В. В. Капитоненко

Инвестиции и хеджирование

Учебно-практическое пособие для вузов

МОСКВА
2001

Автор:
В.В. Капитоненко - доктор экономических наук, академик Международной академии наук Высшей школы, профессор.

Рецензенты:
Сергеева Г.В. - проректор Финансовой академии при Правительстве РФ, профессор;
Тихомиров Н.П. - заведующий кафедрой математических методов анализа экономики Российской экономической академии им. Г.В. Плеханова, доктор экономических наук, профессор.

Капитоненко В.В.
Инвестиции и хеджирование: Учебно-практическое пособие для вузов. - М.: "Издательство ПРИОР", 2001. - 240 с.

ISBN 5-7990-0534-1

В книге излагаются модели и методы финансовой математики, объединенные по двум направлениям ее приложений: инвестиции и защита от рисков. В первой части даются правила финансовой арифметики, методы обработки платежных потоков, а также основы теории инвестиционного портфеля: эффективная траектория, линии рынков ценных бумаг и капитала, равновесные цены и т. д. Рассматриваются вопросы учета вероятностной и диапазонной неопределенностей: риски, их измерители, отношение к риску и функция полезности.

Вторая часть посвящена управлению рисками курсовых стоимостей ценных бумаг и процентных ставок. Рассматриваются элементы стохастической финансовой математики и расчеты в опционах, а также техника управления пакетами облигаций, основанная на идеях иммунизации.

Книга рассчитана на студентов экономических специальностей и преподавателей. Она также будет полезна для широкого круга специалистов, использующих финансовую аналитику в своей практической деятельности.

Редактор: А.В. Земцов
Корректор: С.Г. Рыкова
Верстка: С.А. Симончук

"Издательство ПРИОР"
Москва, Воронцовский пер., ~~5/7~~
Телефон: 964-42-00
Интернет: http://www.knigotorg.ru
Издательская лицензия ЛР № 065184
Гигиеническое заключение № 77.99.2.953.П.5615.9.99 от 16.09.99
Издание осуществлено совместно с издательством "Приоритет"
Подписано в печ.20.02.2001. Заказ 141 . Тираж 2500 .
Отпечатано в Подольском филиале ЧПК
142110, Подольск, ул. Кирова, 25.

ISBN 5-7990-0534-1

9 785799 005344

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Меняющаяся экономика невозможна без меняющегося экономического человека. В этих переменах первостепенную роль играет высшая школа, особенно та ее часть, которая относится к финансово-экономическому образованию. Становление принципиально новой модели российского хозяйствования ведет к существенно иным взаимоотношениям реального сектора с финансовой сферой, не говоря уже о фондовом рынке и разноплановой сети финансовых институтов.

Повышение значения денежных параметров - кредита, ставки дисконтирования, бюджетных ограничений и пр. - требует самого пристального внимания к области финансового обучения и ее базовой части - финансовой математики.

По уровню сложности в данной дисциплине можно выделить ее начальный и продвинутый курсы. Элементарная финансовая математика не перекрывает требований школьной программы и содержит алгебраические основы приведения денег во времени и обработки потоков платежей, а также приложения в области кредитных расчетов и оценивания инвестиций, как прямых, так и в ценные бумаги. Эта отрасль финансовой математики имеет сугубо практическое значение. С ее помощью решаются многие задачи, которые возникают в банковской сфере, а также при проведении количественного финансового анализа, например, в ходе заключения коммерческих сделок, при инвестировании и амортизации долга.

Если бы не декларируемая повсюду перегруженность учащихся, то соответствующую финансовую подготовку вполне допустимо перевести на уровень среднего образования. В пользу подобного решения можно привести целый ряд аргументов, начиная с финансовой повседневности ведения домашнего хозяйства и вплоть до оживления хрестоматийной математики житейскими примерами.

Следующая ступень поднимает содержание обсуждаемого курса до уровня математической подготовки студентов по экономическим специальностям. Подобное расширение связано не только с усложнением расчетных задач, ориентированных на оптимизацию, вероятностно-статистический подход и методы вычислительной математики, но и с рассмотрением теоретико-аналитических моделей финансового рынка и его закономерностей.

Характеризуя современное состояние этой области, можно отметить, что по большей части наши вузы уже освоили обучение тем разделам финансово-математической науки, которые относятся к теории инвестирования. Из наиболее известных уместно сослаться на результаты американских ученых Г. Марковица (1952) и Д. Тобина (1958), заложивших основы теории оптимального портфеля ценных бумаг, а также на смежную модель ценообразования капитальных активов У. Шарпа (1964).

