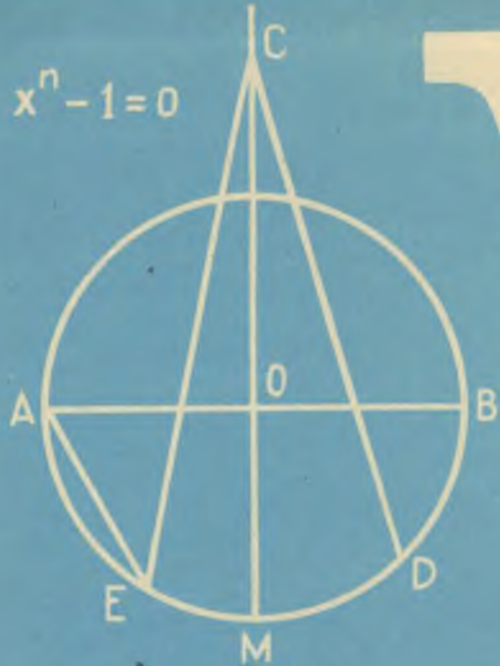
С. Е. БЕЛОЗЕРОВ

ПЯТЬ ЗНАМЕНИТЫХ ЗАДАЧ ДРЕВНОСТИ

$$x^n - 1 = 0$$



Ἱπποκράτης

Ἀρχιμήδης

Ἀρχυτας

Abu-l-Wafa

Omar Khayyâm

Alkâschî

F. Viete

R.Descartes

D.Bernoulli

L.Euler

A.Legendre

$$a_0\pi^n + a_1\pi^{n-1} +$$

$$n\operatorname{Sin}^2 m\theta - m\operatorname{Sin}^2 n\theta = 0$$

$$n(x^m - 1)^2 - mx^{m-n}(x^n - 1)^2 = 0$$

C. Gauss

P. Wantzel

F. Lindemann

Н. ЛОБАЧЕВСКИЙ

А. МАРКОВ

Л. ЧАКАЛОВ

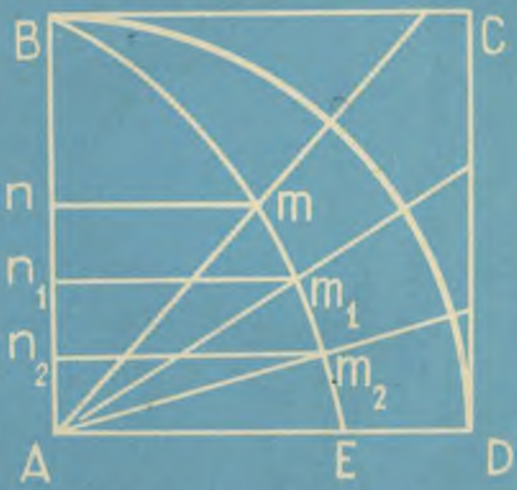
Н. ЧЕБОТАРЕВ

А. ДОРОДНОВ

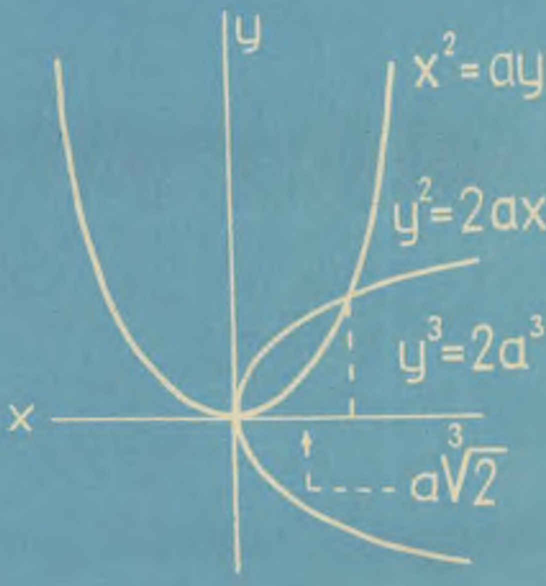
Д. МОРДУХАЙ-
-БОЛТОВСКОЙ

Н. НЕСТЕРОВИЧ

$x^3 - 3x - a = 0$



$\dots + a_{n-1}\pi + a_n \neq 0$



РОСТОВСКИЙ-НА-ДОНУ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

С. Е. Белозеров

ПЯТЬ ЗНАМЕНИТЫХ ЗАДАЧ ДРЕВНОСТИ

История и современная теория

Издательство Ростовского университета
1975

УДК 070010

Печатается по постановлению Ученого совета механико-математического факультета Ростовского-на-Дону ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

Ответственный редактор Ю. П. Виноградов

С. Е. Белозеров. **Пять знаменитых задач древности (История и современная теория).** Издательство Ростовского университета, 1975.

320 стр.

В работе рассматривается история и современная теория пяти знаменитых задач древности: квадратура круга, трисекция угла, удвоение куба, деление окружности на равные части, квадрирование луночек. Наличие в монографии задач и вопросов, составленных автором, будет способствовать лучшему усвоению некоторых вопросов теории пяти знаменитых задач древности и может стимулировать любознательную молодежь на попытки самостоятельного решения еще нерешенных вопросов современной теории пяти задач древности.

Книга будет полезной для учителей математики, студентов и учащихся старших классов. Кроме того, ее можно использовать при изучении истории математики и некоторых разделов курса высшей математики. Она также может служить любителям математики для повышения уровня математической культуры.

Б $\frac{0221-088}{М 175(03)-75}$ 30 доп.—74

ВВЕДЕНИЕ

Математические задачи, возникающие в жизни и в практической деятельности людей, в технике и в науке, в том числе и в математике, весьма многочисленны и разнообразны.

Умение правильно ставить эти задачи, хорошо и быстро решать их высоко ценилось на всех ступенях культурного развития людей, особенно в эпоху научно-технической революции, когда математика проникает во все науки и во все сферы деятельности людей. Решению задач отводится много времени при изучении математики в школах и вузах.

Среди математических задач некоторые пользуются особой популярностью; им со временем приваивают эпитеты: «неподдающиеся», «коварные», «жемчужины математики», «великие», «неприступные крепости», «знаменитые» и т. п.

Особенно большое внимание привлекали к себе в течение многих столетий задачи, которые с давних времен известны как «знаменитые задачи древности». Под этим названием обычно фигурировали три знаменитые задачи: 1) квадратура круга, 2) трисекция угла, 3) удвоение куба. Некоторые авторы с полным основанием причисляют к ним еще две задачи древности: 1) деление окружности на равные части (построение правильных многоугольников), 2) квадратура луночек.

Все эти задачи возникли в глубокой древности из практических потребностей людей. На первом этапе своего существования они выступали как вычислительные задачи: по некоторым «рецептам» вычислялись приближенные значения искомых величин (площадь круга, длина окружности и др.). На втором этапе истории этих задач (VI в. до н. э. — VI в. н. э.) происходят существенные изменения их характера: они становятся геометрическими (конструктивными) задачами.

В Древней Греции в этот период им придали классические формулировки: 1) построить квадрат, равновеликий данному кругу; 2) разделить данный угол на три равные части; 3) построить ребро нового куба, объем которого был бы в два раза больше данного куба; 4) построить правильный n-угольник (разделить окружность на n равных частей); 5) построить прямолинейную фигуру, равновеликую данной круговой луночке. Все эти геометрические построения предлагалось выполнять с помощью циркуля и линейки.

Простота формулировок этих задач и «непреодолимые трудности», встретившиеся на пути их решения, способствовали росту их популярности. Стремясь дать строгие решения указанных задач, древнегреческие ученые «попутно» получали многие важные результаты для математики, что способствовало превращению разрозненных математических знаний в самостоятельную дедуктивную науку (особенно заметный след в то время оставили пифагорийцы, Гиппократ Хиосский и Архимед).

Третий период в истории этих задач (VII—XVIII вв.) характеризовался тем, что центр интереса к ним переместился из Древней Греции сначала в страны Востока, а затем в Европейские страны. В это время продолжалось применение и совершенствование методов древних греков при решении задач, которые стали уже называться «знаменитыми». Наряду с этим начался процесс сведения этих задач к алгебраическим уравнениям и применение аналитических средств для представления и вычисления некоторых искомых величин. В этот период число ученых, занимавшихся знаменитыми задачами древности, сильно возросло. Но наиболее существенное влияние на дальнейшее развитие их теории оказали результаты работ Л. Эйлера.

Новый этап (конец XVIII—XIX вв.) ознаменовался энергичным наступлением на трудности, преграждавшие пути к решению знаменитых задач древности, с помощью «оружия», появившегося к этому времени в математике, и покорением четырех из пяти «неприступных крепостей» (деление окружности на равные части, трисекция угла, удвоение куба, квадратура круга). Покорителями этих задач были Гаусс, Ванцель и Линдеман. На подступах к штурму этих задач-крепостей большую роль сыграли Эйлер, Ламберт, Лежандр, Лиувилль, Г. Кантор и Эрмит.

Но история этих пяти задач не оборвалась на работах покорителей четырех из них.

В последние десятилетия получены многие новые способы точного и приближенного решения их. Советские математики Н. Г. Чеботарев и А. В. Дороднов покорили и пятую задачу, не поддававшуюся зарубежным математикам XIX и начала XX столетия, а Д. Д. Мордухай-Болтовской, В. Ф. Каган, Н. М. Несторович, А. С. Смогоржевский и другие перенесли знаменитые задачи древности в неевклидовы геометрии и получили важные результаты. Многие советские математики дали новые способы решения этих задач в плоскости Евклида, активно популяризировали эти задачи среди молодежи.

Если в прошлом ведущую роль в разработке теории знаменитых задач древности и их популяризации играли математики Древней Греции, арабоязычных и европейских стран (особенно Франции и Германии), то теперь эта роль бесспорно принадлежит советским математикам.

Указанная здесь периодизация истории знаменитых задач древности положена в основу конструкции данной книги, являющейся обработкой спецкурса «История и современная теория пяти знаменитых задач древности», читавшегося автором студентам мехмата РГУ (будущим учителям).

Данная книга во многом отличается от работ, посвященных истории знаменитых задач древности. В ней рассматривается не только история, но и современная теория и не трех, а пяти знаменитых задач древности.

В книге на основе анализа большого фактического материала рассматриваются и некоторые общие вопросы: о происхождении и стимулах развития теории этих задач, периодизация их истории, их роль в истории математики, в повышении интереса к математике у молодежи и в повышении математической культуры любителей математики. На основании работ арабоязычных математиков, переводы которых появились в последние годы, освещен их вклад в теорию знаменитых задач древности. Здесь впервые показана роль математиков нашей страны в развитии теории и в популяризации знаменитых задач древности.

В книге содержится большое количество задач, связанных со знаменитыми задачами древности, решение которых позволит лучше понять их теорию, а любознательным читателям может помочь стать и на «нехоженные тропы» в математике, а затем испытать и радость открытия нового. Судя по нашему опыту работы со студентами и школьниками, содержание большинства параграфов первых двух глав и некоторых параграфов последних глав доступно и школьникам старших классов. Студенты-математики, владеющие основами математического анализа, теории чисел, высшей алгебры и высшей геометрии, не только могут понять содержание всей книги, но и выйти за ее пределы, как это было со студентами РГУ, участвовавшими в спецсеминаре и писавшими дипломные работы на темы указанного спецкурса.

Отдельные части этой книги могут быть использованы при изучении общего курса истории математики, а также при изучении математики в школах, техникумах и вузах. Более полно может быть использована эта книга на факультативных занятиях в школах, при чтении спецкурса и проведении спецсеминара в пединститутах и университетах на тему «История и современная теория знаменитых задач древности».

Возможно, что данная книга побудит некоторых молодых любителей математики заняться повышением уровня своей математической культуры, а некоторым «квадратурщикам» и «тресикционистам» поможет понять свои заблуждения, приводящие к напрасной трате времени на решение этих задач циркулем и линейкой.

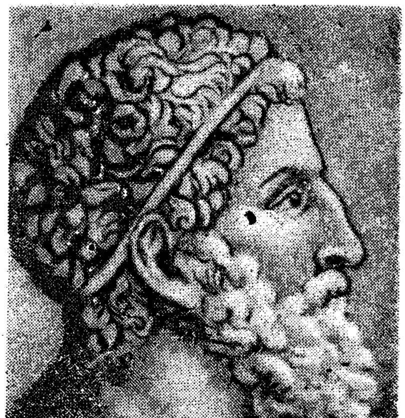
В монографии дана затекстовая библиография. Цифры в квадратных скобках, разделенные запятыми, до точки с запятой указывают на источник, после точки с запятой — на его страницу.

Примечания к тексту, задачи, вопросы и рекомендации даны в конце каждой главы.

Пифагор

Архит Тарентский

Евклид



Архимед

Глава I

ЗНАМЕНИТЫЕ ЗАДАЧИ В ДРЕВНЕМ МИРЕ

Квадратура круга и луночек

Из числа многообразных математических задач, решавшихся в странах Древнего мира, пять задач привлекали к себе особое внимание. Эти задачи (квадратура круга, трисекция угла, удвоение куба, деление окружности на равные части и квадратура луночек) в разные периоды их многовековой истории существенно меняли форму и содержание и играли разную роль в математике. В этой главе мы рассмотрим только два первых периода их истории: в первом из них все эти задачи выступали как *вычислительные*, во втором — как *геометрические* (конструктивные). В эти периоды наиболее популярной задачей была *квадратура круга*. Во втором периоде, когда главную роль в развитии теории указанных пяти задач играли древнегреческие ученые, с задачей о квадратуре круга была тесно связана и задача о квадрировании круговых луночек, которая еще не приобрела тогда своей самостоятельности.

О происхождении задачи

Задача о вычислении площади круга так же, как и другие математические задачи в Древнем мире, возникла из практических потребностей.

Но прежде чем возникла эта задача, человек должен был иметь представление о «круглом» в отличие от «некруглого». Общение с природой и практическая деятельность людей сталкивали их с «круглым»: солнце, полная луна, в отличие от других ее фаз, волны на спокойной поверхности воды от брошенного в нее камня, поперечный разрез ствола дерева, линия, описываемая свободным концом натянутой веревки, привязанной к дереву или колышку, круглый участок земли, окруженный водой, и т. п.

Подражая тому, что видели в природе, и убедившись на практике в целесообразности придания некоторым предметам «круглой» формы или формы цилиндра и конуса, основания которых были тоже круглые, люди постепенно стали использовать «круглое» в предметах быта, хозяйственных постройках и орнаментах. Археологи установили, что еще в далекие от нас времена некоторые жилые помещения (шалаши, юрты и др.)[1], водохранилища и зернохранилища, коляски, посуда, украшения имели своими элементами и «круглое»: полы жилищ, колонны, купола, колеса[2], днища, отверстия, круги и части кругов в орнаментах. По мере усложнения практической деятельности и культурного развития людей появились необходимость и возможность приближенного вычисления площади «круглого»: участков земли, объемов водохранилищ и зернохранилищ цилиндрической формы, площади поперечного разреза дерева, а также вычисления длины линии, окружающей ствол дерева (толщину), длины обода колеса, толщины «круглых» колонн и длины линии, окружающей «круглое» поле, дно или отверстие.

Так, вероятно, из практических потребностей и возникла задача о вычислении площади «круглого» и длины линии, окружающей это «круглое», а затем появились и абстрактные понятия «круг» и «окружность».

Как решали люди эти задачи в те далекие от нас времена, когда не было еще никакой письменности, трудно сказать. Здесь можно только высказать предположения. Толщину дерева и длину обода колеса (окружность) они могли, например, определить длиной шнурка, плотно охватывающего их. Площадь круга они, вероятно, вычисляли весьма приближенно, сводя ее каким-либо образом к вычислению площадей прямолинейных фигур. Для практики того времени такая точность могла быть вполне достаточной.

О способах решения этих задач мы узнали лишь после появления письменности. Наиболее древние из известных нам письменных памятников, в которых рассматриваются и эти задачи, относятся ко времени 1600—2000 гг. до н. э., т. е. эти документы появились на свет около 4 тысяч лет тому назад.

Рецепты древних египтян и вавилонян

В третьем тысячелетии до н. э. берега Нила и долину между Тигром и Евфратом населяли народы уже с достаточно высокой культурой. Под влиянием запросов усложнившейся хозяйственной деятельности людей в период формирования рабовладельческого общества усилились темпы развития примитивной техники и накопления научных знаний, относящихся к области астрономии, механики и математики. Огромную роль в накоплении научных знаний и в развитии общей культуры в Египте и Вавилоне в то время стала играть письменность, изобретенная еще в 4-м тысячелетии до н. э. Математическая культура древних египтян и вавилонян достигла наивысшей степени своего развития, по-видимому, в период с 21 по 16 в. до н. э. Сохранившиеся папирусы[3] и глиняные дощечки[4], на которых излагаются математические задачи и рецепты их решения, относятся в основном к указанному периоду; среди различных математических задач там встречаются и задачи на вычисление площади круга и длины окружности.

Математические знания древних египтян и вавилонян были рецептурными, бесформульными и безымянными[5], тесно связанными с практикой.

Наиболее известным древнеегипетским папирусом с математическим содержанием является папирус Ахмеса (по имени переписчика), или иначе «лондонский», так как он хранится в Лондонском музее. Ахмес переписал его около 1700 г. до н. э. с более древнего папируса. Этот папирус был найден в 1858 г., расшифрован и опубликован Эйзенлором в 1877 г. [117]. В ряде задач этого папируса требуется находить площади фигур и объемы тел. Так, в одной из задач требуется «найти площадь круглого поля, диаметр которого равен 9». Рецепт нахождения площади этого поля такой же, как и рецепт нахождения площади основания круглого цилиндра в задаче под № 41. В этой задаче дается «наставление, как вычислить круглый хлебный амбар в 9 и 10 локтей[6], т. е. вычислить объем цилиндра, диаметр которого 9, а высота 10 локтей. Рецепт для вычисления круга такой: «От 9 отними 1/9, т .е. 1, в остатке будет 8. Умножь 8 на 8, это даст 64». Затем, умножив это число на 10, они находили и объем «круглого амбара».

Если использовать наши формулы, то рецепт древних египтян для вычисления площади круга можно облечь в такую формулу

$$S_{кр}=\left(\frac{8}{9}\ d\right)^2,$$

где d — диаметр данного круга, а $S_{кр}$ — искомая площадь круга. Этот рецепт можно истолковать так: если на 8/9 диаметра круга построить квадрат, то он будет равновеликим данному кругу (рис. 1). В действительности же площадь такого квадрата будет только приближенно равна площади данного круга. Мы можем теперь легко установить и степень точности этого рецепта. По рецепту древних египтян

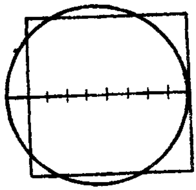


Рис. 1.

$$\left(\frac{8}{9}\ d\right)^2 = \pi R^2, \text{ откуда } \pi = \frac{256}{81} = 3{,}16,$$

в то время как действительное значение $\pi = 3{,}14159...$ Следовательно, ошибка, которую они допускали при вычислении площади круга, мала, и для их практических целей была неощутима. Но они, по-видимому, считали, что нашли способ точного вычисления площади круга[7].

В другом древнеегипетском папирусе (Акмоминском) рассматривается круг, окружность которого есть среднее арифметическое двух окружностей с радиусами 5 и 10, и утверждается, что площадь этого круга будет среднее арифметическое кругов с радиусами 5 и 10.

Длину окружности древние египтяне вычисляли по рецепту, укладывающемуся в формулу

$$C = \left(\frac{8}{9}\right)^2 4d,$$

откуда следует, что $\pi = 3{,}16$.

В вавилонских клинописных текстах, относящихся примерно к 1700—2000 гг. до н. э., встречаются тоже задачи, связанные с кругом и окружностью.

Словесные рецепты древних вавилонян для вычисления площади круга можно выразить современной формулой

$$S_{кр} = \frac{C^2}{12},$$

где C — длина окружности. Чтобы прийти к такому рецепту, нужно было считать, что

$$S_{кр} = \frac{1}{2}\,Cr \quad \text{и что} \quad \frac{C}{2r} = \pi = 3 \qquad \text{или} \qquad r = \frac{C}{6};$$

тогда $S_{кр} = \frac{1}{2}\,\frac{C}{6}\,C = \frac{C^2}{12}$. Следовательно, вавилоняне полагали, что $\pi = 3$. Этот результат, как видно, менее точен, чем у египтян. Но многие ученые полагают, что вавилоняне имели более точное значение для π и некоторое представление о связи длины окружности с площадью круга [75].

В одном из клинописных текстов, принадлежащих Британскому музею, который содержит 35 задач, относящихся к строительной технике и военному делу, две задачи связаны с элементами круга. В одной из них дается длина окружности и стрелка CD, требуется найти длину хорды AB=a (рис. 2). Эта задача читается так: «60 — окружность, 2 — это то, на что я опустился (стрелка CD). Что есть линия раздела (хорда AB)?».

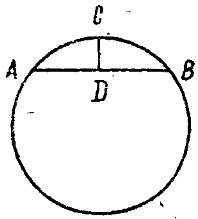


Рис. 2.

Дальше в тексте дан словесный рецепт нахождения хорды a, эквивалентный нашей формуле $a=\sqrt{d^2-(d-2S)^2}=12$, где d — диаметр круга, CD=S — стрелка. Во второй задаче даются окружность и хорда, требуется найти стрелку. Решение древних вавилонян, данное в виде словесного рецепта, укладывается в нашу формулу

$$S=\frac{1}{2}\left(d-\sqrt{d^2-a^2}\right).$$

В обоих задачах при длине окружности C=60 диаметр d принимается равным 20.

В дальнейшем многие народы при вычислении площади круга и длины окружности пользовались рецептами египтян и вавилонян.

О круговых луночках в древневавилонских текстах нам известно только то, что сообщает Нейгебауэр в своей книге [75; 189]. В тексте, который рассматривает Нейгебауэр, вычисляются площади симметричных фигур, на которые разбит квадрат (рис. 3). Эти фигуры встречались у вавилонян в орнаментах.

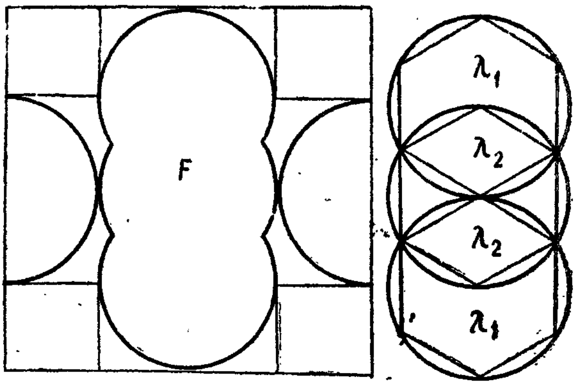


Рис. 3

В поврежденном тексте сохранилась только формулировка задачи. Нейгебауэр предложил свою реконструкцию вычисления искомой площади F, ограниченной дугами трех окружностей одинаковых радиусов, через площадь круга $F_к$ и площадь вписанного правильного шестиугольника F_6. Обозначив площадь выпукло-вогнутой луночки[8] λ_1, а двояко-выпуклой — λ_2, он получает

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}[F_к + F_6]; \qquad \lambda_2 = \frac{2}{3}F_к - \frac{1}{3}F_6;$$

$$F = 3F_к - 2\lambda_2 = F_к + 2\lambda_1 = 3F_к - \frac{4}{3}F_к + \frac{2}{3}F_6 = \frac{5}{3}F_к + \frac{2}{3}F_6.$$

Нейгебауэр считает, что у древних вавилонян «были все предпосылки для решения этих задач», и что «3 не было единственным известным вавилонянам приближенным значением для π», что видно и из рассмотренного здесь примера, так как при $\pi = 3$ не получается точного значения площади круга.

Следовательно, и с «луночками» люди Древнего мира встречались на практике задолго до того, как древние греки пытались в V в. до н. э. найти с их помощью квадратуру круга. Но рецепты вычисления площадей луночек древними вавилонянами нам неизвестны. Если они и вычисляли площадь луночек, то, вероятно, приближенно, заменяя их площадями прямолинейных фигур. Формулы же Нейгебауэра для вычисления λ_1 и λ_2 справедливы только для рассматриваемого случая и предполагают умение находить площади круга и шестиугольника[9].

Первые попытки квадратуры круга в Древней Греции

Следы дальнейших попыток решения задачи о вычислении площади круга и длины окружности мы находим в Древней Греции. Здесь эта задача приобрела уже и теоретический характер и классическую геометрическую формулировку, а также были разработаны многие методы точного и приближенного ее решения. В отличие от безымянной и рецептурной математики Древнего Востока, в древнегреческой математике уже в VI и V в. до н. э. появляется доказательство, а в истории математики сохранились многие имена древнегреческих ученых, занимавшихся решением и задачи о квадратуре круга.

Многочисленные попытки древнегреческих ученых V—III вв. до н. э. были направлены на поиски точных решений этой задачи.

Первыми учеными в Древней Греции, создавшими свои школы, занимавшиеся и математикой, были Фалес (конец VII — начало VI в. до н. э.) и Пифагор (VI в. до н. э.). Оба они путешествовали по Египту и Вавилонии, знакомились с наукой этих стран.

Возможно, что там они знакомились и с рецептами древних египтян и вавилонян для вычисления площади круга. Различие рецептов египтян и вавилонян при решении одной и той же задачи могло заставить греков попытаться доказать, какой из этих способов вернее или оба неверны.

В школе Пифагора уделялось много внимания вопросам геометрических построений: решались циркулем и линейкой задачи на сложение и вычитание, умножение и деление отрезков, на построение среднеарифметических и среднегеометрических, на построение правильных фигур и на превращение одних прямолинейных фигур в другие[10].

Некоторые последователи Фалеса и Пифагора пытались построить прямолинейную фигуру, равновеликую кругу. Об этом мы узнаем из трудов древнегреческих историков и из сохранившихся отрывков трудов отдельных математиков той эпохи. Так, например, древнегреческий историк Плутарх утверждал, что Анаксагор из Клазомен (500—428 гг. до н. э.), последователь Фалеса, сидя в тюрьме за безбожие, занимался разными вопросами математики и в том числе «начертал квадратуру круга». Анаксагор, по свидетельству древнегреческих писателей, был «сведущим ученым». О глубоком понимании им некоторых идей математики можно судить и по его утверждению о том, что «среди малых величин не существует наименьшей, но уменьшение идет непрерывно; ибо существующее не может перестать существовать». Из этого видно, что Анаксагор действительно мог попытаться построить прямолинейную фигуру, равновеликую данному кругу. Но как он это делал, науке неизвестно: его труды не сохранились, и нет никаких подробностей об этом у древних писателей.

О попытках Антифона, Бризона и Гиппократа решить эту задачу имеются более полные сведения. В «Истории геометрии» Евдема (IV в. до н. э.) содержались многие сведения о результатах работы его предшественников и современников. Из нее стало известно кое-что и о результатах первых попыток решения задачи о вычислении площади круга древнегреческими учеными. В частности Евдем писал, что «среди многих лиц, которые искали квадратуру круга, были Антифон и Гиппократ». Аристотель и его комментаторы указывали также, что квадратурой круга во второй половине V в. до н. э. занимался также и Бризон.

Антифон (V в. до н. э.) был в основном последователем древнегреческого материалиста Демокрита, сыгравшего заметную роль и в истории математики.

В «Истории геометрии» Евдем так описывал попытку Антифона сквадрировать круг: «Начертив круг, он вписал в него такой правильный многоугольник, который мы умеем вписать. Пусть это будет квадрат. Потом он разделил каждую сторону квадрата пополам и через точки деления провел прямые, перпендикулярные к сторонам до пересечения с окружностью. Очевидно, они делят сегменты круга на две равные части (рис. 4). Затем он соединил полученные точки с концами сторон квадрата так, что получились четыре треугольника, и вся образовавшаяся фигура стала правильным восьмиугольником...»

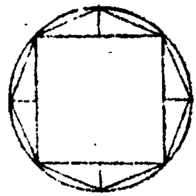


Рис. 4.

Продолжая дальше этот процесс, Антифон получил 16-угольник, 32-угольник и т. д. «Поступает он так, — продолжает Евдем, — пока не исчерпает весь круг. И Антифон заключает, что таким образом будет вписан многоугольник, периметр которого можно рассматривать как длину окружности»[11]. Следовательно, Антифон считает, что можно получить многоугольник, равновеликий кругу. А так как в то время было известно, что любой многоугольник можно преобразовать в равновеликий квадрат, то вполне возможно, что Антифон думал, что ему удалось найти квадратуру круга с помощью циркуля и линейки.

Пифагориец Бризон (V в. до н. э.) при решении задачи о квадратуре круга не только вписывал в круг, но и описывал около него соответствующие правильные многоугольники (рис. 5). Справедливо считая, что площадь круга больше площади вписанного и меньше площади описанного n-угольника[12], он, однако, ошибочно утверждал, что площадь круга $S_{кр}$ есть среднее арифметическое площади вписанного n-угольника (S_n) и описанного n-угольника (S'_n), т. е.

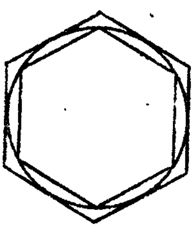


Рис. 5.

$$S_{кр} = \frac{S_n + S'_n}{2}.$$

В этом можно усмотреть зародыш понятия верхнего и нижнего предела.

Геометрическая формулировка задачи

Первые попытки решения задачи о квадратуре круга в Древней Греции хотя и отличались от рецептов египтян и вавилонян, но они были основаны тоже на «предположениях» и «допущениях». Антифон и Бризон, предложив свои способы квадратуры круга, не дали *доказательства* справедливости своих утверждений, а в дальнейшем они подверглись критике. Но многие ученые Древней Греции уже в V в. до н. э. приходили к убеждению о необходимости доказательства в математике[13]. В результате доказательного решения простейших геометрических задач на построение начала создаваться уже теория геометрических построений. Математическое мышление в этот период поднимается на новую ступень абстрактности. В связи с этим и задача о вычислении площади круга в V и IV вв. до н. э. приобрела уже черты теоретической задачи и как конструктивная задача стала популярной среди некоторых слоев населения Греции. В то время она получила вполне определенную формулировку: построить прямолинейную фигуру, площадь которой была бы равна площади данного круга, или построить отрезок прямой линии, равный длине данной окружности.

Следовательно, задача о квадратуре круга становится с этого времени задачей чисто геометрической, конструктивной. Теперь эта задача решается независимо от конкретных практических задач, но решения ее, естественно, кроме теоретического интереса, имели большое значение и для практики.

В этот период задачи «о квадратуре круга» и «о спрямлении окружности» выступают обычно еще как две различные задачи, хотя некоторые ученые начинают осознавать их тесную взаимосвязь и единство.

С нашей символикой первая из этих задач формулируется как задача на построение стороны квадрата $x = R\sqrt{\pi}$, а вторая — построить отрезок прямой $x = 2\pi R$. Откуда видно, что при $R = 1$ обе эти задачи, по существу, сводятся к построению отрезка, равного π, зная который легко построить и отрезок $\sqrt{\pi}$ как среднее геометрическое между 1 и π. В Древней Греции общность этих задач выявлялась в другом направлении. Архимеду удалось доказать, что площадь круга равна площади прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен радиусу этого круга, а другой — длине его окружности. Возможно, что эту теорему знали еще и до Архимеда. В этот же период в истории квадратуры круга произошло еще одно важное событие: в школе Платона (начало IV в. до н. э.) дали «обоснование» необходимости решения всех геометрических задач, в том числе и задачи о квадратуре круга, только циркулем и линейкой[14]. К указанным формулировкам задач стали добавлять «циркулем и линейкой». Задача о квадратуре круга формулировалась теперь так: построить циркулем и линейкой квадрат, равновеликий данному кругу. Эта формулировка в дальнейшем считалась классической; она была доступна для понимания сравнительно широкого круга людей. Однако многочисленные попытки решения этих задач циркулем и линейкой в V—IV вв. до н. э. наталкивались на непреодолимые трудности.

Простота формулировок этих задач, с одной стороны, и трудности, с которыми встретились при решении их, с другой,—возбуждали интерес к ним у многих ученых и дилетантов. Задача о квадратуре круга в конце V и в IV в. до н. э. стала популярной в Древней Греции[15]. Некоторые древнегреческие ученые, игнорируя требование «решать эту задачу только циркулем и линейкой», искали новые средства решения ее. Поиски новых кривых и механизмов для решения этой задачи нередко приводили к обогащению математики. Отдельным ученым того времени удалось получить важные результаты и при попытках квадрирования криволинейных фигур циркулем и линейкой.

Гиппократовы луночки

Вторая половина V в. до н. э. в истории квадратуры круга занимает особое место: к этому времени относятся попытки Антифона и Бризона, Гиппий получает кривую, которую в IV в. использовали для спрямления окружности, многие ученые пытались осуществить квадратуру круга «по частям», т. е. через квадратуру сегментов, секторов, луночек и полукругов.

По свидетельству древних писателей в число этих ученых входил и Гиппократ Хиосский. Он, по-видимому, принадлежал одно время к пифагорийской секте, но затем отошел от нее. По свидетельству Аристотеля Гиппократ из Хиоса был плохим купцом, но «весьма искусным геометром». Считают, что Гиппократ впервые попытался создать систематическое произведение по геометрии. Это сочинение Гиппократа не дошло до нас, но им, возможно, пользовался Евклид при составлении своих «Начал». Гиппократ получил важные результаты и при решении задачи об удвоении куба (см. 41 стр.). Ученик Аристотеля Евдем (IV в. до н. э.) в своей «Истории геометрии» называл Гиппократа Хиосского в числе занимавшихся квадратурой круга и утверждал, что он впервые доказал теоремы:

1. Площади кругов (подобных сегментов) относятся, как пло-

щади квадратов, построенных на их диаметрах (стягивающих хордах).

2. Вписанный в полукруг угол — прямой, в сегмент, больший полукруга, — острый, а в сегмент, меньший полукруга, — тупой.

Нам не известно, как он доказал эти теоремы[16], так как труды его не сохранились, но Евдем и комментатор Аристотеля Симпликий (VI в. н. э.) свидетельствуют, что Гиппократ пользовался этими теоремами при квадрировании круговых луночек. Евдем и Симпликий утверждают, что Гиппократ Хиосский нашел три случая квадрируемых круговых луночек и рассмотрел квадратуру круга вместе с некоторыми луночками. Симпликий со ссылкой на «историю геометрии» Евдема писал: «Квадрирование луночек, которые из своего родства с кругом ранее считали замечательными фигурами, было впервые описано Гиппократом, и его изложение было найдено вполне правильным... Сначала он рассмотрел луночку, внешний обвод которой составляет полуокружность... после этого он начал разбирать случай, когда внешний обвод был больше полукруга... затем рассмотрел сегмент меньше полукруга...»[17]. Найденные Гиппократом Хиосским три случая квадратуры луночек при весьма ограниченных возможностях того времени свидетельствуют об исключительной глубине проникновения автора в сущность проблемы и об оригинальности его математического мышления.

Первый случай квадрируемых луночек — это круговые луночки, у которых «внешний обвод полукруг ABC», а «внутренний обвод» — четверть круга AγC (рис. 6). Эти луночки и в наше время называются Гиппократовыми. Симпликий так излагает ход рассуждений Гиппократа в этом случае: «Он описал полу-

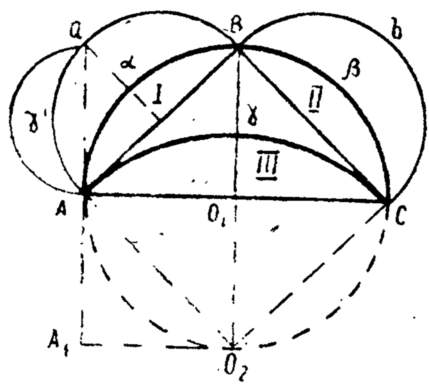


Рис. 6.

круг около прямоугольного равнобедренного треугольника и построил на основании круговой сегмент, подобный сегментам, отсеченным сторонами прямого угла, и равный их сумме». И дальше Симпликий утверждает: «Если теперь прибавить к тому и другому ту часть треугольника, которая находится над построенным на основании сегментом, то эта луночка $A\alpha B\beta C\gamma$ будет равна треугольнику (ABC). Таким образом, он легко квадрировал луночку, приняв, что ее внешний обвод—полуокружность». Так действительно мог сквадрировать эту луночку Гиппократ Хиосский. Но он мог рассуждать и несколько иначе, заметив, что площадь полукруга ABC равна площади сектора $AO_2C\gamma A$, а сегмент III у них общий, он мог показать, что площадь указанной луночки равна площади треугольника AO_2C[18].

В работах же по истории математики чаще всего излагают этот случай так [13, 58, 80, ...]: возьмем полукруг $A\alpha B\beta C$ и впишем в него равносторонний треугольник ABC, затем на его катетах как на диаметрах построим полукруги AaB и BbC. На основании приведенной теоремы (1), площадь полукруга на гипотенузе AC равна сумме площадей полукругов на катетах AB и BC, а отношение площади первоначального полукруга к площади одного из полукругов ($A\alpha B$) равно $2:1$. Отняв от равных равные (общие сегменты I и II), получим, что площадь треугольника ABC равна сумме площадей двух луночек $AaB\alpha A$ и $BbC\beta B$ или площадь одной из них равна площади прямоугольного треугольника с вершиной в O_1. Это тоже правильный способ квадрирования луночек, «внешний обвод» которых есть полуокружность, а «внутренние обводы» опираются на угол $\frac{\pi}{2}$. Но в этом случае полуокружность, описанная вокруг равнобедренного прямоугольного треугольника, не является «внешним обводом»[19].

Затем Гиппократ Хиосский, как видно из предыдущего, искал квадрируемые луночки при условии, что «внешний обвод» больше полуокружности. По-видимому, в результате ряда попыток и некоторых теоретических соображений ему удалось обнаружить такую луночку с внешним обводом больше полуокружности, для которой он построил равновеликую прямолинейную фигуру циркулем и линейкой. Этот случай квадрирования луночки и известен в литературе как второй случай Гиппократа.

Разные авторы по-разному излагают ход мыслей Гиппократа при квадрировании луночки в этом случае. Ван дер Варден [19], например, приводит соответствующую выдержку из Симпликия, позаимствованную последним из истории геометрии Евдема. В ней говорится, что после разбора первого случая Гиппократ «начал разбирать случай, когда внешний обвод ($ДABC$)

был больше полукруга. Он построил трапецию, три стороны которой были равны друг другу, но квадрат четвёртой, большей из двух параллельных сторон, был в три раза больше квадрата каждой из остальных. Около этой трапеции он описал круг, а на большей ее стороне — сегмент, подобный круговым сегментам, отсеченным тремя другими сторонами».

Евдем не дает полного изложения этого случая. Но, очевидно, Гиппократ доказал, что площадь полученной таким образом луночки DAαBCβD равна площади трапеции DABC (рис. 7).

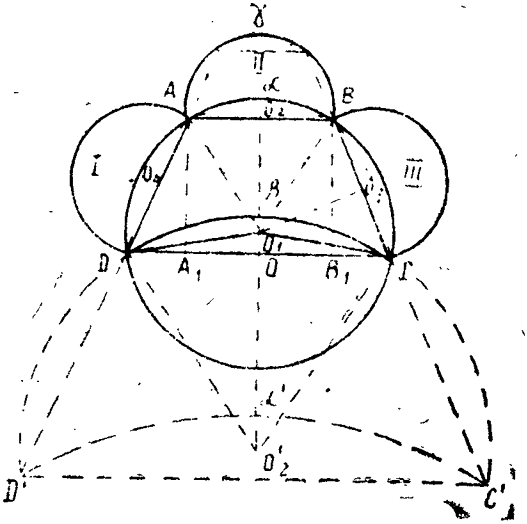


Рис. 7.

Доказательство это он мог провести и так: $S_{D\beta CD} : S_{A\alpha BA} = DC^2 : AB^2 = 3 : 1$. Следовательно, площадь сегмента DCBD, хорда которого $DC = \sqrt{3}$, равна сумме площадей трех сегментов, хорда каждого из которых равна единице. Если теперь от площади сегмента DABC отнять площади указанных трех сегментов, то останется трапеция DABC, если от того же сегмента DABC отнять сегмент на DC, то останется луночка DβCαAD, которая будет равна трапеции DABC. Тем самым циркулем и линейкой построена прямолинейная фигура (трапеция), равновеликая луночке. Именно так излагают этот случай Ван дер Варден [19] и Цейтен [93].

Некоторые авторы [14, 21 и др.] несколько иначе излагают этот случай квадрирования луночки. Они считают, что Гиппократ описал полукруг около трапеции, стороны которой $DC = \sqrt{3}$, DA=AB=BC=1, потом на сторонах DA, AB, BC построил сегменты, подобные сегменту DABC, и показал, что площадь сегмента DABC равна сумме площадей сегментов на DA, AB, BC. Если затем от равных отнять равные (площади сегментов, ограниченные DA, AB, BC и дугами основного круга), то от сегмента на DC останется трапеция DABC, которая будет равновеликой сумме трех луночек I, II, III. Чтобы сквадрировать одну из этих луночек, нужно разделить на три равные части площадь трапеции, а это возможно циркулем и линейкой[20].

После этого, как утверждают писатели древности, Гиппократ «рассмотрел сегмент меньше полукруга» (рис. 8). Он нашел

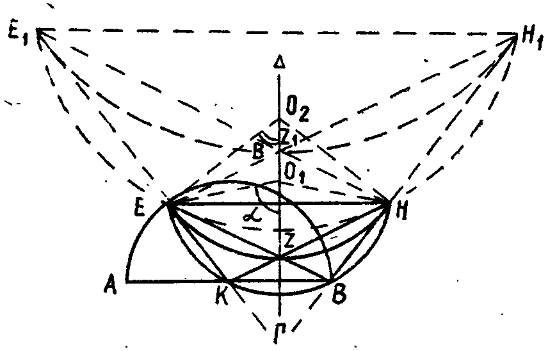


Рис. 8.

при этом луночку, для которой ему удалось построить равновеликую прямолинейную фигуру циркулем и линейкой. Этот случай обычно и называют третьим случаем квадратуры луночек. В историко-математической литературе ход рассуждений Гиппократа в этом случае тоже передается по-разному. Ващенко-Захарченко в «Истории математики» [21] этот случай излагает так.

Гиппократ строит трапецию EKBH (см. рис. 8), в которой EK=KB=BH. $ZH:KB=\sqrt{3}:\sqrt{2}$. Затем он описывает около трапеции круг, доказывает, что сегмент EKBH меньше полукруга, описывает круг около треугольника EZH и показывает, что сумма двух сегментов на EZ и HZ равна сумме трех сегментов на EK, KB, BH. Доказав это, Гиппократ берет луночку EKBHZE и, отняв от нее сегменты на EK, KB, BH и добавив равные им сегменты на EZ и HZ, показывает, что площадь луночки EKBHZE равна площади пятиугольника EKBHZE.

Более полное, близкое к изложению Евдема этого случая квадрирования круговой луночки дано у Цейтена [93; 60], Ван дер Вардена [19; 187] и в комментариях И. Н. Веселовского к Сочинениям Архимеда [5; 535]. В частности, Цейтен приводит при этом «дословно отрывок из сообщения Евдема... с добавлениями Таннери»:

«Пусть дан круг, имеющий диаметром прямую АВ ($=2r$), а центром точку К. Проведем прямую ГΔ, перпендикулярную к середине прямой ВК, и между этим перпендикуляром и окружностью—прямую EZ, направленную к В и равную в степени полуторакратному радиусу$\left(=r\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Проведем прямую ЕН параллельно прямой АВ. Соединим К с Е и Z. Пусть Н будет точкой пересечения прямой ЕН и продолжения прямой KZ. Соединим, наконец, В с Z и Н. Ясно, что одна из этих двух последних прямых будет продолжением прямой ЕН, упирающейся в В, и что другая — прямая ВН — будет равна прямой ЕК. Если допустить все это, то вокруг трапеции ЕКВН можно описать окружность. Построим теперь сегмент EZH. Тогда каждый из двух сегментов на прямых EZ и ZH будет подобен каждому из трех сегментов на прямых ЕК, КВ и ВН. Если принять это, то получившаяся луночка будет равновелика прямолинейной фигуре, составленной из трех треугольников, т. е. пятиугольнику EKBZH...»[21].

Судя по другим отрывкам из Евдема, приведенным в «Комментариях» И. Н. Веселовского [5; 537], Гиппократ доказал, что угол НКЕ тупой, или что сегмент ЕКВН меньше полукруга, также доказал справедливость высказанных выше «допущений»: «если допустить...», «если принять...» и др. Но и в этом случае остается неясным вопрос: как Гиппократ построил «вставку» EZB, удовлетворяющую указанным условиям? Рассмотрев три случая квадрирования круговых луночек циркулем и линейкой, Евдем говорит далее: «Таким образом, Гиппократ нашел квадратуру для всякой луночки, будет ли ее внешняя дуга равна, больше или меньше полуокружности»[22]. Симпликий, приводя эти «выдержки из «Истории геометрии» Евдема, широко использует «Начала» Евклида для доказательства некоторых утверждений Евдема, оставленных без доказательства, и указывает на то, что комментатор Аристотеля Александр (III в. н. э.) был не прав, утверждая, что Гиппократ нашел только квадратуру луночки, построенной на стороне квадрата (1-й случай)[23].

Некоторые ученые думали, что, найдя квадратуру луночек с внешней дугой, равной, большей и меньшей полуокружности, Гиппократ будто бы считал, что он может сквадрировать любую луночку, а следовательно, и круг. Ему приписывали, в частности, такое «доказательство» квадратуры круга циркулем и линейкой. Возьмем полукруг ABCD с радиусом R и впишем в него трапецию со сторонами $AB=BC=CD=R$ (рис. 9) на этих сторонах как на диаметрах опишем полукруги. Площадь полукруга с диаметром $AD=2R$ равна сумме четырех полукругов, построенных на сторонах, равных R ($(2R)^2:R^2=4:1$). Очевидно, что площадь полукруга с центром O_1 и трех луночек равна площади трапеции ABCD. Если бы Гиппократ Хиосский считал,

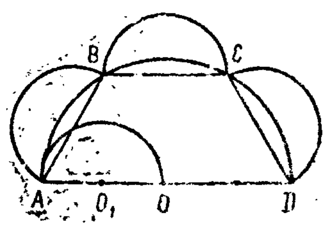


Рис. 9.

что луночки, построенные на сторонах вписанного в круг правильного шестиугольника, квадрируемы, то тогда он действительно мог бы думать, что площадь полукруга на AO равна площади трапеции без суммы площадей трех указанных луночек, представленных в виде прямолинейной фигуры. Но Симпликий считал, что Гиппократ так не думал. Многие современные авторы не без основания считают, что вряд ли Гиппократ Хиосский мог допустить такую ошибку. Насколько нам известно, нет никаких свидетельств того, что Гиппократ, найдя три квадрируемые луночки, сделал заключение, что «все луночки квадрируемые». Если бы Гиппократ действительно так думал, то он непременно бы показал, подобно рассмотренным трем случаям, как можно сквадрировать и луночку, построенную на стороне правильного шестиугольника. И он, по-видимому, пытался это сделать, но убедился в том, что эта задача «невозможная». Возможно, он решил убедиться в том, что рассмотренный им случай квадратуры круга с луночками не единственный. И его поиски привели к открытию еще одного аналогичного случая, представляющего интерес и указывающего на то, что Гиппократ, очевидно, не считал, что все луночки квадрируемы и что ему удалось найти квадратуру круга циркулем и линейкой. Вот что писал Евдем об этом случае квадратуры Гиппократа: «Луночку вместе с кругом он сквадрировал следующим образом: пусть около центра K описаны два круга, причем квадрат диаметра внешнего в шесть раз больше квадрата диаметра внутреннего круга (рис. 10). Пусть во внутренний круг вписан шестиугольник ABCDEF и линии KA, KB и KC продолжены из центра до пересечения с внешним кругом в точках A', B', C'. Пусть на прямой $A'C'$ будет описан сегмент, подобный тому, который отсекается $A'B'$. Вследствие того, что в квадратах прямая $A'C'$ в три раза больше стороны $A'B'$ шестиугольника, последняя в шесть раз больше AB. Ясно, что построенный на AC сегмент ра-

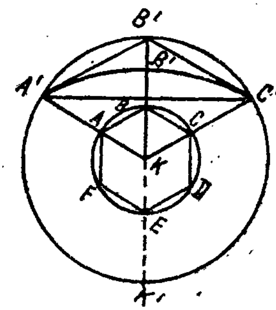


Рис. 10.

вен вместе взятым сегментам, отсеченным от внешнего круга прямыми A′B′ и B′C′ и всем (вместе взятым) сегментам, отсеченным от внутреннего круга сторонами шестиугольника. Поэтому луночка A′B′C′β′A′ будет меньше треугольника A′B′C′ как раз на (взятые вместе) сегменты, отрезанные от внутреннего круга сторонами шестиугольника.

Следовательно, луночка вместе с отрезанными шестиугольником сегментами равна треугольнику. И если к каждой из этих фигур прибавить шестиугольник, то выходит, что треугольник и шестиугольник вместе будут равны луночке с внутренним кругом. Так как упомянутые прямолинейные фигуры могут быть квадрированы, то можно также квадрировать круг вместе с луночкой» [19; 188].

Так Гиппократ Хиосский впервые в истории нашей науки показал возможность квадратуры криволинейных фигур циркулем и линейкой. Это был важный шаг в развитии математики[24]. Гиппократ при этом, как видно, считал, что луночка будет квадрируемой, если циркулем и линейкой можно описать «внешний обвод» около некоторой прямолинейной фигуры, а «внутренний обвод» провести так, чтобы образовались подобные сегменты, квадраты хорд которых относились бы как 2 : 1, 3 : 1 и 3 : 2.

В дальнейшем, считая, что у квадрируемых луночек сектора дуг, ограничивающих луночки, должны быть равны, т. е. $S_{\text{сект}}A\alpha_1BO_1 = S_{\text{сект}}A\beta_1BO_2$ (рис. 11), математики установили, что в этом случае справедливы равенства $\frac{R^2}{r^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{m\Theta}{n\Theta} = \frac{m}{n}$, где R и r — радиусы дуг окружностей, α и β соизмеримые центральные углы этих дуг; Θ — общая наибольшая мера. С этой точки зрения можно сказать, что Гиппократ Хиосский положил начало теории квадратуры круговых замкнутых луночек, получив три вида квадрируемых луночек циркулем и линейкой, для которых m : n = 2 : 1, 3 : 1 и 3 : 2.

Квадратура круга с помощью квадратрисы

Убедившись, что некоторые задачи, в том числе и квадратура круга, не поддаются решению циркулем и линейкой, древние греки, начиная с V в. до н. э., начали искать другие средства решения этих задач. Если при пересечении окружности и прямых не удавалось получить точки, расстояние между которыми давали бы искомые отрезки прямой, то казалось естественным привлечь к решению этих задач другие кривые, пересечения которых с прямыми и окружностями позволят получать (строить) и такие отрезки, которые трудно, а может быть, и невозможно построить только циркулем и линейкой. А то, что кроме окружности и прямой существуют и другие кривые линии, в этом

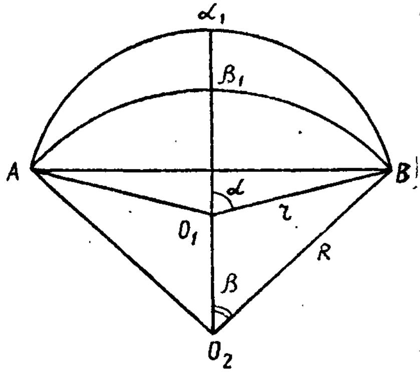


Рис. 11.

они убедились еще в V в. до н. э., получив кривую с помощью специального механизма. В IV в. до н. э. число кривых и способы их получения расширились. Древние греки стали уже делить кривые на два класса: 1) «геометрические» кривые, получающиеся от пересечения некоторых поверхностей с плоскостями; 2) «механические» кривые, образуемые движением (с помощью механизмов). К числу первых из них относятся и конические сечения; попытки использовать «геометрические» кривые при решении квадратуры круга тоже не приводили к цели. «Механические» кривые, хотя и были «под запретом» в школе Платона, все же использовались некоторыми учеными. Особенно успешно использовались квадратриса и спираль: с их помощью удалось спрямить окружность, а следовательно, и сквадрировать круг. Древнегреческий математик Папп (III в. н. э.) в своем сочинении «Математическое собрание» писал: «Для осуществления квадратуры круга Динострат (IV в. до н. э.), Никомед и другие более поздние математики пользуются некоторой кривой, которая в силу этого называется квадратрисой...» [5; 539]. Дальше Папп описывает, как Гиппий получал эту кривую и как она была использована Диностратом для спрямления окружности.

Квадратриса AF_kM (рис. 12) — это геометрическое место точек (F_k) пересечения прямых A_kB_k с радиусами CE_k. Точки F_k можно представлять как точки пересечения равномерно движущейся стороны квадрата AB и равномерно вращающейся стороны квадрата CA вокруг точки C; при этом AB и CA приходят в положение CD одновременно[25].

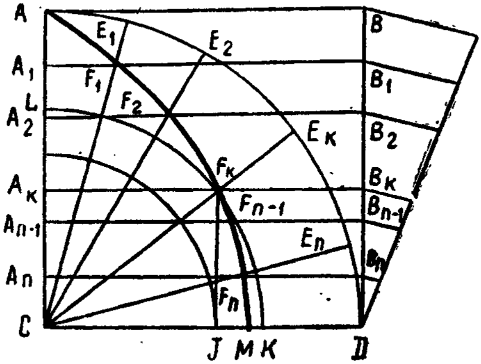


Рис. 12.

Для спрямления четверти окружности AE_kD (а следовательно, и всей окружности) достаточно указанной части квадратрисы. Папп утверждал, что Динострат при этом пользовался основным свойством этой кривой: $\overset{\smile}{AE_kD} : CD : CM$. (1)

Доказательство правильности равенства (1) ведется методом от противного, которым в то время широко пользовались. Проведем две концентрические окружности с AE_kD: одна из них проходит через точку F_k, лежащую на квадратрисе, вторая — через точку I — основание перпендикуляра из точки F_k на CD.

Допустим сначала, что $AE_kD : CD = CD : CK$, (2) где $CK > CM$.

На основании того, что окружности относятся, как их радиусы, имеем $\overset{\smile}{AE_kD} : \overset{\smile}{LF_k} = CD : CK$. (3)

Из (2) и (3) следует, что $\overset{\smile}{LF_kK} = CD = CA$. (4)

Кроме того, по определению квадратрисы, $\overset{\smile}{AE_kD} : \overset{\smile}{E_kD} = CA : F_k I$ (5)

и $\overset{\smile}{AE_kD} : \overset{\smile}{E_kD} = \overset{\smile}{LF_kK} : F_kK$. (6)

На основании (4) $\overset{\smile}{AE_kD} : E_kD = CA : F_kK$. (7)

Тогда из (5) и (7) следует, что $F_kI = F_kK$, но это, очевидно, невозможно. Значит допущение, что $\overset{\smile}{AE_kD} : CD = CD : CK$ неверно. Допустим теперь, что $AE_kD : CD = CD : CI$, (8) где $C I \angle CM$. Рассуждая аналогично предыдущему, Динострат и в этом случае пришел к противоречию, и, следовательно, предположение (8) тоже неверно. Из этого он сделал вывод: справедливо только равенство (1) и что длина четверти окружности $\overset{\smile}{AE_kD} = \frac{CD^2}{CM}$, а длина всей окружности

$$4\overset{\smile}{AE_kD} = 4\frac{CD^2}{CM}. \qquad (9)$$

В правой части (9) CD и CM — прямые линии; $4\frac{CD^2}{CM}$ тоже может быть выражено в виде отрезка прямой. Следовательно, с помощью квадратрисы может быть найден отрезок прямой, равный длине окружности.

Так впервые в истории математики было дано точное решение задачи о спрямлении окружности. Если верно предположение некоторых историков математики, что Динострат знал и теорему: площадь круга равна площади прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен радиусу этого круга, а второй— длине его окружности, то тем самым Динострат не только спрямил окружность, но и мог точно сквадрировать круг.

С помощью квадратрисы решали задачу о квадратуре круга и другие древнегреческие математики.

Круг и окружность в «Началах» Евклида

В истории квадратуры круга большую роль сыграли и «Начала» Евклида (конец IV — начало III в. до н. э.). Это бессмертное произведение Евклида подвело итоги предшествующим открытиям в математике. В нем дано систематическое и строго логическое изложение геометрии и теоретической арифметики. Евклид дает здесь и многие из тех теорем, которыми пользовались раньше при квадратуре круга и луночек, о доказательстве которых мы узнаем только из «Начал» Евклида. Многие вопросы теории геометрических построений впервые систематизированы и изложены только в «Началах». Построения основаны у Евклида на постулатах, определяющих правила действий с идеальной линейкой и с идеальным циркулем.

Правда, стремясь построить геометрию как «идеальную» науку, не связанную с решением задач практического характера, Евклид не ставит и не решает задачу о нахождении площади круга и о вычислении длины окружности, но в книгах I, III, IV, XII и других содержатся многие теоремы и определения, которые разъясняют и уточняют ряд неясных мест в работах предшественников Евклида, связанных с квадратурой круга и луночек и со спрямлением окружности. Здесь даются, в частности, определения круга, окружности и частей круга, определяются подобные сегменты, указывается, как построить описанные и вписанные в круг правильные многоугольники, доказываются теоремы, на которые опирался Гиппократ Хиосский при квадрировании луночек и др. Евклид при построении геометрии пользуется только циркулем и линейкой, т. е. выполняет требование Платона, к школе которого он принадлежал. Это, конечно, сужает его возможности постановки и решения конструктивных задач. Евклид, наверное, был знаком с постановкой и попытками решения пяти знаменитых в то время задач. В общем виде эти задачи Евклид не рассматривает, возможно, потому, что они не решались циркулем и линейкой, но некоторые частные случаи этих задач, которые решаются циркулем и линейкой, он, как будет видно из дальнейшего, рассматривает. После появления «Начал» Евклида ученые древности (Симпликий и др.), а также ученые средних веков и нового времени часто ссылались на определения и теоремы «Начал» при решении квадратуры круга, квадрирования луночек[26] и других знаменитых задач древности.

Гюйгенс (XVII в.) при решении задачи о квадратуре круга широко использовал свойства подобных сегментов, рассмотренные в «Началах». В частности, «Начала» Евклида и труды Архимеда, которыми широко пользовались в древности, в средние века и в новое время, сыграли заметную роль и в популяризации многих конструктивных задач, связанных с пятью знаменитыми задачами.

Спрямление окружности с помощью спирали Архимеда

В III в. до н. э. древнегреческие ученые продолжали интересоваться квадратурой круга и спрямлением окружности. Особо выдающиеся результаты в этой области были получены одним из самых гениальных ученых древности Архимедом.

О результатах Архимеда, содержащихся в его знаменитом сочинении «Об измерении круга», речь будет идти в следующем параграфе; здесь мы остановимся только на спрямлении окружности Архимедом с помощью полученной им спирали[27]. Сочинение Архимеда «О спиралях» содержит решение ряда важных задач и доказательство нескольких теорем. Это первое сохранившееся сочинение, в котором речь идет и о спрямлении окружности, а следовательно, и о квадратуре круга.

Центральными предложениями работы «О спиралях» являются те предложения (XVIII—XX), в которых дается способ построения с помощью спирали отрезка прямой, равного длине окружности или дуге окружности. В частности, в теореме XVIII утверждается: «Если прямая линия касается спирали, описанной в течение первого оборота, в конечной точке ее и если из точки, являющейся началом спирали, проведена некоторая прямая перпендикулярно к началу вращения, то проведенная прямая встретится с касательной, и прямая, заключенная между касательной и началом спирали (прямая AZ.—*С. Б.*), будет равна окружности первого круга (т. е. окружности, описанной из точки A радиусом $R=A\Theta$. — *С. Б.*) (рис. 13).

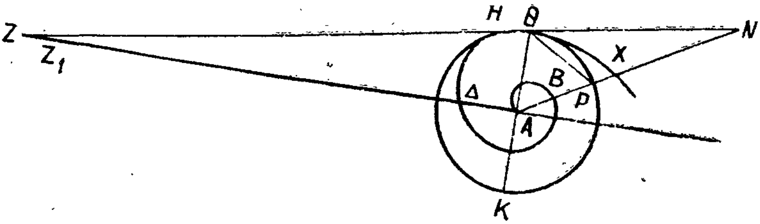


Рис. 13.

Архимед доказывает эту теорему методом от противного.

Допустим сначала, что длина окружности (C) меньше прямой AZ; возьмем тогда прямую AZ_1, которая меньше AZ, но больше C, тогда $A\Theta : AZ_1 > A\Theta : AZ$. Проведем теперь прямую AN так, чтобы выполнялось равенство $NP : \Theta P = A\Theta : AZ_1$ или

$$NP : A\Theta = \Theta P : AZ_1 < \Theta P : C.$$

Так как $A\Theta = AP$, то получим

$$\frac{AP + NP}{A\Theta} < \frac{C + \Theta P}{C}.$$

Учитывая это неравенство и теорему XV сочинения «О спиралях», т. е. что «отношение дуги ΘP вместе со всей окружностью (C) к этой окружности будет тем же самым, как и AX к $A\Theta$», имеем $AN : A\Theta < (C + \Theta P) : C = AX : A\Theta$, и мы приходим к противоречию — $AN < AX$.

Предположив затем, что длина окружности $C > AZ$, Архимед в результате аналогичных предыдущим рассуждений приходит тоже к противоречию. На основании этого он делает заключение: длина окружности $C = AZ$[28]. Таким образом, с помощью спирали Архимеда можно точно построить отрезок прямой, равный длине окружности $2\pi R$, или при $R = \frac{1}{2}$, отрезок π.

Следовательно, отдельные попытки древнегреческих ученых (Динострат, Архимед) приводили, действительно, к точному решению задачи о спрямлении окружности. Эти решения были связаны и с обогащением математики новыми «механическими» кривыми.

«Измерение круга» Архимеда

Сочинение Архимеда «Измерение круга» [5; 266—270] сыграло особенно большую роль в истории квадратуры круга: методами Архимеда, примененными в этой работе при приближенном решении квадратуры круга, много сот лет пользовались математики разных стран, а некоторые результаты, содержащиеся в этом сочинении, используются и в наше время.

«Измерение круга» занимает менее пяти страниц. Но это произведение по праву считается классическим. Каждая из трех теорем, содержащихся в этой работе, представляет определенный вклад в математику.

Первая теорема. «Всякий круг равен прямоугольному треугольнику, причем радиус круга равен одной из прилегающих к прямому углу сторон, а периметр — основанию треугольника».

Доказательство справедливости этой теоремы ведется методом от противного. Допустим, что круг АВГΔ (рис. 14) больше

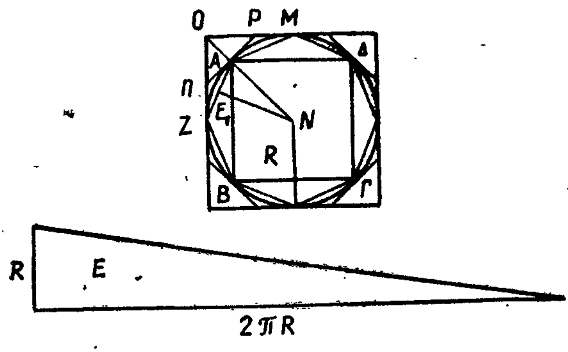


Рис. 14.

треугольника E. Впишем в него квадрат АГ, а затем 8-угольник, 16-угольник и т. д. Тогда должен наступить момент, когда 2^n-угольник будет больше треугольника E. Соединим середину стороны 2^n-угольника с центром круга N. Эта линия, например NE_n, меньше радиуса круга, а периметр 2_n-угольника меньше окружности. Площадь многоугольника равна половине произведения его периметра на NE_n. Но это произведение меньше половины произведения радиуса на длину окружности, т. е. площади треугольника Е. Тем самым Архимед пришел к противоречию. Допустим теперь, что круг меньше треугольника Е. Опишем квадрат, 8-угольник, 16-угольник и т. д. до тех пор, пока 2^n-угольник не станет меньше треугольника Е. Но периметр описанного 2^n-угольника больше длины окружности. Площадь этого 2^n-угольника равна половине произведения периметра на прямую, соединяющую центр круга со срединой стороны 2^n-угольника, (а это будет радиус круга AN). Следовательно, площадь 2^n-угольника больше площади треугольника Е. И он снова приходит к противоречию. Из этого Архимед делает вывод: «Значит круг будет равен треугольнику Е».

Итак, доказано, что существует такой треугольник, площадь которого равна площади круга. Но отсюда, конечно, не следует, что тем самым решена проблема квадратуры круга с помощью циркуля и линейки, так как здесь не говорится и не доказывается, что катет треугольника Е, равный окружности, можно построить с помощью циркуля и линейки. Но Архимед умел спрямлять окружность с помощью спирали, а следовательно, можно сказать, что Архимед мог точно квадрировать круг[29].

Вторая теорема[30]. «Периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше одной седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых».

В этой теореме, как видно, явно говорится о приближенном выражении длины окружности через диаметр: $3\frac{10}{71}d < C < 3\frac{1}{7}d$, где C — длина окружности, а d — диаметр круга, или, мы бы сказали, здесь указаны некоторые границы, в которых заключено отношение окружности к диаметру: $3\frac{10}{71} < \frac{C}{d} \ (=\pi) < 3\frac{1}{7}$. Эта теорема и метод доказательства ее сыграли большую роль в истории математики вообще и особенно в истории квадратуры круга. А выражением $\frac{C}{d} = \pi \approx 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3{,}14$ и теперь широко пользуются для практических целей. Как же рассуждал Архимед при доказательстве столь важной теоремы в математике?

При освещении хода рассуждений Архимеда будем пользоваться символикой и опустим промежуточные (повторяющиеся) операции, которые читатель может провести сам. Обозначим $OC=R$, $AC=2R=d$, длину окружности — C, сторону правильного вписанного многоугольника — a_n, описанного — b_n, периметр правильного вписанного n-угольника — P_n, описанного — через P'_n.

Архимед показал, что из $\frac{P_n}{d} < \frac{C}{2R} < \frac{P'_n}{d}$

при $n=96$ следует, что $3\frac{10}{71}d < C < 3\frac{1}{7}d$.

Для этого он рассмотрел сначала круг с радиусом OC (рис. 15), взял сторону описанного шестиугольника BB′ и сторону вписанного шестиугольника NN′, тогда угол COB=30°. Затем он положил $BB^1=OB=306$,
тогда

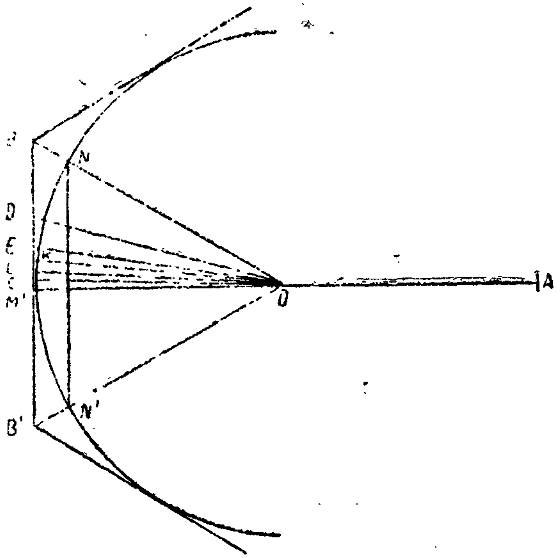


Рис. 15.

$$BC=\frac{1}{2}BB^1=153,\ R:\frac{b_6}{2}=OC:CB=$$

$$=\sqrt{306^2-153^2}:153 > 265:153.$$

Разделив угол COB пополам прямой OD и проведя соответствующие вычисления, он получил $OD:DC > \sqrt{349450}:\sqrt{23409} \approx$ $\approx 591\frac{1}{8}:153$. Продолжая делить углы пополам прямыми OE, OK, OL и вычисляя b_n и P'_n, он находит

$$R : \frac{1}{2} b_{24} \gtrsim 1162 \frac{1}{8} : 153, \quad R : P'_{24} > 1162 \frac{1}{8} : 7344,$$

$$R : P'_{48} > 2334 \frac{1}{4} : 14688.$$

И, наконец,

$$R : \frac{1}{2} b_{96} \gtrsim 4673 \frac{1}{2} : 153, \quad R : P'_{96} > 4673 \frac{1}{2} : 29376;$$

$$P'_{96} : 2R < 29376 : 9347 < 3 \frac{1}{7}.$$

Но $C = 2\pi R < P'_{96}$, следовательно, $C : 2R = \pi$ еще меньше, чем $3 \frac{1}{7}$.

Рассматривая затем круг с радиусом $R = 780$ (рис. 16) и угол $CAB = 30°$, он вычисляет отношение $(a_6 = CB) : (AC = 2R) = 780 : 1560$. Затем делит углы пополам прямыми AD, AH, AK, AL, вычисляет a_n и P_n и находит

$$P_{96} : AC \gtrsim 6336 : 2017 \frac{1}{4}.$$

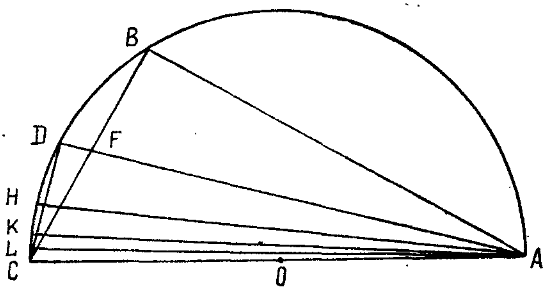


Рис. 16.

Но $C = 2\pi R \gtrsim P_{96}$, а значит $C : 2R > 3 \frac{10}{71}$.

Следовательно, $3 \frac{10}{71} < \frac{C}{d} = \pi < 3 \frac{1}{7}$.[31]

Таков вклад Архимеда в решение одной из интересных и трудных задач в математике. Его метод (вписанных и описанных правильных многоугольников) для нахождения все более точного значения для $\frac{C}{d}$ был основным почти 2000 лет.

Третья теорема. «Круг относится к квадрату своего диаметра (приблизительно) как 11 к 14».

Доказательство этой теоремы опирается на предыдущую теорему. Пусть дан круг с диаметром AB и CE — описанный квадрат (рис. 17). Отложим $CZ = 3\frac{1}{7}AB$, тогда $\frac{1}{2}CZAC \approx S_{кр}$.

$$S_{\Delta ACD} = \frac{7}{22}\, S_{\Delta ACZ}.$$

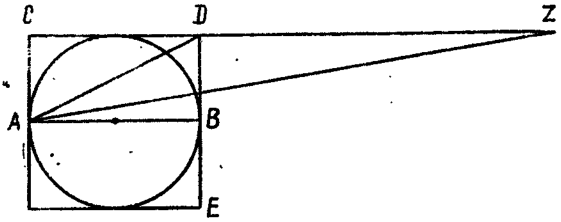


Рис. 17.

Но $S_{кBCE} = 4S_{\Delta ACD} = \frac{28}{22} S_{\Delta ACZ} \approx \frac{28}{22} S_{кр}$,

откуда

$$S_{кр} : S_{кв} \approx 11 : 14^{32}.$$

Эта теорема оказалась важной и для практических целей и для самой математики. Следовательно, в этом небольшом по объему сочинении содержатся результаты, сыгравшие затем большую роль в истории математики вообще и особенно в истории квадратуры круга.

Архимед был первым ученым, поставившим проблему квадратуры круга и спрямление окружности на прочные научные основы. Он показал связь между этими двумя задачами и открыл перспективы беспредельного улучшения результатов при вычислении отношения длины окружности к ее диаметру.

Удвоение куба

О происхождении задачи

Задача об удвоении куба со временем тоже стала знаменитой. Эта задача первоначально формулировалась так: построить куб, объем которого был бы в два раза больше объема данного куба. В дальнейшем с помощью алгебраической символики эта задача была сформулирована следующим образом: дан куб с ребром a, построить новый куб с ребром x так, чтобы $x^3=2a^3$. Став затем одной из конструктивных задач, она сводилась к построению отрезка прямой $x=a\sqrt[3]{2}$, а при $a=1$ — к построению отрезка $x=\sqrt[3]{2}$.

Как, когда и где впервые возникла эта задача, науке пока неизвестно. Можно только делать предположения по этому поводу. Нам думается, что эта задача могла возникнуть тоже задолго до того, как ею начали заниматься древние греки, как задача на построение. Эта задача могла возникнуть из практических потребностей: например, с учетом увеличения в два раза урожая в данном году нужно было увеличить в два раза объем хранилища продуктов, имевшего форму куба, или увеличить в два раза вместимость водохранилища кубической формы, оставляя ту же форму его[33].

О практическом и культовом происхождении задачи об удвоении куба говорят и легенды, связанные с этой задачей.

В одной из них говорится, что Критский царь Минос[34] приказал архитекторам воздвигнуть памятник своему сыну Главку. Архитекторы сделали памятник кубической формы с ребром, равным 100 локтям. Миносу понравилась форма памятника, но он счел его слишком малым и приказал его удвоить. Архитекторы долго бились над отысканием длины ребра нового куба, но не могли найти ее. Признав свое бессилие, архитекторы обратились за помощью к геометрам, но и геометры не могли решить этой задачи.

Вторая легенда тоже указывает на своеобразную связь этой задачи с жизнью.

Однажды на острове Делосе, находящемся в Эгейском море, вспыхнула эпидемия чумы. Жители Делоса обратились к знаменитому Дельфийскому оракулу, который служил при храме Аполлона в Дельфах, за помощью и советом. Для прекращения чумы оракул предложил делосцам удвоить жертвенник богу

Аполлону (богу Солнца), имевший форму куба. Но чума не прекратилась и после того, когда был отлит такой же жертвенник, как первый, и поставлен на него. Тогда делосцы вновь обратились к оракулу с вопросом: почему не прекращается чума, хотя жертвенник всесильному Аполлону удвоен? Оракул им на это ответил: нет, вы не решили поставленной задачи, так как вы, удвоив объем, изменили форму жертвенника. Не меняя формы куба, делосцы не могли его удвоить и обратились за помощью к Платону[35]. Но он уклончиво ответил: боги, вероятно, недовольны вами за то, что вы мало занимаетесь геометрией.

С того времени задачу об удвоении куба стали называть еще «делосской». Некоторые авторы полагают, что происхождение задачи об удвоении куба связано с желанием обобщить задачу об удвоении квадрата [97; 8]. Но если это верно, то и в этом случае рассматриваемая задача уходит своими корнями в Древний Египет. Древние египтяне умели увеличивать вдвое (приближенно) площадь любой фигуры, не меняя ее формы, пользуясь двумя локтями: в 28 и в 20 дюймов. Так как отношение этих локтей $28:20=1{,}4$, то измерив стороны данной фигуры 20-дюймовым локтем, а затем увеличив их настолько, чтобы в новых (подобных) фигурах размеры сторон содержали столько же, но 28 дюймовых локтей, они тем самым увеличивали площадь фигуры, в том числе и квадрата, примерно в два раза.

Возможно, что в дальнейшем играло роль и «желание древних обобщить задачу об удвоении квадрата» и перейти от планиметрической задачи к стереометрической. Но такое желание могло возникнуть на достаточно высокой ступени развития геометрической алгебры, когда грекам было известно уже, что извлечение корня из произведения двух величин a b сводится к построению отрезка $x=\sqrt{a\,b}$, т. е. среднего геометрического между отрезками a и b. В частности, при $b=2a$ они могли получить $a:x=x:2a$, откуда $x^2=2a^2$ и $x=a\sqrt{2}$. После этого могла возникнуть мысль о том, что извлечение кубического корня из $2a^3$, т. е. построение $x=a\sqrt[3]{2}$ сводится к построению двух средних геометрических величин между двумя данными величинами.

Но чтобы прийти к выводу, что решение этой задачи сводится к построению двух среднегеометрических между отрезками a и $2a$, т. е. $a:x=x:y=y:2a$, для этого математические знания должны были быть уже на достаточно высоком уровне. В это время (V в. до н. э.) действительно намечен был указанный путь, как один из подходов к решению этой задачи, но возникла она, вероятно, значительно раньше как практическая задача.

О том, кто и как пытался решать эту задачу в Древней Греции, мы знаем, главным образом, из комментария Евтокия к произведению Архимеда «О шаре и цилиндре», чем мы и воспользуемся в дальнейшем [5; 459].

Первая известная попытка решения задачи

Хотя Евтокий в указанном комментарии и не называет имени Гиппократа в числе решавших задачу об удвоении куба, но это имя упоминается в письме к царю Птолемею, якобы написанному Эратосфеном, которое приводит Евтокий. Там говорится, в частности: «Первый Гиппократ Хиосский заметил, что если найти две средние пропорциональные между двумя отрезками, из которых больший в два раза длиннее меньшего, то можно будет удвоить и куб». Историки-математики почти единодушны в том, что Гиппократ был одним из первых греческих математиков, которые оставили след своих попыток решения этой задачи.

Очевидно, что в математику эта задача вошла раньше. В V в. до н. э. эта задача была уже популярной, о ней слагали легенды, особенно после того, как убедились, что решить ее с помощью циркуля и линейки не удается.

Придя к необходимости построить отрезок прямой, равный $a\sqrt[3]{2}$, Гиппократ Хиосский (около 420 г. до н. э.), вероятно, пытался сначала решить эту задачу с помощью циркуля и линейки. Но, убедившись в трудности решения ее таким путем, он попытался свести решение этой (стереометрической) задачи к задаче планиметрической.

Он показал, что эта задача будет решена, если удастся построить два отрезка x и y, которые связаны с данными отрезками a и $2a$ соотношением $a:x=x:y=y:2a$, где a — ребро данного куба, а x — ребро искомого куба. Как это он обосновал, нам не известно. Возможно, по аналогии с преобразованием квадрата в квадрат с удвоенной площадью, где требуется построить один отрезок x, удовлетворяющий соотношению $a:x=x:2a$. Но правильность этого утверждения Гиппократа легко доказывается с помощью нашей символики следующим образом. Из указанного соотношения можно получить такие равенства: $a:x=a:x$; $a:x=x:y$, $a:x=y:2a$; перемножив затем левые и правые части этих равенств, получим $a^3:x^3=axy:2axy$, или $a^3:x^3=1:2$, откуда и получается $x^3=2a^3$ и $x=a\sqrt[3]{2}$. Из этого видно, что если бы удалось каким-то образом построить отрезок прямой x как одно из двух средних геометрических между a и $2a$, то тем самым было бы найдено ребро искомого куба, объем которого был бы в два раза больше данного.

Нам не известно, пытался ли сам Гиппократ построить отрезки, удовлетворяющие уравнениям $a:x=x:y=y:2a$, и если пытался, то какие результаты им получены. Но судя по тому, как высоко оценивали древние греки геометрические способности Гиппократа, а также на основании того, что ему удалось получить блестящие результаты в решении двух знаменитых задач древности, можно вполне допустить, что он положил начало применению метода «вставок» при решении этой задачи, и мог таким образом ее решить. Но если допустить, что Гиппократу удалось только свести задачу нахождения отрезка $x=a\sqrt[3]{2}$ к задаче нахождения вставок x и y, удовлетворяющих уравнениям $a:x=x:y=y:2a$, то и тогда следует высоко оценить результаты попытки Гиппократа в решении знаменитой задачи, ибо они открыли перспективы работы многих ученых в направлении отыскания различных способов построения отрезков x и y.

Решение Архита Тарентского

В конце V в. до н. э. в связи с изобретением стрелометов и камнеметов возникла еще необходимость удвоения объема тяжа, с помощью которого «стреляло» орудие, чтобы удвоить расстояние полета стрелы или камня. Это тоже могло способствовать развитию интереса к задаче удвоения куба. Одним из первых древнегреческих ученых, использовавших результаты Гиппократа Хиосского при решении задачи об удвоении куба, был Архит из Тарента. Он являлся известным полководцем и крупнейшим математиком конца V в. до н. э.

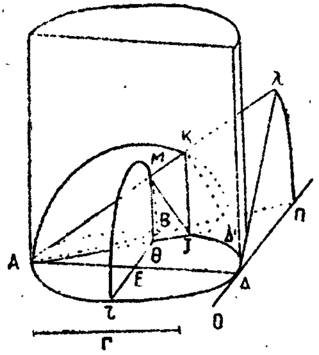


Рис. 18.

Евтокий в указанных комментариях со ссылкой на «Историю геометрии» Евдема так описывает решение задачи о построении двух средних геометрических Архитом.

«Пусть даны два прямолинейных отрезка АΔ и АВ (рис. 18). Надо между АΔ и АВ найти две средние пропорциональные. Около большей линии АΔ опишем окружность АВΔZ, построим в ней хорду АВ, равную Г, и пусть она в продолжении с проведенной в Δ касательной к кругу пересечет в П.

Проведем прямую BEZ параллельно ПΔО; представим себе прямой полуцилиндр на полукруге ABΔ, и на AΔ вертикальный полукруг, лежащий в прямоугольнике полуцилиндра. Если мы будем вращать этот полукруг, оставляя его вертикальным по направлению от Δ к B, в то время как конец его диаметра A остается неподвижным, то он будет пересекать поверхность цилиндра и начертит на ней некоторую линию. С другой стороны, если, оставляя AΔ неподвижной, будем вращать треугольник AПΔ вокруг AΔ в направлении, противоположном движению полукруга, то прямая AП опишет коническую поверхность и в своем вращении встретится в некоторой точке (K) с линией на цилиндре, образовавшейся при вращении AKΔ′. Одновременно точка B тоже опишет полукруг на поверхности конуса. Пусть движущийся полукруг в месте пересечения этих двух линий будет иметь положение Δ′KA, а движущийся в противоположную сторону треугольник займет положение ΔλA и пусть точка пересечения будет K. Пусть BMZ будет полукруг, описанный точкой B, а BZ — линия его пересечения с кругом BΔZA.

Опустим из K перпендикуляр на плоскость полукруга ΔBA. Этот перпендикуляр попадет на окружность, так как цилиндр прямой. Пусть он будет KI. Линия, проведенная из I к A, пересечет BZ в Θ, а линия Aλ пересечет полукруг BMZ в M. Проведем также прямые KΔ′, MI и MΘ. Теперь, так как полукруги Δ′KA и BMZ перпендикулярны к плоскости круга ABΔZA, то и общая линия их пересечения MΘ будет тоже перпендикулярна к плоскости этого круга, так что MΘ будет перпендикулярна к BZ. Таким образом, прямоугольник на ΘB и ΘZ и прямоугольник на ΘA и ΘI, будут равны квадрату на MΘ. Треугольник AMI подобен MIΘ и MAΘ, а угол AMI будет прямым. Также будет прямым и угол Δ′KA. Следовательно, KΔ будет параллельна MI, и получается пропорция Δ′A:AK=KA:AI=IA:AM, ибо треугольники AKΔ′, AIK и AMI подобны. Поэтому четыре линии Δ′A, AK, AI, AM составляют непрерывную пропорцию, и AM равна Г, так как она равна также AB. Таким образом, для двух заданных прямых ΔA и Г найдены две средние пропорциональные AK и AI. Таково решение Архитом Тарентским задачи о построении двух средних пропорциональных для двух заданных отрезков прямой. Это действительно образец глубокого проникновения в сущность задачи и высокой степени развития пространственных представлений автора.

Вслед за Ван дер Варденом, из книги которого позаимствован текст доказательства Архита, мы, познакомившись с этим изумительным документом V в. до н. э., можем воскликнуть: «Разве это не замечательно?». Ведь при таком способе решения

Архит фактически ищет пересечение поверхностей тора, конуса и цилиндра[36]. Если, в частности, положить $АΔ=2a$, $Г=AB=AM=a$ и переменные отрезки $AI=x$ и $AK=y$, то можно сказать, что Архит нашел зависимость между этими отрезками в виде $2a:y=y:x=x:a$. А это равносильно задаче $x^3=2a^3$. Следовательно, если $AB=Г=a$ есть ребро данного куба, то ребром нового куба x, объем которого в два раза больше данного, будет отрезок $AI=a\sqrt[3]{2}$. Так появилось первое из известных решений задачи об удвоении куба.

Решения задачи в Древней Греции после Архита

Возможно, в связи с тем, что задача об удвоении куба продолжала привлекать к себе внимание ученых, а решение ее Архитом представлялось им сложным, в Древней Греции продолжались поиски новых методов построения средних пропорциональных для двух данных отрезков.

Евтокий в указанных комментариях, кроме решения Архита, приводит еще решения этой задачи Платоном[37], Героном, Филоном, Аполлонием, Диоклом, Паппом, Спором, Менехмом, Эратосфеном, Никомедом. Каждое из этих решений [5; 460—479] связано с использованием какого-либо «механизма», отличного от циркуля и линейки, или линий, отличных от прямой и окружности. Мы рассмотрим здесь решения только некоторых из указанных авторов, хотя и те, которые не будут рассмотрены, представляют интерес, и желающие могут с ними познакомиться в указанной книге.

Решения с помощью конических сечений

В IV в. до н. э. известными учеными Древней Греции, занимавшимися решением делосской задачи, были Евдокс и Менехм.

Евдокс при решении этой задачи использовал какие-то плоские кривые, но Евтокий не дал изложения этого способа[38].

Что касается Менехма, то Евтокий в своих комментариях приводит два решения его. Рассмотрим первое решение Менехма. «Пусть две заданные прямые AB и BГ будут перпендикулярны друг к другу (рис. 19). Пусть для них средние пропорциональные будут ΔB и BE, так что ГB относится к BΔ как BΔ к BE и как BE к BA, т. е.

$$\frac{ГB}{BΔ}=\frac{BΔ}{BE}=\frac{BE}{BA}.$$

Проведем перпендикуляры ΔZ и EZ, так как $\frac{\Gamma B}{B\Delta} = \frac{\Delta B}{BE}$, то значит, прямоугольник между ΓB и BE, т. е. прямоугольник одной из заданных линий и BE, будет равен квадрату на $B\Delta$ или на EZ, т. е. $\Gamma B \cdot BE = B\Delta^2 = EZ^2$. Так как прямоугольник между заданной линией и BE равен квадрату на EZ, то точка Z находится на параболе с осью BE. Затем, так как AB относится к BE, как BE к $B\Delta$, т. е. $\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{B\Delta}$, то прямоугольник между AB и $B\Delta$, т. е. другой заданной линией и $B\Delta$, будет равен квадрату на BE или на ΔZ, т. е. $AB\ B\Delta = BE^2 = \Delta Z^2$, значит Z находится на параболе с осью $B\Delta$. Но она находится и на другой параболе с осью BE, значит точка Z известна. Затем, так как $Z\Delta$ и ZE перпендикулярны, то будут известны и точки Δ и E.

