тел на поверхность Земли, существует не само по себе, а обусловлено земными телами, была бы, конечно, воспринята как большое достижение.

Тот факт, что требование сведéния метрического и инерциального поля к физическим причинам выдвигается пока еще недостаточно настойчиво, объясняется лишь тем, что физическая реальность инерциального поля ощущается не так отчетливо, как физическая реальность «космического поля тяжести» в только что приведенном примере. Будущим поколениям, однако, эта нетребовательность покажется непонятной.

В «молекулярно-иерархическом мире», так же как и в «островном мире», не выполняется постулат Маха, согласно которому инерция отдельного тела должна быть обусловлена совокупностью всех остальных тел в том же смысле, в каком это относится к гравитации. Трудно понять, каким образом Селети сумел бы устранить этот недостаток своей системы. Этот недостаток усугубляется тем, что в общей теории относительности, даже не касаясь космологических проблем, можно показать, что тела ведут себя в первом приближении так, как этого следует ожидать в соответствии с идеей Маха. По этому поводу я сошлюсь на мои «Четыре лекции по теории относительности» (прочитанные в мае 1921 г. в Принстонском университете), которые вышли в издательстве Фивег [3].

Наконец, надо упомянуть еще один пункт, вызывающий путаницу не только в статье Селети, но часто и в специальной литературе. Согласно теории относительности, законы природы необходимо формулировать независимо от какого-либо конкретного выбора координат, так как системе координат ничто реально существующее не соответствует; о простоте гипотетического закона можно судить только по его общековариантной формулировке. Однако из этого не следует, что если при соответствующем выборе координат описание можно упростить, то это будет противоречить принципу относительности. Например, когда я апроксимирую реальный мир «цилиндрическим миром» с равномерным распределением вещества и выбираю при этом ось времени параллельной образующим «цилиндра», то это не означает введения «абсолютного времени». В этом случае по-прежнему не существует никакой системы координат, которой следовало бы

[3] Статья 54.— *Ред.*

отдать предпочтение при формулировке законов природы. Что касается реального мира, то точно определить в нем такую систему, конечно, невозможно, даже если реальный мир приближенно и можно описать таким цилиндрическим миром. Принцип относительности не утверждает, что мир можно описывать во всех системах координат одинаково простым или вообще одинаковым образом; он говорит лишь о том, что общие законы природы должны быть одинаковыми во всех системах (точнее, о простоте гипотетически возможных законов природы можно судить только по их общековариантной формулировке).

Поступила 25 сентября 1922 г.

Статья Селети (Franz Selety) была напечатана в Ann. Phys., 1922, **68**, 281. Ответ на заметку Эйнштейна был опубликован в том же журнале [1923, **72**, 58].

Селети обсуждает вопрос о возможности бесконечной Вселенной, свободной от парадокса Зеелигера, т. е. бесконечной Вселенной, в которой нет бесконечно больших градиентов потенциалов и в которой средние скорости звезд соответственно малы. Подобно тому, как галактики состоят из звезд, автор предполагает, что галактики образуют системы более высокого порядка, так что на каждой следующей ступени системы предыдущей входят как составные части. Такую модель Селети и называет молекулярной иерархией.

Плотность материи в модели Селети равна нулю, что и служит исходным пунктом критики Эйнштейна (с которой, впрочем, Селети и не соглашается). Уверенность Эйнштейна в том, что Вселенная должна быть конечна, была поколеблена лишь работами А. А. Фридмана.

67

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ Э. ТРЕФТЦА „СТАТИЧЕСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ДВУХ ТОЧЕЧНЫХ МАСС В ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА“ *

В основу своих исследований автор[1] кладет уравнения поля в вакууме

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = 0, \tag{1}$$

эквивалентные уравнениям

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) - \lambda g_{ik} = 0, \tag{1a}$$

что может быть легко доказано сверткой уравнения (1a).

Автор считает, что им найдено статическое решение, которое содержит сферическую пространственную геометрию, не имеет сингулярностей вне обеих масс и в которое не входят другие массы.

Эта задача представляет большой интерес для космологии, т. е. для рассмотрения геометрической структуры Вселенной в целом, и меня заинтересовало, доказывают ли действительно эти уравнения физическую возможность существования статической Вселенной, масса которой концентрировалась бы только в двух небесных телах. Однако при этом выяснилось, что решение Трефтца вообще не допускает такой физической интерпретации. Это будет показано ниже.

Э. Трефтц исходит из следующего выражения для (четырехмерного) линейного элемента

$$ds^2 = f_4(x)\, dt^2 - [dx^2 + f_2(x)\,(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)]. \tag{2}$$

Это выражение соответствует пространству, обладающему сферической симметрией относительно начальной точки.

---

* *Bemerkung zu der Abhandlung von E. Trefftz. «Das statische Gravitationsfeld zweier Massenpunkte in der Einsteinschen Theorie»*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1922, 448—449.

[1] E. Trefftz. Math. Ann., 1922, 86, 317.

Частный случай $f_4=\text{const.}$; $f_2=x^2$ соответствовал бы изотропному и однородному пространству Галилея — Эвклида.

В формуле (2) x представляет собой обычным способом измеренное радиальное расстояние от одной из двух точечных масс (с точностью до аддитивной постоянной, $\sqrt{f_2(x)}$) или, иначе говоря, измеренную обычным способом и деленную на 2π окружность большого круга шара, соответствующего постоянному значению x, разделяющего и концентрически охватывающего обе массы [2]. Поверхности двух шаровых масс, между которыми ($X_1 < x < X_2$) находится пустое пространство, определяются двумя уравнениями $x = X_1$ и $x = X_2$. Э. Трефтц приводит в качестве общего решения задачи:

$$\left.\begin{aligned} x &= \int \frac{dw}{\sqrt{1+\frac{A}{w}+Bw^2}}, \\ f_2 &= w^2, \\ f_4 &= C^2\left(1+\frac{A}{w}+Bw^2\right), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

причем без ограничения общности C может быть принято равным единице.

Исходя из формулы (2), можно, следовательно, написать

$$ds^2 = \left(1+\frac{A}{w}+Bw^2\right)dt^2 - \frac{dw^2}{1+\frac{A}{w}+Bw^2} - w^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right).$$

При отрицательном A и исчезающе малом B эта формула превращается в хорошо известное шварцшильдовское решение для поля материальной точки. Следовательно, для постоянной A нужно и здесь выбирать отрицательное значение в соответствии с тем фактом, что существуют лишь положительные гравитирующие массы. Константа B соответствует λ-члену уравнения (1а). Положительному λ соответствует отрицательное B и, наоборот.

Если система уравнений (3) действительно представляет поле двух шаровых масс, то Вселенная естественно должна иметь следующую метрику. Начиная с первой сферы $x = X_1$, длина окружности $x = \text{const.}$, деленная на 2π и выраженная через $w(=\sqrt{f_2})$, должна сначала увеличиваться с возрастанием x, и затем, при приближении ко второму шару, уменьшаться в том случае, если речь идет о замкнутой Вселенной, в которой справедливы соотношения сферического мира. Следовательно, где-то

[2] Предполагается, что в рассматриваемой *замкнутой* модели сфера может иметь два центра по обе стороны от ее поверхности. — *Прим. ред.*

в пустом пространстве между обеими шаровыми массами должно выполняться условие

$$\frac{dw}{dx} = \sqrt{1 + \frac{A}{w} + Bw^2} = 0.$$

Однако здесь, согласно равенствам (3), f_4 равнялось бы нулю. Согласно уравнению (2), $\sqrt{f_4}$ представляет собой скорость хода часов, отрегулированную там в состоянии покоя. Обращение f_4 в нуль означает, следовательно, истинную сингулярность поля. О том, что величины f_4 не должны обращаться в нуль, говорит и тот факт, что в дифференциальных уравнениях появляются логарифмические производные f_4'/f_4. Тем самым показано, что решение (3) не может быть распространено до этого места. Оно предполагает в действительности наличие протяженного сферически симметричного распределения масс, как уже было показано Г. Вейлем.

Поступила 21 декабря 1922 г.

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ А. ФРИДМАНА „О КРИВИЗНЕ ПРОСТРАНСТВА“ *

Результаты относительно нестационарного мира, содержащиеся в упомянутой работе [1], представляются мне подозрительными. В действительности оказывается, что указанное в ней решение не удовлетворяет уравнениям поля (A). Как известно, из этих уравнений следует, что дивергенция тензора материи T_{ik} обращается в нуль. В случае, характеризуемом предположениями (C) и (D_3), это приводит к соотношению

$$\frac{d\rho}{\partial x_4} = 0,$$

что вместе с уравнением (8) требует постоянства радиуса мира во времени. Следовательно, значение этой работы в том и состоит, что она доказывает это постоянство.

Поступила 18 сентября 1922 г.

* *Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedmann. «Über die Krümmung des Raumes».* Z. Phys., 1922, 11, 326.

[1] A. Friedmann. Z. Phys., 1922, 10, 377—386.

69

К РАБОТЕ А. ФРИДМАНА „О КРИВИЗНЕ ПРОСТРАНСТВА“*

В предыдущей заметке [1] я подверг критике названную выше работу [2]. Однако моя критика, как я убедился из письма Фридмана, сообщенного мне г-ном Крутковым, основывалась на ошибке в вычислениях. Я считаю результаты Фридмана правильными и проливающими новый свет. Оказывается, что уравнения поля допускают наряду со статическими также и динамические (т. е. переменные относительно времени) центрально-симметричные решения для структуры пространства.

Поступила 31 мая 1923 г.

Работы А.А. Фридмана (1888—1925) вновь напечатаны в номере журнала «Успехи физических наук» (1963, 86, № 3),посвященном 75-летию со дня его рождения; там же напечатан и перевод этих заметок Эйнштейна.

Работы Фридмана оказали большое влияние на развитие наших взглядов на Вселенную. Эйнштейна, в частности, Фридман заставил отказаться от предвзятой модели стационарной Вселенной, ввел представление о расширяющейся Вселенной и показал существование открытой модели. Этим самым он доказал ошибочность представления, что Вселенная *должна* быть замкнутой. Открытие модели Фридмана сделало ненужным введение космологической постоянной λ, от которой, под влиянием Фридмана, отказался и сам Эйнштейн.

---

* *Notiz zu der Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedmann. «Über die Krümmung des Raumes».* Z. Phys., 1923, 16, 228.

[1] A. Einstein. Z. Phys., 1922, 11, 326. (Статья 68),
[2] A. Friedmann. Z. Phys., 1922, 10, 377.

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ И ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Если рассмотреть ту часть теории относительности, которую в настоящее время можно считать, в известном смысле, надежным достоянием науки, то обнаружатся два аспекта, играющие ведущую роль в этой теории.

Во-первых, в центре всего рассмотрения стоит вопрос: существуют ли в природе физически выделенные (привилегированные) состояния движения? (Физическая проблема относительности).

Во-вторых, фундаментальным оказывается следующий гносеологический постулат: понятия и суждения имеют смысл лишь постольку, поскольку им можно однозначно сопоставить наблюдаемые факты. (Требование содержательности понятий и суждений).

Оба эти аспекта можно уяснить, если применить их к частному случаю, например, к классической механике. Сначала мы видим, что в каждой точке, занятой материей, существует привилегированное состояние движения, именно: состояние движения материи в рассматриваемой точке. Однако обсуждаемая проблема по существу только начинается с вопроса: существуют ли физически выделенные состояния движения для *протяженных* областей? С точки зрения классической механики на этот вопрос следует ответить утвердительно: такими физически выделенными состояниями движения являются состояния движения инерциальных систем.

Это высказывание, как и вообще все основы механики в том виде, как ее обычно излагали до теории относительности, далеко не удовлетворяет сформулированному выше «требованию содержательности». Движение можно понимать только как относительное движение тел. В механике, говоря о движении вообще, подразумевают движение относительно системы координат. Но такое понимание не соответствует «требованию содержательности», если систему координат рассматривать просто как нечто во-

* *Grundgedanken und Probleme der Relativitätstheorie*. В кн.: «Nobelstiftelsen, Les Prix Nobel en 1921—1922». Imprimerie Royale. Stockholm, 1923.

ображаемое. Обратившись к экспериментальной физике, можно убедиться, что в ней система координат всегда представлена «практически абсолютно твердым» телом. При этом, далее, делается допущение, что такие твердые тела можно расположить в покое друг относительно друга, подобно телам эвклидовой геометрии. В той мере, в какой мы вправе считать абсолютно твердое измерительное тело существующим, удается привести в соответствие с «требованием содержательности» как понятие «системы координат», так и понятие движения материи относительно этой системы. Вместе с тем такое понимание позволяет согласовать (применительно к нуждам физики) с «требованием содержательности» и эвклидову геометрию. Таким образом, вопрос о справедливости эвклидовой геометрии приобретает физический смысл; справедливость ее предполагается как в классической физике, так и в специальной теории относительности.

Инерциальная система и время определяются в классической механике лучше всего совместно, с помощью подходящей формулировки закона инерции: оказывается возможным установить такое время и сообщить системе координат такое состояние движения (инерциальная система), чтобы по отношению к ней материальные точки, не подвергающиеся действию сил, не испытывали ускорения; кроме того, по отношению к этому времени допускается, что оно может быть измерено одинаково устроенными часами (системами с периодическим процессом), исходя из любого состояния движения, и что результаты этих измерений будут совпадать. В таком случае имеется бесконечно много инерциальных систем, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, а следовательно, и бесконечно много физически выделенных состояний движения, равноценных между собой. Время абсолютно, т. е. не зависит от выбора конкретной инерциальной системы; оно определяется бо́льшим числом признаков, чем это логически необходимо, что, однако, как предполагается в механике, не должно приводить к противоречиям с опытом. Отметим прежде всего, что логическая слабость этого представления с точки зрения требования содержательности заключается в том, что у нас нет никакого опытного критерия для установления того, свободна ли материальная точка от действия сил, или нет; поэтому понятие «инерциальная система» остается до некоторой степени проблематичным. На этот пробел, анализ которого приводит к общей теории относительности, мы пока не будем обращать внимания.

В изложенном рассуждении об основах механики понятие абсолютно твердого тела (а равно и понятие часов) играет фундаментальную роль, которую с известным основанием можно оспаривать. Абсолютно твердые тела осуществляются в природе лишь приближенно, и притом даже не с любой степенью приближения; таким образом это понятие не удовлетворяет строго «требованию содержательности». Далее, представляется логически неоправданным предпосылать всему физическому рассмотрению понятие абсолютно твердого (или просто твердого) тела, а затем, в конечном счете, строить его (тело) на атомистической основе, исходя из первичных физических законов, которые, в свою очередь, сами построены с помощью понятия абсолютно твердого измерительного тела. Мы упоминаем об этих методологических недостатках потому, что они в таком же смысле присущи и теории относительности в том ее схематическом представлении, которое мы здесь излагаем. Разумеется, было бы логически более последовательным начать с существа самих физических законов и только к этому существу предъявить «требование содержательности», т. е. отнести на самый конец установление однозначной связи с миром опыта, вместо того, чтобы осуществлять ее в несовершенном виде уже для одной искусственно изолированной части теории, а именно: для пространственно-временной метрики. Однако мы еще не продвинулись достаточно далеко в установлении первичных законов природы, чтобы пойти по этому более совершенному пути, не рискуя потерять твердую почву под ногами. В конце наших рассуждений мы увидим, что в новейших исследованиях уже содержится попытка осуществления этого логически более последовательного метода, основанная на идеях Леви-Чивиты, Вейля и Эддингтона.

Из сказанного выше становится также ясно, что́ следует понимать под «привилегированными состояниями движения». Они являются привилегированными в смысле формулировки законов природы. Системы координат, находящиеся в таких состояниях движения, отличаются тем, что сформулированные в этих координатах законы природы принимают наиболее простой вид. Согласно классической механике, физически выделенными в этом смысле являются состояния движения инерциальных систем. Согласно классической механике, можно различить (абсолютно) неускоренные и ускоренные движения; далее, в классической механике существуют скорости только относительные (зависящие от выбора инерциальной системы), а ускорения и вращения — абсолютные (не зависящие от выбора инерциальной системы). Выразим это так: согласно классической механике существует «относительность скорости», но не «относительность ускорения». После этих предварительных замечаний перейдем к основному предмету нашего рассмотрения — теории относительности — и охарактеризуем принципиальную сторону ее развития вплоть до настоящего времени.

Специальная теория относительности представляет собой результат приспособления основ физики к электродинамике Максвелла — Лоренца. Из прежней физики она заимствует предположение о справедливости эвклидовой геометрии для законов пространственного расположения абсолютно твердых тел, инерциальную систему и закон инерции. Закон равноценности всех инерциальных систем с точки зрения формулирования законов природы специальная теория относительности принимает справедливым для всей физики (специальный принцип относительности). Из электродинамики Максвелла — Лоренца эта теория заимствует закон постоянства скорости света в вакууме (принцип постоянства скорости света).

Для того чтобы можно было согласовать специальный принцип относительности с принципом постоянства скорости света, необходимо отказаться от предположения о существовании абсолютного (совпадающего для всех инерциальных систем) времени. Таким образом, мы отказываемся от гипотезы, что одинаково устроенные, произвольно движущиеся и должным образом отрегулированные часы идут так, что показания любых двух из них при встрече друг с другом совпадают. Каждой инерциальной системе приписывается свое, особое время; состояние движения инерциальной системы и ее время определяются, в согласии с требованием содержательности, тем, что по отношению к ней должен выполняться принцип постоянства скорости света. Существование определенной таким образом инерциальной системы, равно как и справедливость закона инерции в этой системе, постулируются. Для каждой из инерциальных систем время измеряется покоящимися относительно этой системы и одинаково устроенными часами.

Этими определениями вместе с гипотезами, скрытыми в предположении об их непротиворечивости, однозначно устанавливаются законы преобразования пространственных координат и времени, при переходе от одной инерциальной системы к другой, так называемые преобразования Лоренца. Их непосредственный физический смысл состоит во влиянии движения относительно рассматриваемой инерциальной системы на форму абсолютно твердых тел (лоренцово сокращение) и на ход часов. Согласно специальному принципу относительности, законы природы должны быть ковариантны относительно преобразований Лоренца; таким образом, теория дает критерий, которому должны удовлетворять общие законы природы. Она приводит, в частности, к видоизмененному ньютоновскому закону движения материальной точки, в который скорость света в вакууме входит в качестве предельной скорости, а также к осознанию одинаковой природы энергии и инертной массы.

Специальная теория относительности привела к значительным успехам. Она примирила механику с электродинамикой. Она сократила число логически независимых друг от друга гипотез в электродинамике. Она сделала неизбежным методологический анализ основных понятий. Она объединила законы сохранения импульса и энергии, выявила единство массы и энергии. Однако она все же не могла нас вполне удовлетворить — даже независимо от квантовых трудностей, в действительном разрешении которых до сих пор оказывались бессильными все теории. Так же как и классическая механика, специальная теория относительности сохраняет выделение некоторых привилегированных состояний движения — состояния движения инерциальных систем — по сравнению со всеми остальными состояниями движения. С таким сохранением, собственно говоря, труднее примириться, чем даже с выделением одного единственного привилегированного состояния движения, как это делалось в теории покоящегося светоносного эфира, ибо в этой теории по крайней мере мыслилось реальное основание для такого выделения, а именно: светоносный эфир. Более удовлетворительной должна представляться теория, которая с самого начала не выделяет никакого привилегированного состояния движения. Далее, вызывает сомнение уже упомянутая выше неясность в определении инерциальной системы или в формулировке закона инерции. Эти сомнения приобретают решающее значение в свете опытного закона равенства инертной и тяжелой массы, как показывает нижеследующее рассуждение.

Пусть K — инерциальная система без поля тяжести, K' — система координат, равномерно ускоренная относительно K. Тогда поведение материальных точек по отношению к системе K' будет таким же, как если бы K' была инерциальной системой, в которой существует однородное поле тяготения. Таким образом, в свете известных из опыта свойств поля тяжести определение инерциальной системы оказывается несостоятельным. Напрашивается мысль о том, что каждая, любым образом движущаяся система отсчета, с точки зрения формулировки законов природы, равноценна любой другой и что, следовательно, для областей конечной протяженности вообще не существует физически выделенных (привилегированных) состояний движения (общий принцип относительности).

Последовательное проведение этой идеи требует еще более глубокого видоизменения геометрико-кинематических основ теории, чем специальная теория относительности. Дело в том, что вытекающее из последней лоренцово сокращение приводит к следующему результату: по отношению к системе K', произвольно движущейся относительно некоторой инерциальной системы K (свободной от поля тяготения), законы эвклидовой геометрии для пространственного расположения абсолютно твердых (покоящихся относительно K') тел несправедливы. Тем самым теряет смысл, с точки зрения требования содержательности, и декартова система координат. Аналогично обстоит дело и в отношении времени: его определение относительно системы K' на основании показаний одинаково устроенных покоящихся относительно K' часов или на основании закона распространения света уже не имеет смысла. Обобщая, приходим к следующему результату: поле тяготения и метрика представляют собой лишь различные формы проявления одного и того же физического поля.

К формальному описанию этого поля можно прийти путем следующего рассуждения. Для любой бесконечно малой окрестности точки в произвольном поле тяготения можно указать локальную систему координат в таком состоянии движения, что по отношению к этой локальной системе координат не существует поля тяготения (локальная инерциальная система). Для этой инерциальной системы и для этой бесконечно малой области результаты специальной теории относительности мы вправе считать справедливыми в первом приближении. В каждой точке пространства-времени имеется бесконечно много таких локальных инерциальных систем; они связаны между собой преобразованиями Лоренца. Последние характеризуются тем, что они оставляют инвариантным «интервал» ds между двумя бесконечно близкими событиями, определяемый равенством

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Этот интервал может быть измерен с помощью масштабов и часов, так как x, y, z, t означают координаты и время, измеренные по отношению к локальной инерциальной системе.

Для описания пространственно-временны́х областей конечной протяженности нужны произвольные координаты в четырехмерном многообразии, обеспечивающие не что иное, как однозначное обозначение каждой из точек пространства-времени четырьмя числами x_1, x_2, x_3, x_4, и отвечающие непрерывности этого четырехмерного многообразия (гауссовы координаты). Математическое выражение общего принципа относительности состоит в том, что системы уравнений, выражающие общие законы природы, имеют одинаковый вид во всех таких системах координат.

Так как дифференциалы координат локальной инерциальной системы выражаются линейно через дифференциалы dx_ν некоторой гауссовой системы координат, то при использовании последней для интервала ds между двумя событиями получается выражение вида

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \qquad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}).$$

Величины $g_{\mu\nu}$, являющиеся непрерывными функциями координат x_ν, определяют метрику четырехмерного многообразия, поскольку ds определен как величина, измеримая с помощью масштабов и часов (абсолютная). Но именно эти величины $g_{\mu\nu}$ описывают в гауссовой системе координат также и поле тяготения, единство природы которого с физической причиной, определяющей метрику, было нами установлено ранее. Частный случай справедливости специальной теории относительности в конечной области характеризуется тем, что при подходящем выборе системы координат величины $g_{\mu\nu}$ в этой конечной области не зависят от координат x_ν.

Согласно общей теории относительности, закон движения материальной точки в чисто гравитационном поле выражается уравнением геодезической. Действительно, геодезическая является математически наиболее простой кривой, переходящей в прямую в частном случае постоянных $g_{\mu\nu}$. Таким образом, здесь мы имеем дело с переносом закона инерции Галилея в общую теорию относительности.

Установление уравнений поля сводится математически к вопросу о простейших общековариантных дифференциальных уравнениях, которым могут быть подчинены гравитационные потенциалы $g_{\mu\nu}$. Эти уравнения определены тем, что они должны содержать производные от $g_{\mu\nu}$ по x_ν не выше второго порядка, причем эти производные должны входить в уравнение только линейно. В свете этого условия, рассматриваемые уравнения оказываются естественным переносом уравнения Пуассона ньютоновской теории тяготения в общую теорию относительности.

Указанный ход рассуждений привел к теории тяготения, содержащей в качестве первого приближения теорию Ньютона и, сверх того, позволяющей рассчитать движение перигелия Меркурия, отклонение луча света в гравитационном поле Солнца и красное смещение спектральных линий, согласующиеся с результатами наблюдений [1].

Чтобы завершить построение фундамента общей теории относительности, необходимо еще ввести в нее электромагнитное поле, которое вместе с тем представляет собой, по нашему теперешнему убеждению, тот материал, из которого нам надлежит построить элементарные образования материи. Удается также без труда перенести максвелловские уравнения поля в общую теорию относительности. Такой перенос вполне однозначен, если только допустить, что эти уравнения не содержат производных $g_{\mu\nu}$ выше первого порядка и что в локальной инерциальной системе они справедливы в их обычной (максвелловской) форме. Далее, уравнения гравитационного поля легко удается дополнить электромагнитными членами таким (предписываемым уравнениями Максвелла) способом, чтобы они учитывали гравитирующее действие электромагнитного поля.

Эти уравнения поля не дали какой-либо теории материи. Поэтому, чтобы включить в теорию действие весомых масс как источников поля, пришлось (как и в классической физике) ввести в нее материю в приближенном, феноменологическом представлении.

Этим исчерпываются непосредственные следствия принципа относительности. Обратимся теперь к проблемам, примыкающим к изложенному. Уже Ньютон осознал, что закон инерции неудовлетворителен в одном отношении, о котором здесь не было до сих пор упомянуто; в нем не указывается никакой реальной причины физического выделения состояний движения инерциальных систем по сравнению со всеми другими состояниями движения. В то время как за гравитационные свойства материаль-

---

[1] Впрочем, для красного смещения согласие с результатами наблюдений еще не вполне надежно.

ной точки ответственными считаются наблюдаемые материальные тела, для инерционных свойств материальной точки указывается не какая-либо материальная причина,а фиктивная (абсолютное пространство, или инерциальный эфир).Это хотя и не является логически недопустимым, но оставляет чувство неудовлетворенности. По этой причине Э. Мах требовал видоизменения закона инерции в том смысле, что инерцию следовало бы понимать как сопротивление тел ускорению по отношению *друг к другу*, а не по отношению к «пространству». При таком понимании следует ожидать, что ускоренные тела одинаково ускоряюще действуют на другие тела (ускорительная индукция).

Изложенное толкование еще больше подкрепляется общей теорией относительности, которая устраняет разграничение между эффектами инерции и тяготения. Оно сводится к требованию, чтобы поле $g_{\mu\nu}$ полностью, с точностью до несущественного произвола, обусловленного свободой выбора координат, определялось материей. В пользу требования Маха говорит еще и то, что, согласно уравнениям поля тяготения, ускорительная индукция действительно существует, хотя и является столь слабым эффектом, что возможность ее прямого обнаружения с помощью механических опытов исключена.

Требованию Маха можно удовлетворить в общей теории относительности, если рассматривать мир пространственно конечным и замкнутым. Благодаря этой гипотезе оказывается также возможным считать среднюю плотность материи в мире *конечной*, в то время как в пространственно бесконечном (квазиэвклидовом) мире она должна была бы обратиться в нуль. Однако нельзя умолчать о том, что для такого выполнения постулата Маха приходится ввести в уравнения поля член, который не основан на каких-либо опытных данных и ни в коей мере не обусловлен логически остальными членами этих уравнений. По этой причине указанное решение «космологической проблемы» пока нельзя считать вполне удовлетворительным.

Теперь особенно живо волнует умы проблема единой природы гравитационного и электромагнитного полей. Мысль, стремящаяся к единству теории, не может примириться с существованием двух полей, по своей природе совершенно независимых друг от друга. Поэтому делаются попытки построить такую математически единую теорию поля, в которой гравитационное и электромагнитное поля рассматриваются лишь как различные компоненты одного и того же единого поля, причем его уравнения, по возможности, уже не состоят из логически независимых друг от друга членов.

Теория тяготения (т.е.риманова геометрия — с точки зрения математического формализма) должна быть обобщена так, чтобы она охватывала также и законы электромагнитного поля. К сожалению, при этой попытке мы не можем опереться на опытные факты, как при построении теории тяготения (равенство инертной и тяжелой массы), а вынуждены ограничиться критерием математической простоты, который не свободен от произвола. В настоящее время наиболее успешной представляется основанная на идеях Леви-Чивиты, Вейля и Эддингтона попытка заменить риманову метрическую геометрию более общей теорией аффинной связи.

Для римановой геометрии характерно предположение, что двум бесконечно близким точкам можно сопоставить «интервал» ds, квадрат которого является однородной квадратичной функцией дифференциалов координат. Отсюда следует (при выполнении некоторых условий вещественности) справедливость эвклидовой геометрии в любой бесконечно малой области. Таким образом, каждому линейному элементу (или вектору) в некоторой точке P сопоставляется параллельный и равный ему линейный элемент (или вектор) в любой заданной бесконечно близкой точке P' (аффинная связь). Риманова метрика определяет некоторую аффинную связь. Если же, наоборот, математически задана аффинная связь (закон бесконечно малого параллельного переноса), то в общем случае не существует такого римановского мероопределения, из которого ее можно было бы вывести.

Важнейшее понятие римановой геометрии, на котором основаны и уравнения тяготения,— «кривизна пространства»— в свою очередь основывается исключительно на «аффинной связи». Если задать такую аффинную связь в некотором континууме, не основываясь с самого начала на метрике, то получается обобщение римановой геометрии, в котором все же сохраняются важнейшие выведенные ранее величины. Находя наиболее простые дифференциальные уравнения, которым можно подчинить аффинную связь, мы вправе надеяться, что натолкнемся на такое обобщение уравнений тяготения, которое будет содержать в себе также и законы электромагнитного поля. Эта надежда и в самом деле оправдалась, но мы не знаем, можно ли рассматривать полученную таким образом формальную связь как действительное обогащение физики, пока из нее не будут получены какие-либо новые физические связи. В частности, теорию поля можно будет признать удовлетворительной, по моему мнению, лишь тогда, когда она позволит описать элементарные электрические частицы с помощью решений, не содержащих особенностей.

Наконец, не следует забывать, что теорию элементарных электрических образований нельзя отделять от вопросов квантовой теории. Перед лицом этой наиболее глубокой физической проблемы современности пока оказалась бессильной и теория относительности. Но если когда-нибудь в результате решения квантовой проблемы форма общих уравнений и претерпит дальнейшие глубокие изменения,— пусть даже совершенно изменятся самые величины, с помощью которых мы описываем элементарные процессы,— от принципа относительности отказываться никогда не придется; законы, выведенные с его помощью до сих пор, сохранят свое значение по меньшей мере в качестве предельных законов.

Эйнштейн не произнес традиционной речи при вручении ему Нобелевской премии. В сборниках Нобелевских докладов вместо этого включен его доклад, который он сделал в те же дни (11 июля 1923 г.) в Гётеборге на собрании естествоиспытателей северных стран. Доклад был издан и отдельной брошюрой; кроме того, его испанский перевод был издан в Аргентине (Fenix, Buenos Aires, 1924, 4, 103).

В докладе подчеркнуто отношение Эйнштейна к привилегированной системе координат — системе, в которой физические законы имеют наиболее простой вид.

Интересен и конец доклада, где Эйнштейн (еще не зная о работе Фридмана) выражает неудовлетворение космологической постоянной, введение которой, по его мнению, логически не обоснованно.

В докладе сформулирована программа единой теории поля, над которой Эйнштейн активно работал с 1923 г. до конца жизни.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ ВСЮДУ РЕГУЛЯРНОГО ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ПОЛЯ В ТЕОРИИ ПОЛЯ Т. КАЛУЦЫ*

(Совместно с Я. Громмером)

Пожалуй, наиболее важным в настоящее время вопросом в общей теории относительности является вопрос о единой природе гравитационного и электромагнитного полей. Хотя единая природа этих двух видов поля априори ниоткуда не следует, преодоление этого дуализма явилось бы, несомненно, большим успехом теории. Единственной попыткой в этом направлении до последнего времени была теория Вейля. Однако эта теория вызывает серьезные сомнения. Она не обеспечивает независимость состояний масштабов и часов, в том числе и атомов, от их предыстории. Кроме того, она не устраняет указанный дуализм, поскольку ее функция Гамильтона аддитивно складывается из двух логически независимых частей — электромагнитной и гравитационной. Далее эта теория приводит к дифференциальным уравнениям четвертого порядка, в то время как у нас пока нет никаких оснований выходить за рамки уравнений второго порядка.

Недавно Т. Калуца представил Академии наук в Берлине проект теории [1], которая устраняет все эти недостатки и отличается удивительной формальной простотой. Мы изложим вначале ход мыслей Калуцы и затем перейдем к поставленному нами вопросу.

Пятимерное многообразие, в котором переменные поля не зависят (при соответствующем выборе координат) от пятой координаты, эквивалентно

* *Beweis der Nichtexsistenz eines überall regulären zentrisch symmetrischen Feldes nach der Feld-Theorie von Th. Kaluza* (Mit J. Grommer). Scripta Universitatis atque Bibliothecae Hierosolymitanarum, Mathematica et Physica (Jerusalem), 1923, 1, N 7.

[1] T. Kaluza. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1921, 966. [Изложение теории Калуцы, см., например, в статье G. Beck. Allgemeine Relativitätstheorie, Handb. Phys., 1te Auflage, Bd. 4, 381.— *Прим. ред.*].

четырехмерному континууму. Поэтому не требуется никакой новой физической гипотезы, чтобы интерпретировать четырехмерное пространственно-временнóе многообразие физического мира как такое пятимерное многообразие, которое можно назвать «цилиндрическим» относительно x_5. Так и поступает Калуца. Далее он предполагает, что физическая реальность в этом континууме характеризуется квадратом линейного элемента

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \tag{1}$$

с коэффициентами ($g_{\mu\nu}= g_{\nu\mu}$)

$$\begin{array}{ccccc} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,, \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55}, \end{array}$$

которые в соответствии со сказанным не зависят от x_5. Компоненты g_{11}, ..., g_{14} должны описывать гравитационное поле; компоненты g_{15}, g_{25}, g_{35}, g_{45} — электромагнитные потенциалы; g_{55} — переменная поля, еще не имеющая интерпретации, но, возможно, связанная с давлением Пуанкаре, которое до сих пор представляло для теории электрона что-то вроде камня преткновения.

Существенное предположение Калуцы заключается в утверждении, что законы природы в этом пятимерном мире должны быть общековариантными. Благодаря этому электромагнитные потенциалы неизбежно входят в законы природы совершенно таким же образом, как и гравитационные потенциалы, что приводит к радикальному ограничению возможностей. Благодаря этому перед нами появляется возможность построить физическую картину мира на основе единой функции Гамильтона, не состоящей из суммы разнородных членов. Конечно, кроме величин $g_{\mu\nu}$, Т. Калуца вводит также тензор потока материи. Однако ясно, что введение этого тензора необходимо лишь для того, чтобы дать предварительное, чисто феноменологическое описание вещества, тогда как в настоящее время конечной целью является чистая теория поля, в которой переменные поля изображали бы как поле «пустого пространства», так и электрически заряженные элементарные частицы, образующие «вещество».

Разумеется, нельзя умолчать о принципиально слабом пункте идеи Калуцы. В общей теории относительности, имеющей дело с четырехмерным континуумом, форма

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

означает величину, непосредственно измеримую с помощью масштабов и часов в локальной инерциальной системе, тогда как в пятимерном континууме теории Калуцы ds^2 представляет собой чистую абстракцию, по-видимому, лишенную непосредственного метрического смысла. Поэтому с физической точки зрения требование общей ковариантности всех уравнений в пятимерном континууме представляется совершенно необоснованным. Кроме того, возникает сомнительная асимметрия, когда требованием цилиндричности одно измерение выделяется из всех других, в то время как в структуре уравнений все пять измерений должны быть равноправными.

Можно поставить вопрос, достаточно ли для описания единого поля величин $g_{\mu\nu}$. Тогда, выбрав координаты, при которых определитель $|g_{\mu\nu}| = g$ имеет значение 1, функцию Гамильтона H можно записать в виде

$$H = g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}. \tag{2}$$

При этом уравнения поля в первом приближении, т. е. в случае малых отклонений $g_{\mu\nu}$ от постоянных значений, принимают вид

$$\frac{\partial\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} = 0. \tag{3}$$

Калуца уже показал, что таким способом правильно воспроизводятся в первом приближении законы гравитации и уравнения Максвелла для пустоты.

При таком положении вещей представляется интересным узнать, допускают ли строгие уравнения, соответствующие функции Гамильтона (2), центрально-симметричные статические решения (в пространстве трех измерений), всюду свободные от сингулярностей [2] и способные представлять элементарные электрические заряды.

Центрально-симметричное решение удовлетворяет следующим условиям.

1. Для трех пространственных индексов должно выполняться соотношение:

$$g_{\alpha\beta} = \lambda\delta_{\alpha\beta} + \mu x_{\alpha}x_{\beta} \ (\delta_{\alpha\beta} = 1 \text{ или } 0, \text{ если } \alpha = \beta \text{ или } \alpha \neq \beta).$$

2. Компоненты g_{14}, g_{24}, g_{34}, g_{15}, g_{25}, g_{35} должны всюду равняться нулю.

3. Компоненты g_{44}, g_{45} и g_{55}, а также величины λ, μ должны быть функциями только $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Полагая еще для сокращения

$$\gamma = g_{44}g_{55} - g_{45}^2,$$

[2] Т. е. $g_{\mu\nu}$ нигде не должны обращаться в бесконечность, а определитель g—в нуль.

для функции Гамильтона из (2) получаем

$$r^2H = \frac{\lambda^2}{2} r^2 (g'_{44}g'_{55} - g'^2_{45}) + \frac{1}{2}\gamma\lambda'^2 r^2 + \lambda\lambda'\gamma' r^2 - \frac{2\lambda' r}{\lambda^2} - 2\lambda\lambda'\gamma r. \qquad (4)$$

Вариация интеграла действия

$$\int Hr^2dr$$

по g_{44} дает уравнение

$$[(g_{44}\lambda^2)' r^2]' - g_{44}\lambda'^2 r^2 + 4g_{44}\lambda'\lambda r = 0. \qquad (5)$$

Уравнения для g_{45} и g_{55} совершенно аналогичны. Комбинируя каждую пару этих уравнений, получаем три одинаковых по структуре уравнения типа

$$\frac{[r^2\lambda^2 (g_{44}g'_{45} - g'_{44}g_{45})]'}{r^2\lambda^2 (g_{44}g'_{45} - g'_{44}g_{45})} = -\frac{(\lambda^2)'}{\lambda^2}. \qquad (6)$$

Интегрируя, получаем отсюда

$$r^2\lambda^4 (g_{44}g'_{45} - g'_{44}g_{45}) = \mathrm{const}. \qquad (7)$$

Постоянная в правой части должна равняться нулю, поскольку левая часть при $r = 0$ обращается в нуль. Поэтому из уравнения (7) после повторного интегрирования следует

$$\frac{g_{45}}{g_{44}} = \mathrm{const}. \qquad (8)$$

Аналогичным образом

$$\frac{g_{45}}{g_{55}} = \mathrm{const}. \qquad (8a)$$

В пространственной бесконечности многообразие должно быть эвклидовым, и электростатический потенциал там должен обращаться в нуль. Следовательно, уравнения (8) и (8а) требуют, чтобы $\frac{g_{45}}{g_{44}}$ и $\frac{g_{45}}{g_{55}}$ обращались в нуль. Таким образом, пространственно неоднородный электрический потенциал, а следовательно, и электрическое поле не существуют.

Тем самым доказано, что в теории Калуцы нет центрально-симметричного решения, зависящего только от $g_{\mu\nu}$, которое можно было бы отождествить с (несингулярным) электроном.

Поступила 10 января 1922 г.

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

§ 1. Общая часть. Вывод уравнения поля

Математическое построение общей теории относительности первоначально было полностью основано на метрике, т. е. на инварианте

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu. \tag{1}$$

Величины $g_{\mu\nu}$ и их производные изображали метрическое, а также гравитационное поле. Напротив, компоненты электрического поля оставались по отношению к ним совершенно чужеродными. Желание свести гравитационное и электромагнитное поля в одно единое по своей сущности поле в последние годы владеет умами теоретиков.

Навстречу этим стремлениям идет математическое открытие, сделанное Леви-Чивитой и Вейлем: тензор кривизны Римана, имеющий фундаментальное значение для общей теории относительности, наиболее естественным путем можно получить с помощью закона «параллельного переноса» векторов («аффинная связь»):

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha\, dx_\beta. \tag{2}$$

Этот закон сводится к формуле (1), если постулировать, что длина вектора при параллельном переносе не меняется; однако этот шаг не является логически необходимым. Впервые это обстоятельство обнаружил Г. Вейль, построивший на нем обобщение римановой геометрии, которое, по его мнению, содержало теорию электромагнитного поля. Вейль придает инвариантный смысл не длине линейного элемента или вектора, а только отношению длин двух линейных элементов или векторов, исходящих из одной точки. Параллельный перенос (2) должен быть таким, чтобы это от-

---

* *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1923, 32—38.

ношение сохранялось. Основу этой теории можно назвать полуметрической. По моему убеждению, таким путем нельзя прийти к теории, имеющей физический смысл. С чисто логической точки зрения также представляется более удовлетворительным основывать теорию только на равенстве (2), даже если понадобится отказаться от инварианта (1) как базиса теории.

Это сделал Эддингтон, заметивший, что, наоборот, метрический инвариант типа (1), в физическом существовании которого можно не сомневаться, сводится к уравнению (2). Именно, из равенства (2) следует существование римановского тензора четвертого ранга:

$$R^{i}_{k,\,lm} = -\frac{\partial \Gamma^{i}_{kl}}{\partial x_m} + \Gamma^{i}_{\tau l}\Gamma^{\tau}_{km} + \frac{\partial \Gamma^{i}_{km}}{\partial x_l} - \Gamma^{i}_{\tau m}\Gamma^{\tau}_{kl},$$

а из него после свертывания по индексам i и m образуется римановский тензор второго ранга

$$R_{kl} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{kl}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{k\beta}\Gamma^{\beta}_{l\alpha} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{k\alpha}}{\partial x_l} - \Gamma^{\alpha}_{kl}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}, \tag{3}$$

фундаментальное значение которого в теории гравитации хорошо известно. Таким образом, выражение

$$R_{kl}dx_k dx_l$$

является линейным элементом, который Эддингтон считает метрическим инвариантом.