Вместе с тем вне поля зрения все еще остаются вопросы хеджирования - противостояния риску финансовых операций и риску инвестиций, в том числе производственных. Здесь в первую очередь можно отметить те разделы финансовой инженерии, которые опираются на известную теорему об иммунитете и понятие дюрации (П. Самуэльсон), а также на результаты теории рациональных расчетов опционов.

Основы опционной теории, изложенные в работах Ф. Блэка, М. Шоулза и Р. Мертона (1973), ознаменовали принципиально новый подход и в рекордно сжатые сроки были востребованы финансовым рынком, нашли применение в практических расчетах. На этом фоне отставание обучающего процесса объясняется теоретической сложностью вероятностных моделей и понятий, используемых стохастической финансовой математикой и которые находятся вне математического кругозора студентов-экономистов. В результате насущные для рыночной экономики проблемы риска и возможности применения опционов, в том числе реальных, не находят достойного их значимости отражения в учебных планах, и студенты, знакомые с золотым правилом инвестирования, остаются вне ведения о существовании его зеркального эквивалента для хеджеров.

Ситуация не нова и разрешается по мере осмысления прикладной наукой новых для нее результатов фундаментальной науки. Например, что касается достижений в математике, то на первых порах они отражаются в профильных для математической специализации курсах, и лишь впоследствии по итогам "заземления" на прикладную науку оказываются адаптированными к инженерному уровню восприятия. И в том и в другом случаях можно говорить о посреднической миссии преподавателя, приспосабливающего свой курс к аудиторному пониманию.

Именно этих благих намерений придерживается автор на пути к читателю. В предлагаемой им книге выделенные выше направления - алгебраические основы финансовых расчетов, оптимальные инвестиционные и хеджирующие портфели - рассматриваются на паритетных началах и следуют в порядке возрастания их математической сложности.

В связи с этим начальную часть книги - алгебру финансов - можно использовать для "ликбеза" в области финансовых вычислений. Последующие же разделы доступны читателю с вузовским уровнем математической подготовленности.

Книга рассчитана на студентов экономических специальностей и их преподавателей. Она также может быть воспринята широким кругом специалистов, использующих финансовую аналитику в своей практической деятельности.

ЧАСТЬ I

ИНВЕСТИЦИИ

"...если кто хорошо понял общую сущность какого-нибудь дела, основную истину, высшие принципы, тот при некотором размышлении сам весьма легко сделает выводы относительно приложения этой основной истины к единичным случаям и применит ее ко всем фактам своей жизни; в случае же необходимости он найдет нужную справку в почти бесчисленных учебниках, в которых единичные явления по большей части перечислены и изложены довольно правильно, несмотря на то что общее схвачено неудачно и точка зрения на целое неверна".

Артур Шопенгауэр

Глава 1

Математические основы финансового анализа

1.1. Наращение и дисконтирование

Время и неопределенность как влияющие факторы

Неотъемлемой составляющей финансового анализа является учет фактора времени. В его основе лежит **принцип неравноценности денег** *в разные календарные сроки.* Одинаковые суммы денег "сегодня" и денег "завтра" оцениваются по-разному. Сегодняшние деньги приравниваются к возросшей денежной массе в будущем и, наоборот, вместо денег "потом" можно согласиться на уменьшение выплаты, но сейчас.

Чем вызваны подобные предпочтения?

Во-первых, возможностью продуктивного *использования денег как приносящего доход финансового актива*. Так, производственные инвестиции позволяют в перспективе не только вернуть затраченные средства, но и получить весомый добавочный эффект.

Другой фактор, влияющий на предпочтения, - *неопределенность будущего и связанный с нею риск*. ***Деньги "в кармане"*** могут быть израсходованы на потребление сиюминутно.

Сберегаемые же деньги подвержены всевозможным рискам в зависимости от способа сбережения. Если они хранятся на домашнем "депозите", например под матрацем, им грозит обесценение из-за инфляции или кончины их владельца.

В случае, когда деньги даются ***в долг***, риск невозврата зависит от успешности кредитуемого мероприятия, которое может завершиться убытками или полным крахом. Потому-то возвращаемая сумма всегда должна быть больше заемной как с учетом срока ссуды, так и существующего риска потерь.

Формулы, приводимые в данном разделе, позволяют пересчитывать и приводить денежные потоки к различным временным датам *без учета неопределенности.* Для случаев, когда нельзя пренебречь влиянием стохастических факторов и дефицита информации, разработаны специальные подходы. Некоторые из них, в частности для операций с ценными бумагами будут рассмотрены в следующих темах пособия.