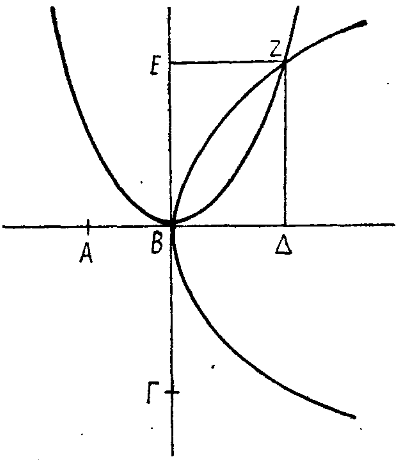


Рис. 19.

Построение производится так: пусть две заданные прямые AB и $B\Gamma$ будут взаимно перпендикулярны; продолжим их из точки B до бесконечности. На оси BE построим параболу так, чтобы ее опущенные на BE ординаты квадрировались на AB (т. е. $ZE^2 = BE.\ B\Gamma$ или $X^2 = B\Gamma У$). Затем на оси ΔB строим параболу так, чтобы ее ординаты квадрировались на AB (т. е. $Z\Delta^2 = AB\ B\Delta$ или $У^2 = AB\ X$). Обе эти параболы пересекут друг друга; пусть точка их пересечения будет Z. Проведем из Z перпендикуляры $Z\Delta$ и ZE. Так как в одной параболе проведена ордината ZE, т. е. ΔB, то значит прямоугольник между ΓB и BE равен квадрату на $B\Delta$, т. е. $\Gamma B \cdot BE = B\Delta^2$, и поэтому ΓB относится к $B\Delta$ как ΔB к BE. Но ΔB относится к BE как ΓB к BA и, следовательно, ΓB относится к $B\Delta$ как $B\Delta$ к BE и как BE к BA, т. е.

$$\frac{\Gamma B}{BA} = \frac{BA}{BE} = \frac{BE}{BA},$$

что и требовалось получить.

Строится парабола при помощи «диабета», изобретенного нашим учителем милетским механиком Исидором и описанного им в составленном им комментарии к работе Герона «О построении сводов» [5; 470].

Следовательно, в данном решении используются две параболы. Если перевести эту задачу на язык аналитической геометрии, то дело сводится к нахождению абсциссы точки пересечения двух парабол, уравнения которых $y^2=2ax$ и $x^2=ay$; из второго уравнения следует, что $y=\frac{x^2}{a}$, подставляем в первое уравнение и получаем $\frac{x^4}{a^2}=2ax$ или $x^3=2a^3$ и $x=a\sqrt[3]{2}$. Таким образом, искомое ребро куба есть абсцисса точки пересечения двух парабол.

Второе решение Менехма аналогично первому. Но в этом случае он использует параболу и гиперболу, уравнения которых получаются тоже из равенства: $a:x=x:y=y:2a$. Только в первом случае, мы бы сказали, он рассматривал равенства $a:x=$ $=x:y$ и $x:y=y:2a$, откуда и получились уравнения $x^2=2ay$ и $y^2=2ax$. Во втором случае надо рассматривать равенства $x:y=y:2a$ и $a:x=y:2a$. Отсюда получаются уравнения параболы $y^2=2ax$ и гиперболы $xy=2a^2$. Чтобы определить теперь искомую величину x, нужно найти точку пересечения этих кривых, абсцисса x этой точки и будет $x=a\sqrt[3]{2}$ (рис. 20). Действительно, из второго уравнения, например, получим $y=\frac{2a^2}{x}$, подставим в первое уравнение и получим $\frac{4a^4}{x^2}=2ax$, откуда $4a^4=2ax^3$ и $x^3=2a^3$, следовательно, $x=$ $=a\sqrt[3]{2}$.

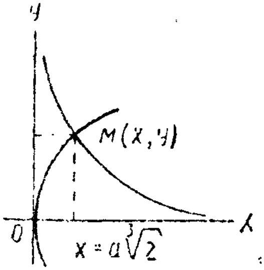


Рис. 20.

Таково по существу решение этой задачи Менехмом, хотя он, конечно, еще не пользовался той символикой, которую используем теперь мы, а проводил свои рассуждения как в первом случае[39].

Решение Эратосфена

Одним из знаменитых древнегреческих ученых III в. до н. э. занимавшихся и задачей об удвоении куба, был Эратосфен (276—194). Это был широко образованный человек, он оставил след своего творчества во многих областях знания. В области математики его имя прочно связано со способом «высеивания» простых чисел — «решето Эратосфена», и с решением делосской задачи.

Задаче об удвоении куба он, как видно из дошедших до нас отрывков из его сочинений и свидетельств древних писателей, уделял большое внимание.

В храме царя Птолемея в Александрии на камне высечено решение Эратосфена задачи об удвоении куба и дана бронзовая модель его прибора — «мезолябия» («уловителя»), с помощью которого он находил (улавливал) средние геометрические.

В том же храме на мраморной доске высечена часть эпиграммы Эратосфена, содержащейся в «письме Эратосфена» к Птолемею в стихотворной форме:

«Если бы, друг, ты замыслил большое из малого сделать,
Куб сотворить ли двойной иль перестроить объем,
Это возможно — и сени расширить, и яму просторней
выроешь и водоем влагой наполнишь двойной.
Вот мой прибор: меж линеек две средние сразу отыщешь,
Между краями других ты их отметишь концы.
Нужды тебе уж не будет в премудром цилиндре Архита,
В конусе не для тебя высек триоду Менехм,
И с богоравным Евдоксом изогнутых линий не надо,
Циркулем вооружась, тонкий изгиб находить.
Сдвинув отважно линейки, легко мириады построить
Средних желанных твоих, с меньшей из данных начав.
Счастлив ты, царь Птолемей, — ты дал вечно юному сыну
Равноблаженному дар сладкий для Муз и царей.
Зевс, бог вселенной! В грядущем пусть с милостью той же он примет
Скипетр от царской руки — и да свершится сие.
Тот же, кто жертву во храме великом увидит, да скажет:
— Дар этот Эратосфен людям, измыслив принес».

Что же представлял прибор Эратосфена, и как же с его помощью можно «мириады построить средних желанных»?

Бронзовая модель «мезолябия» Эратосфена состояла из трех треугольных или прямоугольных пластинок, которые можно передвигать вперед и назад между двумя рейками (рис. 21). Вот как описан прибор и действие с ним в указанной надписи в храме. «Для

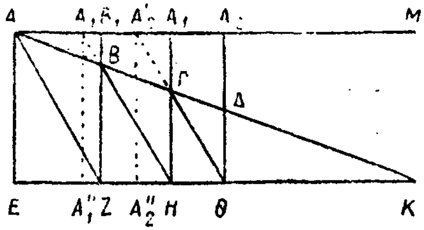


Рис. 21.

двух данных отрезков найти две средние в непрерывной пропорции. Пусть будут даны линии АЕ и ΔΘ; тогда я сдвигаю пластинки рассматриваемого инструмента так, чтобы точки А, В, Г, Δ лежали на одной прямой. Так как АЕ и BZ параллельны, то КА и КВ имеет то же отношение, как КЕ и KZ, а поскольку AZ и ВН тоже параллельны, то в том же отношении будет KZ и КН. Таким образом, КЕ будет к KZ как KZ к КН. Но так же относятся друг к другу и АЕ к BZ, а также и BZ к ГН. Совершенно также докажем что BZ относится к ГН как ГН к ΘΔ. Таким образом, АЕ, BZ, ГН и ΔΘ образуют (непрерывную) пропорцию. Следовательно, для двух заданных (отрезков) найдены две средние пропорциональные.

Если же заданные отрезки не равны АЕ и ΔΘ, то мы получим средние пропорциональные, если сделаем АЕ и ΔΘ им пропорциональными; затем мы вернемся к первоначально данным и задание будет выполнено.

Когда требуется найти большее число средних пропорциональных, то мы возьмем в этом инструменте одной пластинкой больше числа средних пропорциональных, которые нужно построить. Доказательство остается тем же самым» [19; 317].

Следовательно, если даны две рейки АМ и ЕК, параллельные между собой и имеющие пазы, в которых могут передвигаться прямоугольники $A_1' A''_1 HA_1$ и $A_2' A_2'' \Theta A_2$, равные закрепленному прямоугольнику АВ, ZE, то прямые AZ, A'_1H и $A^1_2\Theta$ — диагонали этих прямоугольников. Положим $AE=2a$ и $\Delta\Theta=a$. Будем теперь передвигать подвижные прямоугольники так, чтобы точки А, Δ и точки пересечения диагоналей $A_1'H$, и $A_2'\Theta$ со сторонами B_1Z и A_1H, т. е. точки В и Г лежали бы на одной прямой.

Обозначим ГН через x и BZ через у. Тогда

$$KA : KB = AE : BZ = KE : KZ = KZ : KH = BZ : \Gamma H = \Gamma H : \Delta\Theta.$$

Вспомнив наши обозначения, мы можем записать

$$2a\ (AE) : y\ (BZ) = y : x\ (\Gamma H) = x : a\ (\Delta\Theta)$$

или

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Тем самым и решается задача о построении двух средних пропорциональных x и у для a и $2a$. Если бы требовалось построить три средние пропорциональные, то следовало бы взять не две, а три подвижные прямоугольника, и провести дальнейшее рассуждение как указано выше[41].

Трисекция угла и деление окружности на равные части

Возникновение задач

Деление любого угла на три равные части, или трисекция угла, тоже одна из древнейших задач. С этой задачей в древности были тесно связаны задачи деления окружности (или ее дуги) на равные части и построение правильных многоугольников. Происхождение этих задач тоже связано с практической деятельностью, в частности, уметь делить окружность на равные части нужно было при изготовлении колеса со спицами, деление угла или дуги окружности на несколько равных частей необходимо было также в архитектуре, в создании орнаментов, в строительной технике и в астрономии. Известно, что еще древние вавилоняне умели делить окружность или угол 360° на 6 равных частей. Следовательно, они могли разделить окружность и на три равные части. Вероятно, древние египтяне и древние вавилоняне умели делить прямой угол (четверть окружности) на три равные части. Для этого они могли поступить так: взять на одной стороне прямого угла отрезок OE, построить на OE равносторонний треугольник ODE, угол COD будет 60°, а угол AOD=30°, остается разделить угол DOE пополам, и тогда прямой угол AOC будет разделен на 3 равные части с помощью циркуля и линейки (рис. 22). Таким же образом легко можно разделить на три равные части и угол COB=45° (восьмую часть окружности). Равносторонний треугольник ODE, построенный на отрезке OE, взятом на OC, дает угол DOB=15°, разделив угол AOD пополам, мы и решим поставленную задачу.

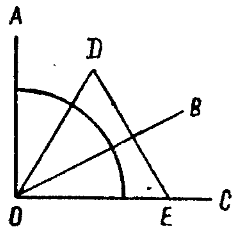


Рис. 22.

Древние египтяне и вавилоняне легко делили на три равные части углы 180° (полуокружность) и 360° (окружность).

В дальнейшем было показано, что все углы $\alpha = \frac{\pi}{2^n}$, где $n=0, 1, 2, \dots$, можно разделить на три равные части с помощью циркуля и линейки[41]. Но не все углы можно разделить на три равные части и не на любое число равных частей можно разделить окружность с помощью циркуля и линейки. Доказано, например, что такие углы, как 120°, 60, 40, 20°, не поддаются трисекции с помощью циркуля и линейки, и таких углов тоже бесчисленное множество.

Следовательно, в общем случае угол φ нельзя разделить на три равные части с помощью циркуля и линейки. Это строго было доказано Ванцелем только в 1837 г. Но прежде чем ученые пришли к этому доказательству, прошло много сот лет со времени появления указанной задачи, затрачено было много труда на решение ее, получены были при этом многие методы и результаты, важные для математики.

Превращение в конструктивные задачи (пифагорийская школа)

Известно, что еще вVI—V вв. до н. э. геометрические задачи на построение занимали большое место в математических занятиях древних греков. Среди них были и задачи на деление окружности на равные части или построение равносторонних многоугольников, а также деление данного угла на равные части.

Еще в пифагорийской школе при изучении свойств правильных фигур и правильных тел ученые легко справлялись с построением правильного 6-угольника, 12-угольника, 24-угольника..., квадрата, 8-угольника, 16-угольника...

Они умели с помощью циркуля и линейки строить и правильные 5-угольники, 10-угольники... Многие из них пытались также вписать в окружность правильные 7-угольники и 9-угольники с помощью циркуля и линейки, но здесь они наткнулись на трудность, которую не могли преодолеть. В связи с этим, вероятно, и возник уже в то время вопрос: можно ли разделить окружность на любое число равных частей или, что то же, построить правильный n-угольник?

Занимаясь задачей деления угла на равные части, они установили, что любой угол можно с помощью циркуля и линейки разделить на 2, 4, 8, 16..., т. е. на 2^n равных частей. Они знали некоторые углы, которые с помощью тех же простейших средств делятся на три равные части. Но, столкнувшись с углами в 60°, 40, 20, 18°.., которые не удавалось разделить на три равные части с помощью циркуля и линейки, они уже в V в. до н. э. начали искать другие способы решения этой задачи.

Вероятно, в то время им была уже ясна и связь между задачами деления окружности (или дуги окружности) и деления угла на равные части. Действительно, если бы можно было с помощью циркуля и линейки разделить угол в 120° на три равные части, то можно было бы и окружность разделить на 9 равных частей т. е. построить правильный 9-угольник, но это им сделать не удавалось. Поиски других механизмов, отличных от циркуля и линейки, или использование линий, отличных от окружности и прямой, вскоре привели некоторых древнегреческих ученых к положительным результатам, что открывало перспективы дальнейших изысканий в этом направлении.

Некоторое представление о результатах работы древнегреческих ученых при решении задачи трисекции угла можно составить теперь по «Математическим коллекциям» Паппа[42].

Папп говорит, в частности, о том, что для решения задач древними применялись окружность и линейка, в другом случае использовались конические сечения и, наконец, они пользовались такими кривыми, как спирали, винтовые линии, квадратрисы, конхоиды, циссоиды. Соответственно с этим задачи делились на плоские и линейные. Так как трисекция угла «является по природе телесной», поэтому «первые геометры и не смогли ее решить с помощью плоских построений, так как они не были еще знакомы с коническими сечениями», с помощью которых оказалось «возможным разделить угол на три равные части».

Папп говорит также, что для «древних геометров» было ясно, что «нет никакой разницы — делить ли угол или дугу».

Но если деление угла или дуги окружности на три равные части, говорит Папп, есть задача «телесная», то «деление заданного угла или дуги в данном отношении будет уже «линейной задачей». Папп рассматривает несколько приемов решения той и другой задачи, причем не всегда он указывает, кому эти методы принадлежат.

Он рассказывает и о делении угла (дуги) в данном отношении. С помощью квадратрисы можно разделить данный угол в определенном отношении или на сколько угодно равных частей, в том числе и на 3 равные части. Этот способ деления угла на 3 равные части был одним из первых известных нам и принадлежал он, вероятно, Гиппию.

Деление угла и дуги окружности с помощью квадратрисы

Как известно из предыдущего, Гиппий в V в. до н. э. построил квадратрису и использовал ее для деления любого угла на какое угодно число равных частей. Нам точно не известно, как решал эту задачу Гиппий с помощью своей квадратрисы. Но мы легко можем представить, как он мог это делать. Пусть квадратриса BC построена и дан $\angle BAC = \alpha$ (или дуга BF) (рис. 23). Требуется разделить этот угол (дугу) на три равные части. При решении этой задачи поступаем так. Из точки C проведем прямую CN, параллельную AD до пересечения с AB. Теперь разделим отрезок NB на соответствующее число равных частей (в частности — на 3): $BB_1 = B_1B_2 = B_2N$. Для этого на прямой NE от точки N откладываем n(=3) равных частей: $NE_3 = E_1E_2 = E_2E_3$..., соединяем точку E_1 с B и из точек E_2 и E_3 проводим параллельные E_2B_1 и E_3B_2 до пересечения с AB в точках B_1 и B_2.

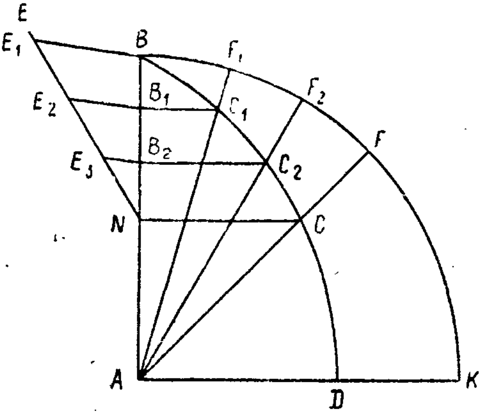


Рис. 23.

Из B_1 и B_2 проведем прямые B_1C_1 и B_2C_2 параллельно NC. Точки C_1 и C_2 соединим с точкой A и продолжим эти прямые до пересечения с окружностью BFK, тогда прямые AC_1 и AC_2 разделят угол $ABC = \alpha$ на три равные части[43], а точки на окружности F_1 и F_2 разделят дугу BF на три равные части. Доказательство вытекает из определения квадратрисы.

Таким образом, первое из известных точное решение задачи трисекции угла было произведено в V в. до н. э. с помощью механической (трансцендентной) кривой. За этим решением последовали и другие решения. Причем оказалось, что эта задача, так же как и задача об удвоении куба, решается и с помощью некоторых так называемых геометрических кривых (например, конические сечения, конхоида).

Папп приводит и другие методы трисекции угла без указания авторов и времени появления их.

Заметив, что «мы умеем делить прямой угол на три равные части», он говорит далее, что задача о делении любого угла на три равные части сводится к делению на три части острого угла, так как если он окажется тупым, то мы всегда можем выделить из него прямой, и остаток будет острый угол.

Метод вставок

В своих «Математических коллекциях» Папп показывает, к чему сводится трисекция острого угла с помощью способа вставок. Изложение Паппа обычно дается в таком виде.

Пусть дан острый угол АВГ (рис. 24), из некоторой точки на одной его стороне, например из А, опустим перпендикуляр АГ на другую сторону угла, и, дополнив параллелограмм ГZ, продолжим сторону ZA до Е. Точку Е на продолжении ZA выберем так, чтобы отрезок ΔЕ прямой ВЕ был равен удвоенному отрезку АВ. Тогда он утверждает, что угол ЕВГ является третьей частью заданного угла АВГ. Доказательство это проводится так. Разделим ΔЕ пополам точкой Н и соединим А и Н, АН, как медиана прямоугольного треугольника ΔАЕ, будет равна ΔН=НЕ. Значит, ΔЕ **вдвое** больше АН. Но ΔЕ также **вдвое** больше и АВ; следовательно, ВА=АН и угол АВΔ=углу АНΔ. Но угол АНΔ вдвое больше угла АЕΔ или угла ΔВГ; итак, угол АВΔ вдвое больше угла ΔВГ. Теперь остается разделить пополам угол АВΔ, и угол АВГ будет разделен на три равные части.

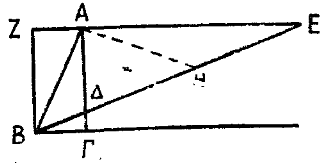


Рис. 24.

Здесь все верно, но вопрос об определении положения точки Е на продолжении ZA остается открытым: найти «вставку» ΔЕ=2АВ с помощью циркуля и линейки невозможно. Можно это сделать с помощью линейки с делениями. Папп предлагает это делать с помощью гиперболы и окружности[44].

Возможно, что «метод вставок», который используется в этом случае, был известен еще в V и IV вв. до н. э. Некоторые же ученые приписывают его изобретение Архимеду.

Трисекция угла в работах Архимеда

Можно считать, что Архимед дал два решения рассматриваемой задачи: 1) с помощью его спирали угол можно разделить на любое число равных частей; 2) с помощью предложения 8 «Книги лемм» угол делится на три равные части.

Рассмотрим сначала деление дуги АНГ (или угла большего π) в данном отношении (или на любое число равных частей).

В своем знаменитом сочинении «О спиралях» Архимед описал многие свойства своей спирали и сформулировал ряд предложений, которые дают возможность разделить любую дугу окружности в данном отношении, что, как мы знаем, равносиль-

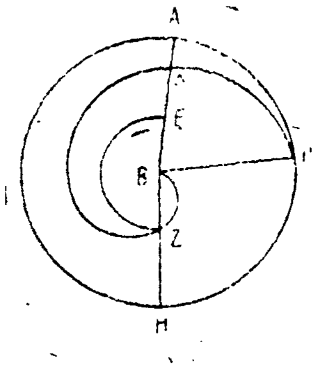


Рис. 25.

но делению центрального угла, соответствующего этой дуге, на любое число равных частей.

Допустим, что дана спираль (рис. 25) ВΔГ. Радиусом ВГ построим окружность ГАН. Требуется разделить дугу АНГ в данном отношении. Пусть это отношение равно отношению ΔЕ к ВЕ. Тогда из точки В радиусом ВЕ опишем окружность. Она пересечет спираль в какой-то точке Z. Соединим В с Z и продолжим BZ до пересечения с окружностью в точке Н. На основании свойства спирали, выявленного Архимедом (предлож. XIV),

$$\Delta B : BE\ (BZ) = \overset{\smile}{AH\Gamma} : \overset{\smile}{\Gamma H} \text{ и } \Delta E : BE = \overset{\smile}{AH} : \overset{\smile}{H\Gamma}.$$

Но ΔЕ : ВЕ равно данному отношению; следовательно, и дуга АНГ разделена в заданном отношении. Таким образом, если отрезок ΔВ разделим на 3, 4, ... равные части и проведем соответствующие рассуждения и построения, то дуга АНГ (а следовательно, и соответствующий ей угол) разделится на 3, 4, ... равные части.

Второй способ деления угла на три равные части содержится в «Книге лемм» Архимеда.

Восьмое предложение «Книги лемм» гласит: «Если в круге как-нибудь проведена линия АВ (рис. 26) и продолжена на прямой, на ней отложена ВС, равная полудиаметру круга, полученная точка С соединена с центром D круга и соединяющая прямая продолжена до Е, то дуга АЕ будет втрое больше дуги BF.

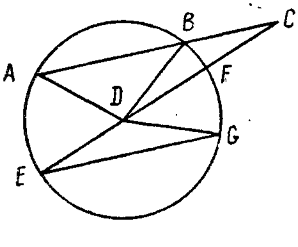


Рис. 26.

При доказательстве этого утверждения Архимед рассуждал так:

Проведем EG параллельно АВ и проведем соединяющие прямые DB и DG. Так как два угла DEG и DGE равны, то угол GDC будет вдвое больше угла DEG. И так как угол BDC равен углу BCD, а угол CEG равен углу АСЕ, то угол GDC будет вдвое больше угла CDB и весь угол BDG втрое больше угла BDC и дуга BG, равная дуге АЕ, будет втрое больше дуги BF. А это и есть то, чего мы хотим. Таким образом, Архимед доказал, что $\smile AE = 3BF$.

Из доказательства Архимеда вытекает и такое доказательство деления угла на три равные части. Пусть требуется разделить на три равные части данный угол ADE. Из точки D, как из центра ,опишем окружность радиусом DE=DA. Продолжим ED и найдем точку C на ED такую, чтобы CB=DE и прямая CB проходила через точку A. Тогда $\angle BCD = \frac{1}{3} \angle АДЕ$, что читатель может доказать сам.

На основании сказанного выше и был сделан вывод, что Архимед создал метод «вставок», хотя есть предположение, что им пользовался еще Гиппократ Хиосский.

Трисекция угла с помощью конхоиды

Во II в. до н. э. Никомед написал сочинение «О конхоидальных линиях». Прокл утверждает, что Никомед гордился открытием конхоиды и применил ее при решении двух знаменитых задач: при удвоении куба и трисекции угла. Конхоида некоторой кривой (прямой) — плоская кривая, получающаяся уменьшением (увеличением) полярного радиуса каждой точки кривой на одну и ту же величину[45].

Как же с помощью конхоиды разделить данный угол на три равные части? Сохраняя ход мысли древних, но используя современную символику, задачу о делении данного угла POM (рис. 27) можно решить так: проведем прямую $PM \perp OM$, отложим $MK = 2OP$. Построим конхоиду имеющую в K точку, наиболее далеко отстоящую от прямой PM так, чтобы PM была для нее асимптотой. Проведем $PE \parallel OK$ и соединим точку E с точкой O. Тогда $\angle EOK = \frac{1}{3} \angle POM$. Докажем это. По свойству конхоиды

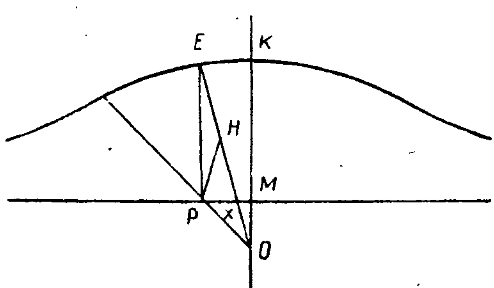


Рис. 27.

$XE = MK = 2OP$. Пусть H середина отрезка XE, т. е. $XE = 2XH$, треугольник EPX — прямоугольный, PH — медиана, проведенная из прямого угла на гипотенузу, тогда $PH = HE$.

Следовательно, $\angle PEH = \angle HPE = \angle MOX$. Так как $OP = \frac{1}{2} XE$ и $PH = \frac{1}{2} XE$, то $OP = PH$. Значит $\angle PHO = \angle POH$. Но $\angle POH = \angle PHO = 2\angle HEP = 2\angle MOX = 2\angle HEP$.

Откуда следует, что $\angle MOX = \frac{1}{3}\angle MOP$, что и требовалось доказать[46].

Трисекция угла с помощью конических сечений

Известно, что Менехм использовал конические сечения (параболы и гиперболы) для удвоения куба. Папп указал[47] два способа деления угла на три равные части с помощью конических сечений [118; 235]. Один из этих способов с помощью нашей символики и аналитической геометрии можно изложить следующим образом.

Дан угол CAB (рис. 28), который нужно разделить на три равные части. Выбираем на одной из сторон точку C и из нее опускаем перпендикуляр на другую сторону угла. Из точки A радиусом $AC = R$ описываем полукруг. На ZA и ZC строим прямоугольник $ZCGA$. Примем ZAD за ось OX, а ZC — за ось OY и положим $ZA = a$, а $AG = b$. Из точки C, как из центра, радиусом $2R$ описываем окружность, уравнение которой $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4R^2$.

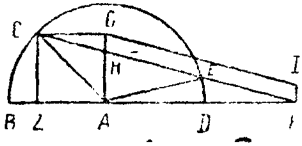


Рис. 28.

Построим теперь ветвь гиперболы, проходящей через точку $G(a, b)$, для которой оси координат — асимптоты; уравнение ее будет $xy = ab$. Решив совместно уравнения $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4R^2$ и $xy = ab$, найдем координаты двух точек пересечения. Взяв ту, у которой абсцисса больше, а ордината меньше, определим точку I. Опустим из этой точки перпендикуляр на OX, найдем точку F и, соединив ее с точкой C, получим

$$\angle CFA = \frac{1}{3} \angle CAB^{48}.$$

Из сказанного о трисекции угла видно, что древние знали несколько способов деления любого угла на три равные части и деления его в данном отношении.

Деление окружности на равные части (построение правильных многоугольников)

Деление окружности на n равных частей равносильно делению угла 2π на n частей. Деление окружности на 360 равных частей лёгко сводится к делению угла $\frac{\pi}{3}$ на 60 частей или $\frac{\pi}{6}$ на 30 частей; деление же угла 45° на три равные части сводится или к делению $\frac{1}{8}$ части окружности на три равные части или всей окружности на 24 части.

Но задача о делении окружности на равные части естественно связывается и с построением правильных многоугольников. Разделив, например, окружность на 6 равных частей, тем самым можно вписать в круг правильный шестиугольник.

Еще в школе Пифагора умели с помощью циркуля и линейки строить правильные многоугольники с числом сторон 2^n, 2^n3, 2^n5, где $n=1, 2, \ldots$, т. е. они знали, как построить квадрат, восьмиугольник, шестнадцатиугольник..., треугольник, шестиугольник, двенадцатиугольник, пятиугольник, десятиугольник... Антифон, Бризон, Архимед и другие ученые строили правильные многоугольники подобного рода с большим числом сторон, а следовательно, они умели с помощью циркуля и линейки делить окружность на 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, ... равных частей. Эти задачи теперь успешно решают и наши школьники. Но если внимательно посмотреть на приведенный ряд чисел, то можно заметить, что в нем нет чисел 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 20, ... Хотя задача построения правильных пяти-, десяти-, двадцати-, пятнадцатиугольников и оказалась трудной, но с ней удалось справиться древним грекам тоже еще в школе Пифагора. Нам точно не известно, как строили правильный пятиугольник сами пифагорийцы, но достоверно известно, что пятиугольник («пентагон») играл особую роль в религиозно-мистической секте пифагорийцев.

В «Началах» Евклида, где систематизированы и результаты работ пифагорийцев, в предложении 11 четвертой книги поставлена задача: «В данный круг вписать равносторонний и равноугольный пятиугольник», а в 12 предложении «Около данного круга описать равносторонний и равноугольный пятиугольник». Здесь дано и решение этих задач. При решении первой из них Евклид строит равнобедренный треугольник BEC (рис. 29) так, чтобы каждый из углов при основании был в два раза больше

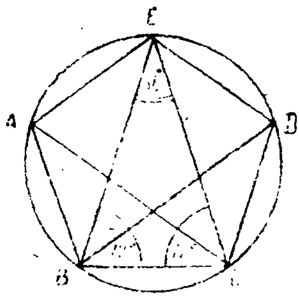


Рис. 29.

угла BEC (возможность построения такого треугольника он показывает в предыдущем предложении). Затем описывает около треугольника BEC круг BAEDC, где точки A и D делят дуги BE и CE пополам; соединив эти точки с вершинами B, E и C, E, получим пятиугольник BAEDC. И Евклид обосновывает далее, что «пятиугольник BAEDC равносторонний и равноугольный»[49].

Тем самым открывалась возможность строить правильные многоугольники с числом сторон $5 \cdot 2^n$. В дальнейшем были найдены и другие способы построения правильного пятиугольника. Так, например, Птолемей (II в. н. э.) стороны правильного вписанного в круг пятиугольника и десятиугольника предложил строить так: дан круг (рис. 30), радиус его OA делим пополам (точка C), из C, как из центра, радиусом CD описываем дугу DI. Птолемей утверждает, что OI есть сторона правильного десятиугольника, а ID — сторона правильного пятиугольника[50].

Древние греки умели строить и правильный пятнадцатиугольник. Нам не известно, кто первый из древнегреческих ученых разделил окружность на 15 равных частей, не известно также, позаимствовал ли у кого Евклид или сам предложил им открытый способ решения этой задачи, но у него в «Началах» (предложение 16 четвертой книги) сформулирована такая задача: «В данный круг вписать пятнадцатиугольник равносторонний и равноугольный».

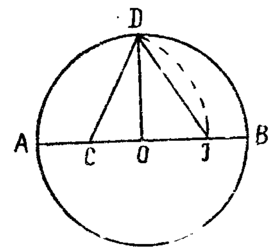


Рис. 30.

Построив правильные треугольник и пятиугольник (рис. 31), Евклид замечает: если допустить, что круг разделен на 15 равных частей, то таких частей «в обводе ABC, являющемся третью круга, будет пять, в обводе же AB, являющемся пятой частью круга, будет три; значит в остающемся обводе BC равных долей будет две». Разделив затем дугу BC пополам точкой H, он заключает, что каждый из обводов BH и HC будет пятнадцатой частью круга. Соединив точки B и H, а также C и H и откладывая равные отрезки в круге, мы получим правильный пятнадцатиугольник, вписанный в круг.

Правильные многоугольники с числом сторон 7, 9, 11, ... древ-

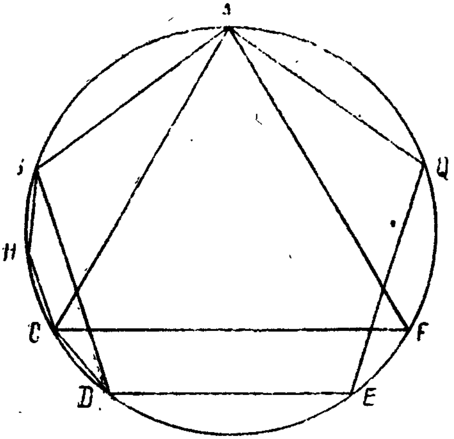


Рис. 31.

ние тоже пытались построить с помощью циркуля и линейки, но это им не удавалось. После этих неудачных попыток они стали искать способы построения правильных семиугольников, девятиугольников, с помощью других инструментов или линий, отличных от прямой и окружности[51].

И на этом пути им удалось получить важные результаты. Мы здесь рассмотрим только деление круга на семь равных частей. Этот вопрос решен в сочинении Архимеда «Книга о построении круга, разделенного на семь равных частей» [5; 401—415].

Непосредственное отношение к интересующему нас вопросу имеют предложения 17 и 18 указанного сочинения Архимеда. В предложении 17 Архимед показывает, как можно данный отрезок разделить на три части в указанном отношении. Возьмем квадрат ABDC. Проведем диагональ BC и прямую DFG так, чтобы площадь треугольника CDF равнялась площади треугольника AGH. Через точку пересечения диагонали BC и прямой DFG проводим прямую KFL параллельно AC (рис. 32). Тогда, говорит Архимед, я утверждаю, что площадь прямоугольника $AB \cdot KB$ равна квадрату на GA, площадь $GK \cdot AK = KB^2$ и каждая из линий BK и GA длиннее линии AK.

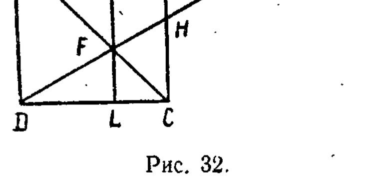


Рис. 32.

Доказательство: Так как $CD \cdot FL = GA \cdot AH$, то $CD : GA =$

$=AH:FL$. Так как треугольники GAH и GKF подобны треугольнику FLD, то $AH:FL=GA:LD=GA:KB$. Следовательно, $AB:GA=GA:KB$. Точно также: $FL:KF=LD:GK$ или $GK:LD$ $(KB)=KB:LC$ (AK). Откуда и получается $AB\cdot KB=AG^2$ и $GK\cdot AK=KB^2$. Что и требовалось доказать. Таким образом, приняв линию BG (AB) за хорду будущего круга, в который впишется правильный семиугольник, мы и разделим ее в нужном отношении точками K (D) и A (C). Затем Архимед переходит к основному предложение (18). В 18 предложении Архимед говорит: «Мы хотим построить круг, разделенный на семь равных частей»:

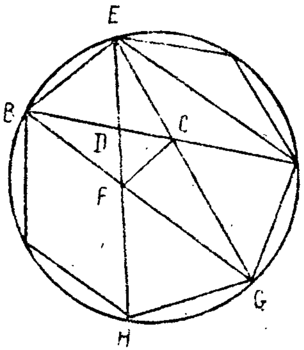


Рис. 33.

Строится этот круг так: берется некоторая прямая AB — хорда будущего круга, в который будет вписан затем правильный семиугольник (рис. 33), делим AB в точках C и D так, чтобы

$$AD\ CD=BD^2;\ CB\ BD=AC^2.$$

Построим треугольник CED так, чтобы $CE=CA$ и $DE=DB$. Полученная таким образом точка E будет третьей вершиной треугольника ABE, около которого опишем круг, а прямая BE будет стороной семиугольника, вписанного в этот круг. Но то, что BE — сторона семиугольника, надо доказать. С этой целью прямые ED и EC продолжаем до пересечения с окружностью в точках H и G. Соединим прямой точки B и G, точку F — пересечения BG с EH соединим с точкой C. Треугольник ACE — равнобедренный. Угол CAE, опирающийся на дугу BE, и угол CEA — на дугу AG, равны между собой. А следовательно, равны между собой и дуги BE и AG. По построению $AD\cdot CD=BD^2=DE^2$, т. е. $AD:DE=DE:DC$. Так как в треугольниках ADE и CDE угол D общий, а стороны, его заключающие, пропорциональны, то эти треугольники подобны. Отсюда следует, что угол $CED=$ углу DAE и дуги $HG=BE=AG$. Тогда линии AE и BG параллельны и $\angle AEC=\angle ABG$. Так как угол CGF равен углу CBF, как опирающийся на равные дуги, то и углы CED и DBF равны между собой. Так как $DE=DB$ по построению, то BDE равнобедренный треугольник, а BF CE равнобедренная трапеция. Так как треугольники EBF и EBC равны, то и

$$BF=EC=CA,\quad BD=DE,\ DF=CD,\ FE=CD+DB.$$

Из соотношения $CB\cdot BD=AC^2=EC^2$ следует, что $CB:EC=EC:$

BD или EF : FC=FC : ED; значит треугольники ECD и ECF с общим углом E будут подобны: $FE \cdot ED = EC^2$. Из подобия треугольников EDC и EFC получаем $\angle DCE = \angle EFB = \angle EFC = \angle EBC = \angle DCE = 2\ \angle CAE$.

Следовательно, дуга $\overset{\smile}{EA} = 2\overset{\smile}{BE}$. Из равенства углов DEB и DBE заключаем, что $\overset{\smile}{HB} = \overset{\smile}{AE} = 2\overset{\smile}{BE}$. Разделив дуги EA и HB пополам, получим еще четыре дуги, равные $\overset{\smile}{BE}$, а весь круг будет разделен на семь равных частей.

Таким образом, ряд важных задач, возникших в свое время из практических потребностей, древние греки подняли до уровня теоретических конструктивных задач и указали многие способы решения их[52].

У других народов Древнего мира

Из сказанного в этой главе видно, что на первом этапе истории рассматриваемых задач заметный след оставили древние египтяне и вавилоняне, а во втором периоде в теорию этих задач внесли основной вклад древние греки.

Но с этими задачами в то время сталкивались и другие народы. Есть основания считать, что задачи о вычислении площади круга и длины окружности, деление на равные части угла и окружности пытались решать китайцы и индийцы, римляне, предки народов, населяющих территорию СССР и др.

Так, например, знаменитый римский архитектор и строитель Витрувий (2-я половина I в. н. э.) в книге «Архитектура» считал, что длина окружности при диаметре равном 4 будет $12\frac{1}{2}$. В известных китайских сочинениях, написанных в первых столетиях н. э., «Математика в девяти книгах» [71] и др. решались и такие задачи, в которых нужно было уметь находить $\frac{C}{d} = \pi$. Вот одна из задач: имеется круглое поле, обвод 300 бу, диаметр 100 бу. Каким будет поле?

Решаются такие задачи по рецептам: $S_{кр} = \frac{1}{2} C \frac{d}{2}$, $\frac{Cd}{4}$, $\frac{3}{4} d^2$, $\frac{C^2}{12} \cdot 3$, объем цилиндра находился по рецепту, который можно выразить с помощью формулы $V_ц = \frac{C^2h}{12}$. Во всех этих случаях получается $\pi=3$, они получали и более точные значения для $\pi : \sqrt{10}$, $\frac{355}{113}$ и др.

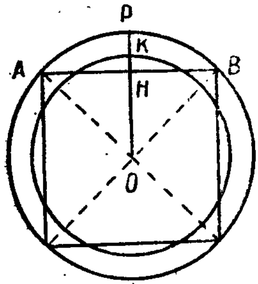


Рис. 34.

В Индии, в сочинении «Правила веревки» (VII—V в. до н. э.), дается, в частности, такой способ построения круга, равновеликого данному квадрату. Строим круг радиуса OP (рис. 34), вписываем квадрат. Отрезок HP делим на 3 равные части: $HK=\frac{1}{3}$ HP, затем радиусом OK проводим круг, утверждали, (без доказательства), что этот круг равновеликий квадрату. В этом случае π равно 3,168. В других случаях индийцы полагали, что сторона квадрата, равновеликого кругу с диаметром d, равна $l=\frac{13}{15}d$, а также считали, что π равно $\frac{676}{225}=3{,}004$. В дальнейшем в Индии были получены и другие результаты.

Предки народов Советского Союза в ту эпоху тоже решали задачи о вычислении площади круга и длины окружности, делений угла и дуги окружности на равные части, возникавшие в практике, пользуясь тоже некоторыми рецептами (см. IV главу).

Примечания к главе I

[1] Из истории известно, например, что еще в каменном веке человек строил себе жилище в виде шалаша конической или полусферической формы. При этом люди фактически решали две конструктивные задачи: построение окружности, ограничивающей круглый пол шалаша, и деление окружности на равные части, чтобы наметить места, в которых будут воткнуты жерди или прутья, образующие остов шалаша.

[2] Возраст колеса, найденного при раскопках в Болгарии, определяется с помощью радиоактивного анализа: 5830±50 лет. Изготовление колес предполагало умение измерять длину обода (окружности) и деление окружности (обода) на равные части (для колес со спицами).

[3] «Папирус» — особый род «бумаги», который египтяне изготовляли из растения папируса, росшего на берегах Нила, «писали» египтяне с помощью краски «иероглифами» (рисунками), затем иероглифическое письмо было заменено иератическим (скорописью).

[4] Древние вавилоняне «писали» на сырых глиняных дощечках, выдавливая палочкой, заканчивавшейся клинком, различные знаки, потому и письмо их называют клинописью.

[5] Хотя науке известно имя математика Имхотепа — автора проекта и расчетов знаменитой ступенчатой египетской пирамиды, жившего около

3000 г. до н. э., но нам ничего не известно о «рецептах», по которым он вычислял «круглое».

[6] Локоть — старинная линейная мера, немного менее 0,5 метра.

[7] Науке пока не известно, как египтяне получили этот рецепт. Некоторые ученые полагают, что они при этом покрывали площади круга и квадрата одним сплошным слоем мелких зерен и затем подсчитывали число их. А. И. Раик предложила свою реконструкцию получения египтянами этого рецепта [86; 36].

[8] Круговая луночка — часть плоскости, ограниченная дугами двух окружностей, имеющих общую хорду.

[9] Рекомендуется читателям (особенно школьникам и студентам):

а) проверить рецепты древних, указанные в этом параграфе, установить степень точности их;

б) определить, на какой части диаметра круга $\frac{m}{n}d$ надо построить квадрат, чтобы из $S_{кр}=\left(\frac{m}{n}d\right)^2$ следовало бы $\frac{C}{d}\ (=\pi)=3{,}14$ и 3,1415, ($m<n$ — наименьшие целые числа);

в) выяснить, какая ошибка будет допущена, если принять пример правильного 12-угольника за длину окружности;

г) вычислить приближенные значения λ_1 и λ_2, заменив луночки фигурами, ограниченными сторонами правильных 12-угольников, вписанных в данные круги;

д) подумать над возможными реконструкциями путей получения древними египтянами и вавилонянами рецептов для вычисления площадей круга и луночек, длины окружности, хорды и стрелки.

[10] Рекомендуется:

а) тем, кто не знаком с решениями этих задач на построения, ознакомиться с ними по учебникам геометрии;

б) построить отрезок, равный $\sqrt{5}-\sqrt{3}$;

в) превратить данный треугольник в равновеликий ему квадрат.

[11] Вопрос о «совпадении» многоугольника с кругом, а также и другие аналогичные вопросы математики и философии вызывали жаркие споры среди ученых Древней Греции. Например, Симпликий в комментариях к «Истории геометрии» Евдема писал по этому поводу, что «мы никогда не достигнем окружности круга, даже если бы деление продолжалось до бесконечности». Такого рода споры оказывали, по-видимому, влияние и на направление их исследований и на понимание необходимости строгих доказательств в математике.

[12] Развитие этих идей и идей Архимеда в дальнейшем привело к понятию определенного интеграла, способствовало появлению интегрального исчисления.

Предлагается:

а) установить величины ошибок при вычислении площади по способу Бризона при $n=3$, 4 и 6;

б) установить ошибочность утверждения, что «между площадями правильных вписанного и описанного многоугольников среднепропорциональная есть площадь описанного многоугольников с удвоенным числом сторон» [21, 41], т. е. что $\frac{S_n+S_n'}{2}=S_{2n}$;

в) построить циркулем и линейкой квадрат, равновеликий данному правильному шестиугольнику.

[13] Например, Демокрит говорил: «Найти одно научное доказательство для меня важнее, чем овладеть всем персидским царством».

[14] До Платона при решении задач на построение пользовались тоже преимущественно циркулем и линейкой, но это объяснялось, по-видимому, тем, что долгое время известны были только эти «орудия геометрических построений». После того как в V в. до н. э. стали появляться и использоваться в геометрии некоторые новые кривые и механизмы их вычерчивания, циркуль и линейка оставались «более простыми приборами», а прямая и окружность — «более простыми линиями». Идеалист Платон, рассматривая геометрию как «идеальную науку», считал недопустимым решение ее задач с помощью «механических способов» (не циркулем и линейкой), так как, по его мнению, при этом «благо геометрии устраняется и разрушается, ибо мы снова низводим ее к чувственному миру, вместо того чтобы поднимать и насыщать ее невещественными, мысленными образами точно так, как делает это бог...». В дальнейшем ученые пытались дать и рациональное объяснение предпочтению циркуля и линейки (окружности и прямой) по сравнению с другими кривыми. Одно из этих объяснений: прямая и окружность — единственные линии постоянной кривизны на плоскости.

[15] О популярности этой задачи в Древней Греции в указанный период можно судить и потому, что почти все математики того времени занимались этой задачей, а также и потому, что об этой задаче говорилось даже в таких сочинениях, как комедия Аристофана «Птицы» (415 г. до н. э.). Один из персонажей этой веселой комедии (Метон) рассказывает, как он распланирует воздушный птичий город: в середине города будет круглая базарная площадь; затем он говорит: «Возьму линейку, проведу прямую, и мигом круг квадратом обернется. Ну как на солнце. Хотя оно само и круглое, а ведь лучи прямые...» Метонова квадратура, конечно, только шутка, но то, что научная проблема стала забавой для театральной публики, говорит о популярности этой задачи.

[16] Доказательства этих теорем даны Евклидом в «Началах» без ссылок на Гиппократа (см. предлож. 2 кн. XII и предлож. 31 кн. III). Предлагается сравнить доказательство Евклида с современным доказательством этих теорем.

[17] Эти и следующие цитаты о Гиппократе в основном из [5; 530 и сл.].

[18] Здесь заметим, что Гиппократ при определении квадрируемости луночек в основу клал подобие сегментов, в XVIII в. необходимым и достаточным условием квадрируемости луночек считали равенство секторов, ограниченных дугами, образующими луночку, и вытекающее отсюда равенство

$$m\sin^2 n\Theta = n\sin^2 m\Theta$$

при m и n взаимно-простых целых числах, где $m\Theta=\alpha$ и $n\Theta=\beta$ центральные углы дуг, образующих луночку. В дальнейшем были внесены уточнения в определения необходимых и достаточных условий.

С этой точки зрения Гиппократ нашел три случая квадрируемых луночек, для которых $\alpha : \beta = m\Theta : n\Theta = m : n = 2:1,\ 3:1$ и $3:2$.

[19] Предлагается доказать, что:

а) площадь луночки

$S_{A\alpha B\beta C\gamma} = S_{AO_1O_2A_1} = S_{A\alpha B\alpha} + S_{B\beta Cb}$ (см. рис. 6);

б) площадь сегмента III равна сумме площадей сегментов I и II;

в) луночка $Aa'a\gamma'$ квадрируема, и площадь ее связана с площадью $S_{A\alpha B\beta C\gamma}$ (см. рис. 6).

[20] Рекомендуется:

а) построить циркулем и линейкой трапецию со сторонами 1, 1, 1 и $\sqrt{3}$ и разделить ее на три равновеликие части;
б) доказать, что:
1) сегмент DABC больше полукруга или что угол DBC — острый;
2) площади секторов DO_1CBAD и $DO_2'CBD$ равны;
3) площадь луночки $DA\alpha BC\beta D$ равна площади прямолинейной фигуры $DO_2'CO_1D$ и что последняя, в свою очередь, равна площади трапеции DABC;
4) площадь луночки $DA\alpha BC\beta D$ равна сумме площадей трех луночек I, II и III;
5) луночка $D'D\beta CC'\alpha'D'$ будет квадрируемой;
6) существует определенная зависимость между площадями луночек, если продолжить аналогичные построения (в сторону увеличения и уменьшения радиусов).

[21] Сам Гиппократ, по-видимому, не указал, каким способом он пользовался при проведении «вставки» EZB. Цейтен [93] и Ван дер Варден [19] справедливо указывают, что построение EZB сводится к составлению и решению квадратного уравнения относительно EH=x или ZB=y. Следовательно, построение EZB, а значит и прямолинейной фигуры, равновеликой луночке, для которой $m : n = 3 : 2$, возможно циркулем и линейкой.

Предлагается доказать:
1) Что если обозначить EH через x, а ZB — через y, то уравнение, к которому сводится задача построения трапеции EKBH, будет $2x^2 - 3x - 3 = 0$;
2) Что доказательство теоремы: «Луночка, для которой выполняется условие $m : n = 3 : 2$, квадрируема циркулем и линейкой», можно начать следующим образом: построить трапецию EKBH, где $EK = KB = BH = 1$ и $EH = \frac{3+\sqrt{33}}{4}$, затем описать окружности вокруг трапеции EKBH и вокруг треугольника EZH.
3) Как можно преобразовать фигуру EKBHZE в равновеликий квадрат; будет ли квадрируемой луночка $E_1EHH_1Z_1E_1$, где $EH = EE_1 = HH_1$.
4) Что сегменты на EZ и ZH подобны сегментам на EK, KB и BH, угол HBE — тупой, сектор EO_1HBKE = сектору EO_2HZE, отношение $\alpha : \beta = 3 : 2$.
5) Что $S_л = S_{EO_1HO_2E}$.

[22] Вопрос о том, как удалось Гиппократу «напасть» на эти три случая квадрируемых луночек, остается неясным. Дальше будет показано, что с помощью алгебры удалось обнаружить еще два случая квадрируемых луночек ($m : n = 5 : 1$ и $5 : 3$) и доказать, что этими пятью случаями и исчерпываются квадрируемые циркулем и линейкой круговые луночки.

[23] Ошибки, связанные с историей и теорией квадратуры луночек, нередко встречаются и у современных авторов (см. гл. IV).

[24] Рекомендуется:
а) найти центр круга $A'\beta'C'$ при построении сегмента $A'\beta'C'B'$;
б) построить квадрат, равновеликий «луночке и кругу»;
в) доказать, что луночка $A'B'C'\beta'$ не совпадает ни с одной из трех рассмотренных выше луночек и отдельно не квадрируется;
г) найти другие луночки, которые квадрируются вместе с кругом или с его частями.

[25] На чертеже воспроизведена только часть кривой квадратрисы.
Рекомендуется:
а) восстановить всю эту кривую;

б) найти уравнение квадратрисы в декартовой системе координат $y = x\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2r}$ и в полярной системе координат $\rho = r\frac{1-\frac{2\varphi}{\pi}}{\cos\varphi}$, где $r = AB$, $\rho = CF_к$, φ — угол $ACE_к$;

в) построить механизм, осуществляющий построение этой кривой;

г) ответить на вопросы: достаточно ли знания способа спрямления окружности для квадратуры круга? и как найти точку M?

[26] См. комментарии Мордухай-Болтовского к «Началам» Евклида [44; 326, 330] и комментарии Веселовского к «Сочинениям» Архимеда [5; 528 и сл.].

[27] Архимед рассматривал спираль как след равномерного движения точки в плоскости по прямой, в то время как прямая равномерно вращается вокруг точки A (см. рис. 13) как вокруг центра. Спираль Архимеда (современное уравнение $\rho = a\varphi$), так же как и квадратриса, «механическая» кривая.

[28] Полное доказательство этой теоремы см. [5, 246 и сл.]. Рекомендуется:

а) получить уравнение спирали Архимеда и установить, где она используется;

б) построить прибор для вычерчивания спирали Архимеда и построения с ее помощью отрезка прямой, равного π.

[29] Рекомендуется:

а) доказать эту теорему современными методами;

б) преобразовать площадь треугольника E в квадрат.

[30] В тексте, дошедшем до нас, она значится как 3-я теорема, но последовательность теорем была, очевидно, установлена после Архимеда ошибочно, так как логически она должна предшествовать следующей теореме.

[31] Показать:

а) какое из чисел $3\frac{10}{71}$ или $3\frac{1}{7}$ ближе к истинному значению π;

б) какое должно быть n (число сторон многоугольников), чтобы получить $\pi = 3{,}141$.

[32] Показать, как можно улучшить отношение «круга» к квадрату его диаметра, меняя CZ.

[33] Ван дер Варден [19; 222], в частности, утверждает, что эта задача «возникла как перевод вавилонского кубического уравнения $x^3 = v$ на язык пространственной геометрической алгебры», но он не приводит фактов, подтверждающих это предположение.

[34] Историки считают, что некоторые греческие мифы о Миносе «содержат в себе зерно исторической правды» (В. С. Сергеев. История Древней Греции, изд. 2, 1948, стр. 63).

[35] Кстати заметим, что на основании подобных легенд некоторые древние и буржуазные историки математики без фактических оснований приписывали Платону многие открытия в математике.

М. Я. Выгодский в работе «Платон как математик» (см. сб. «За материалистическую диалектику в математике», 1931) убедительно показал несостоятельность такого взгляда на Платона.

[36] Рекомендуется:

а) учащимся с помощью преподавателя построить модель механизма Архита и продемонстрировать на одном из занятий в кружке;

б) студентам — получить уравнения указанных поверхностей, уравнения линий пересечения поверхностей и координаты точки пересечения этих линий.

[37] Решение, приписываемое Евтокием Платону, т. е. с помощью прямых

углов («плотничных угольников»), как утверждают Ван дер Варден [19; 225], Н. И. Веселовский [5; 479] и другие ученые, «вне всякого сомнения является подложным». Известно, что Платон резко порицал за такие «механические» решения этой задачи Архита, Евдокса и Менехма. Решение нами задач с помощью прямых углов см. гл. IV.

[38] О. Беккер в книге Das mathematische Denken der Antike приводит способ построения двух средних пропорциональных, который Таннери приписывает Евдоксу, и рассматривает второй способ, который «мог бы дать Евдокс».

[39] Показать, какие следует взять уравнения параболы и гиперболы, чтобы решить обобщенную задачу: увеличить (уменьшить) данный куб с ребром a в p раз?

[40] Показать:

а) что построение трех средних пропорциональных между a и 2a приводит к задаче $x^4=2a^4$;

б) можно ли с помощью прибора Эратосфена решить обобщенную задачу удвоения куба: $x^3=pa^3$?

[41] Рекомендуется:

а) разделить угол $\varphi=22{,}5°$ на три равные части;

б) показать, какие углы кроме $\alpha=\dfrac{\pi}{2^n}$ можно разделить на три равные части циркулем и линейкой?

[42] Выдержки из этой части труда Паппа приводятся в «комментариях к «Книге Лемм» Архимеда [5; 606].

[43] Доказать, что прямые AC_1 и AC_2 действительно делят угол $BAC=\alpha$ на три равные части и что с помощью квадратрисы можно разделить угол α (дугу BF) на сколько угодно равных частей.

[44] Рекомендуется:

а) показать, как это можно сделать и

б) использовать конхоиду (см. стр. 51) для построения ΔE.

[45] Предлагается:

а) построить прибор для черчения конхоиды;

б) получить уравнение конхоиды $(x-a)^2(x^2+y^2)-d^2x^2=0$ или

$$\rho=\frac{a}{\cos\varphi}\pm d$$ и исследовать его.

[46] Ответить на вопрос: можно ли с помощью конхоиды разделить угол MOP на n равных частей ($n>3$)?

[47] Есть основание полагать, что открытие конических сечений и начало разработки их теории и приложений во многом обязано потребности решения указанных знаменитых задач древности.

[48] Рекомендуется, доказать справедливость этого утверждения.

[49] Рекомендуется провести это доказательство самостоятельно.

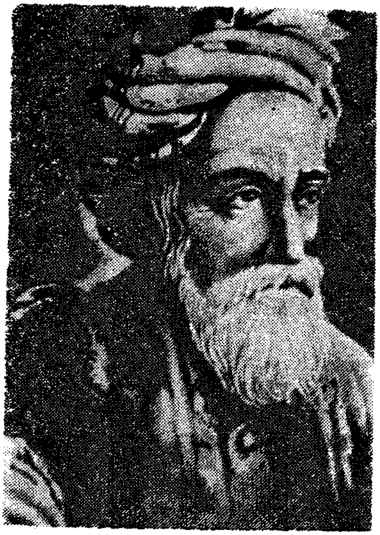
[50] Установить:

а) верно ли это утверждение Птолемея?

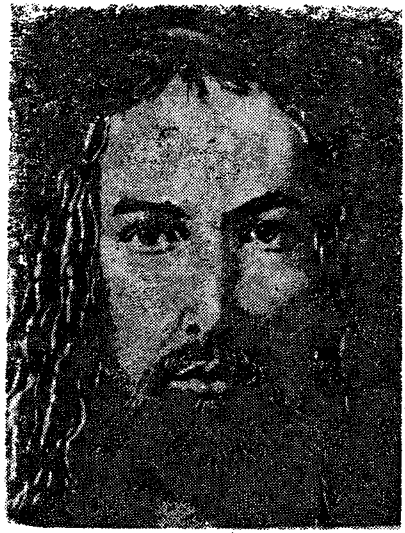
б) как связана задача о построении стороны правильного пятиугольника x с правилом «золотого сечения» отрезка a?

[51] В дальнейшем (см. стр. 116), используя диофантов анализ, была разработана теория построения правильных многоугольников с числом сторон $N=n_1n_2$, где n_1 и n_2 — число сторон правильных многоугольников, построение которых известно. С точки зрения этой теории построение правильного пятнадцатиугольника стало частным случаем ($n_1=3$, $n_2=5$).

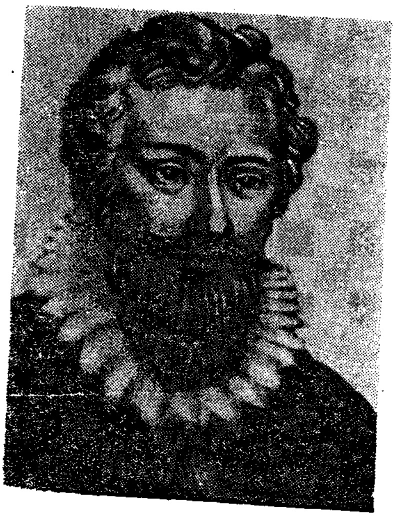
[52] Обосновать ответ на вопрос: с помощью каких кривых, рассмотренных ранее, можно разделить окружность на любое число равных частей?



О. Хайям

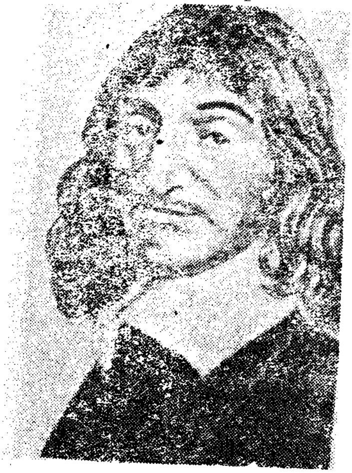


А. Дюрер



Ф. Виет

И. Кеплер



Р. Декарт

Х. Гюйгенс

И. Ньютон

Г. Лейбниц

Л. Эйлер

Глава II

ЗНАМЕНИТЫЕ ЗАДАЧИ ДРЕВНОСТИ В СТРАНАХ ВОСТОКА И ЕВРОПЫ В VI—XVIII СТОЛЕТИЯХ

(Продолжение наступления на «неподдающиеся задачи»)

В ряде европейских стран, начиная с V—VI вв., а в Средней Азии с VII—VIII вв., на смену отжившему рабовладельческому строю приходит феодальный. Эпоха заката рабства и раннего феодализма в Европе характеризовалась также отсутствием необходимых стимулов, условий для развития науки, в том числе и математики. Но в силу неравномерности развития феодализма и некоторых специфических особенностей в ряде стран Востока в VI—XV столетиях проявлялся интерес к науке, особенно к астрономии и математике. Многие греческие ученые, особенно язычники, преследуемые христианской церковью, вынуждены были покинуть Родину и переселиться в страны Востока.

Ученые Индии, стран ислама и Китая в период средневековья общались с греческими учеными, непосредственно или через посредников, знакомились с результатами исследований ученых Древнего мира, и в частности с методами решения знаменитых задач древности.

Но ученые этих стран не ограничились изучением трудов древних греков: в некоторых областях математики (особенно алгебры и тригонометрии) они получили новые важные результаты и уделили много внимания геометрическим построениям с помощью различных средств. В частности, в их трудах идеи и методы, связанные с решением знаменитых задач древности, получили дальнейшее развитие.

Когда в эпоху Возрождения в европейских странах вновь появились благоприятные условия для развития науки, европейцы позаимствовали многое из того, что было сделано и сохранено из открытий ученых Древнего мира и средних веков, в том числе и в решении знаменитых задач древности.

В период, рассматриваемый в данной главе, были созданы способы точного и приближенного решения этих задач, некоторые задачи приобрели новый характер и большую самостоятельность. К концу этого периода и в начале следующего была подготовлена почва для получения ответа на вопрос: возможно ли решение этих задач в общем случае с помощью циркуля и линейки?

В этот период значительно расширилась география мест, где занимались знаменитыми задачами древности, увеличилось число лиц, проявлявших интерес к этим задачам. Наступление на непокорные задачи продолжалось.

Квадратура круга и спрямление окружности

Еще в Древней Греции многие математики направили свои усилия на вычисление длины окружности или отношения длины окружности к диаметру $\frac{C}{d}$ все с большей степенью точности с помощью метода Архимеда, изложенного в «Измерении круга». В дальнейшем это направление долгое время являлось главным в истории квадратуры круга.

По мере развития алгебры и анализа на смену геометрическому методу вычисления $\frac{C}{d}=\pi$ (вписывание и описывание правильных многоугольников) пришли аналитические средства: бесконечные произведения, ряды и непрерывные дроби. Одновременно с этим некоторые математики начинают задумываться об арифметической природе числа π и предпринимают попытки, направленные на снятие завесы таинственности, окутывавшей это число.

В Индии

Индийские ученые в период средневековья внесли заметный вклад в развитие математики: они наряду с китайцами ввели в математику нуль, десятичную позиционную систему, отрицательные числа, ввели современное обозначение чисел и рассмотрели отдельные вопросы, относящиеся к тригонометрии. Некоторые из индийских ученых занимались и вычислением длины окружности. Математика у них выступала как часть астрономии. Наиболее известными астрономами и математиками Индии эпохи средневековья являлись Ариабхатта, Брахмагупта и Бхаскара.

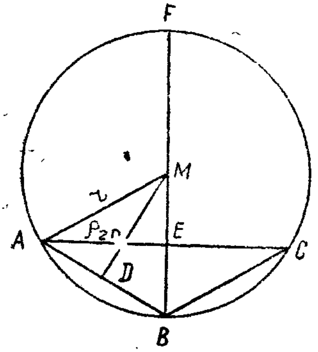


Рис. 35.

Ариабхатта в произведении «Ариабхатиам» (ок. 500 г. н. э.) в частности с помощью 384-угольников получил приближенную длину окружности, откуда $\pi=3,1416...$, т. е. более точное значение, чем у Архимеда и Птолемея.

Рассуждения Ариабхатты, приведшие его к этому результату, с помощью нашей символики можно изложить так: возьмем круг с радиусом $MA=r$, пусть сторона вписанного правильного n-угольника $AC=a_n$, сторона вписанного 2n-угольника $AB=a_{2n}$, апофема $MD=\rho_{2n}$ (рис. 35). $\Delta ABE \backsim \Delta MBD$.

Тогда $r: \rho_{2n}=a_{2n}:\frac{1}{2}\, a_n$, откуда $2a_{2n}\rho_{2n}=ra_n$. Из прямоугольного треугольника ADM получаем $\rho^2_{2n}=r^2-\frac{1}{4}\, a^2_{2n}$. Заменив из предыдущего $2\rho_{2n}$ через $\frac{ra_n}{a_{2n}}$, получим

$$a^4_{2n}-4r^2a^2_{2n}+r^2a^2_n=0,$$

откуда

$$a^2_{2n}=2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2_n}.$$

Если положить $r=1$, то получим $a^2_{2n}=2-\sqrt{4-a^2_n}$. В круге радиуса $r=1$ сторона вписанного квадрата $a_4=\sqrt{2}$. Сторона вписанного 8-угольника $a_8=\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Пользуясь полученной формулой, дающей выражение a_{2n} через a_n, получим $a_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $a_{32}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$.

Тогда периметр, например, $P_{16}=16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ..., $P_{64}=64\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$. Ариабхатта (VI в.) применял формулу для выражения стороны правильного $2n$-угольника (a_{2n}) через сторону правильного n-угольника (a_n), отправляясь от $a_6=1$. Тогда $a_{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $a_{24}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}, \cdots$,

$$a_{384}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}.$$

Следовательно, периметр 384-угольника $P_{384}=384a_{384}=6{,}2832\ldots$ Разделив последнее число на диаметр $BF=2$, Ариабхатта и получает $\pi=3{,}1416$.

Брахмагупта (VII в.), полагая диаметр круга равным единице, получал P_n в виде $P_{12}=\sqrt{9{,}65}$, $P_{24}=\sqrt{9{,}81}$, $P_{48}=\sqrt{9{,}86}$, $P_{96}=\sqrt{9{,}87}, \ldots$ $C=\pi=\sqrt{10}=3{,}16\ldots$ У Бхаскары (XII в.) встречается $\frac{C}{d}=\frac{377}{120}=3{,}1416\ldots$ Более точное значение π получали в Индии путем разложения дуги окружности по степеням тангенса или котангенса, что было связано с вычислениями в астрономии.

Свидетельство этого мы находим и в «Научном сборнике» Нилоканты (1502 г.). Правило вычисления дуги окружности дано в таком виде: «Возьми дугу окружности такую, что ее синус меньше косинуса. Умножь синус дуги на радиус и раздели на косинус. Это дает количество. Умножь это количество на квадрат синуса и раздели на квадрат косинуса, получишь второе количество. Повтори это, умножая на квадрат синуса и деля на квадрат косинуса, полученные количества раздели по порядку на нечетные числа, 1, 3, 5, ... Если полученные количества попеременно вычитать из первого и прибавлять к нему, то в конечном счете получишь дугу окружности». Это правило в нашей символике выглядит так:

$$r\varphi=\frac{r\sin\varphi}{\cos\varphi}-\frac{r\sin^3\varphi}{3\cos^3\varphi}+\frac{r\sin^5\varphi}{5\cos^5\varphi}-\cdots$$

или

$$\varphi=\operatorname{tg}\varphi-\frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{5}-\cdots$$

при $\varphi=\frac{\pi}{4}$ получается числовой ряд для вычисления π:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots \qquad (1)$$

В «научном сборнике» дано π с десятью верными десятичными знаками[1].

В странах ислама

Представители народов, живших в средние века в странах Среднего и Ближнего Востока, оставили тоже заметный след в истории математики вообще, и в частности в улучшении приближения значения $\frac{C}{d}=\pi$.

В VII—VIII вв. н. э. арабы завоевали ряд стран в Азии, Африке и Европе и создали могучую Арабскую империю. В Арабской империи создались условия, способствовавшие развитию интереса к наукам, в том числе и к математике. В ряде городов существовали математические школы, особенно продуктивно работала Багдадская математическая школа. В начале здесь осваивалась математическая культура других народов. С греческого и сирийского языков были переведены на арабский язык произведения Евклида, Архимеда, Аполлония, Птолемея, Диофанта и др.[2]. Но затем представители многих покоренных народов и сами арабы стали получать оригинальные результаты в области астрономии и математики и публиковать их на арабском языке, ставшем официальным языком на территории всей Арабской империи.

Среди математиков того времени, писавших на арабском языке, было много и предков народов, населяющих наши среднеазиатские республики (узбеков, таджиков, туркменов, азербайджанцев). В частности, одним из выдающихся ученых первой половины IX в. был узбекский алгебраист Мухамед бен Муса ал-Хорезми. Он жил и работал при дворе халифа ал-Мамуны. Наиболее выдающимся его произведением по алгебре было «Хисаб алджебр вал-мукабала» (830 г.). Оно положило начало существованию алгебры как самостоятельной ветви математики. Но в нем рассматриваются и некоторые вопросы геометрии, в том числе и вопросы, связанные с измерением площади круга и длины окружности. Ал-Хорезми указывает, например, что существуют три значения для выражения отношения длины окружности к диаметру: $\frac{C}{d}=3\frac{1}{7}$, $\sqrt{10}$ и $\frac{62832^{3}}{20000}$,

которые употребляются в астрономии. Он не отмечает, хотя это известно, что первое из них получил еще Архимед, а два последние были получены в Индии. Он замечает только, что все эти значения примерно равны между собой. Далее он утверждал, что площадь круга равна половине диаметра, умноженной на половину окружности, так как площадь любого правильного многоугольника равна произведению полупериметра на полудиаметр описанного круга.

У ал-Хорезми имеется и «формула» для выражения площади круга через диаметр: в нашей символике это выражение таково

$$S_{кр}=d^2-\frac{1}{7}d^2-\frac{1}{2}\frac{1}{7}d^2.$$

Аналогичную «формулу» давал в свое время и Герон. Из нее следует, что $\pi=3\frac{1}{7}$. Наконец, в этом разделе «Алгебры» ал-Хорезми дается и правило вычисления площадей сегментов круга S_1 и S_2 по дуге l, хорде a и высоте меньшего сегмента h. Причем сначала определяется диаметр $d=\frac{a^2}{4h}+h$,

а затем сегменты

$$S_{1,2}=\frac{d}{2}\cdot\frac{l}{2}\pm\left(\frac{d}{2}-h\right)\frac{a}{2}.$$

В IX в. бану Муса в «Книге измерения плоских и шаровых фигур» [6] доказывает, в частности, и такую теорему: «Для всякого круга плоская фигура из его полудиаметра на половину его окружности есть его площадь» (методом Архимеда). Как следствие этой теоремы получается теорема: «Плоская фигура из полудиаметра на половину какой-нибудь дуги равна площади сектора, ограничиваемого этой дугой и двумя полудиаметрами, проведенными в ее концы». Затем доказывается теорема: «Для всякого круга отношение диаметра к его окружности одно и то же». И они показывают, что, используя вписанные и описанные 96-угольники, можно получить

$$3\frac{10}{71}<\frac{C}{d}<3\frac{1}{7}.$$

Многие математики того времени, как, например, Абул-Вафа, ал-Хайям, ал-Бируни и другие, касались вопросов, связанных с величиной числа π, особенно при вычислениях в астрономии. Например, ал-Бируни в III книге «Канон Масуд», взяв отношение среднего арифметического периметров вписанного и описанного 180-угольников к диаметру, получил $\pi=3,1417...$ Ибн ал-Хайсам (965—1039) написал специальное сочинение «О квадратуре круга» [80], в котором он ставил вопрос о существовании прямолинейной фигуры, равновеликой кругу. На примере вписанного круга в луночку, площадь которой равна площади треугольника (1-й сл. Г. Х.), он утверждал, что площадь круга как части луночки будет площадь части соответствующего треугольника с той же высотой, но с меньшим основанием. Правда, он признавался, что ему пока не известно только, как построить это основание. Он обещал решить этот вопрос в дальнейшем, но, естественно, не решил его. Существенный вклад в проблему измерения круга внес один из самых выдающихся ученых той эпохи Джемшид Гиясэддин ал-Каши (XIV—XV вв.), работавший в Самаркандской обсерватории Улугбека.

В знаменитом «Трактате об окружности» (1424 г.) ал-Каши дал замечательные образцы приближенных вычислений и впервые получил такую точность измерения окружности, которая дает для π 17 верных знаков и которой европейские математики достигли только в конце XVI века. Ал-Каши ставит задачу: выразить длину окружности через диаметр с такой точностью, чтобы погрешность в длине окружности, диаметр которой равен 600 000 диаметров земли, не превосходила толщины волоса (примерно $^1/_2$ мм), т. е. разность периметров описанного и вписанного правильных многоугольников при $r=1$ должна быть меньше $\frac{1}{60^9}$. Следовательно, задача состоит в том, чтобы найти стороны, их число и периметры описанного (P_1) и вписанного (P_2) многоугольников такие, чтобы длина окружности (ал-Каши полагает ее равной $\frac{P_1+P_2}{2}$) удовлетворяла указанному выше условию.

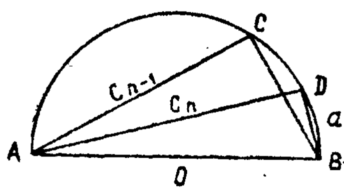


Рис. 36.

При решении этой задачи он идет путем, несколько отличающимся от пути Архимеда; в основу вычислений он кладет теорему: «Прямоугольник на радиусе OA и на сумме диаметра AB с хордой AC (рис. 36), дуги, меньшей 180, равен квадрату хорды AD (D — середина дуги BC)». Так как сторона вписанного n-угольника $a=\sqrt{d^2-C_n^2}$, то ал-Каши, прежде всего, и находит хорды C_n, соответствующие дугам, получающимся при делении дуги 120° на 2^n, пользуясь рецептом, содержащимся в указанной теореме, т. е.

$$C_n = \sqrt{r(2r + C_{n-1})}.$$

Он показывает далее, что число сторон вписанного многоугольника, удовлетворяющее $P_1 - P_2 < \frac{1}{60^9}$ должно быть $3 \cdot 2^{28} = 805306368$, т. е. сторона этого многоугольника должна быть хордой дуги, равной $120° : 2^{28}$, а это будет $1/60^8$ одного градуса окружности, в 600 000 раз большей окружности большого круга Земли, что не превосходит толщины одного волоса: $\frac{1}{60^8} \cdot \frac{1}{360} \cdot 24 \cdot 10^{12}$ (где $24 \cdot 10^{12}$ — примерное число миллиметров в указанной окружности). Умело пренебрегая малыми разностями, ал-Каши получает приближенные оценки для хорд C_k и сторон вписанных многоугольников a см. [103; 300—305]. Он доказывает, что требуемая точность измерения окружности будет достигнута, если в круг при $r = 60$ вписать многоугольник со стороной, не превосходящей $\frac{8}{60^4}$, а это получится, если дугу 120° разделить на 2^{28}. Тогда число сторон будет $N = 3 \cdot 2^{28} = 805306368$. Затем, вычислив P_1 и P_2 и приняв $\frac{P_1 + P_2}{2} = C$, т. е. при радиусе $r = 1$, он получает приближенное значение $2\pi = 6{,}2831853071795865$, а $\pi = 3{,}1415926535897932$.

В европейских странах

Совершенствование метода Архимеда. В средневековой Европе к XIII в. феодализм достиг той стадии развития, когда появилась потребность в науках, в том числе и в математике. Появились отдельные ученые, начавшие освоение достижений народов других стран и внесшие свой вклад в математику.

Большую роль в истории математики того времени сыграла «Книга об абаке» (1202 г.), посвященная вопросам арифметики и алгебры, требовавшимся в то время особенно в торговых делах. Автор ее сын купца Боначчо — итальянец Леонардо из Пизы. Ему же принадлежало и сочинение «Практика геометрия» (1220 г.), написанное тоже под влиянием изучения греческой и арабской астрономо-математической литературы. Но, как и в «Книге об абаке», здесь содержатся и некоторые результаты, принадлежащие автору.

Леонардо Пизанский (Фибоначчи) вычисляет π с помощью 96-угольников, в чем чувствуется влияние Архимеда. Но он получает при этом результаты, которые укладываются в неравенства $\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}$. Приняв $\frac{1}{3}$ за среднее арифметическое $\frac{4}{9}$ и $\frac{1}{5}$; Леонардо Фибоначчи считает фактически

$$\pi = \frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{864}{275} = 3{,}1418\ldots$$

В дальнейшем многие европейские ученые занимались квадратурой круга. Определенный след в истории квадратуры круга оставил и немецкий математик Николай Кузанский (1401—1461). Начиная с 1445 г., он написал ряд произведений о спрямлении окружности. Н. Кузанский был уверен в невозможности точной квадратуры круга и искал приближенное значение для $\frac{C}{d} = \pi$. Он получил, в частности, величину отношения окружности к диаметру $\pi = \frac{144}{5\sqrt{84}} = 3{,}142337$, которая несколько точнее, чем $3\frac{1}{7}$, и дал способ приближенного вычисления (спрямления) «любой» дуги окружности. Им получены некоторые значения для π и менее точные, чем у Архимеда.

Рассмотрим путь, по которому шел при этом Николай Кузанский. В основе его рассуждений лежал тоже метод Архимеда. Возьмем круг с радиусом $OA = OE = r$ (рис. 37). Сторона квадрата, вписанного в него $AE = r\sqrt{2}$. Отложим на продолжении OA отрезок $AB = r\sqrt{2}$ и на OB, как на диаметре, построим новый круг с радиусом $OO_1 = O_1B = \rho$. Тогда $OB = OA + AB = r + r\sqrt{2} = r(1+\sqrt{2}) = 2\rho$. Но в круге радиуса ρ сторона вписанного правильного треугольника

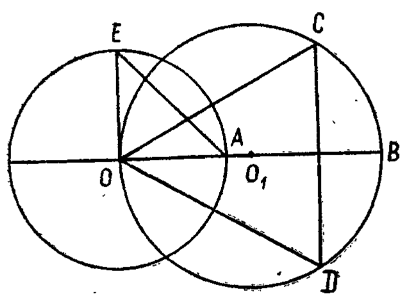


Рис. 37.

$$OC=OD=DC=\rho\sqrt{3}=\frac{r}{2}(1+\sqrt{2})\sqrt{3}.$$

Затем без каких-либо математических обоснований он считал, что

$$2\pi r=3OC=3\rho\sqrt{3}=\frac{3}{2}r\sqrt{3}(1+\sqrt{2}).$$

Полагая $r=1$, он получает

$$\pi=\frac{3}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{6})=3{,}1357.$$

Приближенное решение Н. Кузанского задачи спрямления «любой» дуги окружности в нашей символике можно изложить так (рис. 38). Дан круг радиуса $AO=r$, $\angle AOE$ — центральный угол $=x$, $AD\perp AB$, $EF\perp AB$, $BC=r$, $EF=r\sin x$, $AE=rx$, $OF=r\cos x$, $AD:EF=CA:CF$, $CF=CO+OF=2r+r\cos x$, $CA=3r$.

Отсюда

$$AD=\frac{EF\cdot CA}{CF}=\frac{r\sin x\cdot 3r}{2r+2r\cos x}=\frac{3r\sin x}{2+\cos x}.$$

Допустив, что $AD=AE=rx$, он получает $AE=rx=\frac{3r\sin x}{2+\cos x}$.[5]

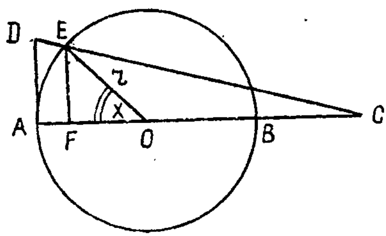


Рис. 38.

Во второй половине XV в. и в начале XVI в. жил гениальный ученый, художник и инженер Леонардо да Винчи (1452—1519). Считая квадратуру круга с помощью циркуля и линейки невозможной, Леонардо да Винчи предложил способ квадратуры круга с помощью цилиндра, ширина которого равна половине его радиуса. Если катить этот цилиндр по плоскости, то при полном обороте его прямоугольный след будет иметь площадь, равную площади круга:

$$2\pi R\cdot\frac{R}{2}=\pi R^2.$$

В конце XVI и в начале XVII в. европейскими математиками на пути применения метода Архимеда была получена такая точность для отношения окружности к диаметру, которая превосходила результаты математиков стран Востока. Упомянем здесь результаты двух из них. А. ван Ромен с помощью 2^{30}-угольников получил в 1597 г. π с 17 верными десятичными знаками. Голландский математик Лудольф ван Цейлен (1539 — 1610) в 1597 г. с помощью $60 \cdot 2^{29}$-угольников получил 20 верных десятичных знаков для π, а в дальнейшем с помощью 2^{62}-угольников он получил π с 35 верными десятичными знаками. Это в то время произвело большое впечатление, и число π после этого часто стали называть «лудольфово число».

Голландский математик и инженер Адриан Меций (1571—1635), так же как и Лудольф ван Цейлен, стремясь опровергнуть утверждение француза Симона Дюшена о том, что будто бы круг равновелик квадрату, сторона которого равна $\frac{39}{44}$ диаметра (откуда $\pi=3,1425$), в начале XVII в. получил для π границы $\frac{377}{120}$ и $\frac{333}{106}$, а затем, взяв среднее арифметическое числителей и знаменателей, он переоткрыл одну из подходящих дробей при разложении π в непрерывную дробь $\frac{355}{113}$, дающую для π шесть верных знаков.

Хотя Лудольф и другие математики этого времени проделали колоссальную работу и получили с большой точностью π, но в их методах получения значений π не было ничего принципиально нового, да и точность такая не имела уже практического значения.

Принципиально новые шаги в истории квадратуры круга сделали в то время Виет, Кеплер, Снеллий и Гюйгенс.

И. Кеплер (1571—1630) — знаменитый астроном и математик. С необходимостью вычисления площадей, ограниченных кривыми линиями, в частности эллипсами, он встретился и в астрономии, в том числе и при установлении законов движения планет. Что касается идей Архимеда, связанных с квадратурой круга, то это ему особенно было нужно при вычислении объемов некоторых тел вращения.

В широко известной книге «Стереометрия винных бочек» Кеплер писал: «Прежде всего потребовалось знание отношения окружности к диаметру. Архимед показал: отношение окружности к диаметру близко к отношению чисел 22 к 7». Далее он говорит, что число Архимеда верное и что «если диаметр круга разделить на 20 000 000 000 000 000 частей, то таких частей в окружности будет почти 62 831 853 071 795 862». Но если в этой работе Кеплер пользуется готовыми результатами для отношения длины окружности к диаметру, то, как он сам сообщает, здесь, «в сочинении о движении Марса я показал, что длина эллиптической кривой относится к среднему арифметическому его диаметров, называемых прямой и поперечной осями, тоже почти как 22 к 7»[6]. Затем Кеплер рассматривает вторую теорему Архимеда из «Измерения круга». «Площадь круга при сравнении с квадратом диаметра имеет (к нему) отношение почти как 11 к 14». Доказательство Кеплера этой теоремы отличается от доказательства Архимеда. Кеплер использует здесь теорему Архимеда о том, что площадь круга равна площади прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен длине окружности этого круга, а второй катет равен его радиусу. Причем справедливость последней теоремы он доказывает способом, отличным от способа Архимеда; Кеплер говорит, что если BC равна окружности l (рис. 39), то в ней столько же точек, как и в

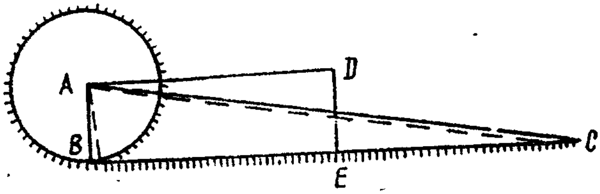


Рис. 39.

окружности. Разбив круг на сектора (треугольники), в основании которых точки, сравним затем эти треугольники с соответствующими треугольниками, на которые разбивается треугольник ABC, в основании которых тоже точки (на BC). Эти треугольники равны между собой, а следовательно, площадь круга равна площади треугольника ABC. Если диаметр круга равен 7, а l=BC=22, то квадрат диаметра $d^2=49$, BE=EC=11, $AB=3\frac{1}{2}$. Площадь треугольника ABC, равная площади круга, равна и площади прямоугольника ADEB. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC}=S_{\square ADEB}=11\cdot 3\frac{1}{2}=38\frac{1}{2} \text{ и } S_{\text{кр}}:d^2\approx 38\frac{1}{2}:49=77:$$

$$:98=11:14.$$

В своих дополнениях к Архимеду Кеплер формулирует и доказывает ряд теорем, связанных тоже с квадратурой круга.

Например, «Площадь кругового сектора (составленного прямыми, проведенными из центра, и стягивающей их дугой) равна прямоугольнику, построенному на радиусе и половине дуги». «Площадь меньшего сегмента круга (части, отсеченной от круга прямой) меньше площади сектора на треугольник, ограниченный прямыми сектора и сегмента, а площадь большего сегмента на столько же больше площади «соответствующего сектора». Такого рода «дополнения» могли натолкнуть Снеллия, Гюйгенса и других на мысль об улучшении способа Архимеда при вычислении числа π. В работах Кеплера было показано, что результаты Архимеда можно получить и другими, более простыми способами. Идеи Кеплера сыграли в дальнейшем большую роль в развитии интегрального исчисления и тем самым способствовали созданию необходимых условий для окончательного решения задачи о квадратуре круга в ее классической формулировке.

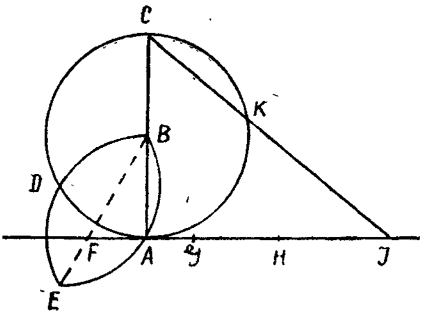


Рис. 40.

Польский математик Коханский (1631 — 1700) в 1685 г. дал оригинальный прием приближенного спрямления окружности. Пусть дана окружность ADC (рис. 40), радиус которой AB = 1. AI — касательная к окружности в конце диаметра круга AC. Из точки A, как из центра, радиусом AB описываем дугу EDB, а из точки D, как из центра, тем же радиусом AB описываем дугу EAB. От точки пересечения BE и AI, т. е. от точки F, на прямой AI откладываем отрезки FG = GH = HI = AB = 1. Соединяем точки C и I. Тогда

$$CI = \sqrt{\frac{40}{3} - \sqrt{12}} \approx 3{,}141533,$$

т. е. отрезок $CI \approx \pi$ — приближенно равен длине полуокружности AKC.

До Снеллия, пользуясь методом Архимеда, обычно считали, что для получения большей точности для π нужно брать n-угольники все с большим числом сторон. Снеллий (1580—1625) в книге «Cyclometricus» (1621) пришел к правильному выводу о том, что «для приближенного вычисления длины дуги окружности с весьма большой точностью нет необходимости брать многоугольники с большим числом сторон». Так, например, у Архимеда 6-угольники для π давали границы 3 и 3,464, у Снеллия 6-угольники давали пределы для π: 3,14022 и 3,14160, а с помощью 96-угольников Снеллий получал границы: 3,1415926272 и 3,141928320. Правда, Снеллию не удалось доказать двух теорем, которые лежат в основании его исследований [80; 55].

Наиболее полно и доказательно провел исследования в этом направлении нидерландский механик, физик и математик Христиан Гюйгенс (1629—1695). В 1654 г. появилось знаменитое сочинение Гюйгенса «О найденной величине круга» [80; 105—166], ставшее классическим. Об этой работе Гюйгенса в «Обзоре истории задачи о квадратуре круга от древности до наших дней» Рудио справедливо говорит, что она «не только составляет эпоху для теории измерения круга, но и принадлежит бесспорно к числу прекраснейших и важнейших работ, которые когда-либо были написаны по элементарной геометрии... она принадлежит к тем сочинениям, которые должны быть прочитаны каждым, кто интересуется историей математики». Гюйгенсу было только 25 лет, когда он написал это произведение, показав в нем научную зрелость. Мы, естественно, не можем здесь изложить содержание всей этой большой работы, включающей в себя 16 теорем и 4 задачи.