Величины R_{kl} при произвольно выбранных символах $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, удовлетворяющих только условию симметрии

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}, \tag{4}$$

не образуют симметричного тензора. Разлагая тензор (R_{kl}) на симметричный и антисимметричный тензоры, согласно равенству

$$R_{kl} = g_{kl} + \phi_{kl}, \tag{5}$$

где

$$\phi_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{k\alpha}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{l\alpha}}{\partial x_k}\right), \tag{6}$$

мы можем отождествить тензор (g_{kl}) с метрическим тензором g_{kl}, а тензор (ϕ_{kl}), удовлетворяющий соотношению

$$\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_m} + \frac{\partial \phi_{lm}}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_{mk}}{\partial x_l} = 0, \tag{7}$$

с тензором электромагнитного поля.

Сделаем одно замечание в пользу ограничивающего условия симметрии (4). Закон параллельного переноса ковариантного вектора следует из равенства (2) при естественном требовании, чтобы скалярное произведение контравариантного и ковариантного векторов не изменялось при параллельном переносе. Отсюда следует закон

$$\delta B_\mu = \Gamma^\alpha_{\mu\beta} B_\alpha dx_\beta.$$

Исходя из этого равенства, обычным способом доказывается тензорный характер величины

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} B_\alpha.$$

Тогда, учитывая тензорный характер величины $\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu}$, можно прийти к выводу о том, что выражение $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ образует тензор. Отсюда и из сказанного выше следует, что тензорным характером обладает и величина

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} B_\alpha.$$

Следовательно, условие симметрии (4) необходимо, чтобы обеспечить однозначность ковариантной производной вектора.

В теории Эддингтона в качестве неизвестных функций координат выступают 40 величин $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, аналогично тому, как в первоначальной теории относительности имеются 14 величин $g_{\mu\nu}$ и ϕ_μ. Но проблема, не решенная Эддингтоном, заключается в том, чтобы найти уравнения, необходимые для определения этих величин. Самый удобный метод для этого связан с принципом Гамильтона. Пусть $\mathfrak{H}$ — скалярная плотность, зависящая только от величин Γ и их первых производных; тогда для каждой непрерывной вариации величин $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, исчезающей на границе области интегрирования, соблюдается принцип

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\right\} = 0. \tag{8}$$

Поэтому уравнения поля, которые вследствие тензорного характера вариаций $\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ также обладают тензорным характером, гласят

$$0 = \mathfrak{H}^{\mu\nu}_\alpha = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\sigma}}\right), \tag{9}$$

где введено обозначение

$$\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\sigma}.$$

При этом предполагается, что $\mathfrak{H}$ есть некоторая (алгебраическая) функция величин $R^i_{k,lm}$. Наша главная задача заключается в выборе этой функции.

Существуют такие тензорные плотности, которые являются **рациональными** функциями второй степени по величинам $R^i_{k,lm}$; они могут быть получены с помощью тензорной плотности δ^{iklm}, компоненты которой равны 1 или —1, в зависимости от того, образуют индексы $iklm$ четную или нечетную перестановку цифр 1, 2, 3, 4. Такой тензорной плотностью является, например,

$$R^i_{k,\,lm}R^k_{i,\,\sigma\tau}\delta^{lm\sigma\tau}.$$

Однако я считаю правильным ограничиться такими тензорными плотностями, которые образуются из свернутого тензора R_{kl} или из величин S_{kl} и ϕ_{kl}, поскольку мы можем придавать физический смысл только этим величинам. Тогда мы должны допускать и иррациональные функции, к чему мы уже привыкли в общей теории относительности (например, $\sqrt{-g}$). Но в этом случае существуют еще различные возможности, из которых наиболее интересной нам представляется следующая:

$$\mathfrak{H} = 2\sqrt{-|R_{kl}|}. \tag{10}$$

Это выражение, являющееся аналогом тензорной плотности элемента объема, **образовано из величин** R_{kl} **без расщепления на симметричную и антисимметричную части.** Если эта функция Гамильтона окажется хорошей, то теория придет идеальным способом к объединению гравитации и электричества в одно понятие, причем не только оба вида поля будут определяться едиными величинами Г, но и функция Гамильтона будет единой, тогда как до сих пор она состояла из слагаемых, логически независимых одно от другого.

Ниже будет показано, что эта теория, по-видимому, хороша.

§ 2. Отношение новой теории к прежним результатам общей теории относительности

Сделаем одно замечание по поводу равенства (5). Выражение $g_{kl}dx_kdx_l$ представляет собой метрический инвариант для «космического» масштаба. Если инвариант $g_{kl}dx_kdx_l$ должен представлять квадрат длины для масштаба человеческих размеров, то следует положить

$$\lambda^2 R_{kl} = g_{kl} + \phi_{kl}, \tag{5a}$$

где λ — очень большое число. Поэтому в соответствии с формулой (3) имеем

$$\frac{1}{\lambda^2} g_{kl} = -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{kl}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\alpha}}{\partial x_l} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{l\alpha}}{\partial x_k}\right) + \Gamma^\alpha_{k\beta}\Gamma^\beta_{l\alpha} - \Gamma^\alpha_{kl}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \phi_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\alpha}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{l\alpha}}{\partial x_k}\right). \tag{12}$$

Произведем теперь варьирование, указанное в уравнении (8), считая, что $\mathfrak{H}$ является пока произвольной функцией величин g_{kl} и ϕ_{kl}. Тогда имеем

$$\delta\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{kl}} \delta g_{kl} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \varphi_{kl}} \delta\phi_{kl} = \mathfrak{s}^{kl}\delta g_{kl} + \mathfrak{f}^{kl}\delta\phi_{kl}, \tag{13}$$

причем $\mathfrak{s}^{kl}$ — симметричная, а $\mathfrak{f}^{kl}$ — антисимметричная тензорные плотности. С учетом уравнения (11) — (13) уравнение (8) принимает вид

$$0 = \int d\tau \delta\Gamma^\alpha_{kl} \left\{\mathfrak{s}^{kl}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\delta^k_\alpha \mathfrak{s}^{l\sigma}_{;\sigma} - \frac{1}{2}\delta^l_\alpha \mathfrak{s}^{k\sigma}_{;\sigma} - \frac{1}{2}\delta^k_\alpha \frac{\partial \mathfrak{f}^{l\sigma}}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2}\delta^l_\alpha \frac{\partial \mathfrak{f}^{k\sigma}}{\partial x_\sigma}\right\}. \tag{14}$$

Поскольку величины ϕ_{kl} мы рассматриваем как ковариантный тензор электромагнитного поля, величину $\mathfrak{f}^{kl}$ следует считать контравариантной тензорной плотностью электромагнитного поля, и выражение

$$\mathfrak{i}^l = \frac{\partial \mathfrak{f}^{l\sigma}}{\partial x_\sigma} \tag{15}$$

— плотностью тока. В равенстве (14) величина $\mathfrak{s}^{kl}_{;\alpha}$ означает ковариантную производную тензора $\mathfrak{s}^{kl}$, определяемую формулой

$$\mathfrak{s}^{kl}_{;\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{f}^{kl}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{s}^{\sigma l}\Gamma^k_{\sigma\alpha} + \mathfrak{s}^{k\sigma}\Gamma^l_{\sigma\alpha} - \mathfrak{s}^{kl}\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma}. \tag{16}$$

Из равенства (14) следует, что

$$0 = \mathfrak{s}^{kl}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\delta^k_\alpha \mathfrak{s}^{l\sigma}_{;\sigma} - \frac{1}{2}\delta^l_\alpha \mathfrak{s}^{k\sigma}_{;\sigma} - \frac{1}{2}\delta^k_\alpha \mathfrak{i}^l - \frac{1}{2}\delta^l_\alpha \mathfrak{i}^k. \tag{17}$$

Комбинируя это равенство с соотношением, получаемым при свертывании по индексам α и l,

$$0 = 3\mathfrak{s}^{l\sigma}_{;\sigma} + 5\mathfrak{i}^l, \tag{18}$$

находим, наконец, конечный результат варьирования

$$0 = \mathfrak{s}^{kl}_{;\alpha} + \frac{1}{3}\delta^k_\alpha \mathfrak{i}^l + \frac{1}{3}\delta^l_\alpha \mathfrak{i}^k. \tag{19}$$

Мы получили 40 уравнений, из которых можно вычислить величины Γ. Для этого введем тензоры s_{kl} или s^{kl}, соответствующие тензорной плотности $\mathfrak{s}^{kl}$, причем эти тензоры находятся в таком же отношении друг к другу, в каком в общей теории относительности стоят ковариантный и контравариантный фундаментальные тензоры ($g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$). Таким образом, должны существовать соотношения

$$\mathfrak{s}^{kl} = s^{kl}\sqrt{-|s_{ik}|}, \tag{20}$$

$$s_{\alpha i}s^{\beta i} = \delta_\alpha^\beta. \tag{21}$$

Далее положим

$$\mathfrak{i}^l = \sqrt{-|s_{ik}|}\, i^l = \sqrt{-s}\ i^l, \tag{22}$$

$$i_l = s_{l\sigma} i^\sigma. \tag{23}$$

Выполнив вычисления, известные из общей теории относительности, получим

$$\Gamma_{kl}^\alpha = \frac{1}{2}s^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial s_{k\beta}}{\partial x_l} + \frac{\partial s_{l\beta}}{\partial x_k} - \frac{\partial s_{kl}}{\partial x_\beta}\right) - \frac{1}{2}s_{kl}i^\alpha + \frac{1}{6}\delta_k^\alpha i_l + \frac{1}{6}\delta_l^\alpha i_k. \tag{24}$$

Эти значения величин Γ следует подставлять в уравнения (11) и (12). Так как функции $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{f}$ в силу уравнения (13) можно выразить через величины g и ϕ, выбирая соответствующую функцию Гамильтона, то после указанной подстановки уравнения (11) и (12) оказываются достаточными для определения неизвестных функций. Для того чтобы физически оправдать выбор функции Гамильтона в виде уравнения (10), мы рассмотрим сначала случай, когда электромагнитное поле отсутствует. Тогда, в соответствии с уравнениями (10) и (13), имеем

$$\mathfrak{s}^{kl} = g^{kl}\sqrt{-g},$$

$$\mathfrak{f}^{kl} = 0,$$

причем g^{kl}, g и g_{kl} имеют смысл, известный из общей теории относительности. Следовательно, уравнение (24) принимает тогда известный вид

$$\Gamma_{kl}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{k\beta}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{l\beta}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_\beta}\right), \tag{24a}$$

что вместе с уравнением (11) точно воспроизводит уравнение общей теории относительности для гравитационного поля в пустоте с учетом космологического члена, но в отсутствие электромагнитного поля. Это является сильным аргументом в пользу нашего выбора функции Гамильтона и вообще в пользу применимости теории.

Перейдем теперь к случаю, когда электромагнитное поле не равно нулю. Из уравнений (12) и (24) сначала находим:

$$\frac{1}{\lambda^2}\phi_{kl} = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial i_k}{\partial x_l} - \frac{\partial i_l}{\partial x_k}\right). \tag{25}$$

Отсюда становится ясно, что при нулевой плотности тока электрическое поле невозможно. Но множитель $\frac{1}{\lambda^2}$ чрезвычайно мал; это приводит к тому, что конечные значения величин ϕ_{kl} возможны только при очень малых, практически равных нулю ковариантных плотностях тока. Следовательно, плотность тока всюду, за исключением сингулярных областей, обращается в нуль. Таким образом, очень грубо выполняются уравнения

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{kl}}{\partial x_l} = 0, \ldots, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial \phi_{l\sigma}}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_{\sigma k}}{\partial x_l} = 0, \tag{27}$$

причем последнее уравнение с учетом равенства (12) является строгим. Соотношение между ϕ и $\mathfrak{f}$ при нашем выборе функции Гамильтона фиксируется тем, что величины

$$\mathfrak{r}^{kl} = \mathfrak{g}^{kl} + \mathfrak{f}^{kl}$$

равны минорам величин

$$r_{kl} = g_{kl} + \phi_{kl},$$

умноженным на квадратный корень из определителя r_{kl}, взятого со знаком минус. Обозначая эти нормированные миноры символом r^{kl}, имеем

$$\delta r = r r^{kl} \delta r_{kl}$$

и, следовательно,

$$\delta\mathfrak{H} = \delta\left(2\sqrt{-r}\right) = \frac{1}{\sqrt{-r}}\delta(-r) = \sqrt{-r}\, r^{kl}\delta r_{kl} = \sqrt{-r}\, r^{kl}\left(\delta g_{kl} + \delta\phi_{kl}\right),$$

чем и доказывается сделанное утверждение.

Приближенное вычисление величин $\mathfrak{f}^{kl}$ оказывается простым в том важном случае, когда значения r_{kl} бесконечно мало отличаются от постоянных значений компонент δ_{kl} (1 или 0). В этом случае в первом приближении (как обычно, временна́я координата выбрана мнимой) имеем

$$\mathfrak{f}^{kl} = \phi_{kl}.$$

Этот результат в связи с формулами (26) и (27) показывает, что в первом приближении (для достаточно слабых полей) выполняются уравнения Максвелла для пустого пространства.

Охватывает ли наша теория также и электрические элементарные образования, можно решить только после строгого рассмотрения случая центрально-симметричного статического поля. Во всяком случае, уравнение (25) показывает, что конечные значения для плотности тока i^l возможны только при условии, если одновременно i_l становится малой величиной порядка $1/\lambda^2$; таким образом, не исключается существование электронов без сингулярности. Примечательно, что, согласно этой теории, положительные и отрицательные электрические заряды могут отличаться не только знаком [1].

Изложенное выше исследование показывает, что общая идея Эддингтона в соединении с принципом Гамильтона приводит к теории почти полностью свободной от произвола, отражающей наши современные знания о гравитации и электричестве и объединяющей оба вида поля по-настоящему, законченным образом.

Гаруна Мару, январь 1923 г.

---

[1] Ср. замечание на стр. 144, опровергающее это утверждение.— *Прим. ред.*

ЗАМЕЧАНИЕ К МОЕЙ РАБОТЕ „К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ“ *

В дальнейшем должно быть еще раз наглядно изложено формальное содержание предыдущей работы. При этом будет использовано новое гамильтоновское представление теории, делающее особенно ясной связь с общей теорией относительности в ее современной форме.

В основу теории положена аффинная связность в пространственно-временном континууме, соответствующая формуле

$$\delta A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha}\, dx_{\beta}, \tag{1}$$

которая ограничена априори только условием симметрии

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}.$$

Отсюда следует существование тензора Римана 2-го ранга

$$r_{kl} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{kl}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{k\beta}\Gamma^{\beta}_{l\alpha} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{k\alpha}}{\partial x_{l}} - \Gamma^{\alpha}_{kl}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

а также то обстоятельство, что определитель $r = |r_{kl}|$ имеет характер квадрата скалярной плотности. Отсюда следует ковариантность основного уравнения теории

$$\delta \left\{ \int \sqrt{-r}\, d\tau \right\} = 0. \tag{3}$$

Здесь величины r_{kl} надо считать выраженными через Γ и варьирование ведется по Γ. Таким образом, получается 40 уравнений, которые могут

---

* *Bemerkung zu meiner Arbeit «Zur allgemeinen relativitätstheorie»*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1923, 76—77. (Статья 72 опубликована в Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1923, 32.— *Прим. ред.*)

быть разрешены относительно величин Г. Тогда имеем

$$\Gamma_{kl}^{\alpha}=\frac{1}{2}s^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial s_{k\beta}}{\partial x_l}+\frac{\partial s_{l\beta}}{\partial x_k}-\frac{\partial s_{kl}}{\partial x_\beta}\right)-\frac{1}{2}s_{kl}i^{\alpha}+\frac{1}{6}\delta_k^{\alpha}i_l+\frac{1}{6}\delta_l^{\alpha}i_k. \tag{4}$$

При этом величины s и i связаны с величинами r следующим образом: r^{kl} является нормированными минорами r_{kl}, а $\mathfrak{r}^{kl}$ представляет собой соответствующую тензорную плотность

$$\mathfrak{r}^{kl}=r^{kl}\sqrt{-r}. \tag{5}$$

Величина $\mathfrak{r}^{kl}$ разлагается на симметричную и антисимметричную части в соответствии с формулой

$$\mathfrak{r}^{kl}=\mathfrak{s}^{kl}+\mathfrak{f}^{kl}. \tag{6}$$

Величины s связаны с величинами $\mathfrak{s}$ соотношениями:

$$s_{\alpha\lambda}s^{\beta\lambda}=\delta_{\alpha}^{\beta}, \tag{7}$$

$$s=|s_{kl}|, \tag{8}$$

$$\mathfrak{s}^{kl}=s^{kl}\sqrt{-s}, \tag{9}$$

а величины i — с величинами $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{f}$ соотношениями:

$$\mathfrak{i}^{k}=\frac{\partial\mathfrak{f}^{k\alpha}}{\partial x_\alpha}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{i}^{k}=i^{k}\sqrt{-s}, \tag{11}$$

$$i_k=s_{k\alpha}i^{\alpha}. \tag{12}$$

Подставляя выражение (4) для Г в формулу (2), получаем уравнения поля:

$$r_{kl}=R_{kl}+\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial i_k}{\partial x_l}-\frac{\partial i_l}{\partial x_k}\right)+i_k i_l\right], \tag{13}$$

которые после разложения на симметричные и антисимметричные части дают уравнения гравитационного и электромагнитного полей. Здесь R_{kl} представляет собой римановский тензор кривизны, образованный из s_{kl} как метрического фундаментального тензора.

Уравнения (13) могут быть записаны в форме принципа Гамильтона

$$\delta\left\{\int\left[-2\sqrt{-r}+\mathfrak{R}-\frac{1}{6}\mathfrak{s}^{\alpha\beta}i_\alpha i_\beta\right]d\tau\right\}=0, \tag{14}$$

где $\mathfrak{R}$ — скалярная плотность римановской кривизны, относящейся к фундаментальному тензору s_{ik}. Вариация должна браться по $\mathfrak{g}^{kl}$ и $\mathfrak{f}^{kl}$. Из уравнения (14) видно, что — в противоположность точке зрения, высказанной в первой работе,— каждому решению соответствует второе решение, отличающееся от первого только знаком компонент электромагнитного поля. Действительно, $\mathfrak{r}$ и соответственно $|\mathfrak{r}^{k\lambda}|$ является четной функцией антисимметричной части $\mathfrak{f}^{kl}$ величины $\mathfrak{r}^{kl}$, а третий член в уравнении (14) квадратично зависит от плотности тока. Теория не может поэтому учесть различие в массах положительных и отрицательных электронов.

Чтобы сделать более ясным построение теории, мы исключили из предлагаемой статьи все доказательства и вычисления.

Поступила 15 мая 1923 г.

В статьях 72 и 73 (а также 74 и 79) дано изложение первого варианта единой теории поля. Эйнштейн в течение всей своей жизни разрабатывал разные варианты. Новый этап развития идей единой теории относится к 1928 г. (см. работу 87). Интересное обсуждение первого варианта теории имеется в статье Эддингтона, написанной для русского издания его книги (А. Эддингтон. Теория относительности, 1934, 448). Интересно замечание в конце статьи 73 о зарядовой симметрии теории (в современной терминологии); это замечание получило развитие в работе 78.

К АФФИННОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ*

Размышления последнего времени привели меня к некоторому усовершенствованию теории гравитации и электричества, изложенной в двух предыдущих сообщениях[1]. Изложим вкратце теорию в ее новой форме.

Аффинная связность задается при помощи 40 функций $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$. Римановский тензор кривизны 2-го ранга $R_{\mu\nu}$ расщепляется на симметричную часть $\gamma_{\mu\nu}$ и антисимметричную часть $\varphi_{\mu\nu}$ так, что

$$\gamma_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right). \tag{2}$$

Функция Гамильтона $\mathfrak{H}$ (скалярная плотность) будет пока неизвестной функцией величин[2] $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$. Интеграл Гамильтона должен варьироваться по $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} (= \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu})$.

Сначала получаем

$$\int (\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu} + \mathfrak{f}^{\mu\nu}\delta\varphi_{\mu\nu})\, d\tau = 0, \tag{3}$$

где для краткости мы положили

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} &= \mathfrak{g}^{\mu\nu}, \\ \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \varphi_{\mu\nu}} &= \mathfrak{f}^{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

---

* *Zur affinen Feldtheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1923, 137—140.

[1] Статьи 72 и 73.—*Прим. ред.*

[2] Предположение, что $\mathfrak{H}$ зависит лишь от $\gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$ здесь будет отброшено. Отметим, что Дрост [из Лейдена] высказывал два года назад сходные соображения, но не опубликовал их.

Под величинами $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ будем понимать тензорные плотности метрического и электрического полей. Если в уравнение (3) подставить выражения (1) и (2) для $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, то после варьирования можно получить уравнение

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\mu\sigma}_{;\sigma}\delta^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\nu\sigma}_{;\sigma}\delta^{\mu}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{i}^{\mu}\delta^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{i}^{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} = 0, \qquad (4)$$

где $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{;\alpha}$ — ковариантная производная тензорной плотности $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, задаваемая соотношением

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{;\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \mathfrak{g}^{\sigma\nu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}, \qquad (5)$$

а $\mathfrak{i}^{\mu}$ — плотность потока указанной тензорной плотности

$$\mathfrak{i}^{\mu} = \frac{\partial \mathfrak{f}^{\mu\sigma}}{\partial x_{\sigma}}. \qquad (6)$$

Введем метрический тензор $g_{\mu\nu}$ (соответственно $g^{\mu\nu}$), связанный с симметричной тензорной плотностью $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ соотношением

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\sqrt{-g} \qquad (g = |g_{\sigma\tau}|), \\ g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} &= \delta^{\nu}_{\mu}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Этот тензор будет употребляться, как и в римановой геометрии, для перехода от ковариантных тензорных величин к контравариантным и наоборот. В этом смысле плотности тока $\mathfrak{i}^{\mu}$ принадлежит контравариантный вектор i^{μ} и ковариантный вектор i_{μ}, плотности поля $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ — контравариантный тензор поля $f^{\mu\nu}$ и ковариантный тензор $f_{\mu\nu}$.

Посредством этих операций удается обычным путем разрешить уравнения (4) относительно $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$; при этом получается

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}i^{\alpha} + \frac{1}{6}\delta^{\alpha}_{\mu}i_{\nu} + \frac{1}{6}\delta^{\alpha}_{\nu}i_{\mu}. \qquad (8)$$

Заметим далее, что, согласно уравнению (3а), $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ являются такими функциями $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, что выражение

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}d\gamma_{\mu\nu} + \mathfrak{f}^{\mu\nu}d\varphi_{\mu\nu}$$

представляет собой полный дифференциал. Отсюда следует, что выражение

$$\gamma_{\mu\nu}\,d\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}\,d\mathfrak{f}^{\mu\nu}$$

также должно быть полным дифференциалом некоторой величины $\mathfrak{H}^*$

(скалярной плотности), которую мы хотим представить как функцию $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$. Таким образом, нужно положить

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}, \\ \varphi_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{f}^{\mu\nu}}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

причем последние уравнения могут полностью заменить уравнения (3а). Нам остается только выбрать зависимость скалярной плотности $\mathfrak{H}^*$ от $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$. В самом общем виде эта зависимость имеет вид

$$\mathfrak{H}^* = \sqrt{-g}\,\Phi(J_1, J_2), \tag{10}$$

где Φ — произвольная функция обоих известных инвариантов электромагнитного поля. Наиболее естественной, на современном уровне наших знаний, будет зависимость

$$\mathfrak{H}^* = 2\alpha\sqrt{-g} - \frac{\beta}{2} f_{\mu\nu}\mathfrak{f}^{\mu\nu}. \tag{10a}$$

Если заменить левые части уравнений (1) и (2) с помощью уравнений (9) и (10а), а правые части выразить через полевые величины с помощью уравнений (8), то получим уравнения

$$R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} = -\left[\beta\left(-f_{\mu\sigma}f^{\sigma}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu}f_{\sigma\tau}f^{\sigma\tau}\right) + \frac{1}{6} i_\mu i_\nu\right], \tag{11}$$

$$-\beta f_{\mu\nu} = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial i_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial i_\nu}{\partial x_\mu}\right). \tag{12}$$

Уравнения (6), (11) и (12) являются уравнениями поля развиваемой здесь теории.

До сих пор не были выбраны определенные единицы для напряженностей метрического и электромагнитного полей. При переходе к системе единиц CGS уравнения поля принимают вид

$$R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} = -\varkappa\left[\left(-f_{\mu\sigma}f^{\sigma}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu}f_{\sigma\tau}f^{\sigma\tau}\right) + \frac{1}{\beta} i_\mu i_\nu\right], \tag{11a}$$

$$-f_{\mu\nu} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial i_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial i_\nu}{\partial x_\mu}\right), \tag{12a}$$

где α и β—некоторые новые постоянные, а $\varkappa$ — гравитационная постоянная. Эти уравнения поля могут быть приведены к форме, требуемой принципом Гамильтона, в которой варьирование происходит по метрическому тензору и напряженности электромагнитного поля. В этом случае функция Гамильтона $\bar{\mathfrak{H}}$ задается выражением:

$$\bar{\mathfrak{H}} = \sqrt{-g}\left[R - 2\alpha + \varkappa\left(\frac{1}{2} f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau} - \frac{1}{\beta} i_\sigma i^\sigma\right)\right]. \tag{13}$$

Здесь R — скаляр тензора кривизны Римана, образованный из $g_{\mu\nu}$. Для доказательства удобнее всего выразить $\bar{\mathfrak{H}}$ через тензорные плотности $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и принадлежащие им нормированные миноры и варьировать по $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$.

Для физической интерпретации уравнений поля (11а) и (12а) наиболее удобно, конечно, ввести электромагнитный потенциал

$$-f_\mu = \frac{1}{\beta} i_\mu, \tag{14}$$

который, согласно уравнению (12а), связан с плотностью тока соотношением

$$\mathfrak{i}^\mu = -\beta \mathfrak{g}^{\mu\sigma} f_\sigma. \tag{15}$$

Теперь уравнение (11а) принимает вид

$$R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} = -\varkappa\left[\left(-f_{\mu\sigma} f^\sigma_\nu + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau}\right) + \beta f_\mu f_\nu\right]. \tag{16}$$

Прежнюю теорию гравитации и электромагнитного поля при отсутствии электрических зарядов получают, полагая множитель β равным нулю. Во всяком случае, для того, чтобы не впасть в противоречие с опытом, множитель β нужно считать очень малым, так как в противном случае, согласно уравнению (15), существование электромагнитного поля в отсутствие электрических зарядов станет невозможным. В этом случае при конечных напряженностях электромагнитного и метрического полей величина i^μ должна быть все время исчезающе малой. Уравнения (15) и (16), вплоть до знака перед β, приводят к тем же результатам, что и уравнения поля, выведенные Вейлем на основе его теории из некоторого специального принципа действия. Эти уравнения не приводят к электрону как свободному от сингулярностей решению.

Поступила 28 июня 1923 г.

ТЕОРИЯ АФФИННОГО ПОЛЯ*

Теория, связывающая гравитационное и электромагнитное поля и изложенная ниже, основана на выдвинутой в последние годы идее Эддингтона о том, что «физика поля» математически должна строиться на теории аффинной связи. Сначала мы кратко рассмотрим развитие идей, связанных с именами Леви-Чивиты, Вейля и Эддингтона.

Общая теория относительности формально строится на основе геометрии Римана, все понятия которой выводятся из интервала между двумя бесконечно близкими точками, определяемого формулой[1]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu. \tag{1}$$

Величины $g_{\mu\nu}$ определяют как свойства масштабов и часов по отношению к системе координат, так и гравитационное поле. Следовательно, мы можем утверждать, что общая теория относительности объясняет гравитационное поле. В то же время идейные основы теории не имеют отношения к электромагнитному полю.

Эти обстоятельства заставляют поставить следующий вопрос: нельзя ли обобщить математические основы теории таким образом, чтобы из них можно было бы вывести свойства не только гравитационного поля, но и электромагнитного?

Возможность обобщения математических основ теории появилась после того как Леви-Чивита указал один из элементов геометрии Римана, который можно сделать независимым от этой геометрии, а именно «аффинную связь». Согласно геометрии Римана, каждая бесконечно малая часть многообразия приближенно может быть заменена эвклидовым многообразием. Следовательно, для этой элементарной области существует

---

* *The theory of the affine field.* Nature, 1923, **112**, 448—449.

[1] Как обычно, знак суммы опускается.

понятие параллелизма. Если мы подвергнем контравариантный вектор A^σ в точке x_ν параллельному переносу в бесконечно близкую точку $x_\nu + \delta x_\nu$, то результирующий вектор $A^\sigma + \delta A^\sigma$ определится с помощью формулы

$$\delta A^\sigma = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu} A^\mu \delta x_\nu. \tag{2}$$

Величины Γ (символы Кристоффеля 2-го рода), симметричные по нижним индексам, в соответствии с геометрией Римана выражаются через величины $g_{\mu\nu}$ и их первые производные. Мы получаем эти выражения, формулируя требование, чтобы длина контравариантного вектора, образованного в соответствии с формулой (1), в результате параллельного переноса не изменялась.

Леви-Чивита показал, что римановский тензор кривизны, имеющий фундаментальное значение для теории гравитационного поля, можно получить из геометрических соображений, основанных только на законе аффинной связи, выражаемом формулой (2). При этом конкретный вид выражения величин $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ через $g_{\mu\nu}$ является несущественным. С аналогичным положением мы встречаемся в случае дифференциальных операций абсолютного дифференциального исчисления.

Эти результаты естественно ведут к обобщению геометрии Римана. Вместо того чтобы начинать с метрического соотношения (1) и получать из него коэффициенты Γ в аффинном соотношении (2), мы будем исходить из общего аффинного соотношения типа (2), не постулируя формулы (1). Тогда нахождение математических законов, соответствующих законам природы, сведется к решению вопроса, какими будут формально наиболее естественные условия, которым можно подчинить аффинное соотношение.

Первый шаг в этом направлении был сделан Г. Вейлем. Его теория использует то, что с физической точки зрения лучи света являются более простыми объектами, чем масштабы и часы, и что законом распространения света определяются только отношения величин $g_{\mu\nu}$. В соответствии с этим он придает объективный смысл не величине ds в соотношении (1), т. е. не длине вектора, а только отношению длин двух векторов (а значит, и углам). Разрешаются только такие аффинные соотношения, которые при параллельном переносе оставляют неизменными углы между всеми векторами. Таким способом была получена теория, в которой наряду с определенными (с точностью до множителя) величинами $g_{\mu\nu}$ появились еще четыре величины φ_μ, отождествленные Вейлем с электромагнитными потенциалами.

Эддингтон подошел к проблеме с более радикальных позиций. Исходя из аффинного соотношения типа (2), он старался конкретизировать его, не вводя в основы теории никаких следствий из соотношения (1), т. е. не вводя метрики. Метрика должна сама появляться из теории. Тензор

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} \tag{3}$$

симметричен лишь в частном случае геометрии Римана. В общем случае тензор $R_{\mu\nu}$ расщепляется на симметричную и антисимметричную части:

$$R_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Теперь появилась возможность отождествить тензор $\gamma_{\mu\nu}$ с симметричным тензором метрического или гравитационного поля, а тензор $\varphi_{\mu\nu}$ — с антисимметричным тензором электромагнитного поля. Это и было сделано Эддингтоном. Но его теория оставалась несовершенной, так как для определения 40 неизвестных функций $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ сначала не существовало простого и естественного пути. Следующее краткое рассуждение показывает, каким образом я попытался восполнить этот пробел [2].

Если мы обозначим через $\mathfrak{H}$ скалярную плотность, зависящую только от функций $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, то принцип Гамильтона

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\right\} = 0 \tag{5}$$

даст нам 40 дифференциальных уравнений для функций Γ при условии, что при варьировании функции Γ считаются независимыми друг от друга. Далее мы предположим, что функция $\mathfrak{H}$ зависит только от величин $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, и соответственно запишем

$$\delta\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu} + \mathfrak{f}^{\mu\nu}\delta\varphi_{\mu\nu}, \tag{6}$$

где введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} &= \mathfrak{g}^{\mu\nu}, \\ \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\varphi_{\mu\nu}} &= \mathfrak{f}^{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь следует заметить, что в развиваемой теории малыми готическими буквами обозначаются соответственно контравариантная тензорная плотность ($\mathfrak{g}^{\mu\nu}$) метрического тензора и контравариантная тензорная плотность ($\mathfrak{f}^{\mu\nu}$) электромагнитного поля. Таким образом, задается переход от тензорных плотностей (обозначаемых готическими буквами) к контравариантным и ковариантным тензорам (обозначаемым латинскими

[2] Дрост (Лейден) пришел к такой же идее независимо от автора этой статьи.

буквами) и вводится метрика, основанная исключительно на аффинной связи.

Выполняя варьирование, после некоторых выкладок получаем

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} i^\alpha + \frac{1}{6} \delta^\alpha_\mu i_\nu + \frac{1}{6} \delta^\alpha_\nu i_\mu, \tag{8}$$

где

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mathfrak{i}^\mu. \tag{9}$$

Соотношение (8) показывает, что наше обобщение теории, кажущееся на первый взгляд весьма широким, приводит к структуре аффинной связи, отклоняющейся от структуры геометрии Римана не больше, чем этого требует действительная структура физического поля.

Уравнения поля получим теперь следующим способом. Из формул (3) — (4) сначала находим соотношения

$$\gamma_{\mu\nu} = - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} \right) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}, \tag{10}$$

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} \right). \tag{11}$$

В этих соотношениях величины $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ в правых частях следует выразить через величины $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ с помощью равенства (8). Кроме того, если функция $\mathfrak{H}$ известна, то с помощью равенства (7) величины $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, т. е. левые части соотношений (10) и (11), также можно выразить через величины $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$. Это последнее вычисление можно упростить с помощью следующего приема. Соотношение (6) эквивалентно утверждению, что

$$\delta\mathfrak{H}^* = \gamma_{\mu\nu}\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}\delta\mathfrak{f}^{\mu\nu}. \tag{6a}$$

Следовательно, $\delta\mathfrak{H}^*$ является полным дифференциалом, так что если $\mathfrak{H}^*$ — неизвестная функция величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$, то выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}, \\ \varphi_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{f}^{\mu\nu}}. \end{aligned} \tag{7a}$$

Теперь нам остается лишь определить функцию $\mathfrak{H}^*$. В простейшем случае, очевидно:

$$\mathfrak{H}^* = -\frac{\beta}{2} f_{\mu\nu}\mathfrak{f}^{\mu\nu}. \tag{12}$$

В этой связи интересно отметить, что эта функция не состоит из нескольких, логически независимых одно от другого, слагаемых, как это было в теориях, предлагавшихся до сих пор.

Таким образом, мы приходим к уравнениям поля

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left[\left(\frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau} - f_{\mu\sigma} f^{\sigma}_{\nu}\right) + \gamma f_{\mu} f_{\nu}\right], \tag{13}$$

где $R_{\mu\nu}$ — тензор кривизны Римана, $\varkappa$ и γ — постоянные, f_{μ} — электромагнитный потенциал, связанный с напряженностью поля соотношением

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_{\mu}}, \tag{14}$$

а с плотностью электрического тока — соотношением

$$i^{\mu} = -\gamma g^{\mu\sigma} f_{\sigma}. \tag{15}$$

Чтобы эти уравнения могли находиться в согласии с опытом, постоянная γ должна быть практически бесконечно малой, так как в противном случае поля не могли бы существовать без заметных плотностей тока.

Из теории естественным путем следуют как известные законы гравитационного и электромагнитного полей, так и связь этих двух видов поля; однако она ничего не говорит о структуре электронов.

76

ОБ ЭФИРЕ*

Когда здесь говорится об эфире, то имеется в виду, конечно, не телесный эфир механической волновой теории, который подчиняется законам механики Ньютона и отдельным точкам которого приписывается скорость. Это теоретическое представление с созданием специальной теории относительности, по-моему, окончательно сошло со сцены. Напротив, речь идет о тех мыслимых физически реальными вещах, которые наряду с весомой материей, состоящей из электрических элементарных частиц, играют роль в структуре причинных связей физики. Следовательно, вместо слова «эфир» можно с таким же успехом говорить «физические свойства пространства». При этом, разумеется, можно было бы высказать мнение, что под это понятие подпадают все объекты физики, так как согласно последовательной теории поля весомую материю или составляющие ее элементарные частицы также следовало бы рассматривать как особого рода «поля», или особые «состояния пространства». Однако приходится признать, что при современном состоянии физики такая идея является преждевременной, так как до сих пор все направленные к этой цели усилия физиков-теоретиков терпели провал. Таким образом, теперь мы фактически вынуждены различать «материю» и «поля», хотя и можем надеяться на то, что грядущие поколения преодолеют это дуалистическое представление и заменят его единым понятием, как это тщетно пыталась сделать теория поля наших дней.

Обычно думают, что физика Ньютона не знала эфира и что только волновая теория света ввела вездесущую среду, обусловливающую физические явления. Однако это не так. В указанном выше смысле механика Ньютона имела свой «эфир», который назывался, разумеется, «абсолютным пространством». Чтобы ясно осознать это и вместе с тем уточнить понятие эфира, мы должны начать несколько издалека.

---

* *Über den Äther*. Schweiz. naturforsch. Gesellschaft, Verhandlungen, **105**, 1924, 85—93.

Рассмотрим сначала отрасль физики, обходящуюся без эфира, а именно, геометрию Эвклида, понимая ее как учение о возможных способах приводить в соприкосновение друг с другом практически твердые тела. (Здесь мы отвлекаемся от световых лучей, которые также участвовали в возникновении понятий и законов геометрии.) Законы расположения твердых тел при исключении относительных движений, влияний температуры и деформаций в том виде, в каком они идеализируются в геометрии Эвклида, исходят из понятия твердых тел; эвклидова геометрия не знает никаких воздействий среды, существующих независимо от тел и оказывающих влияние на тела и законы их расположения. Это же относится к неэвклидовым геометриям постоянной кривизны, если их понимать как (возможные) естественные законы расположения тел. Иное дело, если бы пришлось предполагать существование геометрии с переменной кривизной; это означало бы, что возможные расположения практически твердых тел в разных случаях были бы разными, обусловленными влияниями среды. В смысле нашего изложения можно было бы сказать, что такая теория пользуется гипотезой эфира. Ее эфир был бы чем-то физически реальным, как и материя. Если бы законы расположения не подвергались влиянию таких физических факторов, как количество и состояние движения тел в данной области и т. д., и оставались незыблемыми, то этот эфир можно было бы назвать «абсолютным» (т. е. независимым от влияния каких-либо других предметов).

В той же степени, в какой эфир не требовался в эвклидовой геометрии (физически интерпретированной), он не нужен и в кинематике классической механики; ее теоремы имеют ясный физический смысл, если только предположить, что не существует влияния движения на масштабы и часы, принимаемого специальной теорией относительности.

Иначе — в динамике Галилея и Ньютона. Закон движения, «масса $\times$ $\times$ ускорение $=$ сила», содержит не только высказывание о материальной системе, даже в тех случаях, когда, как в фундаментальном астрономическом законе Ньютона, сила выражается через расстояния, т. е. через величины, реальное определение которых можно основывать на измерениях с твердыми измерительными телами. Ибо реальное определение ускорения не может быть основано исключительно на наблюдениях над твердыми телами и часами. Оно не может быть сведено к измеряемым расстояниям между точками, составляющими механическую систему. Для его определения требуется еще система координат, или тело отсчета, с подходящим состоянием движения. Если выбрать другое состояние движения системы координат, то уравнения Ньютона перестанут выполняться по отношению к ней. В эти уравнения как будто входит неявно среда, в которой движутся тела, как реальный фактор в законе движения наряду с реальными телами и их расстояниями, определяемыми измерительными телами. В динамике Ньютона «пространство» обладает физической реальностью — в противоположность геометрии и кинематике. Мы будем называть эту физическую реальность, входящую в закон движения Ньютона наряду с наблюдаемыми весомыми телами, «эфиром механики». Появление центробежных сил при вращении тела, материальные точки которого не изменяют взаимных расстояний, показывает, что этот эфир следует понимать не только как некое воображаемое представление теории Ньютона, но что ему соответствует в природе нечто реальное.

Мы видим, что для Ньютона «пространство» было чем-то физически реальным. Это ясно понимал Мах, который первым после Ньютона подверг глубокому анализу основания механики. Он пытался избежать гипотезы об «эфире механики», сводя инерцию к непосредственному взаимодействию рассматриваемой массы со всеми остальными массами Вселенной. Хотя эта идея логически и возможна, но в наши дни она как теория взаимодействия уже не может рассматриваться всерьез. Механический эфир, названный Ньютоном «абсолютным пространством», должен оставаться для нас физически реальным. Но выражение «эфир», конечно, не следует, подобно физикам XIX в., понимать как что-то аналогичное весомой материи.

Называя пространство физики «абсолютным», Ньютон думал и о другом свойстве того, что мы назвали «эфиром». Каждый физический предмет оказывает влияние на другие и, наоборот, в общем случае подвергается сам влиянию остальных предметов. Однако последним свойством эфир механики Ньютона не обладает. В самом деле, согласно классической механике, на инерциальные свойства эфира не влияет ничто — ни конфигурация материи, ни что-либо иное; в этом отношении эти свойства можно называть «абсолютными».