В ближайших параграфах дается методическая и математическая база для вычисления денежных сумм, как наращенных по вкладу, так и предшествующих заданному платежу. Она же является основой для более сложных расчетов, например, потоков платежей или инвестиций. Это позволяет, в частности, сэкономить на изложении многочисленных частных вариантов, заменив их на обобщенный или на задачи для самостоятельных упражнений.

Начисление процентов

Дадим формулы расчета *будущих сумм* S *по начальному вкладу* **P**. В основе их построения лежит понятие *единичного периода начисления* **(T = 1)** и *процентной ставки* **i**, которая фиксирует процентное увеличение исходной суммы P за первый период. В результате сумма на конец этого промежутка времени

$$S_1 = P + \frac{P}{100} i .$$

Если ставка i измеряется десятичной дробью,
то $S_1 = P + P \times i$.

По отношению к следующим периодам ставки процентов трактуются по-разному в зависимости от принятой схемы начисления: по ***простым*** или по ***сложным процентам.*** В первом случае приросты денежных сумм для любого периода будут составлять все ту же долю i от первоначальной суммы P. В результате наращенная за n периодов сумма составит величину

$$S_n = P + niP = P(1 + ni). \qquad (1)$$

Здесь и в дальнейшем будем пользоваться дробным измерением ставки i.

В отличие от простых *для сложных процентов* одна и та же ставка i берется для каждого последующего промежутка не от первоначальной суммы, а от результата предыдущего начисления, то есть от суммы, наращенной на начало данного периода. Отсюда следует, что вклад P при ставке сложного процента i через n периодов составит сумму

$$S_n = P(1 + i)^n. \qquad (2)$$

Таким образом, последовательность наращенных сумм $\{S_n\}$ в случае простых процентов представляет собой арифметическую прогрессию, в то время как для сложных процентов прогрессия будет геометрической.

Выражения (1), (2) называют формулой простых и соответственно сложных процентов. Под процентными деньгами или, кратко, процентами понимают величину дохода (приращение денег) $I_n = S_n - P$, а коэффициенты пересчета на будущее называют множителями наращения:

$$M_1(n, i) = 1 + ni; \; M_2(n, i) = (1 + i)^n.$$

В финансовых вычислениях в случае меняющихся во времени процентных ставок используют очевидные обобщения правил (1), (2).

$$S_n = P(1 + \sum_t n_t i_t) \text{ - для простых процентов,}$$

$$S_n = P\prod_t (1 + i_t)^{n_t} \text{ - для сложных процентов.}$$

В практических расчетах формулы (1), (2) используют по необходимости и для дробного числа периодов. Графическая иллюстрация соотношения сумм, наращиваемых по любому, в том числе дробному, сроку $t \geq 0$, приведена на рис. 1.

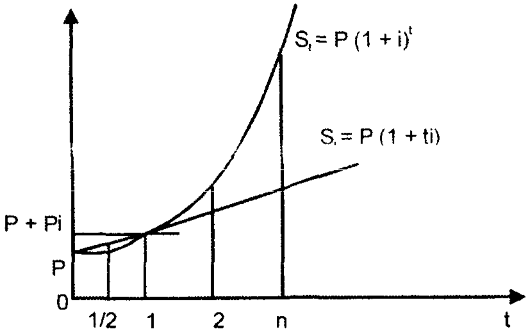


Рис. 1. **Соотношение роста по простым и сложным процентам**

Подчеркнем, что при срочности $t < 1$ (как видно из рис. 1) начисление по простым процентам превышает сложный процент; при переходе через единичный промежуток картина меняется: превалирует сложный процент, причем с возрастающей во времени отдачей. Например, при $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = 2$ имеют место неравенства:

$$(1 + i)^{\frac{1}{2}} < \left(1 + \frac{1}{2}i\right) \text{ и } (1 + i)^2 > (1 + 2i).$$

Дисконтирование и удержание процентов

Эти процедуры в определенном смысле являются обратными по отношению к процессу начисления процентов. ***Дисконтированием называется авансовое удержание с заемщика процентов в момент выдачи ссуды***, то есть до наступления срока ее погашения.

Другим вариантом дисконтирования является *учет векселей в банке, когда банк, принимая вексель от предъявителя, выдает ему обозначенную на векселе сумму до срока его погашения.* При этом банк удерживает в свою пользу проценты (дисконт) от суммы векселя за время, оставшееся до срока гашения. Подобным образом (с дисконтом) государство продает большинство своих ценных бумаг (долговых обязательств).

В нашем случае исходной величиной выступает не начальный вклад P, а некоторая будущая сумма S. Вопрос состоит в том, чтобы определить эквивалентную сумму P, отстоящую на t предшествующих периодов до срока выплаты S. В зависимости от принятого критерия эквивалентности можно выделить **два подхода к расчету предшествующих сумм**.