Рассмотрим в качестве примера только доказательство шестой теоремы и решение первой задачи Гюйгенса.

В шестой теореме утверждается, что «всякий круг меньше двух третей описанного около него равностороннего многоугольника, увеличенного на одну треть площади подобного ему вписанного многоугольника». Докажем справедливость этой теоремы для n=6. Доказательство для других n аналогично. Пусть дан круг с центром в точке A (рис. 41). Впишем и опишем правильные 6-угольники. Проведем радиусы AB и AC. Так как боковые стороны треугольника BEC, имеющего общее основание с сегментом BDC, касаются последнего, то этот сегмент на основании теоремы четвертой—менее двух третей треугольника BEC. Если теперь к треугольнику ABC прибавить $^2/_3$ тре-

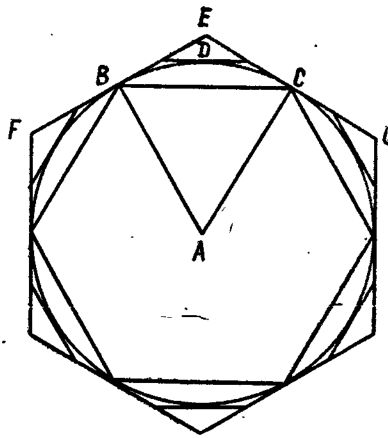


Рис. 41.

угольника BEC, т. е. $^2/_3$ разности между четырехугольником ABCE и треугольником ABC, то полученная площадь будет больше, чем круговой сектор ABC. Или иначе

$$S_{\triangle ABC} + \frac{2}{3}[S_{ABEC} - S_{\triangle ABC}] > S_{ABCD}.$$

Откуда следует, что

$$S_{ABDC} < \frac{2}{3} S_{ABEC} + \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$

или площадь круга

$S_{кр} < \frac{2}{3} S_6 + \frac{1}{3} S'_6$ ($S'_{6\,пл\cdot вп\cdot 6\,уг\cdot}$), что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь «задачу первую», которая читается так: «Найти отношение длины окружности к диаметру с какой угодно точностью».

Решение этой задачи: пусть радиус круга $R = 10\,000$, диаметр $d = 20\,000$ единиц, тогда сторона вписанного в круг 12-угольника (вычисленная по формуле $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$) больше, чем $5176\frac{3}{8}$, и $P_{12} = 12a_{12} > 62116\frac{1}{2}$. Но $P_6 = 60\,000$,

$P_{12} - P_6 > 2116\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}\ 2116\frac{1}{2} = 705\frac{1}{2}$, откуда имеем $\frac{1}{3}(P_{12} - P_6) > 705\frac{1}{2}$. Следовательно, $P_{12} + \frac{1}{3}(P_{12} - P_6) > 62822$.

На основании седьмой теоремы можно утверждать, что длина окружности $C \geq P_{12} + \frac{1}{3}(P_{12} - P_6) > 62822$. Но $62822 : 20\,000 > 3\frac{10}{71}$, а $C : d > 3\frac{10}{71}$. С другой стороны, так как $a_{12} < 5176\frac{2}{5}$ и сторона описанного 12-угольника $b_{12} < 5359$, то $\frac{2}{3} P_{12} \approx 8a_{12} < 41411\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3} P'_{12} = 4b_{12} < 21436$. Откуда $\frac{2}{3} P_{12} + \frac{1}{3} P'_{12} < 62847\frac{1}{5}$. По теореме 9 длина окружности

$c < 62847\frac{1}{5}$ и $\frac{c}{d} < 62847\frac{1}{5} : 20\,000 < 62857\frac{1}{7} : 20\,000 = 3\frac{1}{7}$.

Следовательно, вписанные и описанные 12-угольники у Гюйгенса дают величину π с неменьшей точностью, чем 96-угольники у Архимеда. Это была вершина в применении геометрических методов при вычислении отношения $\frac{C}{d} = \pi$, на смену которым пришли затем аналитические методы.

Аналитические средства представления и вычисления $\frac{C}{d} = \pi$. По мере углубления в существо проблемы квадратуры круга математики, начиная с Архимеда, все яснее себе представляли, что дело сводится здесь, прежде всего, к определению отношения длины окружности к диаметру, т. е. $\frac{c}{d} = \pi$. Но если до конца XVI—XVII вв. выражение этого отношения в работах некоторых (особенно индийских математиков) и выступало, с нашей точки зрения, в виде формул и рядов, то все же фактически все их рецепты «одевались» в основном в геометрическую «одежду», так как до XVII в. по существу еще не было ни формульной алгебры, ни анализа. Появление буквенной алгебры и анализа позволило дать аналитические средства (формулы, бесконечные произведения, ряды и непрерывные дроби) для вычисления π. Открытие формул, составленных из бесконечного повторения операций над известными числами, упростило приемы вычисления π.

Бесконечные произведения. Французского математика Виета (1540—1603) считают основоположником буквенной алгебры; он же фактически был первым математиком, давшим формулу для вычисления π с какой угодно степенью точности.

Он исходил из следующей теоремы: Если в круг вписать два правильных многоугольника, из которых второй имеет вдвое больше сторон, чем первый, то площадь второго многоугольника так относится к площади первого, как радиус относится к апофеме.

Пользуясь этой теоремой, можно получить вывод формулы Виеты. Пусть дан круг радиуса R. Впишем в него квадрат со стороной $a_4 = R\sqrt{2}$, восьмиугольник со стороной $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (рис. 42) и воспользуемся формулой

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}}.$$

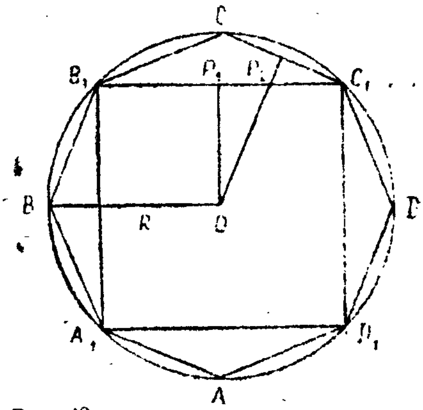


Рис. 42.

По приведенной выше теореме получаем

$$\frac{S_8}{S_4}=\frac{R}{OP_1}=\frac{R}{\frac{R}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{S_{16}}{S_8}=\frac{R}{OP_2}=\frac{R}{R\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}},\ldots,$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}.$$

И если перемножим левые и правые части полученных равенств, то будем иметь

$$\frac{S_8}{S_4}\cdot\frac{S_{16}}{S_8}\cdot\frac{S_{32}}{S_{16}}\cdots\frac{S_{2n}}{S_n}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdots\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}.$$

или

$$S_{2n}=\frac{S_4}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdots\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}$$

при $n \to \infty S_{2^n} \to S_{кр} = \frac{\pi}{4}$, $S_4 = a^2_4 = \frac{1}{2}$.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}} \cdots}$$

Эта формула Виета, полученная в конце XVI в., явилась первым аналитическим выражением для числа π и первым примером выражения числа в виде бесконечного произведения.

В XVII в. начал совершаться переход от феодализма к капитализму, появились благоприятные условия для развития астрономии и механики, что в свою очередь стимулировало создание математики переменных величин.

Появление анализа бесконечно малых в XVII в. оказало сильное влияние и на направление работ, связанных с квадратурой круга.

Во второй половине XVII и в XVIII вв. главное внимание при решении задачи о квадратуре круга было обращено на разыскание аналитических выражений для отношения длины окружности к диаметру. И так как многим математикам на этом пути удавалось получать все новые и новые формы аналитического выражения для π, а возможности прежних элементарных методов были в работе Гюйгенса исчерпаны, то методы анализа заняли в то время ведущее место.

Поскольку был уже известен пример Виета, то естественно было попытаться дать выражение для π в виде бесконечного произведения, освободившись только от иррациональных множителей, которыми неудобно было пользоваться при вычислении π. Первый результат в этом направлении был получен английским математиком Валлисом (1616—1703) в известной его работе «Aritmetica infinitorum» (1656).

При получении своей формулы Валлис, мы бы сказали, отправлялся от интеграла $\int_0^1 (x-x^2)^n dx$. Сначала он находит значения этого интеграла при целых положительных и получает

$$\int_0^1 (x-x^2)^n dx = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Затем без каких-либо обоснований, по аналогии, Валлис рассматривает указанный интеграл для дробных и отрицательных n. Он получает, в частности,

$$\int_0^1 (x-x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}!\right)^2.$$

Но этот интеграл, как известно, выражает площадь полукруга с радиусом $R=\frac{1}{2}$ и центром в точке $O\left(\frac{1}{2}, O\right)$.

Следовательно,

$$\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}!\right)^2, \text{ а } \frac{4}{\pi}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}.$$

Пытаясь раскрыть смысл $\left(\frac{1}{2}!\right)^2$, Валлис использует интеграл

$$\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx=\frac{p!q!}{(p+q)!},$$

который при $P=\frac{1}{2}$ и $q=\frac{1}{2}$ совпадает с рассмотренным выше, и путем мало обоснованных операций [см. 93; 275] получает неравенства

$$\frac{\Pi[(2n-1)!]^2}{\Pi(2n!)^2}\sqrt{\frac{2n}{2n-1}}>\frac{2}{\pi}>\frac{\Pi[(2n-1)!]^2}{\Pi(2n!)^2}\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}.$$

При увеличении n до бесконечности число соответствующих множителей в этих неравенствах будет возрастать, а множители $\sqrt{\frac{2n}{2n-1}}$ и $\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}$ будут стремиться к единице.

Тогда $\frac{2}{\pi}$ будет пределом произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}, \text{ а } \frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\ldots}.$$

Это и есть формула, которая в наше время называется формулой Валлиса. Она находила и находит свое применение в науке, хотя π по ней теперь не вычисляют.

В дальнейшем эту формулу получали строго обоснованными способами. Так, например, Эйлер, используя разложение в бесконечное произведение

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

и полагая $x=\frac{\pi}{2}$, получил

$$1=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\pi^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{4^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{4\cdot 9\pi^2}\right)\cdots=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\cdots=\frac{\pi\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\ldots}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}$$

Откуда

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\ldots}$$

Но в этом случае, как видно, надо знать разложение $\sin x$ в произведение.

Затем формулу Валлиса стали получать в интегральном исчислении с помощью рекурентной формулы

$$I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2},\ \text{где } I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx.$$

Применяя эту формулу, получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!}\dfrac{\pi}{2}\ (m\text{ — четное})\\[2mm] \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\ (m\text{ — нечетное})\end{cases}$$

В интервале от 0 до $\frac{\pi}{2}$ имеем

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x.$$

Проинтегрировав эти неравенства от 0 до $\frac{\pi}{2}$, получим

$$\frac{2n!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

или

$$\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n}.$$

Так как при $n\to\infty$ крайние выражения стремятся к одному пределу, то и получается формула

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}.$$

Ряды. Более распространенной и удобной аналитической формой представления π оказались ряды.

Хотя фактическое пользование рядами можно усмотреть еще у Архимеда и особенно у индийских ученых, но создание основ теории рядов и систематическое использование их начинается только во второй половине XVII в.

Одним из первых математиков, прибегавших к помощи числовых рядов, был английский математик Джемс Грегори (1635—1675). Он дал числовой ряд для выражения π. Познакомившись с методами разложения функций в ряды по работам Н. Меркатора и И. Ньютона, Грегори стал вычислять круговые функции с помощью рядов. В частности, получив в 1671 г. ряд

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots$$

и положив $x=1$, он нашел ряд для вычисления π.

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

Этот ряд теперь обычно называют рядом Лейбница. Лейбниц (1646—1716), действительно, независимо от Грегори получил его в 1673 г.

Это был фактически первый ряд для вычисления π. И хотя он, как известно, медленно сходящийся ряд, все же им пользоваться удобнее, чем формулой Валлиса и тем более — формулой Виеты.

Вскоре после появления ряда Лейбница математики получили другие ряды, более пригодные для вычисления π. Особенно большой вклад в разработку теории рядов внес И. Ньютон (1642—1727); он же дал и некоторые аналитические выражения для $\frac{C}{d}=\pi$. В частности, в работе «Метод флюксий и бесконечных рядов» Ньютон рассматривал ряды

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots \text{ и } \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}-\dots$$

При вычислении площади круга с диаметром $d=1$ он отправляется от интеграла $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$. Разлагает в ряд подинтегральную функцию, интегрирует его и получает площадь круга, делит ее на $\frac{1}{4}d$ и получает длину окружности или

$\pi=3{,}14155926535897928$ [79; 127].

Необходимость более точного и более быстрого вычисления π особенно ощущали астрономы. Так, по указанию Галлея англичанин Абрагам Шарп в начале XVIII в., занимаясь вычислением значения π, нашел 72 верных десятичных знака. С этой целью он использовал ряд, в который разлагается arctgx.

При $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ этот ряд

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\ldots\right)$$

сходится значительно быстрее, чем ряд Лейбница. Лондонский профессор астроном Мэшин в 1706 г., используя формулу

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=4\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\ldots\right]-$$
$$-\left[\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\frac{1}{7\cdot 239^7}+\ldots\right]^{10},$$

вычислил π со 100 верными десятичными знаками. Француз де Ланьи с помощью рядов в 1719 г. нашел 127 верных десятичных знаков числа π.

В XVIII и XIX вв. многие математики занимались нахождением новых десятичных знаков π. Причем отыскание все большего числа десятичных знаков числа π уже приобретало скорее спортивный, чем практический интерес, так как для практики такое большое число десятичных знаков не требовалось.

О вычислении π с помощью рядов речь будет идти и в дальнейшем, особенно при рассмотрении результатов исследований этой проблемы Л. Эйлером (стр. 91). Теперь же мы остановимся еще на одной форме аналитического представления π, появившейся в математике тоже в XVII—XVIII вв. Речь пойдет о непрерывных дробях[11].

Непрерывные дроби. В зачаточном состоянии непрерывные дроби встречаются уже у Бомбелли (XVI в.). В XVII в. ими пользовались Валлис, Броункер и Гюйгенс, но теория этих дробей была создана в XVIII в. Л. Эйлером и Лагранжем.

Броункер (1620—1684) впервые представил валлисово число $\frac{4}{\pi}$ в виде непрерывной дроби $\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\dots}}}$

Сам Броункер не дал строгого доказательства справедливости такого представления числа $\frac{4}{\pi}$, но Валлис это убедительно обосновал.

В дальнейшем многие математики конца XVII и XVIII вв. использовали непрерывные дроби для представления с их помощью чисел

$$\frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{2},\quad \pi,\ \sqrt{\pi},\ e,\ \frac{e+1}{2}, e^2, \dots$$

Но наибольший вклад в разработку и этой части математики внес Л. Эйлер.

Представление e и π в виде непрерывной дроби тоже позволило вычислять с большой точностью эти числа и, кроме того, оно заставляло математиков задуматься над природой e и π и помогло решить некоторые важные вопросы проблемы квадратуры круга.

Число π в трудах Л. Эйлера

В XVIII в. основное направление в попытках решения задачи о квадратуре круга было аналитическое представление числа π и вычисление его все с большим числом верных десятичных знаков с помощью рядов, произведений и непрерывных дробей.

Очень многие математики XVIII столетия прилагали свои усилия к решению некоторых вопросов, связанных с квадратурой круга и с квадрированием луночек. Среди имен этих математиков встречаем Д. Бернулли, Крафта, Валлениуса, Ламберта, Лагранжа, Лежандра и др. Мы остановимся дальше на характеристике результатов работ только некоторых из них.

Особенно важные результаты для аналитического представления чисел e и π и для подхода к выяснению их арифметической природы были получены Л. Эйлером (1707—1783). Проблеме измерения круга Эйлер уделял много внимания. Одни из его результатов непосредственно относились к квадратуре круга, исключительно важное значение других из них было высоко оценено и использовано для выяснения природы π только в дальнейшем.

Выше было указано, что заслугой Эйлера является утверждение в математике обозначения отношения окружности к диаметру $\frac{C}{d}$ буквой π. Он же ввел для обозначения основания натуральных логарифмов букву e.

Для решения некоторых вопросов принципиального характера, связанных с квадратурой круга, большое значение в дальнейшем имело то, что Эйлер создал элементарную тригонометрию как науку, изучающую свойства функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x, \ldots$ Особенно важными оказались установленные им формулы

$$e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z,$$

$$\text{где} \quad e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

Открытие формул, связывающих показательные и тригонометрические функции, оказало большое влияние на всю математику. Формулы $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$ явились исходным пунктом всех исследований природы π.

В частности формулы $e^{i\pi} = -1$, $e^{2\pi i} = 1$, выражающие основную зависимость между e и π, послужили ключом для решения вопроса о квадратуре круга.

Роль Эйлера в истории квадратуры круга освещена в специальном разделе указанной работы Ф. Рудио [80] и в статье А. П. Юшкевича [105].

Эйлер на протяжении всего периода научной деятельности в той или иной мере интересовался этой проблемой. Академия наук несколько раз поручала ему критический разбор сочинений «квадратурщиков», утверждавших, что им удалось сквадрировать круг. Он рассматривал работы Григория из с. Винценты (1730), Лейстнера (1737), академического механика Брукнера (1738), архитектора Тибо из Авиньона (1750), Пишеля из Митавы (1754), церковного старосты Г. Варнгольца (1774), Робергера де Возанвилля (1780) и др. Указывая на ошибки в этих работах, иногда резко критикуя авторов за математическую безграмотность, Л. Эйлер вместе с тем часто сопровождал эту критику своими оригинальными изысканиями и рассуждениями в данной области. До Л. Эйлера, как известно, были получены многие важные результаты в измерении круга.

Однако природа числа π оставалась столь же неизвестна, как и в древности, т. е. не известно было рациональное ли это число или нет; вопрос о возможности квадратуры круга с помощью циркуля и линейки оставался столь же темным, как и во времена Архимеда. Некоторые Академии объявляли премии за решение этой задачи и старались отвечать всем авторам «найденных квадратур круга», не была еще найдена и соответствующая формулировка вопроса, пригодная для научного исследования. Состояние анализа, алгебры и геометрии не позволяло еще окончательно решить знаменитые древние задачи. Эйлеру предстояло разобраться во многих неясных вопросах, связанных с квадратурой круга, и попытаться внести ясность в некоторые из них.

Уже в первом письме Эйлера к Гольдбаху (24/X-1729 г.) выявлены некоторые новые свойства числа π. Рассматривая $f(n)=n!$ при $n=\frac{1}{2}$ он получает $f\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{-1\ln(-1)}^{12},$$

что по его мнению равно стороне квадрата, равновеликого кругу с диаметром 1, т. е. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. «Из последнего ясно, — пишет Эйлер, — что природа вопроса не позволяет численно выразить общий член» т. е. выразить $\sqrt{\pi}$ в виде рационального числа. Это, конечно, не было еще доказательством иррациональности числа π, но из этого видно, что уже в то время молодой Эйлер начинал понимать природу числа и трудность задачи квадратуры круга. В это время Эйлер, по-видимому, не исключал еще возможность точного выражения π с помощью простых иррациональностей и логарифмов рациональных чисел. Это видно из того, что когда он обнаружил в работе Григория из с. Винценты выражение для π в виде

$$\frac{3(1+A)\sqrt{3}}{2(2A-1)}, \quad \text{где} \quad A=\left(\frac{11}{5}\right)^{\frac{\ln\frac{11}{5}}{\ln\frac{205}{53}}},$$

то он писал Гольдбаху (15/VI-1730 г.): «Это выражение очень близко к $\frac{22}{7}$, и если бы оно оказалось верным, то конечно, это было бы большое открытие». Но в дальнейшем Эйлер обнаружил ошибку в этой формуле. Эйлер рассматривал и геометрические методы приближенного решения задачи, и механические способы квадратуры круга, но особенно много внимания он уделял аналитическим средствам представления и вычисления π, а также выяснению природы этого числа. В письмах Гольдбаху (1730) Эйлер предлагал вычислять π с помощью ряда

$$S=x+\frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3b^2}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5b^4}+\cdots,$$

где b — диаметр окружности, x — какая-либо хорда; S — данная дуга; при этом целесообразно брать хорды, соответствующие малым частям окружности, иррациональными. Он предлагал вычислять π и с помощью выражения

$$4(1+n)\frac{4\cdot 16\cdot 36\ldots(2n)^2}{9\cdot 25\cdot 49\ldots(2n+1)^2}\sqrt{\frac{2n+2}{2n+3}},$$

которое, будучи больше π, приближается к этому числу по мере увеличения n. Эйлер использовал некоторые модификации рядов и бесконечных произведений для представления π, полученных Грегори, Лейбницем и Ньютоном, а также изыскивал сам новые средства для этого. Он стремился к более полному использованию аналитических средств, полученных им при разработке анализа, для вычисления π. Особое предпочтение при этом он отдавал «сильно сходящимся» рядам, т. е. таким рядам, у которых «всякий член много меньше предыдущего». Он предложил большое число рядов для вычисления π, но чаще прибегал к помощи рядов, получавшихся из разложения arctg x. Им был получен ряд формул, в том числе

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7},$$

где ряд в правой части, в который разлагается сумма арктангенсов, быстро сходится. Он использовал также

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239};$$

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{70}+\operatorname{arctg}\frac{1}{99}$$

и др.

Рассматривая

$$(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)\cdots=1+Az+Bz^2+Cz^3+\cdots,$$

он говорит [102; 156], что A будет равно

$\alpha+\beta+\gamma+\cdots$, $B=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\cdots$, $C=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\cdots$.

В частности, доказав, что

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\left(1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots\right)=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$

он полагает $x^2=\pi^2 z$ и получает

$$1+\frac{\pi^2}{3!}z+\frac{\pi^4}{5!}z^2+\cdots=(1+z)\left(1+\frac{1}{4}z\right)\left(1+\frac{1}{9}z\right)\left(1+\frac{1}{16}z\right)\cdots$$

Откуда следует, что

$$\frac{\pi^2}{3!}=\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$ [13].

Здесь же он получает ряд других формул:

$$\frac{2^2}{5!}\cdot\frac{1}{3}\pi^4=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots$$

$$\frac{2^4}{7!}\cdot\frac{1}{3}\pi^6=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots$$

$$\frac{2^6}{9!}\cdot\frac{3}{5}\pi^8=1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\cdots$$

Эйлер дал множество разложений π и в бесконечные произведения:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{24}\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{2^2}{3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\frac{7^2}{6\cdot 8}\cdot\frac{11^2}{10\cdot 12}\cdot\frac{13^2}{12\cdot 14}\cdot\frac{17^2}{16\cdot 18}\cdots=$$
$$=\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdots=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^4}{90}=\frac{2^4}{2^4-1}\cdot\frac{3^4}{3^4-1}\cdot\frac{5^4}{5^4-1}\cdot\frac{7^4}{7^4-1}\cdot\frac{11^4}{11^4-1}\cdots=$$
$$=\frac{16}{15}\cdot\frac{81}{80}\cdot\frac{625}{624}\cdots=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$$

Большим вкладом Эйлера является и разработанная им теория непрерывных дробей, использованная затем и в качестве представления чисел e и π и в выяснении природы этих чисел.

Эйлер впервые ввел название «непрерывная дробь» и создал теорию непрерывных дробей. Особенно полно эту теорию он изложил во «Введении» [102; XVIII гл.]. Для получения приближенных значений π большую роль играют так называемые подходящие дроби, которые получаются из непрерывной дроби $q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots}}$, если последнюю обрывать на каком-то шаге

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} q_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} q_n + Q_{n-2}}$$

Так, например, известно, что $\sqrt{59} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}$

Первые подходящие дроби в этом случае

$$\frac{P_0}{Q_0} = 7, \frac{P_1}{Q_1} = 7 + \frac{1}{1} = 8,$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = 7\,\frac{2}{3}$$

Эйлер доказал теорему, устанавливающую связь между рядами и непрерывными дробями: «Если все члены ряда будут дробными числами, т. е. $x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} +$, x выразится такой непрерывной дробью $x = \cfrac{1}{A + \cfrac{A^2}{B - A + \cfrac{B^2}{C - B + \cfrac{C^2}{D - C +}}}}$

Взяв ряд

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots,$$

он получает

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\ldots}}}}$$

Беря обратную дробь, он получает

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\ldots}}},$$

что подтверждает правильность разложения Броункера. В числе подходящих дробей для π находится и значение $\frac{355}{113}=3{,}1415929\ldots$ Разлагая в непрерывные дроби числа $\frac{a}{b}$ (a и b — целые), $\sqrt[n]{D}$ (D — не кратная степень n), e и π, Эйлер отмечал существенные различия в их разложениях и приходил к выводу о различии природы этих чисел. Но вклад Эйлера в решение задачи о квадратуре круга не ограничивался созданием теории аналитических средств, необходимых для выяснения природы числа π. Он разрабатывал и геометрические способы приближенного спрямления дуги окружности. Причем непосредственным поводом для разработки этих способов для него, так же как и для некоторых других математиков XVIII в., служили письма квадратурщиков, на которые Академии наук поручали им отвечать. Так, например, Л. Эйлер, при рассмотрении работы о квадратуре круга академического механика Брукнера не ограничился указанием на приближенное решение этой задачи автором и Гюйгенсом, но предложил и свой способ построения π, дающий более точное значение этой величины [105].

В отзыве на работу Брукнера (1738 г.) Эйлер дает свое построение и высказывает некоторые важные соображения об этой задаче.

Эйлер предлагает такое приближенное решение этой задачи: дана полуокружность ADB с центром в C, которая в точке D делится пополам, а в точке E делится пополам дуга AD (рис. 43). На продолжении прямой AD откладываем DI=AD. Из точки I радиусом IE описываем окружность, которая пересечет AD в точке G. На EC откладываем $FH=FG$, а на продолжении DA отложим $AK=EH$. И Эйлер утверждает тогда, что

$IK=\overset{\smile}{BDA}=\pi R$[14].

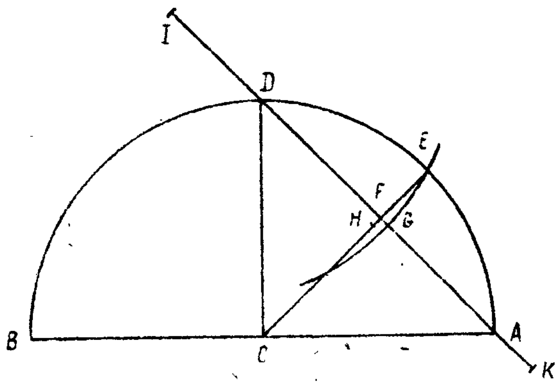


Рис. 43.

В этом случае значение π равно 3,14149. Таким образом, Эйлер получает результат с погрешностью в 10^{-4}, т. е. в 30 раз меньшей, чем у Брукнера. Эйлер указывает, что есть способы (например, способ Меция), дающие возможность еще больше приблизиться к истинной длине окружности, никогда не получая ее. Далее Эйлер дает построение для приближения лучшего, чем у Гюйгенса [35; 162] и получает $\pi=3{,}1415916$.

Способы Бюффона и Маскерони вычисления π

Французский естествоиспытатель Бюффон (1707—1788) в 1777 г. опубликовал оригинальный способ вычисления π, известный в литературе под названием «Задача Бюффона». Существо этого способа кратко можно изложить так. Лист бумаги (плоскость) разграфлен параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На него бросается («наудачу») игла длины $2l$ $(l<a)$ (рис. 44, *а*, *б*). Требуется найти вероятность пересечения иглы с какой-либо из этих прямых.

При решении этой задачи обозначают через x расстояние от центра иглы до ближайшей параллели, а угол, составленный иглой с этой параллелью, через φ (см. рис. 44, *а*). Тогда x и φ вполне определяют положение иглы. Все возможные положения иглы определяются точками прямоугольника со сторонами a и

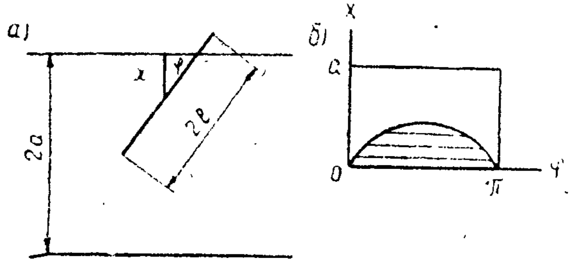


Рис. 44.

π (см. рис. 44, *б*). Из рис. 44, *а* видно, что для пересечения иглы с параллелью необходимо и достаточно, чтобы $x \leqslant l\sin\varphi$.

Из сделанных предположений следует, что искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной области на рис. 44, *б* к площади прямоугольника со сторонами *a* и π. Следовательно, вероятность

$$P = \frac{\int\limits_0^\pi l\sin\varphi d\varphi}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi} \longrightarrow \pi = \frac{2l}{ap}.$$

А так как вероятность P приближенно (в зависимости от числа бросаний иглы) равна отношению числа пересечений к числу бросаний иглы, то получается приближенная формула для вычисления числа π:

$$\pi \approx \frac{2ln}{am},$$

где n — число бросаний иглы; m — число наблюдённых при этом пересечений. Этот способ в дальнейшем проверялся многими лицами. Так, например, Лаццарини в 1901 г. бросал иглу 3408 раз и получил значение $\pi = 3{,}1415929$.

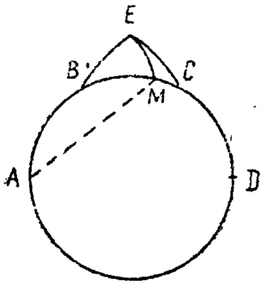


Рис. 45.

Итальянский геометр Маскерони (1750—1800) в 1797 г. дал простой и практически ценный прием приближенного спрямления окружности с помощью одного циркуля. Как это делается? Описываем окружность с радиусом $r=1$. Этим же раствором циркуля, начиная от некоторой точки окружности A (рис. 45), делаем засечки B, C, D. Тогда точки A, B, C, D будут вершинами правильного шестиугольника. Из точек A и D, как из центров, радиусом AC=DB проводим дуги CE и BE. Затем из точки B, как из центра, радиусом BE проводим дугу EM, где M — точка пересечения этой дуги с основной окружностью. Тогда

$$AM=\frac{1}{2}\left(\sqrt{9-3\sqrt{6}}+\sqrt{1+\sqrt{6}}\right)=1{,}5712\cdots\approx\frac{\pi}{2}$$

(«точное» же значение $\frac{\pi}{2}=1{,}57079...$).

Предположения о невозможности квадратуры круга с помощью циркуля и линейки

Еще у некоторых ученых Древней Греции, по-видимому, возникали сомнения о возможности решения пяти конструктивных задач, в том числе и квадратуры круга, циркулем и линейкой. Это видно и из того, что многие из них искали новые средства (кривые, инструменты) для решения этих задач. В рассматриваемый период эти сомнения усилились. Повысился интерес к проникновению в сущность числа π.

Ал-Бируни (X—XI вв.) в «Канон Масуд» писал: «Окружность круга к его диаметру составляет отношение... но это отношение иррационально». Ал-Каши (XIV—XV вв.) в «Трактате об окружности», получив 17 верных знаков для π, вместе с тем указывал, что «всей истины этого (т. е. точного значения π — *С. Б.*) не знает никто, кроме Аллаха».

Нилоканта (XV—XVI в.в.) в «Научном сборнике» утверждал, что диаметр с окружностью «несоизмеримы» [103; 160].

Немецкий математик М. Штифель в «Общей арифметике» (1545) утверждал, что не существует «выражаемого и невыражаемого, т. е. рационального и иррационального (в виде радикала) числа для $\frac{c}{d}$. Квадратура круга превосходит разум вычислителя из смертных людей».

Мысль о невозможности квадратуры круга циркулем и линейкой высказывали Леонардо да Винчи, Х. Штурм, Гюйгенс, Грегори, Чирнгаузен, Ньютон и др.

В. Крафт (XVIII в.) в работе о квадратуре круга хотя и не утверждал, что она невозможна циркулем и линейкой, но считал, что «доказательство невозможности имело бы не меньшее значение, чем положительное решение».

Особенно большую роль в подготовке почвы для перехода к новому периоду в истории квадратуры круга сыграли результаты работ Эйлера, его предположения о характере числа π. Уже в отзыве на работу Брукнера он писал: «Абсолютно невозможно, чтобы удалось найти совершенно точный способ спрямления дуги... и все прилагаемые к этому усилия, труд и затраты теряются впустую» [105; 177]. Во «Введении в анализ» (1748), говоря о круге с радиусом $R=1$, он утверждал: «Достаточно ясно, что окружность этого круга рациональными числами точно выразить нельзя» [102; 123]. В дальнейшем Эйлер приходит к выводу, что число $\frac{c}{d}=\pi$ не выражается «обыкновенными иррациональностями», а должно быть отнесено «к гораздо более высокому роду иррациональностей, которого можно достичь только посредством бесконечного повторения извлечения корней, и поэтому геометрически нельзя добиться большего, чем непрестанно, все более близкое выражение истинного отношения окружности к диаметру» [105; 187].

И после того как он получил представление π в виде непрерывной дроби и сравнил его с разложением в непрерывную дробь алгебраической иррациональности, он писал в 1755 г.: «До сих пор представляется совершенно неясным, могут ли трансцендентные количества, включающие окружность круга или логарифмы, выражаться через какие-либо радикальные количества, ибо до сих пор невозможность этого никем не обнаружена. Вместе с тем представляется вполне бесспорным, что окружность круга с диаметром $d=1$ $(C=\pi)$ не допускает выражения с помощью квадратных радикалов, так как иначе непрерывная дробь, равная π, должна была бы иметь периодические указатели, что однако никоим образом не обнаруживается» [105; 188]. Если к этому добавить, как указывалось, что Эйлер утвердил обозначение $\frac{c}{d}$ через π, ввел обозначение основания натуральных логарифмов через e, получил формулу $e^{i\pi}+1=0$, кроме того, он начал делить иррациональности на «обыкновенные» и «трансцендентные» и т. д., то становится ясно, что Эйлер понимал арифметическую природу числа π, хотя доказательства иррациональности и трансцендентности π было дано его последователями в следующий период истории этой задачи.

Удвоение куба, трисекция угла и построение правильных многоугольников

Как видно из предыдущего, математики стран средневекового Востока и европейских стран эпохи Возрождения проявляли большой интерес к задаче о квадратуре круга. Но они проявляли интерес и к другим знаменитым задачам древности: удвоение куба, трисекция угла, построение правильных многоугольников и квадрирование луночек. При этом они не только переводили соответствующие произведения древних на арабский и латинский языки и комментировали их, но и вносили свой вклад в разработку теории этих задач. В частности, они дали много новых геометрических способов точного и приближенного решения трех указанных задач, а также свели решение некоторых из них к отысканию численных значений корней кубических уравнений.

В странах ислама

Арабоязычные математики, переводя полностью или частично многие математические произведения древних греков на арабский язык и комментируя их, тем самым популяризировали результаты работ древнегреческих математиков среди ученых стран ислама и сохраняли многие из этих сочинений древних греков для будущих поколений. Отправляясь обычно от результатов работ древних греков, арабоязычные математики вносили свой вклад и в теорию знаменитых задач древности.

Удвоение куба. Математики средневекового Востока, благодаря трудам древних греков, уже в IX в. были хорошо знакомы с задачами о построении двух средних пропорциональных между двумя данными величинами. Математики стран ислама знали, в частности, что Архимед встречался с необходимостью решать аналогичные задачи при установлении связи между объемами шара, конуса и цилиндра в произведении «О шаре и цилиндре» и при делении шара в данном отношении. Они были знакомы с некоторыми произведениями других древнегреческих ученых, в которых решалась задача об удвоении куба.

Познакомившись с этими результатами, они и сами внесли свой вклад в создание новых способов решения этой задачи. Так, например, бану Муса (IX в.) в «Книге измерений плоских и шаровых фигур» XVI предложение формулирует так: «Мы хотим найти две величины, находящиеся между двумя данными величинами так, чтобы эти четыре величины находились бы в непрерывной пропорции» [6; 410]. В этом и XVII предложении бану Муса подробно излагает способ построения отрезков x и y, составляющих с данными отрезками a и b непрерывную пропорцию $a:x=x:y=y:b$. Их способ напоминает способ решения с помощью двух прямых углов. Но некоторые новшества, внесенные бану Муса в конструкцию своего прибора, отличают его от способа древних[15].

Абу-л-Вафа (X в.) в трактате «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений» [1; 56—130], рассматривает многие задачи на построение, знание которых может иметь значение и для практики. Он указывает также на связь некоторых знаменитых задач древности с практической деятельностью людей и дает способы решения этих задач.

В XXII предложении второй книги Абу-л-Вафа, говоря о построении дома кубической формы или шара, объемы которых в два раза больше данных, по существу решает задачу об удвоении куба и шара. Точнее говоря, он рассматривает здесь обобщенные задачи: «Как построить квадратный дом с равными длиной и шириной и высотой, являющийся удвоенным другим квадратным домом, или каким образом построить шар, являющийся другим шаром, или разделить пополам или взять в других отношениях...».

Он указывает при этом способ построения искомой величины, имеющий сходство со способом, данным Героном в «Механике». Вот что он говорит о построении ребра искомого куба: «Построим линию AB, равную длине дома или диаметру шара, построим линию AC, равную удвоенной линии AB под прямым углом, и дополним плоскую фигуру ABCD (рис. 46). Проведем диагональ AD, разделим ее пополам в точке F и продолжим линии DC и DB в их направлениях. Установим край линейки на точку A и будем двигать ее по продолжениям линий DC и DB до тех пор, пока она не пересечет их в таких точках E и G, что линии GF и EF будут равны. Тогда длина дома или диаметр шара есть линия BE». Доказательство этого утверждения он сводит к доказательству того, что $AB : AC = AB^3 : BE^3$,[16] откуда он и получает $BE^3 = 2AB^3$, т. е. если AB есть ребро данного куба, то BE—ребро куба, объем которого в два раза больше данного.

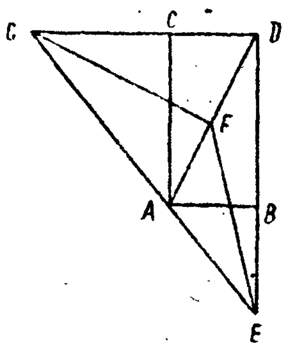


Рис. 46.

Трисекция угла. Задача о трисекции угла привлекала к себе внимание многих арабоязычных математиков в средние века. Она имела в то время большое теоретическое и практическое значение, в том числе и при составлении тригонометрических таблиц, которые были необходимы для астрономии и для геометрических решений некоторых практических задач. Действительно, значение $\sin 3°$ они могли легко получить, зная, как строится сторона правильного 15-угольника с центральным углом 24° в круге радиуса $R=1$; деля этот угол повторно пополам, мы получим угол в 3° и соответствующую линию синуса.

Но чтобы получить sin 1°, нужно уметь делить угол в 3° на три равные части.

Ал-Бируни (973—1048) рассматривает трисекцию угла в IV главе 3-й книги своего астрономического трактата «Канон Масуда» в связи с вычислением тригонометрических таблиц. Ал-Бируни приводит здесь 12 способов трисекции угла с помощью вставок[17].

Но арабоязычные математики того времени, используя некоторые способы деления угла на три равные части, принадлежащие древним, вместе с тем предлагали и свои способы.

Рассмотрим для примера некоторые способы трисекции угла, дополняющие известные способы древних греков. Один из таких способов изложен бану Муса в XVIII предложении [6; 415]. Пусть дан угол ABC (рис. 47). Из B, как из центра, радиусом BD проведем окружность DEGL, где BL — продолжение AB и $BG \perp AL$. Соединим G и E прямой и продолжим ее до пересечения с LA (точка H). Отложим на GH отрезок $GO = BD$. Пусть теперь точка G движется по окружности к L, а GEH проходит через E до тех пор, пока точка O не окажется на линии BG (точка O_1). Тогда G будет в G_1. Утверждается, что $\overset{\smile}{G_1L} = \frac{1}{3}\overset{\smile}{DE}$. Бану Муса дает и доказательство этого предложения, но читатель может и сам попытаться предложить свое доказательство.

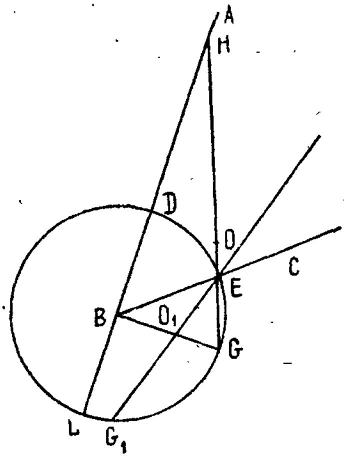


Рис. 47.

Абу-л-Вафа во 2-й главе [1] предлагает несколько способов деления угла на три равные части. Один из способов, где он пользуется методом вставок, близок по существу к методу, рассмотренному на стр. 59.

Абу-л-Вафа дает здесь и способ деления дуги окружности на три равные части, основанный на предложении 26 третьей книги «Начал» Евклида о равенстве дуг, стягивающих равные углы в равных кругах и предполагающий умение делить центральный угол на три равные части[18].

Построение правильных многоугольников. Умение строить правильные многоугольники (делить окружность на равные части), как известно, было важно при решении многих задач практического характера, а также в некоторых разделах науки. Арабоязычные математики уделяли этой задаче много внимания. Правда, им не удалось, по сравнению с древними греками, расширить число правильных многоугольников, которые строятся циркулем и линейкой, но все же они дали некоторые новые способы построения правильных многоугольников с числом сторон $n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15,...$, а главное, они перевели некоторые из этих задач на язык алгебры. Их заслуга в истории этой задачи состоит также и в том, что они сохранили для нас некоторые произведения древних греков, посвященные решению задачи о построении правильных многоугольников.

Так, например, Сабит ибн Корра (826—901) дал обработку «Книги о построении круга, разделенного на семь равных частей» [5; 401—416], благодаря чему мы и знаем теперь о содержании сочинения Архимеда.

Много примеров на построение правильных многоугольников дано в трактате Абу-л-Вафа [1]. В третьей главе он показывает, как можно построить правильный n-угольник ($n=3$, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) по данной стороне его. Для наших целей особый интерес представляет глава четвертая, в которой Абу-л-Вафа дает построение правильных многоугольников, вписанных в данный круг.

При построении правильных многоугольников Абу-л-Вафа использует «Начала» Евклида, где дано построение их при $n=3$, 4, 5, 6, 15, а также некоторые известные ему способы построения арабоязычных математиков. Но он предлагает и новые способы построения некоторых правильных многоугольников (деление окружности на равные части). Рассмотрим один из его способов деления окружности на пять равных частей.

Пусть AB—диаметр данного круга, а D—его центр (рис. 48). Проведем отрезок $AE \perp AB$ и равный DA. Разделим DA пополам точкой G, проведем GE и отложим на ней $GH=AD$. Разделим GH пополам в точке F, проведем $FI \perp GH$. Примем точку I за центр и на расстоянии DA отметим M и L. «Тогда дуга LM — одна пятая круга».

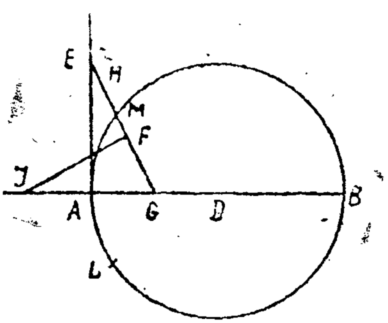


Рис. 48.

Абу-л-Вафа строит различные многоугольники, в том числе 7- и 9-угольники.

Построение семиугольника, вписанного в круг, как известно, дано в [5; 401]. Абу-л-Вафа для решения этой задачи предлагает провести следующие построения.

ADC — диаметр в данном круге (рис. 49). Из точки A, как из центра, радиусом AD сделаем отметки на окружности B и E, проведем BE, которая пересечет AC в точке G. Затем, из точки B, как из центра, отметим на дуге точку H так, чтобы BH=BG. «Тогда дуга BH — одна седьмая круга приближенно, а не точно».

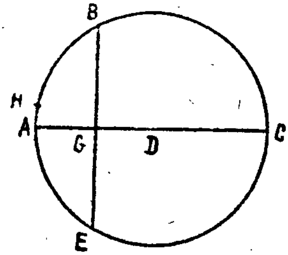


Рис. 49.

Построение правильного девятиугольника Абу-л-Вафа предлагает осуществлять, пользуясь трисекцией угла. Вот полное воспроизведение перевода 14-го предложения IV главы трактата Абу-л-Вафа: «Построение девятиугольника, вписанного в круг. Если он сказал: как вписать в круг равносторонний и равноугольный девятиугольник, то впишем в круг равносторонний треугольник, разделим каждую дугу на три равные части и соединим места деления линиями. Получим равносторонний и равноугольный девятиугольник. Вот чертеж этого» (рис. 50).

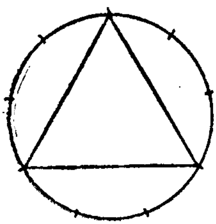


Рис. 50.

Что касается деления трети длины окружности на три равные части, то автор предполагает, что читатель усвоил это раньше.

Ал-Бируни тоже не обошел задачу о построении правильных многоугольников. Особенно много места построению этих многоугольников он отвел в своем «Трактате об определении хорд в круге при помощи ломаной линии, вписанной в него» [3].

Говоря вообще об определении хорд круга, он подчеркивает, что это «важно для науки астрономии». Для определения хорд, говорит он, надо знать диаметр, который равен «семи двадцать вторых окружности». Здесь он говорит и о некоторых хордах, являющихся сторонами правильных многоугольников. В частности, он пишет: «Было доказано, что хорда одной шестой окружности равна полудиаметру, это первая хорда в круге, которую мы знаем». Затем он переходит к «определению одной десятой круга», используя 2-е предложение 2-й книги «Начал». Для вычисления этой хорды или стороны правильного десятиугольника ал-Бируни предлагает «прибавить к произведению полудиаметра на себя четверть этого произведения и вычесть четверть диаметра из корня из суммы», т. е.

$$a_{10}=\sqrt{R^2+\frac{1}{4}R^2-\frac{1}{4}}\cdot 2R=R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Здесь рассматривается также «определение хорды одной восьмой круга». Ал-Бируни предлагает для вычисления этой хорды» отнять половину диаметра из хорды четверти, умножить остаток на полудиаметр, вычесть произведение из произведения полудиаметра на себя и извлечь корень из остатка», т. е.

$$a_8=\sqrt{R^2-(R\sqrt{2}-R)R}=\sqrt{R^2-R^2\sqrt{2}+R^2}=R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Так решали арабоязычные математики некоторые задачи о делении окружности на равные части (построение-вычисление сторон правильных многоугольников)[19].

Из сказанного видно, что арабоязычные математики больше, чем древние греки, склонны к алгебраизации этих задач. В частности, отрезки прямой линии ал-Бируни называет величинами, выражает их числами, чего не допускал Евклид.

Особенно важным шагом в их алгебраизации геометрии было сведение некоторых конструктивных задач к уравнениям.

Сведе́ние некоторых конструктивных задач к алгебраическим уравнениям. Было время, когда древние греки вынуждены были облачать алгебру в геометрическую одежду. Геометрическая алгебра греков сыграла в свое время большую роль в развитии математики: она позволяла преодолеть некоторые трудности, связанные, в частности, и с иррациональными числами, и позволяла вносить в решение задач элемент наглядности, так как она оперировала с отрезками прямой и прямоугольниками, а не с числами.

Но эта форма в дальнейшем стала являться одним из тормозов развития математики, так как облечь в геометрическую форму уравнения 3-й и 4-й степени было уже очень трудно. Задача состояла в том, чтобы высвободить алгебру из крепких объятий геометрии, дать ей возможность развиваться, пользуясь специфическими для нее методами, оперируя числами. Это открыло путь к решению алгебраических уравнений более высоких степеней в радикалах.

При этом оказалось, что многие геометрические задачи, которые удавалось свести на язык алгебры, легче можно было или решить или доказать неразрешимость их при тех ограничениях, которые накладывались на средства решения их (например, решение конструктивных задач только с помощью циркуля и линейки). Поэтому еще до появления символической алгебры отдельные древнегреческие ученые, и особенно математики стран средневекового Востока, начали сводить некоторые конструктивные задачи к алгебраическим уравнениям.

Первым из древнегреческих ученых, кто дал своеобразное сведение задачи удвоения куба к кубическому уравнению, был Гиппократ Хиосский (см. I главу). Правда, здесь еще не было полного сведения конструктивной задачи к уравнению. Но трактовка задачи Гиппократом позволяла легко получить и кубическое уравнение, к которому сводится эта задача. Действительно, если написать $a:x=a:x$, $a:x=x:y$ и $a:x=y:2a$ и перемножить левые и правые части этих равенств, то получим $a^3:x^3=axy:2axy$ или $a^3:x^3=1:2$, откуда и получаем $x^3=2a^3$. Сами древние греки, конечно, так не записывали задачу об удвоении куба не только потому, что у них не было символической алгебры, но и потому, что они не ставили вопрос об отыскании арифметических значений корней уравнений и не считали $\sqrt[3]{2}$ числом.

Пифагорийцы, по-видимому, умели решать задачу о делении отрезка a на две части так, чтобы прямоугольник, построенный на всем отрезке a и одной его части, был бы равен квадрату, построенному на второй части отрезка a. Эта задача связана с построением стороны правильного пятиугольника и сводится к квадратному уравнению $x^2+ax-a^2=0$. Из этого также видно, что задача построения правильного пятиугольника разрешима циркулем и линейкой. Эта задача рассматривается в «Началах» Евклида (IV книга, 1-е предложение).

Задачу о делении шара в данном отношении Архимед сформулировал так, что легко после этого удалось свести ее тоже к кубическому уравнению $x^3-ax^2+bc^2=0$. Действительно, формулировка Архимеда с нашей символикой записывается в виде пропорции $(a-x):b=c^2:x^2$, откуда и получается кубическое уравнение $x^2(a-x)=bc^2$.

Другие конструктивные задачи, в том числе и трисекция угла, построение правильных многоугольников и квадратура луночек были сведены к решению алгебраических уравнений в рассматриваемый нами период.

Хотя нам точно не известно, кто и как впервые получил кубическое уравнение трисекции угла, но можно думать, что к этому уравнению арабоязычные математики приходили, используя известные в то время тригонометрические формулы.

В частности, они могли прийти к этому уравнению, рассматривая данный угол φ и $\cos\varphi$ как известные величины, а искомый угол $\frac{\varphi}{3}$ и $\cos\frac{\varphi}{3}$ — как неизвестные величины. Тогда

$$\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}.$$

Умножив левую и правую части полученного уравнения на 2 и обозначив 2 $\cos\varphi$ через a, а 2 $\cos\frac{\varphi}{3}$ через x, получим искомое уравнение $x^3 - 3x - a = 0$. Есть основание думать, что уравнение трисекции угла было получено в XI столетии. В дальнейшем это уравнение получали многие различными способами. Так, например, ал-Каши (XIV—XV в.в.), пользуясь теоремой Птолемея и Евклида о равенстве произведений отрезков пересекающихся хорд круга, дал вывод уравнения трисекции угла. Ход его рассуждений можно изложить кратко так: дан полукруг радиуса R (рис. 51), дуги AB, BC и CD равны. На полудиамет-

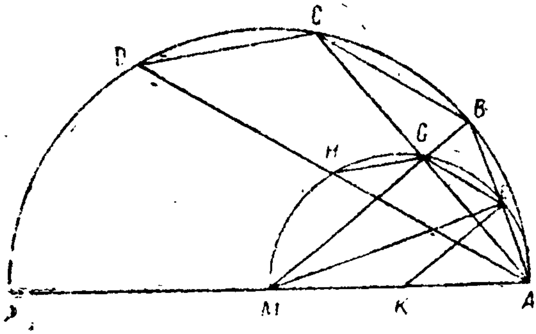


Рис. 51.

ре AM строим другой полукруг с центром K. Проводим хорды AB, AC и AD, тогда дуги AE=EG=GH. Если дана хорда AH, а искомая — хорда AE (хорда трети дуги AH), то по теореме Птолемея в четырехугольнике AEGH будет

$$AE^2 + AE \cdot AH = AG^2. \quad (1)$$

По теореме Евклида $AG = CG$ и $AG^2 = BG\,(2R - BG)$. (2)

Кроме того, $AB^2 = BG \cdot 2R$, т. е. $BG = \frac{AB^2}{2R}$, и так как $AB = 2AE$, то $BG = \frac{2AE^2}{R}$. Подставим BG в (2), получим

$$AG^2 = 4AE^2 - \frac{4AE^4}{R^2}. \quad (3)$$

Из (1) и (3) получаем уравнение трисекции угла

$$4AE^3+R^2AH=3R^2AE. \qquad (4)$$

Положив, что AH соответствует углу 6α, дуга AE — углу 2α, $AH=R\sin 3\alpha$, $AE=R\sin\alpha$, получим известную теперь формулу синуса тройного угла.

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$$

Ал-Бируни и Абу-л-Джуб (XI в.) свели к кубическому уравнению $x^3-3x+1=0$ задачу о построении правильного девятиугольника. Вот как они пришли к такому уравнению. Пусть $AB=x$ (рис. 52) — сторона правильного 9-угольника; построим

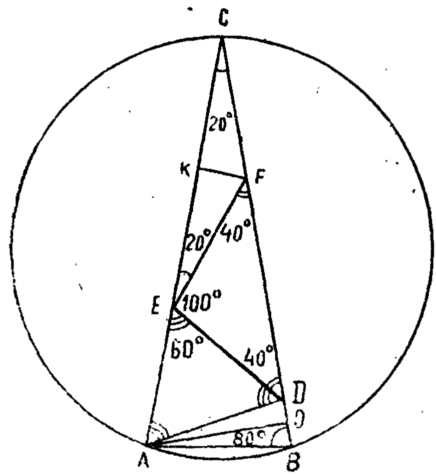


Рис. 52.

равнобедренный треугольник ACB, где $\angle BAC=\angle ABC=80°$, $AC=BC=1$. Отложим $AD=DE=EF=FC=AB=x$.

Проведем $AO\perp BC$, $KF\perp AC$. Тогда

$$\angle ACB=\angle BAD=20°, \quad \angle DAE=\angle AED=\angle EDA=60°,$$

$$\angle EFD=\angle FDE=40°, \ \angle FED=100°, \ \angle DAB=FEC=20°.$$

Следовательно, $AE=EF=FC=x$, $EC=1-x$. Рассмотрим теперь подобные треугольники. Из подобия треугольников ACB и BAD следует

$$1:x=x:BD.$$

Следовательно, $BD=x^2$, $OD=OB=\frac{x^2}{2}$. Из подобия же треугольников AOC и FKC имеем $1 : \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = x : \frac{1-x}{2}$.

Откуда и получаем $x^3 - 3x + 1 = 0$ [103].

Легко видеть, что уравнение для стороны девятиугольника является частным случаем уравнения трисекции угла $x^3 - 3x - a = 0$. Это объясняется тем, что сторону девятиугольника можно, действительно, получить как результат деления угла вписанного правильного треугольника на три равные части.

Попытки решения этой задачи циркулем и линейкой не приводили к положительным результатам, как стало ясно в дальнейшем, потому что невозможно разделить угол в 60° на три равные части циркулем и линейкой. Или, иначе, эта задача не решается циркулем и линейкой, потому что она сводится к неприводимому уравнению 3-й степени, а корни таких уравнений, как будет видно из дальнейшего, нельзя построить циркулем и линейкой. Арабоязычные математики в средние века этого, конечно, не знали, но они были уверены, что такого рода задачи циркулем и линейкой не решаются, и они решали их с помощью конических сечений. Используя круг и равностороннюю гиперболу ал-Сиджизи (X в.), вероятно, впервые, решал задачу о трисекции угла.

Особенно заметный вклад в разработку геометрической теории кубических уравнений внес знаменитый хорасанец Омар Хайям (XI в.). Он определяет алгебру как науку о решении уравнений между целыми многочленами. Особое внимание Хайям уделяет решению кубических уравнений, в том числе уравнения $x^3 = a$, где a является кубом некоторого числа, например, $a = 8$, $a = 27$... О численном решении кубического уравнения общего вида он говорит, что такое решение «невозможно ни для нас, ни для кого из тех, кто владеет этим искусством. Может быть, кто-нибудь из тех, кто придет после нас, узнает это...» [103; 252].

Поэтому Хайям прибегает к геометрическому построению корней и разрабатывает геометрическую теорию кубических уравнений. Он рассматривает 14 видов кубических уравнений, корни которых строятся с помощью конических сечений; из них одно двучленное, шесть трехчленных и семь четырехчленных. Так, например, трехчленное уравнение $x^3 + p^2x = b$ он приводит сначала к однородной форме $x^3 + p^2x = p^2q$, а затем решает его с помощью окружности $x^2 + y^2 = qx$ и параболы $x^2 = py$. Абсцисса точки пересечения этих кривых будет решением указанного уравнения.

У Хайяма нет еще символики и он получает решение не путем совместного решения уравнений: $x^2+y^2=qx$;

$$x^2=py,$$

а с помощью словесного выражения пропорций: так как для параболы

$$\frac{p}{x}=\frac{x}{y},$$

для круга $\frac{x}{y}=\frac{y}{q-x}$, то

$$\frac{p^2}{x^2}=\frac{x^2}{y^2}=\frac{x^2}{x(q-x)}=\frac{x}{q-x} \text{ и } p^2(q-x)=x^3.$$

Прибавляя к левой и правой части p^2x, он получает

$$x^3+p^2x=p^2q.$$

Хайям утверждает, что у уравнения этого вида всегда есть один положительный корень. Рассматривая далее уравнение вида

$$x^3+a=bx \quad (a=p^2q, \quad b=q^2),$$

он решает его с помощью параболы $x^2=\sqrt{b}\,y$ и левой ветви равносторонней гиперболы $x^2-\frac{a}{b}x=y^2$. Абсциссы точек пересечения будут корнями рассматриваемого уравнения. Хайям указывал, что в этом случае могут быть два положительных корня, один (когда кривые касаются) и задача может быть невозможной (когда кривые не пересекаются).

Затем он находит корни уравнения $x^3+a=cx^2$ с помощью параболы $y^2=\sqrt[3]{a}\,(c-x)$ и гиперболы $xy=\sqrt[3]{a^2}$, а также рассматривает и другие кубические уравнения, устанавливая при этом, сколько каждое из них имеет корней (положительных) и границы положительных решений.

Таким образом, Хайям создал геометрическую теорию кубических уравнений, которая проливала уже некоторый свет и на решение тех уравнений, к которым сводились задачи удвоения куба, трисекции угла, построения правильных семиугольника и девятиугольника.

Развитие идей Хайяма приводило некоторых ученых стран Ислама к новым оригинальным методам решения кубических уравнений. Например, ал-Каши дал итерационный метод решения уравнения $x^3 - px + q = 0$ или $x = \frac{x^3 + q}{p}$, которое содержит и уравнение трисекции угла.

Рассматривая уравнения, имеющие весьма малый корень, можно пренебречь кубом для первого приближения. Тогда

$$x_1 \approx \frac{q}{p} = a,\ x_2 = \frac{q + a^3}{p},\ x_3 = \frac{q + x_2^3}{p}, \dots,\ x_n = \frac{q + x_{n-1}^3}{p}, \dots$$

и этот процесс сходится..

Зная, например, $\sin 3\alpha$, можно с помощью этого метода найти приближенное значение $\sin\alpha$. Именно таким путем ал-Каши нашел $\sin 1° = 0{,}017452406437 28\ldots$, что имело значение и для составления таблиц в астрономии.

Следовательно, арабоязычные математики, в том числе и предки народов, населяющих среднеазиатские республики, не только сохранили многое из наследства древних греков, но внесли и свой оригинальный вклад в теорию рассматриваемых задач.

В европейских странах

В эпоху Возрождения в ряде европейских стран (Италия, Германия, Франция, Англия и др.) начали появляться стимулы для освоения наследства предшественников и для развития науки. Вновь появился интерес к математике, в том числе к рассматриваемым задачам.

Леонардо Пизанский, например, в «Книге квадратов» (ок. 1225 г.) пытался доказать неразрешимость уравнения $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ с помощью квадратных иррациональностей X кн. «Начал».

Первые существенные открытия европейцев (Ферро, Тарталья, Кардано, Феррари, Бомбелли, Виет) относились к алгебре и особенно к решению уравнений 3-й степени, к которым, в частности сводились и задачи удвоения куба, трисекции угла и построение сторон правильных 7- и 9-угольников. Эти задачи в то время решались точно и приближенно арифметически и геометрически.

Трисекция угла. Европейские математики в рассматриваемый период предложили много способов трисекции угла. Мы воспроизведем здесь только некоторые из них. Знаменитый немецкий живописец, гравер, скульптор, архитектор и инженер Альбрехт Дюрер (1471 — 1528) был и математиком, написавшим ряд книг и по геометрии. Его книга «Руководство к измерению циркулем и линейкой» (1525) была фактически первым учебником по геометрии на немецком языке. В этой книге А. Дюрер дал такой способ приближенного деления угла ASB на три равные части (рис. 53). Из вершины S произвольным радиусом описываем окружность и соединяем точки пересечения сторон угла с окружностью хордой AB. Делим эту хорду на три равные части в точках R_1 и R_2 ($AR_1=R_1R_2=R_2B$). Из точек A и B, как из центров, радиусами $AR_1=R_2B$ описываем дуги, пересекающие окружность в точках T_1 и T_2. Проведем $R_1S_1 \perp AB$ и $R_2S_2 \perp AB$. Радиусами

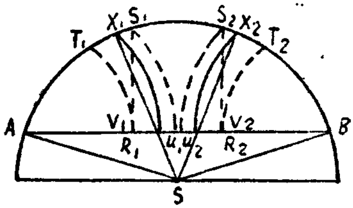


Рис. 53.

$AS_1=BS_2$ проводим дуги, пересекающие AB в точках U_1 и U_2. Дуги AT_1, S_1S_2 и T_2B равны между собой, так как стягиваются равными хордами. Чтобы найти точки трисекции угла x_1 и x_2, Дюрер делит на три равные части отрезки R_1U_1 и R_2U_2 точками P_1, V_1 и P_2, V_2. Затем радиусами AV_1 и BV_2 проводим дуги, которые пересекают окружность в точках x_1 и x_2. Соединив эти точки с S, получим деление данного угла на три равные части с хорошим приближением к истинным величинам.

Р. Декарт (1596—1650) в своей знаменитой «Геометрии», положившей начало существования аналитической геометрии, много места отвел решению задач, которые сводятся к уравнениям 3-й и 4-й степени, с помощью конических сечений. Эти задачи, как указывает Декарт, могут быть сведены к двум задачам: трисекции угла и удвоению куба, т. е. к построению двух средних пропорциональных [37; 99—100]. Свой «Способ деления угла на три равные части» Декарт начинает со сведения этой задачи к кубическому уравнению.

Пусть требуется разделить угол NOP (или дугу NGTP) (рис. 54) на три равные части. Проведем окружность радиусом $ON=1$ из вершины угла, как из центра. Пусть хорда $NP=q$, хорду трети дуги NGTP обозначим через Z. Допустим, что точки G и T делят дугу NP на 3 равные части. Проведем ON, OG, OT, OP и — $GS \parallel OT$. Тогда из подобия треугольников NOG, RNG, RGS следует, что $NO:NG=NG:GR:RS$, или $1:Z=Z:GR=GR:RS$, $GR=Z^2$,

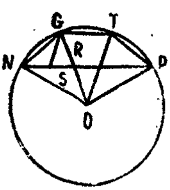


Рис. 54.

$RS=Z^3$. Легко заметить, что $NP=q$ отличается от $3NG=NG+$ $+GT+TP$ на величину, равную $RS=Z^3$, т. е. $q=3Z-Z^3$ или $Z^3-3Z+q=0$. К этому уравнению и сводится задача о трисекции угла. Дальше рассматривается вопрос о построении корней этого уравнения. Причем в этой книге Декарт утверждает, что с помощью только циркуля и линейки построить корни полученного уравнения невозможно, и вообще «телесные задачи нельзя построить без помощи конических сечений». Он даже пытался доказать невозможность решения этой задачи с помощью циркуля и линейки, но сделать это ему не удалось. Из конических сечений, используемых при решении «телесных задач», он предпочитал параболу. Именно с помощью пересекающихся параболы и окружности он находит корень полученного кубического уравнения, удовлетворяющий задаче деления угла NOP на три равные части [37; 100].

В XVII столетии трисекцию угла осуществляли разными способами и другие знаменитые ученые. И. Ньютон (1643—1727), например, использовал метод вставок, причем вставка строится с помощью конхоиды (рис. 55).

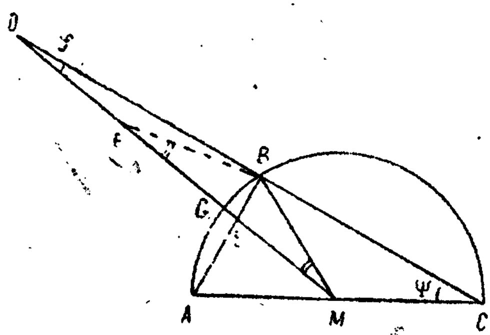


Рис. 55.

Пусть AB — хорда, стягивающая дугу AGB, которую требуется разделить на три равные части. Проведем диаметр AMC и прямую CB. Между продолжением CB и хордой AB вставим отрезок прямой DE так, чтобы $DE=AC$ и продолжение DE проходило бы через центр круга M. Тогда точка G разделит дугу AB на две части: $\overset{\smile}{GB}=\frac{1}{3}\overset{\smile}{AB}$, а следовательно, и $\angle GMB=\frac{1}{3}\angle AMB$. Докажем это: соединим точку B с точкой F (серединой DE). Тогда $DF=FE=AM=BF$ ($AB\perp DC$), и потому $\angle BMG=$ $=GFB=2\angle FDB=2\varphi$.

Следовательно, $\angle BMA=\angle GMA+\angle BMG=(\psi+\varphi)+2\varphi$,

где φ обозначает угол FDB, а ψ — угол $BCM=\frac{\angle BMA}{2}$.

Тогда $\angle BMA = 3\varphi + \frac{\angle BMA}{2} = 3\angle BMG$, что и требовалось доказать.

В XVII—XVIII вв. некоторые математики делили угол на три равные части с помощью «улитки Паскаля» и с помощью кривых Чева, Чирнгауза, Кемпа и др.

Из методов, предложенных математиками XVIII в., для решения этой задачи рассмотрим только метод Клеро (1713 — 1765).

Дан $\angle CBA$ (рис. 56). Из вершины угла B каким-нибудь радиусом опишем окружность. Предположим, что прямые BE и BD делят указанный угол на три равные части, AD, DE и EC — равные хорды и DE — нормаль к отрезку диаметра BF. Тогда $CE = ED = 2EF$. Точка E будет лежать на одной из ветвей гиперболы, для которой точка C — фокус, BF — директриса, тогда если A' — вершина, то $CA' = \frac{2}{3}$ CH, эксцентриситет $e = CE : EF = 2$.

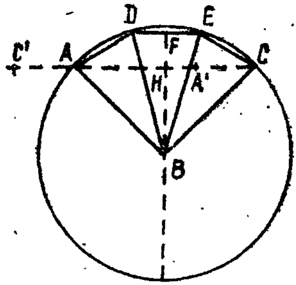


Рис. 56.

Вершина второй ветви гиперболы в точке A, фокус в точке C', т. е. $CA' = AC'$. Следовательно, если из точки B данного угла ABC провести окружность, пересекающую стороны угла в каких-то точках A и C, а затем построить гиперболу так, чтобы для одной из ее ветвей точка C была фокусом, а линия, делящая этот угол пополам, была бы ее директрисой, то, соединив точки A и C и отложив от C отрезок $CA' = \frac{2}{3}$ CH (где H середина AC), получим точку A', которая будет вершиной этой ветви гиперболы. Точка пересечения этой ветви гиперболы с окружностью (т. E) разделит дугу на две части, где $\smile EC = \frac{1}{3} \smile AC$, а следовательно, $\angle CBE = \frac{1}{3} \angle CBA$. Вершина второй ветви гиперболы должна находиться в точке A, а фокус ее C' — на продолжении CA, где $AC' = A'C$[20].

Удвоение куба. Развитие учения об алгебраических уравнениях в XVI—XVIII вв. пролило свет и на уравнения, связывающие величину ребра нового куба (x) с ребром данного куба (a). Появление общих формул (так называемые формулы Кардана) позволило рассматривать задачу $x^3=2a^3$ как задачу о нахождении арифметического значения корня кубического уравнения, хотя и прежний взгляд на эту задачу оставался в силе.

Кеплер при построении двух средних пропорциональных между a и $b=2a$ использовал полученную им кривую — геометрическое место точек y_i пересечения луча OS, вращающегося в плоскости вокруг точки O, на котором расположен один из катетов треугольника OMB с постоянной гипотенузой $OB=b$ $(=2a)$ с $v_iy_i \perp OS$. Уравнение этой кривой, как теперь известно, в полярной системе координат $r=b\cos^3\varphi$, а в декартовой $(x^2+y^2)=bx^3 \cdot OM$—среднее пропорциональное между OB и Ov $(MB \perp OB)$. Зафиксировав луч OS в положении $Oy_0M_0S_0$, где $Oy_0=OA=a$, и проведя $y_0v_0 \perp OS_0$, а $V_0M_0 \perp OB$, тогда по свойству кривой $M_0B \perp OS_0$.

Теперь очевидно $a:OM_0=OV_0:2a$, $OV_0:OM_0=OM_0:2a$,

$a:OV_0=OM_0:2a$ (рис. 57, *а*).

Откуда и следует $a:Ov_0=Ov_0:OM_0=OM_0:2a$.

Декарт рассматривал пример нахождения средних пропорциональных с помощью параболы $x^2=ay$ и круга

$$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4},$$

которые можно получить и из $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$. При совместном решении этих уравнений получаются две средние пропорциональные (координаты точки пересечения параболы и окружности) между a и b (в частности $b=2a$).

Ньютон тоже проявил интерес к этой задаче и указал способ построения двух средних пропорциональных [118; 211]. Он состоит в следующем. Даны два отрезка a и b. Пусть $a=AB$, точка C делит отрезок AB пополам. Из точки A как из центра, радиусом $AC=\frac{a}{2}$ опишем окружность (рис. 57, *б*). Отложим отрезок $CD=b$. Соединим точки B и D. На продолжении CD отметим точку E, чтобы отрезок EF (точка F на продолжении BD), продолжение которого проходит точку A, равнялся радиусу круга $\frac{a}{2}$. Тогда, утверждает Ньютон, CD, DE, AF и AB будут представлять геометрический ряд, т. е. $b:AF=AF:DE=DE:a$. Следовательно, отрезки DE и AF будут средними пропорциональными между данными отрезками a и b.

В XVIII столетии интерес к этой задаче не ослабевал. Она включалась в число тех задач, за решение которых некоторые Академии наук назначали денежные премии. Большой поток «трудов» квадратурщиков, «кубатурщиков» и «трисекционистов», а также рост числа математиков, считавших, что решение этих задач с помощью циркуля и линейки невозможно, вынудили

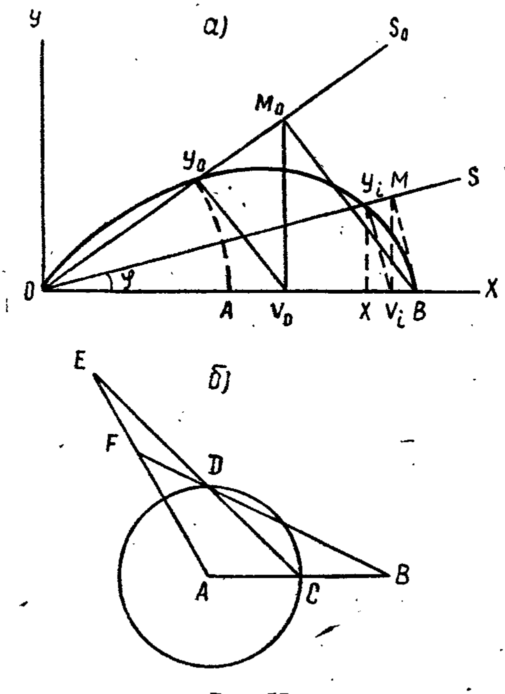


Рис. 57.

Академии во 2-й половине XVIII столетия отказаться от рассмотрения этих работ и отменить решения о премиях. Однако это могло только ослабить, но не заглушить интерес к этим задачам, так как они оставались по-прежнему «неразгаданной загадкой». В это время продолжались поиски точных и приближенных решений задачи об удвоении куба с помощью различных средств[21].

Построение правильных многоугольников. Задача построения правильных многоугольников (деления окружности на равные части) привлекала к себе внимание и европейских математиков в эпоху Возрождения. Кроме теоретического интереса, связанного с работами греков, решение этой задачи было важно для некоторых ремесленников и особенно для развивавшейся в то время астрономии.

Древние греки и математики стран Востока, как видно из предыдущего, умели строить циркулем и линейкой многие многоугольники. Нахождение сторон некоторых многоугольников они свели к решению квадратных и кубических уравнений.

Европейские математики в рассматриваемый период получили новые способы решения частных вопросов этой задачи и некоторые важные результаты для общей теории ее. Например, знаменитый немецкий художник *Дюрер* (1471—1528) с помощью циркуля постоянного раствора и линейки дал способ приближенного построения правильного пятиугольника и способ приближенного построения правильного девятиугольника, который известен под названием «Рыбий пузырь».

Способ Дюрера можно изложить кратко: циркулем постоянного раствора OB проводим окружность и тем же раствором проводим три дуги в этом круге, как указано на рис. 58. Затем радиусом $\frac{1}{3}$ OB проводим концентрический круг, который пересечет две дуги в точках d и *e*. Хорда d*e* и будет (приближенно) стороной правильного девятиугольника, вписанного во второй круг.

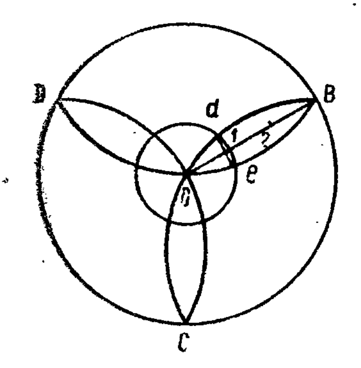


Рис. 58.

Феррари (XVI в.) с помощью теоремы Птолемея задачу о построении правильного семиугольника свел к решению кубического уравнения $x^3-x^2-2x+1=0$. Вошла в употребление формула $a_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-a^2_n}}$.

К построению 15-угольника в этот период стали подходить как к частному случаю, вытекающему из теории о том, что если *a* и b два целых взаимно простых числа, то можно найти два таких целых положительных числа x и y, что будет выполняться равенство $bx-ay=1$ или $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{ab}$. Если $a\cdot b=n$, то будет выполняться равенство

$$\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi x}{a}-\frac{2\pi y}{b}. \qquad (1)$$

Если $\frac{2\pi}{n}$ рассматривать как n-ю часть окружности, а $\frac{2\pi}{a}$ и $\frac{2\pi}{b}$ —

— как a-ю и b-ю часть этой окружности, то, зная как делится окружность на a и b равных частей и подставляя вместо x и y соответствующие числа, можно разделить окружность на n равных частей или вписать правильный n-угольник.

Например, если $a=5$, $b=3$, $x=2$, $y=1$, то, подставляя в (1), получим

$$\frac{2\pi}{15}=\frac{4\pi}{5}-\frac{2\pi}{3}.$$

Следовательно, если A — начальная (нулевая) вершина пятиугольника и треугольника (рис. 59), то, соединив первую вершину вписанного в круг правильного треугольника (F) и вторую — пятиугольника (C), получим сторону правильного 15-угольника (FC).

Можно сторону 15-угольника получить, соединив точки D и G, так как точка G — вторая вершина треугольника $\frac{2\pi\cdot 2}{3}$, а D — третья вершина пятиугольника $\frac{2\pi\cdot 3}{5}$ и выполняется равенство $\frac{4\pi}{3}-\frac{6\pi}{5}=\frac{2\pi}{15}$. Пользуясь этой теорией сторону 20-угольника можно строить, соединив первые вершины квадрата и правильного пятиугольника, вписанных в данный круг, так как $\frac{1}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$, а сторону 30-угольника,—соединив вершины вписанных правильных пяти- и шестиугольников $\left(\frac{1}{30}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$. Но эти многоугольники можно было строить и проще, зная что $20=2^2\cdot 5$, а $30=2\cdot 15$. Но теперь становилось ясно, что циркулем и линейкой можно

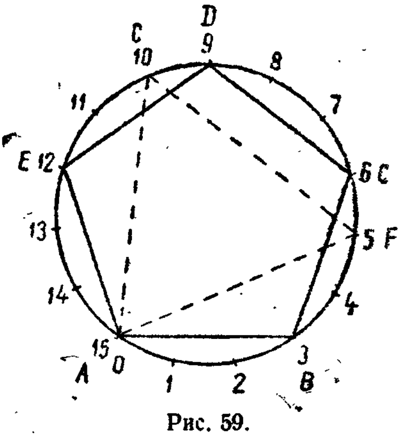


Рис. 59.

строить правильные n-угольники при n равном не только $2^к$, $2^к \cdot 3$, $2^к \cdot 5$, но и при $n=2^к \cdot 3 \cdot 5$ и вообще при $n=2^к\ ab$, где a и b — взаимно простые числа и при условии, что a- и b-угольники строятся циркулем и линейкой. Правда, числа a и b пока ограничивались значениями 3, 4, 5 и 6 и их произведениями на $2^к$. Оставался открытым вопрос о возможности построения циркулем и линейкой правильных многоугольников с числом сторон n=7, 9, 11, 13, 14, 17, 19...

Назревала необходимость создания общей теории деления окружности на равные части циркулем и линейкой. В рассматриваемый период многое было сделано для подготовки почвы для этой теории Лагранжем. Котес и Муавр обратили внимание на связь уравнения $x^n-1=0$ с делением круга на n равных частей. Теорию многоугольников развивал и Мейстер (1724—1788). Но общей теории не было создано. Задача оставалась нерешенной[22].

Квадратура луночек

Гиппократ Хиосский (V в. до н. э.) проявил интерес к квадратуре луночек, пытаясь с их помощью сквадрировать круг циркулем и линейкой. Хотя он и получил важные результаты (три случая квадратуры луночек, см. I гл.), но достичь своей цели он не мог. Столкнувшись с непреодолимой трудностью на этом пути и не оценив самостоятельное значение проблемы квадратуры луночек, в Древней Греции, по-видимому, охладели к ней.

В трудах арабоязычных математиков

Некоторые арабоязычные математики рассматривали круговые луночки, хотя существенно новых результатов они не получили. Например, Ал-Каши в трактате «Ключ к арифметике» дал такое определение луночки: «Луночка — плоская поверхность, ограниченная двумя дугами, не большими, чем половина окружностей двух кругов равных или разных, выпуклости которых направлены в одну сторону. Если же каждая из двух дуг больше половины окружностей, это называется подковой». («Историко-математические исследования» вып. VII, 1954, стр. 161). Дальше он говорит об их площадях: «Площадь луночки и подковы есть разность площадей двух сегментов, если вообразить линию, соединяющую их концы». Но здесь не рассматривается задача о построении прямолинейной фигуры, равновеликой луночке или подкове.

Наиболее известный результат, связанный с квадратурой луночек, был получен в то время Ибн ал-Хайсамом (965—1039). Он написал специальную книгу «О луночках», в которой упоминает о результатах Гиппократа Хиосского и излагает полученные им новые результаты. Его результаты исследований свойств круговых луночек, по-видимому, не столь существенны, так как в истории математики сохранился только один случай квадратуры суммы двух круговых луночек, рассмотренный Ибн ал-Хайсамом в его указанной работе. Этот же результат, как наиболее существенный ал-Хайсам изложил и в другой своей книге «Квадратура круга», которая Г. Зутером переведена на немецкий язык в 1899 г. Ибн ал-Хайсам доказал следующую теорему: «Сумма площадей луночек, образованных полукругами, построенными на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника, как на диаметрах, равна площади этого прямоугольного треугольника (рис. 60).

Доказательство его обычно излагают так. На гипотенузе и катетах данного прямоугольного треугольника ACB строим полукруги. По теореме Пифагора $AB^2=AC^2+CB^2$. Используя известную теорему: площади кругов относятся как квадраты их диаметров, получаем

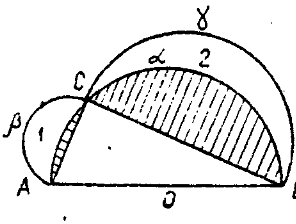


Рис. 60.

$$S_{A\alpha B}=S_{A\beta C}+S_{C\gamma B}.$$

Если теперь от равных отнимем равные (заштрихованные общие сегменты), то от полукруга на AB останется прямоугольный треугольник ACB, а от полукругов на катетах останутся луночки 1 и 2. Следовательно, сумма площадей двух луночек 1 и 2 равна площади треугольника ACB[23]. Эти луночки ал-Хайсама некоторые авторы ошибочно называют «луночками Гиппократа», а некоторые считают этот результат частным случаем первого случая Гиппократа. На самом же деле случай Гиппократа получается из теоремы ал-Хайсама, когда $OC \perp AB$.

В трудах европейских математиков (XVI—XVII вв.)

Европейские математики начиная с XVI—XVII вв. уделяли сравнительно много внимания и квадратуре луночек, получая порой существенно новые, важные результаты. Причем проблема квадратуры луночек выступает теперь как самостоятельная задача, независимая от квадратуры круга. Это, вероятно, можно объяснить тем, что в это время становится актуальной проблема нахождения площадей, ограниченных кривыми линиями и объемов тел, ограниченных различными поверхностями, создаются интеграционные методы. Наряду с другими средствами решения этих задач, математики использовали циркуль и линейку, выясняя их возможность при нахождении площадей криволинейных фигур.

В этот период в число рассматриваемых луночек были включены и некруговые луночки, и так называемые открытые круговые луночки.

Одним из первых европейских ученых, рассматривавших квадрируемые криволинейные фигуры, был Леонардо да Винчи (1452—1519). В XVI в. оригинальные результаты в теории круговых луночек получил Виет. Затем вопросами, связанными с луночками, занимался Лионне (1600—1663), Леотауд (1595—1672), Пардис (1636—1673) и другие малоизвестные ученые в истории математики. В XVII столетии «открытыми» луночками занимались Лейбниц, Чирнгауз, Валлис, Грегори, Лопиталь, Бернулли и др. В XVIII в. в истории квадратуры луночек оставили след своих исследований Гольдбах, Крафт, Д. Бернулли, Крамер и др.

Ленберг в 1754 г. начал изучать квадратуру эллиптических луночек. Особенно заметный вклад в теорию «замкнутых» круговых луночек внесли Уинквист (Валлениус?) и Л. Эйлер, рассмотревшие все пять случаев квадрируемых луночек.

В этом разделе мы остановимся на результатах исследований только некоторых из названных выше ученых.

Метод Виета. Французский математик Виет был одним из первых европейских ученых в разработке новой теории квадрируемых луночек. Он предложил новый метод квадратуры круговых замкнутых луночек. Основные результаты Виета, относящиеся к этой проблеме, содержатся в работе [145], появившейся в 1593 г, хотя при этом он использует теорему о хордах круга, содержащуюся в работе 1591 г. [148]. Эту теорему можно сформулировать так: Если основные хорды круга с центром в O и диаметром $AD=2r$ (рис. 61)

$$AB_0=B_0B_1=B_1B_2=B_2B_3=B_3B_4=\cdots=y_0,$$

а хорды AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, ... обозначим соответственно через y_1, y_2, y_3, y_4, ... и положим, что продолжения этих хорд

$$B_2C_1=y_0,\ B_3C_2=y_1,\quad B_4C_3=y^{24}{}_2,\ \ldots$$

то получим

$$y_0 : y_1 = y_1 : (y_0 + y_2) = y_2 : (y_1 + y_3) = y_3 : (y_2 + y_4) = \cdots \qquad (1)$$

Доказательство основано на свойстве подобных треугольников. Полагая, что основные хорды $AB_0 = B_0B_1 = \cdots = y_0$ известны (выражены через r) и «противохорда» ($B_0D = x$) тоже выражена че-

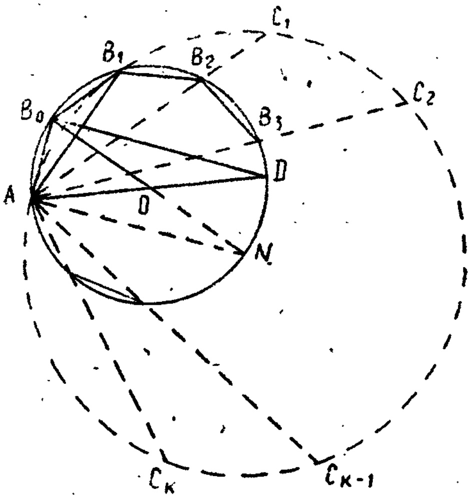


Рис. 61.

рез r, Виет показывает, как $У_к$ (к = 1, 2, 3, ⋯) выражаются через y_0, x и r. $У_1$ он находит из подобия треугольников AB_0B_1 и B_0OD. Так как

$$y_1 : y_0 = x : r, \quad \text{то } y_1 = y_0 \frac{x}{r}.$$

А затем из (1) получаем

$$y_2 = y_0 \frac{x^2 - r^2}{r^2}; \qquad y_3 = y_0 \frac{x^3 - 2r^2x}{r^3}, \ldots \qquad (2)$$

Формулы (2) он использует при построении квадрируемых луночек.

При построении круговых луночек и прямолинейных фигур, равновеликих им, Виет полагает, что центральные углы дуг, образующих луночки, относятся как 2 : 1, 3 : 1, 4 : 1,⋯ Разделив дугу внешней окружности точками $B_к$ на 2, 3, 4, ⋯ равные части, он соединяет точки деления хордами и получает прямолинейную вписанную в круг фигуру, у которой 2, 3, 4,⋯ стороны равны, а одна сторона должна быть затем общей хордой двух дуг, образующих луночку, и отношение ее квадрата с квадратами других сторон должно равняться отношению центральных углов этих дуг.

Построив на этой хорде сегмент, подобный сегментам на других сторонах (хордах), получим его площадь, равную сумме площадей сегментов, хордами которых являются все остальные стороны фигуры. Тогда получается равенство площадей луночки и прямолинейной фигуры, вписанной в круг. Из этого Виет делает вывод — луночка квадрируема (без указания — с помощью каких средств). Он считал, что этот метод построения квадрируемых луночек общий. Вопрос о числе квадрируемых луночек Виет не ставит, но он, по-видимому, полагал, что их бесчисленное множество. В качестве примеров он рассматривает три задачи.

1. Построить квадрируемую луночку с помощью двух кругов, площади которых относятся как 2 : 1.