То обстоятельство, что предпочтение, отдаваемое инерциальным системам по сравнению с неинерциальными, должно объясняться реальной причиной, физики поняли только в последние годы. Исторически гипотеза эфира в ее современном виде выросла путем усовершенствования механической гипотезы оптического эфира. После долгих бесплодных усилий физики пришли к убеждению, что свет не следует понимать как движение инертной, упругой среды и что электромагнитные поля теории Максвелла вообще нельзя объяснить механически. Так под давлением этих неудач электромагнитные поля постепенно стали рассматриваться как последние, несводимые к чему-либо физические реальности, как не нуждающиеся в дальнейшем объяснении состояния эфира. Единственное, что сначала еще оставалось от механической теории, это было определенное состояние движения; оно воплощало в себе в известном смысле «абсолютный покой». Если в механике Ньютона были равноправными по крайней мере все инерциальные системы, то в теории Максвелла — Лоренца состояние движения выделенной системы координат представлялось вполне определенным (покой относительно эфира). Молчаливо предполагалось, что эта выделенная система является в то же время инерциальной, что относительно эфира принцип инерции соблюдается.

Фундаментальные понятия физиков стали изменяться под влиянием теории Максвелла — Лоренца еще и в другом отношении. После того как на электромагнитные поля стали смотреть как на фундаментальные, ни к чему уже несводимые сущности, они, казалось, были призваны лишить весомые инертные массы их основной роли и в механике. Из уравнений Максвелла следует вывод, что движущийся электрический заряд окружается магнитным полем, энергия которого зависит от скорости в первом приближении квадратично. Как тут было не предположить, что вся кинетическая энергия является электромагнитной! Возникла надежда свести механику к электродинамике, после того как прежде не удалось свести электромагнитные явления к механическим. Эта надежда росла по мере того как увеличивалась вероятность, что вся весомая материя построена из электрических элементарных частиц. Между тем никак не удавалось справиться с двумя трудностями. Во-первых, уравнения Максвелла никак не объясняли, каким образом электрический заряд электрической элементарной частицы может существовать в равновесии, несмотря на силы электростатического отталкивания. Во-вторых, электромагнитная теория не давала сколько-нибудь удовлетворительного и естественного объяснения гравитации. И все же успехи электромагнитной теории были такими значительными, что на нее стали смотреть, как на вполне гарантированное достояние физики, даже как на наиболее обоснованное достижение последней.

Наконец, теория Максвелла — Лоренца повлияла на наше отношение к вопросам теоретического фундамента тем, что она привела к созданию специальной теории относительности. Выяснилось, что уравнения электродинамики в действительности не выделяют никакое определенное состояние движения и что согласно этим уравнениям, так же как в классической механике, существует бесконечное множество равномерно движущихся относительно друг друга равноправных систем координат, если только применять соответствующие формулы преобразования для пространственных координат и времени. Хорошо известно, что это открытие привело к глубокому изменению кинематики и динамики. Эфиру электродинамики уже нельзя было приписывать определенное состояние движения. Теперь он — как и эфир классической механики — приводил не к выделению определенного состояния движения, но только к привилегированности определенного состояния ускорения. Вследствие того, что говорить в абсолютном смысле об одновременных состояниях в разных местах эфира оказалось уже невозможным, эфир стал в известной степени четырехмерным, ибо никакого объективного упорядочения его состояний по одному только времени не существовало. В специальной теории относительности эфир также был абсолютным, так как его влияние на инерцию и распространение света считалось независимым от всех физических воздействий. В то время как в классической физике геометрия тел предполагалась независимой от состояния движения, в специальной теории относительности законы эвклидовой геометрии для расположения взаимно покоящихся тел выполняются только тогда, когда эти тела покоятся относительно инерциальной системы [1]; это легко заключить из так называемого сокращения Лоренца. Таким образом, геометрия тел, как и динамика, становится обусловленной эфиром.

Общая теория относительности устраняет еще один недостаток классической динамики: в последней инерция и тяжесть выглядят как совершенно различные, независимые одно от другого явления, хотя они обусловлены одной материальной постоянной — массой. Теория относительности преодолевает этот недостаток, устанавливая для динамического поведения электрически нейтральной материальной точки закон геодезической линии, в котором воздействия инерции и тяготения оказываются уже неотделимыми. При этом она придает эфиру переменную от точки к точке метрику и определяющие динамическое поведение материальных точек свойства, которые в свою очередь определяются физическими факторами, а именно распределением масс или энергии. Таким образом, эфир общей теории относительности отличается от эфира классической механики или специальной теории относительности тем, что он не является «абсолютным», но определяется в смысле своих переменных в пространстве свойств распределением весомого вещества. Это определение является полным в том случае, если мир будет пространственно конечным и замкнутым. То, что в общей теории относительности не существует привилегированных, однозначно связанных с метрикой пространственно-временны́х координат, более характерно для математической формы этой теории, чем для ее физического содержания.

Однако и с помощью формального аппарата общей теории относительности не удалось свести всю инерцию масс к электромагнитным полям и вообще к полям. На мой взгляд, и здесь мы еще не вышли за рамки внешнего включения электромагнитных сил в схему общей теории относительности. Метрический тензор, определяющий явления тяготения и инерции, с одной стороны, и тензор электромагнитного поля, с другой, как и прежде предстают в качестве существенно различных выражений состояния эфира, логическую независимость которых следовало бы, ве-

[1] Например, для тел, которые хотя и покоятся относительно друг друга, но все вместе вращаются относительно инерциальной системы, эвклидова геометрия (согласно специальной теории относительности) несправедлива.

роятно, отнести скорее на счет несовершенства нашего теоретического построения, чем на счет сложной структуры действительности.

Правда, Вейль и Эддингтон, обобщив геометрию Римана, нашли математическую систему, в которой оба вида поля рассматриваются с единой точки зрения. Однако простейшие полевые законы, даваемые этой теорией, по-моему, не ведут к прогрессу физических знаний. Вообще кажется, что мы теперь находимся намного дальше от познания элементарных законов электродинамики, чем это представлялось в начале этого столетия. Для обоснования этого мнения я укажу здесь кратко на *проблему магнитного поля Земли и Солнца*, а также на *проблему световых квантов*; эти проблемы в известной мере касаются макроструктуры и микроструктуры электромагнитного поля.

Земля и Солнце обладают магнитными полями, ориентации и полярности которых приближенно определяются направлением вращения этих небесных тел. Согласно теории Максвелла, эти поля могли бы возникнуть благодаря электрическим токам, текущим вокруг осей вращения небесных тел противоположно вращению. Солнечные пятна, которые с хорошим приближением можно считать вихрями, также обладают аналогичными очень сильными полями. Однако едва ли можно думать, что во всех этих случаях действительно существуют электрические токи проводимости или конвекционные токи достаточной силы. Скорее похоже на то, как будто магнитные поля возникают при вращательном движении нейтральных масс. Подобное порождение полей не могут предсказать ни теория Максвелла в ее первоначальном виде, ни теория Максвелла, обобщенная в смысле общей теории относительности. Здесь природа указывает нам, по-видимому, фундаментальную, пока еще не объясненную теорией закономерность [2].

Если здесь речь идет только об одном случае, не объясненном теорией поля в ее нынешнем виде, то факты и идеи, относящиеся к *квантовой тео-*

---

[2] В соответствии с электродинамической аналогией напрашивается соотношение вида $d\mathfrak{h} = -C\,dm\,\frac{[\mathfrak{v}\mathfrak{r}]}{r^3}$, причем dm означает массу, движущуюся со скоростью $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{r}$ или $r = |\mathfrak{r}|$ — расстояние начала координат от этой точки. (Формула во всяком случае может рассматриваться, хотя бы для вращательных движений, в качестве первого приближения.) Связь между полями Солнца и Земли получается отсюда правильной по порядку величины. Постоянная C имеет размерность (Гравитационная постоянная)$^{1/2}$/(Скорость света). Отсюда можно предположительно определить порядок величины постоянной C. Подставляя это численное значение в написанную выше формулу, мы получаем — в применении к вращающейся Земле — правильный порядок величины для магнитного поля Земли. Эта связь заслуживает рассмотрения, хотя и может основываться на случайности. (Ее, по-видимому, нет для других планет и звезд. — *Прим. ред.*)

рии, угрожают вообще взорвать здание теории поля. В самом деле, все множатся доказательства в пользу того, что световые кванты следует рассматривать как физическую реальность, что электромагнитное поле нельзя считать последней реальностью, к которой можно свести другие физические объекты. После того как теория формулы Планка уже показала, что перенос энергии и импульса излучением происходит так, как если бы последнее состояло из атомов, движущихся со скоростью света c, с энергией $h\nu$ и импульсом $h\nu/c$, Комптон экспериментами по рассеянию рентгеновых лучей веществом доказал, что существуют акты рассеяния, при которых световые кванты сталкиваются с электронами, передавая им часть своей энергии, причем энергия и направление световых квантов изменяются. Фактом является по крайней мере то, что рентгеновы лучи при рассеянии испытывают такое (предсказанное Дебаем и Комптоном) изменение частоты, какое требуется гипотезой квантов.

Далее, недавно появилась работа индийца Бозе о выводе формулы Планка, имеющая для наших теоретических представлений особое значение по следующей причине: до сих пор при всех полных выводах формулы Планка так или иначе использовалась гипотеза о волновой структуре излучения. Так, например, в известном выводе Эренфеста — Дебая множитель $\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$ в этой формуле получался путем подсчета числа собственных колебаний полости в интервале частот $d\nu$. Бозе заменяет этот основанный на представлениях теории колебаний подсчет газокинетическим, относя его к одному находящемуся в полости световому кванту, представляемому в виде некоторой молекулы. Тогда возникает вопрос, нельзя ли явления дифракции и интерференции включить в квантовую теорию таким образом, чтобы полевые понятия теории выражали лишь взаимодействие между квантами, причем полю уже не приписывалась бы самостоятельная физическая реальность.

Наши сомнения относительно реальности волнового поля усиливаются еще и тем обстоятельством, что согласно теории Бора частота испускаемого излучения не определяется электрическими массами, совершающими периодические движения с *той же* частотой.

Но даже если эта возможность созреет в подлинную теорию, мы не можем в теоретической физике обойтись без эфира, т. е. континуума, наделенного физическими свойствами, ибо общая теория относительности, основных идей которой физики, вероятно, будут придерживаться всегда, исключает непосредственное дальнодействие; каждая же теория близкодействия предполагает наличие непрерывных полей, а следовательно, существование «эфира».

ТЕОРИЯ ЭДДИНГТОНА И ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА*

А. Эддингтон и Р. Курант предложили мне снабдить немецкий перевод этой книги небольшим приложением относительно применения принципа Гамильтона в теории Эддингтона. Я охотно откликнулся на это предложение, хотя мало что могу добавить в защиту того, что здесь написано, так как дело идет о естественном рассмотрении в рамках теории Вейля — Эддингтона.

Будем исходить из основной идеи Эддингтона: все величины и соотношения между ними сводятся к закону аффинной связности, т. е. к определенным формулой (92.1)[1] величинам $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$. В § 92 уже было показано, что имеется некоторый инвариантный интеграл, подынтегральное выражение которого является тензорной плотностью $\mathfrak{H}$, зависящей только от $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ и частных производных первого порядка от этих величин. Напрашивается мысль попытаться вывести уравнения поля из вариационного принципа, варьируя некоторый интеграл подобного рода по $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ как независимым переменным. Проводя эту идею, можно попутно сформулировать связь между $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ и записанным через $g_{\mu\nu}$ метрическим полем в несколько ином виде, чем это сделал Эддингтон.

Пусть $\mathfrak{H}$ — тензорная плотность, зависящая лишь от величин $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ и их первых частных производных. Пусть далее для каждой вариации $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$, исчезающей на границе рассматриваемой области,

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H} d\tau\right\} = 0, \tag{1}$$

где $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$.

---

* *Eddingtons Theorie und Hamiltonsches Prinzip.* Приложение к кн.: A. S. E d d i n g t o n. Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, 1925. Berlin, Springer Verlag, Anhang, 366—371. (См. русский перевод: А. Э д д и н г т о н. Теория относительности. ГТТИ, 1934.— *Прим. ред.*).

[1] Ссылки в статье относятся к тексту книги Эддингтона; однако все можно понять и так, если только заметить, что обобщенный тензор Римана 4-го ранга обозначается через $^*B$, а соответствующий тензор 2-го ранга — через $^*G$. — *Прим. ред.*

Прежде чем получать следствия из этой аксиомы, введем некоторое логически произвольное ограничение. Скалярная плотность $\mathfrak{H}$ не должна зависеть от Г самым общим мыслимым образом, т. е. не может быть образована произвольно из $^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$ [см. (92.41)], а составляется исключительно из сверток $^*G_{\mu\nu}$ [см. (92.42)], точнее из симметричных и антисимметричных частей этого тензора:

$$\gamma_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right). \tag{3}$$

Согласно этому предположению, вместо (1) сначала получаем

$$\int (\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu} + \mathfrak{f}^{\mu\nu}\delta\varphi_{\mu\nu})\, d\tau = 0, \tag{1a}$$

где подставлено

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \varphi_{\mu\nu}} = \mathfrak{f}^{\mu\nu}.$$

Формулы (2) и (3) позволяют выразить $\delta\gamma_{\mu\nu}$ и $\delta\varphi_{\mu\nu}$ в (1а) через $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ и $\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$. При этом, имея в виду, что 40 вариаций $\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ могут быть выбраны независимо друг от друга, мы получаем из (1а) 40 уравнений:

$$(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_{\alpha} - \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{\mu\sigma})_{\sigma}\delta^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{\nu\sigma})_{\sigma}\delta^{\mu}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{i}^{\mu}\delta^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{i}^{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} = 0. \tag{1б}$$

При этом введены тензорные плотности

$$(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_{\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \mathfrak{g}^{\sigma\nu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{i}^{\mu} = \frac{\partial \mathfrak{f}^{\mu\sigma}}{\partial x_{\sigma}}. \tag{6}$$

40 уравнений (1б) позволяют нам выразить 40 величин $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ через $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ и их производные. Чтобы проделать это, нужно перейти от контравариантной тензорной плотности к контравариантным тензорам, а от них — к ковариантным тензорам. С этой целью определим тензоры $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ соотношениями

$$\begin{gathered} g^{\mu\nu}\sqrt{-g} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}, \\ g^{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta^{\nu}_{\mu}, \\ g = |g_{\mu\nu}|, \end{gathered} \tag{7}$$

и, кроме того, i^{μ} и i_{μ} — соотношениями

$$i^{\mu}\sqrt{-g} = \mathfrak{i}^{\mu}, \qquad i_{\mu} = g_{\mu\nu} i^{\nu}; \tag{8}$$

тогда путем элементарных расчетов получим [2]

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}\right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} i^{\alpha} + \frac{1}{6}\delta^{\alpha}_{\mu} i_{\nu} + \frac{1}{6}\delta^{\alpha}_{\nu} i_{\mu}. \tag{1в}$$

Отсюда видно, что $g_{\mu\nu}$ нужно понимать как метрический тензор. Полученное из вариационного принципа выражение для $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ имеет много сходства с аналогичным выражением, следующим из теории Вейля, и здесь также наряду с метрическим тензором выступает 4-вектор.

Уравнения поля для $g_{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ уже содержатся в полученных результатах, как только мы примем определенное выражение для функции Гамильтона $\mathfrak{H}$. Именно, уравнения поля следуют из равенств (2) и (3), правые и левые части которых нужно выразить через $g_{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$. Для правой части это делается при помощи уравнения (1в), для левой — при помощи уравнений (4). Если только $\mathfrak{H}$ задана как функция $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, то из (4) можно выразить $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$ через $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ и результат подставить в левые части равенств (2) и (3).

Что касается левых частей (2) и (3), то еще проще удается достигнуть цели следующим образом. Так как мы до сих пор не вводили никаких предположений относительно выбора скалярной плотности $\mathfrak{H}$ как функции γ и φ, то уравнения (4) означают только, что выражение

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}\, d\gamma_{\mu\nu} + \mathfrak{f}^{\mu\nu}\, d\varphi_{\mu\nu}$$

---

[2] Сначала путем свертывания (1б) по индексам ν и α получаем

$$(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_{\nu} = -\frac{5}{3}\mathfrak{i}^{\mu},$$

после чего вместо (1б) имеем

$$(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_{\alpha} + \frac{1}{3}\mathfrak{i}^{\mu}\delta^{\nu}_{\alpha} + \frac{1}{3}\mathfrak{i}^{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} = 0.$$

Подставим сюда $(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_{\alpha}$ из (5). Теперь нужно перейти при помощи первого уравнения (7) к контравариантной форме

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + g^{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} + g^{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} + \frac{1}{3} i^{\mu}\delta^{\nu}_{\alpha} + \frac{1}{3} i^{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} + g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}\right) = 0.$$

Умножая на $g_{\mu\nu}$, нетрудно видеть, что скобка в последнем члене равна $(1/3)\, i_{\alpha}$. Разрешая обычным образом последнее равенство относительно Γ и переходя к ковариантным индексам, получаем уравнение (1в).

является полным дифференциалом (относительно переменных $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$). Этому равносильно утверждение, что и выражение

$$\gamma_{\mu\nu}\, d\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}\, d\mathfrak{f}^{\mu\nu}$$

является полным дифференциалом, в котором мы, наоборот, рассматриваем $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$ как функции $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$. Этот вывод означает, что существует некоторая функция $\mathfrak{H}$ от $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$, обладающая характером скалярной плотности и удовлетворяющая условиям

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}, \qquad \varphi_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{f}^{\mu\nu}}. \tag{4a}$$

Выбор функции $\mathfrak{H}^*$ полностью определяет левые части равенств (2) и (3). Функции $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}^*$ однозначно определяют друг друга, а именно

$$d\mathfrak{H} + d\mathfrak{H}^* = d\,(\gamma_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \varphi_{\mu\lambda}\mathfrak{f}^{\mu\nu}), \tag{9}$$

или, в случае, когда $\mathfrak{H}^*$ — однородная квадратичная функция от $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ и однородная функция нулевого порядка от $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*. \tag{9a}$$

Имея в виду теорию Максвелла, напишем

$$\mathfrak{H}^* = -\frac{\beta}{2}\mathfrak{f}_{\alpha\beta}\mathfrak{f}^{\alpha\beta}\sqrt{-g} = -\frac{\beta}{2}\mathfrak{g}_{\sigma\alpha}\mathfrak{g}_{\tau\beta}\mathfrak{f}^{\sigma\tau}\mathfrak{f}^{\alpha\beta}\sqrt{-\mathfrak{g}}. \tag{10}$$

Здесь β — постоянная, $\mathfrak{g}$ — определитель $|\mathfrak{g}^{\alpha\beta}|$, $\mathfrak{g}_{\sigma\alpha}$ — нормированный минор элемента $\mathfrak{g}^{\sigma\alpha}$ [3]. Отсюда в результате элементарных расчетов получаем

$$d\mathfrak{H}^* = -\beta\left[\left(\frac{1}{4}\, g_{\alpha\beta}f_{\sigma\tau}f^{\sigma\tau} - f_{\alpha\sigma}f^{\sigma}_{\beta}\right)\delta\mathfrak{g}^{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}\delta\mathfrak{f}^{\alpha\beta}\right], \tag{11}$$

или, согласно (4а),

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= -\beta\left(\frac{1}{4}\, g_{\alpha\beta}f_{\sigma\tau}f^{\sigma\tau} - f_{\alpha\sigma}{}^{\sigma}_{\beta}f\right) = -\beta E_{\mu\nu},\\ \varphi_{\mu\nu} &= -\beta f_{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{11a}$$

Эти равенства вместе с (2) и (3) и уравнением (1в) определяют уравнения поля. Здесь $E_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитной энергии в теории Максвелла. Следует заметить, что функция $\mathfrak{H}$ допускает возможность дополни-

[3] Из соотношений (10) и (9) нетрудно увидеть, что эта добавка приводит к выполнению уравнения (9а).

тельного аддитивного члена вида $\mathrm{const}\cdot\sqrt{-g}$, которое соответствует «космологическому» члену общей теории относительности.

Выполняя указанные преобразования, получаем уравнения поля в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\beta E_{\mu\nu} - \frac{1}{6}\alpha i_\mu i_\nu, \\ \beta f_{\mu\nu} &= \frac{1}{6}\left(\frac{\partial i_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial i_\nu}{\partial x_\mu}\right), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где $G_{\mu\nu}$, как и в (37.2), обозначает свернутый тензор Римана. Что касается физического смысла этих уравнений, то $f_{\mu\nu}$ нужно понимать теперь как тензор электромагнитного поля. Первое уравнение (12) в точности соответствует обычным уравнениям поля общей теории относительности, когда рассматривается задача, в которой кроме метрического поля существует только электромагнитное, так что добавляется только один энергетический член, определяемый плотностью тока. Второе уравнение (12) кажется прямо противоречащим опыту, так как оно требует, чтобы электромагнитное поле обращалось в нуль всюду, где равна нулю плотность тока.

Однако это возражение несостоятельно, так как мы не знаем, связаны ли с электромагнитными полями очень малые плотности электрического заряда. Чтобы судить о приемлемости уравнений (12), мы должны далее принять во внимание, что единица электромагнитного поля должна быть изменена, если длина будет измеряться в сантиметрах, масса и соответственно энергия — в граммах. Тогда вместо уравнений (12) мы запишем

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\beta^2\alpha E_{\mu\nu} - \frac{1}{6}\alpha^2 i_\mu i_\nu, \\ \beta f_{\mu\nu} &= \frac{1}{6}\left(\frac{\partial i_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial i_\nu}{\partial x_\mu}\right). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Согласно второму из этих уравнений существует векторный потенциал электромагнитного поля f_μ $\left(\text{причем } f_{\mu\nu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right)$, определяемый уравнением

$$6\beta f_\mu = i_\mu. \tag{14}$$

Первое уравнение поля можно теперь записать также и в виде

$$G_{\mu\nu} = -\beta\alpha^2 E_{\mu\nu} - 6\beta^2\alpha^2 f_\mu f_\nu. \tag{15}$$

Существование полей, практически не связанных с током, требует, согласно (14), чтобы β была исчезающе мала. Тогда и последний член в равенстве

(15) будет исчезающе мал по сравнению с максвелловским вкладом в энергию. Тогда наше рассмотрение приводит к тем же уравнениям поля, какие были установлены первоначально общей теорией относительности без обобщения геометрических основ за пределы системы Римана.

Электрон, соответствующий свободному от сингулярности решению, во всяком случае не следует из этих уравнений поля. Далее, опыт до сих пор не дал никаких подтверждений тому выводу, что электромагнитные поля вызывают появление 4-тока в тех точках, где они существуют. К сожалению, полученный результат создает у меня впечатление, что углубление геометрических основ, предпринятое Вейлем и Эддингтоном, не смогло привести к прогрессу физических знаний; можно лишь надеяться, что будущее развитие теории покажет несправедливость этого пессимистического мнения.

ЭЛЕКТРОН И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Нижеследующие замечания настолько просты, что я не надеюсь сказать в них что-либо новое. Но так как доказываемый тезис сам по себе был для меня новым, я надеюсь, что его изложение здесь будет полезным и для других. Этот тезис гласит:

Если справедливо предположение, что электромагнитное поле описывается антисимметричным тензором 2-го ранга ($f_{\mu\nu}$), то вообще нельзя дать таких ковариантных уравнений, которые

1) имеют решение, соответствующее отрицательному электрону,

2) не имеют *ни одного* решения, которое соответствует положительному электрону равной массы.

Доказательство. Пусть дано решение, которое соответствует электрону с электрическим зарядом ε и механической массой μ. Это решение будет характеризоваться электромагнитным ($f_{\mu\nu}$) и метрическим ($g_{\mu\nu}$) тензорами.

Если произвести такие преобразования пространства-времени, которые характеризуются уравнениями

$$\begin{aligned} x'_1 &= x' = x = x_1, \\ x'_2 &= y' = y = x_2, \\ x'_3 &= z' = z = x_3, \\ x'_4 &= t' = -t = -x_4, \end{aligned} \tag{1}$$

то получится формально новое решение, которое связано с введенными

---

* *Elektron und allgemeine Relativitätstheorie.* Physica, 1925, 5 Jaargang, 330—334.

ранее соотношениями

$$
\begin{aligned}
g'_{11} &= g_{11}, & f'_{23} &= f_{23}, & f'_{14} &= -f_{14},\\
g'_{44} &= g_{44}, & f'_{31} &= f_{31}, & f'_{24} &= -f_{24},\\
g'_{33} &= g_{33}, & f'_{12} &= f_{12}, & f'_{34} &= -f_{34}.
\end{aligned}
$$

Если f_{23}, f_{31}, f_{12} интерпретировать как компоненты напряженности магнитного, а f_{14}, f_{24}, f_{34} — как компоненты напряженности электрического полей, то f_{23} и т. д. обращаются в нуль. Компоненты напряженности электрического поля при указанном преобразовании меняют знак. Если образовать соответствующие компоненты вектора плотности электрического тока

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$$

и отдельно плотность электрического заряда

$$\frac{\partial f^{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f^{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f^{43}}{\partial x_3},$$

то станет ясно, что они меняют знак при упомянутом преобразовании, в то время как, согласно (2), гравитационное поле, а тем самым и (гравитирующая) масса остаются неизменными.

Итак, если существует решение, которое соответствует отрицательному электрону с массой μ и зарядом $-\varepsilon$, то существует также и решение, которому соответствуют электрон с массой μ и зарядом $+\varepsilon$.

Наши поиски удовлетворительного выхода из этой трудности были безуспешны, но, по-видимому, небезынтересно сделать здесь некоторые замечания, связанные с обсуждаемой темой.

1. В одной из наших ранних работ о гравитации и электричестве мы полагали, что упомянутую трудность можно обойти, изменив связь тензора $f_{\mu\nu}$ с электромагнитным полем, при которой мы рассматривали компоненты f_{23}, f_{31}, f_{12} как электрические, а компоненты f_{14}, f_{24}, f_{34} как магнитные векторы поля. Тогда плотность тока следует рассматривать как тензор 3-го ранга

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial f_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu},$$

а плотность электрического заряда задавать выражением

$$\frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3}.$$

Этим достигается то, что преобразование (1) не изменяет электрического поля и плотности электрического заряда. Но в этом случае к соответствующей трудности приводит преобразование:

$$t' = t,$$
$$x' = -x,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z.$$

При этом же преобразовании знак по-новому интерпретированной плотности электрического заряда меняется на обратный, без того чтобы в центрально-симметричном электростатическом решении изменилось что-либо еще.

2. Можно предположить при этом, что допустимы не все преобразования, а только те, которые обладают положительным детерминантом, поскольку только они могут быть связаны между собой бесконечно малыми преобразованиями. Все записанные выше преобразования обладали отрицательным детерминантом.

Несущественность возражения можно увидеть из того, что при любой из фиксированных выше интерпретаций плотности электрического заряда последняя изменяет свой знак при преобразовании:

$$x' = -x,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$
$$t' = -t.$$

Однако это преобразование имеет положительный детерминант.

Добавление при корректуре. Дальнейшие размышления относительно этой трудности привели меня к возможному пути ее устранения или, по крайней мере, к более глубокому пониманию существа трудности. Известное из опыта различие положительных и отрицательных элементарных частиц не может быть получено из теории, которая пользуется в качестве переменных поля исключительно величинами $g_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}$. Это связано с тем, что скаляр плотности электрического заряда ρ не может быть однозначно выражен через переменные поля $g_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}$, а именно:

$$\rho = \sqrt{g_{\mu\nu} i^\mu i^\nu},$$

где

$$i^\mu = \frac{\partial f^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}.$$

Появляющийся здесь квадратный корень делает прежде всего невозможным обособленное выражение плотности положительного и отрицательного электрических зарядов. Пока эта неопределенность существует, нельзя сформулировать закон, который определял бы знак ρ. Скорее должна предполагаться возможность определения плотности ρ электрического заряда *вместе со знаком* из теории поля. Это можно сделать следующим образом.

В световом конусе $ds^2 = 0$ в каждой точке мира с самого начала различаются передний и задний конусы. Получается, что время обладает априори направлением течения, т. е. каждому временно-подобному линейному элементу сопоставляется стрелка (прошедшее $\rightarrow$ будущее).

Пусть a_μ — некоторый временно-подобный вектор, l^i — временно-подобный вектор, направленный в передний корпус. Теперь мы можем установить, что знак скаляра

$$a = \sqrt{g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu}$$

должен быть таким же, как и знак

$$l^i a_i.$$

Так удается, например, однозначно выразить плотность электрического заряда (скаляр плотности) через поле. Знак этого скаляра характеризует знак плотности электрического заряда.

Теперь на основе общей теории относительности нетрудно установить закон, согласно которому электричество, положительное в некоторых конфигурациях, в равновесии ведет себя как отрицательное. Это может быть достигнуто путем введения в функцию Гамильтона члена, который является нечетной функцией скаляра плотности электрического заряда или скалярного электростатического потенциала.

Нам представляется существенным знание того, что объяснение неравнозначности обоих видов электричества возможно лишь тогда, когда времени приписано направление течения; это используется при определении важных физических величин. В этом существенное различие электромагнетизма и гравитации; поэтому попытки слить воедино электродинамику с законами гравитации представляется нам недостаточно обоснованными.

В статье за несколько лет до теории Дирака сформулирована идея зарядовой симметрии любых теорий поля, которая следует из симметрии теории относительно отражений пространства и времени. Первое упоминание о такой симметрии содержалось уже в работе 73. В статье 79 обсуждается и временна́я инвариантность теории.

ЕДИНАЯ ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА *

Физики-теоретики, занимающиеся проблемами общей теории относительности, в настоящее время едва ли могут сомневаться в том, что гравитационное и электромагнитное поля должны иметь одинаковую природу. Однако насколько нам известно, до сих пор еще не удалось установить связи между этими полями. Не дает истинного решения этой проблемы и наша опубликованная ранее в этих «Докладах» работа [1], целиком основанная на идее Эддингтона. Теперь я думаю, что после двухлетних непрерывных поисков нам удалось получить истинное решение, которое и излагается ниже.

Использованный нами метод кратко можно обрисовать следующим образом. Сначала мы отыскали простейшее с формальной точки зрения уравнение гравитационного поля в отсутствие электромагнитного поля, а также наиболее естественное обобщение этого уравнения. Оказалось, что в первом приближении оно содержит в себе теорию Максвелла. Изложим схему общей теории (§ 1) и покажем, что в ней в известном смысле содержатся законы чисто гравитационного поля (§ 2) и теория Максвелла (§ 3).

§ 1. Общая теория

Предположим, что в четырехмерном континууме задается аффинная связность, т. е. поле $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, определяющее бесконечно малые смещения векторов соотношением

$$dA^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha} dx^{\beta}. \tag{1}$$

---

* *Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1925, 414—419.

[1] Статья 72 и дополнения к ней в статьях 73, 74.—*Прим. ред.*

При этом не предполагается, что $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ симметричны по индексам α и β. Обычным способом образуем из этих величин Γ (римановы) тензоры

$$R^{\alpha}_{\mu,\nu\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}$$

и (2)

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\nu\beta}.$$

Независимо от этой аффинной связности введем контравариантную тензорную плотность $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, свойства симметрии которой мы также оставим открытыми. Из этих двух величин образуем скалярную плотность

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{3}$$

и постулируем, что все вариации интеграла

$$\mathfrak{J} = \int \mathfrak{H}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

по $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ как независимым переменным (на границах не варьируемых) обращаются в нуль.

Вариация по $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ дает 16 уравнений

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

а вариация по $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ дает сначала 64 уравнения

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_{\beta}} + \mathfrak{g}^{\sigma\beta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\right) - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} = 0. \tag{5}$$

Проведем теперь некоторые преобразования, позволяющие упростить уравнения (5). Свертывая левую часть (5) по индексам ν, α и, соответственно μ, α, получаем уравнения

$$3\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right) + \mathfrak{g}^{\mu\alpha}(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\nu\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\nu}}{\partial x_{\alpha}} = 0. \tag{7}$$

Вводя далее величины $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$, являющиеся нормированными минорами $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и, следовательно, удовлетворяющие соотношениям

$$\mathfrak{g}_{\mu\alpha}\mathfrak{g}^{\nu\alpha} = \mathfrak{g}_{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\alpha\nu} = \delta^{\nu}_{\mu},$$

и умножая уравнения (5) на $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$, получаем уравнение, которое после поднятия одного индекса можно записать в виде

$$2\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial \lg \sqrt{\mathfrak{g}}}{\partial x_\alpha}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right)+\mathfrak{g}^{\mu\alpha}(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha})+\delta^{\nu}_{\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha}+\mathfrak{g}^{\sigma\beta}\Gamma^{\beta}_{\sigma\beta}\right)=0, \tag{8}$$

где $\mathfrak{g}$ означает определитель $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$. Уравнения (6) и (8) запишем в виде

$$\mathfrak{f}^{\mu}=\frac{1}{3}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha})=-\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}+\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right)=-\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_\alpha}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right), \tag{9}$$

где $\mathfrak{f}^{\mu}$ означает некоторую тензорную плотность. Легко показать, что система (5) эквивалентна системе уравнений

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}+\mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}-\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}+\delta^{\nu}_{\alpha}\mathfrak{f}^{\mu}=0 \tag{10}$$

в соединении с уравнениями (7). Опуская верхние индексы и учитывая соотношения

$$\mathfrak{g}_{\mu\nu}=\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}=g_{\mu\nu}\sqrt{-\mathfrak{g}},$$

в которых $g_{\mu\nu}$ означает ковариантный тензор, получаем

$$-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+g_{\sigma\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}+g_{\mu\sigma}\Gamma_{\alpha\nu}+g_{\mu\nu}\varphi_\alpha+g_{\mu\alpha}\varphi_\nu=0, \tag{10a}$$

где φ_τ — ковариантный вектор. Эта система вместе с двумя указанными выше уравнениями (7) и (4) получается из вариационного принципа в простейшей форме. В этом результате бросается в глаза появление вектора φ_τ наряду с тензором $g_{\mu\nu}$ и величинами $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$. Чтобы получить согласие с уже известными законами тяготения и электричества, симметричную часть $g_{\mu\nu}$ следует рассматривать как метрический тензор, а антисимметричную часть как электромагнитное поле; при этом необходимо предполагать, что вектор φ_τ тождественно равен нулю, что мы и будем делать. Однако для дальнейших исследований (например, проблемы электрона) следует иметь в виду, что принцип Гамильтона не требует обращения φ_τ в нуль. Приравнивание φ_τ нулю ведет к переопределенности поля, поскольку для $16+$ $+64$ переменных получается $16+64+4$ алгебраически независимых дифференциальных уравнений.

§ 2. Чисто гравитационное поле как частный случай

Пусть $g_{\mu\nu}$ симметричны. Тогда уравнения (7) выполняются тождественно. Переставляя в уравнениях (10a) μ и ν и вычитая, без труда получаем

$$\Gamma_{\nu,\mu\alpha} + \Gamma_{\mu,\alpha\nu} - \Gamma_{\mu,\nu\alpha} - \Gamma_{\nu,\alpha\mu} = 0. \tag{11}$$

Обозначая через Δ антисимметричную по двум последним индексам часть Γ, перепишем (11) в виде

$$\Delta_{\nu,\mu\alpha} + \Delta_{\mu,\alpha\nu} = 0,$$

или

$$\Delta_{\nu,\mu\alpha} = \Delta_{\mu,\nu\alpha}. \tag{11a}$$

Однако свойство симметрии по двум первым индексам несовместимо с антисимметрией по двум последним индексам, как показывают следующие равенства:

$$\Delta_{\mu,\nu\alpha} = -\Delta_{\mu,\alpha\nu} = -\Delta_{\alpha,\mu\nu} = \Delta_{\alpha,\nu\mu} = \Delta_{\nu,\alpha\mu} = -\Delta_{\nu,\mu\alpha}.$$

Эти равенства в соединении с равенствами (11a) требуют, чтобы все Δ были равны нулю. Следовательно, Γ симметричны по двум последним индексам, как и в геометрии Римана.

В этом случае, решая обычным способом уравнения (10a), получаем

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right). \tag{12}$$

Вместе с уравнениями (4) уравнение (12) дает известный закон тяготения. Если бы мы предполагали симметрию $g_{\mu\nu}$ в § 1 с самого начала, то пришли бы прямо к уравнениям (12) и (4). С нашей точки зрения, это самый простой и замкнутый вывод уравнений гравитации для пустоты. Попытка вывести законы электродинамики, обобщив именно эти рассуждения, выглядит поэтому наиболее естественной.

Если бы мы не предполагали, что $\varphi_\tau = 0$, то, предполагая симметрию $g_{\mu\nu}$, мы не могли бы получить известный закон чисто гравитационного поля указанным выше способом. Напротив, предполагая симметрию $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, мы доказали бы, что $\varphi_\tau = 0$ вследствие уравнения (9) или уравнений (10a) и (7); тогда мы также получили бы закон чисто гравитационного поля.

§ 3. Связь с теорией Максвелла

Если имеется электромагнитное поле, т. е. если $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ или $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ содержат антисимметричную часть, то уравнения (10a) уже нельзя разрешить относительно величин $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, что значительно затрудняет исследование всей системы. Однако если ограничиться первым приближением, то это решение получить можно. Мы это и сделаем, снова предполагая, что $\varphi_\mu = 0$.

Итак, положим

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}, \tag{13}$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ — симметричные, а $\varphi_{\mu\nu}$ — антисимметричные бесконечно малые величины первого порядка. Величинами второго и более высоких порядков мы пренебрегаем. Тогда $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ также будут бесконечно малыми первого порядка.

При этих условиях система уравнений (10а) упрощается:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} = 0. \tag{10б}$$

При двукратной циклической перестановке индексов μ, ν, α получаются два других уравнения. Из этих трех уравнений можно, как и в симметричном случае, вычислить Γ:

$$-\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{14}$$

Уравнение (4) сводится к первому и третьему[2] членам. Подставляя в них выражение для $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ из (14), получаем

$$-\frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 0. \tag{15}$$

Прежде чем рассматривать (15) дальше, разложим уравнение (7). Сначала из (13) следует, что в рассматриваемом приближении

$$g^{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu} - \varphi_{\mu\nu}. \tag{16}$$

С учетом этого уравнение (7) переходит в

$$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{17}$$

Подставляя теперь выражения (13) для $g_{\mu\nu}$ в уравнение (15) и учитывая (17), получаем

$$-\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = 0. \tag{19}$$

---

[2] Ср. формулу (2). — *Прим. ред.*

Уравнения (18), которые, как известно, можно упростить подходящим выбором координат, имеют такой же вид, как и в отсутствие электромагнитного поля. В свою очередь уравнения (17) и (19) для электромагнитного поля не содержат величин $\gamma_{\mu\nu}$, определяющих гравитационное поле. Следовательно, оба вида поля в согласии с опытом в первом приближении не зависят друг от друга.

Уравнения (17) и (19) почти полностью эквивалентны уравнениям Максвелла для пустого пространства. Уравнения (17) соответствуют системе однородных уравнений Максвелла. Выражения

$$\frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\varphi_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\varphi_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu},$$

которые, по Максвеллу, должны обращаться в нуль, необязательно равны нулю в соответствии с уравнениями (17) и (19); однако выполняются соотношения типа

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\varphi_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\varphi_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu}\right)=0,$$

по существу тождественные уравнениям Максвелла для пустоты.

По поводу сопоставления $\varphi_{\mu\nu}$ векторам электрического и магнитного полей $\mathfrak{e}$ или $\mathfrak{h}$ хотелось бы сделать замечание, придающее изложенной выше теории независимое значение. Согласно классической механике, имеющей дело с центральными силами, для каждого процесса движения V существует обратный процесс $\overline{V}$, в котором одни и те же конфигурации проходятся в обратном порядке. Формально этот обратный процесс $\overline{V}$ получается из первоначального процесса V также заменой

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= -t. \end{aligned}$$

Согласно общей теории относительности, аналогичное положение имеет место и в случае чисто гравитационного поля. Чтобы получить из решения для V соответствующее ему решение для $\overline{V}$, следует подставить во все полевые величины $t' = -t$ и, кроме того, изменить знаки компонент поля g_{14}, g_{24}, g_{34} и компонент тензора энергии T_{14}, T_{24}, T_{34}. Результат получится такой же, как и в случае применения указанного выше преобразования к первоначальному процессу V. Тогда знаки g_{12}, g_{24}, g_{34} и T_{14}, T_{24}, T_{34} изменятся сами по себе в силу закона преобразования тензоров.

Эту возможность получить обратный процесс обращением временно́й координаты ($t' = -t$) следует рассматривать как всеобщий закон, которому должны подчиняться и явления электромагнетизма. В электродинамике при инверсии движения электрона меняется знак магнитного, а не электрического поля. Поэтому электрическому полю следует поставить в соответствие компоненты φ_{23}, φ_{31}, φ_{12}, а магнитному полю — компоненты φ_{14}, φ_{24}, φ_{34}. Следует отказаться от общепринятого противоположного отождествления. Оказанное ему предпочтение объясняется, очевидно, тем, что плотность тока более удобно выражать через вектор (тензор первого ранга), а не через антисимметричный тензор третьего ранга.

Закон электромагнитной индукции в изложенной здесь теории выражается уравнением (7) или (17). Это подтверждается и отсутствием в правой части этого уравнения какого-либо выражения, которое можно было бы интерпретировать как плотность тока.

Следующий вопрос состоит теперь в том, чтобы показать, может ли объяснить развитая здесь теория существование несингулярных центрально-симметричных заряженных масс. Над этой проблемой я начал работать вместе с доктором Я. Громмером, который в последние годы помогал мне во всех вычислениях в области общей теории относительности. Я хочу выразить искреннюю благодарность ему и «Международному комитету образования», обеспечившему мне возможность длительной совместной работы с Громмером.

80

НЕЭВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИКА*

Размышления об отношении неэвклидовой геометрии к физике с необходимостью приводят к вопросу о соотношении между геометрией и физикой вообще. Этот последний вопрос мы прежде всего и будем иметь в виду и при этом постараемся по возможности не касаться спорных философских вопросов.