Во-первых, по размеру вклада P, который при начислении процентов через t периодов дает сумму S, и, *во-вторых*, по размеру платежа, к которому придем при удержании процентов с финальной суммы S за срок t. Таким образом, при одном толковании за базовую величину, то есть за 100%, принимается размер вклада P, в то время как при другом - за 100% берется будущая сумма S. Кроме того, по каждому варианту дисконтирование можно производить как по простым, так и по сложным процентам.

В случае **приведения по вкладу P** для нахождения дисконтированных значений достаточно воспользоваться формулами (1) и (2), решив их относительно величины P.

В результате получим две формулы:

$$P = \frac{1}{1+ti}S \tag{3}$$

при дисконтировании по простым процентам, и

$$P = \frac{1}{(1+i)^t}S \tag{4}$$

для сложных процентов. Стоящие в этих формулах мультипликаторы показывают, какую долю составляет P в величине S при простой и соответственно сложной ставке процентов, и называются ***дисконтирующими множителями***:

$$D_1(t,i) = \frac{1}{1+ti}, \quad D_2(t,i) = \frac{1}{(1+i)^t}.$$

Для наращенных сумм (1), (2) параметр i - ставка начисления. В случае дисконтирования (3), (4) об этом же параметре i говорят как о ставке дисконтирования.

Величину P, найденную дисконтированием S по вкладу, называют современной, или ***приведенной величиной S***. Это понятие является одним из важнейших в количественном анализе финансовых операций, поскольку именно с помощью дисконтирования учитывается такой фактор, как время.

Формулы **дисконтирования по платежу** (второй подход) можно получить, используя аналогичные (1) и (2) равенства с заменой схемы начисления процентов на вклад Р схемой их удержания с суммы S за тот же срок вложения. За основу их построения можно принять понятие *единичного периода удержания процентов* (дисконтирования) и *учетной ставки* ***d***, которая фиксирует процентное или долевое уменьшение суммы S на один период "назад". Отсюда следует, что на начало этого периода эквивалентная выплате S сумма составит величину Р, которая при дробном измерении ставки определяется формулой:

$$P = S - dS.$$

По отношению к следующим периодам учетная ставка трактуется поразному в зависимости от принятой схемы дисконтирования: по простым или по сложным процентам. В первом случае удержания денежных сумм (дисконты) по каждому периоду будут составлять все тот же процент d от все той же суммы S. В результате такого дисконтирования за t периодов получится величина:

$$P_t = S - tdS = S(1 - td). \qquad (5)$$

В отличие от этого при учете по сложной ставке последовательные по периодам снижения берутся как один и тот же процент d, но не от одной и той же величины S, а каждый раз от новой, полученной в результате дисконтирования на соседний период. Отсюда следует формула дисконтирования (учета) по сложным процентам, где в качестве процента выступает доля удержания d:

$$P_t = S(1 - d)^t. \qquad (6)$$

В качестве разъясняющих примеров приведем два элементарных упражнения: на начисление процентов (задача а)) и их удержание (задача б)).

а) При двух последовательных одинаковых процентных повышениях заработной платы сумма в 10000 руб. обратилась в 12544 руб. Определить, на сколько процентов повышалась заработная плата каждый раз.

б) После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена телевизора упала с 3000 руб. до 1920 руб. На сколько процентов снижалась цена телевизора каждый раз?

Схема дисконтирования (3), (4) широко применяется в многообразных задачах финансового анализа, в том числе *для сравнения потоков платежей и при расчете стоимости облигаций и прочих ценных бумаг.* Примеры подобных приложений будут приведены в дальнейшем при рассмотрении соответствующего материала.

Дисконтирование по удержанию (5), (6) используется ***при учете векселей***. Суть этой финансовой операции состоит в следующем. Некто выдает вексель (расписку) с обязательством уплатить сумму S на определенную дату Т. Владелец векселя в случае нужды может досрочно учесть его, то есть получить деньги раньше срока в коммерческом банке (КБ) по установленной последним учетной ставке d, которая уменьшает сумму выплаты. В зависимости от принятых условий учет проводится по простым (5) или по сложным (6) процентам.

Такой вексель, который допускает участие третьих лиц, называется *переводным* или *траттой*. В дальнейшем, на дату T, банк предъявляет вексель тому, кто его выписал, и получает сумму S, извлекая из этой операции собственную выгоду: учитывал по меньшей сумме, а получил большую.

Пример. в) Тратта выдана на сумму 100 тыс. руб. с уплатой 17.11. Владелец документа учел его в банке 23.09 по учетной ставке 8%.