В этом случае, если радиус первого круга r, то радиус второго $R=r\sqrt{2}$. Отношение квадратов хорд подобных сегментов этих кругов равно отношению квадратов радиусов. Взяв окружность радиуса r он откладывает от точки A отрезки $AC=CB=y_0=r\sqrt{2}$ и соединяет точки A и B. Противохорда $x=BC=r\sqrt{2}$,

$$AB=y_1=r\sqrt{2}\cdot\frac{r\sqrt{2}}{r}=2r.$$

Следовательно, AB — диаметр, угол ACB — прямой, $AB^2:AC^2=2:1$. Если на AB построить сегмент, подобный сегменту на AC или CB, то площадь его будет равна сумме площадей сегментов на AC и CB, и площадь луночки равна площади равнобедренного прямоугольного треугольника ACB. Значит она квадрируема[25].

2. Построить квадрируемую луночку с помощью двух кругов, площади которых относятся как 3 : 1. Следовательно, квадраты радиусов дуг этих кругов, образующих луночку, и их центральные углы должны относиться как 3 : 1. Для построения искомой квадрируемой луночки и прямолинейной фигуры, равновеликой этой луночке, нужно взять окружность радиуса r, разделить часть этой окружности (начиная, например, от какой-то точки A) точками B_k на три равные части и соединить точки A и B_2. При этом хорды

$$AB_0=B_0B_1=B_1B_2=y_0,$$

а хорда $AB_2=y_2$ должна быть общей хордой дуг, образующих луночку, и $y_2^2:y_0^2=3:1$.

Следовательно, задача сводится к построению хорды $AB_0=y_0$, удовлетворяющей этим условиям.

Виет предлагает находить AB_0, выражая через r, как среднее пропорциональное между r и $[r+r(2-\sqrt{3})]$, где $r(2-\sqrt{3})$ есть разность между гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника, второй из катетов которого равен r, а противолежащий ему угол равен 30°, т. е. $AB_0=y_0=r\sqrt{3-\sqrt{3}}$.

Раствором циркуля $r\sqrt{3-\sqrt{3}}$ от точки A отложим последовательно хорды $AB_0=B_0B_1=B_1B_2$ и соединим точки A и B_2 (рис. 62). Хорда

$$AB_2=y_2=y_0\frac{x^2-r^2}{r^2}. \qquad (3)$$

Проводим диаметр AOB. Противохорда

$$B_0B^2=x^2=4r^2-(r\sqrt{3-\sqrt{3}})^2=$$

$$=4r^2-3r^2+r^2\sqrt{3}=r^2(1+\sqrt{3}).$$

Тогда

$$AB_2=y_2=r\sqrt{3-\sqrt{3}}\times$$

$$\times\frac{r^2(1+\sqrt{3-\sqrt{3}-r^2}}{r^2}=r\sqrt{3}\sqrt{3-\sqrt{3}}$$

и $AB^2_2 : AB^2_0=3:1$.

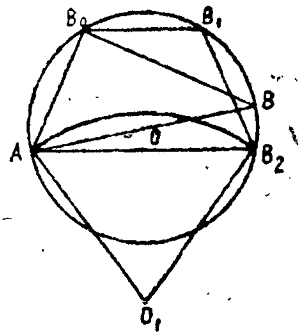


Рис. 62.

Следовательно, если второй круг с радиусом $r\sqrt{3}$ расположить так, чтобы он проходил через точки A и B_2, то сегмент на AB_2 будет подобен сегментам на AB_0, B_0B_1 и B_1B_2, а площадь его будет равна сумме площадей этих трех сегментов. Полученная луночка, равновеликая фигуре $AB_0B_1B_2$, квадрируема.

3. Третья задача у Виета читается так:

из двух кругов, площади которых относятся друг к другу как 4 : 1, образовать квадрируемую луночку.

В этом случае Виет вписывает в круг радиуса r пятиугольник, четыре стороны которого равны между собой: $AB_0=B_0B_1=B_1B_2=B_2B_3$, а пятая $AB_3=2AB_0$. При выражении AB_0 через r ему приходится строить две средние пропорциональные.

Построив эту прямолинейную фигуру и поступая, как и в предыдущих случаях, он получает квадрируемую луночку.

Здесь мы имеем первый пример геометрической реализации луночки, квадрируемой с помощью конических сечений. Ограниченность метода Виета в том, что для построения каждой из трех рассмотренных им луночек и прямолинейных фигур, равновеликих им, он употребляет особый способ.

Правда, ему удалось сквадрировать и луночку $m:n=4:1$, которую никто до этого не квадрировал; можно было бы таким образом сквадрировать и другие луночки, не квадрированные ранее. Но и в этом случае его способ применим только для луночек, для которых $m:n=m:1$. Причем при увеличении m потребовалось бы прибегнуть к помощи алгебраических кривых более высоких порядков[27].

Результаты исследований Виета все же оказали влияние на повышение интереса к этой проблеме у математиков XVII и XVIII столетий и на направление исследований некоторых из них. Здесь намечался уже путь сведения решения этой геометрической задачи к решению алгебраических уравнений.

Квадратура открытых луночек. В XVII в. математики интересовались и замкнутыми круговыми луночками, хотя в этом столетии им не удалось получить принципиально новых результатов для теории этих луночек.

Но в этом столетии в связи с разработкой интеграционных методов и интегрального исчисления внимание математиков было привлечено к так называемым открытым луночкам. Открытыми луночками, или криволинейными треугольниками, они называли площади, ограниченные дугами кривых (в частности, дугами окружностей) и отрезками прямых линий. Теорией этих луночек занимались Кеплер, Лионе, Лейбниц, Чирнгауз, Перкс, Валлис, Грегори, Лопиталь и др. В XVIII в. эти исследования продолжали Гольдбах, Д. Бернулли, Крафт, Эйлер и др. [148; 41 и сл.]. Считают, что первое общее исследование открытых луночек дал Крафт (там же). Не вдаваясь в подробности этих исследований, остановимся только на одном частном случае квадрируемых открытых луночек, чтобы дать некоторое представление об этих луночках и способах их квадратуры.

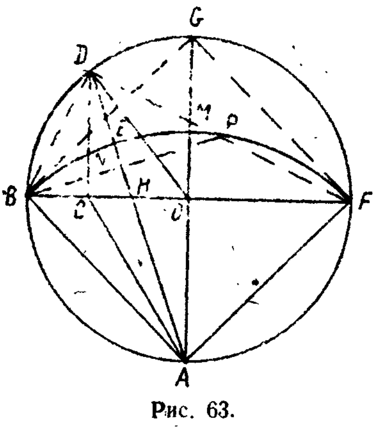


Рис. 63.

Рассмотрим первую луночку Гиппократа Хиосского, т. е. луночку, «внешний обвод» которой — полуокружность (рис. 63). В целом луночка, как известно, квадрируема. *Чирнгауз,* который многое позаимствовал у Лейбница и Лионе, рассматривал открытые луночки BDE и DFE, получающиеся при пересечении луночки прямой DA, где A — центр «внутренней» дуги окружности, а D — произвольная точка на «внешней» дуге луночки, точка E — точка пересечения DA с «внутренней» дугой, точка H — точка пересечения DA с диаметром (общей хордой) BF. Утверждается, что открытая луночка BDE равновелика $\triangle$ ABC, где $CD \perp OB$. Сектор BOD равен сектору BAE, $\angle BOD = 2\angle BAE$, $2BO^2 = BA^2 = AE^2$, $S_{ABO} = S_{ABC} + S_{ACO} = S_{ABC} + S_{ADO}$. Сектор $BOD + S_{\triangle ABO}$ = сектору $BAE + S_{\triangle ADO} + S_{л\cdot BDE}$.

Откуда следует, что

$$S_{л\cdot BDE} = S_{\triangle ABC}, \quad a - S_{л\cdot DFE} = S_{\triangle ACF}.$$

Если точка D совпадает с точкой G, то площадь открытой луночки $BGM = S_{л\cdot FGM} = S_{\triangle BOG} = S_{\triangle FOG}$.

Перкс сквадрировал открытую луночку BDE несколько иначе: соединив точку D с точками B и F и при пересечении DF с дугой BEF, получил точку P. Соединив точки B и P (пунктирные линии), он получил сегменты на BP и BD, которые оказались подобными, и сегмент на BP больше сегмента на BD в два раза, т. е. площадь половины сегмента на BP (BEN) равняется сегменту на BD, тогда $S_{о\cdot л\cdot BDE} = S_{\triangle BDN}$.

Эти исследования были успешно продолжены в XVIII в. В частности, была получена и такая важная теорема: если две окружности C_1 и C_2 с радиусами r_1 и r_2 пересекаются в точках A и B и если P_1 на C_1 и P_2 на C_2, а круговые секторы, соответствующие дугам AP_1 и AP_2, равны между собой, то открытая луночка AP_1P_2 будет квадрируемой[28].

Квадратура некруговых луночек. Некруговые луночки — это плоские фигуры, ограниченные дугами двух каких-либо кривых, пересекающихся в двух точках. Они могут быть выпукло-вогнутые и двояко-выпуклые, алгебраические и трансцендентные, замкнутые и открытые, эллиптические, параболические, гиперболические... и смешанные. Из некруговых луночек математики XVIII столетия большее внимание уделили эллиптическим луночкам, как более «родственным» круговым луночкам. Наиболее заметный вклад в разработку теории квадратуры некруговых луночек, в том числе и эллиптических, внес Г. Крафт. В своей работе «О квадрируемых луночках, образованных дугами различных кривых» (1738 г.) дал два метода квадратуры различных замкнутых и открытых некруговых луночек [131]. Шведский математик Ленберг в 1757 г. опубликовал специальную работу «Об эллиптических квадрируемых луночках», которая в 1759 г. была переведена на немецкий язык [136]. Здесь мы рассмотрим кратко некоторые вопросы теории квадратуры эллиптических луночек. Что же касается параболических луночек, то из теории, разработанной нами на основании теоремы

Архимеда о площади сегмента параболы, следует, что бесконечное множество их квадрируются циркулем и линейкой. Гиперболические же и смешанные луночки в данной книге мы не рассматриваем. Рассмотрим эллиптическую луночку AC_2BDA, образованную пересечением двух эллипсов, расположенных как указано на рис. 64. Их общая хорда AB. Площадь указанной луночки, как видно, равна разности площадей эллиптических сегментов

$$S_{\text{э-л}\cdot AC_2BDA} = S_{\text{сегм}\,AC_2BA} - S_{\text{сегм}\,ADBA}. \tag{4}$$

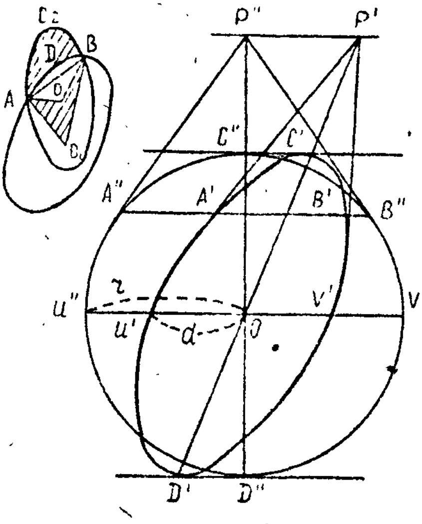


Рис. 64.

Следовательно, задача о квадратуре эллиптической луночки сводится к квадратуре разности сегментов эллипсов. Какие условия должны выполняться, чтобы эта разность квадрировалась циркулем и линейкой?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим эллиптический сегмент $A'C'B'$ (см. рис. 64), как результат афинного преобразования кругового сегмента $A''C''B''$. Эти эллипс и круг имеют общий центр O, одинаковую «высоту», т. е. высшие и низшие точки их, а также точки P'' и P' находятся на параллельных линиях хорде $A''A'B'B''$ и диаметру $U''U'OV'V''$, где диаметр $U'V'$ сопряжен с диаметром $C'D'$. Пусть диаметр круга $U''V'' = 2r$, а диаметр эллипса $U'V' = 2d$. Так как эллипс получается из круга путем афинного преобразования, то

$$U''V'' : U'V' = A''B'' : A'B' = S_{\text{сегм } A''C''B''} : S_{\text{сегм } A'C'B'} = r : d \quad (5).$$

Если $\angle A''OB'' = 2\varphi$, то хорда круга $A''B'' = 2r\sin\varphi$, хорда эллипса

$$A'B' = \frac{d}{r} A''B'' = 2d\sin\varphi. \qquad (6)$$

Сегмент круга

$$A''C''B'' = \frac{r^2}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi) = r^2(\varphi - \cos\varphi \sin\varphi)$$

эллиптический сегмент

$$A'C'B' = \frac{d}{r} \cdot A''C''B'' = dr(\varphi - \cos\varphi \sin\varphi) \qquad (7)$$

(C — произвольная точка на прямой, параллельной AB, если P′ остается на одной «высоте» с P″).

Возвращаясь к эллиптической луночке AC_2BDA, площадь которой равна разности площадей двух эллиптических сегментов, заметим, что эта площадь может быть найдена, если нам известны r_1, d_1, φ_1 и r_2, d_2, φ_2 для данных эллипсов. Площадь указанной луночки в этом случае будет

$$S_{\text{э.л}\cdot AC_2BDA} = r_2 d_2(\varphi_2 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_2) - r_1 d_1(\varphi_1 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_1) \qquad (8)$$

При этом выполняется равенство $AB = 2d_1 \sin\varphi_1 = 2d_2 \sin\varphi_2$. Но чтобы эллиптическая луночка (4) была квадрируема циркулем и линейкой, нужно, чтобы площадь ее ($S_{\text{э.л.}}$) выражалась или рациональным числом или через квадратичные иррациональности. А для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$r_1 d_1 \varphi_1 = r_2 d_2 \varphi_2,$$

т. е. должны быть равны эллиптические секторы.

$$S_{\text{сект } AC_2BQ_1A} = S_{\text{сект } ADBO_2A}.$$

Тогда

$$S_{\text{э.л}} = S_{\text{фиг } AO_1BO_2A} \qquad (9)$$

Если потребовать, чтобы отношение двух центральных углов $\varphi_1 = m\omega$ и $\varphi_2 = n\omega$ было отношением целых чисел, то из предыдущего имеем

$$\left.\begin{aligned} d_1 : d_2 &= \sin n\omega : \sin m\omega = \frac{1}{\sin\varphi_1} : \frac{1}{\sin\varphi_2} \\ r_1 : r_2 &= n \sin m\omega : m \sin n\omega = \frac{\sin\varphi_1}{\varphi_1} : \frac{\sin\varphi_2}{\varphi_2} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Следовательно, если даны углы φ_1 и φ_2, меньшие π, отношение которых выражается рациональным числом, то можно определить отношения $r_1 : r_2$ и $d_1 : d_2$. Если же дана и общая хорда двух эллипсов, то можно определить d_1 и d_2. Рассмотрим в качестве примера эллиптическую луночку, внешняя дуга которой является полуокружностью. Пусть $\varphi_1=30°$, $\varphi_2=90°$, $d_1=4$, $d_2=2$, $r_1=3$, $r_2=2$, $d_1 : d_2=4:2=2:1$; $r_1 : r_2=3:2$. Площадь луночки

$$S_{э\cdot л}=2\cdot 2\cdot \frac{\pi}{2}-3\cdot 4\cdot \left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3},$$

т. е. луночка квадрируема циркулем и линейкой.

Пять случаев квадратуры круговых замкнутых луночек. Математики XVIII в. внесли заметный вклад в теорию эллиптических и открытых круговых луночек. Но наиболее существенным вкладом следует все же считать их результаты в области теории замкнутых круговых луночек: они впервые рассмотрели все пять случаев квадрируемых луночек и высказали предположение о том, что кроме этих случаев больше нет круговых квадрируемых луночек и что число случаев квадрируемых луночек можно увеличить, применяя при этом кроме циркуля и линейки другие средства. Остановимся кратко на некоторых из этих результатов.

Даниил Бернулли (1700—1782) занялся разработкой метода построения луночек, равновеликих прямолинейным фигурам, вероятно, в связи с обращением Гольдбаха к его брату Николаю с просьбой найти способ квадрирования как можно большего числа луночек.

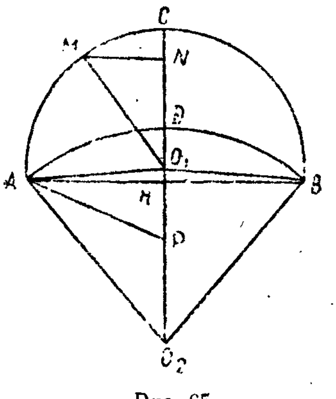


Рис. 65.

В работе «Математические этюды» [108] Д. Бернулли рассматривал и замкнутые и открытые луночки. В основу своих исследований он положил лемму: Луночка ACBADA будет квадрируемой, если площадь сектора $ACBO_1A$ равна площади сектора AO_2BDA (рис. 65). Это условие Д. Бернулли считал не только необходимым, но и достаточным для квадрируемости луночки. При этом условии указанная луночка равновелика четырехугольнику AO_1BO_2. И поэтому эту луночку Бернулли считал квадрируемой. Он предложил способ построения квадрируемой луночки, когда дана хорда дуги основной окружности ($AB=a$). Если предположить, что луночка и равновеликая ей прямолинейная фигура построены и если проведем $O_1M \parallel AO_2$, то точка M разделит дугу AC так, что

$$AC : MC = \angle AO_1C : \angle MO_1C = AO^2_2 : MO^2_1 = AH^2 : MN^2.$$

Если теперь дана окружность с радиусом $AO_1 = r$ и полухорда AH, то можно найти NO_1 и построить MN, где точка M и будет делить дугу AC в указанном выше отношении.

Действительно, пусть $CN = x$, тогда $NO_1 = r - x$. Если взять отношение $m : n = 2 : 1, 3 : 1, 4 : 1, \cdots$, то

$$AH^2 : MN^2 = 2 : 1, 3 : 1, \cdots \text{ и } AH^2 = 2MN^2, 3MN^2, \cdots$$

Пусть $MN^2 = \frac{1}{2} AH^2$. Из $\triangle MNO_1$ следует

$$MN^2 + (r-x)^2 = r^2 \quad \text{или} \quad x^2 - 2rx + \frac{1}{2} AH^2 = 0.$$

Отсюда находим $x = CN$, выраженный через известные r и AH. Тем самым определятся точки N и M. Соединив точки M и O_1 и проведя $AO_2 \parallel MO_1$, находим центр и радиус другой окружности, дуга которой ADB вместе с дугой ACB образует искомую луночку, а четырехугольник AO_1BO_2 будет равновеликий луночке.

Лемма Д. Бернулли стала в дальнейшем исходным пунктом в исследованиях проблемы квадрируемых луночек многих математиков.

Женевский математик Г. Крамер опубликовал в Mem. Ac. Berl. (1750) работу, посвященную квадратуре круговых луночек. Вилейтнер [24; 356] утверждает, что Крамер «установил общее уравнение для таких луночек и привел уравнения, получающиеся отсюда для простейших частных случаев. Уравнения эти, однако, оказались настолько сложными, что он смог найти лишь три луночки, бывшие известными уже Гиппократу».

Важным событием в истории квадратуры луночек является *получение всех пяти замкнутых круговых луночек,* квадрируемых циркулем и линейкой.

Известные нам факты из истории луночек говорят о том, что впервые все пять квадрируемых круговых луночек рассмотрел финский математик из Выборга Уинквист (Wjinquist) в своей «Диссертации» [149]. Положительную оценку этой диссертации в то время дал М. Валлениус[29]. Вообще эта диссертация, по-видимому, была известна немногим математикам второй половины XVIII в., а затем о ней и совсем забыли. Это видно из того, что Клаузен в своей статье о квадратуре луночек в 1840 г. утверждал, что из пяти случаев квадратуры круговых луночек один был известен Гиппократу Хиосскому, а четыре случая впервые нашел он (Клаузен). Да и в наше время авторы книг и статей, в которых идет речь о квадрируемых луночках, обычно утверждают, что три случая квадрируемых луночек установил Гиппократ Хиосский, а два последние, т. е. $m:n=5:1$, $5:3$, нашел Клаузен. Ошибочность этого утверждения очевидна, ибо в «Диссертации» Уинквиста и в одном из мемуаров Эйлера 1771 (1772) г., о котором говорится ниже, рассматриваются все пять случаев квадрируемых луночек.

Уинквист в своей статье утверждает, что в работах предшественников он встречал только два случая квадрируемых луночек, т. е. $m:n=2:1$, и $3:1$, а три случая ($m:n=3:2$, $5:1$, $5:3$) он нашел сам. Но это утверждение, как известно, тоже неточно.

Каков же путь рассуждений Уинквиста при получении этих пяти и других луночек? Он, так же как и его предшественники, еще тесно связан с геометрией, хотя и сводит задачу к решению алгебраических уравнений, получаемых из геометрических соображений отдельно для каждого случая.

Он считал, что сектора, соответствующие дугам, образующим луночку, равны между собой и что квадрируемая луночка ACBD (рис. 66) равновелика четырехугольнику AO_1BO_2. Если радиус круга $AO_1=r_1$ известен и дано отношение между центральными углами секторов, например, $\angle AO_1B:\angle AO_2B=m:n$, то задача сводится к отысканию отрезка O_1O_2 и к построению треугольника AO_1O_2 или четырехугольника AO_1BO_2 по трем сторонам. Ему необходимо при этом выразить $\angle O_1AO_2$ через $\angle AO_2O_1$. Он показывает, что $\angle O_1AO_2:\angle AO_2O_1=(m-n):n$. Переходя далее к рассмотрению частных случаев, он берет

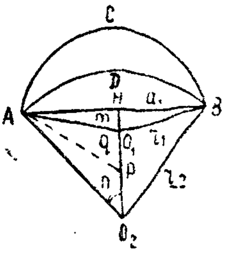


Рис. 66.

$$m:n=2:1,\ 3:1,\ 3:2,\ 4:1,\ 5:1,\ 5:3,\ 4:3,\ 5:2.$$

В первом случае, очевидно, $\frac{m-n}{n}=\frac{2-1}{1}=1$, O_1 совпадает с H, $AO_1=O_1O_2=r_1$, $AO_2=r_1\sqrt{2}$, треугольник AO_2B легко строится. Из точки O_2, как из центра, радиусом $AO_2=r_1\sqrt{2}$ описывается дуга окружности ADB. Луночка ACBD равновелика треугольнику AO_2B. Следовательно, она квадрируема.

В следующих случаях нахождение O_1O_2 требует несколько более сложных рассуждений, но принцип единый.

Рассмотрим второй случай, т. е. $m:n=3:1$. В этом случае $\angle O_1AO_2=\frac{3-1}{1}\angle AO_2O_1$. Разделим $\angle O_1AO_2$ пополам прямой AP (см. рис. 66). Тогда, так как AP биссектриса угла O_1AO_2, то

$$AO_2:O_2P=AO_1:O_1P. \qquad (11)$$

На основании свойства пропорции

$$(AO_2+AO_1):(O_1P+O_2P)=AO_1:O_1P. \qquad (12)$$

Из подобия треугольников O_1AO_2 и O_1AP следует

$$AO_1:O_1P=O_1O_2:AO_1. \qquad (13)$$

Так как $O_1P+PO_2=O_1O_2$, то

$$(AO_2+AO_1):O_1O_2=O_1O_2:AO_1; \qquad (14)$$

$$O_1O^2_2=AO_1\cdot(AO_2+AO_1)=AO^2_1+AO_1AO_2. \qquad (15)$$

Воспользовавшись для этого случая равенством $AO^2_2:AO^2_1=$ $=3:1$ или $AO_2=\sqrt{3}$, $AO_1=\sqrt{3}\,r_1$ и подставив в (5), получим

$$O_1O^2_2=r^2_1+\sqrt{3}\,r_1\cdot r_1=r^2_1(1+\sqrt{3}),$$

$$O_1O_2=r_1\sqrt{1+\sqrt{3}}.$$

Мы имеем теперь три стороны, выраженные через известную величину r_1. Построив треугольник AO_1O_2 и четырехугольник AO_1BO_2, определим точку O_2, из которой радиусом $O_2A=\sqrt{3}r_1$ опишем дугу ADB и получим луночку ACBD, равновеликую этому четырехугольнику. И, следовательно, луночка квадрируема.

Если же $m:n=3:2$, то $\angle O_1AO_2=\frac{3-2}{2}\angle AO_2O_1$. По аналогии с предыдущим $(AO_2+O_1O_2):AO_1=AO_1:O_1O_2$. Так как $AO_1=r_1$, то из $AO_1:AO_2=\sqrt{2}:\sqrt{3}$ находим $AO_2=\sqrt{\frac{3}{2}}r_1$.

$O_1O_2=x$ находим из $AO^2_1=O_1O_2(AO_2+O_1O_2)$, т. е. из квадратного уравнения $x^2+\sqrt{\frac{3}{2}}r_1x-r^2_1=0$. Найдя отсюда $x=O_1O_2$, строим треугольник AO_1O_2 по трем сторонам и четырехугольник

AO_1BO_2, равновеликий луночке, ограниченной дугами окружностей с центрами в точках O_1 и O_2 и с радиусами r_1 и $\sqrt{\frac{3}{2}}r_1$.

Аналогичным образом он рассмотрел случаи $m:n=5:1$ и $5:3$ и получил тоже квадратные уравнения для определения O_1O_2. Рассматривая случаи $m:n=4:1$ и $4:3$, он получил для определения O_1O_2 кубические неприводимые уравнения, в случае $m:n=5:2$ получается уравнение четвертой степени, а при $m:n=6:1$ — уравнение пятой степени[30]. Последние уравнения он не смог свести к квадратным уравнениям, и луночки, соответствующие им, он не считал квадрируемыми.

Так были рассмотрены впервые все пять случаев квадрируемых луночек.

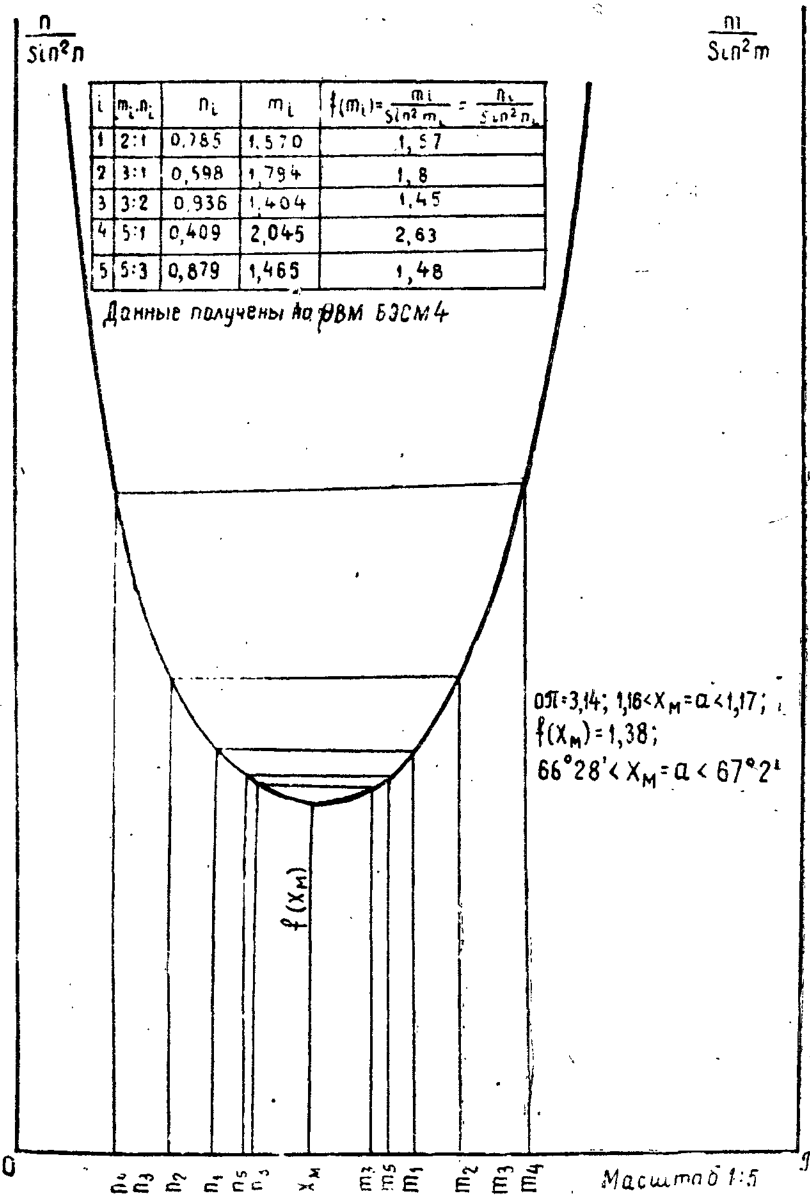
Как видно, некоторые из указанных математиков XVIII в. начинали понимать, что вопрос о квадрируемости круговых луночек упирается в решение алгебраических уравнений.

Но наибольшая ясность в этом вопросе в то время была у *Л. Эйлера*. Он первый и эту проблему перевел в разряд *аналитических*. На основании леммы Д. Бернулли о равенстве секторов дуг, ограничивающих квадрируемую луночку, Эйлер получил уравнение

$$\frac{m}{\sin^2 m}=\frac{n}{\sin^2 n}, \qquad (16)$$

где $2m$ и $2n$ — центральные углы дуг, от которого он и отправляется при определении квадрируемости луночек.

В мемуаре 1771 (1772) г. [112] Эйлер уже совсем не обращается к чертежам, а исследует функцию $f(m)=\frac{m}{\sin^2 m}$, которая в пределах от 0 до a и от a до π меняется монотонно от ∞ до $\frac{a}{\sin^2 a}$ и от $\frac{a}{\sin^2 a}$ до ∞. Мы будем рассматривать функцию $f(x)=\frac{x}{\sin^2 x}$ и построим для наглядности ее график (рис. 67) (у Эйлера его нет). Эта функция, очевидно, имеет минимум при $x=a=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, т. е. при $x=a=66°\,46'\,54''$. Если теперь значения $x\leqslant a$ будем обозначать через n, а значения $x\geqslant a$ — через m, то получим бесчисленное множество ординат



i	$m_i:n_i$	n_i	m_i	$f(m_i)=\frac{m_i}{\sin^2 m_i}=\frac{n_i}{\sin^2 n_i}$
1	2:1	0,785	1,570	1,57
2	3:1	0,598	1,794	1,8
3	3:2	0,936	1,404	1,45
4	5:1	0,409	2,045	2,63
5	5:3	0,879	1,465	1,48

Рис. 67.

$\frac{n_к}{\sin^2 n_к}$ и $\frac{m_к}{\sin^2 m_к}$, которые равны между собой, т. е. для них

выполняется условие [1]. Среди значений $n_к$ и $m_к$ есть и такие, которым соответствуют луночки, квадрируемые циркулем и линейкой $\left(\text{например, при } n = \frac{\pi}{4} \text{ и при } m = \frac{\pi}{2}\right)$, есть такие, которые квадрируются с помощью конических сечений, и другие[31].

Следовательно, условие (16) достаточное, чтобы луночка была квадрируема циркулем и линейкой только при дополнительных ограничениях, наложенных на n и m.

Для математиков XVIII в. были не ясны еще вопросы: какие ограничения нужно наложить на n и m, чтобы луночки были квадрируемы циркулем и линейкой, и каково количество этих луночек. Но они шли все же по правильному пути, отыскивая квадрируемые луночки среди тех, для которых n и m целые числа или для которых m : n — рациональная дробь.

Эйлер и некоторые другие математики XVIII в. убедились, что и эти ограничения для m и n недостаточны, чтобы получились луночки, квадрируемые циркулем и линейкой. Эйлер знал уже, что только та луночка квадрируема, для которой алгебраическое уравнение, полученное из (16), сводится к квадратному уравнению. Но для него не было ясно: какие же уравнения высших степеней сводятся, а какие не сводятся к квадратным уравнениям. Поэтому в то время ограничивались только небольшими числовыми значениями m и n — уравнениями невысоких степеней, для которых сравнительно просто решался вопрос о сводимости уравнения.

Но чтобы перейти от уравнения (16) к алгебраическим уравнениям, Эйлер поступал следующим образом. Положив $m = \frac{1}{2}\nu\omega$ и $n = \frac{1}{2}\nu\omega$, он получает $\frac{\mu}{\sin^2\frac{\mu\omega}{2}} = \frac{\nu}{\sin^2\frac{\nu\omega}{2}}$.

или

$$\frac{\mu}{\frac{1-\cos\mu\omega}{2}} = \frac{\nu}{\frac{1-\cos\nu\omega}{2}},$$

т. е.

$$\mu(1-\cos\nu\omega) = \nu(1-\cos\mu\omega) \qquad (17)$$

или

$$\mu-\nu=\mu\cos\nu\omega-\nu\cos\mu\omega\ . \qquad (18)$$

Это и есть общее уравнение квадратуры луночек Эйлера, из которого получаются все пять случаев квадрируемых луночек при соответствующих значениях μ и ν. Чтобы перейти к чисто алгебраической форме уравнений (17) (при различных μ и ν), Эйлер выражает косинусы кратных углов через косинусы простых углов и вводит обозначения:

$$\cos\omega=z;\ \cos2\omega=\cos^2\omega-\sin^2\omega=$$

$$=2\cos^2\omega-1=2z^2-1;$$

$$\cos3\omega=\cos(2\omega+\omega)=4z^3-3z;\ \cos4\omega=8z^4-8z^2+1;$$

$$\cos5\omega=16z^5-20z^3+5z;$$

$$\cos6\omega=32z^6-48z^4-18z^2-1.$$

. . . .

Затем он рассматривает ряд конкретных случаев.

I. Пусть $\nu=1$ и $\mu=2$, тогда $n=\frac{1}{2}\ \omega, m=\omega$. Используя (18), получаем: $1=2z-2z^2+1$ или $z^2-z=z(z-1)=0$, откуда $z_1=0$ и $z_2=1$. При $z_1=\cos\omega=0$ имеем $\omega=90°$, но $\omega=2n$, следовательно, $n=45°$, $m=\frac{1}{2}\cdot2\omega=90°$. Подставив полученные и заданные величины в (18) и в (16), мы видим, что уравнение (16) обращается в тождество и $m:n=\mu:\nu=2:1$. Следовательно, это и есть первый случай квадрируемой луночки $(n:m=1:2)$. Второй корень $z_2=1$ Эйлер не рассматривает, так как случай $z_2=\cos\omega=1$ дает $\omega=0$, $n=\frac{\omega}{2}=0$, $m=\frac{1}{2}\cdot2\omega=0$, т. е. луночки в этом случае не существует.

II. Пусть теперь $\nu=1$, $\mu=3$. Тогда $m=\frac{3}{2}\ \omega$, $n=\frac{1}{2}\ \omega$ и из (18) следует $3-1=3\cos\omega-\cos3\omega$. Заменяя $\cos\omega$ через z, $\cos3\omega$ через $4z^3-3z$, получим уравнение $2z^3-3z+1=(1-z)\cdot(1-2z-2z^2)=0$ или $2z^2+2z-1=0$; откуда $z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}=$

$=\cos\omega$. Корень $z_3=1$, как было указано выше, не соответствует никакой луночке, $z_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ тоже не имеет геометрического смысла, так как не может быть $z_2=\cos\omega=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ меньше -1. Следовательно, остается только $z_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\cos\omega$. Найдя отсюда ω и зная, что в этом случае $m=\frac{3}{2}\omega$, $n=\frac{1}{2}\omega$, мы найдем m и n, для которых справедливо $n:m=1:3$ и выполняется условие (16). Следовательно, соответствующая луночка квадрируема (2-й случай Гиппократа).

III. Положим $\nu=2$, $\mu=3$. В этом случае $m=3\omega$ и $n=\omega$ уравнение (18, *б*) после соответствующих подстановок $1=6z^2-4-8z^3+6z$ или $8z^3-6z^2-6z+4=2(1-z)(2-z-4z^2)=0$. Корень $z_1=1$ не рассматривается, корни уравнения $4z^2+z-2=0$ $z_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}=\cos\omega$. В этом случае корни уравнения строятся циркулем и линейкой. Следовательно, можно построить $\cos\omega$, ω, m и n, причем эти m и n удовлетворяют уравнению (16) и отношение их рациональное число. Таким образом, при $\nu=2$ и $\mu=3$ луночка квадрируема.

IV. Если же $\nu=1$ и $\mu=4$, то $m=2\omega$, $n=\frac{1}{2}\omega$. Соответствующее уравнение

$3=4z-8z^4+8z^2-1$ или $2z^4-2z^2-z-1=(1-z)(1-2z^2-2z^3)=0$. Но $z_1=1$ не дает луночки, а уравнение $2z^3+2z^2-1=0$ неприводимое. Следовательно, при $\nu=1$ и $\mu=4$ нет квадрируемой луночки.

V. $\nu=3$, $\mu=4$; $m=2\omega$ и $n=\frac{3}{2}\omega$. После соответствующих подстановок и преобразований приходим к неприводимому уравнению $6z^3+2z^2-4z-1=0$, т. е. в этом случае нет квадрируемой луночки.

VI. $\nu=1$ и $\mu=5$. В этом случае уравнение (18) будет $4=5z-16z^5+20z^3-5z$ или $4z^5-5z^3+1=0$, разделив его на $1-z$, получим $\left(2z^2+z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$ или $2z^2+z-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$,

$$2z^2+z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}=0.$$

Откуда

$$0<z_1=\cos\omega=\frac{\sqrt{5+4\sqrt{5}}-1}{4}<1.$$

Следовательно, в этом случае луночка будет квадрируемой.

VII. При $\nu=2$ и $\mu=5$, $n=\omega$, $m=\frac{5}{2}\omega$ задача сводится к решению уравнения $16z^4+16z^3-4z^2-9z-4=0$, которое не сводится к квадратным уравнениям, корни его не могут быть построены циркулем и линейкой. В этом случае луночка не квадрируема.

VIII. Если $\nu=3$ и $\mu=5$, то $m=\frac{5}{2}\omega$, $n=\frac{3}{2}\omega$. Соответствующее уравнение $2=80z^3-30z-48z^5$. После деления на $1-z$ имеем $1+16z+16z^2-24z^3-24z^4=(1+8z+6z^2)^2-60(z+z^2)^2=0$ или $6z^2+8z+1=\pm\sqrt{60}z^2\pm\sqrt{60}z$; отсюда при z_1

$$0<z_1=\cos\omega=\frac{\sqrt{15}-4-\sqrt{25-6\sqrt{15}}}{6-2\sqrt{15}}$$

случай благоприятный — луночка квадрируема.

IX. $\nu=4$, $\mu=5$. Уравнение $16z^4+6z^3-14z^2-4z+1=0$ луночка не квадрируема.

Таким образом, Эйлер рассмотрел 9 различных луночек[32] и показал, что пять из них квадрируемы циркулем и линейкой, а четыре — не квадрируемы. Правда, Эйлер не мог еще ответить на вопрос: есть ли квадрируемые луночки, кроме рассмотренных им пяти случаев? Но он предполагал, что если квадрировать циркулем и линейкой, то их больше нет и утверждал, что число квадрируемых луночек может быть увеличено, если пользоваться при этом не только циркулем и линейкой.

Таков вклад математиков в теорию квадратуры луночек в эпоху до конца XVIII в. При этом, как видно, главная заслуга в сведении этой проблемы к исследованию корней алгебраических уравнений и в рассмотрении с этой точки зрения пяти случаев квадрируемых луночек принадлежит Л. Эйлеру, работы которого, посвященные этому вопросу, были опубликованы в изданиях Петербургской Академии наук. Правильность предположений Эйлера доказали только советские математики.

[1] Ал-Каши еще в начале XV в. другим способом получил для π 17 верных знаков (см. стр. 72—73).

В Европе [1] был получен из разложения arctgx в ряд только во второй половине XVII в.

Рекомендуется:

а) получить формулы Ариабхатты и Брахмагупты;

б) получить ряд (1) современными методами.

[2] Ряд произведений Архимеда («Книга Лемм», «Книга о построении круга, разделенного на семь равных частей», «Книга о касающихся кругах» и др.) и ряд книг «Конических сечений» Аполлония, сочинений Птолемея и Диофанта дошли до нас только в переводах на арабский язык.

[3] Рекомендуется:

а) установить, какое из этих значений более точно выражает число π.

б) сравнить их с $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ и с $\sqrt[3]{31}$.

[4] Рекомендуется:

а) показать, как эти формулы можно получить;

б) проверить, верны ли эти формулы.

[5] Рекомендуется установить величины ошибок при вычислении дуг $X=\frac{\pi}{4}$ и $X=\frac{\pi}{6}$ методом Н. Кузанского.

[6] Используя это указание Кеплера, показать, что а) длина эллипса с полуосями $a=4$, $b=3$ будет близка к среднему арифметическому двух окружностей с радиусами $r_1=3$ и $r_2=4$;

б) какими должны быть $a=r_1$, $b=r_2$, чтобы среднее арифметическое площадей кругов отличалось от площади эллипса не более чем на 0,1.

[7] $n!=1, 2, 3, \ldots, n$, $n!!$ — означает произведение натуральных чисел, не превосходящих n и одной с ним четности.

[8] Сравнительно недавно советские математики А. М. и И. М. Ягпом получили формулу Валлиса элементарным способом (см. гл. IV). Предлагается определить, сколько сомножителей нужно взять в формуле Валлиса, чтобы получить $\pi=3,14$.

[9] Предлагается доказать сходимость этого ряда и указать, сколько следует взять членов ряда, чтобы получить $\pi=3,14$.

[10] Получить эти формулы.

[11] Непрерывной или цепной дробью называется дробь вида

$$x=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{1}{q_4+\ldots}}},$$

где через x обозначено рациональное или иррациональное число, q_1 — наибольшее целое в нем, т. е. $q_1\leqslant x<q_1+1$. При x положительном и не равном q_1 можно положить $x=q_1+\frac{1}{x_1}$, где $\frac{1}{x_1}<1$ или $x_1>1$, $x_1=q_1+\frac{1}{x_2}$ $x_2>1$ и т. д. Непрерывная дробь, записанная в виде несократимой дроби $\frac{P_к}{Q_к}$ $(к<n)$, называется подходящей дробью порядка к.

[12] Фигурирующая здесь гамма-функция, введенная Эйлером, определяется формулой $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty s^{x-1}e^{-s}ds$. Если $x=n$ — целое положительное число, то $\Gamma(n) = (n-1)!$. Основные соотношения для нее:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); \quad \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

[13] Элементарный вывод этой формулы дан в статье [106] (см. гл. IV этой книги).

[14] Предлагается проверить эти утверждения.

[15] Рекомендуется рассмотреть этот способ и построить прибор для решения задачи об удвоении куба, используя описание его бану Муса.

[16] Рекомендуется доказать справедливость этого равенства.

[17] См. стр. 50, где дается пример решения этой задачи Архимедом с помощью вставки.

[18] Рекомендуется:

а) познакомиться с указанными трудами [1, 6, 103];

б) попытаться самостоятельно восстановить опущенные доказательства указанных способов трисекции угла.

[19] Рекомендуется:

а) при данной стороне a построить правильные многоугольники с числом сторон $n=5, 7, 9$;

б) установить величину ошибки при построении 7-угольника способом Абу-л-Вафа.

[20] Рекомендуется:

а) найти корни уравнения, полученного Декартом;

б) по приведенным данным построить гиперболу, получить уравнения гиперболы и окружности, с помощью которых Клеро осуществил трисекцию угла, найти координаты точек пересечения их и сравнить с утверждением Клеро.

[21] Рекомендуется построить $x=\sqrt[3]{2}$ с помощью Декартова листа $x^3+y^3-3axy=0$ и с помощью трезубца Ньютона $xy=x^3+1$.

[22] Рекомендуется:

а) установить величину ошибки при вычислении a_9 способом Дюрера;

б) построить a_7 как корень уравнения Феррари с помощью прямоугольников;

в) найти формулу для вычисления корней уравнения $x^n-1=0$ при любых целых положительных n.

[23] Рекомендуется:

а) выяснить, возможно ли сквадрировать каждую из двух луночек отдельно;

б) показать, как будет меняться площадь прямолинейной фигуры, равновеликой сумме луночек 1 и 2, если передвигать точку C по окружности ACB, и будет ли эта величина (площадь) иметь минимум и максимум.

[24] Рекомендуется показать, что точки C_k лежат на окружности с центром в точке N.

[25] Рекомендуется по данному описанию восстановить чертеж.

[26] AB_0 можно выразить через радиус круга и таким способом: из $AB_2^2 : AB_0^2 = 3:1$ следует $AB_2^2 = 3AB_0^2$. По теореме Птолемея

$$AB_1^2 = AB_0^2 + AB_0AB_2 = AB_0\sqrt{1+\sqrt{3}}, \quad BB_0 = r\sqrt{1+\sqrt{3}}$$

Но из (2) следует $AB_1 = y_1 = AB_0 \cdot \frac{BB_0}{r} = AB_0 \sqrt{1 + \sqrt{3}}, BB_0 = r\sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

Из $\triangle AB_0B$ получим

$$AB_0 = \sqrt{4r^2 - r^2(1 + \sqrt{3})} = r\sqrt{3 - \sqrt{3}} \text{ и } AB_2 = \sqrt{3}\, r \sqrt{1 - \sqrt{3}}.$$

[27] Предлагается методом Виеты сквадрировать луночки $m : n = 5 : 1$ и $6 : 1$.

[28] Подробнее теория открытых луночек изложена в работе [148] и в IV главе данной книги.

Рекомендуется доказать самостоятельно эту теорему.

[29] Мы не имели возможности познакомиться с этой «Диссертацией». Вопрос о ее авторе, судя по утверждению Вилейтнера [24] и Гофмана [148], не совсем ясен. Но мы будем считать, что автор ее Уинквист.

[30] Рекомендуется построить прямолинейные фигуры, равновеликие этим луночкам, методом Уинквиста.

[31] Рекомендуется:

а) доказать, что функция $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ достигает минимума при $x = m = n = a = 66°46'54''$. Найти $f(a)$ и показать, что $a \neq \frac{m+n}{2}$;

б) найти значения n при $m = 30, 60, 135°$ и установить, будет ли при этом выполняться (1) и будут ли луночки квадрируемы циркулем и линейкой;

в) найти n и m при $\operatorname{tg} m = \sqrt{2}$. Будет ли эта луночка квадрируема;

г) будет ли квадрируемой луночка при $n = 90°$ и $m = 30°$ $(n : m = 3 : 1)$;

д) при каких значениях m и n луночки будут алгебраические.

[32] Рекомендуется:

а) построить луночки, рассмотренные Эйлером, и равновеликие им прямолинейные фигуры. (Сам Эйлер не строил эти луночки);

б) получить общее алгебраическое уравнение квадратуры круговых замкнутых луночек, продолжая подобно Эйлеру выражать $\cos n\mu$ через косинусы простых углов и заменяя $\cos\mu$ через z.

в) указать способы, позволяющие вычислять площади луночек, алгебраических и трансцендентных;

г) сформулировать необходимое и достаточное условие квадратуры алгебраических круговых замкнутых луночек: 1) циркулем и линейкой, 2) с помощью других средств.

К. Гаусс

Ш. Эрмит

Ф. Линдеман

Глава III

ДОЛГОЖДАННЫЕ РЕШЕНИЯ ЧЕТЫРЕХ ЗАДАЧ. ДАЛЬНЕЙШАЯ СУДЬБА ЗНАМЕНИТЫХ ЗАДАЧ ДРЕВНОСТИ

Из предыдущих глав видно, как в течение свыше двух тысяч лет шла атака на знаменитые задачи древности. За это время на дальних и ближних подступах к этим задачам-крепостям было получено много ценных результатов для математики. Но в эти первые три периода наступления на указанные задачи оставался открытым вопрос: возможно ли решение этих пяти конструктивных задач в общих случаях циркулем и линейкой?

В дальнейшем стало ясно, что для покорения этих задач-крепостей нужно было более мощное оружие в виде новых разделов алгебры, теории чисел и математического анализа. В конце XVIII и в XIX столетиях это оружие появилось; с его помощью и началось покорение одной крепости за другой. Так в XIX в. были покорены четыре крепости из пяти, не сдалась в этом столетии только проблема квадратуры луночек. Это и была самая характерная черта следующего, четвертого, периода в истории знаменитых задач древности. В создании необходимых условий для окончательного штурма этих крепостей большую роль сыграли Ламберт, Лежандр, Лиувилль, Кантор и Эрмит. Непосредственными же покорителями четырех крепостей были Гаусс, Ванцель и Линдеман.

Но история знаменитых задач древности на этом не оборвалась. После решения задач деления окружности на равные части, трисекции угла, удвоения куба и квадратуры круга возникли следующие вопросы, связанные с этими задачами: упрощение полученных решений (доказательств), отыскание новых точных и приближенных способов решений, решение проблемы квадратуры круговых замкнутых луночек с помощью циркуля и линейки и конических сечений, создание теории квадратуры некруговых и открытых луночек, обобщения некоторых из этих задач, перенос знаменитых задач в неевклидовы геометрии, создание научной истории их и др. В этих направлениях проводились исследования в XIX и XX столетиях, что и явилось характерной чертой пятого, современного периода истории знаменитых задач древности.

В решении указанных вопросов приняли участие Вейерштрасс, Гильберт, Гурвиц, А. А. Марков, Н. Г. Чеботарев, А. В. Дороднов, Д. Д. Мордухай-Болтовской, Н. М. Несторович, А. С. Смогоржевский и др. В этот период ведущую роль стали играть советские, в том числе ростовские, математики, характеристике результатов работ которых посвящена значительная часть четвертой главы этой книги: «Знаменитые задачи древности в нашей стране».

Иррациональность чисел e и π

Первый, принципиально новый шаг в решении задачи о квадратуре круга был сделан во второй половине XVIII в. Ламбертом и Лежандром, доказавшими иррациональность чисел e и π.

По мере расширения аналитических средств для выражения и вычисления π математики все чаще задумывались над природой числа π. Сравнивая, например, представления рациональных и иррациональных чисел и числа π в виде десятичных дробей, они замечали, что рациональные дроби всегда представляются конечным числом десятичных знаков (за исключением периодических), в то время как известные иррациональные числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \cdots$ и число π выражаются неограниченным числом десятичных знаков. То же явление наблюдалось и при выражении этих чисел в виде непрерывных дробей. Отсюда, в частности, математики XVIII в. сделали вывод, что число π по своей природе скорее относится к иррациональным числам. Правда, у них не было в этом еще полной уверенности, так как в то время не было доказано, что число десятичных знаков этих чисел не может оборваться на каком-то n-м десятичном знаке, где n достаточно большое. О числах вида $\sqrt[n]{D}$, где D—целое положительное число, не являющееся n-й степенью целого числа, было доказано уже, что не может быть равенства $\sqrt[n]{D}=\frac{p}{q}$, где p и q—целые числа. Надо было доказать, что число π не может быть выражено в виде дроби $\frac{p}{q}$, если p и q целые числа. Эта задача оказалась более трудной, чем доказательство невозможности равенства $\sqrt[n]{D}=\frac{p}{q}$. Но поскольку предполагалось, что выяснение природы числа π прольет свет на трудности, связанные с решением задач о квадратуре круга, о спрямлении окружности и других задач, то эта проблема во второй половине XVIII в. стала актуальной. К этому же времени и число e стало играть большую роль в математике. После получения Эйлером формул

$$e^{\pm ix}=\cos x \pm i \sin x,$$

после установления связи между e и π в виде формулы $e^{i\pi}=-1$ и после разложения π и e в непрерывные дроби встал вопрос и о выяснении природы числа e.

Многие математики того времени пытались доказать иррациональность чисел e и π, но только Ламберту и Лежандру удалось дать это доказательство.

Результат Ламберта. Используя результаты Эйлера и других предшественников, Ламберт, Лежандр и Фурье строго доказали иррациональность чисел e и π. И. Г. Ламберт (1728—1777) из Мюльгаузена считал себя швейцарцем. Из простого ученика портного он вырос в одного из выдающихся ученых XVIII в. В 1765 г. он был приглашен в Берлинскую Академию наук.

В 1766 г. вышла в свет его знаменитая работа «Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга» [61].

Эта работа написана живо, читается с интересом и занимает в истории квадратуры круга видное место. В ней впервые было дано доказательство иррациональности чисел e и π. Начинает Ламберт свою работу с констатации факта, что и в то время продолжался поток работ «квадратурщиков» — дилетантов, которых он и пытался направить на «путь истинный». В начале статьи он говорит, что особенно полезно прочесть эту работу тем, кто «затрачивает очень много времени и труда для отыскания квадратуры круга». Он так характеризует этих «искателей квадратуры круга»: «Таких искателей всегда будет достаточно, и если судить о будущих по их предшественникам, то это по большей части люди, мало смыслящие в геометрии и лишенные возможности правильно оценивать свои силы, Там, где им не хватает знания и понимания, где они не могут сделать с помощью правильных последовательных выводов, там жажда славы и денег создает софизмы, которые чаще всего не отличаются ни особенной тонкостью, ни особенной замысловатостью [61; 169]. Далее Ламберт говорит: «До сих пор не исследовано, может ли отношение диаметра к окружности быть выражено рациональной дробью». Он указывает, что найдено много таких дробей, например, 1 : 3, 7 : 22, 106 : 133, 113 : 355..., но все они дают только приближенные значения. Если рассматривать разложение чисел в непрерывные дроби, то получается для π разложение, которое «совершенно уничтожает надежду определить отношение диаметра к окружности посредством целых чисел».

Но основная заслуга Ламберта в истории теории чисел и в истории квадратуры круга состоит не в том, что он высказывал сомнение в рациональности числа π и $\frac{1}{\pi}$, а в том, что он сформулировал и в основном доказал две теоремы об иррациональности чисел e и π[1].

Природа числа e — основания натуральных («гиперболических») логарифмов — интересовала многих математиков XVIII в. Некоторые из них пытались представить это число в виде отношения рациональных чисел $e=\frac{a}{b}$. Под влиянием «Введения» Эйлера, где дано разложение в непрерывную дробь чисел e, $\frac{e-1}{2}$ и др., Ламберт занялся выяснением природы этого числа и пришел к выводу, что оно иррациональное. Он сформулировал такую теорему: «Если x есть отличное от нуля рациональное число, то e^x не может быть рациональным числом».

Отсюда вытекает, в частности, что натуральный логарифм рационального числа, отличного от единицы, не может быть числом рациональным. При доказательстве указанной теоремы Ламберт говорит, что если бы число e можно было представить в виде рациональной дроби, то разложение e и других чисел, связанных с e, в непрерывные дроби где-то обрывалось бы. Но этого не происходит, так как разложения

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}} \qquad \frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ldots}}}}$$

$$\frac{e-1}{e+1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ldots}}}}$$

и вообще

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\frac{6}{x}+\cfrac{1}{\frac{10}{x}+\ldots}}}$$

не обрываются. И Ламберт делает из этого правильный вывод: «Так как дроби продолжаются бесконечно, то ни e, ни e^x, если x целое число или дробь, не могут быть точно выражены рациональной дробью». Но это утверждение им не было строго доказано.

Затем он переходит к доказательству иррациональности числа π и формулирует следующую теорему: «Если x отличное от нуля рациональное число, то tgx не может быть рациональным числом». Но если это верно для всех рациональных x, то верно и для $x=1$ и $x=\frac{1}{n}$. И в этом случае Ламберт, используя разложение в непрерывную дробь

$$\operatorname{tg}x=\cfrac{1}{\frac{1}{x}-\cfrac{1}{\frac{3}{x}-\cfrac{1}{\frac{5}{x}-\cfrac{1}{\frac{7}{x}-\cfrac{1}{\frac{9}{x}-\ldots}}}}},$$

получает непрерывные дроби:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{n}=\cfrac{1}{n-\cfrac{1}{3n-\cfrac{1}{5n-\cfrac{1}{7n-\ldots}}}}\qquad \operatorname{tg}1=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{7-\ldots}}}}$$

Отсюда он делает вывод: «Из того, что эти дроби бесконечны, следует, что если дуга круга содержится целое число раз в его радиусе, то тангенс ее есть необходимо иррациональное число. Так как, если бы этот тангенс был рациональным, то дробь не могла бы продолжаться бесконечно и должна была бы прерваться». Но последняя часть этого утверждения, так же как и в предыдущем случае, принимается Ламбертом без доказательства.

Ламберт рассматривает далее подходящие дроби для tg 1:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{1-\frac{1}{3-\frac{1}{5}}}=\frac{14}{9}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2\cdot 9}, \ldots$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3-\frac{1}{5-\frac{1}{2}}}}=\frac{95}{61}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 61}, \ldots$$

и обращается к рассмотрению бесконечного ряда:

$$\operatorname{tg} 1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 61}+\frac{1}{61\cdot 540}+\cdots, \qquad \text{где}$$

$$\frac{1}{2\cdot 9}=\frac{14}{9}-\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{9\cdot 61}=\frac{95}{61}-\frac{14}{9}\ldots,$$

который «сходится быстрее всякой геометрической прогрессии и имеет, как видим, иррациональную сумму... Точно так же обнаруживается, что не только тангенс дуги $x=1$ и $x=\frac{1}{n}$, но и вообще тангенс каждой дуги $\frac{m}{n}$, имеющей рациональное отношение к радиусу, является иррациональным числом».

Из этого Ламберт делает такой вывод: «Так как тангенс каждой рациональной дуги есть число иррациональное, то, наоборот, также каждая дуга, имеющая рациональный тангенс, является иррациональной. Допустив противное, мы приходим к противоречию. Известно, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. Следовательно, $\frac{\pi}{4}$ и π — иррациональные числа». Но многие дуги, как известно, соизмеримы со своим тангенсом. В этом случае, говорит Ламберт, они оба не соизмеримы с радиусом. Допустив противное, приходим к противоречию. Сам Ламберт, вероятно, считал, что ему удалось строго доказать теоремы об иррациональности чисел e и π. Однако, как показал в дальнейшем Лежандр, существенные положения этих теорем не были Ламбертом доказаны.

Доказательства Лежандра и Фурье. Знаменитый французский математик А. М. Лежандр (1752—1833) продолжил исследования Ламберта, и в своей работе [61], появившейся в 1794 г., дал «Доказательство того, что отношение длины окружности к диаметру и квадрат его суть иррациональные числа» [63].

Лемма первая в этом произведении, которая восполняет доказательство Ламберта, сформулирована так: «Если в бесконечной непрерывной дроби

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\dots}}}\,.$$

$$m, n, m', n', m'', n'', \cdots$$

суть положительные или отрицательные целые числа, если, кроме того, каждая из дробей $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$ и т. д. менее единицы, то значение непрерывной дроби иррациональное число». Вторая лемма Лежандра читается так: «Если при тех же предположениях начальные дроби $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$ и т. д. имеют произвольные значения, все же последующие менее единицы, то рассматриваемая непрерывная дробь равна иррациональному числу, в предположении, что она бесконечна».

При доказательстве их он делает допущение, что

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+}}} = \frac{B}{A},$$

где B и A целые числа, и приходит к противоречию. «Поэтому, — заключает Лежандр, — наше допущение, что значение непрерывной дроби равно рациональному числу $\frac{B}{A}$, ложно; это значение непременно иррационально».

Доказав справедливость этих лемм, он рассматривает далее основную теорему: «Если некоторая дуга соизмерима с радиусом, то ее тангенс не соизмерим с радиусом»[2].

Доказательство этой теоремы опирается на известные в то время факты из теории рядов и непрерывных дробей, а также на указанные леммы и формулы, связывающие показательные и тригонометрические функции. Из этой теоремы следует также, что если тангенс какой-то дуги круга $\left(\text{например, } \frac{\pi}{4}\right)$ соизмерим с радиусом $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1\right)$, то $\frac{\pi}{4}$ не соизмеримо с радиусом, т. е. $\frac{\pi}{4}$ и π иррациональны.

Доказательство иррациональности числа e было дано в 1815 г. знаменитым французским ученым Фурье (1768—1830). В работе [114] при рассмотрении этого вопроса он отправлялся от ряда

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{(q+1)!}+\cdots$$

Доказательство дано в таком виде: допустим, что $e=\frac{p}{q}$ — рациональная дробь; перенесем в левую часть равенства все члены ряда до $\frac{1}{q}$ включительно и умножим равенство на $q!$ Тогда

$$\left(\frac{p}{q}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\cdots\frac{1}{q!}\right)q!=$$

$$=\left[\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\cdots\right]q!$$

Левая часть этого равенства $p(q-1)!-q!-q!-\frac{q!}{2!}-\cdots-1-$ — целое число, правая же часть

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\cdots=\frac{\frac{1}{q+1}}{1-\frac{1}{q+1}}=\frac{1}{q}$$

— дробь, и мы пришли к противоречию. Следовательно, число e — не рациональное, оно иррациональное.

Хотя доказательство иррациональности числа π не решало еще проблемы квадратуры круга, но оно все же существенно продвинуло решение и этой задачи: был найден путь, идя по которому, можно было прийти к окончательному решению задачи. Идя по этому пути, т. е. изучая природу чисел e и π, математики скоро поняли, что для окончательного решения знаменитой древней задачи нужно было выявить, какого характера иррациональность этих чисел: такого же, как, например, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, или между иррациональными числами $\sqrt{2}$ и π есть существенная разница.

Теория Гаусса деления окружности на равные части

Первой из пяти «неподдававшихся задач-крепостей» сдалась задача о делении окружности на равные части. Это произошло в самом конце XVIII столетия. Победителем ее оказался студент Гаусс (1777—1856).

К. Ф. Гаусс выходец из бедной семьи водопроводчика. Только благодаря своему таланту, упорству в работе и поддержке учителей ему удалось получить образование. Еще до поступления в Геттингенский университет Карл Гаусс увлекался искусством счета; по выражению Ф. Клейна «он беспрестанно считает с прямо-таки непреоборимым упорством и неутомимым прилежанием». Благодаря этому он достигает изумительной виртуозности в технике счета, что ему в дальнейшем очень пригодилось. Наряду с действиями над числами, Гаусс также проявляет большой интерес к бесконечным числовым рядам. Изучая арифметико-геометрические средние, он уже тогда подметил некоторые важные свойства их. В 1795 г. он открыл метод наименьших квадратов. В то же время он проявил интерес и к некоторым вопросам алгебры: думал над основной теоремой алгебры и над решением уравнения $x^n-1=0^3$. Не с меньшим интересом он занимался и филологией. В 1795 г. он стал студентом университета, продолжая колебаться в выборе науки, которой следует посвятить свою жизнь: математике или филологии. Но уже вскоре на смену колебаниям пришло твердое решение: Гаусс избрал физико-математические науки своей специальностью. Одной из основных причин этого выбора, как он сам отмечал в своем дневнике, было решение им задачи о построении правильного семнадцатиугольника. Как это случилось? Гаусс продолжал заниматься группировкой корней уравнения $x^n-1=0$ на основании своей теории «первообразных корней». И вот однажды утром, проснувшись, он внезапно ясно и отчетливо осознал, что из его теории вытекает построение семнадцатиугольника. Это открытие произвело на него очень сильное впечатление: он окончательно убедился в своих возможностях решать сложные математические вопросы и оставил мысль о «филологической карьере».

В июне 1796 г. в «Литературной газете», издававшейся в Иене, Гаусс опубликовал заметку: «Новые открытия». В ней он писал: «Всякому начинающему геометру известно, что можно геометрически (то есть циркулем и линейкой) строить разные правильные многоугольники, а именно треугольник, пятиугольник, пятнадцатиугольник и те, которые получаются из каждого из этих путем последовательного удвоения числа сторон. Это было уже известно во времена Евклида, и, как кажется, с тех пор было распространено убеждение, что область элементарной геометрии дальше не распространяется: по крайней мере, я не знаю удачной попытки распространить ее в эту сторону. Тем более кажется мне заслуживающим внимания открытие, что кроме этих правильных многоугольников может быть геометрически построено еще множество других, например, семнадцатиугольник. Это открытие является собственно лишь следствием одной еще не совсем законченной большой теории. Как только она получит эту законченность, она будет предложена публике.

К. Ф. Гаусс из Брауншвейга,
студент-математик в Геттингене».

Теория построения правильного семнадцатиугольника и упомянутая Гауссом «большая теория» были опубликованы им в знаменитом большом сочинении «Арифметические исследования» [28] в 1801 г. Эти теории составляют седьмой раздел указанных исследований, озаглавленный «Об уравнениях, от которых зависит деление круга». Здесь он подробно исследует уравнение $x^n - 1 = 0$, корни которого

$$x_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

соответствуют точкам деления единичной окружности на n равных частей. Особое внимание он уделил, в частности, рассмотрению уравнения

$$x^{17} - 1 = 0 \qquad (1)$$

и его корней

$$x_k = \cos\frac{2\pi k}{17} + i\sin\frac{2\pi k}{17}, \qquad (2)$$

которые являются вершинами правильного 17-угольника. Гаусс обратил внимание на то, что при $k=0$ один из корней уравнения (1) будет $x_0 = 1$ и что начиная с $k = 17$ корни будут повторяться, т. е. что различных корней у этого уравнения будет только 17 и что все они связаны между собой. При обозначении следующего корня (2) (при $k=1$) через ε, т. е.

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}\,r_1.$$

каждый последующий корень (на основании формулы Муавра) будет степенью ε. Например, при $k=2$ будем иметь корень

$$\cos\frac{2\cdot 2\pi}{17}+i\sin\frac{2\cdot 2\pi}{17}=\left(\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}\right)^2=\varepsilon^2,$$

при $k=3$

$$\cos\frac{3\cdot 2\pi}{17}+i\sin\frac{3\cdot 2\pi}{17}=\left(\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}\right)^3=\varepsilon^3$$

. . . .

. . . .

т. е. корни уравнения (1) будут 1, ε, ε^2, ε^3, ε^4, ε^5, ε^6, ε^7, ε^8, ε^9, ε^{10}, ε^{11}, ε^{12}, ε^{13}, ε^{14}, ε^{15}, ε^{16}.

Так как

$$\varepsilon^{17}=1 \quad \text{и} \quad \varepsilon^{17-m}=\varepsilon^{-m}=\cos\frac{m\cdot 2\pi}{17}-i\sin\frac{m\cdot 2\pi^4}{17},$$

то корни можно еще записать так: 1, ε, ε^2, ε^3, ε^4, ε^5, ε^6, ε^7, ε^8, ε^{-8}, ε^{-7}, ε^{-6}, ε^{-5}, ε^{-4}, ε^{-3}, ε^{-2}, ε^{-1}.

В уравнении (1): $x^{17}-1=(x-1)(x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

один из корней будет 1. Остальные же корни, по известной формуле Виеты, удовлетворяют условию

$$\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4+\varepsilon^5+\varepsilon^6+\varepsilon^7+\varepsilon^8+\varepsilon^9+\varepsilon^{10}+\varepsilon^{11}+\varepsilon^{12}+\varepsilon^{13}+\varepsilon^{14}+\varepsilon^{15}+\varepsilon^{16}=\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4+\varepsilon^5+\varepsilon^6+\varepsilon^7+\varepsilon^8+\varepsilon^{-8}+\varepsilon^{-7}+\varepsilon^{-6}+\varepsilon^{-5}+\varepsilon^{-4}+\varepsilon^{-3}+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-1}=-1. \tag{3}$$

Задача теперь сводится к тому, чтобы показать, что уравнение (3) разрешимо в квадратных радикалах.

Проведем сначала соответствующие рассуждения для пяти- и десятиугольников. В этом случае $x^5-1=0$, один корень 1, сумма остальных 4 корней $\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4=\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-1}=-1.$ (4)

Положим $\varepsilon+\varepsilon^{-1}=y$, (5).

Тогда

$$\varepsilon^2+\varepsilon^{-2}=y^2-2. \quad (6)$$

и относительно y получим уравнение $y^2+y-1=0$, корни его $y_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$, $y_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$. Подставляя y_1 в уравнение (5), получим $\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$

или

$$\varepsilon^2-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\varepsilon+1=0.$$

Откуда

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\mp\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right]^2-1}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right).$$

Остальные корни находятся из этого. Таково алгебраическое решение уравнения (4), из которого видно, что корни его выражены конечной цепочкой квадратных радикалов. Геометрическое значение y_1 мы выясним, если рассмотрим

$$y_1=\varepsilon+\varepsilon^{-1}=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}=$$

$$=2\cos\frac{2\pi}{5}=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=2\sin\frac{\pi}{10}=a_{10},$$

т. е. y_1 — сторона правильного вписанного десятиугольника. Построив же десятиугольник, мы легко построим и пятиугольник.

Перейдем теперь к решению уравнения (3).

Положим

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^8+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-4}+\varepsilon^{-8}&=\eta,\\ \varepsilon^3+\varepsilon^5+\varepsilon^6+\varepsilon^7+\varepsilon^{-3}+\varepsilon^{-5}+\varepsilon^{-6}+\varepsilon^{-7}&=\eta_1\end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Сумма левых частей есть сумма всех комплексных корней уравнения (3) и должна равняться -1, так что $\eta+\eta_1=-1$. Произведение их при непосредственном перемножении $\eta\eta_1=-4$. Это значит, что η и η_1 должны являться корнями квадратного уравнения

$$x^2+x-4=0.$$

Таким образом,

$$\eta=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17} \text{ и } \eta_1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{17}.$$

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-4}&=z;\\ \varepsilon^2+\varepsilon^8+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-8}&=z_1;\\ \varepsilon^3+\varepsilon^5+\varepsilon^{-3}+\varepsilon^{-5}&=z_2;\\ \varepsilon^6+\varepsilon^7+\varepsilon^{-6}+\varepsilon^{-7}&=z_3. \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Эти четыре равенства также содержат все комплексные корни 17-й степени из единицы.

Складывая и умножая эти равенства, получим

$$z+z_1=\eta, \quad zz_1=-1; \quad z_2+z_3=\eta_1,\ z_2z_3=-1,$$

значит z и z_1 — корни уравнения $x^2-\eta x-1=0$, (9)

а z_2 и z_3 — корни уравнения $x^2-\eta_1 x-1=0$, (9′)

т. е.

$$z=\frac{\eta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2+1}, \qquad z_2=\frac{\eta_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2+1}.$$

Положим, наконец,

$$\begin{aligned} \varepsilon+\varepsilon^{-1}&=y,\\ \varepsilon^4+\varepsilon^{-4}&=y_1, \end{aligned} \tag{10}$$

откуда находим, что $y+y_1=z$ и $y_1y=z_2$. Следовательно, y и y_1 будут корнями уравнения

$$x^2-zx+z_2=0, \tag{11}$$

причем считаем $y>y_1$. Из уравнения $\varepsilon+\varepsilon^{-1}=y$ находим

$$\varepsilon=\frac{y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{y^2-4}.$$

Этим и доказывается, что корни 17-й степени из единицы могут быть выражены с помощью квадратных радикалов.

Можно выяснить теперь и геометрическое значение y_1 как корня уравнения

$$y_1=\varepsilon^4+\varepsilon^{-4}=\left(\cos\frac{8\pi}{17}+i\sin\frac{8\pi}{17}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{17}-i\sin\frac{8\pi}{17}\right)=$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{8\pi}{17}\right)=2\sin\frac{\pi}{34}=a_{34}.$$

Но y_1 выражается через конечную цепочку квадратных радикалов. Следовательно, y_1 можно построить с помощью циркуля и линейки. Построив же 34-угольник, легко можно построить затем и 17-угольник. Так была решена задача о делении окружности на 17 равных частей. И в дальнейшем уже стояла задача реализовать это открытие, т. е. найти способ построения 17-угольника или деления окружности на 17 равных частей с помощью циркуля и линейки.

Решая задачу о возможности построения правильного 17-угольника циркулем и линейкой, Гаусс в это же время «замахнулся» и на более общую задачу: выяснить при каких значениях N можно циркулем и линейкой построить правильный N-угольник, а при каких N — нельзя. Или иначе, на какое число N равных частей можно циркулем и линейкой разделить окружность, а на какое число — нельзя. Так начала рождаться у Гаусса «большая» или общая теория.

С 1797 г. он начал печатать свою знаменитую работу «Арифметические исследования «(Disquisitiones arithmeticae) [28], которая полностью вышла в свет в 1801 г. Седьмой раздел этой большой работы, названный «Об уравнениях, от которых зависит деление круга», как раз и содержит «большую теорию», о которой говорил Гаусс еще в газетной заметке в 1796 г.

Речь идет здесь прежде всего об уравнении

$$X=\frac{x^N-1}{x-1}=x^{N-1}+x^{N-2}+\dots+1=0, \qquad (12)$$

которое в дальнейшем стали называть уравнением деления круга. Следовательно, геометрическая задача была сведена теперь к изучению корней уравнения (12).

Исследуя это уравнение, Гаусс и получает условие, которому должны удовлетворять числа N, чтобы окружность делилась циркулем и линейкой на N равных частей. Задача эта и в такой постановке, как видно, была в то время не из легких, хотя некоторые важные результаты для исследований решений алгебраических уравнений и были уже получены математиками XVIII в., особенно Эйлером и Лагранжем.

Постановка этой задачи несколько упрощается, если учесть, что нет смысла рассматривать это уравнение при N составных. Действительно, если N—число сложное, то оно имеет простые множители $N_1, N_2, \dots N_r$, т. е. $N=N_1 \cdot N_2, \dots N_r$, и задача в этом случае сводится к делению окружности на $N_1, N_2, \dots N_r$ равных частей.

Вот почему Гаусс в своих исследованиях ведет речь об N простых, а также об N, множителями которых являются числа

$2^к$ и простые числа P_i, такие, что $\frac{1}{P_i}$ часть окружности можно построить циркулем и линейкой. Так как в (12) N предполагается простым числом, то оно нечетное, а N—1 — четное.

Гаусс показывает далее, что многочлен в (12) неприводим в поле рациональных чисел, т. е. что это уравнение не имеет рациональных корней. Но оно имеет N—1 каких-то корней, множество которых Гаусс обозначает через Ω. Доказательство неприводимости $x=0$ в поле рациональных чисел в современной математике дается значительно проще, чем у Гаусса. Получив указанные результаты, Гаусс показывает далее, что многочлен x во многих случаях можно последовательно свести к произведению двучленных множителей. Он писал: «Известно, что все усилия величайших геометров дать общее решение уравнений, степень которых превосходит четвертую, или ... найти способ сведения смешанных уравнений на двучленные, до сих пор были тщетны. Тем не менее несомненно, что существует сколько угодно смешанных, т. е. недвучленных уравнений любой степени, которые «допускают такое сведение к двучленным уравнениям...».

Свою цель дальнейшего исследования Гаусс видел в том, чтобы последовательно разлагать многочлен X на большее и большее число таких множителей, чтобы коэффициенты их определялись при помощи решения вспомогательных уравнений возможно более низших степеней, пока таким образом не придем к линейным множителям, т. е. к самим корням Ω.

И дальше он показывает, что если $N-1=\alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2},\ldots\alpha_к^{n}$ и $n_1+n_2+\ldots+n_к=\nu$, то «нахождение корней Ω сводится к последовательному решению ν уравнений», из которых n_1 уравнений степени α_1, n_2 уравнений степени $\alpha_2,\ldots$, $n_к$ уравнений степени $\alpha_к$.

Так, мы видели (см. стр. 179—180), что при $N=17$, $N-1=16=2^4$ решение (12) свелось к решению четырех квадратных уравнений, а для $N=37$, где $N-1=2^2\cdot3^2$, придется решать два квадратных и два кубических уравнения.

Основная теорема, доказанная здесь Гауссом, читается так: «Чтобы круг можно было геометрически разделить на N частей, нужно, чтобы N было равно либо 2, либо более высокой степени числа 2, или чтобы N было либо простым числом вида 2^n+1, либо произведением нескольких таких простых чисел, или чтобы N было произведением одного или нескольких таких простых чисел либо на 2, либо на более высокую степень 2». Итак, деление окружности циркулем и линейкой на N частей возможно тогда, когда $N=2^кP_1P_2\cdots P_r$, где $k=0, 1, 2...$, а P_i — различные простые числа вида 2^n+1. Из сказанного выше вытекает: деление окружности на P равных частей, где P — простое число, возможно только тогда, если $P-1=2^n$, т. е. $P=2^n+1$. Но для того, чтобы число 2^n+1 было простым, показатель n не должен иметь нечетных простых делителей. Допустим, что $n=qn_1$, где q нечетное, тогда $2^n+1= =(2^{n_1})^q+1^q$, это число делится на $2^{n_1}+1$ и, следовательно, не простое. Значит, чтобы число $P=2^n+1$ было простым, необходимо, чтобы показатель n был степенью двойки, т. е. $n=2^\nu$. Тогда, если $2^{2^\nu}+1$ при соответствующих ν будет число простое, то на это число можно разделить окружность циркулем и линейкой. Например, при $\nu=0$ получим $P=3$, при $\nu=1$ — $P=5$, $\nu=2$—$P=17$, при $\nu=3$ — $P=257,...$ Все многоугольники с указанным числом сторон строятся циркулем и линейкой.

Но мы знаем также, что циркулем и линейкой можно построить правильные многоугольники с составным числом сторон, если только можно построить правильные многоугольники с числом сторон, равным каждому из множителей этого числа. Например,

$$2^к\cdot 3,\ 2^к\cdot 5,\ 2^к\cdot 3\cdot 5,\ 2^к\cdot 17,\ 2^к\cdot 3\cdot 5\cdot 17,...$$

Следовательно, циркулем и линейкой можно вообще разделить окружность на N равных частей, если $N=2^к\cdot P_1P_2,...P_r$, где $k=0,1, 2, ...$, а P_i — различные простые числа вида $2^{2^\nu}+1$.

Гаусс доказал, что это условие деления окружности на равные части необходимо. Что же касается того, что оно и достаточное, т. е. что ни при каких других P_i, кроме указанных, нельзя разделить окружность на равные части (построить правильный многоугольник) циркулем и линейкой, то хотя этого Гаусс не доказал, но он в этой же работе писал: «Хотя границы нашего сочинения не позволяют привести этого доказательства, мы думаем, что все же на это надо указать для того, чтобы кто-либо не пытался искать еще других случаев кроме тех, которые указаны нашей теорией, например, не надеялся бы свести на геометрические построения, т. е. на построение циркулем и линейкой, деление окружности на 7, 11, 13, 19, ··· частей и не тратил бы зря своего времени».

Учитывая то, что полученное Гауссом условие деления окружности не только необходимое, но и достаточное (хотя последнее было строго доказано в дальнейшем), основную теорему можно сформулировать так: «Для того, чтобы можно было окружность разделить циркулем и линейкой на N равных частей, необходимо и достаточно, чтобы число N имело вид $N= =2^к\cdot P_1P_2,...P_r$, где $k=0, 1, 2, 3,...$, а P_i — различные простые числа, каждое из которых имеет вид $2^{2^{\nu_i}}+1$, или $P_i=1$».

Таким образом, из общей теории деления окружности на равные части циркулем и линейкой, созданной в основном Гауссом в самом конце XVIII в., следует, что окружность можно разделить на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, ..., 257, ..., 65537, ... равных частей, или можно построить правильные многоугольники с указанным числом сторон. Из этой теории также вытекает, что окружность циркулем и линейкой нельзя, например, разделить на 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, ... равных частей. Причем числа 7, 11, 13, 19, ... хотя и простые, но они не являются числами Ферма $P_i = 2^{2^{\nu}} + 1$; числа $9 = 3 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, $25 = 5 \cdot 5$ содержат множители 3 и 5, являющиеся числами Ферма, но они повторяются; числа же 14, 21, ... содержат множители 7, 11, ..., которые не являются числами Ферма...

Общая теория деления окружности на равные части Гаусса пролила свет на многие вопросы, остававшиеся загадками в течение многих сот лет. Гаусс оказался первым покорителем одной из пяти интереснейших и поучительных задач в истории нашей науки.

Доказательство Ванцеля невозможности удвоения куба и трисекции угла

В первой половине XIX в. некоторые знаменитые задачи древности продолжали привлекать к себе внимание отдельных математиков. В числе их был и молодой инженер мостов и шоссе П. А. Ванцель (1814—1848). Математикой Ванцель интересовался с раннего возраста. Еще будучи студентом он изучил некоторые работы Эйлера, Лагранжа и других математиков. Привлекла его внимание и знаменитая работа Гаусса «Арифметические исследования», особенно ее VII раздел. Это, по-видимому, и способствовало развитию у него интереса к теории чисел, к алгебре, математическому анализу и к применению их в решении некоторых геометрических задач. Совсем еще юным он занялся выяснением условий, при которых геометрические задачи решаются циркулем и линейкой. В результате этих занятий в 1837 г. появилась его первая работа [20, 138], в которой он впервые доказал невозможность решения циркулем и линейкой удвоения куба и трисекции угла. Это был важный вклад в математику: были покорены еще две «неподдававшиеся крепости». И победителем их был тоже юноша. П. Ванцель прожил короткую, но продуктивную жизнь: за 10 лет своей научной деятельности он написал и опубликовал в ведущих французских математических журналах свыше 20 работ и заметок. Некоторые его результаты вошли в золотой фонд математики [24]. В его подробной биографии, которую опубликовал Barré de Saint Venant в 1748 г. в 7 томе журнала Nouvelles Annales de Mathematiques, высоко оценивается деятельность Ванцеля в качестве репетитора и экзаменатора Парижской политехнической школы и результаты его исследовательской работы. И хотя первая его работа долгое время не получала должной оценки, но теперь имя Ванцеля чаще всего связывают именно с задачами удвоения куба и трисекции угла. Эта работа Ванцеля занимает видное место в истории знаменитых задач древности.

В этой работе Ванцель указывает, что для того, «чтобы узнать, выполнимо ли построение некоторой геометрической задачи с помощью линейки и циркуля, должно определить, возможно ли будет корни уравнения, к которому приводит задача, выразить через корни системы уравнений 2-й степени...». Уравнения же 2-й степени, о которых речь идет, можно представлять как выражения площадей прямолинейных треугольников, образованных линиями, соединяющими центры окружностей и точки пересечения прямых с окружностями и окружностей между собой. Тогда «главное неизвестное задачи мы найдем, разрешая ряд уравнений 2-й степени, коэффициенты которых будут рациональными функциями данных вопроса и корней предыдущих уравнений». Рассмотрим далее систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} x^2_1+Ax_1+B=0; \\ x^2_2+A_1x_2+B_1=0; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^2_{n-1}+A_{n-2}x_{n-1}+B_{n-2}=0; \\ x^2_n+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0, \end{array}\right\} \qquad (13)$$

где A и B — рациональные функции данных задачи $p, q, r, \cdots$, A_1 и B_1 рациональные функции $x_1, p, q, r, \ldots$ и вообще A_m и B_m — рациональные функции $x_1, x_2, \ldots, x_m, p, q, \ldots$. Следовательно если A и B—рациональные числа, то в A_1 и B_1 входят корни квадратные из A и B, получающиеся при решении первого уравнения относительно x_1, который по условию входит в A_1 и B_1. В A_2 и B_2 входят уже корни квадратные из A_1 и B_1, т. е. корни из квадратных корней и т. д. Если число квадратных уравнений в указанной системе доведено до минимума, то каждое из этих уравнений не будет удовлетворяться рациональной функцией данных количеств и корней предшествующих уравнений.

Если при этом «главным неизвестным» является x_n из последнего уравнения системы, то, решая это квадратное уравнение относительно x_n, мы получим корни его, как квадратные корни из A_{n-1} и B_{n-1}, в которые кроме p, q, r, ⋯ входят x_1, т. е. квадратные корни из p, q, r, ..., x_2 — квадратные корни из квадратных корней; x_3, x_4, ..., x_{n-1} — квадратные корни ... из квадратных корней.

Можно показать, что x_n будет корнем уравнения степени 2^n и что уравнение это будет неприводимым. Ванцель утверждает, что если мы перемножим два значения x_n, найденные из последнего уравнения системы (13), заменим при этом x_{n-1} в A_{n-1} и B_{n-1} поочередно корнями предшествующего уравнения, получим тогда многочлен 4-й степени относительно x_n, коэффициенты которого выразятся рационально в функции x_{n-2}, p, q, r, ... Заменив затем также x_{n-2} последовательно двумя корнями соответствующего уравнения и взяв произведение найденных двух значений, получим многочлен степени 2^3 относительно x_n с коэффициентами, рациональными относительно $x_{n-3}, \ldots, x_1$, p, q, ... Продолжая дальше этот процесс, получим наконец многочлен с коэффициентами, которые будут рациональными функциями от p, q, r ... . Этот многочлен степени 2^n, будучи приравнен к нулю, даст уравнение $f(x_n)=0$ или $f(x)=0$, которое заключает в себе все решения вопроса.

Показав, таким образом, что система указанных квадратных уравнений равносильна уравнению степени 2^n с рациональными коэффициентами и что, следовательно, решение указанного уравнения степени 2^n сводится к решению системы уравнений, он формулирует и доказывает далее теорему: «Уравнение $f(x)=0$ степени 2^n, дающее все решения задачи, разрешимой посредством n уравнений 2-й степени, будет непременно неприводимо», т. е. оно не может иметь общих корней с уравнениями низших степеней, коэффициенты которых были бы рациональными функциями данных величин p, q, r, ... Предположив, что это неверно, т. е., что существует уравнение $F(x)=0$, корнями которого являются корни уравнения степени ниже степени $f(x)=0$, при условии, наложенном выше на коэффициенты уравнений, Ванцель показывает, что в этом случае $F(x)$ обратится в нуль для 2^n значений x_n, к которым приводит система всех уравнений или 2^n корней уравнений $f(x)=0$, т. е., если уравнение $F(x)=0$ с рациональными коэффициентами имеет один корень, общий с $f(x)=0$, то оно допускает и все его корни, а это значит, что уравнение $f(x)=0$ неприводимо.

Эта теорема является центральной в указанном исследовании Ванцеля. Здесь, как видно, Ванцель не пользуется еще понятием числового поля, и способ рассуждений несколько громоздкий, но по существу и он пользуется своеобразной теорией полей.

Доказав указанную выше теорему, Ванцель говорит далее, что «из этой теоремы непосредственно явствует, что всякая задача, которая приводится к неприводимому уравнению, порядок которого не есть степень 2-х, не может быть разрешена с помощью прямой линии и круга».

Так, задачу об удвоении куба, которая приводит к разрешению неприводимого уравнения вида $x^3-2a^3=0$, «нельзя решить с помощью элементарной геометрии». Задача о двух среднепропорциональных, сводящаяся к решению уравнения $x^3-a^2b=0$, если $\frac{a}{b}$ не является кубом, тоже не разрешима циркулем и линейкой. Задача трисекции угла, как известно, сводится к решению уравнения

$$x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}a=0,$$

которое будет неприводимо при бесконечном числе значений a, в частности при $a=1$. Следовательно, и трисекция угла циркулем и линейкой в общем случае невозможна. Ванцель заключает: «Нам кажется, что еще не было строго доказано, что эти знаменитые задачи древности не могут быть разрешены теми обычными геометрическими построениями, с которыми их обыкновенно связывали».

Так, после долгих и упорных поисков были решены две из пяти рассматриваемых нами знаменитые задачи. Но на этом не оборвалась их история. В дальнейшем предпринимались попытки упрощения доказательства невозможности решения этих задач циркулем и линейкой с учетом новых достижений алгебры, искались новые методы и способы точного и приближенного решения этих задач. В новый период решалась обобщенная задача о трисекции угла $x^3=pa^3$, где p — любое число, а также задача о полисекции угла.