В древнейшие времена геометрия несомненно была полуэмпирической наукой — чем-то вроде примитивной физики. За точку принималось тело, размерами которого можно пренебречь. Прямая определялась либо с помощью точек, которые можно совместить в направлении луча зрения, либо с помощью натянутой нити.

Таким образом, мы имели дело с понятиями, которые — как и всякие понятия — не взяты непосредственно из опыта, или, другими словами, логически не вытекают из опыта, но все-таки находятся в прямом отношении к объектам наших переживаний. Предложения относительно точек, прямых, равенства отрезков и углов были при таком состоянии знания в то же время и предложениями относительно известных переживаний, связанных с предметами природы.

Такая геометрия превратилась в математическую науку, как только было понято, что бóльшая часть ее предложений может быть чисто логическим путем выведена из небольшого числа предложений, получивших название аксиом. Наука, которая занимается исключительно *логическими* отношениями между данными предметами, устанавливаемыми по заданным правилам, есть математика.

Вывод отношений занимал тогда главное место в кругу научных интересов, поскольку самостоятельное построение логической системы, независимое от ненадежных, случайных внешних опытов, всегда было неотразимо привлекательным для человеческого духа.

* Nichtenklidische Geometrie in der Physik Neue Rundschan, январь 1925 г., Berlin, S. 16—20. Испанский перевод Rev. Mat. Hisp.-Amer., 1926, ser. 2, I, 72—76.

Свидетельствами эмпирического происхождения геометрии остались в ее системе только основные понятия (точка, прямая, отрезок и т. п.) и так называемые аксиомы. Число этих логически неприводимых основных понятий и аксиом стремились свести к минимуму. Стремление извлечь всю геометрию из смутной области эмпирического незаметно привело к ошибочному заключению, которое можно уподобить превращению героев древности в богов. Мало-помалу привыкли к взгляду на основные понятия и аксиомы как на «очевидные», т. е. как на предметы и качества представления, присущие человеческому духу; согласно этому взгляду, основным понятиям геометрии соответствуют предметы интуиции, и отрицание той или иной аксиомы геометрии никоим образом не может быть осуществлено непротиворечиво. Но тогда самая возможность приложения этих основных понятий и аксиом к объектам действительности становится той самой задачей, из которой возникло кантовское понимание пространства.

Второй мотив для отказа геометрии от ее эмпирической основы дала физика. Согласно ставшему гораздо более утонченным взгляду физики на природу твердых тел и света, в природе не существует таких объектов, которые бы по своим свойствам точно соответствовали основным понятиям эвклидовой геометрии. Твердое тело не может считаться абсолютно неизменяемым, а луч света точно не воспроизводит ни прямую линию, ни даже вообще какой-либо образ одного измерения. По воззрению современной науки, геометрия, взятая в отдельности, не соответствует, строго говоря, вообще никаким опытам; она должна быть приложена к объяснению их совместно с механикой, оптикой и т. д. Так как, сверх того, геометрия должна предшествовать физике, поскольку законы последней не могут быть выражены без помощи геометрии, то геометрия и должна казаться наукой, логически предшествующей всякому опыту и всякой опытной науке.

Таковы причины, по которым не только математикам и философам, но и физикам начала XIX столетия основы эвклидовой геометрии казались абсолютно незыблемыми.

К этому можно прибавить, что в течение всего XIX столетия физику, если он не интересовался специально теорией познания, вопрос о соотношении геометрии и физики представлялся еще проще, схематичнее и категоричнее.

Точка зрения, которой он бессознательно придерживался, соответствовала двум положениям: понятия и основные теоремы эвклидовой геометрии очевидны; твердые тела со сделанными на них отметками, при соблюдении некоторых предосторожностей, реализуют геометрическое понятие отрезка, лучи света реализуют прямую линию.

Нужна была громадная работа, продолжавшаяся почти столетие, для того, чтобы это положение существенно изменилось. Замечательно, что эта работа началась с чисто математических исследований еще задолго до того, как рамки эвклидовой геометрии стали узкими для физики. В задачу математики входит обоснование геометрии при наименьшем числе аксиом. Среди аксиом Эвклида была одна, которая казалась математикам непосредственно менее очевидной, чем другие; в течение долгого времени они стремились свести ее к другим, т. е. доказать ее с их помощью. Это была так называемая аксиома о параллельных. Так как все старания доказать ее ни к чему не привели, должно было постепенно выработаться предположение, что это доказательство невозможно, т. е. что эта аксиома не сводится к другим. Это предположение могло бы считаться доказанным, если бы удалось построить логически непротиворечивую научную систему, отличающуюся от эвклидовой геометрии тем и только тем, что аксиома о параллельных заменена другой. Лобачевский, с одной стороны, и Бóяи (отец и сын), с другой, независимо пришли к этой мысли и убедительно провели ее; в этом состоит их неоценимая заслуга.

После этого у математиков не могло не возникнуть убеждения, что наряду с эвклидовой геометрией существуют и другие, логически с нею вполне равноправные. Естественно возникал также вопрос, должна ли быть положена в основание физики именно эвклидова геометрия, а не какая-нибудь другая. Вопрос был поставлен в еще более определенной форме: какова геометрия физического мира — эвклидова или какая-нибудь другая?

Много спорили о том, имеет ли смысл этот вопрос. Для уяснения этого спора необходимо последовательно провести одну из следующих двух точек зрения. С одной стороны, можно принять, что геометрическое «тело» действительно реализуется физическими твердыми телами, если только, конечно, соблюдены известные предписания относительно температуры, механических напряжений и т. п. Такова точка зрения практического физика-экспериментатора. Тогда геометрический «отрезок» соответствует определенному объекту природы, и тем самым все предложения геометрии приобретают характер утверждений относительно реальных тел. Эта точка зрения была особенно ясно высказана Гельмгольцем; можно добавить, что без нее невозможно было бы практически подойти к теории относительности.

Но, с другой стороны, возможно и принципиальное отрицание существования предметов, соответствующих основным понятиям геометрии. Тогда одна геометрия сама по себе не может высказать никаких положений относительно реальных предметов; такие положения могут быть даны только вместе геометрией и физикой. Эта точка зрения, которая могла бы больше соответствовать систематическому изложению уже готовой физики, была особенно ясно высказана Пуанкаре. С этой точки зрения все содержание геометрии условно; решение вопроса о том, какая геометрия предпочтительнее, зависит от того, насколько «проста» та физика, которая в этом предположении окажется наиболее согласованной с опытом.

Мы примем первую точку зрения как наиболее отвечающую современному состоянию наших знаний. С этой точки зрения вопрос о применимости или неприменимости эвклидовой геометрии приобретает ясный смысл. Эвклидова геометрия, как и геометрия вообще, сохраняет характер математической науки, так как вывод ее теорем из аксиом по-прежнему остается чисто логической задачей, но в то же время она становится и физической наукой, так как ее аксиомы содержат в себе утверждения относительно объектов природы, справедливость которых может быть доказана только опытом.

Однако мы должны постоянно помнить, что та идеализация, которая состоит в утверждении, что в природе действительно существуют неизменяемые масштабы, может потом оказаться либо совсем неприменимой, либо оправдываемой только по отношению к некоторым определенным явлениям природы. Общая теория относительности уже доказала неприменимость этого понятия ко всем областям, размеры которых не могут считаться малыми с точки зрения астрономии. Быть может, теория квант будет в состоянии показать неприменимость этого понятия на расстояниях порядка размеров атомов. И то и другое считал возможным Риман.

Заслуга Римана в развитии идей о соотношении между геометрией и физикой двояка. Во-первых, он открыл сферическую (эллиптическую) геометрию, которая является антитезой гиперболической геометрии Лобачевского. Таким образом, он впервые указал на возможность геометрического пространства конечной протяженности. Эта идея была сразу воспринята и привела к постановке вопроса о конечности физического пространства. Во-вторых, Риман имел смелость создать геометрии несравненно более общие, чем геометрия Эвклида или неэвклидовы геометрии в более узком смысле. Он создал, таким образом, «риманову» геометрию, которая (как и неэвклидовы геометрии в более узком смысле) только в бесконечно малом совпадает с эвклидовой; эта геометрия является результатом применения гауссовой теории поверхностей к континууму произвольного числа измерений. Сообразно с этой более общей геометрией, метрические свойства пространства и различные возможности расположения бесконечно большого числа бесконечно малых неизменяемых тел в конечных областях не определяются исключительно аксиомами геометрии. Вместо того чтобы быть смущенным этим выводом и заключить о физической бессмысленности своей системы, Риман пришел к смелой мысли, что геометрические отношения тел могут быть обусловлены физическими причинами, т. е. силами.

Таким образом, путем чисто математических рассуждений он пришел к мысли о неотделимости геометрии от физики; эта мысль нашла свое фактическое осуществление семьдесят лет спустя в общей теории относительности, которая соединила в одно целое геометрию и теорию тяготения.

После того как геометрия Римана, благодаря введенному Леви-Чивитой понятию бесконечно малого параллельного переноса, получила более простую форму, Вейль и Эддингтон предложили дальнейшее обобщение теории Римана в надежде, что в расширенной системе понятий найдут свое место и законы электродинамики. Каковы бы ни были результаты этих стремлений, уже и теперь можно с большим основанием сказать: идеи, развившиеся из неэвклидовой геометрии, оказались в высшей степени плодотворными.

Эйнштейн прислал рукопись этой статьи на немецком языке проф. В. Ф. Кагану. С этого экземпляра и сделан перевод. На русском языке статья была опубликована в сборнике «Эйнштейн и развитие физико-математической мысли». Изд-во АН СССР, 1962.

О ФОРМАЛЬНОМ ОТНОШЕНИИ РИМАНОВСКОГО ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ К УРАВНЕНИЯМ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ*

Уравнения гравитационного поля обычно записываются в виде

$$R_{im} - \frac{1}{2} g_{im} R = -kT_{im}, \tag{1}$$

где T_{im} — тензор энергии-импульса для вещества и электромагнитного поля. Второй член в левой части этого уравнения физически обосновывается тем, что дивергенция левой части должна тождественно обращаться в нуль. Это следует из закона сохранения энергии для вещества. Кроме того, хорошо известно, что при варьировании интеграла от скалярной кривизны по $g_{\mu\nu}$ получается не тензор R_{im}, а тензор $R_{im} - \frac{1}{2} g_{im} R$. Наконец, Герглоц показал, что этот тензор имеет простой математический смысл: если (ξ^i) означает произвольное направление, то $R_{ik}\,\xi^i\xi^k$ будет скалярной кривизной трехмерного сечения четырехмерного континуума, ортогонального (ξ^i).

В то же время имеются серьезные основания полагать, что $R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R$ в действительности есть тензор, приобретающий фундаментальное значение при более глубоком изучении закона тяготения. Именно, при последовательном проведении основной идеи относительности пространственноподобные сечения мира приходится предполагать конечными, что необходимо также для того, чтобы приписать миру конечную среднюю плотность вещества. Этим требованиям можно удовлетворить, вводя так называемый космологический член, так что вместо (1) получается уравнение

$$R_{im} - \frac{1}{2} g_{im} R - \frac{1}{2} g_{im} \lambda = -kT_{im}, \tag{2}$$

* *Über die formale Beziehung des Riemannschen Krümmungstensors zu den Feldgleichungen der Gravitation.* Math. Ann., 1926—7, 99—103.

которое после исключения λ принимает вид

$$R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R = -k\left(T_{im} - \frac{1}{4} g_{im} T\right).$$

Если предположить, что гравитационное и электромагнитное поля являются единственными реальными объектами физики, и ввести в уравнения (3) тензор Максвелла

$$T_{im} = \frac{1}{4} g_{im} \varphi_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha\beta} - \varphi_{i\alpha} \varphi_m^{\alpha}, \tag{3}$$

то скаляр T тождественно обращается в нуль и уравнения поля принимают вид

$$R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R = -kT_{im}. \tag{2a}$$

Ясно, что в случае, когда в правой части имеется только тензор (3), уравнения (2а) следует предпочесть уравнениям (1). В самом деле, из последних вытекает уравнение $R = 0$, всеобщая применимость которого маловероятна. Кроме того, существование электронов со стационарно распределенным зарядом допускается уравнениями (2а), а не (1) [1].

Тот факт, что уравнениям (2а) пока уделялось мало внимания, объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, все наши стремления были направлены к тому, чтобы, следуя по предложенному Вейлем и Эддингтоном или аналогичному пути, прийти к теории, объединяющей гравитационное поле и электромагнитное поле в одну формальную схему; однако вследствие многочисленных неудач мы пришли к убеждению, что на этом пути нельзя продвинуться к истине. Во-вторых, с математической точки зрения выражение $R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R$ выглядит неестественно; это заблуждение мы надеемся рассеять последующими соображениями.

Как указал в интересной заметке Райнич [2], римановский тензор кривизны $R_{ik,lm}$ в четырехмерном континууме можно разложить на две части с разными свойствами симметрии. Каждому элементу поверхности (f^{ik}) в точке P соответствует ортогональный ему элемент $(\overline{f}^{ik})$. Разложим теперь тензор кривизны $R_{ik,lm}$ на два слагаемых по формуле

$$R_{ik,lm} = S_{ik,lm} + A_{ik,lm} \tag{4}$$

так, что слагаемое $S_{ik,lm}$ определяет для элементов поверхности (f^{ik}) и $(\overline{f}^{ik})$ одинаковую, а слагаемое $A_{ik,lm}$ — противоположную поверхностную кри-

[1] К сожалению, последние исследования показали, что этим способом нельзя прийти к удовлетворительной теории электронов.

[2] G. Y. Rainich. Nature, 1925, 115, 498.

визну. Это значит, что если для краткости положить

$$(g_{il}g_{km}-g_{im}g_{kl})f^{ik}f^{lm}=(g_{il}g_{km}-g_{im}g_{kl})\,\overline{f^{ik}}\,\overline{f^{lm}}=1, \tag{5а}$$

то для произвольно выбранного элемента поверхности должны выполняться уравнения

$$\begin{aligned} S_{ik,lm}f^{ik}f^{lm}&=S_{ik,lm}\overline{f^{ik}}\,\overline{f^{lm}},\\ A_{ik,lm}f^{ik}f^{lm}&=-A_{ik,lm}\overline{f^{ik}}\,\overline{f^{lm}}. \end{aligned} \tag{5б}$$

Эти условия полностью определяют разложение.

Теперь оказывается, что «антисимметричная» часть $A_{ik,lm}$ тесно связана с тензором $R_{ik}-\frac{1}{4}g_{ik}R$ в том смысле, что равенство нулю одной из этих величин имеет следствием обращение в нуль другой, и наоборот. Именно

$$A_{ik,lm}=-\frac{1}{2}(g_{il}G_{km}+g_{km}G_{il}-g_{im}G_{kl}-g_{kl}G_{im}),$$

где для краткости введено обозначение:

$$G_{ik}=R_{ik}-\frac{1}{4}g_{ik}R. \tag{7}$$

Для доказательства сначала введем тензор

$$\Delta_{ik}^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\delta^{\alpha\beta\sigma\tau}g_{\sigma i}g_{\tau k}=\frac{1}{2}\sqrt{g}\,\delta_{ik\sigma\tau}g^{\sigma\alpha}g^{\tau\beta}, \tag{8}$$

где δ^{iklm} и δ_{iklm} равны $+1$ или -1 в зависимости от того, образуют $iklm$ четную или нечетную перестановку (1, 2, 3, 4). Тогда

$$\overline{f^{ik}}=\Delta_{\alpha\beta}^{ik}f^{\alpha\beta}, \tag{9}$$

поскольку легко показать, что при этом выполняется как уравнение (5а), так и уравнение

$$(g_{il}g_{km}-g_{im}g_{kl})f^{ik}\overline{f^{lm}}=0. \tag{10}$$

Введем далее обозначение

$$R_{\overline{ik},\overline{lm}}=\Delta_{ik}^{\lambda\rho}\Delta_{lm}^{\sigma\tau}R_{\lambda\rho,\sigma\tau} \tag{11}$$

и аналогичные обозначения для тензоров $S_{ik,lm}$ и $A_{ik,lm}$. Умножая равенство (4) на $\overline{f^{ik}}\,\overline{f^{lm}}$, в силу (11) получаем

$$R_{\overline{ik},\overline{lm}}=S_{\overline{ik},\overline{lm}}+A_{\overline{ik},\overline{lm}}; \tag{12}$$

тогда соотношения (5б) на основании (9) и (11) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} S_{ik,lm} &= S_{\overline{ik},\overline{lm}}, \\ A_{ik,lm} &= -A_{\overline{ik},\overline{lm}}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Из равенств (4), (12) и (13) получаем:

$$S_{ik,lm} = \frac{1}{2}\left(R_{ik,lm} + R_{\overline{ik},\overline{lm}}\right), \tag{14}$$

$$A_{ik,lm} = \frac{1}{2}\left(R_{ik,lm} - R_{\overline{ik},\overline{lm}}\right).$$

Для дальнейших вычислений удобно применять локальную систему координат, для которой $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ($\delta_{\mu\nu} = 1$, если $\mu = \nu$, и $\delta_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$). Тогда вместо (8) получаем

$$\Delta_{ik}^{\alpha\beta} = \delta_{ik\alpha\beta}\,. \tag{8a}$$

В этой системе в соответствии с равенствами (11), (14) и (7) выполняются соотношения

$$R_{12,34} - R_{\overline{12},\overline{34}} = R_{12,34} - R_{34,12} = 0,$$

$$R_{12,23} - R_{\overline{12},\overline{23}} = R_{12,23} - R_{34,14} = R_{12,23} + R_{14,43} = R_{13} = G_{13},$$

$$R_{12,21} - R_{\overline{12},\overline{21}} = R_{\overline{12},\overline{21}} - R_{34,43} = R_{11} + R_{22} - \frac{1}{2}R = G_{11} + G_{22} \text{ и т.д.}$$

Остальные компоненты $S_{ik,lm}$ получаются отсюда перестановкой индексов. Соотношение (6) теперь оправдывается для выписанных компонент и выбранной локальной системы координат, следовательно, оно выполняется в общем случае.

Из равенства (6) легко заключить, что условия

$$A_{ik,lm} = 0$$

и

$$G_{im} = 0 = R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R,$$

равноценны. Таким образом, закон чисто гравитационного поля в смысле уравнений (2а) определяется условием, что образованная по Райничу антисимметричная часть римановского тензора кривизны обращается в нуль.

Но совершенно аналогичными рассуждениями можно получить и общую систему уравнений (2а) и (3). Из тензора электромагнитного поля (φ_{ik}) следует образовать тензор

$$E_{ik,lm} = \frac{2}{3}\left[\varphi_{ik}\varphi_{lm} + \frac{1}{2}\left(\varphi_{il}\varphi_{km} - \varphi_{im}\varphi_{kl}\right)\right], \tag{15}$$

обладающий такими же свойствами симметрии, как и римановский тензор кривизны. Далее следует образовать «электромагнитно дополненный тензор кривизны»

$$\overset{*}{R}_{ik,lm} = R_{ik,lm} + kE_{ik,lm} \tag{16}$$

и потребовать, чтобы антисимметричная часть $\overset{*}{A}_{ik,lm}$, образованная из $\overset{*}{R}_{ik,lm}$, по Райничу, обращалась в нуль:

$$\overset{*}{A}_{ik,lm} = \frac{1}{2}\left(\overset{*}{R}_{ik,lm} - \overset{*}{R}_{\overline{ik},\overline{lm}}\right) = 0. \tag{17}$$

Точно так же, как выше, доказывается, что это условие эквивалентно системе уравнений

$$\overset{*}{G}_{im} = \overset{*}{R}_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R^{*} = 0, \tag{18}$$

совпадающей с уравнениями (2а) и (3).

Тем самым показано, что уравнения (2а) для гравитационного поля, подсказанные космологической проблемой и структурой электромагнитного тензора энергии, допускают простую математическую интерпретацию.

Поступила 9 января 1926 г.

82

НОВЫЕ ОПЫТЫ ПО ВЛИЯНИЮ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМЛИ НА СКОРОСТЬ СВЕТА ОТНОСИТЕЛЬНО ЗЕМЛИ*

Хорошо известно, что интерференционный опыт Майкельсона (а также Майкельсона и Морли) послужил могучим стимулом для создания теории относительности. Отрицательный результат этого опыта показал, что относительно инерциальной системы координат свет распространяется в пустоте с постоянной скоростью, не зависящей от скорости движения этой системы. Точнее, этот опыт приводит нас к заключению, что время, необходимое свету, чтобы пройти прямой и обратный путь вдоль покоящегося относительно Земли твердого стержня, не зависит от пространственной ориентации последнего. С этим результатом связано само существование или опровержение теории относительности. Поэтому теоретики испытали сильное волнение, когда Дэйтон Миллер, профессор из Кливленда, на основе многолетних тщательных опытов, важнейшие из которых были проведены на Маунт-Вильсон, пришел к иному результату.

Именно, Миллер нашел, что время, за которое свет проходит прямой и обратный путь, зависит от пространственной ориентации этого пути по отношению к неподвижным звездам. При этом его экспериментальная установка сама по себе была более совершенной, чем у Майкельсона и Морли, так как длина сравниваемых световых путей составляла около 60 *м*. Для объяснения результатов своих опытов Миллер привлек выдвигавшееся еще до создания теории относительности предположение о том, что световой эфир частично увлекается Землей при ее поступательном движении, но что степень увлечения уменьшается с высотой над уровнем моря. Этим должен объясняться положительный результат опытов, выполненных в местности, расположенной на бóльшей высоте над уровнем моря.

В последние месяцы опыты были повторены, независимо и с разной аппаратурой в двух местах, а именно: Р. Дж. Кеннеди в Калифорнийском технологическом институте и А. Пикаром и Э. Стахелем в Брюсселе.

---

* *Neue Experimente über den Einfluß der Erdbewegung and die Lichtgeschwindigkeit relativ zur Erde.* Forsch. und Fortschritte, 1927, 3, 36.

Еще до этого физикам стало ясно, что самая слабая сторона опытов Миллера заключалась в том, что при значительных размерах его аппаратуры невозможно добиться достаточного постоянства температуры воздуха, пронизываемого интерферирующими лучами света; локальные систематические разности температур в несколько сотых градуса могли вызвать наблюдаемый положительный эффект. Как Кеннеди, так и Пиккар устранили этот недостаток, применив аппараты значительно меньших размеров, чем Миллер, причем необходимая точность была достигнута улучшением оптических устройств, а постоянство температуры обеспечивалось особыми мерами. Кеннеди использовал световой путь длиной около 5 *м*. Оптические пути проходили внутри толстого металлического корпуса, заполненного гелием при атмосферном давлении. Опыт дал отрицательный результат с такой точностью, которая исключает существование эффекта, в четыре раза меньшего, чем обнаруженный Миллером.

В то время как опыты Кеннеди проводились в лаборатории, Пикар и Стахель с успехом осуществили смелый план, выполнив чрезвычайно тонкие эксперименты на воздушном шаре. Большая трудность, связанная с малым весом аппаратуры и малым объемом, окупалась тем преимуществом, что поворот аппарата легко производился медленным вращением всего воздушного шара с помощью двух небольших вентиляторов. Однако главная цель состояла в том, чтобы выполнить опыт на разных высотах и проверить таким образом зависимость от высоты. К сожалению, постоянство температуры, достигнутое в аппарате, было недостаточно хорошим, чтобы полностью исключить существование положительного эффекта такого порядка величины, о котором говорил Миллер. Однако оказалось, что наблюдаемый эффект не возрастал с высотой, как следовало бы ожидать в соответствии с результатами Миллера.

Несомненной заслугой проф. Миллера является то, что его опыты положили начало тщательной проверке важного эксперимента Майкельсона. Но результат Миллера опровергается опытами Кеннеди и Пикара.

К ТЕОРИИ СВЯЗИ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА КАЛУЦЫ*

Со времени установления общей теории относительности теоретики непрерывно работают над тем, чтобы рассмотреть законы гравитации и электричества с общей точки зрения. Вейль и Эддингтон пытались достигнуть этого обобщением геометрии Римана, используя некоторое общее выражение для параллельного переноса вектора. Калуца, напротив, пошел принципиально другим путем [1]. Он оставил метрику Римана и воспользовался пятимерным континуумом, который он сводил до некоторой степени к четырехмерному континууму при помощи «условия цилиндричности». Я хочу сообщить здесь о точке зрения, которая существенна для теории Калуцы.

Мы исходим из пятимерного пространства (x^1, x^2, x^3, x^4, x^0). В нем существует метрика Римана с интервалом

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{1}$$

Это пространство является «цилиндрическим», т. е. существует такой бесконечно малый вектор смещения ξ_α, который переводит метрику в саму себя в следующем смысле.

Если сместить начало интервала (dx^μ) на (ξ^μ), а конец его на $(\xi^\mu)_{x+dx}$, то смещенный интервал, согласно формуле (1), имеет то же значение, что и несмещенный. Это означает, что уравнение

$$\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \xi^\beta + \gamma_{\beta\nu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x_\mu} + \gamma_{\beta\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x_\nu} = 0 \tag{2}$$

выполняется при соответствующем выборе ξ^β. Координатную систему можно выбрать таким образом, что лишь «0»-компонента ξ^β будет отлична

---

* *Zu Kaluzas Theorie des Zusammenhängs von Gravitation und Elektrizität.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 23—25.

[1] Th. Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik. Berl. Berichte, 1921, 966.

от нуля и величина ξ^0 будет всюду одна и та же. Тогда уравнение (2) принимает вид [2]

$$\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_0} = 0. \tag{2a}$$

Примем далее, что пятимерное пространство обладает тем свойством, что бесконечно малый вектор смещения имеет всюду одну и ту же величину, т. е., что $\gamma^{\mu\nu}\,\xi^\mu\,\xi^\nu$ не зависит ни от одной переменной («усиленное условие цилиндричности»). При использовании предпочтительной для нас координатной системы это означает, что $\gamma_{00}\,\xi^0\,\xi^0$, а вместе с тем и γ_{00} постоянны. Поэтому мы можем без ограничения общности положить $\gamma_{00} = \pm 1$. Ради простоты рассмотрим здесь только случай положительного знака; отрицательный знак приводит к тем же результатам.

При использовании «предпочтительной» системы координат мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} d\sigma^2 &= d\tau^2 + 2d\phi dx^0 + dx^{02}, \\ d\tau^2 &= \gamma_{mn}dx^m dx^n, \\ d\phi &= \gamma_{0m}dx^m, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где суммирование по индексам m и n производится от 1 до 4.

Нетрудно видеть, что $d\tau^2$ и $d\phi$ инвариантны относительно преобразования координат x^1, x^2, x^3, x^4. Калуца назвал их соответственно метрическим и электрическим инвариантами в четырехмерном пространстве (R_4), что возможно благодаря уравнению (2а). Так, введя цилиндрическое пятимерное пространство (R_5), он пришел к формальному объединению обоих фундаментальных инвариантов.

Правда, это еще не накладывает никаких ограничений на законы природы по сравнению с обычным методом общей теории относительности, которая вводит $d\tau$ и $d\phi$ как самостоятельные инварианты. Калуца достигает некоторого ограничения тем, что допускает лишь такие уравнения, которые ковариантны относительно любого точечного преобразования в пространстве R_5 и зависят только от $\gamma_{\mu\nu}$. Калуца получил правильные в первом приближении уравнения гравитационного и электромагнитного полей, в которых он положил равным нулю римановский тензор кривизны в пространстве (R_5), свернутый по индексам один раз. Мы не будем вводить здесь эту далеко идущую гипотезу и ограничимся сначала получением некоторого следствия из существования метрики в пространстве (R_5) и из усиленного условия цилиндричности.

Наша координатная система допускает, помимо любого точечного

[2] Излагаемый здесь вывод на основе уравнения (2) применяется для того, чтобы проявился инвариантный характер «условия цилиндричности».

преобразования координат x^1, x^2, x^3, x^4 в пространстве R_4, еще и такое преобразование («x^0-преобразование»):

$$\left.\begin{aligned} x^m &= \bar{x}^m, \\ x^0 &= \bar{x}^0 + \Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где m означает числа 1, 2, 3, 4. Это значит, что в заданном пространстве R_5 еще можно произвольно выбрать о д н у гиперповерхность $x^0 = \text{const}$ и при этом удовлетворить усиленному условию цилиндричности. Из соотношений (4) получаем

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{mn} &= \bar{\gamma}_{mn} + \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{x}_m}\bar{\gamma}_{0n} + \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{x}_n}\bar{\gamma}_{0m} + \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{x}_m}\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{x}_n}\bar{\gamma}_{00}, \\ \gamma_{0n} &= \bar{\gamma}_{0n} + \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{x}_n}\bar{\gamma}_{00}, \\ \gamma_{00} &= \bar{\gamma}_{00}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если вместо γ_{00} подставить 1 и ввести в пространстве R_4 тензор

$$g_{mn} = \gamma_{mn} - \gamma_{0m}\gamma_{0n}, \tag{6}$$

то вместо преобразований (5) получим:

$$\left.\begin{aligned} g_{mn} &= \bar{g}_{mn}, \\ \gamma_{0m} &= \bar{\gamma}_{0m} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_m}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

Если инвариант Гамильтона в пространстве R_4 (x_1, x_2, x_3, x_4), образованный из «метрических коэффициентов» g_{mn}, «электрических потенциалов» γ_{0m} и их производных, должен быть инвариантным также и относительно x^0-преобразований (что необходимо при такой интерпретации формальной связи между гравитацией и электричеством), то этот инвариант должен содержать γ_{0m} только в комбинации

$$\phi_{mn} = \frac{\partial\gamma_{0m}}{\partial x_n} - \frac{\partial\gamma_{0n}}{\partial x_m}\,. \tag{7}$$

Это следует из второго соотношения (5a).

Идея Калуцы дает возможность глубже понять тот факт, что наряду с симметричным метрическим тензором $(g_{\mu\nu})$ имеет смысл лишь антисимметричный тензор электромагнитного поля (ϕ_{mn}) (не производимый ни от какого потенциала)[3].

[3] Заметим еще, как изменится наш результат, если не пользоваться усиленным условием цилиндричности. В этом случае в функцию Гамильтона (в четырехмерном пространстве) кроме симметричного и антисимметричного тензоров входит еще скаляр (γ_{00}).

К ТЕОРИИ СВЯЗИ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА КАЛУЦЫ. II*

Изложим здесь результаты дальнейшего исследования, которые, как мне кажется, существенны для идей Калуцы. Отклонения от его рассуждений чисто формальны. Они связаны с тем, что Калуца для компонент метрического тензора в пространстве R_4 употреблял обозначение γ_{mn} вместо g_{mn}, так как он не обращал внимания на инвариантные свойства, вытекающие из условия цилиндричности [1].

§ 1. Интерпретация «усиленного» условия цилиндричности

Даже в том случае, когда в основу метрического пространства R_5 положено простое (неусиленное) условие цилиндричности, кроме инвариантности относительно произвольных преобразований координат (x_1, x_2, x_3, x_4) при постоянном x_0 требуется еще ковариантность соотношений (4) относительно x_0-преобразования. Таким образом, мы должны требовать ковариантности уравнений по отношению к преобразованиям (5), где γ_{00} рассматривается, однако, как функция координат x_1, ..., x_4. Из соотношений (5) вытекает инвариантность следующих величин:

$$\frac{\gamma_{mn}}{\gamma_{00}} - \frac{\gamma_{0m}}{\gamma_{00}}\frac{\gamma_{0n}}{\gamma_{00}}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\gamma_{0m}}{\gamma_{00}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\gamma_{0n}}{\gamma_{00}}\right), \; \gamma_{00}.$$

Условие цилиндричности требует, чтобы функция Гамильтона содержала $\gamma_{\mu\nu}$ лишь в этих трех комбинациях.

---

* *Zu Kaluzas Theorie des Zusammenhanges von Gravitation und Elektrizität.* II. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 26—30.

[1] Последующее изложение представляет собой прямое продолжение предыдущего сообщения (обозначения, нумерация формул).

Если теперь принять, что объективный смысл имеют не сами величины $\gamma_{\mu\nu}$, но только их отношения, или, другими словами, что в пространстве задана не метрика ($d\sigma^2$), а совокупность «световых конусов» ($d\sigma^2 = 0$), то функция Гамильтона будет зависеть лишь от первых двух из приведенных выше комбинаций. Это означает, что требование $\gamma_{00} = 1$ не приводит к сужению основных теоретических положений, и мы приходим к «усиленному условию цилиндричности».

§ 2. Геодезические в пространстве R_5

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} g_{mn} &= \gamma_{mn} - \gamma_{0m}\gamma_{0n}, \\ \phi_m &= \gamma_{0m}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Мы знаем теперь, что в ковариантные соотношения могут входить лишь функции g_{mn} и антисимметричные производные ϕ_m. Матрица $\gamma_{\mu\nu}$ так выражается через g_{mn} и ϕ_m:

$$\left.\begin{matrix} g_{11} + \phi_1\phi_1 & g_{12} + \phi_1\phi_2 & \ldots & \phi_1 \\ g_{21} + \phi_2\phi_1 & g_{22} + \phi_2\phi_2 & \ldots & \phi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdots & \\ \phi_1 & \phi_2 & \ldots & 1 \end{matrix}\right\}. \tag{9}$$

Отсюда следует, что $d\sigma^2$ принимает вид

$$(g_{mn} + \phi_m\phi_n)\, dx^m\, dx^n + 2\phi_m\, dx^m\, dx^0 + dx^{0^2},$$

или (10)

$$d\sigma^2 = g_{mn}\, dx^m\, dx^n + (dx^0 + \phi_m\, dx^m)^2.$$

Пусть τ — произвольный параметр в пространстве R_5

и
$$W^2 = g_{mn} \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx^n}{d\tau} + \left(\frac{dx^0}{d\tau} + \phi_m \frac{dx^m}{d\tau}\right)^2; \tag{10a}$$

тогда геодезическая определяется обычным способом из уравнения

$$\delta \left\{ \int W d\tau \right\} = 0, \tag{11}$$

т. е. из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = 0. \tag{11a}$$

При $\alpha = 0$ получаем

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{2W}\cdot 2\,(\dot{x}^0 + \phi_m \dot{x}^m)\right] = 0.$$

Если теперь выбрать τ так, чтобы $W = \mathrm{const}$, то это уравнение дает

$$\dot{x}_0 + \phi_m \dot{x}^m = A. \tag{12}$$

Вследствие равенства (10а), на геодезической

$$g_{mn}\frac{dx^m}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau} = W^2 - A^2 = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Эту константу можно положить равной единице; такое предположение не содержит никакого ограничения. Тогда $d\tau$ будет иметь смысл длины дуги в пространстве R_4.

Варьируя по координате x^s ($s \neq 0$) и принимая во внимание вариации (12) и (13), приходим к уравнению

$$g_{ms}\ddot{x}^m + \begin{bmatrix} m\ n \\ s \end{bmatrix}\dot{x}^m\dot{x}^n + 2A\phi_{sn}\dot{x}^n = 0, \tag{14}$$

где

$$\phi_{sn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_s}{\partial x_n} - \frac{\partial \phi_n}{\partial x_s}\right). \tag{15}$$

Это уравнение в точности совпадает с рассматриваемым в общей теории относительности уравнением движения наэлектризованной точечной массы, в котором отношение ξ/μ заменено на $-2A$. Следует заметить, что A является инвариантом относительно x_0-преобразования.

§ 3. Функция Гамильтона для уравнений поля

Калуца перенес уравнения поля

$$R_{ik} = 0 \tag{16}$$

в пространство R_5 и показал, что таким путем можно получить уравнения гравитационного и электромагнитного полей, которые совпадают в первом приближении с уравнениями общей теории относительности, в сочетании с выведенными полуэмпирически уравнениями Максвелла. Мы покажем, что идея Калуцы приводит к этим уравнениям точно, а не в первом приближении.

Чтобы показать это, достаточно выразить функцию Гамильтона (в R_5)

$$\mathfrak{H} = \sqrt{\gamma}\,\gamma^{\mu\nu}\left(\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}\overline{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\beta} - \overline{\Gamma}^{\beta}_{\mu\alpha}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\beta}\right) \tag{16a}$$

через функции g_{mn} и ϕ_m. Величины $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$ должны быть образованы в пространстве R_5; γ означает детерминант $\gamma_{\mu\nu}$. Из матрицы (9) прежде всего следует

$$\gamma = g. \tag{17}$$

Это получается, если последний столбец в (9) умножить на величину ϕ_a и вычесть из a-го столбца. Далее легко проверить, что $\gamma^{\mu\nu}$ можно представить в виде

$$\gamma^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} g^{11} g^{12} & \cdot\ \cdot & -\phi^1 \\ g^{21} g^{22} & \cdot\ \cdot & -\phi^2 \\ \cdot\quad \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot\quad \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ -\phi^1 - \phi^2 & \cdot\ \cdot & 1 + \phi_a\phi^a \end{vmatrix}, \tag{9a}$$

причем индексы нужно понимать в связи с метрикой $g_{mn}dx^m dx^n$ в пространстве R_4.

Для получения величины $\mathfrak{H}$ понадобятся в дальнейшем следующие формулы (в которых латинские индексы будут пробегать значения от 1 до 4):

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\begin{bmatrix} m\ n \\ s \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} m\ n \\ s \end{bmatrix} + \phi_s\psi_{mn} - \phi_m\phi_{sn} + \phi_n\phi_{sm}, \\ &\overline{\begin{bmatrix} 0\ n \\ s \end{bmatrix}} = \phi_{sn}, \quad \overline{\begin{bmatrix} m\ n \\ 0 \end{bmatrix}} = \psi_{mn}, \\ &\overline{\begin{bmatrix} 0\ 0 \\ s \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} 0\ n \\ 0 \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} 0\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Здесь мы положили

$$\left.\begin{aligned} \psi_{mn} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial x_n} + \frac{\partial\phi_n}{\partial x_m}\right), \\ \phi_{mn} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial x_n} - \frac{\partial\phi_n}{\partial x_m}\right). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

При помощи формул (18) и (9а) $\overline{\Gamma}$ можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\Gamma^s_{mn}} = \Gamma^s_{mn} + \phi_m \phi^s_n + \phi_n \phi^s_m,\\
&\overline{\Gamma^0_{mn}} = -\phi_s \Gamma^s_{mn} - \phi^s (\phi_m \phi_{sn} + \phi_n \phi_{sm}),\\
&\overline{\Gamma^s_{0n}} = \phi^s_n,\\
&\overline{\Gamma^{0n}_0} = -\phi^s \phi_{sn},\\
&\overline{\Gamma^s_{00}} = \overline{\Gamma^{00}_0} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Теперь выделим в сумме (16а) члены с индексом 0. Это даст сначала уравнение

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{\gamma}} = {} & \gamma^{mn} (\Gamma^a_{mb}\Gamma^b_{na} + 2\overline{\Gamma^0_{mb}}\,\overline{\Gamma^b_{n0}} + \overline{\Gamma^0_{m0}}\,\overline{\Gamma^0_{n0}}) + \\
& + 2\gamma^{m0} (\overline{\Gamma^a_{mb}}\,\overline{\Gamma^b_{0a}} + \overline{\Gamma^0_{mb}}\,\overline{\Gamma^b_{00}} + \overline{\Gamma^a_{m0}}\,\overline{\Gamma^0_{00}}) + \\
& + \gamma^{00} (\overline{\Gamma^a_{0b}}\,\overline{\Gamma^b_{0a}} + 2\overline{\Gamma^0_{0b}}\,\Gamma^b_{00}) - \\
& - \overline{\Gamma^b_{ab}} (\gamma^{mn}\overline{\Gamma^a_{mn}} + 2\gamma^{m0}\overline{\Gamma^a_{m0}} + \gamma^{00}\overline{\Gamma^a_{00}}).
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Отсюда, учитывая соотношения (20) и (17), для $\mathfrak{H}$ получаем выражение

$$\mathfrak{H} = \sqrt{g}\,[g^{mn} (\Gamma^a_{mb}\Gamma^b_{na} - \Gamma^a_{mn}\Gamma^b_{ab}) - \phi^a_b \phi^b_a], \tag{22}$$

которое совпадает с обычным выражением для функции Гамильтона гравитационного и электромагнитного полей, за исключением знака при втором члене. Относительно этого знака нужно заметить, что он появился ввиду того, что мы произвольно приняли $\gamma_{00} = +1$, в то время как можно было положить $\gamma_{00} = -1$; тогда знак второго члена получился бы положительным. Такой результат может быть достигнут также путем изменения знака у g_{mn}; это означает, что вместо положительного знака квадрата временно-подобного отрезка принимается отрицательный. Оба высказывания можно объединить в одно: чтобы уравнения единого поля приняли обычную форму, «0»-направление нужно рассматривать как **пространственно-подобное**.

В заключение можно сказать, что идея Калуцы дает рациональное обоснование электромагнитных уравнений Максвелла в рамках общей теории относительности и объединяет их в одно формальное целое с уравнениями гравитации.

Замечание к обоим предыдущим сообщениям при корректуре

Г. Мандель сообщил мне, что изложенные здесь результаты не новы и содержатся в работах Клейна [Z. Phys., 1926, 37, 12, 895]. Ср. также работу В. А. Фока [Z. Phys., 1926, 39, 226].

Поступила 14 марта 1927 г.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ*

(Совместно с Я. Громмером)

Введение

Если рассматривать теорию гравитации Ньютона как теорию поля, то всю теорию можно разбить на две логически независимые части, а именно: во-первых, на уравнение Пуассона для поля (возможно, дополненное временным членом) и, во-вторых, закон движения материальной точки. Уравнение Пуассона определяет поле при заданном движении материи, уравнение же движения Ньютона — движение материи при воздействии заданного поля.

Аналогично, электродинамика Максвелла — Лоренца базируется на двух логически независимых друг от друга основных положениях, именно: во-первых, на уравнениях поля Максвелла — Лоренца, определяющих поле по движению электрически заряженной материи, и, во-вторых, на законе движения электрона под действием силы Лоренца со стороны электромагнитного поля.