Так как оставшийся до погашения обязательства период равен 55 дням, то полученная сумма (без уплаты комиссионных) составит:

$$P = 100000\left(1 - \frac{55}{360} \times 0{,}08\right) = 98777{,}78 \text{ (руб.)},$$

а дисконт равен:

$$D = 100000 - 98777{,}78 = 1222{,}22 \text{ (руб.)}.$$

Подсчитаем годовую доходность операции учета по простой ставке для банка:

$$i = \frac{1222{,}22 \times 360 \times 100}{98777{,}78 \times 55} = 7{,}85\%.$$

Сравнивая эту ставку с доходностями альтернативных вложений, банк может оценить целесообразность проведения подобной операции.

Подытоживая, отметим, что такой известный инструмент денежно-кредитной политики, как *учетная ставка Центрального банка*, используется им по большей части не столько для переучета векселей коммерческих банков, сколько для взыскания с них процентных платежей по предоставленным ссудам. Подобная практика использования учетной ставки, существующая во многих странах, сложилась исторически.

Пример. Кредит в объеме V выдан на срок n под учетную ставку d. Тогда величина погашения

$$S = \frac{V}{(1 - d)^n}.$$

Эквивалентные процентные ставки

Введенные выше процентные ставки (простая, сложная, учетная) являются количественными характеристиками различных финансовых операций. В практической деятельности постоянно возникает потребность в сравнивании между собой по выгодности условий различных финансовых операций и коммерческих сделок. Для этого разнородные и потому несопоставимые ставки по интересующим альтернативным вариантам целесообразно привести к единообразному показателю и, опираясь на его числовые значения, сопоставить имеющиеся варианты.

В основе получения такого показателя лежит понятие **эквивалентной процентной ставки**, то есть такой, которая для рассматриваемой финансовой операции даст точно такой же денежный результат, что и применяемая в этой операции ставка. Таким образом, для отыскания эквивалентной ставки выбранного вида (простой, сложной, учетной) необходимо записать условие эквивалентности использования данной ставки и базовой, которое сводится к равенству наращенных сумм.

Приведем несколько **примеров**.

а) Коммерческий банк учитывает векселя по сложной учетной ставке d. Финансовые аналитики банка оценивают доходность его активных операций по ставке сложного годового процента. В связи с этим требуется оценить доходность банковских учетных операций через эквивалентную ставку i сложного процента.

Вложения банка в операции по учету векселей составят величину $P = S(1 - d)^t$, а его выручка при погашении векселей равна сумме S. Записывая условие эквивалентности $P(1 + i)^t = S$, придем к уравнению $S(1 - d)^t(1 + i)^t = S$. Отсюда $i = \frac{d}{1 - d}$.

б) Пусть P - первоначальная сумма и на нее в течение года начисляются проценты по годовой ставке j, причем число периодов начисления равно m. Полученная при такой, так называемой m-кратной, капитализации сумма на конец года составит величину

$$S = P(1 + j/m)^m. \quad (7)$$

Будучи продолжено на T лет, такое реинвестирование даст результат:

$$Q = P(1 + j/m)^{mT}. \quad (8)$$

В соответствии с определением эквивалентная годовая ставка i сложных процентов по такой возобновляемой на протяжении T лет операции должна удовлетворять равенству:

$$(1 + i)^T = (1 + j/m)^{mT},$$

откуда

$$i = (1 + j/m)^m - 1.$$

Заметим, что рассмотренным здесь ставкам j, i в финансовом анализе соответствуют номинальная и эффективная ставки процентов.

Эффективная ставка

Эффективной ставкой называется годичная ставка сложных процентов, дающая то же соотношение между выданной суммой S(0) и суммой S(T), которая получена при любой схеме выплат.

Общая формула эффективной ставки r_{ef} следует из определения:

$$(1+r_{ef})^T = \frac{S(T)}{S(O)},$$

откуда

$$r_{ef} = \left[\frac{S(T)}{S(O)}\right]^{\frac{1}{T}} - 1, \qquad (9)$$

где T - время (в годах), за которое получен доход.

Пусть выплаты процентов происходят по схеме m-кратной капитализации, рассмотренной в примере б). Приводя в соответствие обозначения, получим S(0) = P, S(T) = Q. Подставляя выражения (7), (8) в формулу (9), найдем зависимость эффективной ставки от номинальной ставки j:

$$r_{ef} = (1 + j/m)^m - 1.$$

Таким образом, эффективная ставка измеряет тот относительный доход, который может быть получен в целом за год, то есть сторонам безразлично - применять ли ставку j при начислении процентов m раз в год или годовую ставку r_{ef}. И та и другая ставка эквивалентны в финансовом отношении.