Трансцендентность чисел e и π

Результаты исследований Лиувилля и Г. Кантора. Большую ясность в различие алгебраических и «не алгебраических» иррациональностей в XIX в. внесли французский математик *Лиувилль* (1809—1882) и немецкий математик *Г. Кантор* (1845—1918).

Первый из них начиная с 40-х годов занимался выяснением природы числа e и отысканием способа построения трансцендентных чисел.

В работе «О классе трансцендентных количеств, которые не являются алгебраическими и не сводятся к алгебраическим иррациональностям», Лиувилль (1857) доказывает, что e и e^2 не являются корнями уравнений $ax^2+bx+c=0$ и $ax^4+bx^2+c=0$ ни при каких целых значениях a, b и c.

Различие между алгебраическими и трансцендентными числами он сформулировал в виде таких теорем:

«Для любого действительного алгебраического числа α степени $n \geqslant 2$ можно подобрать положительное c, зависящее от α такое, что для всех рациональных чисел $\frac{p}{q}$ будет иметь место неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{c}{q^n}. \tag{14}$$[5]

Эти числа являются корнями алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами. Для чисел же, не являющихся корнями алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами, справедлива теорема: «Если для любого натурального $n \geqslant 1$ и любого действительного $c > 0$ существует хотя бы одна рациональная дробь $\frac{p}{q} \neq 0$ такая, что $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q^n}$, то вещественное число α — трансцендентное». Получив указанные выше теоремы, Лиувилль вместе с тем показал, что можно строить бесконечно много неалгебраических чисел.

В частности, он показал, что числа вида

$$\alpha = \frac{1}{10!} + \frac{1}{10^{2}!} + \frac{1}{10^{3}!} + \ldots = 0{,}1100010\ldots$$

и

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}}$$

«выходят за пределы алгебраических чисел», т. е. являются трансцендентными.

Разделив таким образом все вещественные числа на два класса: алгебраические и трансцендентные и показав, как можно конструировать трансцендентные числа, Лиувилль не смог, однако, выяснить вопрос о природе чисел e и π и не смог ответить на вопрос: как «велики» классы алгебраических и трансцендентных чисел, хотя и знал уже, что тех и других чисел бесконечные множества.

Г. Кантор с помощью разработанной им теории множеств выяснил, какова мощность множества алгебраических и трансцендентных чисел.

В статье «О свойствах совокупности всех вещественных алгебраических чисел» (1873) и в других работах он показал, что множество всех вещественных чисел несчетное, а множество алгебраических чисел — счетное. Отсюда следовало, по теории Кантора, что бесконечное множество трансцендентных чисел несчетное, т. е. это множество не эквивалентно множеству натуральных чисел, или иначе — члены этого множества не могут быть пронумерованы, как в счетном множестве: a_1, a_2, a_3, $\cdots$. Результаты исследований Лиувилля и Кантора, конечно, не давали еще ответа на вопрос: какова природа чисел e и π. Но теперь стало для математиков яснее, что для доказательства трансцендентности иррациональных чисел e и π достаточно доказать, что они не алгебраические.

Доказательство Эрмита трансцендентности числа e. Лиувилль доказал, что e и e^2 не являются корнями квадратного уравнения с целыми коэффициентами

$$c_0+c_1x+c_2x^2=0.$$

Естественным продолжением исследований Лиувилля явилась в 1873 г. знаменитая работа «О показательных функциях» [124]. Автором ее был выдающийся французский математик Ш. Эрмит (1822—1901). В этой работе Эрмит доказал, что e и e^2 не могут быть корнями уравнения

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n=0, \qquad (15)$$

ни при каких целых коэффициентах c_k (c_0 и $c_n \neq 0$).

Идея доказательства Эрмита была естественна и проста: допустив, что e есть корень уравнения (15) и что это уравнение при $x=e$ обращается в тождество

$$c_0+c_1e+c_2e^2+\cdots+c_ne^n=0, \qquad (15')$$

показать, что это приводит к противоречию, а следовательно, число e не является алгебраическим.

Но способ реализации этой идеи у Эрмита был далеко не самым простым из всех возможных.

В дальнейшем Гурвиц, Гордан, Поссе, Граве и другие сделали это доказательство таким, что его стали включать в курсы дифференциального исчисления, но оно по форме существенно отличалось от доказательства Эрмита.

Чтобы сохранить основное из доказательства Эрмита и вместе с тем несколько упростить его, мы воспользуемся работами А. А. Маркова [69] и Гильберта [126], посвященными доказательству трансцендентности чисел e и π. В этом случае, показав, что

$$e=\frac{M_1+\varepsilon_1}{M},\quad e^2=\frac{M_2+\varepsilon_2}{M},\ \dots\ e^n=\frac{M_n+\varepsilon_n}{M}, \tag{16}$$

где $M, M_1, M_2, \dots, M_n$ — целые числа, а $\frac{\varepsilon_1}{M}, \frac{\varepsilon_2}{M} \dots, \frac{\varepsilon_n}{M}$ сколь угодно малые дроби, и подставив значения $e, e^2, \dots e^n$ в (15′), получим

$$(c_0M+c_1M_1+c_2M_2+\cdots+c_nM_n)+$$
$$+(c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+\cdots+c_n\varepsilon_n)=0. \tag{17}$$

Если покажем теперь, что левая часть (17) не обращается в нуль, то придем к противоречию. С этой целью нужно найти такие M, M_κ и ε_κ, которые бы удовлетворяли указанным требованиям.

Эрмит нашел способ выражения этих величин в виде интегралов такого вида:

$$M=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\ (x-2)\dots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}dx, \tag{18}$$

$$M_\kappa=e^\kappa\int_\kappa^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\ (x-2)\dots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}dx, \tag{18а}$$

$$\varepsilon_\kappa=e^\kappa\int_0^\kappa \frac{x^{p-1}[(x-1)\ (x-2)\dots(x-n)]e^{-x}}{(p-1)!}dx, \tag{18б}$$

где n степень уравнения (15), а p — некоторое простое число, на которое налагаются в дальнейшем определенные условия. В этом и был ключ к доказательству Эрмита. При исследовании этих интегралов Эрмит использовал известную гамма-функцию:

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}e^{-x}dx=\Gamma(\rho),$$

которая при целом $\rho > 0$ равна $(\rho-1)!$

Чтобы найти значение интеграла (18 a), преобразуем подынтегральное выражение

$$[(x-1)\,(x-2)\,\ldots\,(x-n)]^p=[x^n-\ldots+(-1)^n n!]^p=x^{np}-$$
$$-\cdots+(-1)^n(n!)^p.$$

Теперь можно записать

$$M=\frac{(-1)^n(n!)^p}{(\rho-1)!}\int\limits_c^{\infty}x^{\rho-1}e^{-x}\,dx+\sum_{\rho=p+1}^{p+np}\frac{c_\rho}{(\rho-1)!}\int\limits_0^{\infty}x^{\rho-1}e^{-x}\,dx, \qquad (18')$$

где c_ρ — постоянные целые числа, коэффициенты в преобразовании множителя подынтегрального выражения

$x^{p-1}[(x-1)\,(x-2)\ldots(x-n)]^p$ в многочлен.

Применяя теперь к каждому интегралу (18′) формулу

$$\int\limits_0^{\infty}x^{\rho-1}e^{-x}\,dx=(\rho-1)!$$

получим

$$M=(-1)^n\,(n!)^p+\sum_{\rho=p+1}^{p+np}C_\rho\frac{(\rho-1)!}{(p-1)!} \qquad (18'')$$

где под знаком суммы все $\rho>p$. Следовательно,

$\frac{(\rho-1)!}{(p-1)!}$ — целые числа, содержащие и множитель p.

Значит

$$M=(-1)^n\,(n!)^p+p[c_{p+1}+c_{p+2}(p+1)+$$
$$+c_{p+3}(p+1)\,(p+2)+\ldots] \qquad (18''')$$

целое число. Теперь надо показать, что оно отлично от нуля. Для этого достаточно доказать, что оно не делится на некоторое определенное число (нуль делится на всякое число!), например, на P. Что касается второго слагаемого (18‴), то оно, как видно, делится на P. Первое же слагаемое не будет делиться на P в случае, если P не входит в состав ни одного из множителей $n!$, т. е. сомножителей 1, 2, ..., и оно уже, наверное, не будет делиться на P, если $P>n$. Подобрав такое простое число $P>n$, мы и получим в результате, что $(-1)^n\,(n!)^p$, а значит и M, наверное, не будет делиться на P, а следовательно, это целое число отлично от нуля.

Перейдем теперь к рассмотрению интеграла (18*а*). Введем под знак интеграла множитель e^{k} и новую переменную $\zeta=x-k$. При этих условиях

$$M_k=\int_0^{\infty}\frac{(\zeta+k)^{p-1}[(\zeta+k-1)(\zeta+k-2)\cdots\zeta\cdots(\zeta+k-n)]^p e^{-\zeta}}{(p-1)!}d\zeta.$$

Очевидно, что этот интеграл того же вида, что и для M.

После вынесения из-под знака интеграла $\frac{1}{(p-1)!}$ он представится в виде суммы интегралов

$$\int_0^{\infty}\zeta^p e^{-\zeta}\,d\zeta,\ \int_0^{\infty}\zeta^{p+1}e^{-\zeta}d\zeta,\ldots,\ \int_0^{\infty}\zeta^{(n+p)-1}e^{-\zeta}\,d\zeta,$$

помноженных на целые числа. Так как

$$\int_0^{\infty}\zeta^p e^{-\zeta}d\zeta=p!,\ \int_0^{\infty}\zeta^{p+1}e^{-\zeta}=(p+1)!=p!\,(p+1),\cdots$$

то M_k можно записать в таком виде

$$M_k=\frac{p!A_k}{(p-1)!}=pA_k\ \ (k=1,2,\ldots n).$$

Таким образом, все целые числа M_k делятся на P, а целое число

$$C_0M+C_1M_1+\cdots+C_nM_n,$$

наверное, не делится на p, так как при $p>n$ и $p>C_0$ C_0M не делится на p и, следовательно, это число, отличное от нуля.

Остается еще рассмотреть интеграл (18*б*): надо доказать, что, выбирая p достаточно большим, можно сделать

$$\varepsilon_k=\int_0^{k}\frac{x^{p-1}[(x-1)(x-2)\ldots(x-n)]^p e^{-x+k}}{(p-1)!}dx,$$

а следовательно, и $C_1\varepsilon_1+C_2\varepsilon_2+\cdots+C_n\varepsilon_n$ меньше сколь угодно малой положительной величины (для наших целей достаточно показать, что это будет правильная дробь).

Обозначим наибольшее абсолютное значение функции

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$$

и функции

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\,e^{-x+k}\qquad \text{в промежутке } (0,\ n)$$

соответственно через G и $q_к$, т. е.

$$\left.\begin{array}{l}|x(x-1)(x-2)\dots(x-n)|\leqslant G\\ |(x-1)(x-2)\dots(x-n)|\leqslant q_к\end{array}\right\}(0\leqslant x\leqslant n).$$

Тогда

$$|\varepsilon_к|\leqslant\int_0^к\frac{G^{p+1}q_к}{(p-1)!}dx=\frac{G^{p-1}kq_к}{(p-1)!},\qquad(19)$$

Числа G, $q_к$, k, как видно, не зависят от P. Выбирая P достаточно большим, получим значение дроби $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ и числа $\varepsilon_к$ сколь угодно малыми. А так как

$$|c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+\dots+c_n\varepsilon_n|\leqslant|c_1||\varepsilon_1|+|c_2||\varepsilon_2|+\dots+|c_n||\varepsilon_n|\leqslant$$
$$\leqslant[|c_1|\cdot1\cdot q_1+|c_2|\cdot2\cdot q_2+\dots+|c_n|\cdot n\cdot q_n]\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}\qquad(20)$$

и множитель в квадратной скобке — число постоянное, не зависящее от p, то можем правую, а следовательно, и левую часть (19), т. е. $|c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+\dots+c_n\varepsilon_n|$ сделать сколь угодно малой, в частности меньше единицы.

Итак, в первой скобке левой части (17) стоит целое число, не равное нулю, а во второй скобке — правильная дробь, и их сумма не может быть равна нулю. Таким образом, наше предположение о том, что е является корнем уравнения (15), приводит к противоречию. Следовательно, е не может быть алгебраическим, оно — трансцендентное.

Так был пролит свет на арифметическую природу числа $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Это важное открытие в теории чисел сыграло затем большую роль в различных разделах математики и в ее приложениях.

Доказательство Линдемана трансцендентности числа π

«Ключ», найденный Эрмитом для доказательства трансцендентности числа е, оказался весьма полезным и для «открытия секретного замка», на который была закрыта тайна, окутывавшая много столетий число π. Не прошло и десяти лет после открытия Эрмита, как немецкий математик Ф. Линдеман (1852—1939) в 1882 г. в работе «О числе π» [137], воспользовавшись методом Эрмита, доказал трансцендентность числа π. Тем самым было доказано, что невозможно построить сторону квадрата, равновеликого данному кругу, не только циркулем и линейкой, но и с помощью любой алгебраической кривой.

Однако, хотя «ключ» Эрмита оказался для Линдемана и необходимым при доказательстве трансцендентности числа π, но к нему потребовалось добавить еще некоторые «ключики», чтобы открыть тот сейф, в котором хранилась отгадка на вопрос: какова природа числа π? «Сейф», в котором была спрятана эта отгадка, оказался менее доступен, чем в случае с числом е. Одним из этих «дополнительных ключей» оказалось равенство $e^{i\pi}+1=0$, связывающее е и π.

Линдеман исходил из того, что Эрмитом было уже доказано: равенство $\sum\limits_{k=0}^{n} C_k e^k=0$ не может иметь место, если C_k и k целые рациональные числа. Обобщая эти результаты, Линдеман поставил вопрос: можно ли показать, что это равенство не будет выполняться и при условии, что C_k и k принимают алгебраические значения? Решая этот вопрос, Линдеман доказал теорему: равенство $\sum C_k e^{b_k}=0$ не выполняется, если коэффициенты C_k представляют любые, а b_k—различные между собой алгебраические числа. Тогда трансцендентность π является непосредственным следствием этой теоремы и равенства $e^{i\pi}+1=0$. Действительно, если бы π было алгебраическим числом, то $i\pi$ было бы тоже алгебраическим, и тогда при $C_0e^{b_0}=1$, $C_1e^{b_1}=e^{i\pi}$ и при $C_k=0$ $(k=2, 3, \cdots)$ выполнялось бы равенство $1+e^{i\pi}=0$, что противоречило бы указанной теореме Линдемана. Из этого видно, что доказательство теоремы Линдемана и есть, по существу, доказательство трансцендентности числа π.

Доказательство самого Линдемана было строгим, но с методической точки зрения далеко не совершенным. Мы воспользуемся улучшенным доказательством Маркова и Гильберта, в котором остается «дух» Линдемана», но оно несколько проще и является точным обобщением доказательства трансцендентности числа е, приведенного выше.

При этом исходным пунктом доказательства является соотношение $1+e^{i\pi}=0$.

Если предположить теперь, что π является корнем некоторого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами $f(x)=0$, то $i\pi$ будет тоже корнем подобного уравнения. Действительно, если $f(\pi)=0$, то и $f(\pi)f(-\pi)=0$. Допустим теперь, что $y=i\pi$, тогда $f(iy)\,f(-iy)=\varphi(y)=0$ и коэффициенты $\varphi(y)$ вещественные рациональные числа. Если $\varphi(y)=0$ имеет n корней: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, то среди них находится и корень $i\pi$. С учетом (20) можно тогда записать: $(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\ldots(1+e^{\alpha_n})=0$.

После перемножения получим

$$1+(e^{\alpha_1}+e^{\alpha_2}+\cdots+e^{\alpha_n})+(e^{\alpha_1+\alpha_2}+e^{\alpha_1+\alpha_3}+\cdots+e^{\alpha_i+\alpha_k}+\cdots+$$
$$+e^{\alpha_{n-1}+\alpha_n})+\cdots+e^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}=0. \qquad (21)$$

Если некоторые из показателей степени $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$ обратятся в нуль, то к первому слагаемому прибавятся еще слагаемые $e^0=1$, и первое слагаемое вместе с ними будет целым числом $C_0\neq 0$. Обозначив остальные показатели, не равные нулям, через $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{N-1}, \beta_N$, запишем (21) в таком виде

$$c_0+e^{\beta_k}+e^{\beta_k}+\cdots+e^{\beta}=0, \qquad (22)$$

где $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N$ являются корнями некоторого уравнения с целыми коэффициентами. Действительно из уравнения с целыми коэффициентами, корни которого $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ можно, как известно, получить уравнение с целыми коэффициентами, корнями которого являются все двучленные суммы $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1+\alpha_3, \ldots$, точно так же можно получить подобные уравнения для трехчленных сумм $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4, \ldots$, и, наконец, для суммы $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$.

Перемножая все эти уравнения, снова получим уравнение с целыми рациональными коэффициентами, некоторые из корней которого могут равняться нулям, а другие — будут β_1, $\beta_2, \cdots \beta_N$. Разделим затем это уравнение на неизвестное в степени, равной числу первых корней, получим для N величин β_k уравнение N-й степени с целыми коэффициентами и с постоянным членом, отличным от нуля:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots a_Nx^N=0, \qquad (23)$$

где $a_0\neq 0$ и $a_N\neq 0$.

После этих предварительных замечаний доказательство трансцендентности числа π можно свести к доказательству частного случая теоремы Линдемана: равенство (22) не будет выполняться, если числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ удовлетворяют уравнению (23). Доказательство этой теоремы сходно с доказательством трансцендентности e, хотя есть в них и существенное отличие.

Чтобы дать возможно лучшие приближения степеней e^{β_k} в равенстве (22), подобно тому как были даны хорошие приближения для e^k при помощи рациональных чисел, покажем, что

$$e^{\beta_1}=\frac{M_1+\varepsilon_1}{M},\ e^{\beta_2}=\frac{M_2+\varepsilon_2}{M},\ \cdots,\ e^{\beta_N}=\frac{M_N+\varepsilon_N}{M}, \qquad (24)$$

где знаменатель M — также обыкновенное целое число, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$ — очень малые дроби. Но $M_1, M_2, \ldots, M_N$ здесь представляют не целые рациональные, а целые алгебраические числа, т. е. числа, являющиеся корнями алгебраического уравнения степени N с целыми коэффициентами и с коэффициентом при x^n, равным единице. В этом и состоит усложнение предыдущего доказательства, хотя сумма всех чисел $M_1, M_2, \ldots, M_N$ в данном случае равна целому рациональному числу.

Если теперь подставить в (22) вместо e^{β_k} значения из (24) и умножить на M, то получим

$$(C_0M+M_1+M_2+\cdots+M_N)+(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_N)=0. \quad (25)$$

Можно затем показать, что $M_1+M_2+\cdots+M_N$ делится на некоторое простое число P, а произведение C_0M не делится на него. Из этого будет вытекать, что первое слагаемое (скобка)— целое число, не делящееся на P, т. е. отличное от нуля, а второе слагаемое при больших P может быть правильной дробью. Это и приводит нас к противоречию и к заключению, что число π не является алгебраическим.

Для доказательства того, что M не делится на P, мы должны рассмотреть в этом случае обобщение интеграла Эрмита, где вместо $(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$ рассматривается

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_N)=\frac{1}{a_N}[a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_Nx^N), \quad (26)$$

но, чтобы коэффициенты были целыми, необходимо взять в качестве множителя в M еще соответствующую степень a_N, т. е. положить

$$M=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}x^{p-1}dx}{(p-1)!}[a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N]^p a_N^{(N-1)p-1}.$$

Причем интегрирование здесь нужно вести с учетом, что x вообще комплексная переменная. Но подынтегральная функция аналитическая, для которой особой точкой (существенно особой) является только $x=\infty$. Чтобы интеграл имел смысл, можно избрать путь интегрирования от 0 до β_k и затем вдоль прямой, параллельной вещественной полуоси, до ∞. Развернув подынтегральное выражение по возрастающим степеням x, рассмотрим член, содержащий x^{p-1}:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}x^{p-1}}{(p-1)!}dx=\Gamma(p)=(p-1). \quad (27)$$

Во всех следующих слагаемых под знаком интеграла входят x^p и еще более высокие степени x, поэтому в них входят множители $\frac{p!}{(p-1)!}$, $\frac{(p+1)!}{(p-1)!}$, $\cdots$, умноженные на целые числа и они все делятся на p. Из этого следует, что само M будет целым числом, не делящимся на P, если на P не будет делиться a_0^p и $a_N^{(N-1)(p-1)}$ Но так как $a_0 \neq 0$ и $a_N \neq 0$, то этого легче всего добиться, положив $p > a_0$ и $p > a_N$. Выбрав p настолько большим, чтобы кроме этих условий выполнялось еще $p > C_0$, тогда в (25) $C_0 M$ не будет делиться на p.

При рассмотрении интегралов, выражающих M_k и ε_k, дело осложняется тем, что вместо целых чисел k входят β_k, которые могут быть комплексными, среди них должно быть и $i\pi$. Эти интегралы имеют вид:

$$\varepsilon_k = e^{\beta_k} \int\limits_0^{\beta_k} \frac{e^{-x} x^{p-1} dx}{(p-1)!} [a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N]^p a_N^{(N-1)p-1}.$$

$$M_k = e^{\beta_k} \int\limits_{\beta_k}^{\infty} \frac{e^{-x} x^{p-1} dx}{(p-1)!} [a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N]^p a_N^{(N-1)p-1}.$$

В данном случае легче вычислить ε_k, но и здесь необходимо учитывать, что интегрирование проводится в комплексной области. В частности, здесь используется теорема: модуль интеграла никогда не превосходит произведения наибольшего значения модуля подынтегрального выражения на длину пути интегрирования, которая в данном случае равна $|\beta_k|$. Если максимум модуля $|x(a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N) a_N^{N-1}|$ в некоторой области, содержащей все точки β_k, умноженный на множители, не зависящие от p, обозначим через g, то верхней границей величин ε_k будут выражения $\frac{g^{p-1}}{(p-1)!}$, которые при увеличении p можно сделать сколь угодно малыми. А тогда и сумма $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_N$ будет сколь угодно малой, в частности, меньше единицы.

При выяснении характера величин M_k нам придется прибегнуть к обобщению прежних рассуждений, так как в этом случае место рациональных чисел в интеграле Эрмита займут алгебраические числа.

Будем рассматривать всю сумму:

$$\sum_{k=1}^{N} M_k = \sum_{k=1}^{N} e^{\beta_k} \int\limits_{\beta_k}^{\infty} \frac{e^{-x} x^{p-1} dx}{(p-1)!} [a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N]^p a_N^{(N-1)p-1}. \quad (28)$$

В соответствии с (26) заменим многочлен, стоящий в скобке, через $(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_N)$ и введем новую переменную $\zeta=x-\beta_k$, которая пробегает все вещественные значения от 0 до ∞. Тогда получим

$$\sum_{k=1}^{N} M_k=\sum_{k=1}^{N}\int_0^\infty \frac{e^{-\varsigma}\,d\varsigma}{(p-1)!}(\zeta+\beta_k)^{p-1}(\zeta+\beta_k-\beta_1)^p\ldots\zeta^p(\zeta+\beta_k-$$

$$-\beta_N)^p a_N^{Np-1}=\int_0^\infty \frac{e^{-\varsigma}d\varsigma}{(p-1)!}\zeta^p\phi(\zeta),$$

где

$$\phi(\zeta)=\sum_{k=1}^{N} a_N^{Np-1}(\zeta+\beta_k)^{p-1}(\zeta+\beta_k-\beta_1)^p\ldots$$

$$\ldots(\zeta+\beta_k-\beta_{k-1})^p\ldots(\zeta+\beta_k-\beta_N)^p.$$

Каждый из коэффициентов этой суммы представляет симметрическую функцию величин $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$. Возводя в степени отдельные множители, можно убедиться, что эти функции будут рациональные функции от $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ с целыми рациональными численными коэффициентами. Но из алгебры известно, что рациональные симметрические функции с рациональными коэффициентами от всех корней уравнения с рациональными численными коэффициентами представляют всегда рациональные числа. В нашем случае $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ суть все корни (23) и коэффициенты многочлена $\phi(\zeta)$ действительно рациональны. Но нам нужно, чтобы каждый из них был целым числом. И получим их таковыми с помощью степени числа a_N, входящей множителем в подынтегральное выражение. Вводя множители a_N в скобки, запишем эту сумму так:

$$\phi(\zeta)=\sum_{k=1}^{N}(a_N\zeta+a_N\beta_k)^{p-1}(a_N\zeta+a_N\beta_k-a_N\beta_1)^p\cdots$$

$$\cdots(a_N\zeta+a_N\beta_k-a_N\beta_{k-1})^p(a_N\zeta+a_N\beta_k-a_N\beta_{k+1})^p\cdots$$

$$\cdots(a_N\zeta+a_N\beta_k-a_N\beta_N)^p. \qquad (28')$$

Коэффициенты этого многочлена относительно ζ представляют целые рациональные симметрические функции с целыми рациональными коэффициентами от произведений $a_N\beta_1, a_N\beta_2, \ldots, \ldots, a_N\beta_N$. Но эти N произведений $a_m\beta_k$ являются корнями уравнения, которое получится из (23) путем замены x через $\frac{x}{a_N}$,

$$a_0+a_1\frac{x}{a_N}+\cdots+a_{N-1}\left(\frac{x}{a_N}\right)^{N-1}+a_N\left(\frac{x}{a_N}\right)^N=0. \qquad (29)$$

Умножая это равенство на a_N^{N-1}, получим

$$a_0 a_N^{N-1} + a_1 a_N^{N-2} x + \cdots + a_{N-2} a_N x^{N-2} + a_{N-1} x^{N-1} + x^N = 0, \tag{29'}$$

т. е. уравнение с одними только целыми коэффициентами и коэффициентом 1 при высшем члене, корни такого уравнения называются целыми алгебраическими числами.

Но коэффициенты многочлена (28), стоящие под знаком интеграла, выражающего $\sum\limits_{k=1}^{N} M_k$, удовлетворяют условиям теоремы: целые рациональные симметрические функции, с целыми коэффициентами, от всех корней целочисленного уравнения с коэффициентом старшего члена, равным 1, т. е. от целых алгебраических чисел, сами представляют целые рациональные числа. Следовательно, можно записать

$$\sum_{k=1}^{N} M_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta}\zeta^p d\zeta}{(p-1)!} (A_0 + A_1\zeta + \cdots + A_{Np-1}\zeta^{Np-1}),$$

где $A_0, A_1, \cdots A_{Np-1}$ — целые рациональные числа. Если теперь проинтегрировать это выражение, пользуясь функцией Г, то получим $\sum\limits_{k=1}^{N} M_k$ в виде суммы слагаемых, в которые входят множители $P!$, $(P+1)!$, $(P+2)!, \ldots$, так как каждый член содержит множитель ζ в степени выше P. При делении этих членов на $(P-1)!$ останутся множители, P, $P\,(P+1), \ldots$, а другие множители $A_0, A_1, \ldots$ — целые числа. Из этого следует, что $\sum\limits_{k=1}^{N} M_k$ — целое число, делящееся на P. Но, как было показано, целое число C_0M не делится на P, а $\sum\limits_{k=1}^{N} \varepsilon_k$ — правильная дробь, поэтому сумма $C_0M + \sum\limits_{k=1}^{N} M_k$ должна представлять целое число, не делящееся на P, а равенство

$$\left[C_0M + \sum_{k=1}^{N} M_k\right] + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k = 0$$

не может иметь место, так как целое число, отличное от нуля, в сумме с дробью, меньшей единицы, не может обратиться в нуль.

Тем самым мы пришли к противоречию, предположив, что π является корнем алгебраического уравнения степени n с рациональными коэффициентами. Следовательно, π не алгебраическое, а трансцендентное число.

Так была покорена Линдеманом одна из очень «прочных крепостей» в науке. Это было большое достижение в математике. Оно, как мы увидим, нашло широкий отзвук в разных странах. Доказательство трансцендентности числа π, данное Линдеманом, даже несколько упрощенное, как видно, не такое уж «простое и наглядное», как это утверждает Ф. Клейн [54; 372]. Но и в таком виде оно доступно окончившим мехматы, физматы и некоторые технические учебные заведения.

Таким образом, XIX век и в истории пяти знаменитых задач древности оставил глубокий след: четыре из пяти в это столетие были решены, хотя история их на этом не закончилась. В частности, доказательство трансцендентности чисел e и π стимулировало создание общей теории трансцендентных чисел и появление ряда работ, направленных на упрощение доказательства Линдемана.

Дальнейшее развитие теории знаменитых задач древности

Появление в XIX в. решений четырех классических задач древности некоторые ученые расценили как конец многовековой истории их. Они считали, что Гаусс, Ванцель и Линдеман своими открытиями написали заключительную главу истории четырех знаменитых задач древности.

Для других же ученых было ясно и тогда, что решение этих задач хотя и очень важная, но не последняя глава в их истории. Действительно, уже вскоре после появления этих решений, рассмотренных в предыдущих разделах данной главы, ученые почувствовали необходимость уточнений и упрощений их. В дальнейшем стало ясно, что следует продолжать поиски новых методов и способов точного и приближенного решения этих задач в геометрии Евклида, найти решение пятой задачи — квадратуры круговых замкнутых луночек циркулем и линейкой, перейти к квадратуре этих луночек с помощью конических сечений, продолжить разработку теории некруговых и открытых луночек, перенести решение этих задач в неевклидовы геометрии, создать научную историю пяти знаменитых задач древности, разработать методику использования истории и современной теории знаменитых задач при изучении математики и истории математики в школах и вузах, популяризировать эти задачи среди молодежи и среди всех любителей математики.

О важности вопросов, решение которых открывало новую страницу в истории знаменитых задач древности, можно судить и по тому, что им уделяли внимание такие ученые, как Вейерштрасс, Гильберт, Клейн, Марков, Гурвиц, Поссе, Адлер Бернштейн, Чеботарев, Мордухай-Болтовской, Гельфонд, Ландау, Лебег, Бибербах, Нивен, Несторович, Дороднов, Смогоржевский, Яглом и др.

В рассматриваемый период значительно увеличилось и число стран, представители которых принимали участие в популяризации и в разработке теории этих задач.

Создается, следовательно, *новая глава* истории знаменитых задач древности. Главными творцами этого периода в последние десятилетия стали многие советские математики, характеристике деятельности которых посвящена значительная часть четвертой главы этой книги. В этом разделе мы остановимся на некоторых результатах работ зарубежных математиков XIX—XX столетий.

Новое доказательство иррациональности π. Из предыдущей главы видно, что Ламберт и Лежандр при доказательстве иррациональности чисел e и π широко использовали непрерывные дроби. Они свели доказательство иррациональности этих чисел к доказательству теоремы: e^x и $\operatorname{tg} x$ ни при каких рациональных значениях x, кроме $x=0$, не могут быть рациональными. Отсюда вытекает и следующая теорема: если при каких-то значениях x, e^x и $\operatorname{tg} x$ будут рациональными, то эти значения x могут быть только иррациональными. Например: $e^{\ln a}=a$ и если a—рациональное число, то $\ln a$ будет всегда иррациональным (за исключением случая $a=1$), или $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$ — рациональное число, следовательно, $\dfrac{\pi}{4}$ — иррациональное число.

Доказательства Ламберта и Лежандра громоздки, и естественно появлялось желание у многих математиков упростить эти доказательства. В начале этой главы мы привели изящное доказательство иррациональности числа e, полученное Фурье в начале XIX в. (см. стр. 149). Получить новое доказательство иррациональности числа π оказалось делом более трудным. Тем не менее и для π некоторым математикам удалось получить новые доказательства, которые, к сожалению, не всегда были более простыми, чем доказательство Лежандра.

Приведем здесь доказательство иррациональности числа π, полученное американским математиком И. Нивеном в 1947 г. [18; 70].

Допустим, что π — рационально, т. е. $\pi=\frac{a}{b}$, где a и b целые числа. Рассмотрим две функции:

$$f(x)=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!};\tag{30}$$

$$F(x)=f(x)-f''(x)+f^{(IV)}(x)-\ldots+(-1)^n f^{(2n)}(x).\tag{31}$$

Если раскрыть скобки в правой части (30), то это выражение можно записать в виде

$$f(x)=\frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} a_{i-n}x^i=\frac{a_n}{n!}x^n+\frac{a_1}{n!}x^{n+1}+\cdots+\frac{a_n}{n!}x^{2n},$$

где a_i — целые числа. Легко видеть, что

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$$

$f^{(k)}(0)=\frac{k!}{n!}a_{k-n}$ $(n\leqslant k\leqslant 2n)$; следовательно,

$f^{(j)}(0)$ — целое число при $0\leqslant j\leqslant 2n$.

Из (30) следует, что $f(x)=f(\pi-x)$. Тогда при любом j

$$f^{(j)}(x)=f^{(j)}(\pi-x) \quad \text{и} \quad f^{(j)}(\pi)=f^{(j)}(0) \text{ —}$$

также целое число, а следовательно, $F(0)$ и $F(\pi)$ — целые числа. Заметим теперь, что из равенства

$$\frac{d}{dx}[F'(x)\sin x-F(x)\cos x]=F''(x)\sin x+F(x)\sin x=f(x)\sin x$$

следует

$$I=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx=[F'(x)\sin x-F(x)\cos x]_0^{\pi}=F(\pi)+F(0),$$

т. е. что I — целое положительное число.

Но из (30) следует, что при $0<x<\pi$, $f(x)\sin x<\frac{\pi^n a^n}{n!}$ и что при возрастании n подынтегральная функция и сам интеграл могут стать сколь угодно малыми. Это противоречие указывает на то, что π не может быть рациональным числом.

Из этого примера видно, что вопрос об улучшении доказательств, связанных с выяснением природы числа π, продолжает привлекать и современных математиков.

Дальнейшее развитие теории Гаусса. Теория деления круга Гаусса сыграла очень большую роль в развитии алгебры, теории чисел и геометрии. «Арифметические исследования» Гаусса, как известно (см. стр. 151), появились в 1801 г., а в 1811 г. в связи с седьмым разделом этих «исследований» появилась работа Гаусса «Суммирование некоторых рядов особого вида». В начале этой работы Гаусс писал: «Среди наиболее замечательных истин, к открытию которых проложила путь теория деления круга, далеко не последнее место занимает изложенное в п. 356 «Арифметических исследований» «Суммирование...» [28; 594].

Для осуществления указанного суммирования Гаусс ввел особые тригонометрические суммы, называемые теперь суммами Гаусса. Академик И. М. Виноградов в статье «К. Ф. Гаусс» писал: «Дальнейшее обобщение этого исследования привело впоследствии к рассмотрению более общих тригонометрических сумм, которые являются сейчас одним из самых сильных средств аналитической теории чисел и способствовали доказательству важных теорем, касающихся обыкновенных целых чисел» [28; 876]. Исследованию и обобщению гауссовых сумм в XIX в. уделили некоторое внимание Лебег, Коши, Кронекер и Дирихле. В XX столетии важные результаты для теории чисел с помощью тригонометрических сумм получили Г. Вейль, Харди и Литтльвуд.

Но особо выдающиеся результаты в аналитической теории чисел методом тригонометрических рядов были получены И. М. Виноградовым; в частности, им была решена и проблема Гольдбаха.

Теория деления круга Гаусса оказала большое влияние и на Галуа. И. М. Виноградов в указанной выше статье об этой теории писал: «Это исследование представляет собой частный, но вполне завершенный случай теории, построенной впоследствии Галуа, которая является одной из основных теорий алгебры» [28; 876]. Сам Галуа считал Гаусса одним из основных своих предшественников в создании теории групп. Б. Н. Делоне в статье «Работы Гаусса по теории чисел» [28; 879—976] говорит, что основная теорема теории Галуа есть непосредственное обобщение теоремы Гаусса, о чем упоминает и сам Галуа. И далее Б. Н. Делоне писал: «Галуа понял, что успех теории деления круга Гаусса основан совсем не на том, что уравнение (деления круга. — *С. Б.*) $X=0$ имеет весьма специальный вид, а на том, что оно нормальное, и не на том, что его группа весьма специальная (циклическая), а на том, что все ее последовательные делители суть нормальные делители. Как только Галуа понял эти истинные причины успеха Гаусса, он построил свою общую теорию» [28; 965]. Галуа считал своим предшественником и Лагранжа, идея которого о роли теории подстановок в теории алгебраических уравнений использовалась и Гауссом, и Галуа.

Что же касается общей теории групп Галуа, то после того как она была понята, оказала существенное влияние не только на алгебру, но и на всю математику. Идеи и методы теории групп проникли и в естествознание. Ученые многих стран конца XIX и XX столетий развивали и применяли теорию групп. Заметный вклад в теорию групп внесли и советские математики Н. Г. Чеботарев, И. Р. Шафоревич и др. Теория деления окружности на равные части Гаусса оказала влияние и на разработку некоторых вопросов геометрии, и на появление исследований, направленных на отыскание новых способов доказательства теоремы Гаусса и на отыскание значений ν_i, при которых $P_i = 2^{2^{\nu_i}}+1$ будут простыми числами.

Под влиянием идей Гаусса Бахман опубликовал книгу «Die Lehre von der Kreisteilung»; Ришело в журнале Крелля (1832. IX) опубликовал большую статью, посвященную изучению и попытке реализации уравнения $x^{257}-1=0$; профессор Гермес в течение 10 лет занимался построением правильного n-угольника при $n=65537$. Еще в XIX в. появились способы построения 17-угольника циркулем и линейкой Серре-Бахмана, Штаудта, Жерара, Падоа и др. [2; 118]. Но эти способы существенно опираются на алгебраические исследования Гаусса уравнения $x^{17}-1=0$. Проблема точного и приближенного построения правильных многоугольников с помощью различных средств привлекала и продолжает привлекать многих ученых, в том числе русских и советских математиков (см. IV главу).

Вопрос о том, при каких значениях n числа Ферма: $2^{2^n}+1$ будут простыми, играет, как известно, важную роль в теории Гаусса. Сам Ферма считал, что все числа указанного вида простые, и подтверждал это, полагая $n=0, 1, 2, 3, 4$. При этом получаются соответственно числа 3, 5, 17, 257, 65537, которые действительно все простые, а следовательно, правильные многоугольники с таким числом сторон и с числом сторон N, являющимся произведением из 2^k на каждое из них или на комбинации произведений из этих сомножителей, строятся циркулем и линейкой. Но уже Эйлер показал, что при $n=5$ получается составное число $2^{2^5}+1=4\cdot294967267$, имеющее делитель 641. После появления теории Гаусса этот вопрос стал особенно актуальным. Некоторые математики и любители математики затрачивали много времени на выяснение того, какими же будут числа $2^{2^n}+1$ при различных $n>5$. Значительное облегчение в решение этого вопроса принесли ЭВМ.

К 1964 г. было показано, что все числа являются составными при $n=5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, \ldots 316, 452$. До сих пор пока при $n>4$ не найдено ни одного простого числа Ферма. Был установлен критерий простоты чисел $P_n=2^{2^n}+1$. Это число будет простым, когда $3^{\frac{P_n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{P_n}$. (Ш. Михелович. Теория чисел, стр. 236). Высказано предположение, что число простых чисел Ферма конечно. Уточнению формулировки основной теоремы Гаусса и доказательству того, что полученное Гауссом условие деления окружности на равные части необходимое и достаточное, тоже уделяли внимание некоторые математики, в том числе и с помощью теории групп. Одним из первых математиков, затрагивавших эти вопросы, был Ванцель [146]. Систематическое изложение результатов математиков XIX и XX столетий дано в книге А. Школьника [99].

Теперь теорема Гаусса читается так: «Окружность можно разделить на N равных частей (построить правильный N-угольник) циркулем и линейкой в том и только в том случае, когда N — число вида

$$N=2^k P_1 \cdot P_2 \cdots P_m,$$

где k — целое положительное число или нуль, а P_i — различные между собой простые числа видаа $2^{2^n}+1$ или равны 1».

Такова завидная судьба теории деления круга, созданной юным Гауссом, оказавшей сильное влияние на развитие математики и не утратившей своего значения и в наше время.

Трисекция угла и удвоение куба после Ванцеля. Доказательство Ванцеля невозможности трисекции угла (в общем случае) и удвоения куба циркулем и линейкой с точки зрения его строгости, по-видимому, не вызывало особых возражений. Но с точки зрения формы и доступности для читателей оно было далеко не совершенно. Этим, вероятно, и объясняется медленное распространение среди математиков результатов работы Ванцеля в XIX в.

Необходимость более четкого доказательства решений задач, подобных трисекции угла и удвоению куба, сводящихся к решению уравнений 3-й и более высоких степеней, по-видимому, являлась тоже одним из стимулов разработки новых разделов алгебры, в том числе и теории числовых полей, которая затем помогла получить более строгие и более доступные доказательства невозможности удвоения куба и трисекции угла. С этими доказательствами теперь можно познакомиться по многим источникам, в том числе и на русском языке [2, 53, 58, 68, 85].

Не излагая подробно теорию числовых полей, мы все же приведем некоторые данные, необходимые для понимания современного доказательства невозможности решения рассматриваемых задач циркулем и линейкой. Уравнение удвоения куба

$$x^3-2=0 \qquad (32)$$

имеет корень $x_1=\sqrt[3]{2}$ и два комплексных корня. Чтобы доказать, что $x_1=\sqrt[3]{2}$ нельзя построить циркулем и линейкой, надо доказать, что $\sqrt[3]{2}$ не может принадлежать ни одному из полей, построенных из рациональных чисел поля F_0 путем последовательного «присоединения» квадратных радикалов. Ход построения полей F_n из F_0 кратко можно описать так. Пусть поле рациональных чисел F_0 содержит рациональные числа, в том числе a_0, b_0 и k_0. Если над ними производить рациональные операции и извлечение квадратного корня, то получим числа вида $a_1+b_1\sqrt{k_1}$, в которых a_1 b_1, k_1 принадлежат полю F_0, а $\sqrt{k_1}$ не принадлежит этому полю. Числа $a_1+b_1\sqrt{k_1}$ составляют поле F_1, включающее в себя, как подполе, поле F_0.

Такого же рода операции над $a_1+b_1\sqrt{k_1}$ приводят к числам $a_2+b_2\sqrt{k_2}$, соответствующим полю F_2 и т. д. Числа поля F_{n-1} будут $a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{k_{n-1}}$, а числа поля F_n—$a_n+b_n\sqrt{k_n}$, где a_n, b_n и k_n принадлежат полю F_{n-1}, а $\sqrt{k_n}$ не принадлежит ему.

Обращаясь теперь к числу $\sqrt[3]{2}$, являющемуся корнем (32), покажем сначала, что число $\sqrt[3]{2}$ не принадлежит полю F_0, т. е., что это число иррациональное. Действительно, если число $\sqrt[3]{2}$ рациональное, то $\sqrt[3]{2}=\frac{p}{q}$, где p и q целые числа, не имеющие общих множителей. Тогда $2=\frac{p^3}{q^3}$ или $p^3=2q^3$; так как в правую часть входит множитель 2, то число p^3 четное, и само число p — четное, ибо только четное число в кубе может дать четное число. Положим тогда $p=2r$ и получим $(2r)^3=2q^3$, т. е. $8r^3=2q^3$ или $4r^3=q^3$. Но $4r^3$ — четное число, а следовательно, q^3 и q четные числа. Получается, что p и q четные, т. е. имеют общий множитель, а мы предположили, что они взаимно-простые числа. Мы пришли к противоречию, что указывает на то, что $\sqrt[3]{2} \neq \frac{p}{q}$, т. е. оно иррациональное. Итак, $\sqrt[3]{2}$ не принадлежит полю F_0. Но может быть корень уравнения $x^3-2=0$ принадлежит какому-то полю F_n и не принадлежит ни одному из предшествующих полей, в том числе и полю F_{n-1}. Тогда x должен иметь вид $x=p_n+q_n\sqrt{k_n}$, где p_n, q_n и k_n принадлежат полю F_{n-1}, а $\sqrt{k_n}$ не принадлежит ему. Но из алгебры известно, что если $x=p_n+q_n\sqrt{k_n}$ есть решение уравнения (32), то его решением должно быть и число $y=p_n-q_n\sqrt{k_n}$ [59]. Покажем, что это невозможно.

Действительно, если x принадлежит полю F_n, то x^3 и x^3-2 тоже принадлежат этому полю, так как здесь над x совершаются только рациональные операции. Следовательно,

$$x^3-2=a+b\sqrt{k_n}, \tag{33}$$

причем a и b можно выразить через p_n, q_n и k_n из $(p_n+q_n\sqrt{k_n})^3-2=a+b\sqrt{k_n}$. Но так как и $y=p_n-q_n\sqrt{k_n}$ должен быть решением уравнения (32), то он тоже содержится в поле F_n, а значит

$$y^3-2=a-b\sqrt{k_n}. \tag{33'}$$

Но мы допустили, что $x=p_n+q_n\sqrt{k_n}$ есть корень уравнения (32), т. е. $(p_n+q_n\sqrt{k_n})^3-2=0$, тогда из

$$(p_n+q_n\sqrt{k_n})^3-2=a+b\sqrt{k_n}$$

следует, что

$$a+b\sqrt{k_n}=0. \tag{34}$$

Причем последнее равенство должно иметь место только при $a=b=0$, иначе $\sqrt{k_n}=-\frac{a}{b}$ принадлежал бы полю F_{n-1}, чего не может быть. Но если $a=b=0$, то из (33′) следует, что $y^3-2=0$, т. е., что $y=p_n-q_n\sqrt{k_n}$ есть решение уравнения (32). Однако $x\neq y$, так как разность $x-y=2q_n\sqrt{k_n}$ могла бы обратиться в нуль только при $q_n=0$, но тогда x равнялся бы p_n, т. е. относился бы к полю F_{n-1}, что противоречит предположению.

Итак, предположив, что решение уравнения (32) принадлежит полю F_n, мы получили, что уравнение (32) имеет два различных решения

$$x=p_n+q_n\sqrt{k_n} \quad \text{и} \quad y=p_n-q_n\sqrt{k_n}.$$

Так как p_n, q_n и k_n вещественные числа, то оба корня должны быть действительными. На самом же деле у уравнения (32) есть только один вещественный корень, а два других корня мнимые.

Мы пришли к противоречию. Значит $\sqrt[3]{2}$, корень уравнения (32), не может принадлежать ни к какому полю F_n, а следовательно, задача об удвоении куба с помощью циркуля и линейки не разрешима. Невозможность построения отрезка $\sqrt[3]{2}$ с помощью циркуля и линейки следует теперь и из известной теоремы, относящейся вообще к кубическим уравнениям: «Если кубическое уравнение с рациональными коэффициентами не имеет рациональных корней, т. е. неприводимо в поле рациональных чисел, то ни один из его корней не может быть построен с помощью циркуля и линейки».

Эта теорема легко доказывается с помощью теории полей и для уравнения

$$z^3+az^2+bz+c=0, \tag{35}$$

где a, b, c — рациональные числа и связаны с корнями уравнения z_1, z_2, z_3 известными формулами. Предположив, что один из его корней, например z_1,—иррациональное число и строится циркулем и линейкой, мы должны тогда считать, что z_1 принадлежит полю F_n и не принадлежит F_{n-1}, где n наименьшее число, при котором F_n содержит корень (35). Следовательно, $z_1=p_n+q_n\sqrt{k_n}$, а $z_2=p_n-q_n\sqrt{k_n}$ тоже принадлежит F_n и является корнем (35). А так как

$$q_n\neq 0, \quad z_1+z_2+z_3=-a \quad и \quad z_1+z_2=2p_n,$$

то $z_3=-a-2p_n$, т. е. z_3 принадлежит F_{n-1}, что противоречит предположению. Уравнение (32) относится именно к таким кубическим уравнениям. Следовательно, ни один из его корней, в том числе и $\sqrt[3]{2}$, не строится циркулем и линейкой. Эта же теорема дает ответ и на вопрос: при каких значениях a корни уравнения трисекции угла:

$$x^3-3x-a=0, \tag{36}$$

которое стали получать из сравнения вещественных частей разложения $(\cos\alpha+\sin\alpha)^3$, строятся циркулем и линейкой и при каких не строятся. Например, при $a=1$ уравнение $x^3-3x-1=0$ (36′) не имеет рационального корня; следовательно, его корни не строятся циркулем и линейкой, и угол $\varphi=60^\circ$ не делится циркулем и линейкой на три равные части.

Вопрос же о том, имеет ли данное кубическое уравнение с рациональными коэффициентами рациональный корень или нет — решает другая теорема. Эта теорема говорит о том, что если уравнение (35) имеет рациональный корень, то он будет целым числом и одним из делителей свободного члена. В нашем примере он мог бы, следовательно, быть или $+1$ или -1. Подставляя эти значения в (36′), убеждаемся, что эти числа не обращают уравнение в тождество. В уравнении (32) целыми делителями свободного члена являются ±1, ±2, ни одно из которых не является его корнем: следовательно, оно не имеет рационального корня, и ни один из его корней не строится циркулем и линейкой.

Таким же образом можно показать, что циркулем и линейкой не строится ни один из корней кубических уравнений

$$y^3+y^2-2y-1=0 \quad \text{и} \quad y^3-3y+1=0.$$

Следовательно, циркулем и линейкой нельзя построить правильные семиугольник и девятиугольник.

Невозможность трисекции угла и удвоения куба циркулем и линейкой после Ванцеля получали и как следствие теоремы, содержащей необходимое условие разрешимости в квадратных радикалах уравнения $f(x)=0$. Она читается так: «Для того чтобы неприводимое в F_0 уравнение $f(x)=0$ было разрешимо в квадратных радикалах, необходимо, чтобы степень его была степенью двойки» [99; 36]. Корни уравнения степени 2^n строятся циркулем и линейкой, так как они принадлежат полю F_n. Вопрос о неприводимости многочлена $f(x)$ в поле F_0 решается и с помощью критерия Эйзенштейна: $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a^n$ будет неприводимым в поле F_0, если существует простое число P, такое, что a_0 не делится на P, $a_i(i=1, 2\ldots)$ делятся на P и a_n не делится на p^2. Например, $x^n\pm2$.

Некоторые новые результаты получены и в других направлениях. Было показано, что на три равные части делятся не только углы $\frac{\pi}{2^n}$, но и множество других углов. Так, если l — какой-то отрезок прямой, который построен циркулем и линейкой и если в (36) положить $a=l^3-3l$, то (36) будет $x^3-3x-l^3+3l=0$ и $x=l$. Корень этого уравнения $\cos\frac{\varphi}{3}=\frac{l}{2}$ и трисекция в этих случаях возможна.

Нами рассматривались обобщения задачи удвоения куба, полисекция углов, новые способы построения точного и приближенного построения сторон правильных многоугольников (см. IV гл.).

О влиянии работы Линдемана. Доказательство трансцендентности числа π Линдеманом в 1882 г. произвело сильное впечатление на всех математиков, знакомых с историей задачи о квадратуре круга и понимавших существо трудностей, связанных с решением этой задачи. Доказательство Линдемана было признано верным по существу, но далеким от идеала по форме: оно было малодоступно для многих математиков.

С учетом важности результатов и с целью сделать их доступными для сравнительно широких кругов математиков и любителей математики Вейерштрасс, А. А. Марков, Гильберт, Гурвиц, Гордан, К. А. Поссе посвятили свои работы разбору и популяризации результатов Линдемана. Многие из них не только популяризировали результаты Линдемана, но и вносили свой вклад в метод доказательства трансцендентности чисел e и π и дополняли эти результаты новыми теоремами.

В отличие от «замедленной» реакции русских математиков на появление результатов Гаусса о делении круга и Ванцеля о трисекции угла и удвоении куба (см. IV гл.), на появление работы Линдемана русские математики отреагировали «своевременно». А. А. Марков начал писать большую работу «Доказательство трансцендентности чисел e и π» [69] вскоре после появления статьи Линдемана и опубликовал ее в 1883 г. К. А. Поссе быстро отреагировал на появление работ Гурвица и Гордана, опубликовав в 1894 г. свою статью «О трансцендентности чисел e и π» [83].

Но наиболее широкий отклик на результаты Линдемана мы находим в работах немецких математиков.

К. Вейерштрасс (1815—1897) был одним из первых математиков, познакомившихся с открытием Линдемана, и именно он дал «путевку в жизнь» работе Линдемана, представив ее для печати в издании Берлинской Академии наук. Положительная оценка работы Линдемана Вейерштрассом — самым авторитетным математиком того времени — сыграла немаловажную роль в привлечении внимания математиков к работе, еще малоизвестного ученого Линдемана.

Однако Вейерштрасс был не только «крестным отцом», давшим благословение статье Линдемана, открывшей новый этап в истории квадратуры круга, но и одним из первых математиков, приступивших к уточнению и расширению идей, содержащихся в работе Линдемана и к усовершенствованию доказательства основной теоремы о трансцендентности «Лудольфова числа».

В 1885 г. появилась большая статья Вейерштрасса под названием «К мемуару Линдемана «О Лудольфовом числе» (Доказательство невозможности квадратуры круга)» [23, 139]. В этой статье он расширил содержание работы Линдемана, дав несколько новых важных теорем, связанных с доказательством трансцендентности числа π. В частности, им доказана такая теорема: «Если x есть какое-нибудь алгебраическое число, то выражение e^x+1 не обращается в нуль».

Особенно большое значение он придавал теореме, которую рассматривал и А. А. Марков в своей работе [69].

«Если $x_1, x_2, \dots, x_r$ различные и $y_1, y_2, \dots, y_r$ — произвольные алгебраические числа, то уравнение

$$\sum_{\rho=1}^{r} y_\rho e^{x_\rho} = 0 \qquad (37)$$

может иметь смысл только при $y_1=y_2=\dots=y_r=0$». Эта важная теорема содержит в себе как частные случаи трансцендентность e и π одновременно.

Вейерштрасс указал также, что из теоремы Линдемана следует трансцендентность $\sin x$, если x — алгебраическое число. Наконец, он сформулировал и доказал следующую теорему:

«Дуга круга, хорда которой, измеренная радиусом этого круга, имеет алгебраически выраженную длину, не может быть выпрямлена геометрическим построением при помощи только алгебраических кривых и поверхностей; равно как соответствующий этой дуге кривой сектор посредством такого построения не может быть обращен в равновеликий квадрат».

Доказательство этой теоремы Вейерштрасс дает в таком виде: пусть круг имеет радиус $R=1$, а длина дуги x; тогда хорда этой дуги $y=2\sin\frac{x}{2}$, а площадь соответствующего сектора $\sigma=\frac{1}{2}x$. Если бы можно было получить отрезок, равный x, или осуществить квадратуру сектора, то это означало бы, что между x и y существует алгебраическая зависимость, т. е. существовало бы алгебраическое уравнение между x и $\sin\frac{x}{2}$. Но при нашем допущении, что $2\sin\frac{x}{2}$ — алгебраическое число, такого уравнения не может существовать.

Особенно «урожайным» на работы об упрощении доказательств трансцендентности чисел e и π был 1893 г.

В этом году работу «О трансцендентности чисел e и π» [126]

опубликовал выдающийся немецкий математик Д. Гильберт (1864—1943). Доказательство трансцендентности e и π Гильберта, хотя и не было еще простым, так как оно тоже существенно опиралось на свойства интеграла $\int\limits_0^{\infty} z^{\rho-1}e^{-z}dz$, все же давало значительные упрощения.

Это доказательство Гильберта в основном использовано и Ф. Клейном в «Приложении» к книге «Элементарная математика с точки зрения высшей», переведенной и на русский язык в 1933 г. [54]. Ф. Клейн в этом приложении, названном «Трансцендентность чисел e и π», сам указывал, что при доказательстве трансцендентности этих чисел он «пользовался теми существенными упрощениями, которые сделал в нем Гильберт в 43 т. Math. Annal. (1893)».

Сравнивая доказательства Эрмита-Линдемана и Гильберта, мы действительно можем отметить у Гильберта не только большую систематичность изложения, но и большую ясность и некоторые упрощения в доказательствах.

В том же 43 т. журнала Math. Annal. были опубликованы работы немецких математиков А. Гурвица «Доказательство трансцендентности числа e» и Гордана «Трансцендентность e и π» [123, 120].

Гурвиц и Гордан впервые предложили доказательства трансцендентности этих чисел без применения интегрального исчисления, без использования интеграла Эрмита. Их доказательства предполагают только знание основ дифференциального исчисления и степенных рядов. После появления этих работ доказательства трансцендентности e и π стали считать элементарными, «общедоступными», хотя «простота» этого доказательства весьма относительна.

Поиски новых способов доказательства трансцендентности числа π продолжались и в XX столетии, что видно и из книги Т. И. Дринфельда [43], опубликованной в Харькове в 1952 г.

Вопрос о получении способа доказательства трансцендентности числа π, доступного для широких слоев любителей математики, остается актуальным и в наше время. В связи с появлением работы Линдемана и в связи с ее энергичной популяризацией усилился интерес и к результатам Лиувилля и Кантора: к разработке теорий алгебраических и трансцендентных чисел. Эти теории благодаря трудам математиков многих стран, и особенно советских математиков Д. Д. Мордухай-Болтовского, А. О. Гельфонда, Р. О. Кузьмина, Б. Н. Делоне и других, превратились в самостоятельные ветви современной теории чисел (см. [29]).

Продолжением исследования Линдемана можно рассматривать и перенесение задачи о квадратуре круга в неевклидовы геометрии. Советские математики установили, в частности, что эта задача в плоскости Лобачевского становится алгебраической (см. гл. IV).

Не прекращаются поиски способов точного (с помощью трансцендентных кривых) и приближенного построения отрезков, равных e и π. Последние годы начали прибегать к помощи ЭВМ для отыскания верных десятичных знаков π.

Таково влияние работы Линдемана «О трансцендентности числа π» на дальнейшее развитие математики. Распространение мнения о невозможности решения задачи о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки и с помощью любой алгебраической кривой привело к значительному сокращению числа так называемых «квадратурщиков», напрасно тративших много времени на построение квадрата, равновеликого данному кругу, циркулем и линейкой.

Новые способы точных и приближенных конструктивных решений знаменитых задач древности

Доказательства невозможности решения задач об удвоении куба и квадратуры круга и задач деления окружности на равные части и трисекции угла в общем случае циркулем и линейкой определили грани между двумя периодами в истории каждой из этих задач.

В предыдущих параграфах было показано, что история всех четырех задач не оборвалась на этих доказательствах. Работы покорителей этих задач вызвали новые исследования, уточнявшие и развивавшие результаты их исследований. Благодаря этим исследованиям математика обогатилась новыми важными результатами и целыми разделами. А доказательства невозможности решения указанных задач в новом периоде приобрели современный вид. Эти исследования продолжаются и в наше время, а следовательно, продолжается и история знаменитых задач древности. Но наряду с трудами, развивавшими идеи Гаусса, Ванцеля и Линдемана, продолжались поиски новых способов точного и приближенного решения рассматриваемых четырех задач. Только в этот период математики, знакомые так или иначе с результатами открытий этих ученых, искали теперь уже не точные, а наилучшие приближенные решения с помощью циркуля и линейки, а точные решения указанных задач они находили с помощью других средств. Таких решений в XIX и XX столетиях получено большое количество. Многие из этих способов рассмотрены в книгах [2, 118 и др.], а также в IV главе данной книги. Здесь мы остановимся только на некоторых результатах зарубежных авторов.

Квадратура круга и спрямление окружности. Решение этих задач было связано с точным и приближенным построением и вычислением числа π.

1. Приближенные построения π и $\sqrt{\pi}$ представляют не только теоретический, но и практический интерес. Для практических целей часто требуется иметь способ построения прямолинейного отрезка, приближенно равного окружности данного круга, или получить приближенное значение величины площади круга. Чаще и проще всего это выполняется с помощью циркуля и линейки. В рассматриваемый период особое внимание при этом обращалось на точность выполнения этих построений. Но как бы ни был хорош способ построения этих величин, он не дает точного построения, он допускает так называемую теоретическую ошибку δ_1. Важно, чтобы эта ошибка была как можно меньше. И как бы тщательно ни выполнялось построение циркулем и линейкой, оно неизбежно тоже не абсолютно точно. Допускаемая при этом ошибка δ_2 будет тем больше, чем больше число примененных чертежных операций, особенно проведения прямых линий. С целью уменьшения полной ошибки $\delta=\delta_1+\delta_2$ необходимо применять наилучшие из существующих способов и выполнять как можно тщательнее построения циркулем и линейкой. В конце XIX и в начале XX столетий появилось большое число работ, посвященных теории ошибок в применении к начертательной геометрии [2; 253], указывающих пути построения, ведущие к уменьшению вероятной ошибки и к увеличению точности.

Эти исследования показали, в частности, что к числу лучших из известных методов относится и метод Маскерони (см. стр. 96), где построение осуществляется одним циркулем. Он дает величину $\frac{\pi}{2}=1{,}5707963$. Теоретическая ошибка δ_1 при этом достигает $4\cdot10^{-4}$, что при радиусе меньше 50 см дает вполне пригодные результаты для практики.

Известный итальянский математик Кремона (1830—1903) предложил такой сособ приближенного построения π. Возьмем круг с радиусом $OA=OB=R$ (рис. 68) и центральный угол $AOC=30°$. Проведем касательную к кругу в точке A, и на ней от C отложим отрезок $CD=3R$. Соединим точки B и D. Тогда BD будет приближенно равна полуокружности. Действительно,

$$AC=\frac{R}{3}\sqrt{3},\quad AD=3R-\frac{R}{3}\sqrt{3}\quad \text{и}\quad BD=R\sqrt{4+\frac{(9-\sqrt{3})^2}{9}}=$$

$$=\frac{R}{3}\sqrt{120-18\sqrt{3}}=R\cdot 3{,}141533,\quad \text{а}\ \frac{1}{2}C_0=\pi R=R\cdot 3{,}141592.$$

Следовательно, теоретическая ошибка $\delta_1=6\cdot 10^{-5}$ достигает допустимой для практики величины ошибки $\frac{1}{10}$ мм лишь при R=2 м. Построив отрезок, приближенно равный π, легко можно построить и отрезок, приближенно равный $\sqrt{\pi}$, как среднее пропорциональное между π и 1.

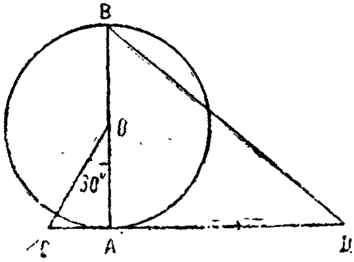


Рис. 68.

Но существуют и другие способы построения $\sqrt{\pi}$. Вот один из них, приведенный в книге [118; 304].

Возьмем круг с радиусом OA=OB=R (рис. 69). На диаметре AB и его продолжении отложим отрезки $OD=\frac{3}{5}R$, $OE=\frac{1}{2}R$ и $OF=\frac{3}{2}R$. Проведем нормаль к AB в точке O. Построим полукруги, диаметры которых равны DE и AF. Тогда OG — среднее пропорциональное между OD и OE, т. е.

$$OG=\sqrt{\frac{1}{2}R\cdot\frac{3}{5}R}=R\sqrt{\frac{3}{10}},$$

OH — среднее пропорциональное между OA и OF, т. е.

$$OH=R\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Тогда

$$GH=OG+OH=R\left(\sqrt{\frac{3}{10}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\approx R\cdot 1{,}77246\approx R\sqrt{\pi}.$$

Точное же значение $\sqrt{\pi}=1{,}77245\ldots$ Следовательно, GH с точностью до ста тысячных является стороной квадрата, равновеликого данному кругу.

2. Точное спрямление окружности и квадратура круга возможны только с помощью трансцендентных кривых. Раньше было показано (см. I главу), что точно спрямить окружность, т. е. построить отрезок, равный длине окружности, можно с по-

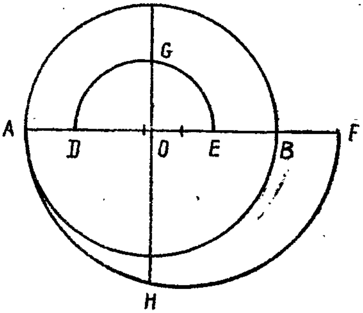


Рис. 69.

мощью квадратрисы и спирали Архимеда. В IV главе рассматривается пример спрямления окружности с помощью винтовой линии.

Для построения π, $\frac{\pi}{2}$, $2\pi, \ldots$ можно использовать и графики тригонометрических и обратных функций. Но во всех этих случаях предполагается, что мы каким-то образом умеем строить все указанные кривые.

Со времени создания интегрального исчисления стали применять определенное интегрирование и для вычисления длины кривых или дуг кривых $l = \int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$, где $y=f(x)$ — уравнение данной кривой, и стали говорить о спрямлении кривых, в том числе и окружности, с помощью определенного интеграла. Мы говорим теперь, что

$$2R\int\limits_{-R}^{+R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=2\pi R,$$

и считаем, что нашли точную длину окружности — «спрямили окружность». Но при этом вопрос о прямолинейном отрезке, равном длине окружности, не решается, при данном R мы не можем назвать и точное число, выражающее длину этой окружности, потому что не знаем точное значение π, выраженное, например, с помощью десятичных дробей.

Правда, теперь можно употреблять такие числа, которые с большой степенью точности приближаются к π. Известно, например, что Шенке и Ренч в статье «Вычисление числа π со 100.000 знаками» [142], опубликованной в 1962 г., сообщают, что ими с помощью ЭВМ в течение 8 ч. 43 мин. получено 100 000 десятичных знаков в числе π. При этом ими была использована формула Штермера (1896 г.):

$$\pi=24\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+8\operatorname{arctg}\frac{1}{57}+4\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

При составлении программы для машины, арктангенсы были предварительно разложены в ряды Тейлора. Полученное ими число верных знаков занимает 20 страниц петитом. Если бы на этой же машине вычислять π с миллионом десятичных знаков, то она должна была бы работать непрерывно несколько месяцев. Но теперь есть уже машины, которые значительно быстрее действуют.

Такая точность для π, конечно, не имеет практического значения, но для специалистов по теории чисел представляют некоторый интерес закономерности расположения цифр в десятичных знаках числа π.

Удвоение куба. После доказательства невозможности удвоения куба циркулем и линейкой (1837 г.) эта задача привлекала к себе внимание не только тех математиков, которые стремились улучшить это доказательство, но и тех, которые искали новые геометрические способы точного и приближенного построения $\sqrt[3]{2}$. Из множества такого рода способов, найденных в этот период, мы приведем для примера только три.

1. Буонафальче в своих работах и совместно с Пиерачини в 1876 — 1878 гг. [118; 224 — 226] дал три способа решения задачи об удвоении куба. Приведем один из них. Пусть ABCD — грань куба с ребром $AB=1$ (рис. 70), диагональ квадрата $BD=\sqrt{2}$; разделим BD на 6 равных частей и отложим на AD одну из этих частей $DE=\frac{\sqrt{2}}{6}$. Тогда BE и будет отрезок,

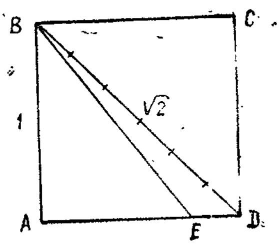


Рис. 70.

близкий к величине ребра искомого куба $x=\sqrt[3]{2}$. Действительно,

$$BE=\sqrt{1+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{74-12\sqrt{2}}{36}}=\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{37-6\sqrt{2}}=1{,}2586\ldots,$$

а точное значение $\sqrt[3]{2}=1{,}25992\ldots$, т. е. ошибка около $\frac{1}{1.000}$. Это хорошая точность для практических целей.

2. Боккали в 1884 г. [118; 226] показал, что $\sqrt[3]{2}\approx\frac{2}{3}[OF+BM]$ (рис. 71), где $OF=a_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $OB=1$ — ребро данного куба. Чтобы построить OF, опишем окружность с центром

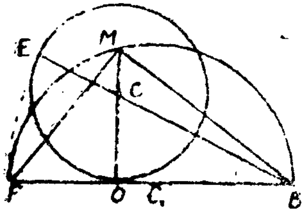


Рис. 71.

в C радиусом $OC=\frac{1}{2}$ **OB**, возьмем $CO \perp OB$, проведем BCE и отложим $BF=BE$. Тогда $OF=a_{10}$, $FM=a_5$. Теперь на FB, как на диаметре, построим круг, который пересечет продолжение OC в точке M. Соединим M с точками F и B. Так как

$$OF=a_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}61803\ldots \text{ и}$$

$$BM=\sqrt{OB\cdot BF}=\sqrt{1\cdot\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}=1{,}2720\ldots,$$

то $\frac{2}{3}(OF+BM)=1{,}26003\ldots$, а $\sqrt[3]{2}=1{,}25992\ldots$

3. Валлен в 1911 г. предложил следующее приближенное построение $\sqrt[3]{2}\approx\frac{349}{277}=\dfrac{2^2+\left(\frac{5}{9}\right)^2}{1^2+\left(1+\frac{5}{9}\right)^2}$.

Строим квадрат ABCN со стороной, равной 1 (рис. 72). На продолжении AB отложим $BO=\frac{5}{9}$. Проведем ON. На продолжении BC откладываем $CZ=1$. На ON откладываем $OZ'=OZ$ и из точки Z' проведем $Z'Q \parallel NZ$, соединим N и Q. Отложив $OE=1$, проведем $EU \parallel NQ$. Теперь видно, что

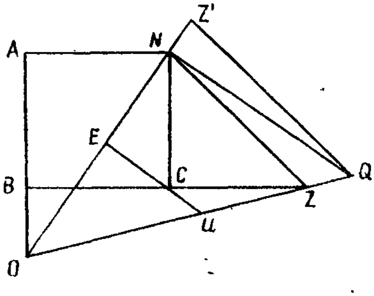


Рис. 72.

$$ON^2=1^2+\left(1+\frac{5}{9}\right)^2,\quad OZ^2=2^2+\left(\frac{5}{9}\right)^2,$$

$$OQ:OZ=OZ':ON,\quad OQ=\frac{OZ^2}{ON},\quad OU:1=OQ:ON,$$

откуда

$$OU=\frac{OQ}{ON}=\frac{OZ^2}{ON^2}=\frac{2^2+\left(\frac{5}{9}\right)^2}{1^2+\left(1+\frac{5}{9}\right)^2}=\frac{349}{277}\approx\sqrt[3]{2}.$$

Так как $\frac{349}{277}=1{,}25992275$ мало отличается от $\sqrt[3]{2}=1{,}2599200...$, то и отрезок OU очень близок к истинному значению ребра куба, объем которого в 2 раза больше данного куба.

Деление угла на равные части. Задача о делении угла φ на три равные части привлекала к себе внимание, вероятно, не меньшего числа ученых и любителей математики, чем задачи о квадратуре круга и об удвоении куба.

Отысканию способов приближенного и точного деления любого угла на равные части уделяли внимание многие математики XIX в. Не забывают эту задачу и математики нашего времени. Некоторые ученые и инженеры не только разрабатывали методы решения этой задачи, но и строили инструменты, позволяющие использовать эти методы в практических целях.

В XIX столетии и до появления работы Ванцеля (1837) и после того, как он строго доказал невозможность деления на три равные части произвольного угла с помощью циркуля и линейки, многие математики обращались к этой задаче с целью отыскания новых, более простых и более изящных методов решения ее. Одним из методов точного решения задачи трисекции угла является *метод Шаля.*

Шаль (1793—1880) — известный французский математик. Особенно заметный след своего творчества он оставил в области геометрии. Проявляя большой интерес к истории геометрии, он не мог не обратить внимание и на знаменитые геометрические задачи древних. А заинтересовавшись этими задачами, он предложил, в частности, свой метод трисекции угла. Мы укажем здесь только путь, по которому шел Шаль.

Если требуется разделить угол AOB на три равные части (рис. 73), то поступим так: из точки O, как из центра, опишем окружность произвольным радиусом. В точке A проведем касательную к окружности. Затем построим произвольный угол $TAP_2=\varphi$ и такой же угол $\varphi=BOP_1$, где P_1 и P_2 — точки пересечения сторон углов с окружностью, а P — точка пересечения сторон этих углов между собой, описывающая некоторую кривую при изменении φ.

Очевидно, при любых P_1 и P_2 $\angle AOP_2=2\angle BOP_1$. Если точ-

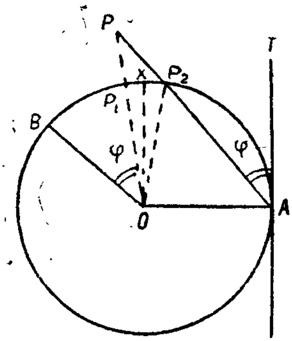


Рис. 73.

ки P_1 и P_2 совпадают в одной точке X, то $\angle AOX = 2\angle BOX$. В этом случае P_1, P_2 и P совпадают, и точка эта будет находиться на той кривой, которая при пересечении с окружностью и даст точку, делящую дугу APB на две части, одна из которых $XB = \frac{1}{3} \ x(p)B$. Тем самым задача оказывается решенной. Более детальное исследование этого решения требует дополнительных построений и привлечения аналитических средств[6].

В нашем столетии некоторые математики продолжают проявлять интерес и к трисекции угла. Стараясь отыскать новые способы исследования, используют известные кривые, новые инструменты и новые разделы математики для точного и приближенного решения этой задачи. Кроме методов, подобных методу Шаля, точного решения рассматриваемой задачи позволяют достичь и некоторые инструменты для деления угла на три равные части. Проблема трисекции угла имела и поныне имеет не только теоретическое, но и практическое значение. Решение этой проблемы, как показывает ее история, связано с использованием различных кривых. Необходимость же построения этих кривых (квадратриса, конхоида, улитка Паскаля, конические сечения и др.) заставила некоторых ученых и конструкторов создавать инструменты для вычерчивания этих кривых[7].

Вместе с тем независимо от построения указанных кривых создавались инструменты, которые позволяли непосредственно точно или приближенно делить данный угол на три равные части. Мы здесь приведем описание некоторых инструментов, с помощью которых непосредственно можно точно разделить данный угол на три равные части.

1. Простой инструмент для деления произвольного угла на три равные части предложил немецкий ученый Фельдблюм (1899). Известному в то время инструмент для деления угла пополам он дополнил, и получился прибор для трисекции угла. Из дерева или металла делаем указанные на чертеже линейки и скрепляем их так, чтобы сохранилась подвижность во всех указанных точках. Причем

$$AB = BC, \ CD = DA \text{ и } BE = EF = FQ = QB.$$

Тогда BD будет биссектрисой угла ABC, а CB — биссектрисой угла DBQ. Следовательно,

$$\angle ABD = \angle DBC = \angle CBQ \text{ и } \angle ABD = \frac{1}{3} \angle ABQ.$$

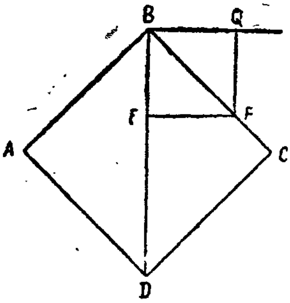


Рис. 74.

Поместив точку B нашего прибора в вершину данного угла и направив его звенья AB и BQ по сторонам этого угла, мы получим его деление на три равные части прямыми BD и BC (рис. 74).

2. Сравнительно простым является и такой прибор: из дерева делается полукруг, к нему прикрепляются две деревянные рейки: одна из них DB—касательная к кругу в конце диаметра, вторая, один из краев которой совпадает с диаметром, проходит за окружность (в сторону первой рейки) на длину радиуса круга, т. е. AD=DO=OE (рис. 75). Если требуется разделить (сравнительно небольшой) угол ABF на три равные части, то, поместив инструмент в плоскость чертежа, направляем касательную рейку через точку B, одна сторона угла ABF должна касаться круга, и продвигаем прибор так, чтобы конец второй рейки (A) оказался бы на второй стороне данного угла. Тогда мы и получим

$$\angle ABD = \angle DBO = \angle OBF^{8}.$$

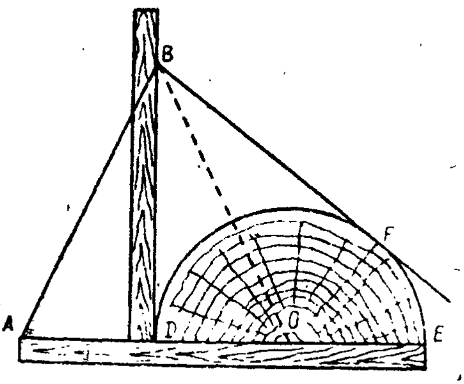


Рис. 75.

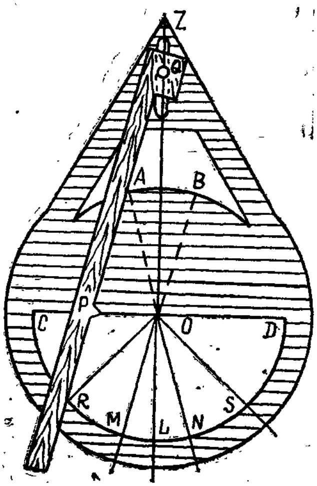


Рис. 76.

3. Опишем еще устройство трисектора Амадори (1883 г.). Основные части этого трисектора — круг ABDSNMRC и передвижная линейка PQ (рис. 76), сделанные из дерева или жести. Круг может быть любого радиуса, линейка вращается вокруг точки Q так, чтобы точка P передвигалась по диаметру CD, а Q передвигается в отверстии $\perp$ CD. Расстояние от P до Q должно равняться диаметру круга CD. Чтобы разделить этим инструментом данный угол ROS на три равные части, мы делим его пополам линейкой LZ. Теперь располагаем прибор так, чтобы центр круга находился в вершине угла O, а диаметр CD являлся бы перпендикуляром к LZ. Тогда точка Q будет на LZ. Линейку PQ располагают так, чтобы ее ребро, на котором находятся точки P и Q, проходило бы через точку R (точка пересечения стороны угла с окружностью). Линейка PQ при этом пересечет окружность еще в одной точке (A). Проведем диаметр через точки O и A, он пересечет окружность в точке N. Передвинем теперь линейку так, чтобы ее ребро PQ проходило через точку пересечения второй стороны угла с окружностью (S), это же ребро линейки пересечет окружность и в точке B. Проведем диаметр BO, получим на окружности точку M. И тем самым угол ROS разделен на три равные части: $\angle ROM = \angle MON = \angle NOS$[9].

Кроме способов точной трисекции угла, в XIX—XX вв. разрабатывались также методы приближенного деления угла на три равные части. Итальянский математик Е. Коминотто в своей книге «Приближенная трисекция угла» (1895) [103; 254] приводит ряд способов, дающих различные степени приближения при делении угла на три равные части, в том числе и свой метод.

1. Метод Коминотто состоит в следующем. Пусть требуется разделить на три части угол ABC (рис. 77). Из точки B, как из центра, произвольным радиусом описываем дугу AC. Делим радиус AB на три равные части точками D и E. Затем из точек B и E, как из центров, радиусом, равным $\frac{1}{3}$ AB, описываем полукруги. На полукруге AD от точки A откладываем дугу AH, равную дуге GD. Проводим прямую DH, отмечаем на ней точку I так, чтобы $ID = DA$. Проводим прямую

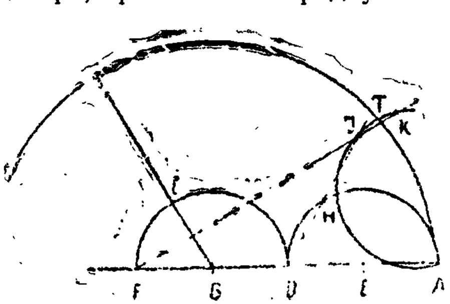


Рис. 77.

FI, отмечаем на ней точку K так, чтобы FK=FA. Теперь проведем окружность, проходящую через точки A, I, K. Эта окружность пересечет дугу AC в некоторой точке T. Утверждается, что дуга AT будет приблизительно равна $\frac{1}{3}$ дуги AC или $\angle ABT \approx \frac{1}{3} \angle ABC$[10].

2. В указанной работе Коминотто упоминает еще об одном очень простом и достаточно точном методе приближенной трисекции угла. Вот его описание. Пусть дан угол DBE, который нужно разделить на три равные части. Поступаем в этом случае так: из вершины угла произвольным радиусом R=BD==BE описываем окружность. Проведем биссектрису данного угла; она пересечет дугу DE в точке H. Отметим на ее продолжении точку F так, чтобы BH=HF=R. Соединим точку F с концом диаметра D′. Прямая FD′ пересечет окружность в точке G (рис. 78). Утверждается, что дуга EG будет приближенно равна $\frac{1}{3}$ дуги DE или $\angle GBE \approx \frac{1}{3} \angle DBE$. Возьмем для примера $\angle DBC = 90°$ и посмотрим, какую точность при решении нашей задачи дает указанный метод. Если взять точку B за начало прямоугольной системы координат, DBD′ — за ось OX и положить R=1, то уравнение окружности будет $x^2+y^2=1$, а уравнение прямой, проходящей через точки $D'(-1,0)$ и $F(\sqrt{2},\sqrt{2})$, будет $y=\frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{2}+1}$. Найдем абсциссу точки G, решая совместно уравнения окружности и прямой, найдем $x=0{,}49$. Точное же значение $x=0{,}5$, ошибка не превышает 0,01°. Известны также методы Р. Монти [118; 258] и другие методы приближенного решения трисекции угла [112]. Из статьи Иглиша [45] видно, что Бибербах решал эту задачу с помощью циркуля и угольника. В конце XIX и в XX столетии появились и более общие методы деления угла на три части и решения других знаменитых задач древности. Из этих методов особого внимания заслуживают метод номографии и метод последовательных

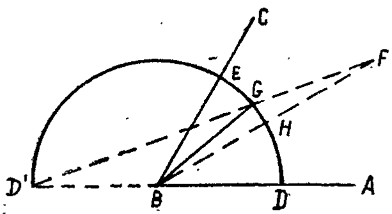


Рис. 78.

приближений. Основной вклад в развитие этих методов внесли советские математики (см. IV главу).

Деление окружности на равные части (построение правильных многоугольников). В XIX и XX вв. появилось много книг и журнальных статей, в которых рассматривались вопросы, связанные с делением окружности на равные части и с построением правильных многоугольников. Свои работы этой проблеме посвящали Бахман, Серре, Понселе, Штейнер, Шротер, Ф. Клейн, Штаудт, Гюнтш, Падоа и др. Мы остановимся только на некоторых новых результатах, полученных при решении этой задачи в указанный период. Одним из важных результатов такого рода явился метод Штаудта.

Известный немецкий геометр Х. Штаудт (1798—1867) дал изящные способы построения пяти- и 17-угольников. Способ Штаудта построения правильного 5-угольника можно изложить так. В данном круге (рис. 79) проведем два взаимно перпенди-

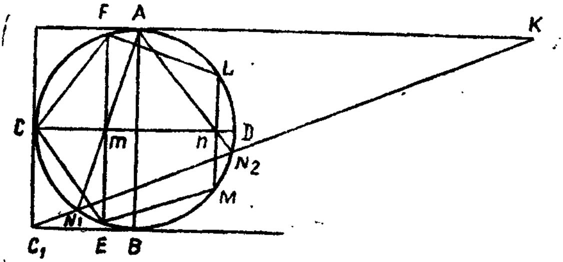


Рис. 79.

кулярных диаметра AB и CD и в точках A, C и B проведем касательные к кругу. Отложим $AK=2AB$. Прямая C_1K пересечет окружность в точках N_1 и N_2, а прямые AN_1 и AN_2 пересекут CD в точках m и n. Проведем через точки m и n прямые EF и ML, параллельные AB. Точки C, E, M, L и F будут точками деления окружности на 5 равных частей. Соединив эти точки, мы и получим правильный пятиугольник[11].

Способ Штаудта построения правильного 17-угольника тоже интересен, хотя сложнее, чем способ построения пятиугольника [см. 2; 198—213 и 111; 177—188].

Рассмотрим построение 17-угольника с помощью циркуля и линейки, известное в литературе как «способ Серре-Бахмана». В этом случае так же, как и в других аналогичных, дается новый способ построения корней указанной выше системы уравнений. Пусть $OA=1$ — радиус окружности, которую надо разделить на 17 равных частей (рис. 80). Прямах $OX \perp OA$ и на ней указано направление. Построим отрезок $OB = -\frac{1}{4}$. Из B,

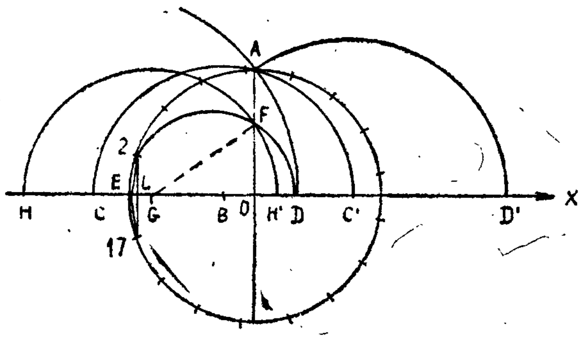


Рис. 80.

как из центра, радиусом BA опишем окружность. Тогда

$$BA = BC = BC' = \frac{\sqrt{17}}{4},$$

$$OC = OB + BC = \frac{-1-\sqrt{17}}{4} = \frac{\eta_1}{2}, \quad OC' = OB + BC' = \frac{-1+\sqrt{17}}{4} = \frac{\eta}{2}.$$

Пусть теперь окружности с центрами в C и C′ и радиусами CA и C′A пересекают положительное направление OX в точках D и D′. Тогда $C'A = C'D'$ и $CA = CD$,

$$OD' = OC' + C'D' = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1} = Z,$$

$$OD = OC + CD = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1} = Z_2.$$

Положим $OE = -1$. Затем на отрезке DE, как на диаметре, строим полукруг, откладываем $FG = \frac{1}{2} OD'$ и из точки G, как из центра, описываем окружность радиусом GF и получаем на оси OX точки пересечения H и H′. Тогда $OH + OH' = HH' = 2GH' = OD' = Z$, $OH \cdot OH' = OF^2 = -OE \cdot OD = Z^2$, так как $OE = -1$, а $-OE = 1$. Следовательно, эти отрезки OH и OH′ должны быть корнями уравнения

$$x^2 - zx + z^2 = 0, \text{ т. е. } OH = y, \text{ а } OH' = y_1,$$

$\frac{y}{2} = \cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{2}$ OH и $OH' = y_1$ — сторона правильного 34-угольника. Построим, наконец, $OL = \frac{1}{2}$ OH и в точке L проведем перпендикуляр к OX, он пересечет окружность в точках 2 и 17 искомого 17-угольника.