На примере частного случая двух покоящихся электронов легко видеть, что оба закона теории Максвелла — Лоренца действительно не зависят друг от друга. Поле с электростатическим потенциалом

$$\phi = \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}$$

удовлетворяет уравнениям поля. Одного этого недостаточно для того, чтобы прийти к заключению, что оба электрона не могут находиться в состоянии покоя (но должны двигаться под влиянием их взаимодействия).

Тот факт, что из уравнений электромагнитного поля Максвелла — Лоренца ничего нельзя сказать о движении электронов, очень просто следует из линейности уравнений. Именно, произвольно движущийся электрон E_1

* *Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz.* (Mit J. Grommer). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 2—13.

порождает поле (f_1), определяемое уравнениями поля. Для какого-либо другого, движущегося электрона E_2, также рассматриваемого отдельно, уравнения поля определяют соответственно при произвольно заданном движении электрона поле (f_2). Если же оба рассматриваемые электрона существуют одновременно и на конечном расстоянии друг от друга и совершают прежние движения, то они определяют поле $(f_1 + f_2)$, которое также удовлетворяет уравнениям поля. Последнее следует просто из линейности уравнений поля. Однако отсюда вытекает, что закон движения логически независим от уравнений поля.

Этот факт разнородности основ электродинамики особенно неприятен потому, что движение электрических частиц описывается дифференциальными уравнениями в полных производных, а поле определяется дифференциальными уравнениями в частных производных. Ми сделал попытку устранить эту нестройность теории тем, что пытался разработать континуальную теорию электрических частиц. В этой теории компоненты плотности тока рассматриваются как непрерывные функции, которые связаны с «полем» подобно компонентам самого электромагнитного поля, и благодаря дополнительным уравнениям поля такое поведение плотности тока полностью причинно определено. Хотя эта попытка пока оказалась безуспешной, она продолжает оставаться ведущей программой даже вне чисто электродинамической области (Вейль, Эддингтон.) Основная идея может быть сформулирована следующим образом. Вся физическая реальность описывается свободным от сингулярностей полем; последнее описывает не только «пустое пространство», но также и материальные частицы, и закономерности этой реальности полностью определяются дифференциальными уравнениями в частных производных. Таким путем Ми и пытался преодолеть описанный выше дуализм.

Как же выглядит общая теория относительности, если ее рассматривать с этой точки зрения? Имеется ли и здесь дуализм: «закон поля — закон движения»? Фактически дело обстоит не так просто. Мы отдельно обсудим различные способы рассмотрения.

Первый способ рассмотрения идентичен ньютоновскому подходу. Применительно к учению о гравитации он гласит.

1. Закон поля в пустом пространстве ($\mathfrak{R}_i^k = 0$).

2. Закон движения материальной точки (уравнение геодезической).

Второй способ рассмотрения дополняет закон поля введением тензора энергии материи (и электромагнитного поля) $\mathfrak{T}_i^k$:

$$(\mathfrak{R}_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k\mathfrak{R}) + \mathfrak{T}_i^k = 0.$$

Если предположить, что сингулярности существовать не могут, то в этом уравнении заложена теория, аналогичная теории Ми. Теория требует добавления, которое не может быть получено только на основе принципа относительности: тензор $\mathfrak{T}_i^k$ должен выражаться через какие-либо (непрерывные) величины поля, а поведение последних устанавливается определенными дифференциальными уравнениями. Только тогда была бы предложена готовая теория. Однако даже без упомянутого дополнения тензор $\mathfrak{T}_i^k$ не может выбираться произвольно. Так дело обстоит потому, что (ковариантная) дивергенция от выражения $\mathfrak{R}_i^k - {}^1/_2\, \delta_i^k\, \mathfrak{R}$ тождественно равна нулю. Следовательно, тензор $\mathfrak{T}_i^k$ должен удовлетворять условию, чтобы дивергенция этого тензора равнялась нулю. Если предположить, что материя расположена вдоль узких «мировых трубок», то путем элементарных рассуждений отсюда следует, что оси этих «мировых трубок» являются геодезическими линиями (в отсутствие электромагнитных полей). Это означает, что закон движения является следствием закона поля.

Так обстояло бы дело, если бы общая теория относительности уже преодолела успешно этот досадный дуализм. Это было бы так, если бы нам уже удалось представить материю в виде непрерывного поля или если бы мы по крайней мере были убеждены, что это вопрос нескольких дней. Однако об этом не может быть и речи. Все попытки последних лет объяснить элементарные частицы материи посредством непрерывного поля не удались. Подозрение, что это вообще неправильный путь к пониманию частиц материи, после очень многих тщетных попыток стало у нас настолько сильным, что нам не хочется здесь об этом говорить.

Таким образом, мы встаем на путь объяснения элементарных частиц как особых точек или сингулярных мировых линий. Этот путь подсказывается еще и тем, что как уравнения чистого гравитационного поля, так и уравнения, дополненные максвелловским электромагнитным полем ($\mathfrak{T}_i^k$ — тензор энергии Максвелла), имеют простое центрально-симметричное решение с сингулярностью. Итак, мы пришли к третьему методу рассмотрения, при котором, кроме гравитационного и электромагнитного полей, отсутствуют другие полевые переменные (отвлекаясь, возможно, от «космологического члена»), место которых, однако, занимают особые мировые линии. Если бы при этом методе рассмотрения нужно было устанавливать особые уравнения движения для сингулярностей (особенностей), логически независимые от уравнений поля, как это надо делать в теории Максвелла — Лоренца, то этот путь был бы мало привлекателен.

Однако оказывается правдоподобным, что закон движения особенностей полностью определяется уравнениями поля и характером особенностей; если бы этого не было, то были бы необходимы дополнительные предположения. Это и составляет предмет предлагаемого исследования.

Возможность того, что закон движения особенностей может содержаться в уравнениях поля, мы обдумывали уже много раньше. Однако казался непреодолимым и отпугивал следующий довод. Закон гравитационного поля может быть с большой точностью для реальных случаев апроксимирован линейным законом. Линейный же закон поля, аналогично электродинамическому, допускает произвольно движущиеся особенности. Кажется само собой разумеющимся, что от такого приближенного решения методом последовательных приближений можно было бы перейти к очень мало отличающемуся от него строгому решению. Если бы это было так, то могли бы существовать строгие уравнения соответствующего поля при произвольно заданном движении особенностей, т. е. закон движения особенностей не содержался бы в уравнениях поля. Невозможность этого следует из исследований аксиально-симметричных статических гравитационных полей, за что мы благодарны Вейлю, Леви-Чивите и Баху [1]. Это должно быть показано прежде всего; только после этого проблема может обсуждаться вообще. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением чисто гравитационного поля, хотя включение электромагнитного поля не вносит особых трудностей.

§ 1. Особенность поля (аксиально-симметричное статическое поле)

Согласно Вейлю и Леви-Чивите, при введении «канонических цилиндрических координат» линейный элемент ds^2 в аксиально-симметричном статическом поле может быть представлен в виде

$$ds^2 = f^2\,dt^2 - d\sigma^2, \quad f^2\,d\sigma^2 = r^2\,d\vartheta^2 + e^{2\gamma}(dr^2 + dz^2), \tag{1}$$

причем f и γ зависят только от r и z, так же как и функция ψ, связанная с f соотношением

$$f = e^{\psi}. \tag{2}$$

При этом ψ удовлетворяет уравнению Пуассона для потенциала в цилиндрических координатах:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\psi_z)}{\partial z} + \frac{\partial(r\psi_r)}{\partial r}\right) = 0, \tag{3}$$

где индекс у ψ означает производную по z или по r. Если функция ψ из-

---

[1] H. Weyl. Ann. Phys., 1918, 54, 117—145; Ann. Phys., 1919, 59, 185—188. Levi-Civita, ds^2 einsteiniani in campi newtoniani, VIII. Note, Red. Acc. dei Lincei. 1919. R. Bach. Math. Z., 1922, 13, H. 1—2.

вестна, то γ определяется уравнением

$$d\gamma = 2r\psi_z\psi_r\,dz + r(\psi_r^2 - \psi_z^2)\,dr, \tag{4}$$

причем вследствие уравнения (3) $d\gamma$ всегда является полным дифференциалом.

Чтобы поле было регулярным в некоторой точке вне оси z, достаточно потребовать регулярности ψ. Чтобы метрическое поле было регулярно также и на оси z, должно выполняться, кроме того, условие $\gamma = 0$ на оси z. Если бы это было не так, то для бесконечно малой окружности, лежащей в перпендикулярной к оси плоскости, с центром на оси, отношение длины окружности к длине диаметра было бы отлично от π, что означало бы сингулярность метрики. Это легко заключить из соотношений (1).

Рассмотрим прежде всего решение

$$\psi = -\frac{m}{\sqrt{r^2+z^2}}, \tag{5}$$

удовлетворяющее уравнению (3). Хотя это решение не строго центрально-симметрично, как показал Вейль, оно тем ближе к центрально-симметричному, чем меньше m. Подстановка в уравнение (4) дает

$$\gamma = -\frac{m^2}{2}\frac{r^2}{(r^2+z^2)^2}, \tag{6}$$

т. е. $\gamma = 0$ как на положительной, так и на отрицательной оси z, как и должно быть. На бесконечности — метрика эвклидова.

Рассмотрим теперь тот случай, когда кроме поля, которое создается рассмотренной особенностью, имеется еще «внешнее» поле. Мы выразим это, полагая

$$\psi = -\frac{m}{\sqrt{r^2+z^2}} + \bar{\psi}. \tag{5a}$$

Пусть $\bar{\psi}$, также являющаяся функцией только r и z, удовлетворяет уравнению (3) и регулярна в окрестности $z = r = 0$. Тогда из соображений аксиальной симметрии мы можем записать

$$\psi = \alpha_0 + \alpha_1 z + G, \tag{7}$$

где в G формально объединены члены вторых и высших степеней по r и z. Из уравнения (4), определяющего γ, следует, что γ постоянна вдоль оси z, пока мы находимся с о д н о й стороны особенности, лежащей при $z = 0$. Поэтому на отрицательной оси z мы можем положить $\gamma = 0$, как это требуется согласно сказанному выше. Чтобы решение было регулярным всюду, кроме точки $r = z = 0$, γ должно равняться нулю также и на положительной оси z. Это выполняется тогда и только тогда, если интеграл $\int d\gamma$, взятый по указанной на рис. 1 бесконечно малой полуокружности K ($r^2+z^2=$ const), обращается в нуль. Вычисление приводит к условию [2]

$$\alpha_1 = 0, \tag{8}$$

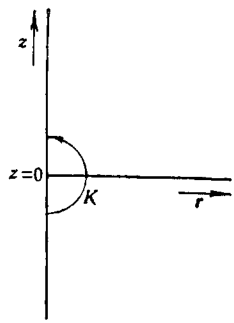


Рис. 1.

в то время как на G никаких ограничений не накладывается. Для того, чтобы при наличии внешнего поля в окрестности особой точки метрика оставалась регулярной, сама напряженность внешнего поля должна в особой точке равняться нулю. В этом смысле условие равновесия содержится в уравнениях поля. Уже на основании этого результата появляется убеждение, что вообще весь закон движения особенностей содержится в уравнениях поля. В более общем виде это будет показано ниже.

§ 2. Закон площадей, эквивалентный уравнениям поля

Общая идея, лежащая в основе дальнейших рассуждений и вычислений, заключается в следующем. Известно, что уравнения гравитационного поля соответствуют линейным дифференциальным уравнениям, решения которых очень мало отличаются от решений строгих уравнений фактически во всех существенных случаях. Однако, с другой стороны, мы видели, что не все решения приближенных уравнений соответствуют строгим решениям. Согласно приближенным уравнениям, существует, например, решение, соответствующее покоящейся точечной массе в однородном гравитационном поле; согласно строгим уравнениям, такого решения нет, по крайней мере в случае, если мы потребуем, чтобы отсутствовали особенности в метрическом поле вне точечной массы. Поэтому мы должны по дополнительным условиям найти, какие решения будут соответствовать приближенным уравнениям. Эти условия, являющиеся следствием строгих уравнений поля, должны относиться к полю в непосредственной окрестности особой мировой линии.

Прежде всего нам понадобится закон площадей, подобный установленному Гильбертом и Клейном.

[2] Значение γ на верхней полуплоскости равно $4\alpha_1 m$. Во всех случаях m и α_1 значительно меньше единицы. Если назвать их величинами первого «порядка», то величины, в общем случае характеризующие нарушение регулярности метрики, являются величинами второго порядка.

Будем исходить из функции Гамильтона

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}\left(-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right) = \mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{9}$$

и выведем из нее уравнения поля, варьируя независимо по $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$. Полученные таким образом уравнения поля имеют вид

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x_{\tau}}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}}\right) = 0, \tag{11}$$

где $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}$ означает производную $\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\tau}}$. Если уравнение (10) умножить на $\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, а уравнение (11) — на $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, то после простого преобразования получается уравнение

$$\delta\mathfrak{H} - \frac{\partial}{\partial x_{\tau}}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) = 0. \tag{12}$$

Это равенство справедливо при произвольных вариациях $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, в том числе и при тех, которые могут быть получены только бесконечно малым преобразованием системы координат (вариация преобразования). При такой вариации $\delta\mathfrak{H} = 0$, поскольку $\mathfrak{H}/\sqrt{-g}$ представляет инвариант и поскольку, согласно уравнениям поля, $\mathfrak{H}$ всюду исчезает. Далее, следует подставить

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\xi^{\sigma}_{,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\xi^{\sigma}_{,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\xi^{\alpha}_{,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\sigma}\xi^{\sigma} - \xi^{\alpha}_{,\mu\nu}, \tag{13}$$

где ξ^{σ} — бесконечно малый вектор (с производными $\xi^{\tau}_{,\alpha}$ и т. д.). Согласно формуле (9), имеем

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}} = -\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta^{\tau}_{\alpha} + \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{\mu\tau}\delta^{\nu}_{\alpha} + \mathfrak{g}^{\nu\tau}\delta^{\mu}_{\alpha}). \tag{14}$$

Принимая во внимание равенства (13) и (14), из (12) получаем уравнение

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\begin{bmatrix}(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau} - \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu,\tau})\xi^{\tau} - \\ -\mathfrak{g}^{\mu\nu}(-\Gamma^{\alpha}_{\tau\nu}\xi^{\tau}_{,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\tau}\xi^{\tau}_{,\nu} + \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\xi^{\alpha}_{,\tau} - \xi^{\alpha}_{,\mu\nu}) + \\ + \mathfrak{g}^{\mu\alpha}(-\Gamma^{\nu}_{\tau\nu}\xi^{\tau}_{,\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\tau}\xi^{\tau}_{,\nu} + \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\xi^{\nu}_{,\tau} - \xi^{\nu}_{,\mu\nu})\end{bmatrix}. \tag{15}$$

Это уравнение, эквивалентное уравнениям поля и представляющее собой основу наших последующих рассуждений, мы несколько преобразуем по причинам, которые выяснятся позднее. Выразим первый из трех членов в скобках в уравнении (15) через $\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha}$ и $\Gamma^\nu_{\mu\nu,\alpha}$. Затем эти производные от Γ при помощи соотношения $\mathfrak{H} = 0$, следующего из уравнения (9) и (10), выразим через сами величины Γ. Тогда первая из трех частей уравнения (15) после простого преобразования принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\xi^\sigma\{(-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{,\sigma}+\Gamma^\nu_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}_{,\sigma})-\delta^\alpha_\sigma(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\tau}-\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\rho\tau})\}+\right.$$
$$\left.+\,\xi^\alpha_{,\sigma}(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}-\mathfrak{g}^{\mu\sigma}\Gamma^\nu_{\mu\nu})-\xi^\sigma_{,\sigma}(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}-\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\mu\nu})\right]. \quad (16)$$

Цель этого преобразования будет ясна позднее.

Полученный результат запишем кратко в следующей форме:

$$\frac{\partial\mathfrak{A}^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (15а)$$

$$\mathfrak{A}^\alpha = \mathfrak{t}^\alpha_\sigma\xi^\sigma + \mathfrak{B}^\alpha, \quad (15б)$$

где

$$\mathfrak{t}^\alpha_\sigma = (-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}_\sigma + \Gamma^\nu_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}_\sigma) - \delta^\alpha_\sigma(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\tau} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\rho\tau}) \quad (15в)$$

и $\mathfrak{B}^\alpha$ — линейная однородная функция первых и вторых производных по координатам, получаемая из (15) и (16). Величина $\mathfrak{t}^\alpha_\sigma$ называется «псевдотензором энергии» гравитационного поля. Закон сохранения энергии гравитационного поля получается из уравнения (15а), если ξ^α считать постоянной.

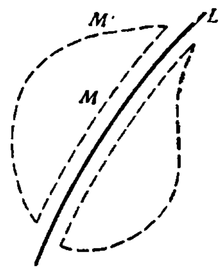


Рис. 2.

Интегрирование уравнения (15а) по свободной от особенностей области дает закон площадей. Поверхностный интеграл от $\mathfrak{A}^\alpha$ по охватывающей эту область (трехмерной) гиперповерхности обращается в нуль, поскольку вспомогательный вектор (ξ^α) может выбираться произвольно (с учетом условий непрерывности). Таким образом, можно сделать так, чтобы выражение $\mathfrak{A}^\alpha$ отличалось от нуля только на некоторой произвольно выбранной части поверхности; с этим в первую очередь связано значение закона для исследования поля в непосредственной близости особой линии.

Пусть мы имеем особую линию L (см. рис. 2). Будем представлять ее в виде конечного отрезка, охваченного бесконечно узкой «оболочкой» M и оболочкой конечной ширины M', которые соединяются по краям таким образом, что вместе они образуют оболочку двусвязного объема, по которому мы интегрируем (15а). Вектор ξ^σ мы выберем так, чтобы он вместе со своими производными не обращался на поверхности в нуль только на очень малых расстояниях от L. Тогда интеграл от $\mathfrak{A}^\alpha$, взятый по M', не обращается в нуль только на той части M', которая подходит к M. При каждом таком выборе ξ^σ можно сделать некоторые заключения о поле, непосредственно окружающем L, т. е. заключения о движении материальных точек.

§ 3. Следствия из интегрального закона

Простейшее следствие, которое можно получить из уравнения (15а), касается равновесия особых точек в стационарном гравитационном поле. Прежде всего за ось x_4 выберем сингулярную линию, для которой первая и вторая производные ξ-вектора обращаются в нуль на внутренней оболочке. Тогда легко можно сделать так, что интегрирование по конечным участкам внешней оболочки дает нуль, поскольку вклады обеих ее концов одинаковы и имеют разные знаки. Интеграл по внутренней оболочке равен нулю сам по себе, а поэтому обращается в нуль и интеграл по пространственно-подобному сечению $x_4 = \text{const}$. Если обозначить через $\mathfrak{t}_\sigma^\alpha$ выражение, стоящее в (16) в фигурных скобках, то трехмерный интеграл

$$\int (\mathfrak{t}_\sigma^1\, ds^{23} + \mathfrak{t}_\sigma^2\, ds^{31} + \mathfrak{t}_\sigma^3\, ds^{12}), \tag{17}$$

взятый по сечению оболочки M, равен нулю для любого σ. Это и есть то самое условие равновесия, которое также получается, если заменить особые точки областью непрерывного потока материи-энергии, как до сих пор давали исследования в общей теории относительности. Таким образом, обычное условие равновесия материальной точки в гравитационном поле остается неизменным при замене материальной точки особенностью. Легко показать, что при добавлении электромагнитных членов это также остается в силе для точечной массы, обладающей зарядом и находящейся под действием гравитационного и электромагнитного полей. Тогда к $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ в выражении (17) добавляются просто компоненты электромагнитного тензора энергии.

Чтобы найти действующую на особую точку силу, выраженную через массу и напряженность внешнего поля, нужно провести некоторые рассуждения, имеющие значение для всей проблемы. Строгие решения уравнений гравитационного поля с нашим сегодняшним аппаратом получить трудно; решения же в первом приближении, напротив, получить легко, поскольку соответствующие дифференциальные уравнения линейны. В этом приближении мы полагаем

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{18}$$

причем $\gamma_{\mu\nu}$ мало по сравнению с единицей, так что квадратами и произведениями $\gamma_{\mu\nu}$ (и ее производных) можно пренебречь; мы назовем $\gamma_{\mu\nu}$ малой величиной первого порядка. Теперь мы знаем, что далеко не все решения таких линейных дифференциальных уравнений соответствуют строгим решениям. Например, существует решение линейного уравнения, которое соответствует покоящейся точечной особенности в однородном гравитационном поле, в то время как строгое решение не имеет такого характера, поскольку нарушаются только что полученные из строгих уравнений условия равновесия. При таком положении вещей возникает вопрос: каким дополнительным условиям должны удовлетворять приближенные решения, чтобы они соответствовали строгому решению?

Во всяком случае мы должны потребовать, чтобы в эти условия не входили второе и более высокие приближения для величин $\gamma_{\mu\nu}$. В этом и заключается причина того, почему нужно было провести преобразование правой части уравнения (15) для получения пригодного условия равновесия. Именно, так как $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ и $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\sigma}$ являются величинами первого порядка малости, то $\mathfrak{t}^{\alpha}_{\sigma}$ — величина второго порядка. Если в выражении для $g_{\mu\nu}$ учесть члены второго порядка, то в $\mathfrak{t}^{\alpha}_{\sigma}$ изменились бы члены третьего порядка, которыми можно пренебречь. Поэтому, несмотря на то, что уравнение (15) и выражение (16) относятся к величинам второго порядка, можно в частном случае равновесия пренебречь величинами второго порядка в $g_{\mu\nu}$. Тогда для $\gamma_{\mu\nu}$ в соотношении (18) можно подставить решение (10) уравнений поля в линейном приближении. В рамках этого приближения поле ($\gamma_{\mu\nu}$) в окрестности особенности можно представить в виде аддитивных «внутренней» $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ и «внешней» $\gamma_{\mu\nu}$ частей. В особой точке $\gamma_{\mu\nu}$ регулярна. Для $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ можно подставить статическое решение, которое мы запишем в форме:

$$\bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{22} = \bar{\gamma}_{33} = -\bar{\gamma}_{44} = -\frac{2m}{r}\left(= -\frac{2m}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right), \tag{19}$$

$$\bar{\gamma}_{\sigma\tau} = 0 \qquad (\text{для } \sigma \neq \tau).$$

При вычислении интеграла (17) следует далее учесть, что вклад могут давать только произведения величин внутреннего поля на величины внешнего поля. Именно относящиеся только к внутреннему полю члены второй степени должны обращаться в нуль из соображений симметрии; члены же, относящиеся только к внешнему полю, не дают вклада в интеграл вследствие того, что поверхность интегрирования мала.

Так как мы уже выбрали квазиэвклидовы координаты, то целесообразно взять в качестве поверхности интегрирования сферу (r = const); тогда интеграл (17) принимает вид

$$\int\left(\mathfrak{t}^1_\sigma \frac{x_1}{r} + \mathfrak{t}^2_\sigma \frac{x_2}{r} + \mathfrak{t}^3_\sigma \frac{x_3}{r}\right) dS. \tag{17a}$$

Вычисление этого интеграла дает $-8\pi m \frac{\partial \bar{\bar{\gamma}}_{44}}{\partial x_\sigma}$. Таким образом приходим к условию равновесия особой точки

$$\frac{\partial \bar{\bar{\gamma}}_{44}}{\partial x_\sigma} = 0. \tag{20}$$

Нетрудно показать, что уравнение геодезической в случае равновесия в стационарном поле в рассматриваемом приближении приводит к тому же самому условию.

Рассмотрим теперь случай, когда особая точка находится в нестационарном поле. Уравнение (15а), как и соответствующий интегральный закон, справедливо и для этого случая. Будем считать особую точку покоящейся, так что ось x_4 опять будет особенностью в четырехмерном пространстве. Далее выберем вектор ξ^α таким образом, чтобы он отличался от нуля только на небольшом участке оболочки M, а на M' всюду был равен нулю. Пусть далее в окрестности оси x_4 вектор ξ^α является постоянным. Так как ξ^α должен обращаться в нуль на пределах интегрирования по времени, то мы уже не можем выбрать его постоянным. Следовательно, $\mathfrak{B}^\alpha$ в соотношении (15б) не исчезает. С этим связаны своеобразные трудности. В то время как второе приближение для $g_{\mu\nu}$ не влияет на $\mathfrak{t}_\sigma^\alpha$, если ограничиваться в $\mathfrak{t}_\sigma^\alpha$ членами второго порядка, то для $\mathfrak{B}^\alpha$ это не так. Например, чтобы получить с учетом величин второго порядка член $\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma_{\tau\nu}^\alpha\ \xi_{,\mu}^\tau$, нужно знать $\Gamma_{\tau\nu}^\alpha$ вплоть до членов второго порядка, т. е. знать точно члены второго порядка для самого $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, поскольку $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ содержит в качестве составной части нулевой порядок ($\delta_{\mu\tau}$). Следовательно, нельзя ограничиться решениями уравнений поля в линейном приближении.

Эту трудность, по-видимому, можно преодолеть следующим образом. Положим

$$\mathfrak{g}_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \bar{\bar{\gamma}}_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}.$$

При этом $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ снова определяется равенствами (19), а $\bar{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}$ относится к внешнему полю и постоянна в окрестности особой точки. Пусть $\varepsilon_{\mu\nu}$ — величина второго порядка, пропорциональная «массе» и внешнему полю. Тогда оказывается, что уравнения гравитационного поля при пренебрежении членами, пропорциональными m^2, и квадратичными членами напряженности внешнего поля ($\bar{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}$), могут быть решены во втором приближении. При этом зависимость $\varepsilon_{\mu\nu}$ от r отлична от r^{-1} (как и для $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$) и имеет характер r^0. Отсюда следует, что член второго порядка $\varepsilon_{\mu\nu}$ не влияет на интеграл от $\mathfrak{B}^\alpha$, взятый по бесконечно узкой оболочке M.

Далее легко показать, что интеграл от $\mathfrak{B}^\alpha$, взятый по оболочке M, равен нулю при соответствующем выборе координат. Последнее очевидно, поскольку $\bar{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}$ обращается в нуль на особой линии — оси x_4 (оси x_1, x_2, x_3 перпендикулярны особой линии, причем масштабы на четырех осях не одинаковы). Предположим далее, что именно для такой (неискривленной) системы координат особенность имеет центрально-симметричный характер, т. е. поле $\bar{\gamma}$ следует вычислять из равенств (19). Эта гипотеза, собственно говоря, не обязательна. Таким путем мы лишь упрощаем расчет, а гипотеза оправдывается тем, что она приводит к обращению в нуль интеграла от $\mathfrak{B}^\alpha$ по M при любом выборе ξ^α.

Ход расчета можно показать на первом члене выражения для $\mathfrak{B}^\alpha$:

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\tau\nu}\xi^\tau_{,\,\mu}.$$

Функции $g_{\mu\nu}$ и $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ (кроме членов, остающихся конечными) ведут себя в окрестности особенности как r^{-1}, величины Γ — как r^{-2}. Только пропорциональная r^{-2} часть величины Γ может давать вклад в наш интеграл. Далее, поскольку нас не интересуют члены, пропорциональные m^2 и квадратичные по $\bar{\bar{\gamma}}$, написанный выше член $\mathfrak{B}^\alpha$ можно заменить на

$$\bar{\bar{\mathfrak{g}}}^{\mu\nu}\bar{\bar{g}}^{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\overline{\tau\ \nu}\\ \beta\end{bmatrix}\xi^\tau_{,\mu}.$$

Здесь сохранены лишь те члены, которые дают конечный вклад в интеграл по бесконечно малой сфере. Благодаря выбранной системе координат последнее выражение записывается в форме

$$\begin{bmatrix}\overline{\tau\ \mu}\\ \alpha\end{bmatrix}\xi^\tau_{,\mu},$$

или в развернутом виде:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{\gamma}_{\tau\alpha}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\bar{\gamma}_{\mu\alpha}}{\partial x_\tau}-\frac{\partial\bar{\gamma}_{\tau\mu}}{\partial x_\alpha}\right)\xi^\tau_{,\mu}.$$

Это выражение нужно умножить на x_α/r и проинтегрировать по поверхности шара. При этом первый член дает конечную величину только при $\alpha=\tau$, $\mu=\alpha$, второй — при $\mu=\alpha$, $\tau=\alpha$, третий — при $\tau=\mu$. В результате интегрирования получаем

$$\frac{8\pi m}{3}\xi^\alpha_{,\alpha}-4\pi m\,(\xi^\alpha_{,\alpha}-\xi^4_{,4}),$$

причем здесь нужно просуммировать по α от 1 до 3.

Если произвести такое вычисление для всех членов $\mathfrak{B}^{\alpha}$, то получим

$$\int \mathfrak{B}^{\alpha} \frac{x_{\alpha}}{r} dS = 16\pi m \xi^{4}_{,4}.$$

Если это выражение проинтегрировать еще по x_4 в пределах, на которых ξ^{α} равны нулю, то интеграл полностью обращается в нуль [3]. Поэтому интеграл по внутренней оболочке M сводится в случае стационарного поля к интегралу от $t^{\alpha}_{\sigma} \xi^{\sigma}$. Отсюда, так же как и выше, заключаем, что движение особой точки описывается геодезической линией, определяемой во «внешнем» поле $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$.

Выводы

Если массы в гравитационном поле рассматривать как особенности, то закон движения полностью определяется уравнениями поля [4]. Если полное поле апроксимировать решениями линейных уравнений соответственного приближения, то законом движения является геодезическая линия. В следующей работе из уравнений поля будет выведен закон движения электрона, рассматриваемого как особая точка.

Однако известно, что в природе не встречаются электрически нейтральные атомные массы, и, следовательно, предмет нашей работы не соответствует непосредственно объектам природы. Достигнутый успех заключается, однако, в том, что впервые показано, что теория поля может содержать в себе теорию механического движения дискретных частиц вещества. Это может иметь значение для теории материи, например для квантовой теории.

Поступила 24 февраля 1927 г.

В этой работе впервые поставлен вопрос, который занимал Эйнштейна до конца его деятельности,— вопрос о связи уравнений поля и уравнений движения (геодезической).

---

[3] Последние члены второй и третьей строк правой части уравнения (15) обращаются в нуль, поскольку они вообще не дают вклад типа r^{-2} в интеграл.

[4] Правда, в настоящей работе это доказано полностью только для случая равновесия.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ*

В недавно вышедшей нашей с Я. Громмером работе [1] исследован вопрос, может ли определяться закон движения особенностей уравнениями поля общей теории относительности [2]. При этом оказалось, что закон геодезической линии, до сих пор постулировавшийся (дополненный электромагнитными силами), в статическом и стационарном случае может быть выведен из уравнений поля. Однако оказалось также, что эти выводы нельзя перенести без дополнительных гипотез на случай, когда окружающее особенность поле нестационарно. При этом о характере особенности, находящейся во внешнем поле, нужно сделать дополнительные гипотезы, которые нельзя обосновать. Этот результат представляет интерес с точки зрения общего вопроса, противоречит ли теория поля постулатам квантовой теории. Большинство физиков сейчас убеждено, что существование квантов исключает теорию поля в обычном смысле. Однако это убеждение основано на недостаточном знании следствий теории поля. Поэтому дальнейшее исследование выводов теории поля относительно движения особенностей кажется мне оправданным, несмотря на преимущество количественных результатов, полученных квантовой механикой.

Ниже будет показано, что теория поля определяет закон движения, если в первом приближении задан характер особенности. В случае статической и центрально-симметричной особенности получается закон геодезической, дополненный электромагнитными силами.

---

* *Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 235—245.

[1] Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1927, 3—13 (Статья 85.— *Ред.*).

[2] Г. Вейль в последнем издании своей книги «Пространство, время, материя» уже раньше высказал мнение, что элементарные частицы следует рассматривать как особенности поля. Там же он пытается исследовать уравнения движения с этой точки зрения.

Правда, этот результат получен при пренебрежении величинами третьего порядка, так что нет полной уверенности в том, соответствуют ли наши возможные решения какому-нибудь точному решению. Зато применяемый метод прост и понятен.

§ 1. Основные положения и метод

За основу берутся уравнения поля общей теории относительности в форме

$$R_{i\varkappa} - \frac{1}{2} g_{i\varkappa} R + T_{i\varkappa} = 0, \tag{1}$$

где $R_{i\varkappa}$ — тензор Римана второго ранга,

$$R_{i\varkappa} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i\varkappa}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}}{\partial x_{\varkappa}} + \Gamma^{\alpha}_{i\beta}\Gamma^{\beta}_{\varkappa\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i\varkappa}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

где R — скаляр, а $T_{i\varkappa}$ — максвелловский тензор энергии электромагнитного поля

$$T_{i\varkappa} = \frac{1}{4} g_{i\varkappa}\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} - \varphi_{i\alpha}\varphi^{\varkappa\alpha}. \tag{3}$$

Эти уравнения дополняются еще максвелловскими уравнениями поля

$$\frac{\partial f^{i\varkappa}}{\partial x_{\varkappa}} = 0, \tag{4}$$

являющимися, как известно, следствием уравнений (1). Так как скаляр T, определяемый выражением (3), равен нулю, то уравнение (1) можно заменить следующим:

$$R_{i\varkappa} + T_{i\varkappa} = 0. \tag{1a}$$

Попытаемся найти решение этих уравнений, бесконечно близкое к центрально-симметричному статическому решению с точечной особенностью и соответствующее случаю движения электрона в слабом внешнем поле. Искомое решение должно иметь вид

$$\left.\begin{aligned} g_{i\varkappa} &= -\delta_{i\varkappa} + \lambda\overline{g}_{i\varkappa} + \lambda^2\overline{\overline{g}}_{i\varkappa} + \cdots \\ \varphi_i &= \lambda\overline{\varphi}_i + \lambda^2\overline{\overline{\varphi}}_i + \cdots \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Будем предполагать сходимость такого разложения [3] и ограничимся ис-

---

[3] Эта форма разложения предполагает выбор мнимой координаты x_4.

следованием величин первого и второго порядков, причем величину $\delta_{i\varkappa}$, равную единице при $i = \varkappa$ и 0 — при $i \neq \varkappa$, будем рассматривать как величину нулевого порядка. Величина ϕ_i представляет собой электромагнитный потенциал, т. е.

$$\phi_{i\varkappa} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\varkappa} - \frac{\partial \phi_\varkappa}{\partial x_i}.$$

Подставляя решение (5) в уравнения (1) и (4), получаем для каждого порядка величин (т. е. для каждой степени постоянной λ) систему дифференциальных уравнений. Нас интересуют только системы, соответствующие первому и второму порядкам величин. Чтобы получить их в наглядной форме, заметим прежде всего, что с точностью до величин второго порядка выражение для $\Gamma^\alpha_{i\varkappa}$ имеет вид

$$\Gamma^\alpha_{i\varkappa} = g^{\alpha\beta}\begin{bmatrix} i\varkappa \\ \beta \end{bmatrix} = (-\delta_{\alpha\beta} - \lambda\overline{g}_{\alpha\beta})\left\{\lambda\begin{bmatrix} \overline{i\varkappa} \\ \beta \end{bmatrix} + \lambda^2\begin{bmatrix} \overline{\overline{i\varkappa}} \\ \beta \end{bmatrix}\right\};$$

это выражение в том же приближении можно заменить на

$$-\lambda\begin{bmatrix} \overline{i\varkappa} \\ \alpha \end{bmatrix} - \lambda^2\left(\overline{g}_{\alpha\beta}\begin{bmatrix} \overline{i\varkappa} \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\overline{i\varkappa}} \\ \alpha \end{bmatrix}\right),$$

где $[\,\overline{}\,]$ и $[\,\overline{\overline{}}\,]$ означают символы Кристоффеля, образованные соответственно из величин $\overline{g}_{i\varkappa}$ и $\overline{\overline{g}}_{i\varkappa}$.

С учетом этого выражение (2) для тензора Римана принимает вид

$$\begin{aligned} R_{i\varkappa} = \lambda\left\{\begin{bmatrix} \overline{i\varkappa} \\ \alpha \end{bmatrix}_\alpha - \begin{bmatrix} \overline{i\alpha} \\ \alpha \end{bmatrix}_\varkappa\right\} + \lambda^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\overline{g}_{\alpha\beta}\begin{bmatrix} \overline{i\varkappa} \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\overline{i\varkappa}} \\ \alpha \end{bmatrix}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\left(\overline{g}_{\alpha\beta}\begin{bmatrix} \overline{i\alpha} \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\overline{i\alpha}} \\ \alpha \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} \overline{i\alpha} \\ \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{\varkappa\beta} \\ \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \overline{i\varkappa} \\ \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{\alpha\beta} \\ \beta \end{bmatrix}\right\}, \end{aligned} \tag{2a}$$

где индексы у квадратных скобок обозначают обычное дифференцирование по x_α (или по $x_\varkappa$). Существенно, что в это выражение $\overline{\overline{g}}_{i\varkappa}$ входит только линейно. Далее тензор $T_{i\varkappa}$ с требуемой точностью можно записать в форме

$$T_{i\varkappa} = \lambda^2\left(-\frac{1}{4}\delta_{i\varkappa}\overline{\phi}^2_{\alpha\beta} + \overline{\phi}_{i\alpha}\overline{\phi}_{\varkappa\alpha}\right). \tag{3a}$$

Из формулы (2a) видно, что в уравнении (1) линейный оператор

$$L_{i\varkappa} = \begin{bmatrix} i\varkappa \\ \alpha \end{bmatrix}_\alpha - \begin{bmatrix} i\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}_\varkappa \tag{6}$$

играет двоякую роль. Принимая во внимание формулы (2а), (3а) и (6), вместо уравнения (1) получаем две системы:

$$\overline{L}_{i\varkappa} = 0, \tag{7}$$

$$\overline{\overline{L}}_{i\varkappa} + \overline{Q}_{i\varkappa} = 0. \tag{8}$$

Символы $\overline{L}_{i\varkappa}$ и $\overline{\overline{L}}_{i\varkappa}$ означают применение линейного оператора (6) к величинам $\overline{g}_{i\varkappa}$ или $\overline{\overline{g}}_{i\varkappa}$. Для оператора $\overline{Q}_{i\varkappa}$, принимая во внимание формулы (2а), (3а) и (7), получаем выражение:

$$Q_{i\varkappa} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\overline{g}_{\alpha\beta}\overline{\begin{bmatrix} i\,\varkappa \\ \beta \end{bmatrix}}\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\left(\overline{g}_{\alpha\beta}\overline{\begin{bmatrix} i\,\alpha \\ \beta \end{bmatrix}}\right) + \overline{\begin{bmatrix} i\,\alpha \\ \beta \end{bmatrix}}\,\overline{\begin{bmatrix} \varkappa\,\beta \\ \alpha \end{bmatrix}} - \overline{\begin{bmatrix} i\,\varkappa \\ \alpha \end{bmatrix}}\,\overline{\begin{bmatrix} \alpha\,\beta \\ \beta \end{bmatrix}} + \left(-\frac{1}{4}\delta_{i\varkappa}\overline{\varphi}^2_{\alpha\beta} + \overline{\varphi}_{i\alpha}\,\overline{\varphi}_{\varkappa\alpha}\right). \tag{9}$$

Уравнения Максвелла (4) в дальнейшем будут нужны нам только в первом приближении, поскольку в выражения (8) и (9) входит только $\overline{\varphi}$ (и не входит $\overline{\overline{\varphi}}$) и поскольку, как я убедился, уравнения (4) всегда выполняются во втором приближении без существенных условий, накладываемых на законы движения. Таким образом, вместо уравнений (4) можно записать

$$\left.\begin{aligned} \square\overline{\varphi}_i &= 0, \\ \frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial x} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Проделанное до сих пор является лишь преобразованием уравнений гравитационного поля. Дальнейшее исследование основывается на уравнениях (7) и (8) и может быть охарактеризовано следующим образом. Определим величины $\overline{g}_{i\varkappa}$ и $\overline{\varphi}_i$ в соответствии с уравнениями (7) и (10), причем найдем решение с точечной, центрально-симметричной сингулярностью и внешними гравитационными и электромагнитным полями. Это решение определит также оператор $\overline{Q}_{i\varkappa}$ в уравнении (8). Главный вопрос, который возникает теперь: каким условиям должно удовлетворять решение $\overline{g}_{i\varkappa}$, $\overline{\varphi}_i$ в первом приближении, чтобы существовала величина $\overline{\overline{g}}_{i\varkappa}$, не обладающая новыми особенностями, в частности регулярная в окрестности особой точки?

Прежде чем ответить на этот вопрос, найдем решение в первом приближении и выберем для нашего рассмотрения соответствующую систему координат.

§ 2. Первое приближение

В первом приближении искомое поле с особенностью определяется системой уравнений (7) и (10). Для решений этих уравнений справедлив принцип суперпозиции. Кроме того, известно, что в этом приближении еще отсутствует взаимодействие между гравитационным (или инерционным) воздействием, с одной стороны, и электромагнитным воздействием, с другой. Это приводит прежде всего к тому, что как гравитационное, так и электромагнитное поле складывается из «внутреннего» поля электрона с особенностью и «внешнего» без особенности. При этом в отсутствие внешнего поля внутреннее поле было бы по предположению центрально-симметрично (в системе координат, движущейся с электроном). При наличии же внешнего поля следует ожидать отклонений от центральной симметрии внутреннего поля. Однако в первом приближении эти отклонения как величины второго порядка можно не принимать во внимание.

Систему координат сначала выберем так, чтобы ось x_4 постоянно двигалась вместе с особенностью и при пренебрежении внутренним гравитационным полем для этой оси было справедливо соотношение

$$dx_4 = j ds \qquad (j = \sqrt{-1}), \tag{11}$$

где ds — метрический элемент длины в отсутствие внутреннего поля.

Относительно системы координат условимся далее, что на оси x_4 должны обращаться в нуль все пространственные производные, кроме производных от g_{44}, и что все остальные компоненты на ней должны быть равны— $\delta_{\mu\nu}$ [4]. Наконец, координатная система может быть выбрана так, что в *конечной* области значения величин $g_{\mu\nu}$ только бесконечно мало отличаются от — $\delta_{\mu\nu}$.