Иначе говоря, эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает за T лет тот же финансовый результат, что и m-кратное наращение в год по ставке j/m. Заметим, что если T = 1, то эффективная ставка совпадает с простой годовой ставкой, эквивалентной m-кратному реинвестированию при номинальной ставке j.

Примеры

а) Ниже приведена строка эффективных ставок (%) при номинальной ставке j = 120% и для различных периодов реинвестирования, начиная с 7 дней и до полугодия.

Срочность кредита (дней) номинальная ставка (%)	7	14	21	30	90	180
120	228,5	223,2	219,0	213,8	185,6	156,0

Из таблицы видно, как приумножается годовой доход с помощью "челночного" кредитования, когда источником каждого последующего кредита служит возврат по предыдущему. При практической реализации подобных схем эффективные ставки будут ниже. В качестве понижающих причин можно отметить налоги, которые также вовлекаются в реинвестирование, но со знаком минус, а также запаздывание в выдаче очередного кредита относительно погашения предшествующего.

Для иллюстрации оценим действие второго фактора. Обозначим срочность кредита (время, на которое предоставляется кредит) через τ, и пусть Δ - задержка в реинвестировании (в днях). Очевидно, что в этом случае эффективная годовая ставка

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{\tau \times j}{360}\right)^{\frac{360}{(\tau+\Delta)}} - 1.$$

Так, при значении Δ = 2 можно составить следующую таблицу эффективных ставок, скорректированных с учетом фактора запаздывания.

Срочность кредита (дней) номинальная ставка (%)	7	14	21	30	90	180
120	151,6	180,0	189,7	192,9	181,2	154,9

Характер изменения эффективностей, рассчитанных с учетом задержки, обнаруживает "куполообразную" зависимость от срочности τ. Попробуйте дать содержательную интерпретацию этого факта.

б) Выдан кредит в 2 млн. руб. на 3 месяца под 100% годовых.

С учетом того, что такой краткосрочный кредит подразумевает начисления под простые проценты, получаем:

$$S(T) = S(0)\left(1 + \frac{3}{12}\right) = 2{,}5 \text{ млн. руб.}$$

Откуда по формуле (9) при $T = \frac{1}{4}$ определяем эффективную ставку:

$$r_{ef} = \left(\frac{2{,}5}{2{,}0}\right)^4 - 1 = 1{,}443 = 144{,}3\%.$$

в) Вексель на 30 млн. руб. с годовой учетной ставкой 10% и дисконтированием 2 раза в год выдан на 2 года.

В данном случае T = 2, S(T) = 30, а выданная в долг под этот вексель сумма

$$S(0) = 30\left(1 - \frac{0{,}1}{2}\right)^4 = 24{,}4 \text{ млн. руб.}$$

и, следовательно,

$$r_{ef} = \left[\frac{S(T)}{S(0)}\right]^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{(0{,}95)^2} - 1 = 0{,}108 = 10{,}8\%.$$

Расчет эффективной ставки r_{ef} - один из основных инструментов финансового анализа. Его знание позволяет сравнивать между собой сделки, построенные по различным схемам: чем выше эффективная ставка сделки, тем (при прочих равных условиях) она выгоднее для кредитора.

Непрерывное наращение и дисконтирование

При увеличении частоты капитализации m в схеме (7) период начисления становится все меньше и мы все ближе приближаемся к непрерывному наращению процентов - процессу, напоминающему плавное обрастание снежного кома во время зимних забав.

В пределе при m, стремящемся к бесконечности, имеем:

$$S = \lim_{m \to \infty} P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m = P \lim_{m \to \infty}\left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/j}\right)^j.$$

Известно, что $\lim (1 + j/m)^{m/j} = e$, где e - основание натуральных логарифмов ($e \approx 2{,}71$). Отсюда следует, что множитель наращения на единичном периоде равняется степени e^j, а наращенная за T лет сумма

$$S(T) = Pe^{jT}.$$

Итак, при непрерывной капитализации процентов наращенная сумма равна конечной величине, зависящей от исходной суммы, срока наращения и номинальной ставки процентов. Для того чтобы отличить ставку непрерывных процентов от ставки дискретных процентов, обозначим первую через δ, тогда

$$S(t) = Pe^{\delta t},$$

где t - непрерывное время.

Современную величину платежа при условии, что дисконтирование проводится по непрерывным процентам, определим, решив последнее уравнение относительно P:

$$P = S(t)e^{-\delta t}.$$

Отношение скорости роста суммы S(t) к ее текущему значению называется ***силой роста*** (force of interest) (в терминах динамического анализа - *темпом прироста*).