Приведем описание одного геометрического способа построения стороны правильного 17-угольника, принадлежащего Ричманду (1893 г.). Возьмем полукруг с радиусом OP_0 (рис. 81), проведем $OB \perp OP_0$. Отложим на OB отрезок $OI = \frac{1}{4}OB$. Соединим P_0 с I. Проведем теперь IE так, чтобы $\angle OIE = \frac{1}{4}\angle OIP_0$, а IF — так, чтобы $FIE = 45°$. На P_0F, как на диаметре, построим полуокружность, точку пересечения ее с радиусом OB обозначим K. Затем из точки E радиусом EK опишем окружность. В точках ее пересечения с диаметром AP_0, т. е. в N_3 и N_5 восставим перпендикуляры к AP_0, которые пересекут первоначальную окружность в точках P_3 и P_5. Утверждается, что дуги $P_5P_3 = P_3P_1$ равны $\frac{2}{17}$ окружности, а хорда

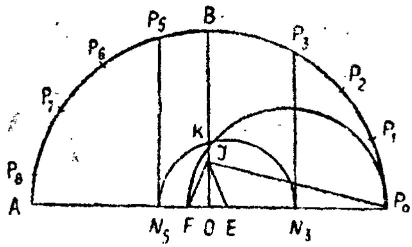


Рис. 81.

$P_0P_1 = \frac{1}{2}P_1P_3$ — сторона правильного 17-угольника[12].

Интересный практический прием приближенного деления окружности на n равных частей (или построение n-угольника) был предложен Н. Бионом в его работе «О построениях и употреблении инструментов в математике». Этот способ состоит в следующем: в данном круге (рис. 82) проводим диаметр AB, делим его на n частей (на нашем чертеже n=6) и строим на нем равносторонний треугольник ACB. Затем из точки C через вторую точку деления на диаметре проводим прямую CD. Тогда дуга AD будет n-я часть окружности, а хорда AD будет стороной правильного n-угольника[13].

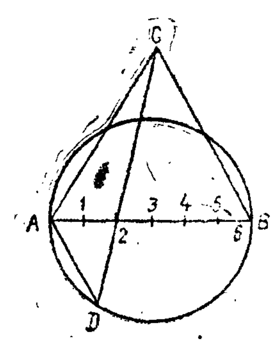


Рис. 82.

Теория квадратуры круговых замкнутых луночек в XIX и начале XX ст.

Четыре знаменитые задачи-«крепости», как видно из предыдущего, пали под напором бурно развивающейся математики в XIX веке. Их дальнейшая судьба, как показано в этой части главы, хотя и была различной, но история каждой из них в своеобразном виде продолжалась и в XIX, и в XX столетии. Иной была судьба пятой задачи—квадратуры круговых луночек циркулем и линейкой: она оказалась самой «прочной» крепостью», покорившейся только советским математикам: Н. Г. Чеботареву и А. В. Дороднову в 30—40-х годах нашего столетия.

Попытки же, направленные на покорение этой крепости, повторялись. О результатах некоторых из этих попыток, оставивших след в истории задачи о квадратуре луночек, и будет идти речь в этом разделе.

В следующей главе будет показано, как обогатили теорию квадратуры луночек советские математики.

О работе Клаузена. В 1840 г. в «Журнале Крелля» была опубликована работа немецкого математика Т. Клаузена (1801—1885) «Четыре новых случая квадрирования луночек» [115].

Автор ошибочно считал, что Гиппократ Хиосский рассмотрел только один случай квадрируемых луночек ($m:n=2:1$), а он (Клаузен) нашел впервые четыре новых случая квадрируемых круговых луночек:

$$m:n=3:1,\ 3:2,\ 5:1 \text{ и } 5:3.$$

В действительности же Гиппократ Хиосский рассмотрел не один, а три случая (см. главу I); все пять случаев квадрируемых луночек рассмотрели математики XVIII столетия (см. главу II). И хотя Клаузен фактически только повторил то, что было известно Уинквисту (Валлениусу) и Эйлеру еще в начале второй половины XVIII в., все же его работа была шагом вперед в теории круговых замкнутых луночек. Мы изложим здесь кратко содержание указанной работы, сопроводив его чертежами, созданными нами, так как мы не имели чертежей Клаузена. Допустим, что секторы ADBO и ACBO′ равновелики, $\varphi=m\alpha$, $\varphi'=n\alpha$, (рис. 83),

тогда
$$r^2\varphi=r'^2\varphi' \tag{38}$$
$$\text{и } MB=r\sin m\alpha=r'\sin n\alpha. \tag{39}$$

Откуда

$$\frac{r}{r^1}=\frac{\sin n\alpha}{\sin m\alpha},\quad \frac{r^2}{r'^2}=\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2 m\alpha}=\frac{\varphi^1}{\varphi}=\frac{n\alpha}{m\alpha}=\frac{n}{m}.$$

Следовательно,

$$m \sin^2 n\alpha = n \sin^2 m\alpha, \ \sqrt{m} \sin n\alpha = \sqrt{n} \sin m\alpha. \quad (40)$$

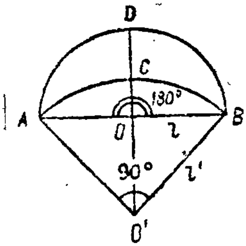


Рис. 83.

Исследуя уравнение (40) при различных m и n, Клаузен указывает пять различных случаев квадратуры круговых луночек.

I. Первый случай (когда $m=2$, $n=1$) «был известен Гиппократу». При этом уравнение (40) решается действительно просто:

$$\sqrt{2} \sin\alpha = \sin 2\alpha,$$

или

$$2 \sin\alpha \cos\alpha = \sqrt{2} \sin\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \alpha = 45° = \varphi', \ 2\varphi' = 90°, \ 2\varphi = 4\alpha = 180°.$$

Луночка в этом случае, как видно, строится легко.

Следующие четыре случая Клаузен рассматривает уже более подробно.

II. Если $m=3$ и $n=1$, то уравнение (40) примет вид:

$$\sqrt{3} \sin\alpha = \sin 3\alpha;$$

$$\sqrt{3} \sin\alpha = \sin\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos\alpha = \sin\alpha \cos 2\alpha + 2\sin\alpha \cos^2\alpha;$$

$$\sqrt{3} = \cos 2\alpha + 2\cos^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha = 1 + 2\cos 2\alpha.$$

Откуда $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$. Таким образом, и в этом случае в решение входят только рациональные числа и квадратный радикал, а следовательно, луночку с центральными углами $2\varphi' \approx 68{,}5°$ и $2\varphi \approx \approx 205{,}6$[14] можно построить с помощью циркуля и линейки, и ее площадь будет равна площади прямолинейной фигуры $AOBO_1A$ (рис. 84).

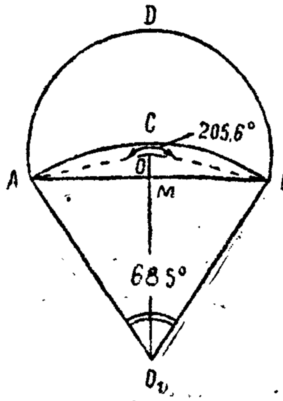


Рис. 84.

III. При $m=3$ и $n=2$ уравнение (40) имеет вид:

$$\sqrt{3} \sin 2\alpha = \sqrt{2} \sin 3\alpha \quad \text{или}$$

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

После ряда преобразований получим

$$8\cos^2 2\alpha+2\cos 2\alpha-4=0, \quad \cos 2\alpha=\frac{\sqrt{33}-1}{8},$$

а соответствующие углы секторов приближенно 107,2 и 160,9° (рис. 85).

IV. Если $m=5$ и $n=1$, то уравнение (40) будет

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha}=\sqrt{5}.$$

Проведя соответствующие преобразования, Клаузен получает в этом случае $\cos 2\alpha=\dfrac{\sqrt{5+4\sqrt{5}-1}}{4}$, т. е.

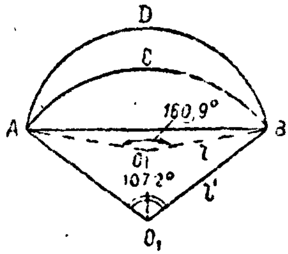


Рис. 85.

уравнение (40) разрешается с помощью конечной цепочки квадратных радикалов, а следовательно, разрешимо с помощью циркуля и линейки. Углы секторов в этом случае приближенно равны 46,9 и 234,4°. Площадь луночки ACBDA в этом случае (рис. 86) равна площади прямолинейной фигуры $AOBO_1A$.

V. Пятый случай: $m=5$, $n=3$.

Тогда уравнение (40) примет вид:

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha}=\frac{4\cos^2 2\alpha+2\cos 2\alpha-1}{2\cos 2\alpha+1}=\sqrt{\frac{5}{3}};$$

$$4\sqrt{3}\cos^2 2\alpha+2\,(\sqrt{3}-\sqrt{5})\cos 2\alpha-(\sqrt{5}+\sqrt{3})=0.$$

Откуда

$$\cos 2\alpha=\frac{-2(\sqrt{3}-\sqrt{5})+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2+4\sqrt{3}\,(\sqrt{5}+\sqrt{3})}}{4\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{20}{3}+\sqrt{\frac{20}{3}}}-1+\sqrt{\frac{5}{3}}}{4},$$

а углы секторов будут 100,8 и 168°. Площадь луночки в этом случае равна площади прямолинейной фигуры $AOBO_1A$ (рис. 87). В заключение своей небольшой по объему статьи Клаузен

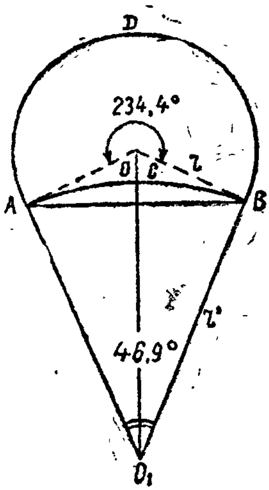


Рис. 86.

отметил, что во всех четырех случаях уравнения (40) имеют только по одному пригодному корню. И, наконец, вслед за Эйлером, но более решительно высказал важное предположение о том, что «едва ли найдутся другие соотношения углов секторов, луночки которых могут быть квадрируемы с помощью циркуля и линейки».

Эта работа Клаузена сыграла все же положительную роль в истории квадрирования луночек: результаты ее (в отличие от результатов работ математиков XVIII в., писавших на латинском языке) были широко известны, высказанное предположение Клаузена направило внимание математиков на поиски доказательства того, что, кроме указанных пяти случаев, нет других луночек, квадрируемых с помощью циркуля и линейки.

Результаты исследований Э. Ландау. В начале XX в. для математиков, знакомых с сущностью проблемы квадратуры круговых замкнутых луночек, было уже ясно, что для ее решения необходимо обращаться за помощью не к геометрии, а к алгебре, теории чисел и к математическому анализу.

Поэтому не приходится удивляться тому, что в 1903 г. появилась работа «О квадрируемых луночках» одного из известных специалистов в области теории чисел и теории аналитических функций Э. Ландау (1877 — 1938). Клаузен и другие предшественники Ландау считали, что для квадрируемости круговых замкнутых луночек необходимо, чтобы отношение m : n было рациональным и чтобы соответствующие сектора, образованные дугами, ограничивающими луночку, были бы равны или чтобы разность их площадей равнялась нулю.

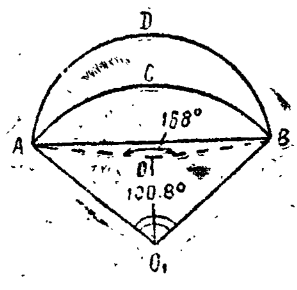


Рис. 87.

Ландау решил проверить достаточность последнего требования. С этой целью он полагает, что

$$r^2\varphi - r'^2\varphi' = C, \tag{41}$$

где C — алгебраическое число, не равное нулю и содержащее квадратические иррациональности. Если общая хорда равна 2, то

$$r\sin\varphi = r'\sin\varphi' = 1 \text{ и } \frac{\varphi}{\sin^2\varphi} - \frac{\varphi'}{\sin^2\varphi'} = C. \tag{42}$$

Пусть $a=\sin\varphi$ и $b=\sin\varphi'$ — тоже алгебраические числа, меньше или равные 1 и содержащие квадратические иррациональности.

Полагая теперь, что
$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{m}{n} = P \tag{43}$$

— рациональное число, Ландау показывает, что в этом случае C должно равняться нулю. Действительно, из (43) $\varphi'=p\varphi$ уравнение (42) будет

$$\frac{\varphi}{a^2} - \frac{p\varphi}{b^2} = C \quad \text{или} \quad \frac{1}{a^2} - \frac{p}{b^2} = \frac{c}{\varphi}. \tag{43'}$$

При $c\neq 0$, $\frac{1}{a^2} - \frac{p}{b^2} \neq 0$ и $\varphi = \dfrac{c}{\frac{1}{a^2} - \frac{p}{b^2}}$ — алгебраическое число, не равное нулю, так как a, в, с и р — алгебраические числа. Но тогда по теореме Линдемана-Вейерштрасса (см. стр. 185) $\sin\varphi$ фолжен быть трансцендентным числом, что противоречит предположению. Следовательно, $c=0$, и при неравновеликих секторах не может быть квадрируемых круговых замкнутых луночек.

Итак, $\frac{1}{a^2} - \frac{p}{b^2} = 0$, откуда $p = \frac{b^2}{a^2}$, $\sqrt{p}\,a=b$, $\sqrt{p}\sin\varphi = \sin p\varphi$.

(44)

И задача о квадрировании луночек сводится к ответу на вопрос: при каких значениях р, входящих в (44), $\sin\varphi$ и $\sin p\varphi$ выражаются через рациональные числа или квадратические иррациональности. Ландау показывает, но это было известно и ранее, что при $p=2$, 3, $\frac{3}{2}$, 5 и $\frac{5}{3}$ луночки будут квадрируемы. Для него было ясно также, что отсюда еще не следует, что нет других значений, удовлетворяющих указанному условию, при которых будут получаться квадрируемые луночки.

Правда, Ландау в этой работе доказал одну достаточно общую теорему: «Если отношение двух центральных углов 2φ и $2\varphi'$ является простым числом, не принадлежащим Гауссовым числам $2^{2^{\nu}}+1$, то луночка не квадрируема». Но и эта теорема, как видно, не решала вопрос: существуют ли квадрируемые луночки, кроме известных 5 случаев. Неясным оставался и такой вопрос: будут ли луночки квадрируемы во всех случаях, когда отношение центральных углов 2φ и $2\varphi'$ будет простым числом вида $2^{2\nu}+1$. На последний вопрос дал отрицательный ответ болгарский математик Чакалов.

Вклад Чакалова в современную теорию квадратуры луночек. В 1929 и 1930 гг. болгарский математик Чакалов опубликовал работы, посвященные квадрированию луночек. Мы остановимся только на результатах его работы «К проблеме квадрирования луночек» [143].

В этой работе Чакалов дал ответ на вопрос, поставленный в конце предыдущего раздела: он доказал, что при $P=2\varphi:2\varphi'=$ $=2^{2^2}+1=17$ луночка не будет квадрируема. Кроме того, он преобразовал уравнение квадратуры луночек $\left(\frac{\sin m\Theta}{\sin n\Theta}\right)^2=\frac{m}{n}$ с помощью подстановки $l^{i\theta}=x$, придав уравнению ясно выраженный алгебраический характер квадрирования:

$$n(x^m-1)^2-m(x^n-1)^2x^{m-n}=0. \qquad (45)$$

Уравнение (45) будем называть уравнением Чакалова. Им пользовались Чеботарев и Дороднов. Обозначая центральные углы секторов через 2φ и $2\varphi'$ и через P—простое Гауссово число, равное $n\,\frac{\varphi}{\varphi'}$, он говорил, что теорема Ландау для $P=3$ и $P=5$ соответствует случаям Гиппократа и Клаузена. Но эта теорема оставляет вопрос открытым для других простых гауссовых чисел, в частности и для $P=17$.

Сначала Чакалов доказывает теорему: «Если отношение обоих центральных углов $\frac{\varphi}{\varphi^1}=\frac{p}{n}$, где P — простое не Гауссово число и n — какое-нибудь число из 1, 2, 3... (P—1), то соответствующие луночки не квадрируемы». Предположив, что луночка при этом квадрируема, т. е. Θ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\sin p\Theta}{\sin n\Theta}\right)^2=\frac{p}{n}, \qquad (46)$$

а P и n взаимно-простые, то эта алгебраическая задача сводится к тому, чтобы показать, что $\sin\Theta$ есть число, содержащее рациональные числа и квадратные корни из них.

Полагая $e^{i\theta}=x,\ y=x^2$ и $z=y-1$,

он получает из (46):

$$(x^{2p}-1)^2=\frac{p}{n}\,x^{2p-2n};\quad n\left(\frac{y^p-1}{y-1}\right)^2=py^{p-n}\cdot\left(\frac{y^n-1}{y-1}\right)^2;$$

$$n\left[\frac{(z+1)^p-1}{z}\right]-p(z+1)^{p-n}\left[\frac{(z+1)^n-1}{z}\right]^2=0$$

$$\text{и } n\left[z^{p-1}+\binom{p}{1}z^{p-2}+\cdots\binom{p}{p-1}\right]^2-p(z+1)^{p-n}\left[z^{n-1}+\right.$$

$$\left.+\binom{n}{1}z^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}\right]^2=$$

$$=nz^{2p-2}+a_1z^{2p-3}+\cdots+a_{2p-2}=0, \tag{47}$$

где $a_1, a_2, \cdots, a_{2p-2}$ — целые делящиеся на P числа, а $n<p$ взаимно-простое с p; кроме того, свободный член $a_{2p-2}=np(p-n)$, делясь на p, не делится на p^2. На основании критерия неприводимости Эйзенштейна полином (47) неприводим в области рациональных чисел и степень его не является степенью двойки. Следовательно, уравнение (47) неразрешимо в квадратных радикалах, и теорема доказана. Но из этой теоремы Ландау-Чакалова еще не следует, что если p — простое Гауссово число, например, $p=17$, а $n=1, 2, \ldots 16 \ldots$, то луночка будет квадрируема. Чакалов и показывает дальше, что при $p=17$ и $n=1$, т. е. при $\varphi:\varphi'=17$ луночка не будет квадрируемой. Доказательство его громоздкое, и мы не будем его приводить здесь полностью. Укажем только, что, положив $p=17$, $n=1$ и $x=2\cos 2\Theta$ в уравнении (46), он получает алгебраическое уравнение восьмой степени:

$$x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1-\sqrt{17}=0 \tag{48}$$

и показывает, что уравнение, коэффициенты которого принадлежат полю k $(\sqrt{17})$, неприводимо в k (17) и неразрешимо в квадратных радикалах. Следовательно, верна теорема: «Круговая луночка, для которой $\varphi:\varphi'=17$, не квадрируема циркулем и линейкой».

Но и после работы Чакалова оставался открытым основной вопрос: есть ли квадрируемые луночки, кроме известных пяти случаев? Окончательный ответ на него дали в 30-х — 40-х годах наши советские математики Н. Г. Чеботарев и А. В. Дороднов (см. главу IV).

О популяризации знаменитых задач древности в XIX—XX столетиях

Судьба знаменитых задач древности на всех этапах их истории во многом зависела от состояния разделов математики, необходимых для решения актуальных вопросов теории этих задач, а также от внимания, которое уделяли им математики. После решения четырех знаменитых задач древности интерес к этим задачам во многих странах заметно усилился, возросло число работ, посвященных истории и теории их. Ограниченный объем книги не позволяет нам изложить и те неполные еще материалы, которые мы имеем для характеристики состояния популяризации знаменитых задач древности в XIX—XX столетиях во Франции, Германии, Италии, Англии, США и Болгарии. Весьма общее представление об этом можно получить, познакомившись со списком работ в конце книги и с названием некоторых статей, вышедших в этих странах и упомянутых в тексте[15].

Более полное представление можно составить о популяризации этих задач в нашей стране (см. главу IV).

Интерес к пяти знаменитым задачам древности, как видно, не ослабел и после окончательного решения их в классической постановке. Новые вопросы и новые аспекты рассмотрения этих задач, возникшие после решений Гаусса, Ванцеля, Линдемана, Чеботарева и Дороднова, привлекли и привлекают к себе внимание математиков многих стран, в том числе и русских математиков. Но в последние десятилетия наиболее существенные результаты получены советскими математиками, они стали, действительно, главными творцами новой главы истории пяти знаменитых задач древности. Следующая глава нашей книги и посвящена характеристике результатов работы математиков нашей страны, особенно советских математиков.

Примечания к главе III

[1] Из дальнейшего будет видно, что при доказательстве своих верных теорем Ламберт опирается на одно положение, как на «очевидный факт», хотя это положение должно было быть доказано.

[2] Доказательство указанных лемм и теоремы см. [63].

[3] На связь этого уравнения с задачей деления окружности на равные части обратили внимание в начале XVIII ст. Муавр и Котес, но они не дали общей теории и не выяснили, каким должно быть n, чтобы корни его строились циркулем и линейкой

[4] $$\varepsilon^{17-m}=\varepsilon^{17}\varepsilon^{-m}=\varepsilon^{-m}=\cos\left(\frac{-m2\pi}{17}\right)+i\sin\left(\frac{-m2\pi}{17}\right)=$$
$$=\cos\frac{2m\pi}{17}-i\sin\frac{2m\pi}{17}.$$

[5] Доказательства теоремы теперь проводятся с помощью теоремы Безу и другими способами см. [18].

[6] Рекомендуется определить кривую, которую опишет точка P и получить ее уравнение, провести доказательство полностью.

[7] Желательно построить:

а) приборы для вычерчивания конических сечений, квадратрисы, спиралей, конхоиды, циссоиды, улитки Паскаля и других кривых, используемых при решении знаменитых задач древности;

б) приборы, описание которых дано в настоящей работе, и передать их в математические кабинеты.

[8] Доказать это равенство углов. Можно ли этими инструментами разделить данный угол на любое число равных частей?

[9] Предлагается:

а) построить такой трисектор;

б) доказать, что эти углы действительно будут равны между собой.

[10] Предположив, что $\angle ABC = 180°$ и положив $R = 1$, показать, что в этом случае значение хорды AT, полученной указанным способом, отличается от истинного значения ($AT = 1$) на величину, меньшую 0,04.

[11] Читателям рекомендуется доказать это.

[12] Рекомендуется доказать справедливость этого способа, воспользовавшись при этом тем, что $\operatorname{tg}\alpha$ и $-\operatorname{ctg}\alpha$ являются корнями уравнения:

$$x^2 + 2x \operatorname{ctg} 2\alpha - 1 = 0 .$$

[13] Доказать, что этот метод Биона дает возможность точно построить стороны правильных треугольника, квадрата, шестиугольника. Какова ошибка при $n = 10$?

[14] Величина центральных углов в градусах указывается в этом случае и в дальнейшем приближенно.

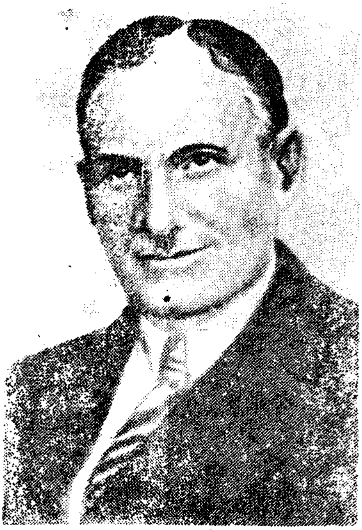
[15] В неполной библиографии работ немецких математиков, посвященных полностью или частично знаменитым задачам древности, переданной нам Лейпцигской библиотекой, указано свыше 200 работ.

А. Марков

Н. Четверухин

Д. Мордухай—Болтовской

Н. Чеботарев



Н. Несторович

А. Смогоржевский

А. Дороднов

Глава IV

Знаменитые задачи древности в нашей стране

Досоветский период

В далеком прошлом

Предки народов, населявших нашу страну, в далеком прошлом сталкивались с необходимостью решать многие задачи, в том числе вычислять площади кругов и длины окружностей, делить окружности, углы и дуги окружности на равные части и удваивать объемы кубических тел. При решении этих практических задач они пользовались рецептами, аналогичными рецептам древних египтян, вавилонян и др. (см. I главу).

Восточные славяне, армяне, грузины, предки народов среднеазиатских и прибалтийских республик еще в Древнем мире общались с другими народами.

В средние века предки узбеков, таджиков, туркменов и азербайджанцев наряду с арабами играли ведущую роль в популяризации и развитии некоторых разделов математики, в том числе и знаменитых задач древности (см. II главу). Культура и наука предков русского народа после нашествия татар и монголов сильно отставала от развития культуры западноевропейских народов. Но к XVII в. положение несколько изменилось.

В рукописях XVII в.

Некоторые рукописи, дошедшие до нас из XVII в., говорят о том, что в это время среди русских были люди, знакомые с математической культурой своих предков и западноевропейских народов. Авторы отдельных рукописей рассматривали и некоторые знаменитые задачи древности. Ю. А. Белый и К. И. Швецов описали одну геометрическую рукопись первой четверти XVII в. [8].

Эта рукопись—первое из известных в России систематическое изложение элементов геометрии. Иван Елизаров при составлении этой рукописи использовал ряд математических книг западноевропейских авторов, изданных в XVI и в начале XVII ст. и использовавших, в свою очередь, «Начала» Евклида и некоторые труды Архимеда. Например, определение круга и его частей дается в духе Евклида. О роли окружности («венца») в рукописи говорится: «Венец всем иным фигурам имеет начало, потому что есть ото всех чисче и мастеровитее и для того подобает быть первым». Далее говорится: «Сторона пятиугольника есть среднее геометрическое между его диагональю и большим отрезком диагонали, образуемым ее пересечением с другой диагональю».

В рукописи приводятся все три теоремы из «Измерения круга» Архимеда. Указывается, что прямоугольники со сторонами

$2\pi R$ и $\frac{1}{2}R$, $\frac{\pi R}{2}$ и $2R$ равновелики с кругом радиуса R.

Находится площадь сектора, указывается, что площади кругов относятся, как квадраты их диаметров, а окружности — как радиусы. Решаются задачи: разделить прямой угол на три равные части, построить две средние пропорциональные между двумя данными величинами, разделить окружность на 2, 3, 4, 6 и 8 равных частей. Деление окружности на 7 равных частей рекомендуется произвести раствором циркуля, равным половине стороны вписанного правильного треугольника[1]. Поставлена задача: построить квадрат, равновеликий данной луночке (из приложенного рисунка в рукописи видно, что рассматривался случай $m : n = 2 : 1$).

Следовательно, в рукописи речь фактически идет о всех пяти знаменитых задачах древности.

Из рукописей XVII в., описанных В. В. Бобыниным, остановимся только на одной [13]. В этой рукописи содержатся землемерные задачи. Одна из статей в ней озаглавлена: «Что какое место по округе ведать вдол и поперег». Рассмотрим некоторые задачи, в которых требуется находить площади круглых полей. «Было поле кругом 1488 сажен. И ты скажи: что в том будет четвероугольном сажен и что всреди круга в дол и поперег до околней меры мерою».

Безымянный автор требует в этом случае «учинить четвероуголно», то есть превратить данное круговое поле в равновеликое ему квадратное поле. Словесный рецепт для решения задачи гласит: «...возми меры, что кругом ево будет сажен и ту окружную меру раздели на 4 части; а четвертым паем таковожь число умножь: столко в том поле четвероугольных сажен будет, единую сажен не потеряешь». В нашей символике этот рецепт можно записать в виде формулы:

$$\left(\frac{2\pi R}{4}\right)^2=\pi R^2, \quad \text{откуда } \pi=4.$$

Другой рецепт можно записать $(2R)^2=\pi R^2$ и тоже $\pi=4$. В. В. Бобынин полагает, что весьма неточные рецепты позаимствованы из источников древнего происхождения. В этой же рукописи рассматриваются задачи на вычисление площади круга, где значение π более точное. К одной из них дается такой рецепт решения:

«Где похощешь в такове круге познать дробные сажени, и ты прежде познай, что поперег будет сажен и из того поперечника вычти 8-ю часть, и что затем останется, то стало того круга четвергоуголная стена. И ты сторону стороною умножь, и что во умножении будет столко в том кругу дробных сажен». Переводя это на язык символики, можно записать

$$\left(\frac{7}{8}\cdot 2R\right)^2=\frac{49}{16}R^2=\pi R^2=>\pi=\frac{49}{16}=3\ \frac{1}{16}=3{,}0625.$$

В задаче о нахождении длины окружности с диаметром $d=$ $=16$ саж. рекомендуется 16 умножить на 22 и разделить на 7, т. е.

$$2\pi R=\frac{16\cdot 22}{7}=50{,}2 \text{ саж., а } \pi=3{,}14.$$

В этой же рукописи содержится рецепт превращения квадрата в равновеликий круг:

«А похощешь то четвероуголное место учинить кругло в циркал, чтоб мерою таково-ж было, и ты познай прежде что будет мерою накось из угла в угол. Мерою как бы стена 5 сажен. Приложи-ж 2, будет 7 сажен из угла в угол[2]. И ты ту меру раздели на 5 частей и пятую часть вон вычти; останется 5 сажен и $^3/_5$ сажени, то поперег круга стало...» $=>\pi=3{,}189$.

Рассматриваются также стереометрические задачи: найти объем цилиндрической житницы и бочки. При нахождении объема бочки рекомендовалось сначала превратить ее в цилиндрическую по определенному рецепту, а затем — в «четвероуголную бочку».

Представляет интерес и рукопись первого курса лекций в России по философии, читанных Феофаном Прокоповичем в Киевской Академии в 1707—1708 гг.[3]. За счет устранения из программы отдельных вопросов схоластики Прокопович включил раздел по физике и математике. В 9-й главе рукописи этого курса говорится «О преобразовании фигур одних в другие и обратно, о кривой квадратрисе и о квадратуре круга». Он дает способ построения квадратрисы и применения ее при нахождении площади круга без строгого доказательства; упоминает при этом Динострата и Никомеда. О квадратуре круга Прокопович говорит, что эта задача широко известна среди математиков. Затем он рассматривает задачи о построении круга, равновеликого данному треугольнику, данному квадрату, сумме нескольких данных кругов. В 10-й главе он рассматривает задачи на построение овала, эллипса и спиралей. Лекции Прокоповича в то время, вероятно, играли заметную роль в популяризации теории геометрических построений и задач о квадратуре круга и циркуляторе квадрата.

Рассмотренные рукописи свидетельствуют о том, что в России того времени были люди, проявлявшие интерес и к знаменитым задачам древности.

В математических книгах Петровской эпохи

Л. Ф. Магницкий (1669—1739) — преподаватель Математико-Навигацкой школы, созданной в Петербурге по указанию Петра I в 1701 г. для «ради обучения мудролюбивых Российских отроков и всякого чина и возраста людей», издал в 1703 г. «Арифметику», [66], которую М. В. Ломоносов назвал «вратами в науку». Эта книга содержит не только вопросы арифметики, но и алгебры, тригонометрии, навигации и геометрии.

Вторая часть книги «Арифметика» названа «О геометрических чрез арифметику действуемых». Здесь указывается, как вычислять площадь круга, длину окружности, хорду круга и др. При этом он говорит: «В колесах же пропорция архимедова диаметра ко окружности как 7 к 22».

Вот его рецепт для нахождения площади круга («суперфиции») по данному диаметру: «Если дан диаметр и нужно найти суперфицию, то умножь циркумференцию или окружение через диаметр, и произведение раздели через 4. И по разделению придет суперфиция».

«Арифметика» Магницкого долгое время была основной учебной книгой, с помощью которой русские юноши приобщались к основам математики и к некоторым знаменитым задачам древности.

В 1708 г. появился первый учебник по геометрии на русском языке. Это был перевод книги А. Пюркенштейна, вышедшей в Вене в 1686 г. Переводчик назвал ее «Геометриа славенски землемерие» и дал подзаголовок «Приемы циркуля и линейки или избраннейшее начало во математических искуствах им же возможно легким и новым способом вскоре доступити землемерия и иных из оного происходящих искусств».

В 1709 г. она была переиздана с дополнением отдела «О превращении фигур плоских во иные такого же содержания» и главы о построении солнечных часов, написанной Петром I. В 1714 г. была издана в Петербурге «Геометриа практика» (четыре главы) как дополнение к указанной книге. В 1725 г. появилось в России 3-е издание книги Пюркенштейна с добавлениями.

В этой книге уделено много внимания основным геометрическим понятиям и фактам, преобразованию плоских фигур в равновеликие им, указаны приближенные способы деления окружности на n равных частей, даны способы вычисления площадей различных фигур, в частности сегмента и сектора круга.

И хотя во всех этих книгах, вышедших в России до открытия Петербургской Академии наук, нет еще строгих доказательств, нет выделения знаменитых задач древности в особый раздел и они даже так не называются, все же появление в России печатных учебников, в которых некоторые из знаменитых задач древности рассматривались уже как геометрические задачи, указывало о переходе этих задач и в России из числа сугубо практических в число геометрических, конструктивных задач.

Указанные выше рукописи и книги свидетельствуют также, что в России XVII и начала XVIII столетий увеличилось число людей, знакомых с математикой, в том числе и со знаменитыми задачами древности. И хотя в России еще не появились в то время оригинальные исследования теории этих задач, но в деле популяризации этих задач были сделаны важные шаги.

В XVIII столетии

После открытия Петербургской Академии наук (1725 г.) в России уделяли внимание знаменитым задачам древности, пожалуй, не меньше, чем во многих западноевропейских странах. Большая роль в этом принадлежала математикам, приглашенным на работу в Петербургскую Академию наук: Гольдбаху, Крафту, Д. Бернулли, особенно Л. Эйлеру и их русским ученикам. Во II главе указывалось уже, какой заметный вклад в теорию знаменитых задач древности внесли Эйлер, Д. Бернулли и Крафт. Их труды [148, 119, 120, 129, 130, 131] служили эффективным средством популяризации этих задач.

Но популяризации знаменитых задач древности в России того периода способствовали также статьи, учебники и лекции, в которых излагалась история и теория этих задач.

В 1729 г. Г. Крафт опубликовал большую статью «О квадратуре круга, трисекции угла и удвоении куба» в «Приложении» к газете «Санктпетербургские ведомости» (№ 53, 57, 65—67, 69), издававшейся Академией наук. Это «Приложение»-журнал «Исторические, генеалогические и географические примечания в ведомостях» пользовался популярностью у сравнительно большой части русских читателей, и, следовательно, статья Крафта сыграла заметную роль в ознакомлении русских с тремя знаменитыми задачами древности. Крафт указывает, что эти задачи с помощью циркуля и линейки еще не решены. «Но если бы, — говорит он, — удалось найти квадратуру круга, то это имело бы большое научное значение для геометрии и астрономии... В геометрии каждое изыскание многим другим помощь дает, и такие изыскания никогда так не чинятся, чтобы от оных другие пользы не происходили».

Он не утверждает, что решение этих задач невозможно циркулем и линейкой; но если бы удалось доказать, что в такой постановке решение их невозможно, то это имело бы не меньшее значение, чем положительное решение, «ибо в таких вещах почти все равно хотят предложенное решить, или невозможность решения доказать». Крафт говорит и о том, что занятия рассматриваемыми задачами, если они и не дают окончательного решения их, далеко не всегда являются бесполезными, ибо в науке часто открывают не то, что искали, а то, что узнали «попутно». Точку зрения Крафта на три указанные задачи, по-видимому, разделяли и другие математики, работавшие в то время в Петербургской Академии наук.

Вероятно, не без участия академических математиков решено было осуществить и первый перевод на русский язык «Начал» Евклида в переработке бельгийского математика А. Токэ (1654). Эта книга содержала много материала, связанного с измерением площадей и объемов. Токэ при переработке опустил некоторые трудные для понимания части «Начал», но зато присоединил к этой книге переделку ряда теорем Архимеда из сочинений «Об измерении круга» и «О шаре и цилиндре». В частности, здесь рассматриваются и приближенные значения отношения окружности к диаметру.

Первая часть этой переработки Токэ в переводе И. Струева вышла в России в 1739 г., а в 1745 г. вышла и вторая часть: «Архимедовы теоремы Андреем Таккветом езуитом выбранные и Г. П. Домке сокращенные, с латинского на русский язык хирургиусом Иваном Сатаровым преложенные».

В 1740 г. для учащихся гимназии был издан на немецком языке учебник по геометрии, автором которого являлся Г. В.

Крафт. В 1748 г. эта книга была переведена на русский язык и издана в Петербурге под названием «Краткое руководство к теоретической геометрии в пользу учащегося в гимназии при императорской Академии наук Российского юношества, сочинено той же Академии наук членом Георгом Крафтом и переведено с немецкого языка переводчиком Иваном Голубцевым». В 1764 г. вышло 2-е издание этой геометрии.

По этой книге изучали элементарную геометрию многие русские юноши. В ней содержались не только определения и теоремы, но и доказательства последних. Из этой книги читатели узнавали кое-что и о знаменитых задачах древности. Здесь доказывается, например, что отношение длин окружностей равно отношению их радиусов и отношение площадей кругов равно отношению квадратов их радиусов (или диаметров); находятся площади секторов и сегментов круга. Отношение диаметра к окружности принимается равным 113/355.

Полагая диаметр равным 113 и окружность 355, Крафт рассматривает отношение площади квадрата, построенного на диаметре, к площади круга, и находит его равным

$$(113)^2 : \left(\frac{113}{2}\right)^2 \cdot \frac{355}{113} = 452 : 355.$$

Крафт приводит и теорему, принадлежащую Архимеду: «Площадь круга равна площади треугольника, которого основание есть окружность круга, а высота помянутого круга радиус». Доказательство этой теоремы дано в духе Кеплера [52]. Автор рассказывает здесь и о «Задаче делийской» — об удвоении куба, о легенде, связанной с ее возникновением, а также о построении куба, который был бы «втрое, вчетверо или в несколько раз более данного». Он указывает при этом, что корень квадратный из числа можно представить в виде отрезка прямой, который можно построить циркулем и линейкой; корень кубичный из 2 тоже может быть представлен в виде прямолинейного отрезка, но построить этот отрезок с помощью прямой и циркуля невозможно»... потребно к сему особливая кривая линия, а не круг, и того ради сия задача надлежит вышшей геометрии».

Некоторые преподаватели математики средних и высших школ на уроках и лекциях знакомили своих слушателей с постановкой этих задач и с характером трудностей, связанных с решением их. Эйлер своим ученикам (Котельникову, Волкову, Сафронову и др.) давал темы работ, связанные с квадратурой кривых, в том числе и круга. Таким образом, число русских, знакомых со знаменитыми задачами древности в XVIII в., становилось все больше. Отдельные русские читатели, знакомые с «высшей геометрией» и знавшие латинский и другие иностранные языки, могли знакомиться с историей знаменитых задач древности и по специальным работам зарубежных авторов [5, 37, 35, 61, 63, 102, 119, 120] и др. Особенно велика заслуга математиков, работавших в XVIII в. в Петербургской Академии наук, в разработке теории квадратуры замкнутых и открытых луночек.

Д. Бернулли впервые основным условием квадратуры круговых замкнутых луночек стал считать равенство секторов и дал свой метод квадратуры некоторых луночек (см. II главу). Л. Эйлер, исходя из равенства секторов, получил условие квадрируемости круговых замкнутых луночек $\frac{m}{\sin^2 m} = \frac{n}{\sin^2 n}$, где m и n — центральные углы дуг, ограничивающих луночки, перевел решение этой задачи на язык алгебры и получил квадратуры этих луночек; он рассмотрел 9 круговых луночек, показав, что из них циркулем и линейкой квадрируются только 5 (см. II главу).

Гольдбах еще до переезда в Россию вел оживленную переписку с Н. и Д. Бернулли о квадратуре луночек. Интерес к этой теме сохранился у них и после переезда на работу в Петербург. Внимание всех этих математиков, в том числе Крафта и Эйлера, привлекла задача Гольдбаха, относящаяся к открытым круговым луночкам: «Найти две луночки из двух пересекающихся между собой окружностей и выделить из этих луночек равные части так, чтобы отрезки прямых, отделяющие эти части, были равны между собой». Решение в частном случае нашел сам Гольдбах, общие решения нашли Д. Бернулли (геометрическое), Л. Эйлер (алгебраическое) и Г. Крафт с помощью интегрального исчисления. Отправляясь от решения этой задачи, указанные математики обогатили теорию квадратуры круговых открытых луночек, а Г. Крафт считается основоположником общей теории квадратуры этих луночек. Благодаря их трудам Петербургская Академия наук в XVIII в. играла ведущую роль в разработке теории квадратуры круговых замкнутых и открытых луночек.

В XIX столетии

Развитие математики XIX и в начале XX ст. в России характеризовалось тем, что ученики и последователи Л. Эйлера пропагандировали и развивали многие идеи своего учителя. В этот период жили и творили отдельные выдающиеся и гениальные русские математики, внесшие большой вклад в развитие мировой науки: Н. И. Лобачевский, М. В. Остроградский, П. Л. Чебышев, В. Я. Буняковский, О. И. Сомов, С. В. Ковалевская, А. А. Марков, К. В. Поссе, Д. А. Граве, Н. Е. Жуковский и др.

В это время значительно увеличилось число русских математиков, проявлявших интерес и к знаменитым задачам древности. Ряд русских математиков внесли свою лепту в разработку новых методов и способов точного и приближенного решения этих задач. Многие русские ученые сыграли заметную роль в улучшении доказательств решения задачи о квадратуре круга и в популяризации этих задач. Результатом этого в конце XIX и в начале XX столетий в разных городах России явилось большое количество статей, книг и брошюр, посвященных знаменитым задачам древности.

Остановимся только на некоторых фактах. Н. И. Лобачевский и П. Л. Чебышев, не занимаясь специально теорией знаменитых задач древности, были сами знакомы и знакомили с ними своих учеников. М. В. Остроградский и О. И. Сомов оставили свидетельства их глубокого понимания сущности этих задач. М. В. Остроградский, например, при рецензировании вступительной лекции капитана Клейгельса обратил внимание и на ту часть лекции, где говорилось: «Архимед нашел, что отношение окружности к диаметру заключается между $3\frac{10}{70}$ и $3\frac{10}{71}$. Следовательно, примем ли то или другое выражение, у нас ошибка будет одинакова. Вообще из этих двух принято первое, как удобнейшее... Итак, $\frac{22}{7}$ есть настоящее выражение величины, названной буквою π. По простоте своей оно предпочитается всем прочим, хотя есть и другие, более точные». Перечеркнув все это, М. В. Остроградский написал: «Здесь ошибка на каждом слове. Во-первых, если бы неточность выражений $3\frac{10}{70}$ и $3\frac{10}{71}$ была одинакова, то их полусумма представила бы истинное отношение окружности к диаметру, то есть трансцендентное число π выразилось бы рациональным образом. Далее $\frac{22}{7}$ было сперва приближенным отношением окружности к диаметру, потом настоящим, наконец, опять приближенным, ибо сказано, что есть и другие более точные».

М. В. Остроградский и В. Я. Буняковский, рецензируя работы О. И. Сомова, где говорилось о спрямлении эллипса, писали, что эта задача имеет и практическое значение, а «знаменитая задача квадратуры круга и спрямление круга есть только частный случай вопроса о спрямлении эллипса». Когда же Сомову потребовалось построить прямолинейный отрезок, равный π, то он воспользовался методом Коханского (см. стр. 78).

С. В. Ковалевская познакомилась с квадратурой круга еще в детстве. Вспоминая о своих беседах по математике с любимым дядей П. В. Корвин-Круковским, она писала: «От него я услышала, например, в первый раз о квадратуре круга, об асимптотах, к которым кривая постоянно приближается, никогда их не достигая, и о многих других вещах подобного же рода, — смысла которых я, разумеется, понять не могла, но которые действовали на мою фантазию, внушая мне благоговение к математике, как к науке высшей и таинственной, открывающей перед посвященными в нее чудесный мир, недоступный простым смертным». Ее учитель И. И. Малевич в одном из своих воспоминаний о С. В. Ковалевской писал: «...Когда дошли мы в геометрии до отношения окружности к диаметру, ученица моя, излагая данное при следующем уроке, к удивлению моему, пришла совсем другим «путем» и особенными комбинациями к тому же самому...».

Н. Е. Жуковский, создавая теорию обтекания крыла самолета воздухом, обращался к помощи и «гиппократовых луночек», рассматривал их как один из возможных контуров поперечного сечения крыла.

Проявление интереса нашими выдающимися математиками к знаменитым задачам древности и подчеркивание важности знакомства с их теорией привлекало к этим задачам внимание широких слоев русских математиков, студентов и любителей математики.

Учитель М. В. Остроградского по Харьковскому университету Т. Ф. Осиповский в разделе «Геометрия» своего «Курса математики» рассматривал вопросы о квадратуре круга, конических сечениях и их приложениях, о циссоиде Диоклеса, спирали Архимеда и др. Ф. И. Петрушевский в 1823 г. перевел на русский язык и издал сочинения Архимеда: «Две книги о шаре и цилиндре», «Измерение круга» и «Леммы».

Член-корреспондент Академии наук Н. Навроцкий, проявлявший интерес к истории математики, в двух своих книгах «О геометрическом решении уравнений высших степеней посредством кривой линии, называемой конхоидой...» (1827 г.) и «О спрямлении окружности» (1835 г.) рассказывает о применении конхоиды к решению задачи об удвоении куба и о легенде, связанной с происхождением этой задачи. Он касается истории задачи о квадратуре круга, которая «более 2-х тысячелетий была предметом усилия математических умов всех веков и народов». Указав, что отношение окружности к диаметру есть величина «несоизмеримая», за доказательством этого он отсылает читателей к книге «Монтюкла» [140]. Он рекомендовал заниматься поисками «новых способов приближенного решения этой задачи».

Более интенсивно работа по популяризации знаменитых задач древности в России развертывается с 60-х годов XIX столетия. В 1865 г. генерал-майор Полуэктов издал в Петербурге брошюру «Разделение углов на три равные части». Он ничего не говорит о невозможности решения этой задачи циркулем и линейкой и предлагает три способа деления угла на три части.

В книге Аничкова «Теоретическая и практическая геометрия» (1870) рассматривалась, в частности, задача о делении окружности на n равных частей при некоторых значениях n.

В 1883 г. была переведена на русский язык известная книга Шаля «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов», где отводится много места и знаменитым задачам древности. В том же году вышла в свет первая часть «Истории математики» М. М. Ващенко-Захарченко, где рассматриваются знаменитые задачи древности.

Особенно большую роль сыграли работы А. А. Маркова и К. А. Поссе. А. А. Марков начал писать свою большую работу «Доказательство трансцендентности чисел e и π (невозможности квадратуры круга)» [69] вслед за появлением работы Линдемана [137] и издал ее в 1883 г. Автор ставил задачу «ознакомление русских математиков с исследованиями Эрмита и Линдемана» в этой области. Но работа сыграла и другую важную роль — в ней дано более доступное доказательство теоремы: каковы бы ни были алгебраические числа $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ и $A_1, A_2, \cdots, A_n$, где $A_i \neq 0$, равенство нулю суммы $A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \ldots + A_n e^{\alpha_n}$ невозможно. Он подчеркивает, что квадратура круга невозможна не только циркулем и линейкой, но и с помощью любой алгебраической кривой.

В этой же работе, по-видимому, впервые в России, указывается и на то, что «после работы Ванцеля можно считать доказанной невозможность трисекции углов вообще и в частности невозможность трисекции угла в 60°».

Реакцией на появление работ Гильберта [126], Гурвица [127] и Гордана [123] была публикация в 1894 г. статьи К. А. Поссе «О трансцендентности чисел l и π» [83]. Он тоже видел цель этой статьи в том, чтобы «сделать усвоение столь важных результатов доступными большему кругу читателей». Используя результаты Гурвица и Гордана, Поссе дал более простое доказательство трансцендентности l и π.

Казанские математики А. В. Васильев, Д. М. Синцов и Н. И. Парфентьев в 1898 г. перевели на русский язык и издали «Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии» Ф. Клейна с приложением мемуара Ванцеля [53], где в основном речь идет об истории и теории знаменитых задач древности. Работы Маркова и Поссе и перевод указанных работ Клейна и Ванцеля позволили многим русским математикам и студентам познакомиться с современной теорией трех знаменитых задач древности.

Д. А. Граве популяризировал результаты работы Гаусса по теории деления круга на равные части. В статье «Гаусс» (Энц. слов. Брокл и Ефр. т. VIII, 1892) Граве, говоря о «Знаменитом трактате по теории чисел» Гаусса указывает, что он «содержит также прекрасную теорию двучленных уравнений, показывающую, между прочим, что можно при помощи циркуля и линейки вписать в круг правильный 17-угольник». Положительную роль сыграла и книга Граве «Энциклопедия математики (очерк ее современного положения)» 1912 г., где первая глава под названием «Невозможные задачи и их роль в математике» посвящена и знаменитым задачам древности. Он показывает их идейную сторону, т. е., если идти правильным путем в решении этих задач, мы неизбежно придем к выводу, что решить их циркулем и линейкой невозможно». Он подчеркивает в частности, что «задача квадратуры круга была первой задачей, вызвавшей к жизни начала интегрального исчисления».

Заметную роль в популяризации математических знаний в России того времени сыграл научно-популярный «Журнал элементарной математики», переименованный затем в «Вестник опытной физики и элементарной математики» (с 1884 по 1917 гг.). В нем принимали участие и видные русские математики и учителя математики, публиковались отдельные статьи, посвященные истории и теории знаменитых задач древности. Например, в одном из номеров его С. О. Шатуновский изложил в популярной форме общие вопросы разрешимости конструктивных задач, в № 233 (1896) рассмотрел «Доказательства существования трансцендентных чисел». В. Ф. Каган опубликовал в этом журнале «Краткий очерк истории квадратуры круга» и «Новое доказательство трансцендентности чисел e и π (доказательство Валена)» [48]. А. Певцов в № 277 дал «Построение π с точностью до $\frac{1}{10^4}$» [82]. Аналогичную статью опубликовал и А. Ефимов в № 296.

О знаменитых задачах древности говорилось и во многих учебниках того времени. Билибин в 1886 г. в учебнике элементарной геометрии для гимназий и реальных училищ доказывает теорему об иррациональности числа π и пишет: «В новейшее время строго доказано, что число π не представляет корня какого ни есть алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами или, как говорят, число π есть число трансцендентное».

Большую роль в приобщении русских математиков и студентов к истории и теории знаменитых задач древности сыграли переводные книги, содержащие эти задачи: Вебер и Вельштейн «Энциклопедия элементарной математики» [22], Адлер «Теория геометрических построений» [2], сборник классических произведений «О квадратуре круга» со статьей Ф. Рудио [80], Ф. Кэджори «История элементарной математики с указаниями на методы преподавания» [60], вступительная статья А. В. Васильева к переводу «Начал анализа бесконечно-малых в элементарном изложении» Папелье и др. Интересные сведения из истории знаменитых задач древности в России читатель узнавал из работ В. В. Бобынина [13]. В учебнике Д. Гика «Элементы геометрии» (3-е изд., 1900 г.) рассматриваются задачи на построение правильных многоугольников и теорема о гиппократовых луночках, которая сформулирована так: «Сумма гиппократовых луночек, соответствующих двум катетам прямоугольного треугольника, равна площади этого треугольника».

Все указанные выше работы и даже брошюрки дилетантов свидетельствовали о все увеличивающемся числе русских математиков и любителей математики, проявлявших интерес к знаменитым задачам древности. А это является одним из необходимых условий участия математиков этой страны в решении и некоторых вопросов теории знаменитых задач древности.

Многие русские ученые и инженеры внесли свой вклад в разработку новых методов в решении знаменитых задач древности. Мы назовем здесь только некоторые из этих результатов. Навроцкий в указанной выше работе предложил следующий метод приближенного спрямления окружности. Даны: радиус R, AB и CD — взаимно перпендикулярные диаметры, $AS=R$, $TZ=3R$ (рис. 88). Утверждается: $ZD=\pi R^4$.

Буняковский в 1840 г. опубликовал работу «О правильных многоугольниках, вписанных и описанных около круга» [17]. Здесь он доказал, что не существует правильных вписанных многоугольников, кроме шестиугольника, и описанных многоугольников, кроме квадрата, стороны (периметры) которых соизмеримы с радиусом данного круга.

Инженер Бинг дал простой способ приближенного построения стороны квадрата, равновеликого данному кругу, известный

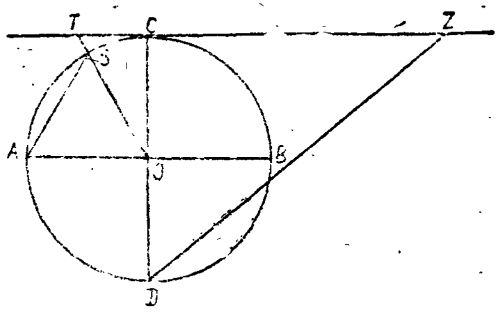


Рис. 88.

под названием «треугольник Бинга». Пусть треугольник ACB вписан в полукруг с радиусом R (рис. 89). Величина катета AC зависит от угла $CAB=\alpha$ (от положения C на окружности). Очевидно, существует такое значение α, когда $AC^2=\pi R^2$. Приближенное значение α можно определить так:

$$AC^2=(2R)^2\cos^2\alpha\approx\pi R^2 \Longrightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\approx 0{,}886.$$

По таблице находим $\alpha\approx 27°36'$, пригодное для практических целей.

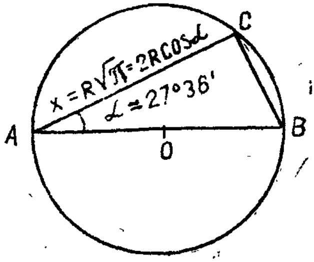


Рис. 89.

Инженер Абданк Абаканович изобрел интеграф, дающий возможность точного построения графика функции $X=\arcsin y$, а следовательно, построения отрезка прямой, равного π [53].

О. И. Сомов в статье «Общий способ приближенного спрямления кривых линий» [90], рассматривая сравнительно малые дуги кривых ΔS, в том числе и дуги окружности, доказал теорему: «Длина дуги равняется четырем третям хорды без одной шестой суммы проекций этой хорды на крайних касательных».

$$\Delta S=\frac{4}{3}W-\frac{1}{6}(a+a'). \tag{1}$$

Если кривая — окружность, то $a+a'$ — хорда двойной дуги, и если A — хорда данной дуги, B — хорда половины этой дуги, то дуга

$$\Delta S=\frac{8B-A}{3}. \tag{2}$$

При $\Delta S=20°$ и $R=1$ в таблицах $A=0{,}3472964$ и $B=0{,}1743114$ и по (2) имеем $\Delta S=0{,}3490649$. Точная же величина этой дуги $0{,}34906585$, т. е. ошибка менее $\frac{1}{10^5}$.

А. Орлов в книге «Руководство к геометрическому линейному черчению» [81] рассматривает деление угла на три равные части. Он предложил для этого такой способ.

Известно, что $\frac{a}{1-a}=a+a^2+a^3+a^4+\cdots \qquad (|a|<1)$.

Положив $a=\frac{1}{4}$, получим числовой ряд

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 4\cdot 4}+\cdots$$

Если дана дуга (угол) mn, то будем делить ее пополам, половину опять пополам, половину половины дуги еще пополам и т. д., будем иметь

$$\frac{1}{4}\breve{mn}+\frac{1}{4^2}\breve{mn}+\frac{1}{4^3}\breve{mn}+\cdots=\breve{mn}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)=\frac{1}{3}\breve{mn}.$$

Н. В. Бугаев в книге «Способ последовательных приближений» [16] дал метод, который советские математики использовали (см. стр. 230 и 239) для спрямления дуги окружности, для превращения прямолинейного отрезка в дугу окружности и для деления угла на три равные части с любой степенью точности.

В предреволюционные годы в журнале «Математическое образование» были опубликованы статьи Ф. Гусева «О вычислении числа π» [34], П. Долгушина «Определение длины дуги кривой», А. К. Власова «Квадратура круга и циркулятура квадрата» [26], в которой даны тоже новые способы решения указанной задачи. Академик Е. С. Федоров в 1910 г. в статье «О делении окружности на равные части лучами из одного центра» [91]

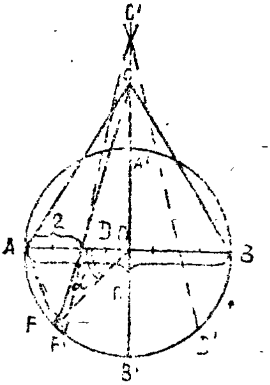


Рис. 90.

дал более точный, чем у Биона (см III главу), способ приближенного деления окружности на равные части.

Бион определял положение точки C на продолжении диаметра B'A' как вершину правильного треугольника, построенного на диаметре AB. Федоров же положение точки C' на продолжении A'B' определил как точку пересечения B'A' и D'C' (рис. 90), проходящей через середину радиуса OB и середину дуги B'B. Тот и другой, разделив диаметр на n равных частей, затем проводили C (C') M через второе деление слева и тогда хорда AF (AF') $= a_n$.

Советский период

Коренные изменения условий развития науки в нашей стране после Октябрьской революции вскоре сказались и на развитии математики: советская математическая школа уже в 30-х годах оказалась в одном ряду с лучшими математическими школами других стран, а затем в некоторых разделах современной математики начала занимать и ведущее место.

Разработка теории и истории знаменитых задач древности — это маленький и, конечно, далеко не главный участок большого математического фронта, на котором работала и работает все увеличивающаяся армия советских математиков. Но отрадно то, что и этот участок фронта оказался не забытым советскими учеными. Они проделали заметную работу по популяризации истории и теории этих задач среди молодежи и любителей математики, сделали большой вклад в развитие теории знаменитых задач древности и внесли тем самым свою лепту в решение большой и сложной задачи, стоящей перед советскими математиками: догнать и превзойти науку капиталистических стран. В наше время невозможно написать научную историю знаменитых задач древности без анализа и должной оценки важных результатов работы русских и особенно советских математиков в этой области науки.

Популяризация знаменитых задач древности в Советском Союзе

По мере того как в Советской России росло число лиц, приобщавшихся к математике, ощущался большой недостаток в учебной и научно-популярной литературе по математике и по истории математики. Усилился интерес к истории и к некоторым вопросам теории знаменитых задач древности. Этот интерес поддерживался на всех этапах развития советской науки и культуры. Свидетельством этого являются книги и статьи советских ученых, а также книги зарубежных авторов, переведенные на русский язык, содержащие элементы истории и теории этих задач.

Одной из первых книг такого рода была книга В. И. Лебедева «Знаменитые геометрические задачи древности» (1920 г.), предназначенная автором «юному любителю математики» и «пытливому учителю». Подчеркивая большую роль знаменитых задач древности, их истории и общей истории математики, В. И. Лебедев писал: «История дает возможность понять душу науки, вливая в нее жизнь и глубоко вскрывая ее сущность... История побуждает к творчеству и уже потому имеет огромную ценность для общего образования».

Вслед за ней появились книги Г. Н. Попова, С. Ф. Дашкевича, С. А. Богомолова, статьи Н. М. Несторовича и Б. С. Э., перевод книги А. Адлера и др.

Более интенсивно популяризация этих задач проводилась в 30-е предвоенные годы. Особенно много книг, содержащих элементы истории и теории этих задач, было переведено в эти годы на русский язык (Вилейтнер, Цейтен, Декарт, Кеплер, Клейн, Адлер, сб. «О квадратуре круга» и др.).

Большую роль в популяризации рассматриваемых задач в нашей стране сыграли и работы советских математиков: Н. Г. Чеботарева, Н. Ф. Четверухина, А. О. Гельфонда, Д. Д. Мордухай-Болтовского и других, — содержащие важные результаты для современной теории этих задач. Из библиографии видно, что за последние двадцать пять лет литература, игравшая роль в популяризации знаменитых задач древности, пополнилась многими книгами и статьями.

В послевоенные годы популяризация знаменитых задач древности в нашей стране заметно усилилась. Это видно и из того, что в этот период были переведены на русский язык работы Евклида, Архимеда, Гаусса, Абул-л-Вафа, ал-Бируни, бану-Муса, О. Хайяма, Дж. Каши, Ван дер-Вардена, Куранта и Робинса, Стройка, Бурбаки и других, содержащие элементы истории и теории этих задач. Появилось большое количество книг и статей советских авторов, в которых излагалась история и теория некоторых из этих задач. О широком размахе популяризации знаменитых задач древности в Советском Союзе говорит и тот факт, что сведения об этих задачах включались и в некоторые учебники, энциклопедии, в научно-популярные и молодежные журналы. Например, в самое последнее время в журнале «Наука и жизнь» (№ 10 и 11 за 1971 г.) и в журнале «Квант» (№ 5 за 1971 г. и № 1 за 1972 г.) опубликованы статьи о числе π, о круговых луночках и о делении окружности на равные части. Заметно увеличилось число авторов, пишущих об этих задачах. Огромный тираж такой научно-популярной книги, как «Три знаменитые задачи древности» В. Д. Чистякова, и многократное издание книги А. Г. Школьника «Задача деления круга» (пособие для учителей) тоже говорят о большом интересе у народа нашей страны к истории математики и особенно к истории и теории знаменитых задач древности[5].

История знаменитых задач древности в трудах советских математиков

Перед советскими математиками и историками математики стояла и стоит задача — создание научной истории математики: общей, отдельных стран и отдельных ветвей математики.

Опираясь на глубокое изучение исторических фактов и на марксистско - ленинскую философию, советские ученые многое уже сделали в решении этой проблемы и заняли ведущее место в создании научной истории математики.

По истории знаменитых задач древности написано много книг и статей, начиная от Евдема и до наших дней [5, 48, 80, 96, 140 и др.]. Некоторые советские математики внесли уточнения в известные факты из истории этих задач [39], другие обнародовали неизвестные нам до того факты [1, 3, 6, 51, 105 и др.]. Все это важно для истории знаменитых задач древности.

Используя факты и имеющиеся работы по истории этих задач, советские ученые приступили к созданию научной истории знаменитых задач древности.

Нами были предприняты попытки решения некоторых вопросов, имеющих важное значение при создании такой истории, которая бы «правильно и точно отображала процесс развития» теории этих задач. С этой целью решено рассматривать историю не трех, а пяти задач. Мы рассмотрели вопросы о происхождении, стимулах, основных этапах развития теории знаменитых задач древности. Впервые проанализирован вклад ученых нашей страны в теорию, популяризацию и историю этих задач.

Результаты этой работы частично отражены и в докладе автора «Из истории знаменитых задач древности» на 6-м международном конгрессе математиков, и особенно в данной книге[6]. Но работа по созданию научной истории знаменитых задач древности еще не закончена.

Вклад советских математиков в современную теорию знаменитых задач древности

При характеристике роли советских математиков в истории знаменитых задач древности особенно важно проследить, кто из них и какой вклад внес в современную теорию знаменитых задач древности. Советские математики, как будет видно из дальнейшего, добились заметных успехов в разработке теории всех пяти интересующих нас задач и заняли в этом ведущую роль. Наиболее существенные результаты их исследования относятся к теории луночек. Но мы начнем с задачи о квадратуре круга.

Квадратура круга

Как видно из предыдущего, задача о квадратуре круга привлекала к себе особое внимание математиков и любителей математики. Не обошли ее стороной и математики нашей страны. Н. Ф. Четверухин (р. 1891 г.) в своей книге «Геометрические построения и приближения» [95] показал возможность широкого использования метода последовательных приближений для решения конструктивных задач, в том числе и задач о спрямлении окружности, о сгибании прямой в окружность и об удвоении куба. При этом он использовал и некоторые результаты Эйлера и Н. В. Бугаева [16] о применении алгоритмов при нахождении корней уравнений

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

к которым сводятся конструктивные задачи.

Здесь же мы рассмотрим решение задачи о сгибании отрезка прямой в дугу окружности с данным центральным углом способом, примененным Н. Ф. Четверухиным в указанной книге.

Если искомая дуга равна отрезку прямой $CB_0=x$, а радиус дуги $R=1$, то величина соответствующего центрального угла тоже равна x. Построим угол $DCB_0=\frac{x}{2}$ (рис. 91). Проведем биссектрису этого угла CB_1 и опустим на нее перпендикуляр из B. Тогда $CB_1 = x\cos\frac{x}{2^2}$. Биссектриса угла $\frac{x}{2^2}$,

т. е. $$CB_2 = x\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}.$$

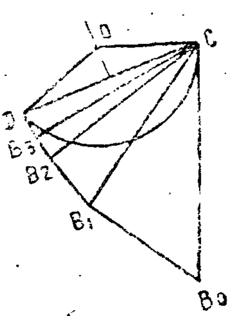


Рис. 91.

Продолжая деление углов пополам, будем иметь для биссектрисы

$$CB_n = x\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^{n+1}}.$$

Пусть точка D—предельная точка последовательности точек $B_0, B_1, \cdots B_n$.

Тогда $$CD = x\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots$$

Из формулы Эйлера для разложения $\sin x$ в бесконечное произведение, т. е.

$$\sin x = x\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdots,$$

следует, что

$$\frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}} = 2\sin\frac{x}{2} = CD.$$

Следовательно, CD есть хорда искомой дуги окружности. Взяв теперь центральный угол $COD = 2\angle DCB_0$, опишем из точки O радиусом OD искомую дугу, длина которой может быть сколь угодно близка к данному отрезку CB_0.

Так решается задача, обратная спрямлению дуги окружности, или квадратуры круга.

В создании теории трансцендентных чисел, являющейся развитием идей Эрмита и Линдемана, советские математики А. О. Гельфонд, Д. Д. Мордухай-Болтовской, Р. О. Кузьмин, А. Б. Шидловский и другие сыграли решающую роль, что видно из монографии [29] и из обзорных статей в сборниках «Математика в СССР за 30» и «... за 50 лет», а также из [47]. Ими изучены свойства различных трансцендентных чисел вида α^b, решена 7-я проблема Гильберта. Их идéи получили развитие в трудах советских и зарубежных ученых.

В 1953 г. в «Успехах математических наук» была опубликована большая статья А. М. и И. М. Яглом «Элементарный вывод формул Валлиса, Лейбница и Эйлера для числа π» [106].

Авторы указывают действительно сравнительно простой способ получения формулы Валлиса:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

(см. стр. 84—86), формулы Лейбница

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots \qquad \text{(см. стр. 86).}$$

и формулы Эйлера $\frac{\pi}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$ (см. стр. 92).

Мы здесь остановимся только на выводе формулы Эйлера[7].

Авторы отправляются при этом от формул Муавра и Ньютона:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha=\cos^n\alpha+i\,c^1{}_n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-$$
$$-c^2{}_n\cos^{n-2}\sin^2\alpha-i\,c^3{}_n\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+\cdots \qquad (3)$$

Сравнивая мнимые части (3), получим

$$\sin n\alpha=c^1{}_n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-c^3{}_n\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+$$
$$+c^5{}_n\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha-\cdots \qquad (4)$$

или

$$\sin n\alpha=\sin^n\alpha[c^1{}_n\operatorname{ctg}^{n-1}\alpha-c^3{}_n\operatorname{ctg}^{n-3}\alpha+c^5{}_n\operatorname{ctg}^{n-5}\alpha-\cdots]\,. \qquad (5)$$

Считая $n=2m+1$ нечетным, а $\alpha=\frac{k\pi}{n}=\frac{k\pi}{2m+1}$, где $k=1, 2, \ldots$, имеем $\sin n\alpha=0$, $\sin\alpha\neq0$. Тогда из (5) следует, что множитель в скобке должен быть равен нулю, т. е.

$$c^1{}_{2m+1}\operatorname{ctg}^{2m}\alpha-c^3{}_{2m+1}\operatorname{ctg}^{2m-2}\alpha+c^5{}_{2m+1}\operatorname{ctg}^{2m-4}\alpha-\cdots=0. \qquad (6)$$

Если взять теперь уравнение

$$c^1{}_{2m+1}x^m-c^3{}_{2m+1}x^{m-1}+c^5{}_{2m+1}x^{m-2}-\cdots=0, \qquad (7)$$

то из предыдущего следует, что корнями его будут

$$x_k=\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{n}=\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2m+1}, \quad k=1, 2, \cdots, m. \qquad (8)$$

Выразив сумму корней (7) через его коэффициенты, получим

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}+\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{n}+\dots+\operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{n}=\frac{C_n^3}{C_n^1}=\frac{(n-1)(n-2)}{6}. \tag{9}$$

Но так как $\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\operatorname{cosec}^2\alpha$, то будет верно равенство

$$\csc^2\frac{\pi}{n}+\csc^2\frac{2\pi}{n}+\dots+\csc^2\frac{m\pi}{n}=\frac{(n-1)(n-2)}{6}+$$

$$+\frac{n-1}{2}=\frac{(n-1)(n+1)}{6}. \tag{10}$$

Известно, что для углов первой четверти $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$ и величины эти положительны; следовательно,

тогда из (9) и (10) вытекает, что

$$\frac{1}{6}(n-1)(n-2)<\left(\frac{n}{\pi}\right)^2+\left(\frac{n}{2\pi}\right)^2+\dots+\left(\frac{n}{m\pi}\right)^2<\frac{1}{6}(n-1)(n+1)$$

или

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+$$

$$+\frac{1}{m^2}<\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right), \tag{11}$$

где $n=2m+1$. Но при стремлении m (а следовательно, и n) к бесконечности правая и левая части (11) стремятся к одному и тому же пределу $\frac{\pi^2}{6}$, откуда и получается формула Эйлера:

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$$

Сам Эйлер, как видно из «Введения» (см. стр. 102, 152), получал эту формулу более сложным способом. Рассмотренный здесь вывод доступен даже школьникам. Им можно воспользоваться в кружковой работе со школьниками или при чтении факультативного курса по алгебре в старших классах.

Наряду с московскими, ленинградскими, казанскими и другими математиками заметный вклад в теорию знаменитых задач древности внесли ростовские математики. Д. Д. Мордухай-Болтовской (1876—1952) в первые годы Советской власти уделял много внимания решению сложных вопросов, связанных с трансцендентными числами. В 1927 г. он опубликовал большую работу «О некоторых свойствах трансцендентных чисел первого класса» [73]. В ней дан ряд общих теорем теории трансцендентных чисел, в том числе и публиковавшихся им раньше. В частности, здесь доказывается теорема о необходимом и достаточном условии того, чтобы число α было трансцендентным, и дается классификация трансцендентных чисел. А. О. Гельфонд в обзорной статье «Очерк истории и современного состояния теории трансцендентных чисел» (ж. «Естествознание и марксизм», 1930 № 5,) об указанной работе Мордухай-Болтовского писал: «Значение этой работы в теории трансцендентных чисел очень велико, и знакомство с ней обязательно для всех интересующихся этими вопросами».

Д. Д. Мордухай-Болтовской был одним из первых советских математиков, начавших разработку конструктивной геометрии в плоскости Лобачевского. Результаты его работ и работ В. Ф. Кагана послужили толчком и к разработке теории знаменитых задач древности в геометрии Лобачевского. Он подготовил к печати специальную статью «О луночках Гиппократа на плоскости Лобачевского» (1950), но не успел опубликовать. Особенно важные результаты содержались в его работе [72], посвященной 100-летию со времени появления геометрии Лобачевского. Основополагающее значение имела его теорема: «В пространстве Лобачевского с помощью циркуля и линейки возможны построения 2-го порядка и какого угодно класса».

Эта теорема открывала новую страницу в истории знаменитых задач древности, в том числе и задачи о квадратуре круга. Вопросы теории построения в плоскости Лобачевского привлекали его до последних лет жизни. На разработку этих тем он ориентировал и некоторых из своих учеников (Н. М. Несторович, К. К. Мокрищев). Основополагающую роль для теории геометрических построений в плоскости Римана играет и работа Д. Д. Мордухай-Болтовского «О штейноровских построениях на сфере» [74]. Здесь тоже доказана основная теорема для конструктивной геометрии на сфере: «Для того, чтобы на плоскости Римана было возможно построение с помощью циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы оно было построением 2-го порядка того или иного класса»[8].

Опираясь на эти теоремы, математики, и особенно ростовские ученики и последователи Д. Д. Мордухай-Болтовского, заложили основы теории знаменитых задач древности в неевклидовых геометриях.

Решению задачи о квадратуре круга в геометрии Евклида и на плоскости Лобачевского посвящен ряд работ ученика Д. Д.

Мордухай-Болтовского, работавшего в Ростовском университете, Н. М. Несторовича (1891—1955). В 1923 г. он опубликовал статью «Квадратура круга и полисекция угла в 4-мерном пространстве» [72], содержащую оригинальный способ точного решения этих задач.

Эти задачи он решает с помощью винтовой линии, взятой на прямом круговом цилиндре с радиусом основания и шагом AB, равным R (рис. 92). Развернув вырезанную часть боковой поверхности цилиндра, ограниченную окружностью основания, первым витком винтовой линии и AB в плоскую фигуру, получаем прямоугольный треугольник, один из катетов которого R, а второй $2\pi R$. Площадь этого треугольника $\frac{2\pi R \cdot R}{2}$ равна площади круга πR^2.

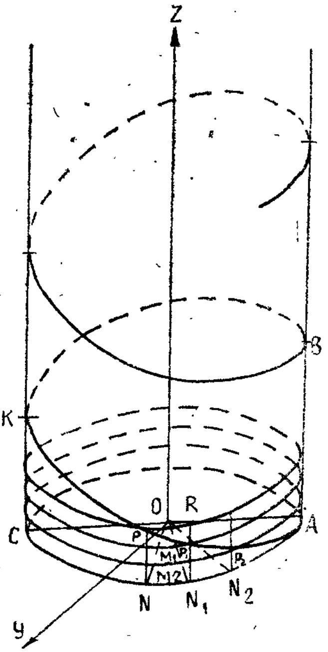


Рис. 92

В дальнейшем Н. М. Несторович работал в области теории геометрических построений в плоскости Лобачевского. Например, в ДАН он опубликовал в 1940 г. большую статью «Геометрические построения в пространстве Лобачевского», а в 1948 г. — «О квадратуре круга и циркуляторе квадрата в пространстве Лобачевского». Содержание этих и других работ он затем включил в монографию «Геометрические построения в плоскости Лобачевского» [76]. Эта монография наряду с монографией А. С. Смогоржевского (см. стр. 291) свидетельствовала об успешном развитии некоторых идей Лобачевского советскими математиками.

Используя указанную выше теорему Мордухай-Болтовского, Н. М. Несторович доказывает ряд новых теорем и решает ряд задач на построение в плоскости Лобачевского. Перенеся некоторые знаменитые задачи древности на плоскость Лобачевского, Несторович дал их решение.

Особенно детально исследовал он возможность циркулятуры квадрата, квадратуры круга и деления окружности на равные части. Задача о циркулятуре квадрата, как известно, сводится к построению такого радиуса круга (r), чтобы площадь этого круга

$$S_{кр}=4\pi k^2 sh^2 \frac{r}{2к}$$

равнялась площади данного квадрата $S_{кв}=k^2(2\pi-\Sigma_{кв})$,

где k — параметр пространства Лобачевского;

$\Sigma_{кв}$ — сумма внутренних углов квадрата, которая в геометрии Лобачевского меньше 2π. Следовательно, должно выполняться равенство

$$4\pi\, sh^2 \frac{r}{2к} = 2\pi-\Sigma_{кв}. \qquad (12)$$

Если $\Sigma_{кв}=4\pi\omega$ и ω — рационально или может быть построено из рациональных величин путем конечного числа извлечения квадратных корней, то уравнение (12) примет вид

$$4sh^2\frac{r}{2к}=2-\omega \quad \text{или} \quad sh\,\frac{r}{2к}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\omega}{4}}. \qquad (12')$$

На основании теоремы Мордухай-Болтовского можно тогда утверждать, что радиус круга, равновеликого данному квадрату —

$$r=2kArcsh\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\omega}{4}},$$

может быть построен циркулем и линейкой. Значения ω заключены в границах $0\leqslant\omega\leqslant2$. В частности, при $\omega=1$ получается случай циркулятуры, рассмотренный еще Я. Больаи.

Следовательно, в геометрии Лобачевского задача о циркулятуре квадрата становится алгебраической и в бесчисленном множестве случаев она осуществима циркулем и линейкой.

Задача о построении квадрата, равновеликого данному кругу в плоскости Лобачевского, оказалась более сложной, чем циркулятура квадрата, и класс квадрируемых кругов уже класса циркулятируемых квадратов.

Н. М. Несторович показал, что задача о квадратуре круга в плоскости Лобачевского эквивалентна задаче деления окружности.

Кроме того, Н. М. Несторович обратил внимание и на то, что так как сторона вписанного в окружность радиуса r правильного n-угольника определяется уравнением

$$sh\frac{a_N}{2к}=sh\,\frac{r}{к}\sin\frac{\pi}{n},$$

то деление окружности на n равных частей циркулем и линейкой возможно во всех тех случаях, когда $\sin\frac{\pi}{n}$ представляет выражение, построенное из единицы при помощи конечного числа рациональных операций и извлечения квадратных корней.

В частности, так как значение $\sin\frac{\pi}{34}$ находится в результате решения цепи четырех квадратных уравнений, т. е. определяется построением 2-го порядка и 4-го класса, то из теоремы Мордухай-Болтовского следует, что циркулем и линейкой можно построить 34- и 17-угольники. Это построение впервые осуществил А. С. Смогоржевский [89]. Рассматривая задачу о квадратуре круга, Н. М. Несторович показывает, что она сводится к нахождению угла α квадрата, равновеликого кругу с радиусом r, который можно построить циркулем и линейкой. Угол α зависит от r и находится из $S_{\text{кв}}=S_{\text{кр}}$, т. е. из

$$k^2(2\pi-\Sigma_{\text{кв}})=4\pi k^2\,\text{sh}^2\frac{r}{2k}$$

или

$$4\pi\,\text{sh}^2\frac{r}{2k}=2\pi-4\alpha. \tag{13}$$

Заменив в (13) $\text{sh}^2\frac{r}{2k}$ через $\left(\frac{e^{\frac{r}{2k}}-e^{-\frac{r}{2k}}}{2}\right)$

и

$\frac{e^{\frac{r}{2k}}+e^{-\frac{r}{2k}}}{2}$ через $\text{ch}\,\frac{r}{2k}$, получим

$$2\pi\left(\text{ch}\,\frac{r}{k}-1\right)=2\pi-4\alpha. \tag{13'}$$

Из (13′) находим

$$\alpha=\pi-\frac{\pi}{2}\,\text{ch}\,\frac{r}{k}. \tag{14}$$

Но в геометрии Лобачевского

$$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$1\leqslant\text{ch}\,\frac{r}{k}\leqslant 2. \tag{15}$$

Из (14) видно, что для построения угла α искомого квадрата нужно построить угол $\beta = \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{r}{\kappa}$, где $\operatorname{ch} \frac{r}{\kappa} \leqslant 2$.

Из теоремы о делении окружности известно, что с помощью циркуля и линейки можно разделить окружность (или угол 2π) на число n или построить углы $\Psi = \frac{2\pi}{n}$, если $n = 2^m P_1 P_2 \dots P_e$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, а $P_i = 2^{2^{\nu_i}} + 1$ или $P_i = 1$.

Следовательно, угол $\beta = \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{r}{\kappa}$ (а тем самым и угол $\alpha = \pi - \beta$) можно построить с помощью циркуля и линейки, если $\operatorname{ch} \frac{r}{\kappa}$ удовлетворяет (15), т. е. является неправильной дробью, и в знаменателе дроби стоят числа Ферма. Следовательно, должно быть

$$\operatorname{ch} \frac{r}{\kappa} = \frac{n+m}{n}, \tag{16}$$

где $0 < m < n$ и $m+n$ — взаимно-простые с n.

Так, например, при $n=3$ и $m=1, 2$ получим

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{2} \frac{3+1}{3} = \frac{\pi}{3}$$

и

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3+2}{3} = \frac{\pi}{6};$$

при $n=4$ и $m=1, 2, 3$ получим

$$\alpha = \frac{3\pi}{8}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{8};$$

при $n=5$, $m=1, 2, 3, 4$, имеем

$$\alpha = \frac{2\pi}{5}, \quad \frac{3\pi}{10}, \quad \frac{\pi}{5}, \quad \frac{\pi}{10}.$$

Все эти углы можно построить циркулем и линейкой. Следовательно, с помощью этих же инструментов можно построить и квадрат с углом α, равновеликий кругу радиуса r, удовлетворяющему [13].

После этих исследований стало ясно, что в пространстве Лобачевского задачи о циркулятуре квадрата и о квадратуре круга являются задачами алгебраическими и в бесконечном числе случаев разрешимы циркулем и линейкой. Но и в геометрии Лобачевского в бесчисленном числе случаев эти задачи не разрешимы циркулем и линейкой.

Например, при $\alpha = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ квадрат превращается в круг с радиусом R, определяемым из формулы $\operatorname{sh}\frac{R}{2k} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, и потому строится циркулем и линейкой. Но квадрировать круг циркулем и линейкой с этим радиусом невозможно, так как угол $\alpha = \pi - \frac{\pi}{2}\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ нельзя построить циркулем и линейкой.

Трисекция и полисекция угла

Эта задача тоже привлекала к себе внимание многих советских математиков и любителей математики. Остановимся здесь на некоторых результатах, полученных при решении ими этой задачи.

С. Ф. Дашкевич в 1922 г. издал в Брянске брошюру «Деление угла на три равные части при помощи «трисекциона» [36]. Способ Дашкевича предполагал использование не только циркуля и линейки, хотя автор это не оговаривает. Конструкция этого «трисекциона» не безупречна, и он не нашел практического применения. Но появление этого сочинения свидетельствовало о том, что и в первые годы Советской власти проявлялся интерес к этой задаче. А в качестве поощрения за это изобретение автору был выдан патент № 75968.

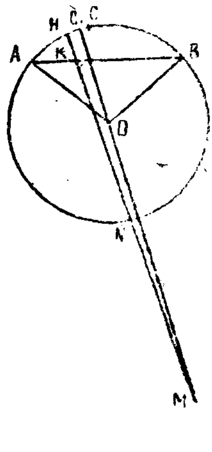


Рис. 93.

Л. А. Шрубко в статье «Трисекция угла», опубликованной в 1952 г. [100], с помощью метода последовательных приближений решает задачу с любой степенью точности. Пусть требуется, например, разделить на три равные части угол АОВ (или дугу АВ, рис. 93). Делим его на три равные части (приближенно, можно на глаз). Получаем дугу $AH \approx \frac{1}{3}$ АВ. На хорде АВ откладываем отрезок АК, равный хорде АН. Через точки Н и К проводим хорду HN, на продолжении которой отложим отрезок NM, равный диаметру окружности. Проведя прямую, проходящую через точку М и центр окружности до пересечения с окружностью в точке C_1, будем иметь $\angle AOC_1 \approx$

$$\approx \frac{1}{3} \angle AOB,$$ приближающийся к истинному углу АОС. Рассматривая теперь дугу AC_1 вместо АН и повторяя те же рассуждения, мы получим угол AOC_2, не обозначенный на рис. 93, еще больше приближающийся к $\angle AOC$ и т. д.[9].

Известно, что для решения задач определенного типа (решение квадратных уравнений, вычисление площадей трапеций и др.) применяются специальные чертежи-номограммы. Создана наука номография. Л. С. Блох, применяя идеи руководителей советской номографической школы Н. А. и А. А. Глаголевых, в 1963 г. опубликовал главу «Применение номографии к решению задачи о трисекции угла» в книге В. Д. Чистякова [97]. Автор показывает сначала, как можно построить номограмму уравнения трисекции угла

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

с помощью циркуля и линейки, приняв за горизонтальную ось $\sin\alpha$, а за вертикальную — $\sin 3\alpha$. Полученная таким образом кривая, выражающая зависимость $\sin 3\alpha$ от $\sin\alpha$, позволяет разделить острый угол на три равные части [97; 75].

Затем в этой главе рассматриваются «Внутренние и внешние кривые трисекции углов первой четверти окружности», «Деление угла на три равные части, пользуясь улиткой Паскаля», «Номограмма для трисекции острых и тупых до 180° углов»[10]. Мы же здесь в качестве примера рассмотрим только «Деление угла на три равные части, пользуясь новой улиткой».

Новой улиткой автор называет кривую, напоминающую улитку Паскаля, составляющую вместе с окружностью номограмму трисекции угла (рис. 94). Геометрическое место точек этой кривой получается следующим образом. Берется в качестве базиса круг с радиусом ОА. Из О проведем радиусы OA_k и на продолжениях их отложим отрезки $A_kM_k = AA_k$. Точки M_k соединим плавной линией, это и будет новая улитка. Номограммой трисекции угла САВ является в этом случае верхняя полуокружность и верхняя половина новой улитки. Соединим точку С с О.

Тогда $\angle ACO = \frac{1}{3}\angle CAB$[11].

Математики и студенты Ростовского университета тоже внесли свою лепту в решение задачи о трисекции и полисекции угла. Н. М. Несторович в упомянутой выше работе [77] (см. стр. 235) с помощью винтовой линии (см. рис. 92) деление угла AON на равные части свел к делению отрезка NP на равные части (N — точка пересечения стороны угла AON с окружностью круга — основания цилиндра, P — пересечение перпендикуляра к плоскости основания в точке N с винтовой линией).

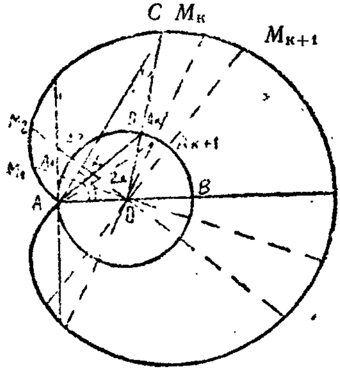


Рис. 94.

Если $NM_2 = M_2M_1 = M_1P$, то, проведя на цилиндре окружности через M_1 и M_2 «параллельные» окружности ANC, получим точки их пересечения с винтовой линией (P_1 и P_2). Опустив из них перпендикуляры на основание цилиндра, получим точки N_1 и N_2, соединив которые с точкой O, разделим угол AON на три равные части. Очевидно, что этим способом можно разделить угол AON на любое число равных частей.

В книге «Геометрические построения в плоскости Лобачевского» он показывает, что трисекция угла в плоскости Лобачевского аналогична этой задаче в плоскости Евклида.

К. К. Мокрищев в статье «О трисекции угла, отрезка прямой и треугольника в плоскости Лобачевского» (Уч. зап. Рост. пед. ин-та, 3, 1955) показал, что трисекция угла в плоскости Лобачевского такого же характера, как и в плоскости Евклида, т. е. в общем случае она не разрешима циркулем и линейкой, но существует бесчисленное множество углов, делящихся циркулем и линейкой на три равные части.

Рассмотрим еще некоторые результаты в решении этой задачи, полученные на кафедре высшей математики РГУ в последние годы[12].