Учитывая это, можно записать внешнее гравитационное поле,

---

[4] Это нетрудно показать. Пусть это условие не выполняется для некоторой системы X' [однако условие (11) выполнено]. Выполним преобразование

$$x'_\mu = c_{\mu a}x_a + c_{\mu ab}x_a x_b + \cdots; \; x'_4 = x_4 + c_{4a}x_a + c_{4ab}x_a x_b + \cdots,$$

где a и b — только пространственные индексы (1—3). При вычислении $g_{\mu\nu}$ и $\frac{dg_{\mu\nu}}{dx_\sigma}$ на оси x_4, соответствующих штрихованным величинам, появляются (зависящие от x_4) коэффициенты c (кроме того, и сами производные по времени), т. е. 36 функций времени, которыми мы можем распоряжаться. Данное же выше координатное условие содержит 9 + 27 = 36 требований, которые и могут быть удовлетворены соответствующим выбором коэффициентов c.

т. е. соответствующую ему часть $\bar{g}_{i\varkappa}$, в форме

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_l x_l \end{matrix}\right\}. \tag{12}$$

Здесь величины a_l $(l = 1, 2, 3)$ не должны зависеть от пространственных координат; зависимость же от времени может быть произвольной. Это выражение для $\bar{g}_{i\varkappa}$ удовлетворяет уравнению (7). Оно может отличаться от реального внешнего поля лишь членами, соответствующими *неоднородности* внешнего гравитационного поля. Мы не будем исследовать влияния этой неоднородности на движение особенности.

Внутреннее гравитационное поле будем считать центрально-симметричным, что в *первом приближении* оказывается достаточно точным. Как известно, уравнению (7) удовлетворяют следующие значения $\bar{g}_{\mu\nu}$ [5]:

$$\left.\begin{matrix} -\frac{m}{4\pi\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m}{4\pi\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{4\pi\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{m}{4\pi\nu} \end{matrix}\right\}. \tag{13}$$

Сумма выражений (12) и (13) с достаточной точностью представляет собой компоненты $\bar{g}_{\mu\nu}$ полного гравитационного поля вблизи особой точки, т. е. при малых x_1, x_2, x_3.

Электрическое поле в окрестности особенности, в полном согласии с уравнением (10), можно в первом приближении представить в виде

$$\left.\begin{array}{cccccc} \bar{\Phi}_{23} & \bar{\Phi}_{31} & \bar{\Phi}_{12} & \bar{\Phi}_{14} & \bar{\Phi}_{24} & \bar{\Phi}_{34} \\ \hline \mathfrak{h}_x & \mathfrak{h}_y & \mathfrak{h}_z & -je_x & -je_y & -je_z \\ 0 & 0 & 0 & -j\frac{\varepsilon x_1}{4\pi\nu^3} & -j\frac{\varepsilon x_2}{4\pi\nu^3} & -j\frac{\varepsilon x_3}{4\pi\nu^3} \end{array}\right\}, \quad (j = \sqrt{-1}), \tag{14}$$

---

[5] Единицы m и ε выбраны таким образом, что гравитационная постоянная и коэффициент при плотности тока в уравнениях Максвелла равны 1.

причем первая строчка относится к внешнему полю, а вторая — к внутреннему. Для того, чтобы внешнее поле удовлетворяло уравнениям (10), его компоненты должны соответствующим образом зависеть от координат x_1, x_2, x_3, если зависимость от четвертой координаты x_4 задана. При этом мы опять не касаемся вопроса о влиянии пространственной неоднородности внешнего поля на движение особенности.

После того как мы в первом приближении нашли полное поле в окрестности особой точки, оператор $\overline{Q}_{i\varkappa}$, входящий в уравнение (8), можно вычислить из формулы (9). При этом появляются члены трех видов:

1) квадратичные по внешнему полю,
2) квадратичные по внутреннему полю и
3) с произведениями компонент внутреннего и внешнего полей.

В соответствии с этим, выражение для $\overline{Q}_{i\varkappa}$ распадается на три слагаемых. Так как $L_{i\varkappa}$ линейно по $\overline{\overline{g}}_{i\varkappa}$, то и компоненты $\overline{\overline{g}}_{i\varkappa}$ составлены аддитивно из трех систем. Первая из этих систем соответствует случаю отсутствия внешнего поля, вторая — случаю отсутствия особенности. Только третья соответствует одновременному наличию внешнего и внутреннего полей. Только она и имеет значение для решения проблемы движения. Поэтому в выражении для $\overline{Q}_{i\varkappa}$ следует учитывать только «смешанные» члены. С учетом этого замечания из формулы (9) вместе с выражениями (12), (13), (14) следует

$$8\pi\overline{Q}_{st} = \frac{3}{2}\,\delta_{st}\,\frac{m a_l x_l}{r^3} - 3\,\frac{m x_s x_t a_l x_l}{r^5} + \frac{2\varepsilon}{r^3}\left(\delta_{st}\mathfrak{e}_l x_l - \mathfrak{e}_s x_t - \mathfrak{e}_t x_s\right), \qquad (15)$$

$$8\pi\overline{Q}_{14} = j\,\frac{\varepsilon}{r^3}\left(x_2\mathfrak{h}_3 - x_3\mathfrak{h}_2\right),$$

$$8\pi\overline{Q}_{44} = \frac{3}{2}\,\frac{m a_l x_l}{r^3} - \frac{2\varepsilon}{r^3}\,\mathfrak{e}_l x_l.$$

Здесь индексы l, s, t принимают только *пространственные* значения. После такого предварительного рассмотрения из уравнения (8) можно получить следствия.

§ 3. Второе приближение

Если ввести сокращение

$$\overline{\overline{g}}_{i\varkappa} - \frac{1}{2}\,\delta_{i\varkappa}\overline{\overline{g}}_{\alpha\alpha} \equiv \overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}, \qquad (16)$$

то уравнение (8) принимает вид

$$-\Box\overline{\overline{g}}_{i\varkappa} + \frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\left(\frac{\partial\overline{\overline{\gamma}}_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\overline{\overline{\gamma}}_{\varkappa\alpha}}{\partial x_\alpha}\right) = -2Q_{i\varkappa}, \qquad (17)$$

где $\square$ обозначает оператор $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\right)$. Далее, если уравнения (17) выполняются, то они будут выполняться и в том случае, когда к величинам $\bar{\bar{g}}_{i\varkappa}$ прибавить выражения $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} + \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial x_i}$, где четыре функции ξ_i произвольны. Отсюда следует, что величины $\bar{\bar{g}}_{i\varkappa}$ могут быть нормированы так, чтобы выполнялось уравнение

$$\frac{\partial \bar{\bar{\gamma}}_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{18}$$

Тогда вместо уравнения (17) получим

$$\square \bar{\bar{g}}_{i\varkappa} = 2\overline{Q}_{i\varkappa}. \tag{19}$$

Это «расщепление» уравнения (17) на уравнения (18) и (19), связанное теснейшим образом с известным свойством дивергенции тензора $R_{i\varkappa} - {}^1/_2\, g_{i\varkappa} R$, имеет для нашего исследования решающее значение. В самом деле, уравнения (18) и (19) «переопределяют» величины $\bar{\bar{g}}_{i\varkappa}$ в том смысле, что из выполнения уравнения (19) еще не следует выполнение уравнения (18), так что уравнение (18) содержит некое дополнительное условие, которое выполняется отнюдь не автоматически.

Введем следующее сокращение:

$$\overline{S}_{i\varkappa} = \overline{Q}_{i\varkappa} - \frac{1}{2}\,\delta_{i\varkappa}\overline{Q}_{\alpha\alpha}. \tag{20}$$

Тогда уравнение (19) принимает вид

$$\square \bar{\bar{\gamma}}_{i\varkappa} = 2\overline{S}_{i\varkappa}. \tag{21}$$

Теперь вся проблема сводится к вопросу, какой должна быть величина $S_{i\varkappa}$, чтобы существовала величина $\bar{\bar{\gamma}}_{i\varkappa}$, удовлетворяющая уравнениям (21) и (18) и регулярная всюду в окрестности особой точки.

Из уравнений (18) и (21) прежде всего следует, что

$$\frac{\partial S_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa} = 0. \tag{22}$$

Это уравнение выполняется в окрестности особенности, в чем можно убедиться с помощью формулы (15). Кроме того, можно показать, что уравнение (22) всегда выполняется, если справедливы уравнения поля в первом приближении. Обозначая для краткости

$$\overline{L}_{i\varkappa} - \frac{1}{2}\,\delta_{i\varkappa}\overline{L} \text{ через } \overline{M}_{i\varkappa}, \text{ а } \bar{\bar{L}}_{i\varkappa} - \frac{1}{2}\,\delta_{i\varkappa}\bar{\bar{L}} \text{ — через } \bar{\bar{M}}_{i\varkappa},$$

с точностью до величин второго порядка получаем [6]

$$R_{i\varkappa}-\frac{1}{2}g_{i\varkappa}R+T_{i\varkappa}=\overline{M}_{i\varkappa}+\overline{\overline{M}}_{i\varkappa}+\overline{S}_{i\varkappa}.$$

Уравнения гравитационного поля в первом приближении имеют вид:

$$\overline{M}_{i\varkappa}=0.$$

Далее, уравнения электромагнитного поля выполняются в первом приближении; из этого следует равенство нулю дивергенции тензора $T_{i\varkappa}$ во втором приближении. Так как дивергенция $R_{i\varkappa}-\frac{1}{2}g_{i\varkappa}R$ равна нулю тождественно, то, следовательно, обращается в нуль (вообще говоря, ковариантная) дивергенция величины второго порядка, $\overline{\overline{M}}_{i\varkappa}+\overline{S}_{i\varkappa}$. С точностью до величин второго порядка эту дивергенцию можно заменить на $\frac{\partial(\overline{\overline{M}}_{i\varkappa}+\overline{S}_{i\varkappa})}{\partial x_\varkappa}$, или, поскольку $\frac{\partial\overline{\overline{M}}_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}$ тождественно равна нулю, на $\frac{\partial S_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}$. Таким образом выполнение уравнений поля в первом приближении влечет за собой обращение в нуль $\frac{\partial\overline{S}_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}$.

Прежде чем исследовать второе приближение, мы должны остановиться на одной принципиальной трудности вычислений. Метод приближения, согласно уравнениям (8), предполагает во всяком случае конечность величин $g_{i\varkappa}$, $\overline{g}_{i\varkappa}, \ldots$ и т. д. Это условие в нашей задаче, однако, нарушено, так как в точке $x_1=x_2=x_3=0$ имеется особенность. Можно подумать, что разложение, подобное (5), вообще неприменимо для обсуждения нашей проблемы.

С этим связано следующее обстоятельство. Пусть по уравнениям (18) и (21) вычисляется второе приближение, наряду с функциями $\overline{g}_{i\varkappa}$, $\overline{\varphi}_{i\varkappa}$ и $\overline{S}_{i\varkappa}$ оно сингулярно на оси x_4. Тогда уравнения (18) и (21) определяют его не однозначно, поскольку к этому, второму приближению можно добавить выражение, удовлетворяющее уравнениям

$$\frac{\partial\overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}=0,\qquad \frac{\partial^2\overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa^2}=0.$$

Поскольку такие решения существуют, мы не можем заключить, что и они имеют особенности на оси x_4. Аналогично обстоит дело и с более высокими приближениями. Следовательно, при таком методе вычисления более высокое приближение не определяется однозначно более низким.

[6] Для простоты мы положили λ равной 1.

Однако эту трудность можно обойти следующим образом. Предположим, что функции $\overline{g}_{i\varkappa}$ и $\overline{\phi}_i$ всюду регулярны; тогда можно потребовать также регулярности более высоких приближений; в частности, из уравнения (21) можно получить выражение $\overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}$ в виде запаздывающего потенциала. Вообще говоря, можно было бы все время выражать следующее более высокое приближение в виде запаздывающего потенциала, т. е. в регулярном виде. В этом случае не было бы причин сомневаться в сходимости разложения (5)[7].

Найдем теперь второе приближение, исходя не из $\overline{g}_{i\varkappa}$ и $\overline{\phi}_i$, а из всюду регулярных функций $\overline{g}^*_{i\varkappa}$, $\overline{\phi}^*_i$, определяемых следующим образом.

1) Они совпадают с функциями $\overline{g}_{i\varkappa}$ и $\overline{\phi}_i$ вне поверхности сферы очень малого радиуса r_0 с центром в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

2) Они регулярны внутри сферы и совпадают с функциями $\overline{g}_{i\varkappa}$ и $\overline{\phi}_i$ на ее поверхности.

Будем считать, что такую замену мы сделали во всех особых точках рассматриваемой системы. От величин $\overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}$ мы потребуем следующее:

1. Они удовлетворяют уравнению

$$\Box \overline{\overline{\gamma}}^*_{i\varkappa} = 2\overline{S}^*_{i\varkappa} \tag{21a}$$

во всем пространстве.

2. Они удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \overline{\overline{\gamma}}^*_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa} = 0 \tag{18a}$$

вне поверхности сферы.

Если теперь перейти к пределу $r_0 = 0$, то $\overline{\overline{\gamma}}^*_{i\varkappa}$ переходит в искомое $\overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}$. Сначала мы получаем

$$\gamma^*_{i\varkappa} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\overline{S}^*_{i\varkappa}(t-\rho)}{\rho}\, dV, \tag{22}$$

где dV — пространственный элемент объема, ρ — пространственное расстояние от него до точки наблюдения.

Для каждой из четырех координат x_α из соотношения (22) следует

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\int \frac{\overline{S}^*_{i\varkappa}(t-\rho)}{\rho}\, dV\right\} = \frac{1}{\rho}\int \frac{\partial \overline{S}^*_{i\varkappa}}{\partial x_\alpha}(t-\rho)\, dV,$$

[7] В выборе *запаздывающего* потенциала как решения волнового уравнения имеется, впрочем, произвол (выбор *одного* знака времени). Ранее на это уже указывал Ритц. Без этого произвола, однако, теория Максвелла обойтись не может.

т. е.

$$\frac{\partial \overline{\overline{\gamma}}^*_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\left|\frac{\partial \overline{S}^*_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}\right|}{\rho}\, dV, \tag{23}$$

где вертикальные линии означают, что в $\frac{\partial \overline{S}^*_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}$ нужно произвести замену аргумента t на $(t-\rho)$. Теперь нужно показать, что правая часть соотношения (23) обращается в нуль вне сферы радиуса r_0. Так как вне сферы величина $\overline{S}^*_{i\varkappa}$ совпадает с $\overline{S}_{i\varkappa}$, то, поскольку подынтегральное выражение обращается в нуль, нужно интегрировать только по внутреннему объему сферы. Так как далее нам нужно знать предел при $r_0 = 0$, то ρ можно заменить на r — расстояние точки наблюдения от особенности[8]. Поэтому интеграл переходит в

$$\frac{1}{r}\int\left|\frac{\partial S^*_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}\right| dV.$$

Мы сделаем небольшую ошибку, если будем вычислять запаздывание не по отношению к элементу интегрирования, а по отношению к центру сферы; тогда получим

$$\frac{1}{r}\left|\int \frac{\partial \overline{S}^*_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa} dV\right|.$$

При интегрировании по объему сферы, согласно теореме Гаусса[9], с учетом, что на поверхности сферы $\overline{S}^*_{i\varkappa} = \overline{S}_{i\varkappa}$, получаем

$$\frac{1}{r}\left|\int \overline{S}_{i\varkappa}\frac{x_\varkappa}{r}\, dS\right| = -\frac{|A_i|}{r}, \tag{24}$$

где A_i является функцией *только одного* аргумента $(t-r)$. Наконец, для окрестности рассматриваемой особой точки получаем

$$\frac{\partial \overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa} = -\frac{|A_i|}{2\pi r}. \tag{25}$$

---

[8] Интегрирование по прочим особенностям дает для непосредственной окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ пренебрежимо малый вклад.

[9] Интеграл от $\frac{S^*_{i4}}{\partial x_4}$, согласно формулам (15) и (20), не дает вклада.

Уравнение (18) дает теперь

$$A_i = -\int S_{i\varkappa} \frac{x_\varkappa}{r} dS = 0. \tag{26}$$

В соответствии с формулами (24), (20) и (15) это означает, что

$$A_i = a_i m + e_i \varepsilon = 0. \tag{26a}$$

Эта формула в применении к особой точке показывает, что сумма пондеромоторных сил тяжести и электромагнитного поля должна равняться нулю. Ясно, что формула (26а) эквивалентна известным уравнениям движения электрона, которые в общековариантной записи имеют вид

$$A_i = m\left(g_{i\alpha}\frac{d^2x_\alpha}{ds^2} + \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ & i \end{bmatrix}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}\right) + \varepsilon\phi_{i\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}. \tag{26б}$$

Таким образом показано, что постулировавшийся до сих пор закон движения является следствием уравнений поля, если в основу рассмотрения положить точечную особенность статического характера. Однако еще не показано, что такого вида особенности уравнений поля могут описывать *все* движения, удовлетворяющие условию (26б).

По-видимому, при рассмотрении более высоких приближений будут получены дальнейшие ограничивающие условия.

Хотя это исследование и не дает ничего для понимания квантовых явлений, достаточно важен сам результат, что закон движения особенностей и уравнения поля связаны друг с другом.

87

ГЕОМЕТРИЯ РИМАНА С СОХРАНЕНИЕМ ПОНЯТИЯ „АБСОЛЮТНОГО“ ПАРАЛЛЕЛИЗМА*

В геометрии Римана, которая дала возможность физического описания гравитационного поля в общей теории относительности, совершенно отсутствуют понятия, которые можно было бы сопоставить с электромагнитным полем. Поэтому физики-теоретики, надеясь построить логическую теорию, объединяющую с одной точки зрения все физические поля, стремятся найти такие естественные обобщения геометрии Римана, в которых содержится больше понятий, чем в последней. Эти стремления привели меня к теории, которая заслуживает опубликования независимо от попыток придать ей физический смысл, поскольку она представляет определенный интерес уже в силу естественности введенных в ней понятий.

Геометрия Римана характеризуется как тем, что в бесконечно малой окрестности всякой точки P сохраняется эвклидова метрика, так и тем, что можно сравнивать между собой длины двух линейных элементов, принадлежащих двум расположенным на конечном расстоянии точкам P и Q. В противоположность этому понятие параллельности двух таких линейных элементов отсутствует; понятия направленности для конечного расстояния не существует. Излагаемая ниже теория характеризуется тем, что в ней кроме метрики Римана вводится еще «направленность», или «равнонаправленность», или «параллелизм» для конечного расстояния. В соответствии с этим, кроме инвариантов и тензоров геометрии Римана, появляются новые инварианты и тензоры.

§ 1. Поле n-подов и метрика

Представим себе, что в каждой точке P n-мерного континуума построен ортогональный n-под из n единичных векторов, образующий локальную систему координат. Обозначим через A_a компоненты линейного

* *Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1928, 217—221.

элемента или другого вектора, отнесенные к этой локальной системе (n-поду). Для описания конечной области введем еще гауссову систему координат x^ν. Обозначая ν-компоненты вектора (A) относительно этой второй системы координат через A^ν и ν-компоненты единичных векторов, составляющих n-под, через h_a^ν, имеем [1]

$$A^\nu = h_a^\nu A_a. \tag{1}$$

Обратное соотношение, если обозначить через $h_{\nu a}$ нормированные миноры величин h_a^ν, имеет вид

$$A_a = h_{\mu a} A^\mu. \tag{1a}$$

Тогда, вследствие эвклидовости бесконечно малых областей, для длины вектора (A) справедлива формула

$$A^2 = \sum A_a^2 = h_{\mu a} h_{\nu a} A^\mu A^\nu. \tag{2}$$

Следовательно, компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ представляются в виде

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu a} h_{\nu a}, \tag{3}$$

где, конечно, по a производится суммирование. При данном a величины h_a^μ образуют контравариантный вектор. Далее выполняются соотношения

$$h_{\mu a} h_a^\nu = \delta_\mu^\nu, \tag{4}$$

$$h_{\mu a} h_b^\mu = \delta_{ab}, \tag{5}$$

причем $\delta = 1$ или $\delta = 0$ в зависимости от того, одинаковые оба индекса или разные. Справедливость соотношений (4) и (5) вытекает из приведенного выше определения $h_{\mu a}$ как нормированных миноров величин h_a^μ. Векторный характер величин $h_{\mu a}$ проще всего доказывается тем, что левая, а следовательно, и правая, части равенства (1a) инвариантны относительно произвольных преобразований координат при любом выборе вектора (A).

Поле n-подов определяют n^2 функций h_a^μ, тогда как метрику Римана определяют только $\frac{n(n+1)}{2}$ величин $g_{\mu\nu}$. В соответствии с соотношением (3) метрика определяется полем n-подов, но не наоборот.

[1] Индексы, относящиеся к координатам, мы обозначаем греческими буквами, а индексы n-подов (n-мерных ортогональных реперов.— *Ред.*) — латинскими.

§ 2. «Абсолютный» параллелизм и инвариантность относительно вращения

Поле n-подов обеспечивает сразу и существование метрики Римана и «абсолютный» («далекий») параллелизм. Действительно, если (A) и (B) — два вектора в точках P и Q (по отношению к своим локальным n-подам) — обладают одинаковыми соответственными локальными координатами (т.е. $A_a = B_a$), то они будут равными [вследствие формулы (2)] и «параллельными».

Рассматривая в качестве наиболее существенных, т. е. имеющих объективное значение, свойств только метрику и абсолютный параллелизм, мы видим, что поле n-подов определяется ими еще не полностью. В самом деле, метрика и параллелизм не изменяются, если n-поды во всех точках континуума заменяются на другие n-поды, получаемые из первоначальных n-подов вращением. Будем называть это свойство поля n-подов инвариантностью относительно вращения и дадим определение: реальный смысл могут иметь только те математические соотношения, которые будут ковариантными относительно вращения.

Таким образом, для фиксированной системы координат при заданной метрике и заданном соотношении параллельности величины h_a^μ определяются еще не полностью; возможна еще замена h_a^μ, соответствующая инвариантности относительно вращения, т. е. преобразованию

$$\overset{*}{A}_a = d_{am} A_m, \tag{6}$$

где коэффициенты d_{am} выбираются ортогональными и независимыми от координат. Пусть (A_a) — произвольный вектор, отнесенный к локальной системе, и $(\overset{*}{A}_a)$ — вектор, отнесенный к повернутой локальной системе. В соответствии с соотношением (1a) из уравнения (6) получаем

$$\overset{*}{h}_{\mu a} A^\mu = d_{am} h_{\mu m} A^\mu,$$

или

$$\overset{*}{h}_{\mu a} = d_{am} h_{\mu m}, \tag{6a}$$

причем

$$d_{am} d_{bm} = d_{ma} d_{mb} = \delta_{ab}, \tag{6б}$$

$$\frac{\partial d_{am}}{\partial x^\nu} = 0. \tag{6в}$$

Тогда, согласно постулату инвариантности относительно вращения, имеют смысл только такие соотношения, в которых величины h переходят в величины h^* того же типа, если эти величины h^* вводятся с помощью уравнений (6) и т. д. Иначе говоря, поля n-подов, получаемые при локально равномерном вращении, эквивалентны.

Закон бесконечно малого параллельного переноса вектора при переходе от точки (x^ν) к соседней точке $(x^\nu + dx^\nu)$ характеризуется, очевидно, уравнением

$$dA_a = 0, \tag{7}$$

т. е. уравнением

$$0 = d(h_{\mu a}A^\mu) = \frac{\partial h_{\mu a}}{\partial x^\sigma} A^\mu dx^\sigma + h_{\mu a} dA^\mu = 0.$$

Умножая это уравнение на h_a^ν и учитывая соотношение (5), получаем

$$dA^\nu = -\Delta^\nu_{\mu\sigma} A^\mu dx^\sigma,$$

где

$$\Delta^\nu_{\mu\sigma} = h^{\nu a} \frac{\partial h_{\mu a}}{\partial x^\sigma}. \tag{7a}$$

Этот закон параллельного переноса является ковариантным относительно вращения и несимметричным по нижним индексам коэффициентов $\Delta^\nu_{\mu\sigma}$. При переносе вектора (A) по замкнутому пути, в соответствии с этим законом, упомянутый вектор переходит сам в себя. Это значит, что образованный из коэффициентов переноса $\Delta^\nu_{\sigma\mu}$ тензор Римана

$$R^i_{k,\,lm} = -\frac{\partial \Delta^i_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Delta^i_{km}}{\partial x^l} + \Delta^i_{\alpha l}\Delta^\alpha_{km} - \Delta^i_{\alpha m}\Delta^\alpha_{kl}$$

вследствие уравнения (7а), как легко показать, тождественно равен нулю.

Но кроме этого закона переноса существует еще (неинтегрируемый) симметричный закон переноса, принадлежащий, в соответствии с равенствами (2) и (3), метрике Римана. Как известно, он выражается соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \bar{d}A^\nu &= -\Gamma^\nu_{\mu\sigma} A^\mu dx^\sigma, \\ \Gamma^\nu_{\mu\sigma} &= \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Величины $\Gamma^\nu_{\mu\sigma}$, в силу равенства (3), выражаются через величины h поля n-подов. При этом необходимо учитывать, что

$$g^{\mu\nu} = h^\mu_a h^\nu_a; \tag{9}$$

при этом условии, вследствие равенств (4) и (5), выполняются соотношения

$$g^{\mu\lambda}g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\nu},$$

определяющие величины $g^{\mu\nu}$ по заданным $g_{\mu\nu}$. Разумеется, этот закон переноса, основанный только на метрике, также является ковариантным относительно вращения в указанном смысле.

§ 3. Инварианты и коварианты

В рассматриваемом нами многообразии, кроме тензоров и инвариантов геометрии Римана, содержащих величины h только в комбинациях, заданных равенством (3), существуют еще другие тензоры и инварианты, простейшие из которых мы теперь и обсудим.

Из некоторого вектора (A^{ν}) в точке (x^{ν}) в результате двух переносов d и $\bar{d}$ в бесконечно близкую точку $(x^{\nu}+dx^{\nu})$ получаются два вектора

$$A^{\nu}+dA^{\nu}$$

и

$$A^{\nu}+\bar{d}A^{\nu}.$$

Следовательно, разность

$$dA^{\nu}-\bar{d}A^{\nu} = (\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}-\Delta^{\nu}_{\alpha\beta})\,A^{\alpha}dx^{\beta}$$

также есть вектор. Значит, величина

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}-\Delta^{\nu}_{\alpha\beta},$$

равно как и ее антисимметричная часть

$$\frac{1}{2}\,(\Delta^{\nu}_{\alpha\beta}-\Delta^{\nu}_{\beta\alpha}) = \Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}, \tag{10}$$

есть тензор. Фундаментальное значение этого тензора в развитой здесь теории вытекает из следующего обстоятельства: когда этот тензор равен нулю, континуум является эвклидовым. Действительно, если

$$0 = 2\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta} = h^{\nu a}\left(\frac{\partial h_{\alpha a}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial h_{\beta a}}{\partial x^{\alpha}}\right),$$

то, умножая на $h_{\nu b}$, получаем

$$0 = \frac{\partial h_{\alpha b}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial h_{\beta b}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Поэтому можно положить

$$h_{\alpha b} = \frac{\partial \psi_b}{\partial x^\alpha}.$$

Таким образом поле выводится из n скаляров ψ_b. Выберем теперь следующие координаты:

$$\psi_b = x^b.$$

Тогда в соответствии с формулой (7а) все величины $\Delta^\nu_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль, и величины $h_{\mu a}$ и $g_{\mu\nu}$ являются постоянными.

Так как тензор $\Lambda^\nu_{\alpha\beta}$ является к тому же, очевидно, простейшим с формальной точки зрения, то простейшие характерные свойства рассматриваемого континуума следует связывать именно с ним, а не с более сложным тензором кривизны Римана. Простейшими величинами, подлежащими рассмотрению в этой связи, являются вектор

$$\Lambda^\alpha_{\mu\alpha}$$

и инварианты

$$g^{\mu\nu}\Lambda^\alpha_{\mu\beta}\Lambda^\beta_{\nu\alpha} \text{ и } g_{\mu\nu}g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}\Lambda^\mu_{\alpha\beta}\Lambda^\nu_{\sigma\tau}.$$

Умножая один из этих инвариантов (или их линейную комбинацию) на инвариантный элемент объема

$$h d\tau,$$

где h — определитель $|h_{\mu a}|$, $d\tau$ — произведение $dx_1, \ldots, dx_\mu$, можно образовать инвариантный интеграл J. Далее, полагая

$$\delta J = 0,$$

получаем 16 дифференциальных уравнений для 16 величин $h_{\mu a}$.

Вопрос о том, можно ли получить этим способом законы, имеющие физический смысл, требует дальнейших исследований.

Интересно сопоставить теорию Римана, ее модификацию, предложенную Вейлем, и развитую выше теорию. Для векторов, разделенных конечным расстоянием: в *теории Вейля* — невозможно сравнение ни по длине, ни по направлению; в *теории Римана* — возможно сравнение по длине, но не по направлению; в *рассмотренной здесь теории* — возможно сравнение и по длине, и по направлению.

НОВАЯ ВОЗМОЖНОСТЬ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА *

В краткой статье, опубликованной несколько дней назад в этом журнале [1], я показал, каким образом можно с помощью поля n-подов построить геометрическую теорию, основанную на фундаментальных понятиях метрики Римана и «абсолютного» параллелизма. Вопрос о том, может ли эта теория служить для описания физических закономерностей, при этом оставался открытым. После этого я обнаружил, что из подобной теории совсем просто и естественно получаются, по крайней мере в первом приближении, законы поля тяготения и электродинамики. Поэтому можно думать, что эта теория вытеснит первоначальный вариант общей теории относительности.

Вследствие абсолютного параллелизма в этой теории существует нечто вроде прямой, т. е. такой линии, все элементы которой взаимно параллельны; разумеется, такая линия вовсе не тождественна геодезической. Далее, в противоположность обычной общей теории относительности, здесь существует понятие относительного покоя двух материальных точек (параллелизм двух линейных элементов), принадлежащих двум разным мировым линиям. Чтобы общую теорию в изложенной форме можно было непосредственно применять к теории поля, необходимо лишь условиться о следующем.

1. Число измерений равно 4 ($n = 4$).

2. Четвертая локальная компонента A_a ($a = 4$) вектора является чисто мнимой; следовательно, мнимыми будут четвертые компоненты

---

* *Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1928, 224—227.

[1] Предыдущая статья. — *Прим. ред.*

4-пода (тетрапода), т. е. величины $h^{\nu}{}_4$ и $h_{\nu 4}$[2]. Тогда коэффициенты $g_{\mu\nu}(=h_{\mu a}h_{\nu a})$ будут, конечно, вещественными. Таким образом, квадрат длины временно-подобного вектора мы считаем отрицательным.

§ 1. Основной закон поля

Допустим, что для вариаций потенциалов поля $h_{\mu a}$ (или h_a^{μ}), обращающихся в нуль на границах некоторой области, равна нулю вариация интеграла Гамильтона:

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H} d\tau\right\}=0, \tag{1}$$

$$\mathfrak{H}=hg^{\mu\nu}\cdot\Lambda^{\alpha}_{\mu\beta}\cdot\Lambda^{\beta}_{\nu\alpha}, \tag{1a}$$

где величины $h(=|h_{\mu a}|)$, $g^{\mu\nu}$ и $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$ определяются формулами (9) и (10) цитированной работы.

Поле h может описывать одновременно как электрическое, так и гравитационное поле. «Чисто гравитационное» поле существует только в том случае, если, кроме выполнения уравнения (1), обращаются в нуль величины

$$\phi_{\mu}=\Lambda^{\alpha}_{\mu\alpha}, \tag{2}$$

что означает условие ковариантности и инвариантности относительно вращения [3].

§ 2. Закон поля в первом приближении

В мире Минковского специальной теории относительности систему координат можно выбрать так, что $h_{11}=h_{22}=h_{33}=1$, $h_{44}=j\,(=\sqrt{-1})$, а все остальные величины $h_{\mu a}$ равны нулю. Эта система значений $h_{\mu a}$ несколько неудобна для вычислений. Поэтому мы будем считать здесь

---

[2] Вместо этого можно было бы определить квадрат длины локального вектора в виде $A_1^2+A_2^2+A_3^2-A_4^2$ и вместо вращений локального n-пода ввести преобразования Лоренца. Тогда все величины h были бы вещественными, но не было бы непосредственной связи с общей формулировкой теории.

[3] Здесь существует еще некоторая неопределенность, так как чисто гравитационное поле можно было бы характеризовать и условием

$$\frac{\partial\phi_{\mu}}{\partial x_{\nu}}-\frac{\partial\phi_{\nu}}{\partial x_{\mu}}=0.$$

координату x_4 чисто мнимой; в этом случае мир Минковского (отсутствие всякого поля при соответствующем выборе координат) описывается равенствами

$$h_{\mu a} = \delta_{\mu a}. \tag{3}$$

Случай бесконечно слабых полей целесообразно представить в виде

$$h_{\mu a} = \delta_{\mu a} + k_{\mu a}, \tag{4}$$

где $k_{\mu a}$ — малые величины первого порядка. Пренебрегая величинами третьего и более высоких порядков, уравнение (1а) с учетом соотношений (10) и (7а) цитированной работы можно записать в форме

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial k_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial k_{\beta\alpha}}{\partial x_\mu}\right)\left(\frac{\partial k_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial k_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right). \tag{1б}$$

Выполняя варьирование, получаем уравнения поля в первом приближении

$$\frac{\partial^2 k_{\beta\alpha}}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial^2 k_{\mu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 k_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 k_{\beta\mu}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} = 0. \tag{5}$$

Мы имеем здесь 16 уравнений[4] для 16 величин $k_{\alpha\beta}$. Наша задача состоит теперь в том, чтобы выяснить, содержит ли эта система уравнений известные законы гравитационного и электромагнитного полей. Для этого мы должны ввести в уравнение (5) вместо $k_{\alpha\beta}$ величины $g_{\alpha\beta}$ и ϕ_α. Пусть

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha a} h_{\beta a} = (\delta_{\alpha a} + k_{\alpha a})(\delta_{\beta a} + k_{\beta a}),$$

или с учетом только величин первого порядка

$$g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} = \overline{g}_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha}. \tag{6}$$

Далее из равенства (2) с учетом величин первого порядка получаем

$$2\phi_\alpha = \frac{\partial k_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial k_{\mu\mu}}{\partial x_\alpha}. \tag{2a}$$

Переставляя индексы α и β в уравнении (5) и прибавляя полученные в результате перестановки уравнения к уравнению (5), получаем сначала

$$\frac{\partial^2 \overline{g}_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial^2 k_{\mu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 k_{\mu\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} = 0.$$

[4] Конечно, в силу общей ковариантности уравнения поля удовлетворяют четырем тождествам. В рассматриваемом здесь первом приближении это выражается в том, что дивергенция левой части уравнения (5), взятая по индексу α, тождественно обращается в нуль.

Прибавляя к этому уравнению два следствия из уравнения (2a)

$$-\frac{\partial^2 k_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu \partial x_\beta}+\frac{\partial^2 k_{\mu\mu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}=-2\,\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\beta},$$

$$-\frac{\partial^2 k_{\beta\mu}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}+\frac{\partial^2 k_{\alpha\mu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}=-2\,\frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_\alpha},$$

с учетом уравнения (6) получаем

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 \overline{g_{\alpha\beta}}}{\partial x_\mu^2}+\frac{\partial^2 \overline{g_{\mu\alpha}}}{\partial x_\mu \partial x_\beta}+\frac{\partial^2 \overline{g_{\mu\beta}}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}-\frac{\partial^2 \overline{g_{\mu\mu}}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)=\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_\alpha}. \qquad (7)$$

Случай, когда электромагнитное поле отсутствует, отличается тем, что вектор ϕ_μ обращается в нуль. В этом случае уравнение (7) совпадает в первом порядке с уравнением, известным из существующей общей теории относительности,

$$R_{\alpha\beta}=0$$

($R_{\alpha\beta}$ означает однократно свернутый тензор Римана). *Тем самым показано, что из нашей новой теории правильно следует закон чисто гравитационного поля в первом приближении.*

Дифференцируя уравнение (2a) по x_α и учитывая уравнение, получаемое сверткой (5) по α и β, находим

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\alpha}=0. \qquad (8)$$

Учитывая, что левая часть $L_{\alpha\beta}$ уравнения (7) удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(L_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}L_{\sigma\sigma}\right)=0,$$

получаем из (7)

$$\frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial x_\beta^2}+\frac{\partial^2 \phi_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \phi_\sigma}{\partial x_\sigma}\right)=0,$$

или

$$\frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial x_\beta^2}=0. \qquad (9)$$

Уравнения (8) и (9), как известно, эквивалентны уравнениям Максвелла для вакуума. *Следовательно, новая теория дает в первом приближении также уравнения Максвелла.*

Однако разделение на гравитационное и электромагнитное поля в этой теории оказывается искусственным. Ясно также, что уравнения (5) содержат больше сведений, чем уравнения (7)—(9) вместе взятые. Далее примечательно, что согласно этой теории электрическое поле входит в уравнения не квадратично.

Примечание при корректуре. Аналогичные результаты получаются, если исходить из функции Гамильтона:

$$\mathfrak{H} = h g_{\mu\nu} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\tau} \Lambda^{\mu}_{\alpha\beta} \Lambda^{\nu}_{\sigma\tau}.$$

Таким образом, в выборе $\mathfrak{H}$ все еще существует некоторая неопределенность.

89

ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ *

Теория относительности привела к радикальному изменению в научной концепции пространства и времени, метко охарактеризованному знаменитым изречением Минковского: «Отныне пространство само по себе и время само по себе превратились просто в фикцию, и лишь своего рода союз их сохраняет независимое существование». Это объединение, называемое «пространство-время», и составляет предмет данной статьи. Поскольку содержание ее представляется весьма трудным, большинство читателей, вероятно, предпочтет сначала прочитать в качестве элементарного введения статью «Относительность» [1].

Все наши мысли и понятия обусловлены чувственными ощущениями и имеют смысл только в связи с этими чувственными ощущениями. Однако, с другой стороны, они представляют собой продукты спонтанной деятельности нашего сознания; поэтому они никоим образом не являются логическим следствием содержания этих чувственных ощущений. Если же мы хотим понять сущность комплекса абстрактных понятий, то должны изучать взаимосвязи между понятиями и высказываниями о понятиях, с одной стороны, и исследовать, как они связаны с ощущениями, с другой.

Пока речь идет о том, каким образом понятия связаны друг с другом и с ощущениями, принципиальной разницы между системами понятий науки и понятиями повседневной жизни не существует. Системы понятий науки вырастали из понятий повседневной жизни, видоизменяясь и совершенствуясь в соответствии с предметом и целью рассматриваемой науки.

Чем более универсальным является понятие, тем чаще встречается оно в нашем мышлении, чем более косвенной будет его связь с чувственными ощущениями, тем труднее нам понять его значение. В частности,

---

* *Space-time*. Encycl. Brit. (14th Edition), XXI, 1929, 105—108.

[1] Статья «Относительность» в Британской Энциклопедии написана А. Эддингтоном.— *Прим. ред.*

это относится к донаучным понятиям, которыми мы привыкли пользоваться с детства. Вспомним понятия, связанные со словами «где», «когда», «почему», «быть», выяснению которых были посвящены бесчисленные тома философских книг. В наших рассуждениях мы находимся в положении не лучшем, чем рыба, пытающаяся выяснить, что такое вода.

Пространство

В этом разделе мы рассмотрим смысл слова «где», т. е. смысл пространства. Оказывается, что в наших индивидуальных примитивных ощущениях не содержится ничего, что можно было бы считать пространственным. Скорее то, что называется пространственным, связано с чем-то вроде порядка материальных объектов опыта. Поэтому прежде понятий, относящихся к пространству, должно существовать понятие «материальный объект». Это — логически первичное понятие. В этом легко убедиться, анализируя пространственные понятия, например, «рядом», «касание» и т. д., другими словами, отыскивая их эквиваленты в опыте. Понятие «объект» представляет собой способ описания существования во времени или же способ описания факта непрерывности комплексов опыта. Таким образом, существование объектов принадлежит к сфере понятий, и смысл понятий «объекты» целиком определяется их (интуитивной) связью с группами элементарных чувственных ощущений. На этой связи основана иллюзия, будто первичные ощущения дают нам непосредственные сведения об отношении материальных тел (которые существуют в конечном счете лишь постольку, поскольку мы мыслим о них).

В указанном смысле мы располагаем (косвенно) ощущением касания двух тел. Большего, чем привлечь внимание к этому, нам не требуется, так как, выделяя индивидуальные ощущения, на которые намекает это утверждение, мы ничего не выигрываем для наших целей. Многие тела можно привести в постоянное соприкосновение друг с другом различными способами. Поэтому мы говорим об относительном расположении тел. Общие законы расположения составляют в основном предмет геометрии. Это верно, по крайней мере, в том случае, если мы не хотим ограничиваться теоремами, встречающимися в этой отрасли знаний, в виде соотношений между бессодержательными словами, построенных по определенным правилам.

Донаучное мышление. Какой же смысл имеет понятие «пространство», с которым мы сталкиваемся и в донаучном мышлении? Понятие пространства в донаучном мышлении характеризуется следующим предложением: «Мы можем мысленно убрать вещи, но не пространство, которое они занимают». Это выглядит так, как будто мы без какого-либо предварительного опыта имеем понятие, или даже представление, о пространстве и как будто с помощью этого априорного понятия мы упорядочиваем наши чувственные ощущения. С другой стороны, пространство выглядит как физическая реальность, как вещь, существующая независимо от нашего сознания, подобно материальным объектам. Под влиянием этого взгляда на пространство фундаментальные понятия геометрии — точка, прямая, плоскость — считались даже самоочевидными. Фундаментальные принципы, которым подчинялись эти понятия, считались безусловно справедливыми и в то же время обладающими объективным содержанием. Без каких-либо колебаний приписывали объективный смысл таким фразам, как «три эмпирически заданных тела (практически бесконечно малых) лежат на одной прямой», не требуя для подобных утверждений физического определения. Слепая вера в очевидность и непосредственный реальный смысл понятий и теорем геометрии была подорвана только созданием неэвклидовой геометрии.