Очевидно, что эта величина совпадает с непрерывной ставкой и, кроме того, является производной натурального логарифма изменяющейся суммы S(t):

$$\delta = \frac{dS}{dt}\Big/S(t) = \frac{d}{dt}\left[\ln S(t)\right].$$

Правилу начисления по непрерывной ставке отвечает такое изменение наращиваемой суммы S(t), при котором ее "привес" - процентные деньги - за малый промежуток Δt будет пропорционален длине этого промежутка и денежной сумме на его начало, причем с коэффициентом пропорциональности, равным силе роста δ:

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \delta S(t)\Delta t.$$

Отсюда предельным переходом при $\Delta t \to 0$ придем к простейшему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dS}{dt} = \delta S(t)$$

с начальным условием $S(0) = S_0$.

Интегрируя его, получим то же решение:

$$S(t) = S_0 e^{\delta t},$$

что и в результате предельного перехода в формуле (7) при $m \to \infty$ и значении $P = S_0$. Таким образом, для непрерывных процентов множители наращения и дисконтирующий будут соответственно равны:

$$M(t,\delta) = e^{\delta t}, \; D(t,\delta) = e^{-\delta t}.$$

Пример. Допустим, что ставка непрерывных процентов увеличивается во времени с постоянным темпом прироста γ, то есть ее динамика описывается функцией времени $\delta(t) = \delta_0 e^{\gamma t}$. Тогда

$$\frac{dS}{dt} = \delta_0 e^{\gamma t} S(t).$$

Разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{dS}{S} = \delta_0 e^{\gamma t} dt,$$

откуда

$$\ln S(t) = \int_0^t \delta_0 e^{\gamma t} dt = \frac{\delta_0}{\gamma}(e^{\gamma t} - 1)$$

и, следовательно,

$$S(t) = S_0 e^{\frac{\delta_0 (e^{\gamma t} - 1)}{\gamma}}.$$

Найдем эффективную ставку, эквивалентную непрерывному наращению с постоянной силой роста δ. Воспользовавшись определением эффективной ставки (9), получим, что

$$r_{ef} = \left(\frac{Pe^{\delta t}}{P}\right)^{\frac{1}{T}} - 1 = e^{\delta} - 1.$$

Откуда следует такое простое соответствие между силой роста δ и годовой ставкой r_{ef}:

$$\delta = \ln(1 + r_{ef}).$$

Таким образом, при малых δ (до 10%) эффективная ставка и сила роста совпадают с точностью до 0,01:

$$r_{ef} = e^{\delta} - 1 \approx (1 + \delta) - 1 = \delta.$$

И наоборот, при достаточно малых r_{ef} капитализацию удобно моделировать экспоненциальным ростом со ставкой непрерывного процента $\delta \approx r_{ef}$.

Установленная взаимосвязь дискретной и непрерывной ставок ($r_{ef} \approx \delta$) позволяет использовать в практических вычислениях схему непрерывного наращения вместо более громоздких и менее наглядных формул дискретной капитализации

В самом деле, если за период оценивания работы финансового учреждения платежи поступают и изымаются многократно, удобно предположить, что накапливаемые суммы меняются во времени непрерывно, и применить для расчетов определенную выше экспоненциальную зависимость.

Вместе с тем прикладные возможности рассмотренных здесь моделей (непрерывные проценты) не исчерпываются практическими приложениями, а реализуются, прежде всего, в задачах теоретического анализа, в том числе для описания процессов финансовой и экономической динамики. Мы еще к этому вернемся (ч. II), когда будем изучать один из наиболее сложных разделов теории фондового рынка: проблему рационального назначения премии за опцион.

Учет инфляции

Идею учета инфляционного фактора поясним, опираясь на простую ситуацию выдачи годового кредита. Пусть кредитор желает получить i_r процентов на ссужаемую им сумму P.

При инфляции деньги обесцениваются, и поэтому реальный эквивалент наращиваемой за год суммы $S = P(1 + i)$ составит величину:

$$S_r = P\frac{(1+i)}{(1+r)},$$

где r - годовой темп инфляции.

В результате реальная ставка процентов составит:

$$i_r = \frac{S_r - P}{P} = \frac{i - r}{1 + r}. \qquad (10)$$

При достаточно большом r ставка процентов i_r может стать даже отрицательной. Отсюда видно, что, если кредитор не отреагирует на инфляцию достаточным увеличением ставки, он будет работать себе в убыток, а заемщик при этом будет незаслуженно обогащаться. Чтобы выравнить условия, следует скомпенсировать обесценивающее влияние индекса цен $\rho = 1 + r$. Этого можно достичь, опираясь на наращение по ставке j, определяемой из условия:

$$(1 + j) = (1 + i)(1 + r),$$

то есть

$$j = i + r + ir. \qquad (11)$$

Полагая в (10) $i = j$, получим, что $i_r = i$. Таким образом, используя скорректированную ставку (11), кредитор получит реальный процент, равный тому доходу, который бы он имел в условиях без инфляции.