Из

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n = \cos^n\frac{\varphi}{n} + in\cos^{n-1}\frac{\varphi}{n}\times$$
$$\times\sin\frac{\varphi}{n} - \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\frac{\varphi}{n}\sin^2\frac{\varphi}{n} -$$

$$-i\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\frac{\varphi}{n}\sin^3\frac{\varphi}{n}+\cdots+i^n\sin^n\frac{\varphi}{n}.$$

При

$$n=2m+1,\ \frac{\varphi}{n}=\frac{\varphi}{2m+1}=\alpha$$

и после замены степеней синусов через косинусы, получим

$$\cos n\varphi=b_0\cos^{2m+1}\alpha+b_2\cos^{2m-1}\alpha+\cdots+\cdots+\cdots b_{2m-2}\cos^3\alpha+b_{2m}\cos\alpha.$$

Обозначая

$$a=2\cos\varphi,\ x=2\cos\alpha=2\cos\frac{\varphi}{2m+1}$$

и подставляя вместо b_{2i} их значения, получим уравнение полисекции угла

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{(2m+1)!\,(2m-k)!}{(2m-2k+1)!\,(2m)!\,k!}x^{2m-2k+1}-a=0,$$

для решения которого (с помощью ЭВМ БЭСМ-4) составлена программа.

Если b_{2i} представить в виде $\sum\limits_{k=i}^{m}(-1)^i C^i_k C^{2k}_{2m+1}$, то

$$\cos\varphi=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=i}^{m}(-1)^i C^i_k C^{2k}_{2m+1}\cos^{2m-2i+1}\alpha.$$

Обозначив $\cos\alpha$ через y, а $\cos\varphi$ через a^1, получим для $n=2m+1$ уравнение полисекции угла φ в таком виде

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=i}^{m}(-1)^i C^i_k C^{2k}_{2m+1}y^{2m-2i+1}-a^1=0. \qquad (17)$$

В частности при $n=2m+1=3$, т. е. $m=1$, из (17) получается уравнение трисекции угла $y^3-3y-a_1=0$.

Из (17) получается уравнение деления угла на 5, 6, 7... равных частей. Подбирая затем значения a из интервала изменения $\cos\varphi$ такие, чтобы корни соответствующих уравнений строились с помощью циркуля и линейки, построим $\cos\frac{\varphi}{n}$ и $\frac{\varphi}{n}$.

При некоторых значениях a_1 соответствующее уравнение будет иметь корни, строящиеся с помощью конических сечений, и угол φ будет делиться на n равных частей с помощью конических сечений. Нами получен ответ и на такой вопрос: какие углы (дуги окружностей) вида $\varphi=\frac{m}{n}\pi$ делятся на k равных частей циркулем и линейкой?

Пусть $\varphi = \frac{m\pi}{n}$, где m и n взаимно-простые целые числа.

Тогда справедлива теорема: «Угол $\varphi = \frac{m\pi}{n}$ делится на К равных частей циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $\frac{m}{n \cdot к} = \frac{s}{r}$, где s и r — взаимно-простые целые числа и r — число Гаусса».

Докажем необходимость этого условия. Допустим, что угол $\varphi = \frac{m\pi}{n}$ можно разделить циркулем и линейкой на К равных частей, т. е. можно построить углы

$$\alpha = \frac{\varphi}{r} = \frac{m\pi}{nк} = \frac{s\pi}{к} \text{ и } 2\alpha h = \frac{2h\pi s}{r} \quad (n \text{ — целое}).$$

Нужно доказать, что r — число Гаусса.

Рассмотрим угол β, как центральный угол единичной окружности, которому на окружности соответствует точка $Z = e^{i\beta}$. Но если можно построить угол 2α, то можно построить и точку комплексной плоскости $Z = e^{i2\alpha} = e^{\frac{2\pi s}{r}i}$. Так как s и r взаимно-простые числа, то существуют такие целые числа h и f, что $sh + rf = 1$. Так как точка $Z = e^{\frac{2\pi s}{r}i}$ может быть построена циркулем и линейкой, то может быть построена и

$$Z_1 = e^{\frac{2\pi sh}{r}i} e^{\frac{2\pi rf}{r}i} = e^{\frac{2\pi}{r}i(sh+rf)} = e^{\frac{2\pi}{r}i}.$$

Если Z_0 — вершина на вещественной оси, то Z_1 является вершиной правильного r — угольника и ее можно построить циркулем и линейкой, т. е. окружность можно разделить на r равных частей циркулем и линейкой, когда r — число Гаусса. Достаточность указанного условия деления угла $\varphi = \frac{m}{n}\pi$ на k равных частей можно доказать так:

Пусть $\frac{m}{n \cdot к} = \frac{s}{r}$, где r — Гауссово число; нужно доказать, что можно циркулем и линейкой построить угол $\frac{\varphi}{k}=\frac{\alpha S}{2}$, где $\alpha=\frac{2\pi}{r}$. Так как r — число Гаусса, то по теореме Гаусса окружность делится циркулем и линейкой на r равных частей, т. е. циркулем и линейкой можно построить угол $\alpha=\frac{2\pi}{r}$. Следовательно, можно циркулем и линейкой построить и угол

$$\frac{\alpha}{2}\cdot S=\frac{2\pi}{2r}S=\frac{m\pi}{nk}=\frac{\varphi}{k},$$ Теорема доказана.

Вопрос о полисекции углов циркулем и линейкой в плоскости Лобачевского решается так же, как и в плоскости Евклида. И вообще все конструктивные задачи, не зависящие от аксиомы о параллельности, в плоскости Лобачевского решаются так же, как и соответствующие им задачи в плоскости Евклида.

В плоскости Лобачевского циркулем и линейкой тоже строятся выражения рациональные и квадратичные иррациональности. И вопрос о разрешимости конструктивной задачи в плоскости Лобачевского сводится, следовательно, к вопросу о разрешимости в квадратных радикалах уравнения, к которому сводится задача.

Задачи о трисекции и полисекции угла в плоскости Лобачевского — задачи алгебраические — и решаются с помощью алгебраических средств.

Следовательно, результаты теории полисекции углов в плоскости Евклида переносятся без изменения в плоскость Лобачевского. Справедливым остается также и уравнение (17) полисекции угла φ. И при тех значениях a, при которых оно разрешимо в квадратных радикалах, возможна полисекция угла циркулем и линейкой. Это справедливо и для полисекции угла в плоскости Римана.

О трисекции угла в плоскости Евклида написано много книг, найдено много способов точного и приближенного деления угла на три равные части. Из результатов, полученных на нашей кафедре, назовем только некоторые.

Видоизменив метод Декарта и Слюза в использовании конических сечений $F(x, y)=0$ при трисекции угла, ищем такое уравнение окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, чтобы абсцисса одной из точек пересечения окружности с коническим сечением удовлетворяла уравнению $x^3-2=0$ или $4x^3-3x-h=0$. Тем самым задача сводится к нахождению таких a, b и r, чтобы выполнялось указанное выше требование. Причем для простоты уравнение эллипса мы берем в виде $x^2+\left(\frac{y}{c}\right)=1$, уравнение параболы $y=cx^2$, а гиперболы $y=\frac{c}{x}$. Давая затем с некоторое числовое значение при решении системы уравнений для нахождении a, b и r, получаем решение задачи. Система уравнений для нахождения a, b, r получается в результате приравнивания коэффициентов в многочленах четвертой степени при одинаковых степенях x, один из которых получается в результате подстановки y, выраженного через x, из уравнений конических сечений в уравнение окружности, а второй — в результате доумножения x^3-2 или $4x^3-3x-h$ на линейный множитель, где коэффициент при x подбирается так, чтобы члены с x^4 после приравнивания многочленов уничтожились.

Применительно к трисекции угла эти рассуждения в случае $F(x, y)=y-cx^2=0$ проводятся следующим образом: даны уравнения параболы

$$y=cx^2 \tag{18}$$

и трисекции угла

$$4x^3-3x-h=0, \tag{19}$$

где $h=\cos\alpha$, $x=\cos\frac{\alpha}{3}$. Нужно найти параметры a, b и r в уравнении окружности

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{20}$$

такие, чтобы абсцисса точки пересечения параболы и окружности была $x=\cos\frac{\alpha}{3}$. Подставляя $y=cx^2$ в (20), получим

$$c^2x^4+(1-2cb)x^2-2ax+a^2+b^2-r^2=0. \tag{21}$$

Решив это уравнение, найдем абсциссы точек пересечения параболы и окружности. Но корни (21) зависят от a, b и r, которые мы и должны выбрать так, чтобы корни (21) были корнями и (19). Добиться этого можно, умножив (19) на $\frac{1}{4}c^2x$ и приравняв левые части (19) и (21). Чтобы эти многочлены были равны, должны быть равными коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравняв эти коэффициенты, получим систему

$$1-2cb=-\frac{3}{4}c^2,\quad 2a=\frac{h}{4}c^2,\quad a^2+b^2-r^2=0.$$

откуда находим

$$b=\frac{3}{8}c+\frac{1}{2c},\quad a=\frac{h}{8}c^2,\quad r=\sqrt{\left(\frac{3}{8}c+\frac{1}{2c}\right)^2+\left(\frac{h}{8}c^2\right)^2}.$$

Если c строится циркулем и линейкой, то a, b и r тоже строятся циркулем и линейкой. Тем самым будет определено и x. В частности, если $c=2$, $\alpha=90°$, $h=\cos 90°=0$, то $b=1$, $a=0$, $r=1$. Тогда, подставляя найденные значения в (21), будем иметь

$$4x^4-3x^2=0,\ x=\cos\frac{\alpha}{3}=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Это указывает на то, что в данном случае угол α делится на три равные части циркулем и линейкой[13].

Из кривых, которые нами использовались для деления угла на три равные части, рассмотрим только одну из так называемых кривых Шуте. Эти кривые — геометрические места точек, для которых $\angle A'AP$ находится в определенном заданном отношении к углу $PA'B$ (и к углу $PA'A$). Для различных значений этого отношения получаются различные кривые Шуте. Мы рассмотрим только ту из этих кривых, для которой $\angle PAA'=\frac{1}{3}$ $PA'B$ (рис. 95). Уравнение ее в Декартовой системе координат.

$$y^2=\frac{3ax^2-2x^3}{2x+a},\quad \text{где } a=AA'.$$

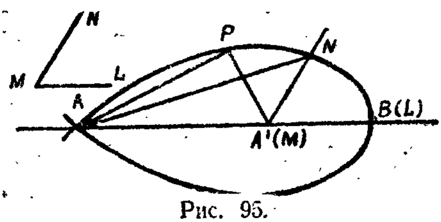


Рис. 95.

Очевидно, что если эта кривая дана и требуется угол φ ($\angle LMN$) разделить на 3 равные части, то, поместив вершину его M в точку A' и направив одну из сторон (ML) по AB, вторая сторона пересечет кривую в точке N и $\angle NAM=\frac{1}{3}\angle NML$ (в силу основного свойства этой кривой). Можно предположить, что если $\angle PAA'-\frac{1}{5}\angle PA'B$, то кривая Шуте будет иметь уравнение пятой степени и с ее помощью можно будет угол φ разделить на 5 равных частей. Если же $\angle PAA'=\frac{1}{n}\angle PA'B$, то с помощью соответствующей кривой Шуте можно будет разделить данный угол на n равных частей[14].

Деление окружности на равные части в неевклидовых геометриях

Задача о делении окружности на равные части (построение правильных многоугольников) в неевклидовых геометриях была поставлена и решена советскими математиками Д. Д. Мордухай-Болтовским, Н. М. Несторовичем, А. С. Смогоржевским, сотрудниками и студентами кафедры высшей математики РГУ.

Н. М. Несторович на основании результатов Д. Д. Мордухай-Болтовского показал [76; 145], что эта проблема в плоскости Лобачевского имеет тот же характер, что и в геометрии Евклида. Он доказал также, что эта задача и задача о квадратуре круга эквивалентны между собой. Будучи алгебраическими, эти задачи в бесчисленных случаях разрешимы циркулем и линейкой. А. С. Смогоржевский (1896—1969) впервые указал [89] способ построения в плоскости Лобачевского циркулем и линейкой правильных многоугольников, в частности он построил правильные пятиугольник и семнадцатиугольник.

Способ построения правильных многоугольников Смогоржевского по существу опирается на следующую теорему: в плоскости Лобачевского для любого $n>6$ существует отрезок R, который является стороной правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R. Доказательство: даны окружность с радиусом R и Δ AOB ($AB=R$) (рис. 96), высота его OC, $\angle AOB=\varphi$. Из Δ AOC имеем

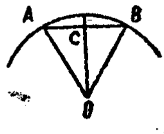


Рис. 96.

$$\operatorname{ch}\frac{R}{2}=\operatorname{sh}R\sin\frac{\varphi}{2}=2\operatorname{sh}\frac{R}{2}\operatorname{sh}\frac{R}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\text{и}\quad \operatorname{ch}\frac{R}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{22}$$

Но при $R>0$ $\operatorname{ch}\frac{R}{2}>1$ и, следовательно, $\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}>1$ или $\sin\frac{\varphi}{2}<\frac{1}{2}$, откуда $\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{6}$. Известно, что хорда AB будет стороной правильного n-угольника, если $\varphi=\frac{2\pi}{n}$. В случае, когда $AB=R$, $\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{6}$ или $\varphi<\frac{\pi}{3}$. Таким образом, чтобы существовала хорда $AB=R$, нужно, чтобы выполнялось неравенство $\frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{3}$ или $n>6$.

Это говорит о том, что в геометрии Лобачевского существуют такие окружности, которые можно разделить на n равных частей циркулем раствора R.

Используя этот метод, А. С. Смогоржевский в 1948 г. построил в плоскости Лобачевского правильный 17-угольник [89]. Построение очень громоздкое, мы его здесь не приводим.

Так был открыт путь построения правильных многоугольников (деления окружности на равные части) в геометрии Лобачевского.

Нам удалось показать, что при построении правильных многоугольников в плоскости Лобачевского можно пользоваться и другим способом, в основе которого лежит теорема: в плоскости Лобачевского можно построить правильный n-угольник циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда

$$n=2^k \text{ или } n=2^k P_1 P_2 \cdots P_m,$$

где $k \geqslant 0$ — целое число, а P_i — простые различные числа Ферма:

$$P_i=2^{2^{\nu_i}}+1.$$

Действительно, из ΔAOC имеем $\operatorname{sh} AC=\operatorname{sh} R \sin\frac{\pi}{n}$.

Если радиус окружности R, в которую вписан n-угольник, выбран так, что $\operatorname{sh} R=1$, то $\operatorname{sh} AC=\sin\frac{\pi}{n}$. Откуда видно, что $\operatorname{sh} AC$ будет квадратично-радикальным выражением одновременно с $\sin\frac{\pi}{n}$, а $\sin\frac{\pi}{n}$ будет квадратично-радикальным в том и только в том случае, если n является Гауссовым числом, что следует из доказательства соответствующей теоремы на плоскости Евклида.

Нами рассмотрено построение различными способами с помощью циркуля и линейки правильных многоугольников при $n=3$, 4, 5, 6, 10, 15 и 17. Но наши построения в плоскости Лобачевского по сложности мало отличаются от построений А. С. Смогоржевского [89].

Мы попытались также перенести три знаменитые задачи древности и в геометрию Римана, где они до этого, по-видимому, никем не рассматривались. Здесь рассмотрим только некоторые вопросы, связанные с построением правильных многоугольников в плоскости Римана.

Легко показывается, что построение правильных многоугольников с числом сторон 2^k и $3 \cdot 2^k$ осуществляется так же, как и в плоскости Евклида и Лобачевского. Здесь оказывается справедливой и общая теорема: правильный многоугольник с числом сторон n может быть построен в плоскости Римана только в том случае, если $n = 2^k P_1 P_2 \ldots P_m$, где $k \geqslant 0$ — целое число, $P_i = 2^{2^{\nu_i}} + 1$ — простые различные числа или равные единице.

Доказательство этой теоремы: пусть хорда AB — сторона правильного n-угольника, угол $AOB = \frac{2\pi}{n}$. Проведем $OC \perp AB$ (см. рис. 96). Используя одну из формул тригонометрии Римана, запишем

$$\sin AC = \sin R \sin \frac{\pi}{n}. \tag{23}$$

Положив $R = \frac{\pi}{6}$, получим $\sin AC = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{n}$. (24)

Из последней формулы видно, что sin AC является квадратично-радикальным выражением одновременно с $\sin \frac{\pi}{n}$, а $\sin \frac{\pi}{n}$ квадратично-радикальный в том и только в том случае, если n является Гауссовым числом, т. е. $n = 2^k P_1 P_2 \cdots P_m$.

Следовательно, если n — Гауссово число, то сторона правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса $\frac{\pi}{6}$, на основании теоремы Д. Д. Мордухай-Болтовского, которая справедлива и для плоскости Римана, может быть построена циркулем и линейкой[16].

Решение задачи о делении окружности на равные части в плоскости Евклида

Теория этой задачи продвинута основательно: создана общая теория, найдены многие способы точного и приближенного деления окружности на равные части. И все же ряд вопросов этой проблемы остается нерешенным и в наше время. В последние годы некоторые из этих вопросов привлекали внимание нашей кафедры и студентов, специализировавшихся при ней. Нами получены новые результаты, некоторые из них приводятся в данной книге.

Для деления окружности или дуги ее на n равных частей можно использовать квадратрису, спираль Архимеда, квадратрису Чирнгауза и другие кривые. Мы рассмотрим здесь, как можно с помощью косинусоиды и синусоиды построить стороны правильного n-угольника (точно и приближенно).

Первый способ. Пусть дан круг с радиусом $R=1$ и график функции $y=\cos x$. На оси OX откладываем отрезок $OM=\frac{2\pi}{n}=$ $=\frac{4}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$ (рис. 97). Величина этого отрезка, очевидно, будет величиной и центрального угла φ, который соответствует стороне правильного n-угольника (a_n).

Положим, в частности, $n=8$. Тогда

$$OM=\varphi=\frac{2\pi}{8}=\frac{4}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}ON.$$

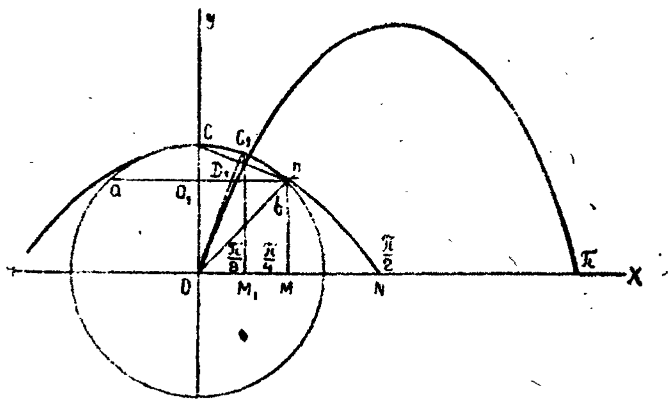


Рис. 97.

Чтобы построить теперь сторону 8-угольника, восстанавливаем перпендикуляр в точке M, который пересечет косинусоиду в точке D; перпендикуляр $MD=\cos\varphi=\cos\frac{\pi}{4}$. Из точки D проведем прямую параллельно OX, которая пересечет окружность в точках a и b, а OC—в точке O_1. Тогда $OO_1=MD=\cos\angle O_1Ob$.

Следовательно, $\angle O_1, Ob=\angle\varphi=\left(\frac{\pi}{4}\right)$, а прямая $cb=a_n$ (a_8). Второй способ. Рассмотрим тот же круг и график функции

$y=2\sin x$. Отложим $OM_1=\frac{1}{2}OM$ и из точки M_1 восстанавливаем перпендикуляр до пересечения с синусоидой в точке D_1. Перпендикуляр $M_1D_1=2\sin\frac{\varphi}{2}$. Но из треугольника COb видно, что $Cb(a_n)=2\sin\frac{\varphi}{2}$. Следовательно, $M_1D_1=Cb$, т. е. является стороной n-угольника.

Третий способ — приближенного построения стороны n-угольника. Он основан на том, что при $0°<\varphi<30°$ дуга окружности и косинусоида «близки» друг к другу. Используя этот участок сближения окружности и косинусоиды, можно без косинусоиды, т. е. пользуясь только циркулем и линейкой, дать приближенное построение $a_n (n>15)$. Используя тот же полукруг и рассматривая, например, угол $COC_2=\frac{2\pi}{16}<30°$, можно получить приближенное значение a_{16} следующим образом. На OX строим отрезок, приблизительно равный $\frac{\pi}{2}\approx\frac{3{,}14}{2}=1{,}57$.

Затем на OX откладываем отрезок $\varphi=\frac{2\pi}{n}=\frac{4}{n}\ \frac{\pi}{2}$. В нашем случае $\varphi=\frac{4}{16}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$. Из конца этого отрезка восстанавливаем перпендикуляр до пересечения с окружностью в точке C_1; соединив C_1 с O, получим угол $COC_1=\varphi=\frac{\pi}{8}$, а хорда CC_1, очевидно, будет (приближенно) стороной 16-угольника. Заметим еще, что можно таким образом построить стороны n-угольников и при $n<15$; для этого нужно только построить сначала 14-, 16-, 18-, 20-, 22-угольники, а затем соединить их вершины через одну, и мы получим 8-, 9-, 10-, 11-угольники.

Что же касается 6-, 4- и 3-угольников, то их стороны легко строятся другими способами. Сторону 5-угольника можно построить способом Биона или способом Федорова.

Однако наш способ имеет для других n преимущество по сравнению со способами Биона и Федорова[17].

К решению вопроса о построении правильных многоугольников мы подходили и несколько иными путями: исследовали уравнения, к которым сводится задача построения сторон правильных n-угольников, и строили их корни, дающие сторону правильного многоугольника, с помощью прямых углов.

По аналогии с тем, как это сделано у Адлера [2; 245] для многоугольников при $n=5$, 7 и 9, нами получены уравнения для построения сторон правильных многоугольников при $n=11$, $n=19$ и $n=37$ и с помощью прямых углов построены правильные многоугольники с указанным числом сторон.

Рассмотрим для примера построение правильного 11-угольника. Пользуясь методом спуска Гаусса при рассмотрении

$$x^{11}-1=0, \qquad (25)$$

мы найдем уравнение степени не выше $5\left(\frac{n-1}{2}\right)$:

$$y^5+y^4-4y^3-3y^2+3y+1=0, \qquad (26)$$

наибольший из корней которого

$$y_1=2\cos\frac{2\pi}{11}$$

$\left(y_k=2\cos\frac{2\pi k}{11}, k=1, 2, 3, 4, 5\right)$ и позволит нам найти сторону правильного 11-угольника с помощью прямых углов.

Построим прямоугольную ломаную с учетом величины и знаков коэффициентов (26) ABCDEFG ($AB=1$, $BH\perp AB$, $\operatorname{tg}\angle BAH=y_1$), представляющую уравнение (26) (рис. 98). Число прямых углов для определения корней уравнения меньше на единицу степени уравнения, в нашем случае надо построить четыре прямых угла, располагая их так, чтобы вершина H лежала на продолжении BC, вершина K — на CD, вершина L — на продолжении DE и вершина M — на продолжении EF. Концы этой разрешающей прямоугольной ломаной должны совпадать с точками A и G. Причем таких разрешающих ломаных в нашем случае будет пять (по числу корней), из которых нас интересует BH — наибольший из всех корней. В том, что BH—корень (26), убедимся, рассматривая подобные треугольники ABH, CKH, KDL, LME и MFG. А то, что $BH=y_1=2\cos\frac{2\pi}{11}$, следует из построения этого отрезка.

Проведем теперь окружность единичного радиуса с центром в точке B. Пусть $BP=PH$. Восстановим перпендикуляр в точке P к BH, который пересечет окружность в вершинах A_1 и A_{10} правильного 11-угольника.

Действительно, так как $BH=2\cos\frac{2\pi}{11}$, то $BP=\cos\frac{2\pi}{11}$, а тогда из треугольника BA_1P имеем $PA_1 = \sin\frac{2\pi}{11}$. Следовательно, A_1 является первой вершиной правильного 11-угольника. Соединяя точку A_1 с точкой пересечения $BУ_1$ с окружностью, получим $A_1A_{11} = a_{11}$[18].

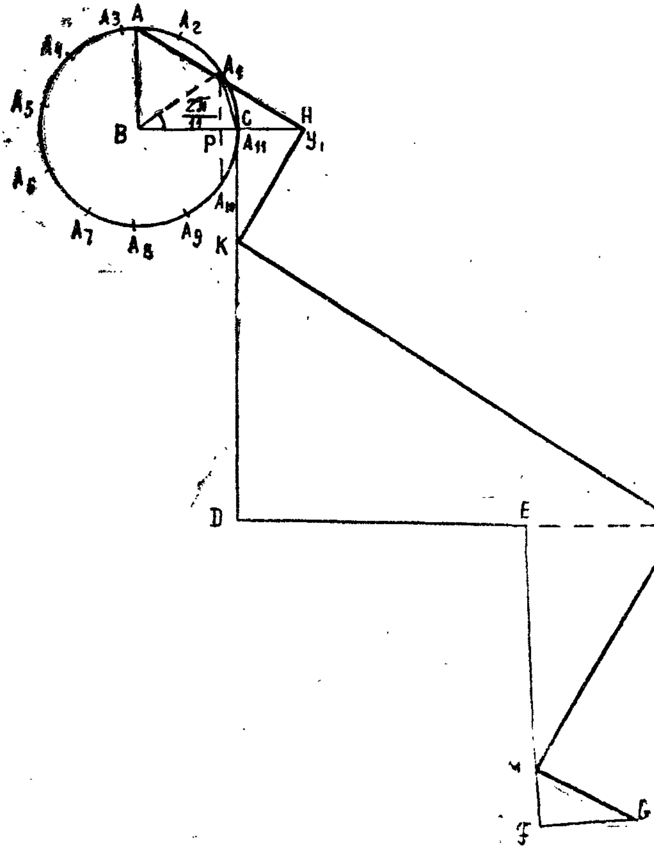


Рис 98.

Можно подойти к построению сторон правильного многоугольника, отправляясь от соответствующих уравнений, и таким путем. Например, уравнение для нахождения стороны правильного 9-угольника $x^3 - 3x + 1 = 0$ можно записать в виде $x^2 - 3 + \frac{1}{x} = 0$ или $\frac{1}{x} = -x^2 + 3$. Положив $y = \frac{1}{x}$ и $y = -x^2 + 3$

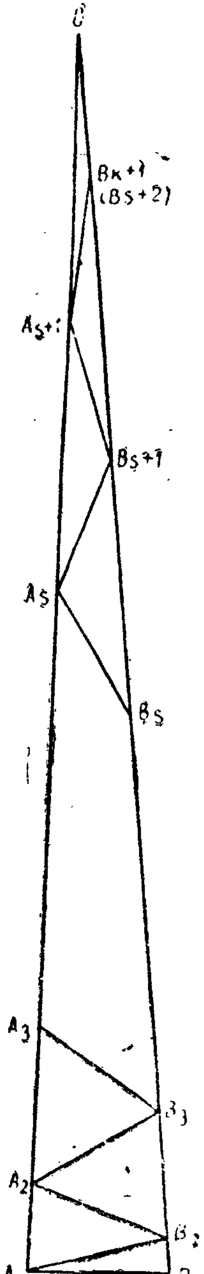


Рис. 99.

и решив эту систему двух уравнений, найдем точку пересечения гиперболы и параболы. Абсцисса точки пересечения и будет стороной правильного 9-угольника[19].

Ал-Бируни, решая задачу о построении правильных многоугольников, использовал вписанный в круг равнобедренный треугольник A_1B_1C для получения стороны $A_1B_1=2x$ при $A_1C=B_1C=1$. Именно таким путем он свел задачи о построении сторон правильного 5-угольника a_5 и 9-угольника a_9 к решению алгебраических уравнений (см. стр. 107).

Мы показываем, что этот способ можно обобщить на случай любого правильного многоугольника с числом сторон $n=4k\pm1$ (четные значения n нет смысла рассматривать). Действительно, пусть требуется построить сторону правильного n-угольника — a_n (при n нечетных). Положим, что мы каким-то образом построили треугольник A_1B_1C со сторонами $A_1C=B_1C=1$ и $A_1B_1=$ $=a_n=2x$. Покажем теперь, что решение этой конструктивной задачи — построение правильного n-угольника — можно свести к построению корней алгебраического уравнения, степень которого не выше

$$\frac{n-1}{2}.$$

Отложим

$$A_1B_2=B_2A_2=A_2B_3=B_3A_3=A_3B_4=\cdots=$$
$$=B_sA_s=A_sB_{s+1}=B_{s+1}A_{s+1}=$$
$$=A_{s+1}B_{k+1}(B_{s+2})=B_{k+1}C=A_1B_1. \quad \text{(рис. 99)}$$

Пусть

$$\angle B_iA_iB_{i+1}=\alpha_i,$$
$$\angle A_iB_{i+1}A_{i+1}=\beta_i.$$

Легко показать, что

$$\alpha_i=\frac{4i-3}{n}\pi, \quad \beta_i=\frac{4i-1}{n}\pi.$$

При $n=4k+1$ и $i=k$ имеем $\beta_k=\frac{4k-1}{4k+1}\pi$. Два другие угла в треугольнике $B_sA_sB_{s+1}$ равны между собой и каждый из них $\gamma_k=\frac{\pi}{4k+1}=\frac{\pi}{n}$. А это значит, что вершина A_{k+1} совпадает с вершиной C. Полагая $n=4k-1$, имеем $\alpha_k=\frac{4k-3}{4k-1}$, а два другие угла этого треугольника равны и каждый из них

$$S_k=\frac{\pi-\frac{4k-3}{4k-1}\pi}{2}=\frac{4k\pi-\pi-4k\pi+3\pi}{2(4k-1)}=\frac{\pi}{4k-1}=\frac{\pi}{n},$$

т. е. вершина этого треугольника B_{k+1} совпадает с вершиной C. Следовательно,

$$A_1A_2+A_2A_3+\ldots+A_kC=A_1C \text{ и } \sum_{i=0}^{k-1} B_{i+1}B_{i+2}=B_1C$$

или, так как

$$A_iA_{i+1}=2A_iB_{i+1}\sin\frac{\beta_i}{2}=4x\sin\frac{\beta_i}{2}, \text{ то}$$

$$1=4x\sum_{i=1}^{k}\frac{\sin\beta_i}{2} \text{ или } 1=4x\sum_{i=1}^{k}\sin\frac{4i-1}{2n}\pi$$

и

$$1=4x\sum_{i=1}^{k}\sin\frac{4i-3}{2n}\pi \text{ или } 1=4x\sum_{i=0}^{k-1}\sin\frac{4i+1}{2n}\pi.$$

Тогда, в случае $n=4k+1$ имеем

$$1+4x\sum_{i=1}^{k}\sin\frac{4i-1}{2n}\pi=\left[\cos\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{k}\sin 4i\frac{\pi}{2n}-\right.$$

$$\left.-\sin\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{k}\cos 4i\frac{\pi}{2n}\right]4x.$$

С учетом того, что

$$\cos 2mz=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C^{2j}_{2m}\cos^{2m-2j-1}z\sin^{2j+1}z$$

и

$$N \quad \sin 2mz = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j C^{2j+1}_{2m} \cos^{2m+2j-1} z \sin^{2j+1} z,$$

а также, что

$\sin \frac{\pi}{2n} = x$ и $\cos \frac{\pi}{2n} = \sqrt{1-x^2}$, и, положив $x^2 = y$, получим уравнение

$$4 \sum_{i=0}^{k} \sum_{s=0}^{2i-1} (-1)^s C^{2s+1}_{4i} (1-y)^{2i-s} y^{s+1} -$$

$$-4 \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=0}^{2i} (-1)^s C^{2s}_{4i} (1-y)^{2i-s} y^{s+1} - 1 = 0. \tag{27}$$

Следовательно, степень уравнения (27) не выше $2k$, т. е. не выше $\frac{n-1}{2}$. Рассматривая $n=4k-1$ аналогичным образом, получаем уравнение

$$4 \sum_{i=0}^{k} [\sum_{s=0}^{2i-1} (-1)^s C^{2s+1}_{4i+1} (1-y)^{2i-s} y^{s+1} + y^{2i+1}] + 4y - 1 = 0, \tag{28}$$

степень которого не превосходит $2k-1 = \frac{n-1}{2}$. Например, если $n=4k-1=4\cdot 2-1=7$ $(k=2)$, то уравнение (28) будет

$$y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0. \tag{29}$$

Некоторые из результатов, полученных нами, мы включаем в число задач для любителей математики (см. примечания к IV гл.).

Удвоение куба

Н. Ф. Четверухин в своей книге [95] при решении задачи удвоения куба применяет метод последовательных приближений. Суть этого метода состоит в нахождении приближенных значений корней уравнения

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0. \tag{30}$$

с помощью некоторого алгоритма.

Если конструктивная задача сведена к (30) и a_k строятся циркулем и линейкой, а истинное значение корня (30) (x) точно циркулем и линейкой или не строится или строится с большим трудом, то мы можем взять приближенное значение корня (x_1). Затем, пользуясь алгоритмом, получать лучше приближения к истинному значению корня ($\bar{x}$), строящиеся циркулем и линейкой. Итак, пусть

$$\bar{x}=x_1+\omega_1, \tag{31}$$

где ω_1 — соответствующая погрешность.

Тогда

$$f(\bar{x})=f(x_1+\omega_1)=f(x_1)+\omega_1 f'(x_1)+\frac{\omega_1^2}{2!}f''(x_1)+\ldots \tag{32}$$

Умножив правую часть (32) на неопределенный множитель k и прибавив это выражение к правой части (31), получим

$$\bar{x}=x_1+kf(x_1)+\omega_1[kf'(x_1)+1]+k\frac{\omega_1^2}{2!}f''(x_1)+\ldots \tag{33}$$

Обозначив $x_1+kf(x_1)$ через $F_1(x_1)$, а остальную часть (33) через ω_2, получим

$$\bar{x}=F_1(x_1)+\omega_2. \tag{34}$$

Положив $F_1(x_1)=x_2$ и продолжая таким образом дальше, мы получим алгоритм для вычисления последовательных приближений корня $\bar{x}$. При малых ω_1 и при условии $|1+kf'(x_1)|<1$ алгоритм сходится к корню $\bar{x}$.

Положив $|1+kf'(x_1)|=0$, найдем $k=-\frac{1}{f'(x_1)}$. Внося найденные значения k в (33), имеем

$$\bar{x}=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{\omega_1^2}{2!}\frac{f''(x_1)}{f'(x_1)}-\ldots-\frac{\omega_1^n}{n!}\frac{f^{(n)}(x_1)}{f'(x_1)} \tag{35}$$

Обозначив в (35) $x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ через $F_2(x_1)$, а остальную часть — через ω_3, получим

$$\bar{x}=F_2(x_1)+\omega_3. \tag{36}$$

Функция $F_2(x_1)=x_3$ дает алгоритм второго порядка. $F_1(x_1)$ и $F_2(x_1)$ могут быть построены циркулем и линейкой, если k строится циркулем и линейкой.

Аналогичным образом можно построить алгоритм высших порядков и получить последовательность x_1, $x_2=F_1(x_1)$, $x_3=$ $=F_2(x_1)$, $\cdots$ сходящуюся к искомому $\bar{x}$, если x_1 выбрано в области сходимости алгоритма $F_n(x_1)$.

Используя этот метод, Н. Ф. Четверухин решает задачу об удвоении куба, которая, как известно, сводится к решению уравнения $x^3-pa^3=0$, и в частности — при $a=1$ и $p=2$, x^3- $-2=0$. (30′)

Построим для этого полинома $F_2(x_1)$. В этом случае

$$\bar{x}=\frac{1}{3}\left(2x_1+\frac{p}{x_1^2}\right)+\omega_2, \tag{31′}$$

где

$$\frac{1}{3}\left(2x_1+\frac{p}{x_1^2}\right)=F_2(x_1), \quad \omega_2=-\frac{\omega_1^2}{x_1}+\frac{\omega_1^3}{3x_1^2}. \tag{32′}$$

Для удвоения куба этот алгоритм примет вид:

$$F_2(x_1)=\frac{2}{3}\left(x_1+\frac{1}{x_1^2}\right). \tag{33′}$$

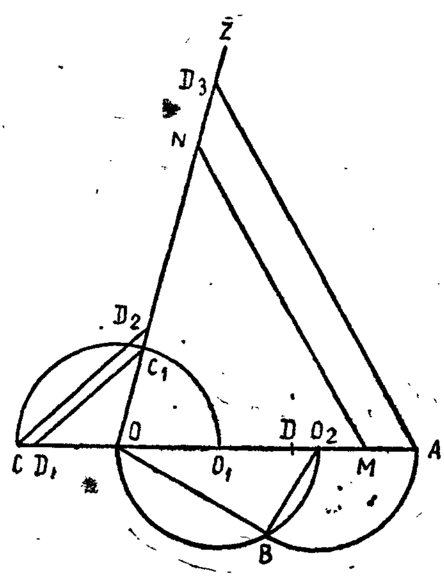


Рис. 100.

Выбрав начальное значение x_1 с погрешностью ω_1, строим циркулем и линейкой (32′), находим $x_2=F_2(x_1)$ с погрешностью ω_2 и т. д. Реализовать построение искомого отрезка с помощью этого метода можно так.

Допустим, что требуется построить отрезок x, если $x=a\sqrt[3]{2}$ или отрезок $x=\sqrt[3]{2}$. Алгоритм $F_2(x_1)$ для этого уравнения имеет вид (33′). Возьмем прямую CA и радиусом R=1 построим окружности с центрами в O, O_1, O_2. Пусть OM — ребро данного куба (рис. 100).

Через точку O проведем произвольную ось (OZ). Отложим $OD=OB$, где B — точка пересечения двух окружностей. Тогда

$$OB=\sqrt{O_1O^2_2-O_2B^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}.$$

Примем теперь отрезок $AD=OA-OD=3-\sqrt{3}=1{,}2678$ за начальное приближенное значение x, т. е. за x_1. Так как искомая величина $\bar{x}=\sqrt[3]{2}=1{,}25992...$, то ошибка $|\omega_1|<\frac{8}{10^3}$.

Подставив выбранное значение x_1 в (32′), получим

$$F_2(x_1)=\frac{1}{3}\left(2x_1+\frac{1}{3x_1-3}\right)=x_2.$$

Так как

$$x_1=AD, \text{ то } 3x_1=AD_1, 3x_1-3=AD_1-AO=OD_1.$$

Соединив точки D_1 и C_1 и проведя $CD_2\|D_1C_1$, имеем

$$1:OD_1=OD_2:1.$$

Следовательно,

$$OD_2=\frac{1}{OD_1}=\frac{1}{3x_1-3}.$$

Так как $2x_1=DD_1$, отложим $D_2D_3=DD_1=2x_1$ и тогда

$$OD_3=OD_2+D_2D_3=2x_1+\frac{1}{3x_1-3}; \quad OD_3:OA=\left(2x_1+\frac{1}{3x_1-3}\right):3,$$

откуда

$$\frac{OD_3}{OA}=\frac{1}{3}\left(2x_1+\frac{1}{3x_1-3}\right)=x_2,$$

проведя теперь прямую $MN\|AD_3$, будем иметь

$$\frac{ON}{OM}=\frac{OD_3}{OA}=x_2.$$

Но $OM=a$, следовательно, $ON=ax_2$. Погрешность второго приближения $\omega_2=\sqrt[3]{2}-x_2$. Подставляя теперь в

$$x_2=\frac{1}{3}\left(2x_1+\frac{1}{3x_1-3}\right)$$

вместо x_1 величину $3-\sqrt{3}=1{,}2678$, найдем $\omega_2<\frac{6}{10^5}$. Значит ON есть ребро удвоенного куба с погрешностью меньшей $\frac{6}{10^5}a$.

Продолжая процесс дальше, легко заметить, что с увеличением n, ω_n быстро стремится к нулю, а x_n — к истинному значению ребра удвоенного куба: $a\sqrt[3]{2}$. Если же взять начальное значение $x_1=1\frac{1}{4}$, то $|\omega_1|<\frac{1}{10^2}$. Мы при решении задачи, сводящейся к уравнению $x^3-2=0$, использовали различные приемы.

1. Подобно тому, как это было показано при трисекции угла (см. стр. 244), берем одно из конических сечений, например, $y=\frac{c}{x}$ и окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ и находим такие значения a, b, r, чтобы при решении системы уравнений получить значение x, удовлетворяющее и уравнению $x^3-2=0$. Но если при трисекции угла мы умножали x^3-3x-a на такой множитель, чтобы в левой части и правой части коэффициенты при x^4 были равны, то в данном случае нужно умножить x^3-2 на такой множитель, чтобы, приравняв этот многочлен четвертой степени многочлену, получающемуся при совместном решении уравнений гиперболы и окружности относительно X, коэффициенты при X^4 были равны, и эти члены тем самым уничтожались бы.

2. При решении обобщенной задачи удвоения куба, которая, как известно, сводится к построению корня уравнения

$$x^3-Pa^3=0,$$

т. е. отрезка прямой $X=a\sqrt[3]{P}$, мы исходим из того, что средства, пригодные для построения двух средних пропорциональных x и y между двумя данными отрезками a и $2a$, т. е. $a:x=x:y=y:2a$, годятся для построения двух средних пропорциональных между a и pa, т. е. $a:x=x:y=y:pa$.

Например, найдем отрезок $x=a\sqrt[3]{P}$ с помощью мезолябия Эратосфена (см. стр. 43), взяв расстояние между параллельными планками не $2a$, а pa. При использовании двух парабол вместо $y=x^2$ и $y^2=2x$ следует взять $y=x^2$ и $y^2=px$. Решая их совместно, получим $x=\sqrt[3]{P}$.

3. При удвоении куба мы использовали ряд кривых, о которых нам не известно, что они уже использовались при решении этой задачи. Назовем некоторые из них. Парабола Нейля

$y^3 = bx^2$ будет иметь точки пересечения с прямыми $x = \pm a$, координаты этих точек $(\pm a, \sqrt[3]{a^2 b})$. Положив $b = 2a$, получим $y = a\sqrt[3]{2}$. Ордината точки пересечения «Локона Аньези» (кривой Верзиера)

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2} \text{ и гиперболы } \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\right)^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

будет $y = \sqrt[3]{2}$.

Кубика Чирнгауза $2(2p+x)^3 = 27p(x^2+y^2)$ и эллипс

$$\frac{\left(x - \frac{4}{5}\right)^2}{\frac{128p^3 + 20a^3}{75p}} + \frac{y^2}{\frac{128p^3 + 20a^3}{135p}} = 1$$

тоже имеют координаты точки пересечения $x = a\sqrt[3]{2}$.

В отличие от геометрического способа Диоклеса, используя уравнение циссоиды

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{y}{1-x}$$

ее образующего круга

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ и прямой } \frac{y}{x} = k$$

и решая их совместно, получим отрезок $k = \sqrt[3]{2}$.

Можно удвоение куба осуществить также с помощью кубической параболы, параболической и гиперболической спиралей и других известных кривых. Особый интерес представляет получение для этой цели некоторых разновидностей кривых, не известных еще в математике. С задачей удвоения куба связано обобщение этой задачи.

1. Если задача удвоения куба $x^3 = 2a^3$ просто неразрешима циркулем и линейкой, то обобщенная задача $x^3 = pa^3$, очевидно, при некоторых значениях P разрешима циркулем и линейкой.

2. Обобщением этой задачи является и $x^n - pa^n = 0$, корнем которого является одно из n—1 средних пропорциональных между отрезками a и pa^{20}.

Современная теория квадратуры луночек

После того как задача о квадратуре луночек из числа конструктивных перешла в разряд алгебраических, после расширения понятия луночки и в связи с начавшимися попытками доказательства справедливости гипотезы о существовании только пяти видов круговых замкнутых луночек, квадрируемых циркулем и линейкой, развитие теории квадратуры луночек перешло в качественно новый период. Эта теория особенно успешно развивалась в XX столетии. Этот период в истории квадратуры луночек стали называть современной теорией квадратуры луночек. В предыдущей главе было показано, что из зарубежных математиков в ее развитии оставили след Ландау, Чакалов и Вилейтнер (Гофман).

Но основными творцами современной теории квадратуры луночек по праву следует считать советских математиков.

Покорение основной проблемы

Доказательство теоремы о существовании только пяти видов круговых замкнутых луночек, квадрируемых циркулем и линейкой, стало основной проблемой современной теории квадратуры круговых замкнутых луночек.

Попытки Ландау и Чакалова решить ее, как мы видели, не увенчались успехом. Чакалов даже пришел к выводу о том, что эта проблема не может быть решена при современном уровне математики. Это утверждение было высказано в 1930 г., а в 1933 г. советский знаменитый алгебраист Н. Г. Чеботарев (1894—1947) опроверг его утверждение, получив основные результаты в решении этой проблемы [89]. Рассматривая эту задачу как чисто алгебраическую, используя теорию групп Галуа, p-адические ряды и другие результаты современной математики, Н. Г. Чеботарев указал основной метод решения этой проблемы, доказал ряд теорем, необходимых для доказательства указанной теоремы, и, исследуя уравнение Чакалова [45; 46], он доказал, что при m и n нечетных квадрируемыми луночками будут только те, для которых $m=3$, $n=1$ и $m=5$, $n=1,3$. А. В. Дороднов (р. 1908 г.), продолжив исследования своего учителя, в 1947 г. доказал, что если одно из чисел (m, n) четное, а второе нечетное, то квадрируемые луночки будут только при $m=2$, $n=1$ и при $m=3$, $n=2$. Тем самым была полностью доказана основная теорема теории квадратуры круговых замкнутых луночек и была покорена последняя из пяти знаменитых задач, не поддававшихся усилиям математиков многих поколений. Победителями этой проблемы, оказавшейся не менее трудной, чем проблема о квадратуре круга, были советские казанские математики Н. Г. Чеботарев и А. В. Дороднов.

Результаты Н. Г. Чеботарева и А. В. Дороднова, хотя и были по необходимости изложены в малодоступной форме для широкого круга читателей, произвели большое впечатление на тех математиков, которые смогли их понять и по достоинству оценить как научный подвиг.

Здесь мы не имеем возможности представить их результаты в той форме, в которой их изложили авторы; желающие могут познакомиться с ними по статьям Н. Г. Чеботарева и А. В. Дороднова [42] и по книге Н. Г. Чеботарева [94]. В более популярной, но не столь строгой форме с результатами их можно познакомиться по книге М. М. Постникова [85] и по результатам наших попыток популяризовать эти результаты, изложенные в этом разделе.

Мы в качестве примеров рассмотрим только два случая $m=2$, $n=1$ и $m=3$, $n=1$ и покажем, как из уравнения (45) при этих значениях m и n вытекает, что луночки действительно квадрируемы. Подставляя в (39) $m=2$, $n=1$, получим

$$(x^2-1)^2-2(x-1)^2x=0.$$

После сокращения на $(x-1)^2$ имеем

$$x^2+1=0; \quad x_{1,2}=\pm i=\cos 2\Theta\pm i\sin 2\Theta,$$

модуль которых

$$|\pm i|=|\cos 2\Theta\pm i\sin 2\Theta|=1,$$

$$\cos 2\Theta=0,\ 2\Theta=2\varphi'=90^\circ.$$

Так как отношение центральных углов в этом случае $\varphi:\varphi'=m\Theta:n\Theta=2:1$, то $2\varphi=2(2\varphi')=180^\circ$.

Это и есть 1-й случай квадрируемой луночки. При $m=3$, $n=1$ уравнение (45) после сокращения на $(x-1)^2$ примет вид

$$x^4+2x^3+2x+1=[x^2+(1-\sqrt{3})x+1]\,[x^2+(1+\sqrt{3}x+1)]=0.$$

Уравнение

$$x^2+(1+\sqrt{3})x+1=0$$

имеет вещественные корни

$$x_{1,2}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3}},$$

которые не дадут «действительной луночки», так как в этом случае в $\cos 2\Theta + i\sin 2\Theta$ мнимая часть равна нулю, т. е. $\sin 2\Theta = 0$ и $\Theta = 0$. Следовательно,

$$\varphi = m\Theta = 0 \text{ и } \varphi' = n\Theta = 0.$$

Уравнение

$$x^2 + (1 - \sqrt{3})x + 1 = 0$$

имеет комплексные корни

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \pm \sqrt{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}};$$

$$|x_1| = |x_2| = |\cos 2\Theta \pm i\sin 2\Theta| = 1,$$

откуда получается

$$\cos 2\Theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}; \quad 2\Theta = \varphi' = \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 68{,}5°;$$

$$\varphi = 3\cdot 2\Theta = 3\cdot 68{,}5 = 205{,}5°.$$

Так как отрезок прямой

$$\cos 2\Theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

строится циркулем и линейкой, то можно построить циркулем и линейкой углы Θ, φ и φ'. Следовательно, луночка с этими центральными углами и прямолинейная фигура, равновеликая этой луночке, строятся циркулем и линейкой.

Из сказанного вытекает: круговые замкнутые луночки будут квадрируемы циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда уравнение (45) сводится к квадратному уравнению или имеет в качестве множителя многочлен второй степени, корни которого мнимые и абсолютная величина их 1.

Попытки популяризации результатов Н. Г. Чеботарева и А. В. Дороднова

Первым математиком, предпринявшим попытку популяризации результатов Н. Г. Чеботарева, был сам автор, изложивший в 1934 г. для студентов и аспирантов (алгебраистов) свои результаты в более доступной форме в своей книге «Основы теории Галуа» [94]. В этой книге он дает справку из истории этой задачи, дает некоторые определения и указывает на связь алгебры и геометрии, что облегчает несколько понимание его основной алгебраической части доказательства.

Раздел в книге М. М. Постникова «Теория Галуа» [85] тоже можно рассматривать как попытку популяризации результатов Н. Г. Чеботарева и А. В. Дороднова. Правда, здесь некоторые теоремы приведены без доказательства, но знакомство с приведенными теоремами и разбор всех пяти случаев квадрируемых луночек, получающихся из [41], позволяет понять основную идею Н. Г. Чеботарева.

Более подробно изложим здесь нашу попытку популяризации доказательства основной теоремы и геометрическую интерпретацию результатов Н. Г. Чеботарева и А. В. Дороднова.

Сведе́ние задачи к построению угла μ. Н. Г. Чеботарев и А. В. Дороднов задачу о квадратуре круговых замкнутых луночек рассматривали как чисто алгебраическую. Мы тоже будем отправляться от уравнения Чакалова. Но мы будем рассматривать и исходное для него уравнение Эйлера

$$n\sin^2 m\mu - m\sin^2 n\mu = 0 \qquad (37)$$

и сведем эту задачу к построению угла $\mu(\cos\mu)$, являющегося общей наибольшей мерой центральных углов дуг, ограничивающих луночку, т. е. наш подход к этой задаче будет более геометричен.

Известно, что круговая замкнутая луночка будет квадрируемой циркулем и линейкой, если корень уравнения (III, 45) $x=\cos\mu$ выражается в виде рационального числа или конечной цепочки квадратных радикалов. В этом случае $x=\cos\mu$ (катет прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 1), а следовательно, и угол μ строятся циркулем и линейкой. Построив затем центральные углы $\Psi=2\varphi=2m\mu$ и $\Psi'=2\varphi'=2n\mu$, мы построим искомую луночку и прямолинейную фигуру, равновеликую ей.

Например, известно, что в первом случае Гиппократа Хиосского

$$\Psi=2\varphi=180°,\ \Psi'=2\varphi'=90^0\ (m:n=2:1)$$

их общая мера $\mu=90°$. Построив такую круговую луночку, центральный угол одной из дуг которой 90°, а второй — в два раза больше, получим квадрируемую луночку, так как в этом случае выполняется (37) и отношение m к n — рациональное число 2. Прямолинейная же фигура, равновеликая ей, — прямоугольный равнобедренный треугольник, гипотенуза которого — общая хорда дуг (диаметр круга). Попытаемся выяснить, при каких же значениях m и n будет выполняться (40). Очевидно, что m и n могут быть одновременно четными числами или нечетными, или одно из (m, n) может быть четное, а второе — нечетное. Если центральные углы дуг $\Psi=2\varphi=m\mu$ и $\Psi'=2\varphi'=n\mu$, обра-

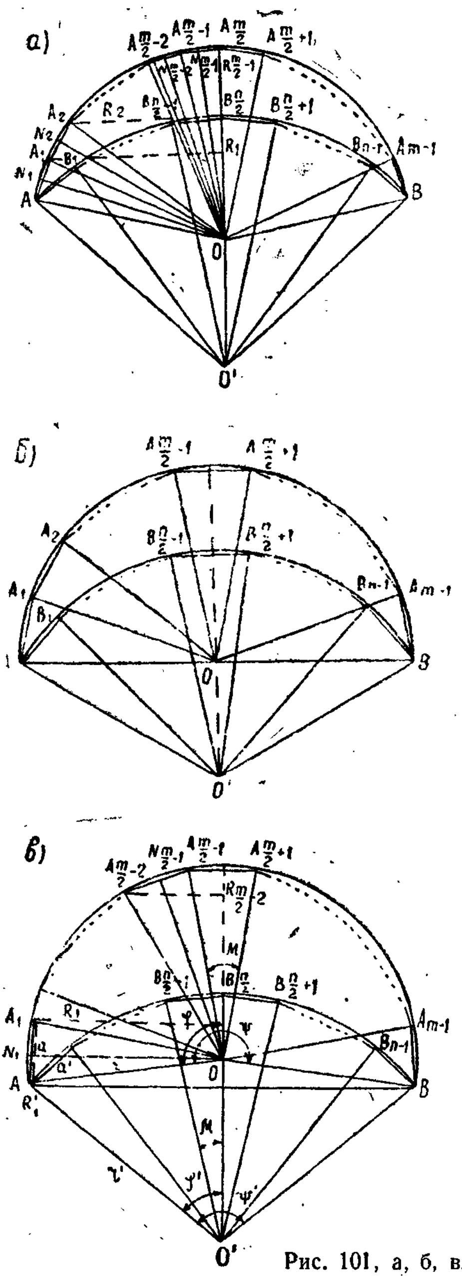


Рис. 101, а, б, в.

зующих луночку, разделим пополам, то в случае, если m и n четные, то μ содержится целое число раз в половинах этих углов:

$$\varphi = \frac{m}{2}\,\mu,$$

$$\varphi' = \frac{n}{2}\,\mu.$$

(рис. 101, *а*)

В случае если m и n нечетные, то будет как на рис. 101, *б*; случай, когда одно из этих чисел четное, а другое нечетное, показан на рис. 101, *в*.

Если луночка квадрируема, то площади секторов AOA_m и $AO'B_n$ равны между собой:

$$r^2\Psi = r'^2\Psi' \Rightarrow \frac{r^2}{r'^2} = \frac{\Psi'}{\psi} = \frac{n\mu}{m\mu} = \frac{n}{m}.$$

Кроме того, половина общей хорды дуг

$$AO = r\sin\varphi = r'\sin\varphi' \Rightarrow \frac{r}{r'} = \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} = \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

На рис. 99, *а* звеньями ломаной, вписанной во внешнюю дугу, являются отрезки

$$AA_1=A_1A_2=\cdots=A_iA_{i+1}=\cdots=A_{\frac{m}{2}-1}A_{\frac{m}{2}}=A_{\frac{m}{2}}A_{\frac{m}{2}+1}=$$

$$=\cdots=A_{m-1}A_m(B).$$

Обозначим каждое из них через a, и их всего m. Звенья ломаной, вписанной во внутреннюю дугу

$$BB_1=B_1B_2=\cdots=B_{n-1}B_n(A_m),$$

и число их равно n. Все треугольники $A_{i-1}OA_i$, где $i=1, 2,\dots, m$, равны между собой так же, как и треугольники $B_{k-1}O'B_k$, где $k=1, 2, \dots, n$ тоже равны между собой. Кроме того, треугольники $A_{i-1}OA_i$ и $B_{k-1}O'B_k$ подобны между собой, как равнобедренные и имеющие при вершинах равные углы μ. Из подобия треугольников и из предыдущего следует, что

$$\frac{A_iO}{B_kO'}=\frac{A_{i-1}A_i}{B_{k-1}B_k}=\frac{r}{r'}=\sqrt{\frac{n}{m}}=\frac{a}{a'}.$$

Положив для простоты $a=1$, получим $a'=\sqrt{\frac{m}{n}}$.

Докажем теперь, что при выполнении всех указанных выше условий площадь луночки $S_л$ будет равна площади многоугольника $A_0A_1A_2\cdots A_m(B_n)B_{n-1}\cdots B_1B_0$. Обозначим площадь этой прямолинейной фигуры через S_μ, а площади подобных сегментов на a и a' соответственно S_a и $S_{a'}$. Из $\Delta A_{i-1}OA_i$

$$a=2r\sin\frac{\mu}{2},\quad r=\frac{a^2}{2\sin\frac{\mu}{2}},\quad S_a=\frac{\mu-\sin\mu}{8\sin^2\frac{\mu}{2}}a^2,\quad S_a=\frac{\mu-\sin\mu}{8\sin^2\frac{\mu}{2}}a^2.$$

Так как $\frac{a^2}{a'^2}=\frac{n}{m}$, то $ma^2=na'^2$ и $mS_a=nS_{a'}$.

Отсюда

$$S_л=S_м.$$

Следовательно, задача построения циркулем и линейкой квадрируемых луночек и равновеликих им прямолинейных фигур сводится к построению многоугольника $S_м$. Но для того чтобы построить такой многоугольник, достаточно построить циркулем и линейкой угол μ. Если бы мы знали, как для различных m и n построить μ, то тем самым могли бы циркулем и линейкой для всех пяти случаев квадрируемых луночек единообразным способом построить и эти луночки, и прямолинейные фигуры, равновеликие им. Но как построить угол μ для различных луночек или различных m и n, чтобы число этих углов μ в центральном угле 2φ было равно m, а в угле $2\varphi'$ равно n? В этом состоит теперь задача.

Очевидно, в зависимости от того, какими средствами будем пользоваться при построении угла μ или $\cos\mu$, мы будем получать различное число возможных случаев. Здесь рассмотрим только, при каких значениях m и n возможно построить эти углы μ циркулем и линейкой.

Сведéние задачи о построении угла $\mu(\cos\mu)$ к алгебраическому уравнению, отличающемуся от (39). Построение угла μ для квадрируемых луночек равносильно построению хорды a, которую мы принимаем за 1, и хорды $a'=\sqrt{\frac{m}{n}}\,a$. Угол $\mu(\cos\mu)$ зависит от m и n, или от центральных углов $\Psi=2\varphi$ и $\Psi'=2\varphi'$ или от общей хорды дуг, образующих луночку. Общая хорда A_0A_m в свою очередь зависит от μ, a и a', следовательно, от m и n. Обозначим эту неизвестную нам хорду A_0A_m через $2y$ и выразим ее через μ $(\cos\mu)$ и a, а также через μ и a'. Полухорда y равна сумме проекций $A_{i-1}A_i$ на A_0A_m, т. е. $y=\Sigma A_iR_i=$ $=a\,\Sigma\cos\varphi_k$. При m нечетном

$$y=\frac{a}{2}+a\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}\cos\varphi_k, \text{ при четном } m \qquad y=a\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\cos\varphi_k.$$

Аналогичным образом выражаем y через a' и μ в случае, когда n — четное и когда n — нечетное:

$$y=a'\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\cos\varphi'_k \quad (\text{при } n \text{ — четном}) \text{ и } \quad y=\frac{a'}{2}+a'\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\cos\varphi'_k,$$

(n — нечетное).

Обозначим условно выражение y через проекции a как $y=$ $=P^s_m(\cos\varphi_k)$, а через проекции a' как $y=P^s_n(\cos\varphi'_k)$. φ_k и φ'_k могут быть кратными μ или $\frac{\mu}{2}$ в зависимости от четности чисел m и n. Мы имеем, следовательно, два уравнения с неизвестными μ и y. Так как каждое из этих уравнений выражает одну и ту же величину $\frac{A_0A_m}{2}$, то, вычитая одно из них из другого, получим

$$P^s_m(\cos\varphi_k)-P^{s'}_n(\cos\varphi'_k)=\sum_{k=0}^{\max(s,s')}C_k\cos k\,\varphi_k=0, \qquad (38)$$

где в зависимости от четности и нечетности m и n могут быть случаи.

1. m — нечетное и n — нечетное, тогда

$$\varphi=k\mu,\ S'=\frac{n-1}{2},\quad S=\frac{m-1}{2}$$

$$C_0=\frac{a-a^1}{2},\ C_1=C_2=\cdots=C_{s'}=a-a',\ C_{s'+1}=C_{s'+2}=\cdots=C_s=a.$$

2. m — нечетное, n — четное,

$$\varphi=\frac{\mu}{2},\ S=m-1,\ S'=n.$$

$$C_0=\frac{a}{2},\ C_2=C_4=\cdots=C_s=a,\ C_1=C_3=\cdots=C_{s'}=-a'.$$

3. m — четное, n — нечетное

$$\varphi_k=\frac{\mu}{2}k,\ S=m,\ S'=n-1,$$

$$C_0=-\frac{a}{2},\ C_1=C_3=\cdots=C_s=a,\ C_2=C_4=\cdots=C_{s'}=-a'.$$

Преобразуем теперь (38). С этой целью рассмотрим $(\cos u+i\sin u)^n$. Применяя формулу Муавра и разлагая по формуле бином Ньютона, получим

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)(i\sin u)^k\cos^{n-k}u=\cos nu+i\sin nu,$$

где $\frac{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты. Приравняем вещественные части равенства:

$$\cos nu=\sum_{\alpha=0}^{r(n)}(-1)^\alpha\left(\frac{\alpha}{2\alpha}\right)\cos^{n-2\alpha}u\sin^{2\alpha}u=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{r(n)}(-1)^\alpha\left(\frac{n}{2\alpha}\right)\cos^{k-2\alpha}u(1-\cos^2u)^\alpha=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{r(n)}\sum_{\nu=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha+\nu}\left(\frac{n}{2\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)z^{n-2(\alpha-\nu)}=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{r(n)}\sum_{\nu=0}^{\alpha}(-1)^\nu\left(\frac{n}{2\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)z^{n-2\nu},\ \text{где } z=\cos u.\quad (38')$$

Следовательно, $\cos k\varphi$ из уравнения (38) может быть представлен в виде

$$\cos k\varphi = \sum_{\alpha=0}^{r(s)} \sum_{\nu=0}^{\alpha} (-1)^{\nu} \binom{k}{2\alpha}\binom{\alpha}{\nu} z^{n-2\nu}$$

и уравнение (41) запишется

$$\sum_{k=0}^{S} \sum_{\alpha=0}^{r(s)} \sum_{\nu=0}^{\alpha} (-1)^{\nu} C_k \binom{k}{2\alpha}\binom{\alpha}{\nu} z^{k-2\nu}=0, \tag{39}$$

где $k \geqslant 2\nu$, так как $\nu \leqslant \alpha \leqslant r(k) = \begin{cases} \frac{k-1}{2} & \text{при } k \text{ нечетном} \\ \frac{k}{2} & \text{при } k \text{ четном.} \end{cases}$

Уравнение (39) — алгебраическое уравнение относительно z, степень которого — верхний предел изменения k, т. е. s. И уравнение (39) можно записать

$$\sum_{\lambda=0}^{S} A_{\lambda} Z^{\lambda} = 0, \quad \text{где } \lambda = k-2\nu, \qquad \text{а}$$

$$A_{\lambda} = \sum_{\nu=0}^{r(s-\lambda)} \sum_{\alpha=\nu}^{r(\lambda+2\nu)} (-1)^{\lambda} C_{\lambda+2\nu} \binom{\lambda+2\nu}{2\alpha}\binom{\alpha}{\nu},$$

где

$$r(s-\lambda) = \nu_{max} = \frac{(s-\lambda)-1}{2}$$

при $s-\lambda$ нечетном

$$\text{и} \qquad r(s-\lambda) = \frac{s-\lambda}{2} \quad \text{при } s-\lambda \text{ четном.}$$

Обозначив числа $\sum_{\alpha=\nu}^{r(\lambda+2\nu)} (-1)^{\nu} \binom{\lambda+2\nu}{2\alpha}\binom{\alpha}{\nu}$ через T_{ν}^{λ}[23], будем иметь

$$A_{\lambda} = \sum_{\nu=0}^{r(s-\lambda)} (-1)^{\nu} C_{\lambda+2\nu} T_{\nu}^{\lambda}.$$

И окончательно получим уравнение

$$\sum_{\lambda=0}^{S} \sum_{\nu=0}^{r(s-\lambda)} (-1)^{\nu} C_{\lambda+2\nu} T_{\nu}^{\lambda} Z^{\lambda} = 0, \tag{40}$$

где $z=\cos\mu$. При m нечетном и n нечетном $(m>n)$

$$S=\frac{m-1}{2}, S'=\frac{n-1}{2}, C_0=\frac{a-a'}{2},$$

$$C_1=C_2=\cdots=C_s=a-a', \quad z=\cos\frac{\mu}{2};$$

при m нечетном (четном) и n четном (нечетном)

$$S=m-1, \quad S'=n-1, \quad C_0=\frac{a}{2}\left(-\frac{a'}{2}\right),$$

$$C_2(C_1)=C_4(C_3)=\cdots=C_s=a,$$

$$C_1(C_2)=C_3(C_4)=\cdots=C_s=-a(a').$$

Уравнение (40) и есть то уравнение, решение которого должно дать корни, соответствующие квадрируемым луночкам, при условии, если оно неприводимо. Степень этого уравнения, как видно, определяется числом s. Мы предполагаем, что оно не должно быть больше 2, так как корни его должны строиться циркулем и линейкой.

Из предыдущего известно, что s связано с m и n такими равенствами: $s=\frac{m-1}{2}$ при m и n нечетных и при $m>n$, следовательно, $\frac{m-1}{2}\leqslant 2$, откуда $m\leqslant 5$, т. е. при $m=5$ $n=1, 3$, а при $m=3$ $n=1$. При m четном (нечетном) и n нечетном (четном) $s=m-1\leqslant 2$, т. е. $m\leqslant 3$. Тогда $m=3$, $n=1, 2$, а при $m=2$, $n=1$.

Таким образом, мы получили все пять случаев квадрируемых круговых луночек циркулем и линейкой.

$$(m:n=2:1, \quad 3:1, \quad 3:2, \quad 5:1, \quad 5:3).$$

Отдельные места этой теории, как видно, еще требуют уточнений и более строгих обоснований.

Построение циркулем и линейкой квадрируемых круговых замкнутых луночек и прямолинейных фигур, равновеликих им

Посмотрим теперь, как можно воспользоваться полученными результатами при нахождении угла $\mu(\cos\mu=z)$ в пяти указанных случаях.

1. Пусть $m=2$, $n=1$, $m:n=2:1$. Тогда из предыдущего следует, что

$$z=\cos\frac{\mu}{2},\ s=m-1=1,\ s'=\frac{n-1}{2},\ a=1,$$

$$a'=\sqrt{2},\ C_0=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ C_1=1.$$

Находим

$$A_0=C_0=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ A_1=C_1=1.$$

Уравнение относительно $\cos\frac{\mu}{2}$ в этом случае примет вид

$$\cos\frac{\mu}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0, \qquad \text{откуда} \quad \cos\frac{\mu}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{и} \ \mu=90°.$$

2. $m=3$, $n=1$, $m:n=3:1$. Тогда в уравнении (40) будет

$$z=\cos\mu,\ s=1,\ s'=0,\ a'=\sqrt{3},\ C_0=\frac{1-\sqrt{3}}{},\ C_1=1.$$

$$A_0=\sum_{\nu=0}^{r(1)}(-1)^{\nu}C_{2\nu}T_{\nu}^{0},$$

$$\text{где } r(1)=0 \text{ и } A_0=C_0T^0_0=\frac{1-\sqrt{3}}{2},$$

$$A_1=\sum_{\nu=0}^{r(0)}(-1)^{\nu}C_{1+2\nu}T'_{\nu}=C_1T'_0=1, \text{ так как } r(0)=0, \text{ то } T'_0=1.$$

Следовательно, уравнение (40) в этом случае будет

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\cos\mu=0 \qquad \text{и} \qquad \cos\mu=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

3. $m=3$, $n=2$, $m:n=3:2$.

Уравнение (40) в этом случае после нахождения коэффициентов будет

$$2\cos^2\frac{\mu}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

Действительно, в этом случае

$$s=2,\ s'=1,\ a=1,\ a'=\sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$C_0=\frac{1}{2},\ C_1=-\sqrt{\frac{3}{2}},\ C_2=1,\ z=\cos\frac{\mu}{2},\ A_0=C_0-C_2=$$

$$=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2};$$

$$A_1=C_1=-\sqrt{\frac{3}{2}},\ A_2=2C_2=2.$$

После подстановки этих величин в (40) мы получим указанное уравнение. Решая его относительно $\cos\frac{\mu}{2}$, находим $\cos\frac{\mu}{2}=$

$$=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{11}{2}}}{4}.$$ Второй же корень, модуль которого больше единицы, не пригоден.

4. $m=5,\ n=1,\ m:n=5:1.$

В этом случае

$$a=1,\ a'=\sqrt{5},\ s=2,\ s'=0,\ C_0=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ C_1=C_2=1,$$

$$A_0=C_0-C_2=-\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ A_1=C_1=1,\ A_2=2C_2=2,\ z=\cos\mu.$$

Уравнение (40) примет вид

$$A_0z^0+A_1z^1+A_2z^2=0$$

или

$$\cos^2\mu+\frac{1}{2}\cos\mu-\frac{1+\sqrt{5}}{4}=0.$$

Решая его, находим

$$\cos\mu=\frac{-1+\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{4}=\frac{2\sqrt{\sqrt{5}\left(1+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)}-1}{4}.$$

Второй корень уравнения не подходит.

5. $m=5,\ n=3,\ m:n=5:3.$

$$z=\cos\mu,\ s=\frac{m-1}{2}=2,\ s'=\frac{n-1}{2}=1,\ a=1,\ a'=\sqrt{\frac{5}{3}},$$

$$C_0 = \frac{a-a^1}{2} = \frac{1-\sqrt{\frac{5}{3}}}{2}, \quad C_1 = a - a' = 1 - \sqrt{\frac{}{3}}.$$

$$C_2 = 1, \quad A_\lambda = \sum_{\nu=0}^{r(s-\lambda)} (-1)^\nu C_{\lambda+2\nu} T_\nu^\lambda,$$

где

$$r(s-\lambda) = \begin{cases} s-\lambda-1 \text{ при } s-\lambda \text{ нечетном} \\ \frac{s-\lambda}{2} \text{ при } s-\lambda \text{ четном.} \end{cases} \quad A_0 = \sum_{\nu=0}^{1} (-1)^\nu C_{2\nu} T_\nu^0, \quad \text{но}$$

$$T_\nu^0 = 1 \quad \text{и} \quad A_0 = C_0 - C_2 = \frac{1-\sqrt{\frac{5}{3}}}{2} - 1,$$

$$A_1 = \sum_{\nu=0}^{r(1)} (-1)^\nu C_{1+2\nu} T_\nu^1, \quad r(1) = 0,$$

$$T^1{}_0 = 1 \quad (T^k{}_0 = 2^{k-1}), \quad A_1 = C_1 = 1 - \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$A_2 = C_2 T^2{}_0 = C_2 \cdot 2 = 1.$$

Тогда

$$\cos^2\mu + \frac{1-\sqrt{\frac{5}{3}}}{2}\cos\mu - \frac{1+\sqrt{\frac{5}{3}}}{4} = 0.$$

$$\cos\mu = \frac{\sqrt{\frac{5}{3}} - 1 + 2\sqrt{\sqrt{\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)}}{4}.$$

Зная числовые значения $\cos\mu$ для пяти квадрируемых луночек, перейдем теперь к построению циркулем и линейкой квадрируемых луночек и прямолинейных фигур, равновеликих им. Известно, что Гиппократ Хиосский показал, как строятся квадрируемые луночки и прямолинейные фигуры, равновеликие им в трех случаях ($m:n=2:1$, $3:1$, $3:2$). В каждом отдельном случае, как видно из 1-й главы, Гиппократ применяет особый способ построения.

Наши соображения, изложенные выше, позволяют единообразным способом строить все пять квадрируемых луночек и прямолинейные фигуры, равные по площади этим луночкам.

Мы уже показали (см. стр. 267), что если луночки квадрируемы и если мы знаем, как построить угол μ — наибольшую общую меру центральных углов дуг, образующих луночку, то площадь многоугольника, «вписанного» в луночку, равна площади этой луночки.

Теперь мы знаем, чему равны косинусы углов μ для всех пяти случаев квадрируемых луночек. Причем из предыдущего раздела видно, что все эти косинусы углов μ представляют конечные цепочки квадратных радикалов. Следовательно, все отрезки прямой, равные этим косинусам, можно построить циркулем и линейкой.

Рассмотрим все пять случаев; эти задачи решаются циркулем с переменным раствором и линейкой без делений.

1. $m=2$, $n=1$, $\mu=\frac{\pi}{2}$. Построим $\angle COB=\mu=\frac{\pi}{2}$ (рис. 102, а), строим $a=CB=1$. Радиусом OB описываем внешнюю окружность ACB. Из точки B проводим $BO_1 \| AC$ до пересечения с продолжением CO в точке O_1. Эта точка — центр второй дуги луночки, а радиус ее O_1B:

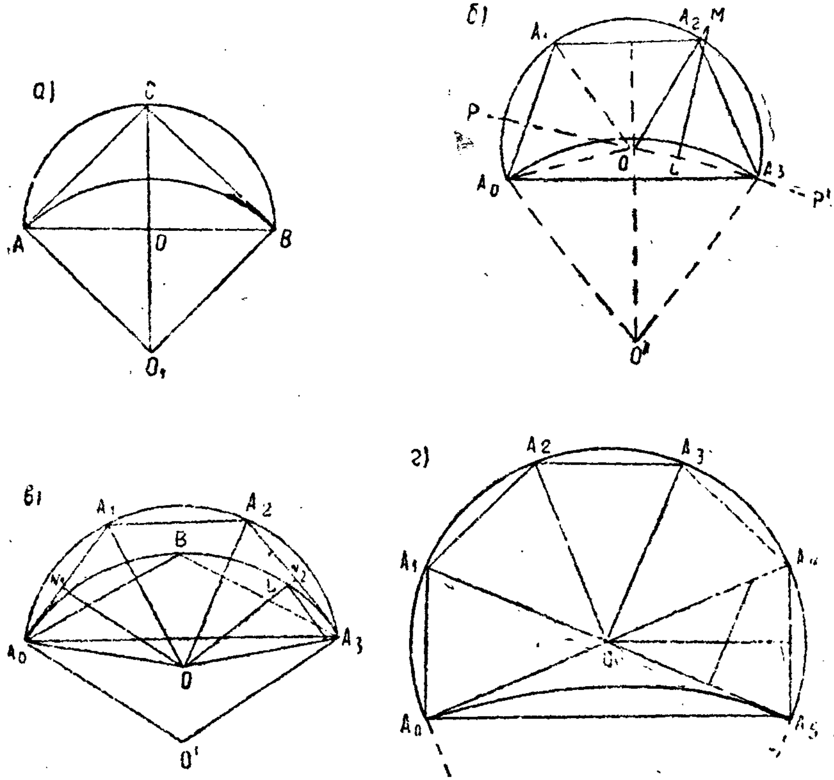
$$\angle COB=\angle ACB=\angle AO_1B\,(\Psi')=\frac{\pi}{2};\quad \angle AOB\,(\Psi)=\pi.$$

Отношение $\Psi:\Psi'=\pi:\frac{\pi}{2}=2:1$. Следовательно, построена соответствующая луночка и прямолинейная фигура $\triangle ACB$, площадь которого равна площади этой луночки.

2. $m=3$, $n=1$, $m:n=3:1$. На прямой PP′ от точки O отложим отрезок $\cos\mu=\frac{\sqrt{3}-1}{2}=OL$ (рис. 102, *б*). Строим прямоугольный треугольник OLM так, чтобы $OM=1$, тогда $\angle MOL=\mu$. Теперь строим равнобедренный треугольник A_2OA_3 по данному углу μ и основанию $A_2A_3=a=1$. Из точки O радиусом OA_2 опишем внешнюю дугу луночки и впишем в эту дугу три стороны многоугольника $A_3A_2A_1A_0$, где

$$A_2A_3=A_2A_1=A_1A_0=a=1.$$

Соединим точки A_0, A_3. Из точки A_3 проведем $A_3O' \| A_2O$ и из точки A_0 — прямую, параллельную A_2A_3 до пересечения с A_3O'. Из точки O' радиусом A_0O' опишем дугу «внутренней окружности». Луночка $A_0A_1A_2A_3BA_0$ удовлетворяет указанным требова-



ниям и площадь ее $s_л$ равна площади построенной трапеции $A_0A_1A_2A_3$.

3. $m=3$, $n=2$, $m:n=3:2$.

Строим

$$\cos\frac{\mu}{2}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{11}{2}}}{4},\ \angle\frac{\mu}{2} \text{ и } \angle\mu \qquad (\text{рис. } 102,\ в).$$

Затем строим равнобедренный треугольник A_3OA_2 по углу μ при вершине и основанию $A_2A_3=1$. Радиусом OA_3 описываем внешнюю дугу окружности и вписываем в нее ломаную линию со звеньями

$$A_3A_2=A_2A_1=A_1A_0=1.$$

Чтобы получить центральный угол внутренней дуги луночки, проведем из A_0 и A_3 прямые, параллельные прямым, соединяющим середины A_0A_1 и A_2A_3 с точкой O. Проведем $A_0O' \parallel N_1O$ и $A_3O' \parallel N_2O$. Из точки их пересечения O' как из центра радиусом

$A_0O' = \sqrt{\frac{3}{2}}\,OA_3$ опишем внутреннюю дугу окружности, середину которой B соединим с A_0 и A_3, тогда

$$S_л = S_{м A_0A_1A_2A_3BA_0}.$$

4. $m=5$, $n=1$, $m:n=5:1$.

Строим

$$\cos\mu = \frac{2\sqrt{\sqrt{5}(1+\sqrt{\frac{5}{4}}-1}}{4} \quad \text{и} \ \angle\mu \quad (\text{рис. } 102, \textit{г}),$$

равнобедренный треугольник A_3OA_4 по углу при вершине (μ) и основанию $A_5A_4=1$. Радиусом OA_3 описываем внешнюю окружность и вписываем в нее звенья ломаной

$$A_5A_4 = A_4A_3 = A_3A_2 = A_2A_1 = A_1A_0 = 1.$$

Проведя из A_0 прямую $AO' \parallel OA_2$ и из A_5 прямую $A_5O' \parallel OA_3$, найдем центр внутренней окружности. Радиусом $O'A_0$ опишем дугу внутренней окружности и получим луночку, удовлетворяю-

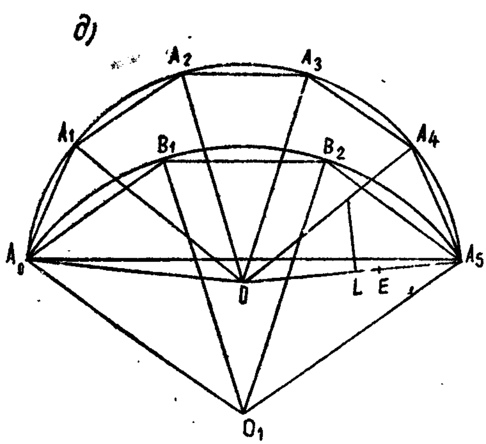


Рис. 102.

щую указанным условиям. Соединив прямой точки A_0 и A_5, получим $S_л = S_{A_0A_1A_2A_3A_4A_5}$.

5. $m=5$, $n=3$, $m:n=5:3$.

Строим

$$\cos\mu = \frac{\sqrt{\frac{5}{3}} - 2 + 2\sqrt{\sqrt{\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)}}{4}$$

и угол $A_4OA_5 = \mu$. Затем, как и в предыдущих случаях, строим равнобедренный треугольник по μ и $A_4A_5 = a = 1$. Радиусом OA_5 описываем внешнюю дугу окружности и вписываем в нее

$$A_5A_4 = A_4A_3 = A_3A_2 = A_2A_1 = A_1A_0 = 1. \quad (\text{рис. } 102, \partial).$$

Проведя $A_5O' \parallel A_4O$ и $A_0O' \parallel A_1O$, находим центр и радиус внутренней окружности. Проведя из точки O' как из центра радиусом $O'A_0$ дугу, построим $\angle B_2O'A_5(B_3) = \mu$. Впишем в эту дугу ломаную, звенья которой

$$B_3(A_5)B_2 = B_2B_1 = B_1B_0(A_0) = a' = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Получим искомую луночку, удовлетворяющую указанным условиям и прямолинейную фигуру, равновеликую этой луночке:

$$S_л = S_{M(A_0A_1A_2A_3A_4A_5(B_3)B_2B_1B_0(A_0))}.$$

Построение указанных и других луночек и прямолинейных фигур, равновеликих им, возможно и другими единообразными способами.

Полученные нами результаты при ограничениях, наложенных на S (см. стр. 271 и 280), разумеется, не являются решением проблемы, а только иллюстрацией.

Квадратура круговых замкнутых луночек с помощью конических сечений

Задача эта была поставлена Н. Г. Чеботаревым в «Успехах математических наук» (1938, вып. 4). В терминах теории групп он сформулировал ее так: найти все значения m и n, при которых группа Галуа уравнения

$$P(x) = n\left(\frac{x^m - 1}{x-1}\right)^2 - m\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)x^{m-n} = 0, \qquad (40')$$

или какого-нибудь его неприводимого множителя $f(x)$ имеет порядок, равный $2^\alpha \cdot 3^\beta$.

Иначе говоря, требовалось отыскать такие взаимно-простые целые числа m и n, чтобы корни неприводимого уравнения

$$f(x)=0,$$

к которому сводится (40′), или являющегося множителем (40′), можно было построить при помощи конических сечений, т. е. решение (40′) должно сводиться к решению уравнений 2-й, 3-й и 4-й степеней, корни которых строятся циркулем и линейкой и с помощью конических сечений.

Решением этой задачи занимались казанские математики. В 1940 г. А. В. Дороднов защитил на эту тему кандидатскую диссертацию и в 1945 г. опубликовал большую работу «О круговых луночках, квадрируемых при помощи конических сечений» [41]. В 1957 г. под тем же названием появилась статья Л. М. Берковича [10].

Представив (40′) в виде

$$\left[x^m-1-\sqrt{\frac{m}{n}}\,x^{\frac{m-n}{2}}(x^m-1)\right]\times$$

$$\times\left[x^m-1+\sqrt{\frac{m}{n}}\,x^{\frac{m-n}{2}}(x^n-1)\right]=0,$$

Дороднов рассмотрел один из этих множителей и доказал предварительно ряд теорем. Затем, используя метод Чеботарева, А. В. Дороднов получил расширенный ряд значений m и n (по сравнению с квадратурой циркулем и линейкой), при которых круговые замкнутые луночки квадрируются при помощи конических сечений. Число их увеличивается до 15, включая и пять видов, квадрируемых циркулем и линейкой.

1. $m=2$, $n=1$;	6. $m=5$, $n=1$;	11. $m=7$, $n=3$;
2. $m=3$, $n=1$;	7. $m=5$, $n=2$;	12. $m=7$, $n=5$;
3. $m=3$, $n=2$;	8. $m=5$, $n=3$;	13. $m=9$, $n=1$;
4. $m=4$, $n=1$;	9. $m=5$, $n=4$;	14. $m=9$, $n=5$;
5. $m=4$, $n=3$;	10. $m=7$, $n=1$;	15. $m=9$, $n=7$.

То, что случаев квадрируемых круговых замкнутых луночек всего 15, мы показываем, идя другим путем, используя наши результаты, изложенные выше (стр. 270). Уравнение $\sum\limits_{\lambda=0}^{s} A_\lambda z^\lambda = 0$ — общее уравнение квадратуры алгебраических круговых луночек — имеет степень $S=\frac{m-1}{2}$, когда m и n нечетные и $S=m-1$, когда одно из этих чисел четное, а другое нечетное.

Чтобы корни этого неприводимого уравнения строились с помощью конических сечений, необходимо и достаточно, чтобы $S \leqslant 4$, так как только корни таких уравнений могут быть построены циркулем, линейкой и коническими сечениями. Следовательно, при m и n нечетных $\frac{m-1}{2} \leqslant 4$ или $m \leqslant 9$, а при одном из этих чисел четном $m-1 \leqslant 4$ или $m \leqslant 5$. Зная, что m и n взаимно-простые целые числа и $n<m$, надо теперь рассмотреть все возможные случаи. Как видно, m может принимать значения 2, 3, 4, 5, 7, 9, а n — 1, 2, 3, 4, 5, 7, а всего квадрируемых луночек с помощью конических сечений 15.

Используя из того же раздела метод единообразного построения квадрируемых луночек и прямолинейных фигур, равновеликих им с помощью построения угла $\mu(\cos\mu)$, мы можем построить все эти 15 луночек, пять из которых, как известно, строятся и с помощью циркуля и линейки.

Мы рассмотрим здесь для примера только случай $m:n=4:1$, который рассматривал еще Виет (см. стр. 123). Но наш метод построения не имеет ничего общего с методом Виета. Подставим значения $m=4$ и $n=1$ в уравнение квадратуры алгебраических луночек $n(x^m-1)-mx^{m-n}(x^n-1)^2=0$ и заменив $x+\frac{1}{x}$ через y, $x^2+\frac{1}{x^2}$ через y^2-2 и $x^3+\frac{1}{x^3}$ через y^3-3y получим: $y^3+2y^2-4=0$. Разделив левую и правую часть на y, получим $y^2+2y=\frac{4}{y}=z$. Затем находим точки пересечения параболы $(y+1)^2-1=z$ и гиперболы $zy=4$, $y=4$. Опустив из точки пересечения M перпендикуляр на oy, получим $y=2\cos 2\Theta$. Зная $\cos 2\Theta$, мы строим луночку и прямолинейную фигуру, равновеликую ей так, как указано выше. Так же можно поступать во всех 15 случаях квадратуры луночек.

Таким образом, показывается, что уравнение (40′) есть уравнение квадратуры всех луночек, площади которых выражаются через алгебраические величины. Используя это уравнение, мы сквадрировали луночки $m:n=6:1$ и $6:5$ уже с помощью других средств.

Заметим еще: так как уравнение (40′) получено из $m\sin^2\Theta-n\sin^2 m\Theta=0$, а последнее получено из предположения, что сектора дуг, ограничивающих луночку, равны между собой, то можно утверждать, что у «алгебраических луночек», квадрирование которых сводится к (40′), сектора равны, и корни их уравнений находятся с помощью алгебраических кривых соответствующих порядков или с помощью других методов, в том числе ЭВМ. Число таких луночек, очевидно, бесконечно велико.

Что касается «трансцендентных луночек», то квадрирование их не сводится к (39'); их площади находятся по общим формулам:

$$S_{л\ (вып\cdot\ вогн\cdot)} = a^2\left[\frac{\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{\beta}{\sin^2\beta} + \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha\right];$$

$$S_{л\ (дв\cdot\ вып\cdot)} = a^2\left[\frac{\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\beta}{\sin^2\beta} - \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta\right]$$

или с помощью других средств, в том числе с помощью определенных интегралов.

Следовательно, круговая замкнутая луночка квадрируется циркулем и линейкой, если она алгебраическая, а ее уравнение (40') будет квадратным или будет иметь множителем многочлен не выше второй степени, имеющий комплексные корни, абсолютная величина которых 1.