Земля как тело отсчета. Исходя из представления о том, что все пространственные понятия связаны с ощущением соприкосновения твердых тел, легко увидеть, как возникло понятие «пространство», т. е. как появилось нечто, независящее от тел и все же воплощающее их возможные расположения. Если имеется система соприкасающихся тел, покоящихся одно относительно другого, то некоторые из них можно заменить на другие. Это свойство допускать подстановки интерпретируется как «доступность пространства». Пространство означает свойство, благодаря которому твердые тела могут занимать разные положения. Представление о том, что пространство есть нечто, находящееся в гармонии с самим собой, возникло, вероятно, потому, что в донаучном мышлении положения всех тел относились к одному телу (телу отсчета), а именно к Земле. В научном мышлении Земля заменяется системой координат. Утверждение, что можно поместить в ряд одно за другим неограниченное число тел, означает, что пространство бесконечно. В донаучном мышлении понятия «пространство», «время» и «тело отсчета» едва ли различались вообще. Место или точка в пространстве всегда понималось как материальная точка на теле отсчета.

Геометрия Эвклида. Рассматривая геометрию Эвклида, мы ясно видим, что она изучает законы, управляющие положениями твердых тел. Она использует глубокую идею — свести все соотношения между телами и их взаимными положениями к очень простому понятию «отрезка». Отрезок предполагает наличие твердого тела, на котором взяты две материальных точки (метки). Понятие равенства отрезков (и углов) сводится к опытам, включающим совмещения; это же относится к теоремам конгруэнтности. Но эвклидова геометрия в том виде, в каком она была сформулирована Эвклидом, использует фундаментальные понятия «прямая», «плоскость», по-видимому, не связанные (во всяком случае столь непосредственно) с ощущениями, относящимися к положению твердых тел. (При этом следует заметить, что понятие прямой можно свести к понятию отрезка. Намек на это содержится в теореме: «Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками». Эта теорема прекрасно служила определением прямой линии, хотя в логической структуре выводов это определение не играло роли). Кроме того, геометры интересовались больше логическим выводом геометрических теорем из нескольких положенных в основу аксиом, чем выяснением связи своих фундаментальных понятий с ощущениями.

Рассмотрим кратко, как можно вывести основания эвклидовой геометрии из понятия отрезка. Будем исходить из равенства отрезков (точнее, из аксиомы равенства отрезков). Предположим, что из двух неравных отрезков один всегда больше другого. Для неравенства отрезков должны выполняться такие же аксиомы, как для неравенства чисел. Три отрезка $\overline{AB'}$, $\overline{BC'}$, $\overline{CA'}$ при соответствующем выборе $\overline{CA'}$ можно расположить так, что при совпадении их меток B и B', C и C', A и A' получится треугольник ABC. Величина отрезка CA имеет верхний предел, когда это построение все еще возможно. Тогда точки A, (BB') и C будут лежать на одной «прямой» (определение). Это ведет к понятиям: построить отрезок, равный себе, разделить отрезок на равные части, измерить отрезок числом с помощью измерительной линейки (определение пространственного интервала между двумя точками).

Когда таким образом получено понятие интервала между двумя точками, или длины отрезка, нам для построения геометрии Эвклида аналитическим путем необходима лишь следующая аксиома (теорема Пифагора). Каждой точке пространства (тела отсчета) можно приписать три числа (координаты): x, y, z, и обратно; таким образом, что для каждой пары точек A (x_1, y_1, z_1) и B (x_2, y_2, z_2) выполняется теорема:

$$\text{число, измеряющее } AB, = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

На этой основе можно затем строить строго логическим путем все остальные понятия и теоремы геометрии Эвклида, в том числе и теоремы о прямой и плоскости. Эти замечания, разумеется, не предназначаются для того, чтобы заменить строго аксиоматическое построение эвклидовой геометрии. Мы хотели лишь показать, каким образом все понятия геометрии сводятся к понятию отрезка. Мы могли бы с таким же успехом считать, что весь базис геометрии Эвклида в сжатом виде заключается в упомянутой выше теореме. Связь с эмпирическими основами устанавливалась бы тогда с помощью дополнительной теоремы. Координаты можно и дóлжно выбрать так, что две пары точек, разделенные равными интервалами, вычисленными по теореме Пифагора, могут совмещаться на одном соответствующим образом выбранном отрезке (на твердом теле). Понятия и теоремы эвклидовой геометрии можно получить из теоремы Пифагора, не вводя представления о твердых телах. Но тогда эти понятия и теоремы не будут обладать содержанием, допускающим опытную проверку. Они будут не «истинными», а всего лишь логически правильными теоремами с чисто формальным содержанием.

Трудности. Серьезная трудность в изложенной выше интерпретации геометрии заключается в том, что твердое тело в нашем опыте не соответствует точно геометрическому телу. На нем не существует абсолютно определенных меток; к тому же температура, давление и другие условия изменяют законы, связанные с положением. Следует также напомнить, что структурные составляющие материи (например, атомы и электроны), изучаемые физикой, в принципе не тождественны твердым телам, но тем не менее к ним и их частям применяются понятия геометрии. По этой причине последовательные мыслители не были склонны придавать фактическое реальное содержание одной только геометрии. Они полагали, что предпочтительнее придавать эмпирическое содержание геометрии и физике вместе.

Это представление, конечно, менее уязвимо, чем изложенное выше. В атомной теории оно является единственным последовательным представлением. Тем не менее было бы неразумно отказываться от первого представления, на котором строится геометрия. Это утверждение существенно основывается на том, что идеально твердое тело является абстракцией, прочно укоренившейся в формулировках законов природы.

Основания геометрии. Перейдем теперь к вопросу: чтó является *априори* несомненным, или необходимым, соответственно в геометрии (доктрина пространства) или в ее основаниях? Прежде мы думали — все; теперь мы думаем—ничто. Уже понятие «отрезок» является логически произвольным; вовсе не обязаны существовать вещи, соответствующие ему даже приближенно. Аналогичное замечание можно сделать о понятиях прямой, плоскости, о трехмерности пространства и о справедливости теоремы Пифагора. Даже доктрина континуума никоим образом не дана нам в природе человеческого мышления, так что с точки зрения теории познания чисто топологическим соотношениям нельзя придавать большего значения, чем другим соотношениям.

Ранние физические понятия. Мы должны еще остановиться на изменениях в понятии пространства, сопровождавших появление теории относительности. Для этого мы рассмотрим понятие пространства в ранней физике с точки зрения, отличающейся от изложенной выше. Применительно к бесконечно близким точкам теорема Пифагора гласит:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

где ds означает измеримый интервал между ними. Для эмпирически заданного интервала ds это соотношение определяет систему координат еще не полностью. Кроме трансляции, систему координат можно также подвергнуть вращению. Аналитически это означает, что соотношения эвклидовой геометрии являются ковариантными относительно линейных ортогональных преобразований координат.

При использовании эвклидовой геометрии в дорелятивистской механике возникает еще одна неопределенность в выборе системы координат: состояние движения системы координат до известной степени является произвольным, а именно оказываются возможными преобразования координат вида

$$x' = x - vt,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z.$$

Однако в старой механике не разрешалось применять системы координат, состояние движения которых отличалось бы от состояния движения, выражаемого этими уравнениями. В этом смысле мы говорим об «инерциальных системах». В этих привилегированных инерциальных системах мы сталкиваемся с новым свойством пространства, относящимся к геометрии. Точнее, это свойство не собственно пространства, а четырехмерного континуума, объединяющего время и пространство.

Появление времени. Здесь впервые в явном виде в наше рассмотрение входит время. На практике пространство (место) и время всегда встречаются вместе. Всякое событие, происходящее в мире, определяется пространственными координатами x, y, z и временной координатой t. Таким образом, физическое описание было четырехмерным с самого начала. Однако этот четырехмерный континуум казался разделенным на трехмерный пространственный и одномерный временной континуумы. Это кажущееся разделение обязано своим происхождением иллюзии, будто понятие «одновременность» имеет самоочевидный смысл, а эта иллюзия возникает потому, что мы получаем сведения о близких событиях почти мгновенно, с помощью световых сигналов.

Эта вера в абсолютный смысл одновременности была разрушена законом распространения света или, другими словами, электродинамикой Максвелла — Лоренца. Две бесконечно близкие точки могут быть связаны световым сигналом, если для них выполняется соотношение

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0.$$

Далее оказывается, что величина интервала ds для двух произвольно взятых бесконечно близких пространственно-временных точек не зависит от конкретного выбора инерциальной системы координат. В согласии с этим для перехода от одной инерциальной системы к другой мы находим линейные уравнения преобразования, не оставляющие вообще говоря значения времени событий неизменными. Таким образом стало очевидным, что существует произвол в разбиении четырехмерного пространственно-временнóго континуума на временнóй и пространственный континуумы. Инвариантная величина ds может быть измерена с помощью измерительных линеек и часов.

Четырехмерная геометрия. На базе инварианта ds можно построить четырехмерную геометрию, в значительной степени аналогичную эвклидовой геометрии трех измерений. Таким образом, физика становится чем-то вроде статики в четырехмерном континууме. Кроме различия в числе измерений, этот континуум отличается от пространства эвклидовой геометрии тем, что ds^2 может быть больше или меньше нуля. В соответствии с этим мы различаем временноподобные и пространственноподобные интервалы. Границей между ними служит «световой конус» $ds^2 = 0$ с вершиной в произвольной точке. Рассматривая только элементы, принадлежащие одному значению времени, мы имеем

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Эти элементы ds могут быть представлены в виде покоящихся отрезков и для них, как и прежде, сохраняется эвклидова геометрия.

Влияние специальной и общей теории относительности. В этом и заключалось изменение, вносимое специальной теорией относительности в концепцию пространства и времени. Концепция пространства и времени видоизменяется еще больше в общей теории относительности, так как эта теория отрицает, что пространственное сечение пространственно-временнóго континуума является эвклидовым. Следовательно, она утверждает, что для относительных положений тел, постоянно находящихся в соприкосновении, эвклидова геометрия несправедлива.

Эмпирический закон равенства инертной и гравитационной массы позволяет нам интерпретировать гравитационное поле как состояние континуума, отнесенное к неинерциальной системе, и считать неинерциальные системы эквивалентными инерциальным системам. В такой неинерциальной системе, связанной с инерциальной системой, нелинейным преобразованием координат, метрический инвариант ds^2 принимает вид

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu,$$

где величины $g_{\mu\nu}$ являются функциями координат, а суммирование производится по индексам во всех комбинациях 11, 12,..., 44. Зависимость величин $g_{\mu\nu}$ от координат эквивалентна наличию гравитационного поля. Если гравитационное поле является достаточно общим, то вообще невозможно найти инерциальную систему, т. е. такую систему координат, в которой ds^2 выражается в простом виде, указанном выше:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Однако и в этом случае в бесконечно малой окрестности пространственно-временно́й точки все же существует локальная система отсчета, в которой интервал ds выражается в только что указанном простом виде. Это положение вещей приводит к геометрии, которая была создана гением Римана более чем за полвека до появления общей теории относительности. Риман предсказывал этой геометрии большое значение для физики.

Геометрия Римана. Геометрия Римана в n-мерном пространстве относится к геометрии Эвклида в n-мерном пространстве так же, как геометрия кривых поверхностей к геометрии плоскости. Для бесконечно малой окрестности точки на кривой поверхности существует локальная система координат, в которой расстояние ds между двумя бесконечно близкими точками определяется формулой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Однако для всякой произвольной (гауссовой) системы координат в конечной области искривленной поверхности справедлива формула вида

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2.$$

Если заданы величины $g_{\mu\nu}$ как функции x_1 и x_2, то поверхность оказывается вполне определенной геометрически, ибо по этой формуле для каждой пары бесконечно близких точек на поверхности можно вычислить длину ds малого стержня, соединяющего их. С помощью этой формулы можно вычислить все сетки на поверхности, которые строятся из таких малых стержней. В частности, можно вычислить «кривизну» в каждой точке поверхности. Кривизна есть величина, выражающая, в какой степени и каким образом законы расположения малых стержней в непосредственной окрестности рассматриваемой точки отклоняются от соответствующих законов плоской геометрии.

Теория поверхностей Гаусса была обобщена Риманом на случай континуума с произвольным числом измерений и, таким образом, проложила путь общей теории относительности. В самом деле, выше было показано, что для двух бесконечно близких пространственно-временны́х точек существует величина ds, полученная измерением с помощью твердых измерительных стержней и часов (в случае временно-подобных элементов, разумеется, с помощью одних часов). Эта величина в математической теории занимает место длины малых стержней в трехмерной геометрии. Кривые, для которых $\int ds$ имеет стационарное значение, определяют траектории материальных точек и лучей света в гравитационном поле, и «кривизна» пространства зависит от распределения вещества в пространстве.

Совершенно так же, как в геометрии Эвклида, понятие пространства соответствует возможным расположениям твердых тел; в общей теории относительности понятие пространства-времени соответствует свойствам твердых тел и часов. Однако пространственно-временнóй континуум отличается от пространственного континуума тем, что законы, управляющие поведением этих объектов (часов и измерительных стержней), зависят от их местонахождения. Континуум (или величины, описывающие его) входит в законы природы явно, и, наоборот, свойства континуума определяются физическими факторами. Соотношения, связывающие пространство и время, уже нельзя считать чем-то отличающимся от самой физики. Ничего определенного неизвестно о том, какими свойствами может обладать пространственно-временнóй континуум как целое. Однако общая теория относительности делает более вероятным, что континуум является бесконечным в своей временноподобной части, но конечным в пространственноподобной части.

Время

Физическое понятие времени отвечает понятию, присущему интуитивному мышлению. Но такое понятие восходит к порядку во времени ощущений индивидуума, и этот порядок мы должны принимать как нечто первично данное. Некто ощущает момент «теперь» или, выражаясь точнее, чувственное ощущение в данный момент, соединенное с воспоминанием о (прежних) чувственных ощущениях. Это и есть причина того, что чувственные ощущения, по-видимому, образуют временны́е ряды ощущений, основанные на оценках «раньше» и «позже». Эти ряды могут повторяться, и тогда они могут быть опознаны. Они могут также повторяться неточно, с заменой некоторого числа событий другими, причем характер повторения для нас не утрачивается. Таким образом, мы приходим к представлению времени в виде некоего одномерного каркаса, который можно заполнить ощущениями разными способами. Одни и те же ряды ощущений отвечают тем же субъективным интервалам времени.

Переход от этого «субъективного» времени («Ich-Zeit») к понятию времени донаучного мышления связывается с возникновением идеи о существовании реального внешнего мира, независимого от субъекта. В этом смысле (объективное) событие ставится в соответствие с субъективным ощущением. В таком же смысле «субъективное» время ощущения сопоставляется с «временем» соответствующего «объективного» события. В противоположность ощущениям внешние события и их порядок во времени претендуют на справедливость для всех субъектов.

Этот процесс объективизации не представлял бы никаких затруднений, если бы временнóй порядок ощущений, соответствующих рядам внешних событий, был одинаковым для всех индивидуумов. В случае непосредственных зрительных восприятий в нашей повседневной жизни это соответствие является точным. Именно поэтому идея о существовании объективного порядка во времени стала столь широко распространенной. При более подробном рассмотрении идеи объективного мира внешних событий оказалось необходимым установить более сложную зависимость между событиями и ощущениями. Впервые это было сделано с помощью инстинктивных правил мышления, в которых особенно важную роль играет понятие пространства. Процесс усложнения понятий ведет в конечном счете к естественным наукам.

Измерение времени производится с помощью часов. Часы — это такой прибор, который автоматически проходит последовательно через (практически) одинаковые ряды событий (период). Число пройденных периодов (время по часам) служит мерой времени. Смысл этого определения совершенно ясен, если событие происходит в непосредственной пространственной окрестности часов; тогда все наблюдатели независимо от своего положения (зрительным путем) отметят одинаковое время по часам одновременно с событием. До создания теории относительности предполагалось, что понятие одновременности имеет абсолютный объективный смысл также и для событий, разделенных в пространстве.

Это предположение было опровергнуто открытием закона распространения света. В самом деле, если скорость света в пустоте оказывается величиной, не зависящей от выбора (или, другими словами, от состояния движения) инерциальной системы, к которой она относится, то нельзя придавать никакого абсолютного смысла понятию одновременности событий, разделенных пространственным расстоянием. Более того, в каждой инерциальной системе должно быть определено свое особое время. Если же для отсчета не используется никакая система координат (инерциальная система), то не имеет смысла и утверждать, что события в разных точках пространства происходят одновременно. Именно вследствие этого пространство и время сливаются в единый четырехмерный континуум.

В речи, похожей по содержанию на эту статью в Британской Энциклопедии и произнесенной в Ноттингеме 7 июня 1930 года, Эйнштейн сделал любопытное замечание о единой теории поля:

«Мы приходим к странному выводу: сейчас нам начинает казаться, что первичную роль играет пространство; материя же должна быть получена из пространства, так сказать, на следующем этапе. Пространство поглощает материю. Мы всегда рассматривали материю первичной, а пространство вторичным. Пространство, образно говоря, берет сейчас реванш и «съедает» материю. Однако все это остается пока лишь сокровенной мечтой».

Содержание речи изложено в статье: «Prof. Einstein's Adress at the University of Nottingham» (Science, 71, 1930, 608—609).

О СОВРЕМЕННОМ СОСТОЯНИИ ТЕОРИИ ПОЛЯ *

Теория поля, представляющая, с моей точки зрения, наиболее глубокую концепцию теоретической физики со времени основания последней Ньютоном, зародилась в уме Фарадея. Как просто выглядит эта идея теперь и все же насколько она величественна! Вместо того, чтобы думать: «Электрическая частица e_1 действует на другую электрическую частицу e_2 через пространство и вызывает появление действующей на последнюю движущей силы», Фарадей мыслил: «Электрическая частица уже самим своим существованием порождает изменение состояния пространства в своей непосредственной окрестности (электрическое поле). Пространственное распределение и изменение во времени этого поля подчиняются законам, присущим пространству. В силу этих законов поле, порождаемое частицей e_1, доходит до частицы e_2 и действует там на нее». Вскоре из этой идеи выросли замечательные законы электромагнитного поля Максвелла. Герц окончательно показал, что эта теория имеет преимущество перед ньютоновой теорией дальнодействия, а вслед затем Г. А. Лоренц доказал, что это поле присутствует в пустоте всюду, в том числе и внутри вещества, так как элементарные кирпичики вещества — по крайней мере с точки зрения электродинамики — представляют собой не что иное, как источники электрического поля. Таким было состояние теории к концу столетия.

Прежде чем рассматривать дальнейшее развитие теории поля, я хочу сделать краткое замечание о целях и путях теоретического исследования вообще. Теория преследует две цели.

1. Охватить по возможности все явления и их взаимосвязи (полнота).

2. Добиваться этого, взяв за основу как можно меньше логически взаимно независимых понятий и произвольно установленных соотношений

* *Über den gegenwärtigen Stand der Feld-Theorie.* Festschrift Prof. Dr. A. Stodola zum 70. Geburtstag, Füssli Verlag, Zürich u. Leipzig, 1929, 126—132.

между ними (основных законов или аксиом). Эту цель я буду называть «логической единственностью».

Если говорить, честно, второе пожелание можно выразить также следующим образом: мы хотим не только знать, *как* устроена природа (*и как* происходят природные явления), но и по возможности достичь цели, может быть, утопической и дерзкой на вид,— узнать, почему природа является именно такой, а не другой. В этом ученые находят наивысшее удовлетворение.

Например, из представлений молекулярно-кинетической теории теплоты выводится определенное количественное соотношение между давлением, объемом и температурой (уравнение состояния) одноатомного газа, с одной стороны, и его теплоемкостью —с другой; аналогичное количественное соотношение выводится между вязкостью и теплопроводностью таких газов. Во всех подобных случаях речь идет о том, чтобы понять эмпирическую закономерность как логическую необходимость. Приняв однажды основную гипотезу молекулярно-кинетической теории теплоты, исследователь ощущает до известной степени, что сам бог не мог бы изменить, эти взаимосвязи в том виде, в каком они существуют, как не мог бы он превратить число 4 в простое [1]. В этом состоит прометеевский элемент научного творчества, который выше был назван школьным выражением «логическая единственность». Для меня в этом и заключается постоянное очарование научного мышления; это образует, так сказать, религиозный базис научных изысканий.

Вернемся после этого отступления к теории поля, дальнейшие шаги которой следуют логике. Из равноправности всех инерциальных систем, доказанной на опыте, в сочетании с опытным законом постоянства скорости света, нашедшим концентрированное выражение в электродинамике Максвелла — Лоренца, выросла специальная теория относительности. Она принесла нам далеко идущее объединение самостоятельных до того теоретических понятий; в единые сущности слились, с одной стороны, электрическое и магнитное поля, с другой — инертная масса и энергия. Этими достижениями мы также обязаны теории поля.

Следующей ступенью на пути к объединению была общая теория относительности. Она внесла логическое единство в раздельные до того понятия инерции и тяготения, эмпирическая связь между которыми уже давно была установлена понятием массы. Однако величайшее изящество этой теории заключается в том, что, исходя из совершенно общих логических принципов (равноправие всех состояний движения), она позволила вывести логическим путем сложный закон гравитационного поля. Этот закон получился в ответ на вопрос: каковы простейшие законы, которым

[1] Понятно, что эти предложения не претендуют на теоретико-познавательную мудрость, а только иллюстрируют определенные переживания исследователя.

можно подчинить четырехмерный континуум, обладающий метрикой Римана? Удача этой попытки вывести законы природы чисто умозрительным путем, основываясь на убеждении в формальной простоте действительности, поощряет к дальнейшему движению по этому пути, опасности которого отчетливо должен представлять себе каждый, кто отважится вступить на него [2].

Отвлекаясь теперь от квантовой загадки, разрешение которой, несмотря на столь многообещающие начинания, по-моему, дело далекого будущего, мы можем считать теорию поля удовлетворительной только в том случае, если она будет рассматривать электрическое и гравитационное поля как проявление единой структуры четырехмерного пространственно-временнóго континуума. Для решения этой проблемы опыт, по-видимому, не дает нам ничего; однако можно надеяться, что среди результатов готовой, полученной умозрительным путем теории найдутся и такие, которые допускают проверку на опыте.

Для решения упомянутой проблемы существует теоретическая идея Г. Вейля, впоследствии обобщенная А. Эддингтоном, а также вторая идея, которую я исследую в последние годы. В дальнейшем я попытаюсь изложить лишь сущность метрических структур четырехмерного континуума, положенных в основу этих теорий, и несколько подробнее познакомить с рассматриваемой мной теорией.

Общим для всех теорий является следующее. Мир понимается как четырехмерный континуум, отдельные точки которого P сопоставляются с пространственно-временны́ми непротяженными точечными событиями физического бытия. Каждой такой точке ставится в соответствие четверка координат (x_1, x_2, x_3, x_4) таким образом, что «близким пространственно-временны́м» событиям соответствуют близкие значения координат. В каждой точке имеется бесконечно малый конус (световой конус), точки P' на поверхности которого характеризуются тем, что в них можно посылать световые сигналы из P. В бесконечно малой локальной системе координат этот конус описывается уравнением

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 = 0 \tag{1}$$

или в произвольной системе кординат $(x_1, \ldots, x_4)$ уравнением

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0. \tag{2}$$

В этом смысле пространственные функции $g_{\mu\nu}$, определенные, в соответствии со сказанным, лишь с точностью до множителя, выражают физиче-

[2] Сравнение Мейерсона с гегелевской постановкой цели, конечно, до известной степени оправдано; оно ярко освещает подчеркиваемую здесь опасность.

ски реальное свойство пространства — законы распространения световых сигналов.

Согласно теории Вейля, все физические сущности, например гравитационное и электромагнитное поля, свойства масштабов и часов (метрическое поле), должны сводиться только к одной этой структуре. В самом деле, эта теория наряду с описанием тяготения дает также описание электромагнитного поля, поскольку она, естественно, приводит к существованию четырех величин φ_μ, антисимметричные производные которых имеют тензорный характер. Слабость этой теории с самого начала заключалась в том, что она противоречила элементарному свойству метрики, согласно которому поведение масштабов или часов не зависит от их предыстории.

Чисто формально основы этой теории можно описать следующим образом. Если мы проведем из одной точки P континуума два линейных элемента (или элементарных вектора) PP' и PP'' с координатами $(d'x^1, d'x^2, d'x^3, d'x^4)$ и $(d''x^1,\ldots,d''x^4)$, то их численное отношение должно иметь объективное значение и его можно вычислить из квадратичной формы (2). Эта квадратичная форма, определенная с точностью до множителя λ, задает также относительное направление (угол) для двух векторов, исходящих из одной точки. Напротив, ни отношению двух линейных элементов (т. е. отношению величин), ни отношению векторов, начинающихся в двух разделенных конечным расстоянием точках континуума (т. е. отношению направлений), нельзя приписывать никакого реального смысла. Удивительно, что для этого континуума, столь бедного структурными свойствами, все-таки можно построить инвариантную теорию, наделенную такими формальными свойствами, что ее можно попытаться использовать для изображения физических свойств пространства.

Следующий континуум, более богатый метрическими свойствами, это — континуум Римана. В этом континууме реальное значение приписывается отношению величин не только двух векторов, исходящих из одной точки, но и двух векторов, исходящих из точек P и P', разделенных конечным расстоянием. Математически это следует из того, что величина

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad (3)$$

для каждого линейного элемента имеет определенное значение (с точностью до несущественного множителя, не зависящего от x^ν). То обстоятельство, что математики обратили внимание сначала на континуум, обладающий такой структурой, понятно с исторической точки зрения. Всякая поверхность, вложенная в трехмерное эвклидово пространство, есть двумерный континуум Римана. Как известно, с этой точки зрения Гаусс рассматривал теорию поверхностей; затем Риман обобщил ее, поняв, что вложение поверхностей в эвклидово пространство является несущественным и что существенные элементы теории можно распространить на произвольное число измерений. Как известно, уже Риман думал, что континуум нашего пространственного эмпирического мира, возможно, обладает подобной метрической структурой.

Уравнения гравитационного поля общей теории относительности являются простейшими ковариантными относительно преобразований координат дифференциальными уравнениями, которым можно подчинить величины $g_{\mu\nu}$ риманова континуума; при этом сами функции $g_{\mu\nu}$ (или величина ds) описывают как метрические соотношения в пространственно-временно́м континууме, так и гравитационное поле. С точки зрения логического единства общая теория относительности была бы совершенной теорией, если бы величины $g_{\mu\nu}$ в ней описывали также электромагнитное поле. То, что это не так, было ясно с самого начала; в теорию пришлось ввести логически самостоятельную линейную форму $\varphi_i dx^i$, причем величины φ^i играли роль электромагнитного потенциала. Однако кажется невероятным, чтобы гравитационные и электрические поля в пространстве имели различную природу (хотя между ними и существует причинная связь). Теория Римана еще не позволяет объяснить единство сил природы, сомневаться в котором для инстинкта теоретика абсолютно невозможно.

После двенадцати лет поисков, полных разочарований, я открыл теперь метрическую структуру континуума, промежуточную между римановой и эвклидовой, исследование которой ведет к действительно единой теории поля. Это видно из следующего рассуждения. Геометрия Эвклида отличается от геометрии Римана в широком смысле тем, что в ней два разделенных конечным расстоянием линейных элемента, или вектора, можно сравнивать не только по величине, но и по направлению. Но эвклидов континуум представляет собой не единственный частный случай риманова континуума, в котором возможно это сравнение; существуют континуумы более общего вида с «абсолютным (далеким) параллелизмом» векторов. Новую структуру пространства математически можно описать следующим образом.

Наличие метрики Римана гарантирует, что в каждой области n-мерного континуума существует ортогональный n-под (n-репер). Если принять его в качестве локальной системы координат, то величина линейного элемента в такой системе будет задаваться формулой [3]

$$ds^2 = \sum ({}^a ds)^2. \tag{4}$$

Предположим, что в общей системе координат величины ${}_a h^\nu$ означают n компонент оси a этого n-пода. Тогда компоненты линейного элемента dx^ν будут выражаться формулой

$$dx^\nu = {}_a h^\nu \, {}^a dx. \tag{5}$$

[3] По предположению Вейценбека, отнесение к оси локального n-пода выражается левым индексом.

Обратные соотношения имеют имеют вид

$$^a dx = {}^a h_\nu dx^\nu, \tag{6}$$

где коэффициентами являются нормированные миноры величины h. Из соотношений (4) и (5) следует

$$ds^2 = {}^a h_\mu \, {}^a h_\nu \, dx^\mu \, dx^\nu,$$

так что коэффициенты метрики Римана $g_{\mu\nu}$ выражаются через величины h формулой

$$g_{\mu\nu} = {}^a h_\mu \, {}^a h_\nu. \tag{7}$$

В этой теории величины h являются элементарными переменными поля, через которые выражаются метрические функции g.

Покажем теперь существование абсолютного параллелизма. В *одной* точке P_0 ориентацию локального ортогонального n-пода можно выбрать произвольно. Но для других точек она уже будет определяться однозначно условием, чтобы все соответственные оси локальных n-подов были взаимно параллельными. Тогда параллельные векторы будут иметь одинаковые локальные компоненты. Таким образом, для параллельного переноса вектора A из точки P в бесконечно близкую точку P' выполняется формула

$$\delta^a A = 0 \tag{8}$$

или, в силу соотношений (5), (6) и (8),

$$\delta A^\nu = \delta\left({}_a h^\nu \, {}^a A\right) = \frac{\partial_a h^\nu}{\partial x^\tau} {}^a A \delta x^\tau = \frac{\partial_a h^\nu}{\partial x^\tau} {}^a h_\sigma A^\sigma \delta x^\tau =$$

$$= {}^a h_\sigma \frac{\partial_a h^\nu}{\partial x^\tau} A^\sigma \delta x^\tau = -{}_a h^\nu \frac{\partial^a h_\sigma}{\partial x^\tau} A^\sigma \delta x^\tau.$$

Полагая

$$\Delta^\nu_{\sigma\tau} = {}_a h^\nu \, {}^a h_{\sigma,\tau} \left(= {}_a h^\nu \frac{\delta^a h_\sigma}{\delta x^\tau} \right), \tag{9}$$

перепишем закон параллельного переноса в виде

$$\delta A^\nu = -\Delta^\nu_{\sigma\tau} A^\sigma \delta x^\tau. \tag{10}$$

Здесь величины Δ в известном смысле аналогичны символам Кристоффеля $\Gamma^\nu_{\sigma\tau}$ в геометрии Римана, поскольку они являются коэффициентами в соотношении, выражающем закон параллельного переноса. Однако именно в этих величинах проявляется противоположность двух структур. Величины Γ в геометрии Римана симметричны по нижним индексам, но выраженный через них закон переноса неинтегрируем. Величины Δ, напротив, несимметричны, но выражаемый через них закон переноса интегрируем. Величины Δ, как и образованные из них антисимметричные выражения

$$\Lambda^{\nu}_{\sigma\tau} = \Delta^{\nu}_{\sigma\tau} - \Delta^{\nu}_{\tau\sigma}, \tag{11}$$

обладают тензорным характером. Свертыванием этого тензора получается вектор $\varphi_\sigma = \Lambda^{\alpha}_{\sigma\alpha}$, играющий в физических приложениях теории роль электромагнитного потенциала. Существование тензора $\Lambda^{\nu}_{\sigma\tau}$ обусловливает наличие инвариантов, образованных из величин h и их первых производных. Простейшие законы, которым подчиняется такой континуум, находятся следующим образом. Образуем линейную комбинацию

$$J = AJ_1 + BJ_2 + CJ_3 \tag{12}$$

трех инвариантов:

$$\begin{aligned} J_1 &= g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}_{\mu\beta}\Lambda^{\beta}_{\nu\alpha}, \\ J_2 &= g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}_{\mu\alpha}\Lambda^{\beta}_{\nu\beta}, \\ J_3 &= g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}g_{\lambda\xi}\Lambda^{\lambda}_{\mu\nu}\Lambda^{\xi}_{\sigma\tau}. \end{aligned} \tag{12a}$$

Далее, выбирая функцию Гамильтона

$$\mathfrak{H} = |{}^{\mu}h_{\nu}|\,J = hJ, \tag{13}$$

запишем вариационный принцип

$$\delta\{\int \mathfrak{H}\,d\tau\} = 0 \tag{14}$$

для таких вариаций величин ${}^{\mu}h_{\nu}$, которые обращаются в нуль на пределах интегрирования. Тогда получаются 16 уравнений для 16 полевых переменных h.

Разработка и физическая интерпретация теории затрудняется по той причине, что для выбора соотношений между постоянными A, B и C априори не существует никаких оснований. Оказывается, что при выборе постоянных

$$\begin{aligned} B &= -A, \\ C &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

получаются уравнения поля, в первом приближении согласующиеся с известными законами гравитационного и электромагнитного полей. Вычисления, проведенные совместно с Г. Мюнцем, показали даже, что поле материальной точки без электрического заряда в развитой здесь теории в точности совпадает с полем, которое дает первоначальная общая теория относительности.

Вывод и обсуждение уравнений поля будут приведены в другом месте. Следует лишь упомянуть, что специальный выбор постоянных (15) [4] должен быть сделан только в уравнениях поля, а отнюдь не в уравнении (14); в противном случае будут теряться уравнения электромагнитного поля.

Благодаря полученным до сих пор результатам я почти не сомневаюсь, что указанное здесь соединение метрики Римана с постулатом о существовании абсолютного параллелизма дает естественное описание физических свойств пространства в рамках теории поля.

Между тем более глубокий анализ общих свойств структур описанного выше рода привел меня к убеждению, что наиболее естественные выражения для уравнений поля следует получать не из принципа Гамильтона, а другим путем. [Ср. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1929, 2—7. (Статья 91.— *Ред.*)]

Хотя эта статья не является первой, в которой Эйнштейн обсуждает идеи единой теории поля (ср. статьи 72—75, 79, посвященные старому варианту, и особенно 87 и 88), она интересна как наиболее ясное изложение идей нового, второго, варианта теории, на которую Эйнштейн возлагал большие надежды. Математическое изложение теории дано в статье 97.

[4] По крайней мере, соотношение $B = -A$.

К ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ *

В двух недавно опубликованных работах [1] я старался показать, что к единой теории тяготения и электричества можно прийти, приписывая четырехмерному континууму, кроме метрики Римана, также свойство «абсолютного параллелизма». В действительности удалось также придать единый смысл гравитационному и электромагнитному полям. Напротив, попытки вывода уравнений поля из принципа Гамильтона не привели меня к простому и однозначному пути. Однако с того времени мне удалось отыскать удовлетворительный способ вывода уравнений, который излагается ниже.

§ 1. Формальное введение

Воспользуемся обозначениями, предложенными недавно Вейценбеком в его работе [2]. Компонента ν s-й оси n-пода обозначается через ${}_s h^\nu$, а соответствующие нормированные миноры — через ${}^s h_\nu$. Локальные n-поды все установлены «параллельно». Параллельными и равными называются такие векторы, которые — каждый по отношению к своему локальному n-поду — обладают одинаковыми координатами. Параллельный перенос вектора определяется соотношением

$$\delta A^\mu = -\Delta^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x^\beta = -{}_s h^\mu \, {}^s h_{\alpha,\beta} A^\alpha \delta x^\beta,$$

где запятая в индексе у символа ${}^s h_{\alpha,\beta}$ указывает на дифференцирование в обычном смысле по x^β. «Тензор кривизны Римана» (несимметричный по индексам α и β), образованный из величин $\Delta^\mu_{\alpha\beta}$, тождественно равен нулю.

---

* *Zur einheitlichen Feldtheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1929, 2—7.

[1] Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1928, 217, 224. (Статьи 87 и 88.)

[2] Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1928, 426.

«Ковариантное дифференцирование» мы будем производить только с помощью величин Δ. Вслед за итальянскими математиками будем обозначать его точкой с запятой перед соответствующим индексом, например

$$A_{\mu;\sigma} \equiv A_{\mu,\sigma} - A_\alpha \Delta^\alpha_{\mu\sigma},$$

$$A^\lambda_{;\sigma} \equiv A^\mu_{,\sigma} + A^\alpha \Delta^\mu_{\alpha\sigma}.$$

Поскольку ковариантные производные величин ${}^s h_\nu$, а также $g_{\mu\nu}(\equiv {}^s h_\mu\, {}^s h_\nu)$ и $g^{\mu\nu}$ обращаются в нуль, то эти величины можно записывать в качестве сомножителей как до, так и после оператора ковариантного дифференцирования.

В отличие от прежних обозначений я определяю тензор Λ (опуская множитель $^1/_2$) соотношением

$$\Lambda^\alpha_{\mu\nu} \equiv \Delta^\alpha_{\mu\nu} - \Delta^\alpha_{\nu\mu}.$$

Главное отличие новых формул от известных формул абсолютного дифференциального исчисления, приводящих к несимметричному закону переноса, заключается в образовании дивергенции. Пусть символ $T^{\cdot\cdot\sigma}$ означает произвольный тензор с верхним индексом σ. Его ковариантная производная, если мы запишем только дополнительный член, соответствующий индексу σ, равна

$$T^{\cdots\sigma}_{\cdot\cdot;\tau} \equiv \frac{\partial T^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot}}{\partial x_\sigma} + \cdots + T^{\cdot\cdot\alpha}_{\cdot\cdot}\Delta^\sigma_{\alpha,\tau}.$$

Умножая это уравнение после свертывания по индексам σ и τ на определитель h и вводя в правой части тензорную плотность $\mathfrak{T}$, получаем

$$hT^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot;\tau} \equiv \frac{\partial \mathfrak{T}^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot}}{\partial x^\sigma} + \cdots + \mathfrak{T}^{\cdot\cdot\alpha}_{\cdot\cdot}\Lambda^\sigma_{\alpha\sigma}.$$

Если закон переноса симметричен, то последний член в правой части отсутствует. Он представляет собой некоторую тензорную плотность, так же как и все остальные члены в правой части, которые в согласии с обычными обозначениями мы будем называть дивергенцией тензорной плотности $\mathfrak{T}$ и записывать в виде[3]

$$\mathfrak{T}^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot|\sigma}.$$

Тогда получим

$$hT^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot;\sigma} \equiv \mathfrak{T}^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot|\sigma} + \mathfrak{T}^{\cdot\cdot\alpha}_{\cdot\cdot}\Lambda^\sigma_{\alpha\sigma}.$$

---

[3] Ср., однако, работу 99, § 1.— *Прим. ред.*

Наконец, введем еще одно обозначение, которое, как мне кажется, улучшит обозримость формул. Поднятие или опускание индекса я буду иногда указывать, подчеркивая соответствующий индекс. Например, символ $(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\nu}})$ означает чисто контравариантный тензор, соответствующий тензору $(\Lambda^{\sigma}_{\mu\nu})$, а символ $(\Lambda^{\underline{\sigma}}_{\mu\nu})$ — чисто ковариантный тензор, соответствующий тензору $(\Lambda^{\sigma}_{\mu\nu})$.

§ 2. Вывод некоторых тождеств

Тождество

$$0 \equiv -\Delta^{i}_{kl,m} + \Delta^{i}_{km,l} + \Delta^{i}_{\sigma l}\Delta^{\sigma}_{km} - \Delta^{i}_{\sigma m}\Delta^{\sigma}_{kl} \tag{2}$$

означает, что «кривизна» обращается в нуль. Мы воспользуемся этим тождеством для вывода некоторого условия, которому удовлетворяет тензор Λ. Образуем из уравнения (1) путем циклической перестановки индексов k, l, m два уравнения и сложим все три уравнения. Тогда после соответствующих перегруппировок непосредственно получаем тождество

$$0 \equiv (\Lambda^{i}_{kl,m} + \Lambda^{i}_{lm,k} + \Lambda^{i}_{mk,l}) + (\Delta^{i}_{\sigma k}\Lambda^{\sigma}_{lm} + \Delta^{i}_{\sigma l}\Lambda^{\sigma}_{mk} + \Delta^{i}_{\sigma m}\Lambda^{\sigma}_{kl}).$$

Преобразуем это соотношение, вводя вместо обычных производных тензора Λ ковариантные. После перегруппировки членов без труда получим тождество

$$0 \equiv (\Lambda^{i}_{kl;m} + \Lambda^{i}_{lm;k} + \Lambda^{i}_{mk;l}) + (\Lambda^{i}_{k\alpha}\Lambda^{\alpha}_{lm} + \Lambda^{i}_{l\alpha}\Lambda^{\alpha}_{mk} + \Lambda^{i}_{m\alpha}\Lambda^{\alpha}_{kl}). \tag{3}$$

Это и есть условие того, что тензор Λ выражается указанным способом через h.

Однократным свертыванием уравнения (3), полагая для краткости $\Lambda^{\alpha}_{\mu\alpha} = \varphi_{\mu}$, получаем следующее, важное для дальнейшего тождество

$$0 \equiv \Lambda^{\alpha}_{kl;\alpha} + \varphi_{l;k} - \varphi_{k;l} - \varphi_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{kl}. \tag{3a}$$

Преобразуем это тождество, введя тензорную плотность антисимметричную по k и l,

$$\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl} = h\,(\Lambda^{\alpha}_{kl} + \varphi_l\delta^{\alpha} - \varphi_k\delta^{\alpha}_{l}). \tag{4}$$

Тогда тождество (3а) принимает простой вид

$$(\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl})_{|\alpha} \equiv 0. \tag{3б}$$

Тензорная плотность $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl}$ удовлетворяет еще одному тождеству, представляющему интерес для дальнейшего. Для вывода этого тождества мы будем опираться на следующее правило перестановки при образовании дивергенции тензорных плотностей произвольного ранга

$$\mathfrak{A}^{\cdot ik}_{\cdot|i|k} - \mathfrak{A}^{\cdot ik}_{\cdot|k|i} \equiv -(\mathfrak{A}^{\cdot ik}\Lambda^{\sigma}_{ik})_{|\sigma}. \tag{5}$$

Точками у $\mathfrak{A}$ обозначены произвольные индексы, одинаковые во всех трех членах уравнения, а именно те индексы, которые не участвуют в образовании дивергенции.