Круговая замкнутая «алгебраическая луночка» квадрируется с помощью конических сечений, если (40') или какой-нибудь его неприводимый множитель будет не выше четвертой степени, а его комплексные корни по абсолютной величине равны 1.

Следовательно, любая «алгебраическая луночка» квадрируется с помощью соответствующих алгебраических средств. Приближенное квадрирование их возможно с помощью тех средств, которые позволяют найти приближенные значения корней (40')[24], в том числе и с помощью ЭВМ.

Круговые открытые луночки

Математики XVII и XVIII столетий, начавшие разработку теории квадратуры открытых круговых луночек, ограничивались только квадратурой частей одной луночки (1-й случай Гиппократа Хиосского, см. II главу). В дальнейшем в связи с развитием интегрального исчисления вопрос о квадратуре криволинейных фигур, в том числе и открытых луночек, циркулем и линейкой перестал быть актуальным. Вилейтнер и Гофман в своей работе [148] напомнили современным математикам о существовании этой проблемы и указали на то, что некоторые вопросы ее могут представлять интерес и для современной элементарной геометрии. Правда, сами они ограничились только изложением результатов Чирнгауза, Перкса, Лопиталя и Крафта, не рассмотрев новых теоретических вопросов. Но их работа послужила толчком для работ некоторых студентов-дипломантов РГУ, которые под руководством сотрудников кафедры высшей математики получили, на наш взгляд, ряд новых интересных результатов. Изложим здесь некоторые из них.

1. Мы доказываем, что ту же открытую луночку, которую квадрировали Чирнгауз и Перкс, можно сквадрировать и другим способом. Пусть дана луночка Гиппократа $ACBC_1A$ (1-й случай). $AB \perp CD$. Возьмем на ACB произвольную точку M и соединим ее с O и O_1, соединим A и O_1, на OA от точки N (рис. 103) отложим отрезок $NT = NO$ и проведем $TZ \parallel OM$. Тогда $S_{о \cdot л \cdot AME} = S_{AO_1ZT} = S_{AO_1K}$. Но при этом следует рассмотреть случаи, когда $NT = NA$ и $NT > NA$.

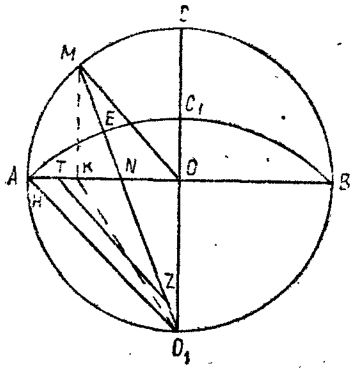


Рис. 103.

2. Гиппократова луночка (1-й случай) может быть разделена лучами из той же точки O_1 на n равновеликих частей, и каждая из этих частей, («открытая луночка») будет квадрируема. Действительно, известно, что $S_{л \cdot ADBO} = S_{\Delta AO_1C}$ (см. рис. 103). Высота этого треугольника (AO_1B) равна R, а основание $AB = 2R$. Разделим AC на n равных частей и соединим эти точки деления ($C_к$) ($k = 1, 2, \ldots n$) с точкой O_1. Из точек $C_к$ восстановим перпендикуляры к AB до пересечения с дугой ACB в точках $A_к$. Соединим $A_к$ с O_1 прямыми $A_кO_1$, пересекающими дугу ADC в точках $B_к$. Тогда треугольники $C_{к-1}O_1C_к$ (с равными площадями) будут равновелики «открытым луночкам» $B_{к-1}A_{к-1}A_кB_к$.

Следовательно, для гиппократовой луночки (1-й случай) справедлива теорема: «любой кусок» этой луночки, заключенный между двумя лучами, проведенными из O_1, квадрируется циркулем и линейкой и площадь его равновелика соответствующему треугольнику.

Можно доказать, что если луч, пересекающий дуги гиппократовой луночки (1-й случай), не проходит через точку O_1, то открытая луночка не квадрируема циркулем и линейкой.

3. Рассмотрим гиппократову луночку, для которой $m : n = 3 : 1$. Возьмем на внешней окружности точку M. Из точки O_1,

проводим O_1E так, чтобы $\angle AO_1E = \frac{1}{3}\angle AOM$. Мы доказываем, что открытая луночка АЕМ будет квадрируема только в тех случаях, когда угол АОМ делится на три равные части циркулем и линейкой. Действительно, пусть луночка образована дугами окружностей с радиусом $AO=r$, $AO_1=R=r\sqrt{3}$ (рис. 104). Возьмем точку М такую, чтобы угол $AOM=\alpha<\varphi$ делился на три равные части циркулем и линейкой.

Построим угол $AO_1E = \frac{1}{3}\alpha$. Тогда площадь сектора АОМ равна площади сектора AO_1E. Соединим точки М и Е. Рассмотрим открытую луночку АЕМ: $S_{\text{олАЕМ}} = S_{\Delta AO_1F} - S_{MEFO}$. Следовательно, луночка в этом случае квадрируема циркулем и линейкой.

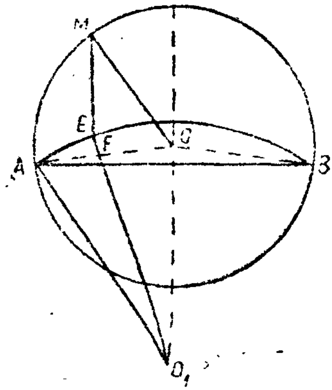


Рис. 104.

Известно, что все углы $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ вида $\frac{\pi}{2n}$ $(n=1, 2 \ldots)$ делятся на три равные части. Следовательно, открытых луночек, квадрируемых циркулем и линейкой, в этом случае бесконечное множество. В случае, когда рассматривается луночка Гиппократа $m:n=3:2$, строим $\angle AO_1E = \frac{2}{3}\angle AOM$, соединяем М и Е, и открытая луночка АМЕ будет квадрируемой.

Если квадрируемые луночки $m:n=5:1$ и $5:3$, то угол АОМ следует брать таким, чтобы он делился циркулем и линейкой на 5 частей, тогда при углах AO_1E равных $\frac{1}{5}\angle AOM$ и $\frac{3}{5}\angle AOM$ будут получаться открытые луночки АЕМ, квадрируемые циркулем и линейкой. Но здесь еще не все вопросы до конца выяснены.

Было бы, по-видимому, интересно рассмотреть и вопрос о квадратуре открытых круговых луночек, получающихся как части луночек, квадрируемых с помощью конических сечений и с помощью других алгебраических средств. Класс квадрируемых открытых круговых луночек, очевидно, расширится, если при делении угла АОМ на равные части прибегать к помощи средств, отличных от циркуля и линейки[25].

Некруговые замкнутые и открытые луночки

Из II главы известно, что луночки, ограниченные дугами «двух каких-либо кривых», впервые стали рассматривать математики XVIII в. Вилейтнер и Гофман напомнили об этих исследованиях и дополнили их своими результатами [148]. В этом резделе мы изложим отдельные результаты наших исследований.

О некоторых понятиях, связанных с некруговыми луночками. Некруговой замкнутой луночкой будем называть часть плоскости, ограниченной дугами любых двух кривых, имеющих общую хорду, которая в предельном случае может обратиться в нуль. *Открытой некруговой луночкой* назовем часть плоскости, ограниченной дугами двух кривых, которые могут иметь не более одной точки пересечения, и одним или двумя отрезками прямой. Очевидно, что определения круговых замкнутых и открытых луночек можно рассматривать как частный случай указанных здесь определений. При классификации этих многообразных луночек, зависящих от характера плоских кривых, мы выделяем прежде всего луночки, ограниченные дугами конических сечений. Последние естественно разделить на эллиптические, параболические, гиперболические и смешанные.

Остальные некруговые луночки нами пока совсем не изучались. Некруговые луночки тоже делятся на *алгебраические* и *трансцендентные.* Некруговые трансцендентные луночки не квадрируются с помощью алгебраических средств.

Понятие квадратуры некруговых луночек циркулем и линейкой существенно отличается от аналогичного понятия для круговых луночек. Когда говорят о квадратуре круговых луночек, то имеют в виду построения и самой луночки, и прямолинейной фигуры, равновеликой этой луночке, только с помощью циркуля и линейки; в то время как некруговая луночка строится не циркулем и линейкой. Следовательно, речь здесь идет о том, чтобы из числа некруговых алгебраических луночек, построенных не с помощью циркуля и линейки, выделить те, площади которых выражаются рациональными числами или квадратичными иррациональностями, для которых только и можно циркулем и линейкой построить равновеликие квадраты.

Эллиптические луночки. Естественным обобщением круговых замкнутых и открытых луночек явились эллиптические замкнутые и открытые луночки. Отправляясь от работ Крафта и

Ленберга (см. II главу) и от работы Вилейтнера и Гофмана [160], мы получили некоторые новые результаты.

При пересечении двух эллипсов в четырех действительных точках образуются четыре эллиптических замкнутых выпукло-вогнутых луночки. Но мы рассматриваем только те эллиптические луночки, которые образуются дугами двух эллипсов, пересекающихся в двух различных точках или в двух точках, слившихся в одну (касающихся изнутри). Эллиптические луночки могут быть выпукло-вогнутые и двояко-выпуклые, алгебраические и трансцендентные. Квадрируются из них циркулем и линейкой только те площади, которые выражаются рациональными числами и конечной цепочкой квадратных радикалов.

Используя метод афинных преобразований, мы показываем, что замкнутых эллиптических луночек, квадрируемых циркулем и линейкой, бесчисленное множество. Это следует из того, что пять видов круговых квадрируемых луночек при афинном преобразовании переходят в пять классов квадрируемых эллиптических луночек. Известно, что эллиптические луночки характеризуются шестью параметрами φ_1, φ_2, α_1, α_2, r_1 и r_2. Изменение даже одного или нескольких параметров приводит к луночкам, не получающимся из прежних никакими афинными преобразованиями. Следовательно, существует бесчисленное множество афинно-отличных квадрируемых луночек. Например, при $\varphi_1=90^\circ$, $\varphi_2=45^\circ$ и при любых алгебраических α_1, α_2, r_1 и r_2 можно доказать квадрируемость луночки Ленберга методом Вилейтнера-Гофмана.

Сравнительно просто доказывается неквадрируемость двояковыпуклых эллиптических луночек, для которых $\varphi_1=p\Theta$, $\varphi_2=q\Theta$, $\sin\Theta$, r_1, C_1, r_2, C_2 — при афинном преобразовании эллипса в окружность являются алгебраическими числами. Вычисляя площадь этой луночки как сумму двух эллиптических сегментов, получим

$$S_{э.л.}=C_1r_1(\varphi_1-\sin\varphi_1\cos\varphi_1)+C_2r_2(\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_2).$$

Считая, что

$$AB=2C_1\sin\varphi_1=2C_2\sin\varphi_2=2,$$

получаем

$$C_1=\frac{1}{\sin\varphi_1}, \quad C_2=\frac{1}{\sin\varphi_2},$$

откуда

$$S_{э.л.}=\frac{r_1\varphi_1}{\sin\varphi_1}-r_1\cos\varphi_1+\frac{r_2\varphi_2}{\sin\varphi_2}-r_2\cos\varphi_2 \qquad (41)$$

и $$\Theta=\frac{(S_{э.л.}+r_1\cos p\Theta+r_2\cos q\Theta\ \sin p\Theta\sin q\Theta}{r_1 p\sin q\Theta+r_2 q\sin p\Theta}. \qquad (42)$$

Так как числитель и знаменатель—числа алгебраические, то и Θ — алгебраическое число. Но Θ и $\sin\Theta$ одновременно алгебраические только при $\Theta=0$, что не дает луночки. Знаменатель (42) в нуль не может обратиться при $\Theta\neq 0$, так как

$$r_1\, p\sin q\Theta+r_2\, q\sin p\Theta>0 \quad (0<\varphi_1,\ \varphi_2<\pi).$$

Теорема доказана.

Для выпукло-вогнутых эллиптических луночек, для которых $\sin\Theta$, r_1, r_2, $r_1\cos\varphi_1-r_2\cos\varphi_2$ являются квадратично-иррациональными числами в силу [1], будут алгебраическими числами

$$r_1C_1\sin\varphi_1-r_2C_2\cos\varphi_2$$

и площади их

$$S_{э.л.}=r_1C_1(\varphi_1-\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1)-r_2C_2(\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_2)=$$
$$=-r_1C_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1+r_2C_2\sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_2$$

квадратично-иррациональные числа; т. е. луночки квадрируемы. Необходимым и достаточным условием квадрируемости этих луночек является равенство площадей соответствующих секторов или

$$r_1C_1\varphi_1=r_2C_2\varphi_2.$$

Еще проще доказывается теорема о том, что в предельных случаях, т. е. когда второй эллипс касается первого в одной или двух точках, эллиптические луночки не квадрируемы. Проектируя круговые замкнутые квадрируемые луночки и открытые луночки, связанные с ними, и пользуясь теоремой о том, что при афинном преобразовании равные площади переходят в равные, показывается, что открытые круговые квадрируемые луночки переходят в квадрируемые открытые эллиптические луночки и наоборот. Можно рассмотреть и те эллиптические луночки, которые получаются при афинном преобразовании из круговых луночек, квадрируемых с помощью конических сечений.

Параболические луночки. Нам неизвестны из литературы примеры квадратуры параболических замкнутых и открытых луночек. А между тем легко показывается квадрируемость широкого класса параболических луночек, если опереться на теорему Архимеда: площадь сегментов параболы равна $\frac{4}{3}$ площади треугольника с тем же основанием и с той же высотой, что и сегмент. Действительно, если даны уравнения двух парабол $y^2 = p_1 x$ и $y^2 = p_2 x$, пересекающихся в точках M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2), в данном случае $x_1 = x_2$ и $y_1 = -y_2$. Проводя общую хорду M_1M_2, получим два параболических сегмента. Если площадь одного из них $S_c = \frac{4}{3} S\Delta$, а площадь другого $S'_c = \frac{4}{3} S'\Delta$, то площадь параболической луночки $S_{п \cdot л \cdot}$ равна разности площадей сегментов, т. е. $S_{п \cdot л \cdot} = S_c - S'_c = \frac{4}{3} [S\Delta - S'\Delta]$. Эта величина может быть построена циркулем и линейкой, если указанные треугольники строятся циркулем и линейкой, это справедливо и для парабол с уравнениями более общего вида. Таких квадрируемых луночек, очевидно, бесконечное множество. Если провести теперь прямую, пересекающую дуги парабол, образующих луночку так, чтобы и координаты точек ее пересечений были квадратично иррациональными величинами, то полученные открытые параболические луночки будут тоже квадрируемы.

Гиперболические луночки. Нам тоже неизвестны случаи, чтобы рассматривались кем-либо вопросы, связанные с квадратурой гиперболических луночек. Мы пока не нашли ни одной гиперболической луночки, квадрируемой циркулем и линейкой.

Смешанные луночки. Эти луночки ограничены дугами различных кривых. Они совсем мало исследованы. Известны частные случаи, когда луночка, ограниченная дугой эллипса и окружности квадрируема; открытая луночка, ограниченная дугой циклоиды и окружности, тоже квадрируема. Во многих случаях эти луночки не квадрируемы. Но общих теорем пока нет[26].

Теория квадратуры круговых луночек в плоскости Лобачевского

Эта теория появилась совсем недавно, и создана она исключительно советскими математиками.

Первые попытки рассмотрения круговой замкнутой луночки и квадратуры ее в плоскости Лобачевского были сделаны Д. Д. Мордухай-Болтовским и А. С. Смогоржевским. Д. Д. Мордухай-Болтовской в начале 1950 года написал небольшую статью «О луночках Гиппократа на плоскости Лобачевского». В ней он показал, что круговая замкнутая луночка, ограниченная дугой данной окружности и дугой окружности, для которой сторона правильного шестиугольника, вписанного в круг, является диаметром, будет в плоскости Евклида неквадрируемой, а в плоскости Лобачевского она может быть и квадрируемой, в зависимости от R (ch R). Он показал, что в плоскости Лобачевского квадратура круговых замкнутых луночек связана с квадратурой круга более тесно, чем в плоскости Евклида. Но Д. Д. Мордухай-Болтовской не успел опубликовать эту работу, и рукопись ее хранится в Ленинградском отделении Архива АН СССР (ф. 821, оп. 1).

А. С. Смогоржевский (1896—1969) в своей книге «Геометрические построения в плоскости Лобачевского» (1951 г.) дал конкретный пример квадрируемой луночки в плоскости Лобачевского, подтверждающий теоретические соображения Д. Д. Мордухай-Болтовского. Он взял, в частности, квадрируемый круг с радиусом R, для которого $\operatorname{ch} R=\frac{13}{8}=\frac{8+5}{8}$, т. е. $m=5<n=8=2^3$ — число Гаусса. Круг, построенный на стороне правильного вписанного 6-угольника, тоже квадрируемый. Тогда (рис. 105), обозначив площадь луночки $S_{л}$, площадь большего круга—S_1, меньшего—S_2, площадь треугольника AOB—σ и угол 6-угольника — ψ, он получает

$$6S_{л}+S_1=3S_2+6\sigma \Longrightarrow S_{л}=\frac{1}{2}S_2+\sigma-\frac{1}{6}S_1,$$

но

$$S_1=4\pi \operatorname{sh}^2\frac{R}{2}=2\pi(\operatorname{ch} R-1)=\frac{5\pi}{4},\quad S_2=4\pi \operatorname{sh}^2\frac{AM}{2}=$$

$$=2\pi(\operatorname{ch} AM-1)=\frac{3\pi}{8},\quad S_6=6\sigma=\pi(6-2)-6\psi.$$

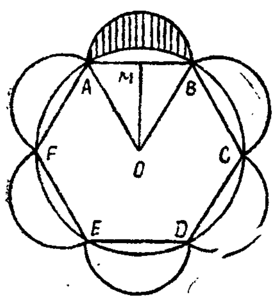


Рис. 105.

Следовательно, площадь каждой из шести луночек $S_{л}=\frac{31}{48}\pi-\psi$; для квадрируемости должно выполняться

$$S_{л}=S_{кв}=2\pi-4\alpha.$$

Луночка считается квадрируемой, если угол равновеликого ей квадрата строится циркулем и линейкой. В данном примере угол квадрата $\alpha=\frac{65}{192}\pi+\frac{1}{4}\psi$

строится циркулем и линейкой, так как 192 — число Гаусса, а угол $\frac{1}{4}\psi$ получается из ψ делением на 4 части. Следовательно, рассмотренная луночка квадрируема. Так было положено начало квадратуры круговых луночек в плоскости Лобачевского.

По аналогии с примером А. С. Смогоржевского студенты РГУ сначала тоже ограничивались подбором таких числовых значений для chR, которые давали бы квадрируемые луночки. Таких примеров можно найти много. Затем мы перешли к решению некоторых теоретических вопросов и к систематизации тех результатов, которые представляли бы более или менее стройную теорию квадратуры круговых луночек в плоскости Лобачевского. Здесь мы кратко излагаем основные результаты этих исследований, о которых, нам думается, можно говорить уже как об основах теории квадратуры круговых замкнутых луночек, более подробно этот раздел, возможно, удастся изложить в нашей книге «Луночки», которую предполагают издать через 2—3 года.

Классификация круговых луночек в плоскости Лобачевского. Круговая луночка в плоскости Лобачевского так же, как и в плоскости Евклида, есть часть плоскости, ограниченной дугами двух окружностей, имеющих общую хорду. Они могут быть выпукло-вогнутые и двояко-выпуклые, алгебраические и трансцендентные, квадрируемые и неквадрируемые циркулем и линейкой. Квадратура круговых луночек в плоскости Лобачевского существенно отличается от квадратуры их в плоскости Евклида. Под квадратурой луночки в плоскости Лобачевского понимается возможность построить циркулем и линейкой угол квадрата, равновеликого данной луночке. Число квадрируемых луночек в плоскости Лобачевского зависит от радиусов окружностей, образующих луночки и от класса (типа) луночки; оно бесконечно. Здесь необходима более детальная классификация круговых луночек. Назовем луночками первого типа выпукло-вогнутые луночки, внешний обвод которых—дуга окружности большего круга (рис. 106); луночки второго типа—выпукло-вогнутые, внешняя дуга которых — дуга окружности меньшего круга (II). Двояко-выпуклую луночку AA_1BB_1 назовем луночкой третьего типа.

Но для квадратуры луночек и указанная классификация недостаточна. Обозначив линию центра двух окружностей O_1O_2 через d, можно утверждать, что две окружности образуют луночки I, II и III типа, если

$$R-r\leqslant d<R+r. \tag{43}$$

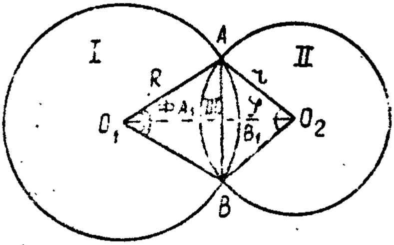


Рис. 106.

Очевидно, что круговые луночки в плоскости Лобачевского, так же как и в плоскости Евклида, можно характеризовать с помощью треугольника O_1AO_2. Луночки вообще характеризуются четырьмя параметрами: R, r, ф и φ (см. рис. 106). Но число независимых параметров, характеризующих луночки, может быть три и два, так как один из этих параметров можно выразить через остальные, а некоторые из параметров могут оказаться фиксированными.

Луночки, для которых $R-r=d$, назовем луночками нулевого класса. Очевидно, что в нулевом классе могут быть только луночки первого типа. Это луночки со сходящимися концами (рис. 107, *а*). Отнесем луночки, для которых $\angle O_1O_2A > \frac{\pi}{2}$ (рис. 107, *б*),—к первому классу, если $\angle O_1O_2A = \frac{\pi}{2}$ —ко второму классу (рис. 107, *в*), при $\angle O_1O_2A < \frac{\pi}{2}$ — к третьему классу (рис. 107, *г*).

Все луночки нулевого класса образуют двупараметрическое семейство, так как два параметра из четырех фиксированы

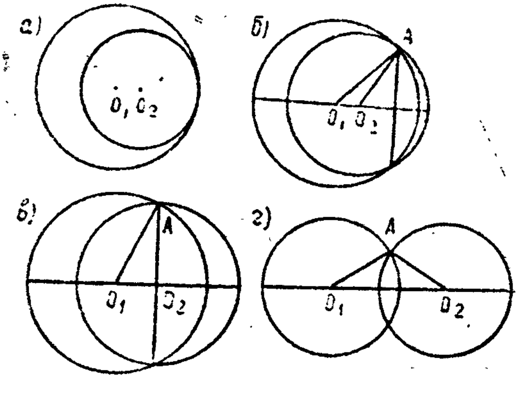


Рис. 107.

$$\Phi=\varphi=2\pi.$$

Луночки первого класса образуют трехпараметрическое семейство, так как параметры связаны соотношением

$$\operatorname{sh} R \sin\frac{\Phi}{2}=\operatorname{sh} r \sin\frac{\varphi}{2}. \qquad (44)$$

Луночки второго класса — двупараметрические, так как $\varphi=\pi$ и

$$\operatorname{sh} r=\operatorname{sh} R \sin\frac{\Phi}{2}. \qquad (45)$$

Все луночки третьего класса образуют трехпараметрическое семейство, так как их параметры связаны соотношением (44). Указанную классификацию круговых луночек можно считать абсолютной, так как она является общей для геометрий Евклида и Лобачевского. Только в геометрии Евклида (44) и (45) будут соответственно

$$R\sin\frac{\Phi}{2}=r\sin\frac{\varphi}{2} \text{ и } \qquad r=R\sin\frac{\Phi}{2}.$$

Квадратура луночек нулевого класса. Здесь справедлива следующая теорема: Для того, чтобы луночка нулевого класса, т. е. ограниченная касающимися изнутри окружностями радиусов R и r, была квадрируемой с помощью циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы chR и chr являлись рациональными или квадратично радикальными корнями неопределенного уравнения

$$x-y=\frac{m}{n},$$

где $\operatorname{ch} R=x$, $\operatorname{ch} r=y$, n — гауссово число, $n\geqslant m$ — натуральные числа, (К — радиус кривизны плоскости Лобачевского полагаем $=1$).

Доказательство: площадь луночки

$$S_{л}=S_{O_R}-S_{O_R}=4\pi\left(\operatorname{sh}^2\frac{R}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{r}{2}\right)=4\pi\operatorname{sh}^2\frac{P}{2}, \qquad (46)$$

где S_{O_R} — площадь круга с радиусом R, а

$$\operatorname{sh}\frac{p}{2}=\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{R}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{r}{2}},$$

где Р — радиус круга, равновеликого луночке ($S_л$). Из (46) видно, что циркулятура луночки нулевого класса в плоскости Лобачевского (тоже и в плоскости Евклида) всегда возможна. Рассмотрим теперь квадратуру круга с радиусом Р. Условие квадрируемости круга в плоскости Лобачевского, как известно (см. стр. 281),

$$\operatorname{ch} P=\frac{n+m}{n}. \tag{47}$$

Из (46) следует, что

$$S_л=4\pi\left(\operatorname{sh}^2\frac{R}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{r}{2}\right)=2\pi(\operatorname{ch}R-\operatorname{ch}r).$$

Из (46) и (47) получаем

$$S_л=4\pi\operatorname{sh}^2\frac{P}{2}=2\pi(\operatorname{ch}P-1)=2\pi\left(\frac{m+n}{m}-1\right)=2\pi\frac{m}{n}.$$

$$\left.\begin{aligned}\text{Следовательно,}\quad \operatorname{ch}R-\operatorname{ch}r&=\frac{m}{n}\\ \text{или}\quad x-y&=\frac{m}{n}\end{aligned}\right\}. \tag{48}$$

Это необходимое условие квадрируемости круга с радиусом Р (и луночки $S_л$). Если наложить на R и r условие, чтобы ch R и ch r принадлежали к величинам 2-го порядка и любого класса, то по теореме Мордухай-Болтовского при выполнении (48) и (47) луночка будет квадрируема циркулем и линейкой. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что при каждом фиксированном значении $\frac{m}{n}$, где $n\geqslant m>0$, получается один квадрируемый круг, радиус которого $P=\operatorname{Arch}\frac{m+n}{n}$. (49)

Угол квадрата, равновеликого данной квадрируемой луночке,

$$\alpha=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-m}{n}.$$

В случае $m=n$ или $\frac{m}{n}=1$ уравнение квадратуры круговых луночек нулевого класса $x-y=1$.

В этом случае площадь луночки $S_л=2\pi$, а соответствующий равновеликий ей квадрат асимптотический ($\alpha=0$).

Если положить в (47) $m=0$, то радиус круга, равновеликого луночке $P=\operatorname{Arch}\frac{n}{n}=\operatorname{Arch}1=0$, луночка вырождается в окружность; при $r=0$ — в круг. Если уравнение квадратуры луночек (48) и его решения интерпретировать геометрически в евклидовой плоскости, то можно определить область значений $\frac{m}{n}$, при которых луночки нулевого класса будут квадрируемы (рис. 108). Возьмем Декартову прямоугольную систему координат, в которой $x=\operatorname{ch}R$, $y=\operatorname{ch}r$, где $x>y>1$. Учитывая сказанное выше, будем иметь область значений $\operatorname{ch}R$ и $\operatorname{ch}r$, при которых луночка квадрируема в виде полуполосы, ограниченной прямыми, уравнения которых

$$x-y=1,\ x-y=0 \text{ и } y=1.$$

Уравнение квадратуры луночек $x-y=\frac{m}{n}$ при каждом фиксированном значении $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа есть уравнение прямой, параллельной биссектрисе $x=y$. Все эти полупрямые, проходящие через точки $\left(\frac{m}{n}\ 0\right)$ лежат в указанной полосе и располагаются дискретно.

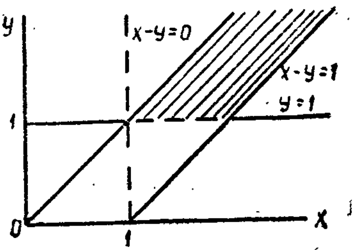


Рис. 108.

Рассмотрим теперь конкретный пример квадрируемой луночки нулевого класса.

Пусть $\operatorname{ch}R=5$, $\operatorname{ch}r=\frac{74}{17}$. Числа 5 и $\frac{74}{17}$ являются корнями

$$\frac{m}{n}=5-\frac{74}{17},$$

$n=17=2^{2^2}+1$ — гауссово число, $m=11$ — простое целое число.

Практически циркулятуру луночки можно не производить, а искать сразу угол равновеликого «квадрата»:

$$\alpha=\frac{n-m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{17-11}{17}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{17}.$$

Площадь квадрата

$$S_{кв}=(2\pi-4\alpha)=\left(2\pi-\frac{12\pi}{17}\right)=\frac{22\pi}{17}$$

что строится циркулем и линейкой.

Очевидно, что квадрируемых луночек нулевого класса бесчисленное множество. С квадратурой этого класса луночек тесно связана и квадратура кольца, образованного концентрическими или эксцентрическими окружностями[27]. Действительно, предельным случаем эксцентрического кругового кольца является круговая луночка нулевого класса. При перемещении меньшей окружности внутри большей площадь между окружностями (площадь кольца) не меняется. Следовательно, площадь кольца равна площади луночки нулевого класса. Вопрос же о возможности квадратуры в геометрии Лобачевского зависит лишь от площади фигуры. Таким образом, показывается, что задача о квадратуре кольца в плоскости Лобачевского равносильна задаче о квадратуре луночек нулевого класса. В плоскости же Евклида задача о квадратуре кольца циркулем и линейкой невозможна, так как она сводится к квадратуре круга.

Задачу о квадратуре луночек нулевого класса можно *обобщить,* если требовать, чтобы равновеликой фигурой луночек был не квадрат, а многоугольник с числом сторон N. Эта задача связана с обобщенной задачей о квадратуре круга, т. е. с построением правильного многоугольника, равновеликого данному кругу, при условии, что многоугольник не является квадратом. Посмотрим, какому условию должны удовлетворять радиус круга R и число сторон правильного многоугольника N, чтобы круг был квадрируем циркулем и линейкой в этом смысле. Площадь правильного N-угольника

$$S_N=[(N-2)\pi-N\alpha],$$

$$\text{где } \alpha=\frac{N-2}{N}l\pi \quad (0\leqslant l<1),$$

$$\text{а} \quad S_{oR}=4\pi \operatorname{sh}^2\frac{R}{2}.$$

Так как S_N должна быть равна S_{oR}, то

$$4\pi \operatorname{sh}^2\frac{R}{2}=[(N-2)\pi-N\alpha], \tag{50}$$

или

$$2\pi(\operatorname{ch}R-1)=(N-2)\pi-(N-2)l\pi$$

$$2\mathrm{ch}R=\frac{N}{2}-\frac{N-2}{2}\,l.$$

Если $l=\frac{n-m}{n}$, N — Гауссово число, $n \geqslant m$ — натуральные числа, то

$$1<\mathrm{ch}R=\frac{N}{2}-\frac{N-2}{2}\cdot\frac{n-m}{n}\leqslant\frac{N}{2};$$

$$\mathrm{ch}R=1+\frac{N-2}{2}\cdot\frac{m}{n}. \qquad (51)$$

При выполнении этих условий и при N — Гауссовом числе возможно построение правильного N-угольника, равновеликого кругу.

Переходя к обобщенной задаче о квадратуре луночек нулевого класса, мы вместо уравнения $x-y=\frac{m}{n}$ рассматриваем уравнение

$$x-y=\frac{N-2}{2}\cdot\frac{m}{n}, \qquad (52)$$

где N — Гауссово число сторон правильного многоугольника. На основании обобщенной задачи о квадратуре круга можем утверждать: квадратура луночки нулевого класса возможна циркулем и линейкой в смысле обобщенной задачи, если выполняется $x-y=\frac{N-2}{2}\cdot\frac{m}{n}$ и при условии квадратичной радикальности x и y.

Область решений при этом изменится, так как теперь уравнения прямых, ограничивающих эту область, будут:

$$x-y=0,\quad y=1,\quad x-y=\frac{N-2}{n}\ \text{(рис. 109)}.$$

В качестве примера рассмотрим луночку нулевого класса

$$\mathrm{ch}R=\frac{103}{8}+\sqrt{1+2\sqrt{37}},\quad \mathrm{ch}r=\frac{45}{8}+\sqrt{1+2\sqrt{37}}.$$

Эти круги не квадрируемы и в смысле обобщенной задачи. Подставляем в (52):

$$\frac{103}{8}+\sqrt{1+2\sqrt{37}}\,\frac{45}{8}-\sqrt{1+2\sqrt{37}}=\frac{N-2}{2}\cdot\frac{m}{n}\cdot$$

$$\frac{29}{4}=\frac{N-2}{2}\cdot\frac{m}{n}$$

Это равенство выполняется при $N=17$, $n=30$, $m=29$:

$$\frac{N-2}{2}\cdot\frac{m}{n}=\frac{17-2}{2}\cdot\frac{29}{30}.$$

Следовательно,

$$l=\frac{n-m}{n}=\frac{1}{30},\ \text{угол}\quad \alpha=\frac{l\pi}{N}(N-2)=\frac{\pi}{34}.$$

Площадь 17-угольника

$$S_{17}=[(N-2)\pi-N\alpha]=\left[15\pi-17\cdot\frac{\pi}{34}\right]=\frac{29}{2}\pi,$$

т. е. луночка в этом смысле квадрируема[27].

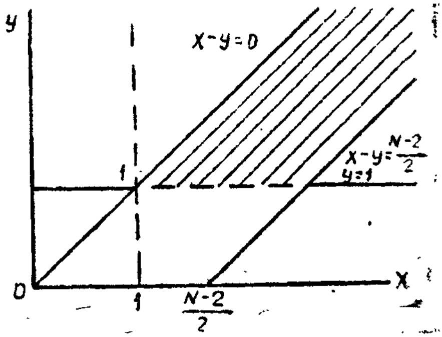


Рис. 109.

Квадратура луночек 1, 2 и 3-го класса. Нами рассматривался вопрос о квадратуре луночек других классов и получены условия квадратуры этих луночек циркулем и линейкой. Рассмотрим для примера луночки 1-го класса 2-го типа (см. рис. 107, *б*). Ее площадь

$$S_2=2\varphi\,\mathrm{sh}^2\frac{r}{2}-2\Phi\,\mathrm{sh}^2\frac{R}{2}+[2\pi-\Phi-(2\pi-\varphi)-2\beta]=$$

$$=\varphi\,\mathrm{ch}r-\Phi\,\mathrm{ch}R-2\beta=\varphi y-\Phi x-2\beta. \tag{53}$$

Обозначим

$$\delta_2=\frac{1}{2}(\varphi y-\Phi x). \tag{54}$$

Тогда

$$S_2=2(\delta_2-\beta). \tag{55}$$

Для существования квадрата, равновеликого луночке, необходимо, чтобы

$$0<\delta_2-\beta\leqslant\pi, \tag{56}$$

так как $0<S_{кв}\leqslant 2\pi$. Из условия равенства площадей $S_2=S_{кв}$ находим угол α:

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\delta_2-\beta). \tag{57}$$

Для квадрируемости луночки должно выполняться (56) и возможность построения луночки и угла (57). Луночка же, а следовательно R и r, могут быть построены циркулем и линейкой, если можно построить углы φ, Φ и δ_2 и если выполняется

$$(x^2-1)\sin^2\frac{\Phi}{2}=(y^2-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}, \tag{58}$$

где $x=\mathrm{ch}R$, $y=\mathrm{ch}r$. Учитывая (54), можно по Φ, φ, и δ_2 определить x и y. Известно, что с помощью циркуля и линейки могут быть построены углы $\frac{2\pi}{n}$ m, где n—гауссово число, а $m\leqslant n$ — натуральные числа.

Приходим к выводу: для того, чтобы числам Φ, φ и δ_2 соответствовала квадрируемая циркулем и линейкой луночка 2-го типа, необходимо и достаточно выполнение условий

Φ, φ и δ_2 — углы Гаусса, т. е. вида $2\pi\frac{m}{n}$, где m — натуральное число, $n\geqslant m$ — Гауссово число,

$0<\delta_2-\beta\leqslant\pi$.

$$(x^2-1)\sin^2\frac{\Phi}{2}=(y^2-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad x\geqslant y>1,$$

$$\delta_2=\frac{1}{2}(\varphi y-\Phi x).$$

При этом угол β строится циркулем и линейкой в процессе построения луночки. Аналогичным путем получены необходимые и достаточные условия квадрируемости луночек 1-го типа φ, Φ, δ_1 — углы Гаусса;

$0<\delta_1-\beta\leqslant\pi$;

$$(x^2-1)\sin^2\frac{\Phi}{2}=(y^2-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}, \text{ x и } y>1;$$

$$\delta_1=\frac{1}{2}(\Phi x-\varphi y).$$

В предельном случае: $\varphi=\Phi=2\pi$ получим луночку нулевого класса, для которой $\delta_1=\pi\frac{m}{n}$ и $x-y=\frac{m}{n}$. Необходимыми и достаточными условиями квадратуры луночек 3-го типа получены в таком виде:

φ, Φ и δ_3 — углы Гаусса;

$\pi<\delta_3+\beta\leqslant 2\pi$;

$$\delta_3=\frac{1}{2}(\Phi x+\varphi y).$$

В предельном случае, т. е. при $\varphi=2\pi$ и $\Phi=0$, луночка вырождается в круг радиуса r, и указанное условие принимает вид:

$$\begin{cases} \delta_3 \text{ — угол Гаусса} \\ \pi<\delta_3\leqslant 2\pi. \\ \text{Условие (58) выполняется тождественно} \\ \delta_3=\pi\cdot y. \end{cases}$$

Получаем $\delta_3=\pi\frac{n+m}{n}$ и $\operatorname{ch} r=\frac{n+m}{n}$ — условие квадрируемости круга.

Луночки 2-го класса квадрируемы, если Φ — угол Гаусса, и система $\delta=\frac{1}{2}(\varphi y\pm\Phi x)$, $(x^2-1)\sin^2\frac{\Phi}{2}=(y^2-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}$ разрешима. Особый интерес представляют те луночки 2-го класса, у которых меньшие окружности построены на сторонах правильных многоугольников, вписанных в большую окружность, как на диаметрах (см. стр. 288). Здесь справедлива теорема: при любом гауссовом N существует бесконечное множество луночек, квадрируемых циркулем и линейкой. Причем каждому $N>4$ соответствует по одной луночке 2-го типа с равновеликими секторами. В геометрии Евклида, как известно, равенство секторов — необходимое условие квадратуры луночек. В геометрии же Лобачевского это условие не является необходимым. Но если можно построить циркулем и линейкой луночки с равновеликими секторами, то они квадрируемы. Условие равенства секторов сводится к заданию $\delta_2=\frac{\varphi-\Phi}{2}$[28].

О квадратуре круговых луночек в плоскости Римана

Круговые луночки в плоскости Римана, насколько нам известно, еще никем не рассматривались. Применяя известную общую теорию построения на сфере [12, 74] и полученные нами результаты квадратуры луночек в плоскости Лобачевского, мы начали разработку теории квадратуры круговых луночек в плоскости Римана. Предварительно напомним некоторые сведения из сферической тригонометрии и рассмотрим вопрос о квадратуре круга в плоскости Римана, необходимые при квадрировании круговых луночек в этой неевклидовой геометрии.

Плоскость Римана можно интерпретировать на верхней полусфере евклидовой сферы, тогда прямыми называют полуокружности евклидовых больших кругов. В этой геометрии стороны и углы прямоугольного треугольника ABC (рис. 110) связаны формулами:

$$\cos\frac{c}{R}=\cos\frac{a}{R}\cdot\cos\frac{b}{R};\ \sin\frac{a}{R}=\sin\frac{c}{R}\cdot\sin\alpha;\ \operatorname{tg}\frac{a}{R}=$$

$$=\sin\frac{b}{R}\cdot\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{c}{R}\cdot\cos\beta;\ \cos\alpha=\cos\frac{a}{R}\cdot\cos\beta;$$

$$\cos\frac{c}{R}=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta, \tag{59}$$

где R — радиус кривизны плоскости Римана; в интерпретации на сфере и полусфере R численно равен радиусу сферы: не нарушая общности, можно положить $R=1$. В этом случае меры отрезков на плоскости Римана численно равны мерам центральных углов. Длина прямой $l=\pi$, полупрямой $l_1=\frac{\pi}{2}$, ...

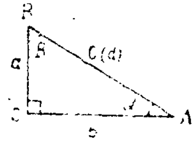


Рис. 110.

Длина окружности на плоскости Римана $C_R=2\pi\sin R$; площади фигур: треугольника $S_\Delta=\alpha+\beta+\gamma-\pi$;
квадрата $S_{кв}=4\alpha-\pi$;
правильного N-угольника $S_N=N\alpha-(N-2)\pi$;
круга радиуса R $S_{oR}=4\pi\sin^2\frac{R}{2}$.

Квадратура круга с радиусом $R\leqslant\frac{\pi}{2}$ сводится к исследованию равенства $S_{oR}=S_{кв}$, т. е.

$$4\pi \sin^2 \frac{R}{2} = 4\alpha - 2\pi. \qquad (60)$$

Квадрат существует, если $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$, т. е. $\alpha = l \frac{\pi}{2}$,

где $1 < l \leqslant 2$. Тогда

$$4\pi \sin^2 \frac{R}{2} = 2\pi l - 2\pi \qquad \text{и}$$

и

$$\cos R = 2 - l, \qquad (61)$$

где $0 \leqslant \cos R < 1$. Угол α в плоскости Римана может быть построен циркулем и линейкой в тех же случаях, что и в плоскостях Евклида и Лобачевского. В нашем случае следовательно, должно быть

$$l = \frac{n+m}{n} \qquad (62)$$

где n — гауссово число, а $m \leqslant n$ — целое число, и $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$.

Из (61) и (62) получаем

$$\cos R = \frac{n-m}{n}. \qquad (63)$$

Это и есть условие квадрируемости круга в плоскости Римана[29]. Переходя к квадратуре луночек в плоскости Римана, дадим прежде всего классификацию круговых луночек. Дуги двух окружностей $O_1(R)$ и $O_2(r)$, где $R \geqslant r$ и $O_1O_2 = d \leqslant \frac{\pi}{2}$, образуют луночки, если

$$R - r \leqslant d < R + r. \qquad (64)$$

При выполнении

$$R + r + d \leqslant \pi \qquad (65)$$

окружности имеют две общие точки и классификация луночек будет та же, что и в плоскости Евклида и Лобачевского. Если же

$$R + r + d > \pi, \qquad (66)$$

то окружности имеют четыре точки пересечения, и в этом случае появятся еще две фигуры, которые назовем «двояковогнутыми луночками»; причем принадлежащую кругу большего радиуса отнесем к четвертому типу, принадлежащую же кругу меньшего радиуса — к пятому типу. Классы «двояковыпуклых луночек» — смешанные, остальные классы луночек определяются так же, как и в других геометриях (см. предыдущий раздел).

Модификацией луночек можно считать две «луночки», на которые разбивается плоскость Римана двумя пересекающимися прямыми (назовем их «линейными»), а также — круговые сегменты.

Нами рассмотрена квадратура всех указанных выше луночек на плоскости Римана. Здесь приводятся в качестве примеров только несколько случаев.

Наиболее простым случаем и в геометрии Римана является квадратура луночек нулевого класса (окружности касаются изнутри). Здесь справедлива следующая теорема: луночка нулевого класса, ограниченная дугами окружностей радиусов R и r, будет квадрируемой циркулем и линейкой в том и только в том случае, если $\cos R$ и $\cos r$ являются рациональными или квадратично-радикальными корнями неопределенного уравнения

$$y-x=\frac{m}{n},$$

где n — гауссово число, m — целое число и не больше n. Доказательство. Обозначив площадь этой луночки через $S_л$, имеем

$$S_л=S_{0R}-S_{0r}=4\pi\left(\sin^2\frac{R}{2}-\sin^2\frac{r}{2}\right)=4\pi\sin^2\frac{p}{2}, \qquad (67)$$

где $\sin\frac{p}{2}=\sqrt{\sin^2\frac{R}{2}-\sin^2\frac{r}{2}}$, P — радиус круга, равновеликого луночке, который можно построить с помощью циркуля и линейки по заданным отрезкам R и r. Следовательно, циркулятура луночки нулевого класса в плоскости Римана, так же как в плоскости Лобачевского и Евклида, всегда возможна. Рассмотрим теперь квадратуру круга радиуса P. Из (67) следует,

$$\cos P=\frac{n-m}{n},$$

а из (67)

$$S_л=4\pi\left(\sin^2\frac{R}{2}-\sin^2\frac{r}{2}\right)=2\pi(\cos r-\cos R)=$$

$$=4\pi\sin^2\frac{p}{2}=2\pi(1-\cos P)=2\pi\left(1-\frac{n-m}{n}\right)=2\pi\frac{m}{n}, \text{ т. е.}$$

$$\cos r-\cos R=\frac{m}{n} \qquad (68)$$

или, вводя обозначения $\cos R=x$ и $\cos r=y$, получаем

$$y-x=\frac{m}{n}. \qquad (69)$$

Это и есть необходимое условие квадрируемости круговой луночки нулевого класса. Если еще потребовать, чтобы $\cos R$ и $\cos r$ принадлежали к величинам 2-го порядка и некоторого класса, т. е. выражались бы конечной цепочкой квадратных радикалов, то по теореме Д. Д. Мордухай-Болтовского их можно построить циркулем и линейкой. И луночка в этом случае квадрируема циркулем и линейкой. Теорема доказана.

Следовательно, при каждом фиксированном значении $\frac{m}{n}$ получается квадрируемый круг радиуса $P=\operatorname{Arccos}\frac{n-m}{n}$ однопараметрическое семейство луночек нулевого класса. Каждой луночке этого семейства соответствует один и тот же квадрат, угол которого $\alpha=\frac{\pi}{2}\frac{n+m}{n}$. В случае $r=0$ или $\cos r=1$ уравнение (69) примет вид

$$1-x=\frac{m}{n} \text{ или } \cos R=\frac{n-m}{n},$$

т. е. луночка вырождается в круг. В случае $m=n$, $y-x=1$. Если $r=0$, $R=\frac{\pi}{2}$, то луночка вырождается в круг радиуса $\frac{\pi}{2}$, т. е. во всю плоскость Римана. При $m=0$ или $y-x=0$ луночка вырождается в окружность. Легко показать, что область значений x и y $(0\leqslant x<y<1)$; $n\geqslant m>0$, связанных уравнением $y-x=\frac{m}{n}$, ограничена прямыми $y=x$, $x=o$ и $y=1$. Очевидно, что квадрируемых луночек нулевого класса бесчисленное множество. С квадратурой этого класса луночек тесно связана и квадратура кругового кольца.

Квадрируемость луночек всех трех типов вытекает из теоремы: для того, чтобы луночка i-го типа $(i=1, 2, 3)$ была квадрируемой циркулем и линейкой, необходимо и достаточно, чтобы 1) Φ, φ и Δ_i были углами Гаусса, т. е. углами, которые строятся циркулем и линейкой, где

$$\Delta_1=\frac{1}{2}(\varphi y-\Phi x),\ \Delta_2=\frac{1}{2}(\Phi x-\varphi y) \text{ и } \Delta_3=\frac{1}{2}(\Phi x+\varphi y),$$

$$2)\quad (1-x^2)\sin^2\frac{\varphi}{2}=(1-y^2)\sin^2\frac{\Phi}{2}\ .$$

Луночка 4-го типа (рис. 111) определяется шестью параметрами. R, r, Φ, φ, Ψ, ψ, из которых только три независимы, так как они связаны соотношениями

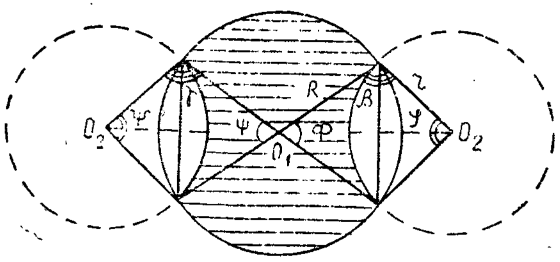


Рис. 111.

$$\sin R\cdot\sin\frac{\Phi}{2}=\sin r\sin\frac{\varphi}{2}\ \text{ и }\ \sin R\sin\frac{\Psi}{2}=\sin r\sin\frac{\Psi}{2},\qquad(70)$$

кроме того, $\qquad O_1O_2+O_2O_1=\pi.$

Площадь этой луночки

$$S_4=4\pi\sin^2\frac{R}{2}-2(\Phi+\Psi)\sin^2\frac{R}{2}-2(\varphi+\psi)\sin^2\frac{r}{2}+$$
$$+[\Phi+\Psi+\varphi+\psi+2\beta+2\gamma-4\pi]=$$
$$=[(\Phi+\Psi-2\pi)x+(\varphi+\psi)y+2(\beta+\gamma-\pi)]\ .\qquad(71)$$

Обозначим

$$\Delta_4=\frac{1}{2}[(\Phi+\Psi-2\pi)x+(\varphi+\psi)y],$$

тогда (71) принимает вид

$$S_4=2(\Delta_4+\beta+\gamma-\pi),$$
$$\alpha=\frac{1}{2}(\Delta_4+\beta+\gamma),\ \Delta_4=\Delta_{3AB}+\Delta_{3CD}-\pi x$$

(Δ_{3AB}, Δ_3 для двояковыпуклой луночки с хордой AB). Если Φ, φ и Δ_{3AB} заданы, то можно найти x и y, а затем и Ψ, ψ и Δ_{3AB} и Δ_4. Теорема может быть сформулирована так: луночка 4-го типа будет квадрируемой циркулем и линейкой, если 1) Φ, φ и Δ_4 — углы Гаусса, где

$$\Delta_4=\Delta_{3AB}+\Delta_{3CD}-\pi x=\frac{1}{2}(\Phi x+\varphi y)+\frac{1}{2}(\Psi x+\psi y)-\pi x,$$

$$2)\quad (1-x^2)\sin^2\frac{\Phi}{2}=(1-y^2)\sin^2\frac{\varphi}{2}\ ,$$

$$3)\ (1-x^2)\sin^2\frac{\Psi}{2}=(1-y^2)\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Условия квадрируемости луночки 5-го типа те же, только

$$S_5=2(\Delta_5+\beta+\gamma-\pi y),\ \Delta_5=\Delta_{3AB}+\Delta_{3CD}-\pi y,$$

$$\alpha=\frac{1}{2}(\Delta_5+\beta+\gamma)^{30}.$$

Таков основной вклад советских математиков в современную теорию квадратуры луночек. Здесь по необходимости дано краткое изложение их результатов. Более подробно этот вопрос рассматривается в нашей книге «Квадратура луночек» (история и современная теория), готовящейся к печати.

Таков долгий и сложный путь развития теории пяти знаменитых задач с древнейших времен до наших дней. Как видно, уже многое сделано для создания научной истории этих задач, большой вклад внесен в современную теорию их. Однако многие вопросы истории и современной теории пяти знаменитых задач ожидают еще своего решения[31].

Примечания к главе IV

[1] Предлагается:

а) проверить справедливость формулировок этих задач;

б) найти ошибки, допускаемые при этом.

[2] Так находили диагональ квадрата и древние египтяне; задачи такого рода называют «циркулятурой квадрата».

[3] Киевская Академия, основанная в 1631 году, явилась первым учебным заведением на Руси. Феофан Прокопович (учился в Киевской Академии и за границей) — один из единомышленников Петра I. Выписки из рукописи, хранящейся в центральной научной библиотеке украинской Академии наук, мне любезно предоставил С. Н. Киро.

[4] Определить, чему в этом случае равно π.

[5] Книги и статьи, о которых здесь шла речь, включены в биобиблиографию. Многие книги и статьи, тоже содержащие элементы истории и теории знаменитых задач древности, не вошли в библиографию.

[6] Наши студенты-дипломанты в качестве приложений к своим дипломным работам перевели на русский язык и частично комментировали статьи и брошюры [109, 115, 119, 126, 127, 131, 133, 136, 137, 142, 143, 148], опубликование которых после доработки и комментирования тоже могло бы облегчить работу над совершенствованием истории пяти знаменитых задач древности. В переводах указанных работ особенно большое участие принимали Л. Мирошниченко, Л. Крючок, Л. Латка, А. Дубовая, З. Май, Е. Михайлова, Т. Руденко, Д. Бровко.

[7] Желающим познакомиться с их выводом формул Валлиса, Лейбница и других формул Эйлера рекомендуем обратиться к указанной статье [106].

[8] Эта теорема аналогична теореме: на плоскости Евклида циркулем и линейкой возможно построить конечную цепочку квадратных радикалов

(квадратическую иррациональность) или решить любую задачу, сводящуюся к уравнениям 2-й степени.

[9] Рассмотреть теоретические основы этого метода по [100]. Проверить этот метод в случае $\angle AOB=45^\circ$.

[10] Рекомендуется:

а) познакомиться с этими способами по указанной книге [97];

б) выяснить, есть ли среди этих способов пригодные для полисекции угла;

в) получить уравнения кривых, являющихся номограммами трисекции угла.

[11] Доказать справедливость этого утверждения и установить, можно ли этим способом а) разделить угол САВ на равные части при $n>3$; б) разделить угол $CAB=90^\circ$ на 6 равных частей.

[12] Здесь и в дальнейшем использованы некоторые результаты и наших студентов-дипломантов: А. Ясакова, В. Техликиди, Э. Хазизова, А. Дворникова, З. Май, Л. Песчанской, Т. Руденко, Е. Михайловой, О. Петровой, И. Кияновой, Д. Бровко.

[13] Рекомендуется:

а) привести другие примеры (при различных С и α), когда α делится на три равные части, и показать, как можно осуществить это деление;

б) аналогичным образом использовать вместо параболы эллипс
$$x^2+\left(\frac{y}{c}\right)^2=1 \quad (c>1).$$

[14] Показать:

а) что квадратриса Чирнгауза $y=a\sin\frac{\pi}{2a}x$ позволяет делить центральный угол или дугу на равные части;

б) что кривые Шуте можно применить и для деления угла на n равных частей.

Какие еще плоские и пространственные кривые, кроме указанных в этой книге, можно использовать для трисекции и полисекции угла.

[15] Здесь и в дальнейшем параметр пространства Лобачевского «k» мы полагаем обычно равным 1.

[16] Предлагается:

а) реализовать построение a_{10} и a_r, используя [89];

б) построить правильный треугольник и квадрат.

[17] Установить, какая ошибка допускается при построении правильного 30-угольника методами Биона, Федорова и указанным здесь.

[18] Предлагается аналогичным образом самостоятельно построить правильный 13-угольник, уравнение которого
$$x^6+x^5-5x^4-4x^3+6x^2+3x-1=0,$$
и правильные 19-угольник и 37-угольник.

[19] Установить, абсцисса какой точки пересечения параболы и гиперболы будет стороной правильного девятиугольника.

[20] Рекомендуется:

а) довести самостоятельно до окончания указанные решения задачи об удвоении куба;

б) какой общий вид должен иметь Р в $x^3=Pa^3$, чтобы эта задача решалась циркулем и линейкой;

в) с помощью каких средств можно построить отрезок — корень уравнения $x^n-pa^n=0$ и какое геометрическое толкование можно дать этой задаче.

[21] при $m=9$ и $n=1$ в уравнении (40′) может быть выделен множитель многочлен второй степени, но корни его не дают благоприятного случая.

[22] Рекомендуется аналогичным образом рассмотреть (40′) при $m=3$, $n=2$; $m=4$, $n=1,3$; $m=5$, $n=1$, 2, 3, 4 и установить, в каких случаях луночки квадрируются циркулем и линейкой.

[23] Свойства этих чисел требуют специального исследования. Мы укажем здесь некоторые частные значения T_ν^λ:

а) $T_\nu^0=1$ (по определению чисел T_ν^λ); б) $T_0^\lambda=2^{\lambda-1}$; в) $T^\lambda{}_\nu=$

$$=(\lambda+2)2^{\lambda-1};\ \text{г)}\quad T_\nu^\kappa=\sum_{\gamma=0}^{ч(\kappa)}\binom{\nu+\gamma}{\nu}\binom{2\gamma+\kappa}{2\nu+\gamma}=\frac{k+2\nu}{k+\nu}\binom{k+\nu}{\kappa}2^{\kappa-1}.$$

[24] Рекомендуется доказать:

а) неточность утверждений; что «равенство секторов или равенство $\dfrac{\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{\beta}{\sin^2\beta}$ — небходимое и достаточное условие квадратуры круговых замкнутых луночек циркулем и линейкой»;

б) что среди двояковыпуклых луночек нет квадрируемых не только циркулем и линейкой, но и с помощью любых алгебраических кривых;

в) что площадь круга не исчерпывается «алгебраическими луночками»;

г) возможность апроксимировать круг квадрируемыми луночками с какой угодно степенью точности.

Выяснить:

а) есть ли среди «трансцендентных луночек» такие, сектора которых равны;

б) есть ли среди луночек, представляющих видимую часть луны, квадрируемые циркулем и линейкой или другими алгебраическими средствами;

в) какая существует связь между уравнениями квадратуры алгебраических луночек;

$$n(x^m-1)^2-mx^{m-n}(x^n-1)^2=0 \quad и \quad \sum_{l-0}^{s}A_e z^e=0.$$

Получить:

а) необходимое и достаточное условие квадратуры алгебраических луночек;

б) сравнительно простые способы приближенного (но достаточно точного!) вычисления «площадей алгебраических» и «трансцендентных» луночек;

Сквадрировать луночки:

а) центральные углы дуг, которых $2\varphi=90°$, $2\varphi'=30°$ и $2\varphi=90°$, $2\varphi'=60°$;

б) $m:n=5:2$, $6:1$, $7:2$.

[25] Рассмотреть все остальные случаи по аналогии с указанными и восстановить опущенные доказательства.

Выяснить, существуют ли:

а) квадрируемые открытые луночки как части неквадрируемых круговых луночек.

б) квадрируемые «луночки», ограниченные дугами трех, четырех,... пересекающихся окружностей.

[26] Установить:

а) каким условиям должны удовлетворять открытые круговые и некруговые луночки, чтобы они были квадрируемы:

1) циркулем и линейкой; 2) с помощью конических сечений;

б) могут ли быть выделены открытые луночки из трансцендентных круговых и некруговых замкнутых луночек, квадрируемые с помощью алгебраических средств;

в) существует ли связь между луночками, образованными коническими сечениями, с точки зрения их квадрируемости;

г) квадрируются ли открытые параболические и гиперболические луночки.

Сквадрировать открытые луночки:

а) как части гиппократовых луночек ($m:n=2:1$, $3:1$, $3:2$), когда точка M на внешней окружности находится в середине дуги второго квадранта;

б) образованные гиппократовой луночкой (1-й случай, т. е. $m:n=2:1$) и отрезком прямой O_2M, проходящим через середину радиуса.

[27] Рекомендуется рассмотреть:

а) будет ли луночка нулевого класса квадрируемой, если

$$\mathrm{ch}R=3,\ \mathrm{ch}r=\frac{8}{3};$$

б) будет ли квадрируемым кольцо, образованное концентрическими окружностями с радиусами R и r, если $\mathrm{ch}R=5$, $\mathrm{ch}r=\frac{74}{17}$;

в) найти еще некоторые числовые значения $x=\mathrm{ch}R$ и $y=\mathrm{ch}r$, при которых луночки нулевого класса квадрируемы.

[28] Показать, будут ли квадрируемы луночки 2-го класса: а) при $\Phi=\frac{\pi}{3}$ и $\delta_2=\frac{\pi}{3}$ или $\mathrm{ch}R=\frac{11}{5}$, $\mathrm{ch}r=\frac{7}{5}$; б) $\Phi=\frac{2}{5}\pi$, $\delta_2=\frac{3}{10}\cdot\pi$; в) $\mathrm{ch}R=\frac{23}{12}$ и $r=\frac{R}{2}$; г) $\varphi=\pi$, $\Phi=\frac{2}{3}\pi$; д) $\varphi=\pi$, $\Phi=\frac{\pi}{2}$; е) $\varphi=\frac{\pi}{2}$; $\Phi=\frac{\pi}{3}$,

$$\delta_2=\frac{\pi}{2}.$$

Попытаться:

а) найти самостоятельно примеры квадрируемых луночек;

б) выяснить, не существуют ли более простые условия квадратуры луночек в плоскости Лобачевского.

[29] Рекомендуется на основании данной теории построить квадрат, равновеликий кругу, радиус которого R, и $\cos R=\frac{3}{4}$.

[30] Рекомендуется показать, что площадь луночки нулевого класса

$$\cos R=\frac{10+5\sqrt{2}}{50}\ \text{и}\ \cos r=\frac{30+4\sqrt{2}}{40}$$

равна площади квадрата $S_{\text{кв.}}=\frac{11}{10}\pi$,

Доказать, можно ли сквадрировать луночки:

а) 2-го типа $\varphi=\pi$, $\Phi=\frac{\pi}{3}$;

б) 1-го типа $\varphi=\frac{3}{2}\pi$, $\Phi=\frac{5}{3}\pi$;

в) 3-го типа $\Phi=\varphi=\frac{\pi}{3}$.

[31] Для любознательной молодежи назовем здесь еще несколько общих вопросов, решение которых могло бы восполнить пробелы в научной истории и в современной теории задач, рассмотренных в этой книге:

1) пополнять факты, относящиеся к знаменитым задачам древности из трудов ученых разных стран и эпох, не рассмотренных в историко-математической литературе. Поиски новых исторических фактов — одна из увлекательных задач для любителей истории математики;

2) анализировать, систематизировать и обобщать факты и выявлять закономерности в развитии теории этих задач в связи с общим развитием математики;

3) более детально изучить вклад народов разных стран в развитие теории знаменитых задач и в популяризацию их;

4) развивать дальше современную теорию этих задач, решая те вопросы и конкретные задачи, которые поставлены в этой книге, а так же и те, которые могут возникнуть у читателей при знакомстве с современной теорией рассмотренных задач.

Более опытные читатели могли бы:

1) разработать методику использования элементов истории и современной теории пяти знаменитых задач древности на уроках (в лекциях) по математике и во внеучебное время в работе со школьниками и со студентами;

2) популяризировать историю и современную теорию знаменитых задач древности, особенно среди молодежи (издание книг, статей, лекций и беседы) с целью повышения математической культуры и усиления интереса к математике молодежи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абу-л-Вафа ал-Бузджани. Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений. Сб. физико-математических наук в странах Востока, вып. 1 (IV). М., 1966, стр. 56—130 (вступит. статья и комментарии С. А. Красиковой).

2. Адлер А. Теория геометрических построений. Пер. с нем. под. ред. и с прим. С. О. Шатуновского, изд. 2. Одесса, 1924.

3. Ал-Бируни. Трактат об определении хорд в круге при помощи ломаной линии, вписанной в него. В сб.: «Из истории науки и техники в странах Востока», вып. 3. 1963, стр. 93—141 (вступит. ст. Б. А. Розенфельда, С. А. Красиковой и М. М. Рожанской).

4. Аргунов Б. И. и Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. М., Учпедгиз, 1957.

5. Архимед. Сочинения. Перевод, вступительная статья и комментарии И. Н. Веселовского. М., Физматгиз, 1962.

6. Бану Муса. Книга измерения фигур «Историко-математические исследования» (ИМИ), вып. 16, 1965, стр. 389—417 (пер. с арабского и прим. Джамиля аб-Даббаха).

7. Башмакова И. Г. Лекция по истории математики в Древней Греции. Историко-математические исследования, вып. 11. М., Физматгиз, 1958, стр. 225—438.

8. Белый Ю. А. и Швецов К. И. Об одной русской геометрической рукописи первой четверти XVII в. (ИМИ), вып. 12. М., 1954, стр. 185—244.

9. Березин В. Н. Луночки Гиппократа «Квант», 1971, № 5, стр. 17—21.

10. Беркович Л. М. О круговых луночках, квадрируемых при помощи конических сечений. Уч. зап. Казанского ун-та, 117:2, 1957, стр. 7—10.

11. Блох Л. С. Применение номографии к решению задач о трисекции угла. В кн. В. Д. Чистякова [97; 72—91].
12. Боголюбов С. А. Введение в неевклидову геометрию Римана. Л. -М., ГТТИ, 1934.
13. Бобынин В. В. Очерки истории развития физико-математических знаний в России, т. 1, вып. 1.1. М., 1893.
14. Боев Г. П. Лекции по истории математики, ч. 1 (до начала XVIII в.); Изд-во Саратовского ун-та, 1956.
15. Большая Советская Энциклопедия. Статьи: Квадратура круга. — Пи — Трисекция угла. — Удвоение куба. Гиппократовы луночки. Неевклидовы геометрии и др., изд. 2. М., 1950—1957.
16. Бугаев Н. В. Способы последовательных приближений. М., 1886.
17. Буняковский В. Я. О правильных многоугольниках, вписанных и описанных около круга.
18. Бухштаб А. А. Теория чисел. М., 1966.
19. Ван-дер-Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. Пер. с голл. И. Н. Веселовского. М., Физматгиз, 1959.
20. Ванцель Л. Исследование относительно средств распознать можно ли геометрическую задачу разрешить с помощью циркуля и линейки. Прилож. к книге Ф. Клейна [53].
21. Ващенко-Захарченко М. Е. История математики. Исторический очерк развития геометрии, т. 1. Киев, 1883.
22. Вебер Г. и Вельштейн И. Энциклопедия элементарной математики. Руководство для преподающих и изучающих элементарную математику в 3-х томах. Пер. с нем. под ред. и с прим. В. Кагана, т. 1. Элементарная алгебра и анализ, изд. 2. Одесса, 1911.
23. Вейерштрасс К. К мемуару Линдемана «О Лудольфовом числе. (Доказательство невозможности квадратуры круга)». Пер. И. Л. Скалозубова под ред. А. В. Васильева. Известия физико-математического общества при Казанском ун-те, сер. 2, т. 4, 1894 (Приложение).
24. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Пер. с нем. под ред. А. П. Юшкевича. М., Физматгиз, 1960.
25. Власов А. К. Квадратура круга и циркулятура квадрата». Математическое образование», 1916, № 1,7.
26. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в Древнем мире. Огиз, 1941.
27. Гарднер М. Число Пи... «Наука и жизнь», 1971, № 11, стр. 111.
28. Гаусс К. Ф. Арифметические исследования. В сб.: «Гаусс — труды по теории чисел», общая ред. акад. И. М. Виноградова, коммент. Б. Н. Делоне, пер. В. Б. Демьянова. М., Изд-во АН СССР, 1950, стр. 9—573.
29. Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. М., 1952.
30. Гиндикин С. Г. Дебют Гаусса. «Квант», 1972, № 1, стр. 2—11.
31. Глейзер Г. И. История математики в школе. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1964.
32. Граве Д. А. Невозможные задачи и их роль в математике Граве Д. А. Энциклопедия математики (очерк ее современного положения). В кн.: Киев, 1912, стр. 5—44.
33. Граве Д. А. Трактат по алгебраическому анализу, т. 2. Киев. Изд-во АН СССР, 1939.
34. Гусев Ф. О вычислении числа π. «Математическое образование», 1916, № 7, стр. 234—239.
35. Гюйгенс Х. Открытия о величине круга. В кн. «О квадратуре

круга». Пер. с нем. под ред. и с прим. акад. С. Н. Бернштейна. М. -Л., ОНТИ, стр. 105—166.

36. Дашкевич С. Ф. Деление всякого угла на три равные части при помощи «трисекциона». Брянск, 1922.

37. Декарт Р. Геометрия. Пер. с франц., прим. и ст. А. П. Юшкевича. М.-Л., ОНТИ, 1938.

38. Делоне Б. Н. Работы Гаусса по теории чисел. В сб.: «Карл Фридрих Гаусс» (к 100-летию со дня смерти). Под общей редакцией акад. И. М. Виноградова. М., Изд-во АН СССР, 1956, стр. 13—112.

39. Депман И. Я. Победитель числа π — Фердинанд Линдеман. Уч. зап. Ленинградского педагогического ин-та, т. 17, вып. 2, 1957, стр. 119—123.

40. Долгушин П. Определение длины дуги кривой. «Математическое образование, 1916, № 7, стр. 247—254.

41. Дороднов А. В. О круговых луночках, квадрируемых при помощи конических сечений. Известия Казанского физ.-мат. об-ва при Казанском ун-те, т. 13, сер. 3, 1945, стр. 95—126.

42. Дороднов А. В. О круговых луночках, квадрируемых при помощи циркуля и линейки. ДАН СССР, т. 8, 1947, № 6, стр. 965—968.

43. Дринфельд Г. И. Трансцендентность чисел е и π. Изд-во Харьковского ун-та, 1952.

44. Евклид. Начала Евклида. Пер. с греч. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского, кн. 1—15. М., -Л., Гостехиздат, 1948—1950.

45. Иглиш Р. О. О делении угла на три равные части и об удвоении куба при помощи циркуля и угольника. «Математика и физика в средней школе». 1935, № 5 (пер. с нем.).

46. История математики с древнейших времен до начала XIX ст. (в 3-х томах) под ред. А. П. Юшкевича, тт. 1, 2, 1970.

47. История отечественной математики (в 4-х томах). Изд-во АН СССР и АН УССР, 1966—1970.

48. Каган В. Ф. Краткий очерк истории задачи о квадратуре круга... («Вестник опытной физики и математики»), 1892, № 126 и 127.

49. Каган В. Ф. Новое доказательство трансцендентности чисел е и π (доказательство Валена). Одесса, 1901.

50. Кардемский Б. А. Деление окружности. «Математика в школе», 1953, № 1.

51. Ал-Каши. Трактат об окружности. ИМИ, вып. 7, 1954, стр. 327—379. Пер. Б. А. Розенфельда.

52. Кеплер И. Стереометрия винных бочек. М., ОНТИ, 1935.

53. Клейн Ф. Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии с приложением перевода мемуара Ванцеля [146]. Пер. с нем. Н. П. Парфентьева, под ред. Д. М. Синцова. Казань, 1898.

54. Клейн Ф. Трансцендентность чисел е и π. В кн.: «Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей», т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. Пер. с нем. Д. А. Крыжановского. Под. ред. В. Ф. Кагана, изд. 2, доп. по 3 нем. изд. М. -Л., Гостехиздат, 1933, стр. 352—372.

55. Колосов А. А. Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах, изд. 2, 1963.

56. Кольман Э. Я. История математики в древности. М., Физматгиз, 1961.

57. Креер Л. Н. Алгебраические числа и решение геометрических задач на построение с помощью линейки и циркуля. «Математическое просвещение», вып. 3, 1935, стр. 32—45.

58. Курант Р. и Роббинс Г. Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов. Пер. с англ. под ред. проф. В. Л. Гончарова. М. -Л., Гостехиздат, 1947.

59. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., Физматгиз, 1963.

60. Кэджори Ф. История элементарной математики. Пер. с англ. под ред. и с прим. И. Ю. Тимченко. Одесса, 1910.

61. Ламберт И. Г. Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга. В сб. [180; 169—196].

62. Лебедев В. И. Очерки по истории точных наук, вып. 4. Знаменитые геометрические задачи древности. Пг., 1920.

63. Лежандр А. М. Доказательство того, что отношение длины окружности к диаметру и квадрат его суть иррациональные числа. В сб. [80; 199—210].

64. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений (составил и перевел А. П. Юшкевич). Успехи математич. наук, т. 3., вып. 1(23), 1948.

65. Литцман В. Старое и новое о круге. Пер. с нем. В. С. Бермана. М., Физматгиз, 1960.

66. Магницкий Л. Ф. Арифметика, сиречь наука числительная, 1703.

67. Малыгин К. А. Элементы историзма в преподавании математики в средней школе. Пособие для учителей. М., Учпедгиз, 1958.

68. Манин Ю. И. О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки. Энциклопедия элементарной математики, кн. 4. М., Физматгиз, 1963, стр. 205—227.

69. Марков А. А. Доказательство трансцендентности чисел e и π (Невозможность квадратуры круга). По статьям Эрмита и Линдемана. Спб., 1883.

70. Маркушевич А. И. Замечательные кривые. М., 1951.

71. «Математика в девяти книгах». Древнекитайский трактат. Пер. предисл. и прим. Э. И. Березкиной. Историко-математические исследования, вып. 10. М., 1957, стр. 425—584.

72. Мордухай-Болтовской Д. Д. О геометрических построениях в пространстве Лобачевского. Сборник Jn memoriam Lobatscheuskii, т. 2. Казань, 1927, стр. 67—82.

73. Мордухай-Болтовской Д. Д. О некоторых свойствах трансцендентных чисел первого класса. Математический сборник, 34, 1927, стр. 55—100.

74. Мордухай-Болтовской Д. Д. О штейнеровских построениях на сфере. Математический сборник, т. 42(5), 1935.

75. Нейгебауэр О. Лекции по истории античных математических наук, т. 1, 1937. Пер. с нем., предисл. и прим. С. Я. Лурье.

76. Несторович Н. М. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М.-Л., ГИТТЛ, 1951.

77. Несторович Н. М. Квадратура круга и полисекция угла в четырехмерном пространстве: «Ростовский-на-Дону научный вестник», 1923, № 2, стр. 39—42.

78. Несторович Н. М. О несобственных треугольниках на сфере (плоскости Римана). «Известия Ростовского педагогического ин-та», 1940, № 10, стр. 158—179.

79. Ньютон И. Математические работы, пер. с лат., вводная статья и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л., 1937.

80. О квадратуре круга. Сб. статей с приложением истории вопроса, составленной Ф. Рудио, пер. с нем. под ред. и с прим. акад. С. Н. Бернштейна. М., 1934.

81. Орлов А. Руководство к геометрическому линейному черчению, 1877.

82. Певцов А. Построение π с точностью до 10^{-4}. «Вестник опытной физики и элементарной математики» № 277, стр. 12.

83. Поссе К. А. О трансцендентности чисел e и π. Известия Спб. практического технологического ин-та, 1894, стр. 49—60.

84. Попов Г. Н. Очерки по истории математики. Для учащихся, студентов рабфаков и любителей математики. М.-Пг., 1923.

85. Постников М. М. Теория Галуа. М., Физматгиз, 1963.

86. Раик А. Е. Очерки по истории математики в древности, 1967.

87. Рыбников К. А. История математики. Учебн. пособие для студ. ун-тов, т. 1. Изд-во Московского ун-та, 1960.

88. Савелов А. А. Плоские кривые. М., 1960.

89. Смогоржевский А. С. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М. -Л., 1951.

90. Сомов О. И. Общий способ приблизительного спрямления кривых линий. Записки импер. Акад. наук, т. 18, кн. 1, 1870, стр. 25—30.

91. Федоров Е. С. О делении окружности на равные части лучами из одного центра. Известия С.-Петербургского горного ин-та, 1910, т. 2, вып. 5, стр. 396.

92. Хинчин А. Я. Элементы теории чисел. Энциклопедия элементарной математики, кн. 1. Арифметика. М. -Л., Гостехиздат, 1951., стр. 255—353.

93. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. Предисловие М. Я. Выгодского. Пер. П. Юшкевича с франц. изд., испр. М.-Л., Гостехиздат, 1932.

94. Чеботарев Н. Г. Основы теории Галуа, т. 1, М., ГТТИ, 1934.

95. Четверухин Н. Ф. Геометрические построения и приближения. М., Учпедгиз, 1935.

96. Чистяков В. Д. Математические вечера в средней школе. Пособие для учителей, изд. 2 и доп. М., Учпедгиз, 1958.

97. Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. Пособие для внеклассной работы. М., Учпедгиз, 1963.

98. Шафаревич И. О разрешении уравнений высших степеней, М., 1954.

99. Школьник А. Г. Задача деления круга. Пособие для учителей, изд. 3. М., Учпедгиз, 1961.

100. Шрубко Л. А. Трисекция угла. «Известия АН Каз. ССР», № 115, сер. геол., вып. 12, 1952. стр. 99—103.

101. Штейнер Я. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой и неподвижного круга. Пер. с нем. под ред. Д. М. Синцова. М., Учпедгиз, 1939.

102. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных малых, т. 1. Пер. с лат. Е. Л. Пацановского. Ред. вступ. статья и примеч. С. Я. Лурье. М.-Л., ОНТИ, 1936; т. 2, пер. с лат. и предисловие И. Б. Погребысского, 1957.

103. Юшкевич А. П. История математики в средние века. М., Физматгиз 1961.

104. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 г. М., 1918.

105. Юшкевич А. П. Леонард Эйлер о квадратуре круга. Историко-математические исследования, вып. 10. М., Физматгиз, 1957, стр. 159—210.

106. Яглом А. М. и Яглом И. М. Элементарный вывод формул Валлиса. Лейбница и Эйлера для числа π. УМН 8:5 (57) 1953, стр. 181—187.

107. Яковкин М. В. Численная теория приводимости многочленов. Изд-во АН СССР, 1959.

108. Bernulli D. Exercitationes quardam Mathematicae, Venetiis 1724.

109. Beutel E. Die Quadratur des Kreises. Aufl. L—B., 1920.

110. Bieberbach L. Theorie der geometrischer Konstruktionen Basel, 1952.

111. Breidenbach W. Das Delische problem. Leipzig, 1952.
112. Breidenbach W. Die Dreiteilung des Winkels, Leipzig, 1951
113. Calo B. Über die transzendenten Aufgaben, insbesondere über die Quadratur des Kreises. Fragen der Elementargeometrie, Bd. 2, Leipzig, 1907, S. 267—326.
114. Cantor G. Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. Journal für die reine und angewandte Matematik, 1873, Bd. 77.
115. Clausen Th. Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrierbar ist. Journal für die reine und angewandte. Matematik, 1840, Bd. 21.
116. Conti. Aufgaben dritten Grades: Verdoppellung des Würfels Dreiteilung des Winkels. Fragen der Elementargeometrie, Leipzig, 1907, Bd. 2. S. 189—266.
117. Eisenlohr A. Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum). Leipzig, 1877, 1891.
118. Enriques F. Die geometrischen Aufgaben ihre Lösung und Lösbbarkeit (2 tell — Fragen der elementargeometrie). Leipzig, 1907.
119. Euler L. Considerationes Cyclometricae. Novi Comm, Ac. Sc. Petr, 1772 (1771), t. 16, p. 160—173.
120. Euler L. Solutio problematis geometrici circa lunulas a circulis formatas. Comm. Ac. Sc Petr., 1744 (1737).
121. Fourier. Melanges d'analyse algebrique, 1815.
122. Fuss P. H. Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres geometres du XVIII siècle. St. Petersb., 1843.
123. Gordan. Transcendenz von l und. Math. Ann. 1893, Bd. 43, S. 222.
124. Hermite Sch. Sur la fonction exponentielle C—R., 1873, T. 77.
125. Hessenberg J. Transzendenz von l und. Leipzig, 1912.
126. Hilbert. Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π. Math. Ann. 1893, Bd. 43, S. 216.
127. Hurwitz. Beweis der Transcendenz der Zahlen e. Math. Ann. 1893, Bd. 43, S. 220.
128. Katalog mathematischer und mathematisch-physischen Modelle. Apparate und Instrumente. München, 1892, S. 227—230.
129. Krafft G. W. Dissertation de quadratura circuli praesertim Merkelina. Tubingae, 1752.
130. Krafft G. W. Peripheria circuli mechanice dupliciter rectificata. Comm. Acad. Petropol., t. 13, 1741—1743 (1751).
131. Krafft G. W. De lunulis quadrabilibus e variarum curvarum combinatione ortis., Comm. Acad. Sciences imper. Petropol., 1738, t. 6, p. 156—167.
132. Kubota T. Geschichtliches über geometrische Konstruktionen. Jahresber. DMV. Bd. 37, S. 71—74 (1927).
133. **Landau.** Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Geselschaft. 2. (1903), S. 1—6.
134. Lebesgue. Lecons sur les construction géométriques. Paris, 1950.
135. Legendre A. M. Eléments de géométrie. Paris, 1794. (Note 4).
136. Lenberg P. Lehrsatz von elliptischen monden die sich quadrieren lossen.
137. Lindemann. Über die Zahl π Mathem. Annalen, 1870, Bd. 20, S. 213—225.
138. Liouville J. Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni rationelle algébrique ni même réductible à des irrationnelles algébriques. Journal de mathématiques pures et appliquées. (1851) XV.

139. Marar Mukunda K. and Rajagopal C. T. On the Hindu quadratire of the Circle K. Balangadharan, Appendix, Journal of Bombay Branch of the Royal Asiatic Society, 1944, Vol. 20.

140. Montucla. Histoire des recherches sur la quadrature du cercle, avec une addition concernant les problèmes de la duplication du Cube et de trisection de l'angle... (1754) Paris, 1831, 300.

141. Rudio F. Der Bericht des simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Leipzig, Teubner, 1907.

142. Shanks D. and Wrench J. In Calculation of π to 100.000 decimals «Math. comput», 1962, 16, N. 77, 76—99.

143. Tschakaloff L. Beitrag zum Problem der quadrierbaren Kreisbergenzweiecke. Mathematische Zeitschrift, 30, 552 (1929).

144. Tschebotareff N. G. Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke, I, Mathematische Zeitschrift, 39 (1935), S. 161—175.

145. Viete Fr. Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII, Turino 1593.

146. Wantzel. Recherches sur les moyens de reconnaitre si un problème de géometrie peut se resoudre avec la regle et le compos. Journal de Mathematiques pures et appliquées, 1837, I, serie, II, t. c. 366—372.

147. Weierstrass. Zur Lindemann's Abhandlung «Über die Ludolphische Zahl». Sitzunggberichte der Kön. Preus. Academie der Wiss. 1885.

148. Wieleitner H. und Hofmann J. Zur Geschichte der quadrierbaren Kreismonde. Wiss. Beilage zum Jahresber. d. neuen Realgimnasium. München, 1933—1934.

149. Wijnquist. Diss. gradualis lunulas quasdam circulares quadrabiles exhibens, Abo, 1766.

ОГЛАВЛЕНИЕ

БЕЛОЗЕРОВ Семен Ефимович

ПЯТЬ
ЗНАМЕНИТЫХ ЗАДАЧ
ДРЕВНОСТИ

(История и современная теория)

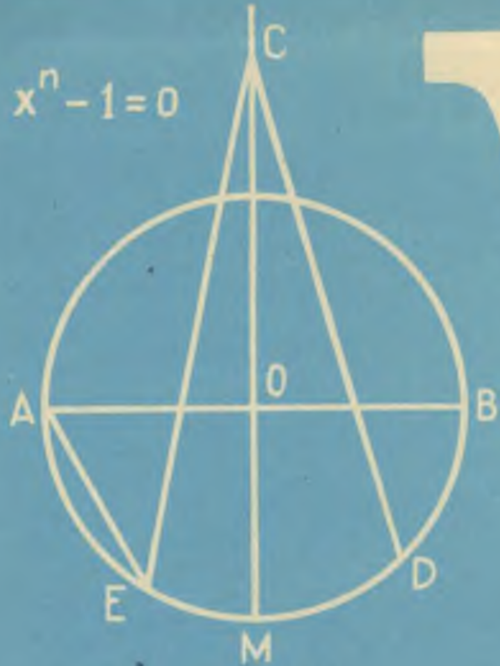
Редактор О. Ф. Картушина
Технический редактор Г. Я. Бочковая
Корректор Л. А. Гайдаш
Обложка Д. А. Морозова

Изд. № 88/798. Сдано в набор 01.12.73. Подписано к печати 13.03.75. ПК 27064. Формат 60x84 1/16. Бумага тип. № 3. Объем 20,0 физ. п. л., 18,60 усл. п. л., 19,88 уч.-изд. л. Тираж 12000 экз. Заказ № 2012. Цена 1 руб. 32 коп.

Издательство Ростовского университета, г. Ростов-на-Дону, 6, ул. Пушкинская, 160.

Адыгоблполиграфобъединение управления издательств полиграфии и книжной торговли Краснодарского крайисполкома, г. Майкоп, ул. Пионерская, 268.

$$x^n - 1 = 0$$



Ἱπποκράτης

Ἀρχιμήδης

Ἀρχυτας

Abu-l-Wafa

Omar Khayyām

Alkâschî

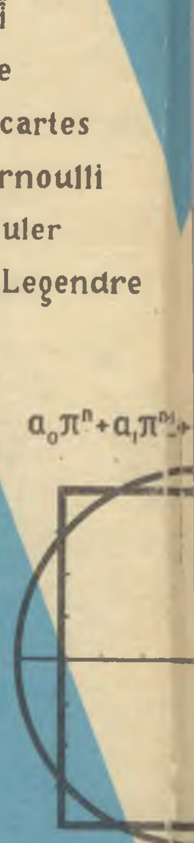
F. Viete

R.Descartes

D.Bernoulli

L.Euler

A.Legendre

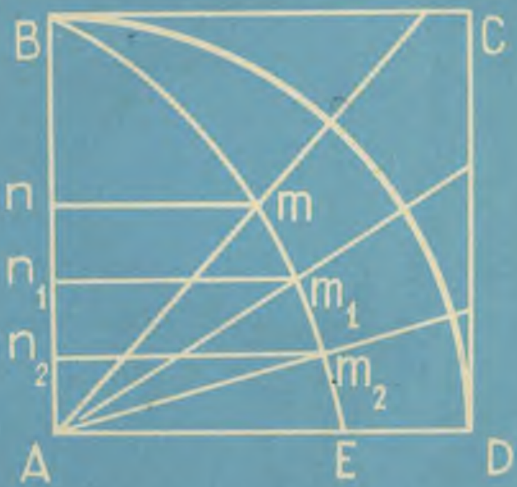


$$n\sin^2 m\theta - m\sin^2 n\theta = 0$$

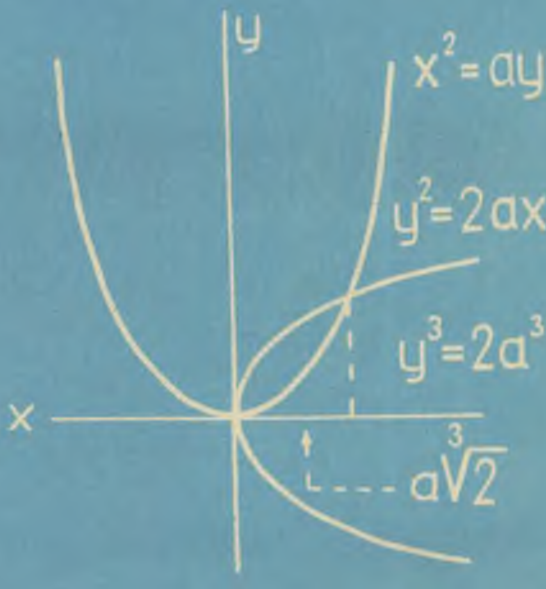
$$n(x^m-1)^2 - mx^{m-n}(x^n-1)^2 = 0$$

$x^3 - 3x - a = 0$

C.Gauss
P.Wantzel
F.Lindemann
Н. ЛОБАЧЕВСКИЙ
А.МАРКОВ
Л. ЧАКАЛОВ
Н.ЧЕБОТАРЕВ
А. ДОРОДНОВ
Д. МОРДУХАЙ-
-БОЛТОВСКОЙ
Н. НЕСТЕРОВИЧ



$\ldots + a_{n-1}\pi + a_n \neq 0$



1 руб. 32 коп.