Доказательство правила (5) основывается, кроме определяющей формулы

$$\mathfrak{A}^{\sigma\cdot\cdot i}_{\tau\cdot\cdot|i} = \mathfrak{A}^{\sigma\cdot\cdot i}_{\tau\cdot\cdot,i} + \mathfrak{A}^{\alpha\cdot\cdot i}_{\tau\cdot\cdot}\Delta^{\sigma}_{\alpha i}\cdots - \mathfrak{A}^{\sigma\cdot\cdot i}_{\alpha\cdot\cdot}\Delta^{\alpha}_{\tau i}\ldots, \tag{6}$$

в особенности на тождестве (2). Соотношение (5) тесно связано с правилом перестановки ковариантного дифференцирования, которое я также приведу для полноты. Если T — произвольный тензор, индексы которого я для удобства опускаю, то справедливо равенство

$$T_{;i;k} - T_{;k;i} \equiv -T_{;\sigma}\Lambda^{\sigma}_{ik}. \tag{7}$$

Применим теперь соотношение (5) к тензорной плотности $\mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}}$,

$$\mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}|l|\alpha} - \mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}|\alpha|l} \equiv -(\mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}}\Lambda^{\sigma}_{l\alpha})_{|\sigma},$$

нижние индексы в которой мы будем считать поднятыми. Тогда мы найдем единственное нетривиальное тождество, которое с учетом тождества (3б) можно привести к виду

$$(\mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}|l} - \mathfrak{B}^{\sigma}_{\underline{k\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{|\alpha} \equiv 0. \tag{8}$$

§ 3. Уравнения поля

После того как я открыл тождество (3б), стало ясно, что при естественном ограничении многообразия рассматриваемого нами вида должна играть важную роль тензорная плотность $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl}$. Поскольку ее дивергенция $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|\alpha}$ тождественно равна нулю, сразу напрашивается мысль выдвинуть требование (уравнения поля), чтобы другая дивергенция $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|l}$ также обращалась в нуль. Таким способом на самом деле получаются уравнения, в первом приближении переходящие в уравнения гравитационного поля в пустоте и известные из существующей общей теории относительности.

Напротив, для φ_α этим способом не получается векторного условия, такого, чтобы все φ_α с нулевой дивергенцией были совместными с найденными уравнениями поля. Это связано с тем, что в первом приближении (в силу возможности перестановки при обычном дифференцировании) существует тождество

$$\mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}|l|\alpha} \equiv \mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}|\alpha|l},$$

в котором правая часть, в силу равенства (3б), тождественно равна нулю. Поэтому четыре уравнения системы $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|\alpha} = 0$ отпадают.

Однако я обнаружил, что этот недостаток можно легко устранить, постулируя вместо обращения в нуль $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|\alpha}$ уравнение

$$\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{kl/l} = 0,$$

в котором $\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{kl}$ означает тензор, бесконечно мало отличающийся от $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl}$:[4]

$$\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{kl} = \mathfrak{B}^{\alpha}_{kl} - \varepsilon h (\varphi_l \delta^{\alpha}_k - \varphi_k \delta^{\alpha}_l). \tag{9}$$

Тогда сразу получаются уравнения Максвелла (все в первом приближении), если мы образуем дивергенцию (по индексу α) уравнений поля. Кроме того, переходя к пределу $\varepsilon = 0$, получаем, как и прежде, уравнения $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl/l} = 0$, дающие в первом приближении правильные уравнения гравитационного поля.

Уравнения поля для электричества и гравитации, таким образом, правильно выражаются в первом приближении уравнением

$$\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{kl|l} = 0$$

с тем дополнительным условием, что необходимо перейти к пределу $\varepsilon = 0$. При этом существование тождества (справедливого в первом приближении)

$$\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|l|\alpha} \equiv 0 \tag{8a}$$

приводит к тому, что в уравнениях поля в первом приближении законы гравитации, с одной стороны, и электромагнетизма — с другой, разделены. А ведь такое разделение представляется столь характерной особенностью природы.

Теперь для строгого рассмотрения необходимо использовать результаты, полученные в первом приближении. Ясно, что и здесь мы должны исходить из тождества, соответствующего тождеству (8а). Очевидно, таким тождеством является тождество (8), поскольку оба тождества основываются на одном правиле перестановки операций дифференцирования, а также на тождестве (3б).

Таким образом, мы имеем следующие уравнения поля

$$\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{\underline{kl}|l} - \overline{\mathfrak{B}}^{\sigma}_{\underline{k\tau}} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0 \tag{10}$$

[4] Это тот же метод, который всегда применяется, если необходимо устранить вырождение, появляющееся при наличии особенностей.

с условием последующего (т. е. после выполнения операции «$|\alpha$» перехода к пределу $\varepsilon = 0$. Обозначая левую часть уравнения (10) символом $\mathfrak{S}^{k\alpha}$, мы получаем этим способом уравнения поля

$$\mathfrak{S}^{k\alpha} = 0, \tag{10а}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\,\overline{\mathfrak{S}}^{kl}_{|l} = 0. \tag{10б}$$

Уравнение (10б) с учетом равенств (8) и (9) дает

$$\{[h(\varphi_{\underline{k}}\delta_l^\alpha - \varphi_{\underline{l}}\delta_k^\alpha)]_{|l} - h(\varphi_{\underline{k}}\delta_\tau^\sigma - \varphi_{\underline{\tau}}\delta_k^\sigma)\Lambda^\alpha_{\sigma\tau}\}_{|\alpha} = 0.$$

Введем временно для кратности тензорную плотность

$$\mathfrak{W}^\alpha_{kl} = h(\varphi_k\delta_l^\alpha - \varphi_l\delta_k^\alpha).$$

Согласно соотношению (5) имеем

$$\mathfrak{W}^\alpha_{\underline{kl}|l|\alpha} = \mathfrak{W}^\alpha_{\underline{kl}|\alpha|l} - (\mathfrak{W}^\alpha_{\underline{kl}}\Lambda^\sigma_{l\alpha})_{|\sigma},$$

так что искомое уравнение можно записать также в виде

$$(\mathfrak{W}^l_{\underline{k\alpha}|l} - \mathfrak{W}^\sigma_{\underline{kl}}\Lambda^\alpha_{l\sigma} - \mathfrak{W}^\sigma_{\underline{k\tau}}\Lambda^\alpha_{\sigma\tau})_{|\alpha} = 0,$$

где два последних члена обращаются в нуль. Непосредственное вычисление дает

$$\mathfrak{W}^l_{\underline{k\alpha}|l} \equiv h(\varphi_{\underline{k};\underline{\alpha}} - \varphi_{\underline{\alpha};\underline{k}}).$$

Таким образом, преобразованные уравнения (10) принимают вид

$$[h(\varphi_{\underline{k};\underline{\alpha}} - \varphi_{\underline{\alpha};\underline{k}})]_{|\alpha} = 0. \tag{11}$$

Эта система уравнений вместе с уравнением

$$\mathfrak{B}^\alpha_{\underline{kl}|l} - \mathfrak{B}^\sigma_{\underline{k\tau}}\Lambda^\alpha_{\sigma\tau} = 0 \tag{10а}$$

образует полную систему уравнений поля.

Если бы мы исходили не из уравнения (10а), а прямо из уравнения (10), то не получили бы уравнений (11) электромагнитного поля. Кроме того, мы не смогли бы гарантировать, что системы уравнений (11) и (10а) совместны. При нашем же способе рассуждений, по-видимому, обеспечивается выполнение условия, что эти уравнения совместны, поскольку исходные уравнения (10) образуют шестнадцать условий для шестнадцати величин ${}^s h_\alpha$. Между этими шестнадцатью уравнениями (10), в силу общей ковариантности этих уравнений, с необходимостью существуют четыре тождества [5]. Следовательно, между 20 уравнениями поля (11) и (10а)

[5] Ср., однако, работу 99, § 1.— *Прим. ред.*

существует всего 8 тождественных соотношений, из которых мы указали в явном виде только 4.

О том, что уравнения (10а) в первом приближении содержат уравнения гравитационного поля, а уравнения (11) (в связи с существованием векторного потенциала) дают уравнения Максвелла для пустоты, было уже сказано. Я хотел бы также показать, что, наоборот, для каждого решения этих уравнений существует h-поле, удовлетворяющее уравнениям (10а) [6]. Свертывая уравнения (10а) по двум индексам, получаем условие типа дивергенции для электрического потенциала

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f}^{l}_{|l} - \frac{1}{2}\mathfrak{B}^{\sigma}_{\underline{k\tau}}\Lambda^{k}_{\sigma\tau} = 0, \\ (2\mathfrak{f}^{l} = \mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{\alpha l}} = 2h\varphi^{l}). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Более глубокое исследование следствий уравнений поля (11), (10а) должно показать, действительно ли метрика Римана в соединении с абсолютным параллелизмом дает адекватное понимание физических свойств пространства. Согласно нашему исследованию, это не кажется невероятным.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность д-ру Г. Мюнцу за трудоемкое строгое решение центрально-симметричной задачи на основе принципа Гамильтона; результаты этого исследования помогли мне найти описанный здесь путь. Благодарю также «Физический фонд», позволивший мне иметь в течение последних лет такого помощника в исследованиях, как д-р Громмер.

Дополнение к корректуре. Предложенные в этой работе уравнения поля, в отличие от других возможных уравнений, формально можно охарактеризовать следующим образом. С помощью тождества (8) удалось добиться, чтобы 16 величин $^{s}h_{\nu}$ удовлетворяли не 16, а 20 независимым дифференциальным уравнениям. Слово «независимые» понимается в том смысле, что ни одно из этих уравнений не является следствием других, даже если между ними существуют 8 тождественных (дифференциальных) соотношений.

Поступила 30 января 1929 г.

В связи с опубликованием этой работы в газете Daily Chronicle (London) 26 января 1929 г. было напечатано интервью Эйнштейна. Выдержка из этого интервью, взятая нами из журнала Nature (том 123, 1929, стр. 175), показывает, какие надежды возлагались автором на единую теорию поля:

....

[6] Это справедливо только до тех пор, пока речь идет о линейных уравнениях первого приближения.

«В течение многих лет моей величайшей целью было превращение дуализма законов природы в их единство. Сущность дуализма состоит в том, что физики до сих пор были вынуждены постулировать существование законов двух типов: законов, управляющих гравитацией, и законов, управляющих электрическими и магнитными явлениями. Многие физики подозревали, что оба типа законов в действительности основаны на одном общем законе; однако ни теория, ни опыт не привели до сих пор к формулировке такого закона. Я придумал некоторую особую теорию, отличающуюся определенными условиями как от моей общей теории относительности, так и от других теорий четырехмерного пространства.

Благодаря этим условиям, одни и те же математические уравнения дают законы, которые управляют электромагнитным полем, и законы, которые управляют полем тяготения. Теория относительности сводит в одну формулу все законы, которые управляют пространством, временем и тяготением и поэтому отвечают требованию простоты наших физических понятий.

Задачей моей работы является дальнейшее упрощение теории и, в частности, сведение к одной формуле, объединение поля тяготения и электромагнитного поля. Поэтому я назвал работу исследованием «единой теории поля»... Теперь и лишь только теперь мы знаем, что силы, которые движут электроны по эллипсам вокруг ядер в атомах, — те же, что и силы, движущие Землю в ее годичном пути вокруг Солнца, и те же, которые приносят к нам лучи света и тепло, делающее возможным жизнь на нашей планете».

Перевод этой статьи без дополнения при корректуре опубликован также в журнале Revue génerale del'électricite (1929, 25, 645—648), как вторая часть статьи «Sur la theorie synthetique des champs», первая часть которой — «Введение» — написана М. Т. де Дондером.

Некоторые результаты этой работы Эйнштейн исправляет в работе 99.

НОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ. I*

МАТЕРИЯ И ПРОСТРАНСТВО

Пока физика развивалась исключительно по пути, проложенному Ньютоном, господствовала следующая концепция физической реальности. Материя реальна, она претерпевает лишь такие изменения, которые мы воспринимаем как перемещение в пространстве. Движение, пространство, а также время являются реальными. Всякая попытка отрицать их физическую реальность терпела крах, наталкиваясь на закон инерции. В самом деле, если ускорение считается реальным, то и пространство, в котором, по нашему представлению, тела ускоряются, также должно быть реальным. Ньютон видел это совершенно ясно и поэтому называл пространство «абсолютным». В его теоретическую систему входила еще одна независимая реальность — движущие силы, действующие между материальными частицами, причем эти силы зависели только от положения частиц. Эти силы взаимодействия между частицами считались безусловно связанными с самими частицами и распределенными в пространстве по неизменному закону.

Физики XIX столетия полагали, что существуют два вида материи: весомая материя и электричество. Частицы весомой материи, по предположению, взаимодействовали посредством сил притяжения по закону Ньютона, частицы электрической материи взаимодействовали по закону Кулона, так что все эти силы были обратно пропорциональными квадрату расстояния. Определенных взглядов на природу сил, действующих между частицами весомой материи и электричества, тогда не существовало.

Само пустое пространство не признавалось активным носителем физических явлений и процессов. Оно было, так сказать, только ареной, на которой разыгрывалась драма материальных событий. Поэтому тот факт,

* *The New Field Theory. I.* Observatory, 1929, 52, 82—87. (Напечатана ранее в газете «Times» от 4 февраля 1929 г.— *Прим. ред.*)

что свет распространяется в пустоте, Ньютон объяснял гипотезой, что свет также состоит из материальных частиц, взаимодействующих с весомой материей посредством особых сил. Таким образом, здесь мировоззрение Ньютона вводило материальные частицы третьего типа, хотя они, конечно, обладали свойствами, резко отличающимися от свойств других форм материи. Прежде всего, частицы света могли рождаться и исчезать. Кроме того, даже в XVIII веке опыт уже показал, что свет распространяется в пустоте с определенной скоростью — факт, который, очевидно, плохо увязывался с теоретической системой Ньютона. Действительно, что же запрещает частицам света двигаться в пространстве с любой произвольной скоростью?

Преемники Ньютона

Неудивительно поэтому, что теоретическая система, построенная могучим интеллектом Ньютона, была побеждена именно теорией света. Победу одержала волновая теория света Гюйгенса — Юнга — Френеля, которая преодолела сопротивление физиков, объяснив явления интерференции и дифракции. Широкий круг явлений, вычисляемых и предсказываемых этой теорией до мельчайших подробностей, вызывал восхищение физиков и привел к появлению множества толстых научных книг. Неудивительно, что ученые не сумели заметить, что из-за этой теории в их вечном идоле появилась трещина. Эта теория в действительности опровергала мнение, что все реальное можно рассматривать как движение частиц в пространстве. Ведь световые волны представляли собой не что иное, как колебательные состояния пустого пространства, и, следовательно, последнее теряло свою пассивную роль простой арены физических явлений. Гипотеза эфира кое-как замазала эту трещину и сделала ее невидимой. Был изобретен эфир, проникающий повсюду, заполняющий все пространство; он был признан новым видом материи. Однако не было замечено, что при этом оживает само пространство. Ясно, что именно это и произошло, когда эфир стали рассматривать как род материи, которую никуда нельзя удалить. Следовательно, эфир был до некоторой степени тождествен самому пространству, т. е. представлял собою нечто, обязательно данное вместе с пространством. Таким образом, на свет стали смотреть как на динамический процесс, реально происходящий с самим пространством. Тем самым возникла теория поля как незаконная дочь ньютонианской физики, дочь, которую все вначале «мудро» считали законной.

Полностью осознать эту перемену во взглядах мог только в высшей степени оригинальный ум, чья интуиция могла сразу охватывать существо дела и чей ум не увяз бы в формулах. Таким исключительным умом обладал Фарадей. Он питал инстинктивное отвращение к идее дальнодействующих сил, которая, очевидно, противоречила элементарным наблюдениям. Когда одно наэлектризованное тело притягивает или отталкивает другое тело, полагал Фарадей, то это происходит не путем прямого действия первого тела на второе, но посредством некоторого промежуточного процесса. Первое тело приводит пространство в непосредственной близости от себя в особое состояние, которое распространяется на более удаленные части пространства в соответствии с определенным пространственно-временным законом распространения. Это состояние пространства называется «электрическим полем». Второе тело испытывает действие силы потому, что оно находится в поле, созданном первым телом, и наоборот. Таким образом, «поле» обеспечивает систему понятий, исключающую идею дальнодействия. Фарадею принадлежит также смелая мысль о том, что в соответствующих условиях поля могут отрываться от порождающих их тел, распространяясь в пространстве в виде свободных полей; в этом заключалась его интерпретация света. Максвелл впоследствии открыл замечательную систему уравнений, кажущихся нам теперь такими простыми, которая окончательно перебросила мост между теорией электромагнитного поля и теорией света. Оказалось, что свет образуют быстропеременные электромагнитные поля.

Революция в физике

После того как в 80-х годах прошлого столетия Герц подтвердил существование электромагнитных волн и своими блестящими опытами показал их тождество со светом, в физике постепенно началась великая идейная революция. Люди медленно привыкали к идее о том, что физическое состояние самого пространства представляет собой физическую реальность, особенно после того, как Лоренц в своих проницательных теоретических исследованиях показал, что даже внутри весомых тел электромагнитные поля надо рассматривать не как состояния материи, а как состояния пустого пространства, в котором свободно располагаются материальные атомы.

В конце столетия физики начали высказывать недовольство двойственностью теории, признающей два типа фундаментальной физической реальности: поле, с одной стороны, и материальные частицы — с другой. Предпринимались попытки представить материальные частицы как структуры в поле, т. е. как области, где поля сконцентрированы особым образом. Всякое такое представление частиц на основе теории поля было бы большим достижением, но, несмотря на все попытки, наука еще не пришла к нему. Следует даже признать, что эта двойственность в наши дни стала острее и тревожнее, чем десять лет назад. Этот факт связан с последними стремительными успехами квантовой теории, в которой борются за победу теория континуума (теория поля) и существенно дискретная природа элементарных частиц и процессов.

Мы не будем обсуждать здесь вопросы, связанные с молекулярно-кинетической теорией, но остановимся на успехах, достигнутых в теории поля в этом столетии. Все эти успехи связаны с теорией относительности, вступившей шесть месяцев назад в третью стадию своего развития. Рассмотрим кратко главные идеи, относящиеся к этим трем стадиям, и их отношение к теории поля.

Первая стадия — специальная теория относительности —обязана своим происхождением главным образом теории электромагнитного поля Максвелла. Из этой теории, объединенной с тем эмпирическим фактом, что не существует никакого физически различимого состояния движения, которое можно было бы назвать «абсолютным покоем», выросла новая теория пространства и времени. Известно, что эта теория покончила с абсолютным характером понятия одновременности двух пространственно разделенных событий. Известна также смелость, вызванная отчаянием, с которой некоторые философы все еще защищаются от этой простой теории, расточая гордые, но пустые слова. С другой стороны, менее известны те услуги, которые оказаны специальной теорией относительности своей родительнице — теории электромагнитного поля Максвелла. До того времени электрическое и магнитное поля считали существующими независимо, хотя между этими двумя видами поля благодаря уравнениям Максвелла и устанавливалась тесная причинная связь. Но специальная теория относительности показала, что эта причинная связь есть проявление тождественной сущности двух видов поля. Действительно, состояние пространства, которое в одной системе координат выглядит как чисто магнитное поле, в другой системе координат, совершающей относительное движение, будет выглядеть как электрическое поле, и наоборот. Соотношения подобного рода, которые, вскрывая тождественность разных понятий, уменьшают тем самым число независимых гипотез и выясняют их логическую замкнутость, представляют характерную черту теории относительности. Например, специальная теория относительности указывает также на тождество сущности таких понятий, как инертная масса и энергия. Это все общеизвестно и упоминается здесь, чтобы подчеркнуть ту тенденцию к единству, которая преобладает во всем развитии теории.

Теория гравитации

Обратимся теперь ко второй стадии в развитии теории относительности, к так называемой общей теории относительности. Эта теория также исходит из опытного факта, до того не получившего удовлетворительной интерпретации, из факта равенства инертной и тяжелой масс, или, другими словами, из факта, известного со времен Галилея и Ньютона, что все тела падают в поле тяготения Земли с одинаковым ускорением. Теория в качестве своей основы использует специальную теорию относительности, в то же время видоизменяя ее. Исходным пунктом теории служит утверждение, что не существует физически выделенного состояния движения, т. е. не только скорость, но и ускорение не имеет абсолютного смысла. Это внесло затем существенно более глубокие изменения в понятия пространства и времени, чем в случае специальной теории относительности. В самом деле, хотя специальная теория относительности заставила слить пространство и время в один неделимый четырехмерный континуум, эвклидов характер континуума сохранялся в этой теории без изменений. В общей теории относительности пришлось отвергнуть и гипотезу об эвклидовом характере нашего пространственно-временнóго континуума: континуум приобрел структуру так называемого пространства Римана. Прежде чем мы попытаемся понять, что означают эти слова, напомним, чего достигла эта теория.

Общая теория относительности дала точную теорию гравитационного поля и установила совершенно определенную связь тяготения с метрическими свойствами континуума. Теория гравитации, которая оставалась неизменной со времен Ньютона, была, таким образом, введена в русло полевой концепции Фарадея совершенно естественно, т. е. без какого-либо произвола в выборе законов поля. В то же время гравитация и инерция были слиты в единое целое. Подтверждения этой теории в последние годы при измерении отклонения света в гравитационном поле и при спектроскопическом исследовании двойных звезд хорошо известны.

НОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ. II *

СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Характерными чертами, отличающими общую теорию относительности и еще больше третью стадию теории — единую теорию поля — от других физических теорий, являются меньшая степень произвола в формальных рассуждениях, узость эмпирических основ, радикальный характер теоретических построений и, наконец, уверенность в единстве тайн природы и в способности интеллекта познать их. В этом и заключается та особенность, которая физикам, склонным к реализму или позитивизму, кажется слабостью; но рассуждающему интеллекту математика представляется чертой, весьма привлекательной и даже очаровывающей. В своих блестящих исследованиях по теории познания Мейерсон дает отличное сопоставление интеллектуальных позиций теоретика-релятивиста и Декарта или даже Гегеля, не допуская при этом осуждения, которое физик, естественно, захотел бы в них найти.

Однако в конечном счете единственным компетентным судьей остается опыт. Между тем в защиту теории все-таки можно сказать одно. Прогресс научных знаний должен приводить к тому, что формальное упрощение может достигаться только ценой увеличения разрыва между фундаментальными гипотезами теории, с одной стороны, и непосредственно наблюдаемыми фактами — с другой. Теория должна переходить все больше и больше от индуктивного метода к дедуктивному, хотя самое важное для всякой научной теории—требование, чтобы она соответствовала фактам — будет сохраняться всегда.

---

* *The New Field Theory. II.* Observatory, 1929, 52, 114—118. (Напечатана ранее в газете «Times» от 5 февраля 1929 г. — *Прим. ред.*)

Поиски простоты

Мы подошли теперь к трудной задаче — дать читателю понятие о методах, применяемых в математических построениях, ведущих к общей теории относительности и к новой единой теории поля. Общая проблема заключается в следующем: какие простейшие формальные образования можно приписать четырехмерному континууму и каким простейшим законам эти образования должны подчиняться? Затем мы ищем математическое выражение для физических полей через эти формальные образования и для законов физики поля, уже известных в некотором приближении из прежних исследований, через простейшие законы, управляющие этими образованиями.

Понятия, которые при этом используются, можно объяснить на примере двумерного континуума (поверхности) не хуже, чем на примере четырехмерного континуума пространства и времени. Представим себе лист миллиметровой бумаги. Что означает мое утверждение о двумерности поверхности с миллиметровой сеткой? Для всякой точки P, нанесенной на бумагу, можно определить положение с помощью двух чисел. Именно, начиная с левого нижнего угла, будем вести указку направо, пока не достигнем нижнего конца вертикали, проходящей через точку P. Предположим, что при этом мы достигнем нижнего конца вертикальной линии x миллиметровой сетки. Затем будем двигать указку по этой вертикальной линии вверх до точки P, пересекая y горизонтальных линий. Тогда точка P будет, очевидно, описываться числами x, y (координатами). Если вместо хорошей миллиметровой бумаги мы будем пользоваться листом с растянутой или искаженной сеткой, то положение точки все-таки можно определять тем же способом, но в этом случае сетка уже не будет состоять из горизонталей и вертикалей или даже из прямых линий. Та же самая точка даст, конечно, другие числа, но возможность определять положение точки двумя числами (гауссовыми координатами) все еще сохранится. Более того, если две точки P и Q будут находиться очень близко друг к другу, то их координаты будут отличаться очень мало. Когда точка описывается указанным способом двумя числами, мы говорим о двумерном континууме (поверхности).

Рассмотрим теперь две близких точки P и Q на поверхности и несколько поодаль две других точки P', Q'. Что означает высказывание о том, что расстояние PQ равно расстоянию $P'Q'$? Это утверждение имеет ясный смысл только в том случае, если мы имеем небольшую измерительную линейку, которую можно переносить от одной пары точек к другой, и если результат измерения не зависит от того, какую именно линейку мы применим. Если это так, то длины отрезков PQ и $P'Q'$ можно сравнивать. Если континуум обладает этим свойством, то говорят, что он имеет метрику. Разумеется, расстояние между двумя точками должно зависеть от разностей их координат (dx, dy). Но вид этой зависимости априори неизвестен. Если эта зависимость имеет вид

$$ds^2 = g_{11} dx^2 + 2g_{12} dx\, dy + g_{22} dy^2,$$

то она называется метрикой Римана. Если можно выбрать координаты так, что это выражение приобретает вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad \text{(теорема Пифагора)},$$

то континуум называется эвклидовым (плоским). Ясно, что эвклидов континуум есть частный случай риманова континуума. Наоборот, риманов континуум — это метрический континуум, который является эвклидовым в бесконечно малых, но не в конечных областях. Величины g_{11}, g_{12}, g_{22} описывают метрические свойства поверхности, т. е. метрическое поле.

Используя известные из опыта свойства пространства, в частности закон распространения света, можно показать, что пространственно-временной континуум обладает метрикой Римана. Величины g_{11} и т. д., относящиеся к этому континууму, определяют не только его метрику, но и гравитационное поле. Закон гравитационного поля возникает при ответе на вопрос, каковы простейшие математические законы, которым может подчиняться метрика (т. е. величины g_{11} и др.). Ответ был дан в полевых законах гравитации, которые оказались более точными, чем закон Ньютона.

Этот беглый очерк должен дать лишь общее понятие об «умозрительных» методах общей теории относительности.

Два поля как одно

Теория, объединившая метрику и тяготение, была бы вполне удовлетворительной, если бы в мире существовали только гравитационные поля и не было электромагнитных полей. Правда, последние можно включить в рамки общей теории, взяв и соответствующим образом видоизменив уравнения Максвелла для электромагнитного поля; но, в отличие от гравитационных полей, они будут выглядеть не как структурные свойства пространственно-временнóго континуума, а как логически самостоятельные образования. В этой теории два вида поля оказываются причинно связанными, но еще не сливаются в нечто единое. Однако вряд ли можно вообразить, что пустое пространство обладает состояниями двух существенно различных видов, и, естественно, возникает подозрение, что нам это только кажется, поскольку структура физического континуума не вполне описывается метрикой Римана.

Новая единая теория поля устраняет этот недостаток, рассматривая оба вида поля как проявление пространственной структуры одного всеобъемлющего типа в пространственно-временно́м континууме. Стимулом для новой теории послужило открытие, что существует структура, промежуточная между структурами пространств Римана и Эвклида, более богатая формальными свойствами, чем первая, но более бедная, чем вторая. Рассмотрим двумерное пространство Римана типа поверхности куриного яйца. Поскольку эта поверхность вложена в наше (с высокой

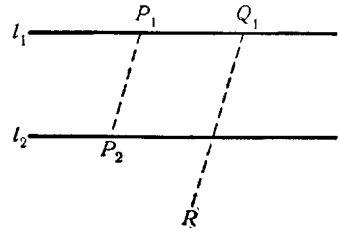


Рис. 1

степенью точности) эвклидово пространство, она обладает метрикой Римана. Действительно, имеет вполне определенный смысл говорить о расстоянии между двумя близкими точками (P, Q) на поверхности. Аналогично можно для двух пар точек((PQ) и ($P'Q'$) в разных местах поверхности яйца говорить, что расстояние PQ равно расстоянию $P'Q'$. С другой стороны, теперь уже нельзя сравнивать *направление* PQ с направлением $P'Q'$. В частности, не имеет смысла требовать, чтобы отрезок $P'Q'$ был параллелен PQ. В соответствующей эвклидовой геометрии двух измерений — эвклидовой геометрии на плоскости — направления можно сравнивать, и параллельность линий может существовать в областях плоскости, расположенных на любом расстоянии друг от друга (абсолютный параллелизм). В этом отношении эвклидов континуум имеет больше свойств, чем риманов континуум.

Новая единая теория поля основана на следующем математическом открытии: существуют континуумы с метрикой Римана и абсолютным параллелизмом и которые тем не менее не являются эвклидовыми. Легко показать, например, в случае трехмерного пространства, в чем заключается отличие такого континуума от эвклидова.

Прежде всего в таком континууме существуют линии, все части которых параллельны одна другой. Мы будем называть эти линии «прямыми». Имеет также определенный смысл говорить о двух параллельных прямых, как в случае геометрии Эвклида. Возьмем теперь две таких параллельных прямых l_1 и l_2 и отметим на каждой из них по точке (P_1 и P_2) (см. рис. 1). На прямой l_1 возьмем еще точку Q_1. Если мы теперь проведем через Q_1 прямую Q_1R, параллельную прямой P_1P_2, то в эвклидовой геометрии прямая Q_1R пересечет прямую l_2; в геометрии, которую мы теперь применяем, линия Q_1R и линия l_2 в общем случае не пересекаются. В этом смысле применяемая нами геометрия является не только конкретизацией геометрии Римана, но и обобщением геометрии Эвклида. На мой взгляд, наш пространственно-временнóй континуум обладает структурой именно такого типа.

Математическая проблема, решение которой, по-моему, приведет к правильным законам поля, формулируется следующим образом: каковы простейшие и наиболее естественные условия, которым можно подчинить континуум указанного типа? Ответ на этот вопрос, который я попытаюсь дать в новой статье, приводит к законам единого поля для гравитации и электромагнетизма [1].

[1] Ср. статью 97.— *Прим. ред.*

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА*

В недавно опубликованной работе [1] я получил уравнения единой теории поля, не опираясь на вариационный принцип. Доказательство этих уравнений основывалось на предположении о совместности 16 уравнений поля [2]. Поскольку для этих уравнений не удалось получить четырех тождественных соотношений, Ланчос и Мюнц высказали обоснованное сомнение по поводу допустимости указанных там уравнений поля, и ясного ответа на это сомнение пока не существовало. Между тем я обнаружил, что эту задачу можно решить вполне удовлетворительным способом, опираясь на принцип Гамильтона, причем совместность уравнений обеспечивается заранее. Тождества, полученные в предыдущих работах, а также применявшиеся там обозначения будут использованы здесь без изменений.

§ 1. Общие сведения о принципе Гамильтона в применении к континууму с метрикой Римана и абсолютным параллелизмом

Пусть $\mathfrak{H}$ — скалярная плотность, выражаемая алгебраически через величины $g_{\mu\nu}$ и $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$. Тогда принципу Гамильтона

$$\delta\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\} = 0, \tag{1}$$

где варьирование производится по ${}^{s}h_{\nu}$, удовлетворяют уравнения поля

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} = \mathfrak{H}^{\mu\nu} - (\mathfrak{H}^{\mu\nu}_{\underline{\alpha}})_{|\nu} = 0, \tag{2}$$

* *Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1929, 156—159.

[1] Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1929, 2—7. (Статья 91.)

[2] Ср. уравнение (10) цитированной статьи.— *Прим. ред.*

причем величины $\mathfrak{H}^{\mu\alpha}$ и $\mathfrak{H}^{\mu\alpha}_{\alpha}$ определяются равенствами

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{H}^{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g_{\mu\nu}},\\ \mathfrak{H}^{\mu\nu}_{\alpha} &= \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Это непосредственно следует из уравнения (1) с учетом определяющего равенства

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = {}_{s}h^{\alpha}({}^{s}h_{\mu,\nu} - {}^{s}h_{\nu,\mu}); \tag{4}$$

здесь запятая перед индексом означает обычное дифференцирование.

То обстоятельство, что вариационный принцип (1) выполняется сам собой для таких (исчезающих на границах) вариаций ${}^{s}h_{\nu}$, которые могут порождаться только инфинитезимальными преобразованиями координат, приводит, как и в современной теории относительности, к четырехмерному тождеству

$$D_{\mu}(\mathfrak{G}^{\mu\underline{\alpha}}) = \mathfrak{H}^{\mu\alpha}_{|\mu} + \mathfrak{H}^{\mu\beta}\Lambda^{\beta}_{\underline{\alpha}\mu} \equiv 0. \tag{5}$$

При этом D_{μ} означает дифференциальный оператор типа дивергенции, определенный равенством (5). Тождество типа (5) всегда выполняется для тензорной плотности $\mathfrak{G}^{\mu\alpha}$, которая является гамильтоновой производной скалярной плотности $\mathfrak{B}$, зависящей в свою очередь только от величин ${}^{s}h_{\nu}$ и их производных.

§ 2. Выбор функции Гамильтона

В простейшем случае выберем функцию Гамильтона $\mathfrak{H}$ в виде функции второй степени относительно тензоров $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$. Это следует из того, что функция $\mathfrak{H}$ представляет собой линейную комбинацию величин

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{J}_1 &= h\Lambda^{\alpha}_{\mu\beta}\Lambda^{\beta}_{\underline{\mu}\alpha},\\ \mathfrak{J}_2 &= h\Lambda^{\alpha}_{\mu\beta}\Lambda^{\underline{\alpha}}_{\underline{\mu\beta}},\\ \mathfrak{J}_3 &= h\Lambda^{\alpha}_{\mu\alpha}\Lambda^{\beta}_{\underline{\mu}\beta}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Но из всех возможных линейных комбинаций лишь одна отличается тем, что соответствующие тензоры $\mathfrak{G}^{\mu\alpha}$ становятся симметричными:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\mathfrak{J}_1 + \frac{1}{4}\mathfrak{J}_2 - \mathfrak{J}_3. \tag{7}$$

Доказательство этого основывается на симметрии $\mathfrak{H}^{\mu\alpha}$, а также на тождестве, выведенном в цитированной работе

$$\mathfrak{B}^{\alpha}_{\mu\nu|\alpha} = [h(\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} + \varphi_\nu\delta^{\alpha}_{\mu} - \varphi_\mu\delta^{\alpha}_{\nu})]_{|\alpha} \equiv 0. \tag{8}$$

Выполняя варьирование, получаем 10 уравнений

$$\mathfrak{G}^{\mu\alpha} = 0, \tag{9}$$

которые в первом приближении согласуются с уравнениями гравитационного поля, основанными на геометрии Римана.

Недостающие уравнения поля мы получим, выбирая вместо функции Гамильтона (7) некоторую линейную комбинацию $\overline{\mathfrak{H}}$ функций $\mathfrak{J}$, бесконечно мало отличающуюся от $\mathfrak{H}$. Для краткости запишем ее в виде

$$\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} + \varepsilon_1\mathfrak{H}^* + \varepsilon_2\mathfrak{H}^{**}, \tag{10}$$

где

$$\mathfrak{H}^* = \frac{1}{2}\mathfrak{J}_1 - \frac{1}{4}\mathfrak{J}_2, \tag{11}$$

$$\mathfrak{H}^{**} = \mathfrak{J}_3. \tag{12}$$

Вычисление дает

$$\mathfrak{H}^* = -\frac{1}{2}hS^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}; \tag{11a}$$

здесь введена величина, антисимметричная по всем трем индексам:

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} + \Lambda^{\nu}_{\underline{\alpha\mu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu\alpha}}. \tag{13}$$

Выполняя варьирование $\mathfrak{H}$ и расщепляя полученное таким образом тензорное уравнение на симметричную и антисимметричную части, наряду с (9), получаем уравнения

$$(\mathfrak{G}^{*\mu\alpha} - \mathfrak{G}^{*\alpha\mu}) + \sigma(\mathfrak{G}^{**\mu\alpha} - \mathfrak{G}^{**\alpha\mu}) = 0, \tag{14}$$

причем σ означает отношение бесконечно малых величин ε_1 и ε_2. Эти уравнения можно записать также в виде

$$(\mathfrak{H}^{*\mu\nu}_{\underline{\alpha}} - \mathfrak{H}^{*\alpha\nu}_{\underline{\mu}})_{|\nu} + \sigma(\mathfrak{H}^{**\mu\nu}_{\underline{\alpha}} - \mathfrak{H}^{**\alpha\nu}_{\underline{\mu}})_{|\nu} = 0. \tag{14a}$$

В результате вычислений получим

$$\mathfrak{H}^{*\mu\nu}_{\underline{\alpha}} - \mathfrak{H}^{*\alpha\nu}_{\underline{\mu}} = -hS^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} = -\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}, \tag{15}$$

$$\mathfrak{H}^{**\mu\nu}_{\underline{\alpha}} - \mathfrak{H}^{**\alpha\nu}_{\underline{\mu}} = h(\varphi^{\mu}g^{\alpha\nu} - \varphi^{\alpha}g^{\mu\nu}), \tag{16}$$

и, после выполнения операции «$|\nu$», из уравнения (14a) будем иметь

$$\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}|\nu} - \sigma\left[h\left(\varphi_{\underline{\mu};\underline{\alpha}} - \varphi_{\underline{\alpha};\underline{\mu}}\right)\right] = 0, \tag{17}$$

или, после введения контравариантной тензорной плотности $\mathfrak{f}^{\mu\alpha}$,

$$\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu}\nu|\nu} - \sigma\mathfrak{f}^{\mu\alpha} = 0. \tag{17a}$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения содержат в первом приближении теорию Максвелла. Во-первых, зависимость «напряженностей поля» $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ от «потенциалов» φ_μ в первом приближении совершенно такая же, как в теории Максвелла. Во-вторых, поскольку символ «$|\nu$» в первом приближении означает обычное дифференцирование, в силу антисимметрии $\mathfrak{S}$, производные по α, $\mathfrak{f}^{\mu\alpha}_{\ \ |\alpha}$, обращаются в нуль.

Однако, чтобы оправдать существование электрических зарядов, необходимо перейти к пределу $\sigma = 0$.

§ 3. Предельный случай $\sigma = 0$

Для осуществления рассматриваемого предельного перехода требуется некоторая подготовка. Запишем тензор $\mathfrak{G}^{*\mu\alpha}$ в виде

$$\mathfrak{G}^{*\mu\alpha} = \frac{1}{2}\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}|\nu} + \mathfrak{H}^{*\mu\alpha}. \tag{18}$$

Из равенств (3) и (11a) следует, что $\mathfrak{H}^{*\mu\alpha}$ является однородной квадратичной функцией величин $S^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$[3]. Далее, величины $\mathfrak{G}^{*\mu\alpha}$ удовлетворяют тождеству

$$D_\mu\left(\mathfrak{G}^{*\mu\alpha}\right) \equiv 0. \tag{5a}$$

Теперь предельный переход к случаю $\sigma = 0$ в соответствии с уравнением (17a) непосредственно приводит к уравнению

$$\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu}\nu|\nu} = 0. \tag{19}$$

Эти шесть уравнений — если отвлечься от особых случаев — имеют следствием обращение в нуль четырех величин $\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$. Кроме того, в дальнейшем я буду предполагать, что при переходе к пределу $\sigma = 0$ величины $\mathfrak{S}^{\alpha}_{\mu\nu}$ стремятся к нулю, как σ; пока я не смог найти доказательство этого утверждения.

Исключая величины $\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu}\nu|\nu}$ из соотношений (18) и (17a), получаем

[3] Ср., однако, статью 99, § 1.— *Прим. ред.*

уравнение

$$2\,(\mathfrak{G}^{*\mu\alpha} - \mathfrak{H}^{*\mu\alpha}) - \sigma \mathfrak{f}^{\mu\alpha} = 0,$$

или после выполнения операции D_μ, в силу (5a),

$$D_\nu \left(\mathfrak{f}^{\mu\alpha} + 2\,\frac{\mathfrak{H}^{*\mu\alpha}}{\sigma} \right) = 0. \tag{20}$$

При предельном переходе к случаю $\sigma = 0$ обращается в нуль второй член, числитель которого стремится к нулю как $(\mathfrak{S}^{\alpha}_{\mu\nu})^2$, т. е., согласно только что сделанному предположению, как σ^2. Таким образом получаем

$$D_\mu (\mathfrak{f}^{\mu\alpha}) = 0. \tag{21}$$

Это уравнение вместе с равенством

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} = 0 \tag{22}$$

и есть результат предельного перехода.

Таким образом, конечным результатом нашего исследования является совокупность систем уравнений (9), (21) и (22), причем вывод уравнения (21) остается не вполне строгим.

Следует еще заметить, что равенства (22) приводят к тому, что вместо функции Гамильтона (7) для получения уравнений (9) можно использовать также функцию Гамильтона

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_3. \tag{7a}$$

Поступила 23 апреля 1929 г.

Вывод уравнений (21) в этой работе содержит ошибку, которая исправляется в статье 99.