При невысокой инфляции величины i и r незначительны, и их произведением в формуле (11) можно пренебречь. В этом случае поправка на инфляцию ограничивается величиной темпа r, и ставку корректируют по формуле $j = i + r$.

Правило величины 70. Вы можете воспользоваться этим правилом и получить представление о силе инфляционного процесса через такую его наглядную характеристику, как период удвоения цен. Чтобы вывести это правило, запишем уравнение ценовой динамики. Очевидно, что при сохраняющемся темпе инфляции (темпе прироста цен)

$$r = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t},$$

и цена будет изменяться по сложным процентам:

$$P_t = P_0(1 + r)^t.$$

Отсюда можно записать уравнение относительно срока T двойного удорожания ($P_T = 2P_0$):

$$2P_0 = P_0(1 + r)^T.$$

Воспользуемся теперь известным из математического анализа предельным соотношением, которое лежит в основе всех приложений числа e:

$$e = \lim_{\alpha \to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Для этого перепишем исходное уравнение в виде:

$$2 = \left((1 + r)^{\frac{1}{r}}\right)^{rT}$$

или, при достаточно малых значениях r,

$$2 \approx e^{rT}.$$

Тогда в качестве приближенной оценки можно принять значение:

$$T = \frac{\ln 2}{r} = \frac{100 \ln 2}{r\%},$$

где $r\% = 100r$ - темп инфляции, выраженный в процентах.

Число $\ln 2 \approx 0{,}693$, поэтому числитель $100 \ln 2 \approx 69{,}3$, и его для простоты расчетов удобно заменить на число 70. В результате придем к известному из учёбников по экономике правилу 70:

$T = 70/\text{темп инфляции (в \%)} = 70/r\%$.

Ниже приведена "декоративная" выборка расчетных данных, подтверждающая работоспособность этого метода.

Темп инфляции - r%	1	3	6	10	15	20	30	40
T - точное $T = \frac{\ln 2}{\ln(1 + \frac{1}{100})}$	69,66	23,45	11,90	7,27	4,96	3,80	2,64	2,06
T - прибл. $T = \frac{70}{r\%}$	70,00	23,33	11,67	7,00	4,67	3,50	2,33	1,75

При высоких годовых темпах инфляции правило 70 перестает действовать. Тем не менее и в этом случае можно воспользоваться приближенными расчетами, но уже с более короткими периодами начисления r.

Пример. Предположим, что некая страна А испытывает гиперинфляцию, которая предвещает 100-кратный рост цен на конец года ($r_{год}$ = 10000%). В данном случае в качестве подходящего допустимо взять показатель недельной инфляции r = 10%, которому отвечает приближенная оценка T ≈ 7 недель = = 49 дней.

Сопоставляя этот прогноз с табличными данными, можно убедиться, что его расхождение от точного срока T = 7,27 дает не более двух дней.

Пример. В таблице даны индексы цен по годам, приведенные к их началу.

Год	1	2	3	4
Индекс цен	100,00	112,00	123,00	129,00

Используя "правило величины 70", определите количество лет, необходимых для удвоения уровня цен (в качестве знаменателя последовательно принимайте темпы инфляции для каждого года).

Вместо подсказки выполним это задание с точки зрения экономики третьего года. Инфляция в этом году достигнет величины:

$$r = \frac{(129-123)}{123} 100\% \approx 4{,}88\%.$$

Таким образом, ожидаемое удвоение произойдет через время:

$$T = \frac{70}{4{,}88} \approx 14,$$

то есть придется на начало 17-го года.

Легко понять, что установленный принцип применим также и для "минусового" случая, когда сложный процент уменьшает величину анализируемой характеристики.

Пример. Допустим, что экономика некоторого государства В находится на спаде: ежегодное производство валового национального продукта снижается с темпом антиприроста d = 14%. Тогда, опираясь на правило 70, можно оценить "горизонт" 50%-го сокращения общественного производства, то есть период полураспада экономики. Для наших данных эта величина равно:

$$T = \frac{70}{14},$$ то есть пяти годам.

1.2. *Потоки платежей*

Основные понятия

Поток платежей - это множество распределенных во времени выплат и поступлений. Учтем направленность платежа, используя ***положительные*** *величины для поступлений* и соответственно ***отрицательные*** *- для выплат.* Согласно принятой знаковой формализации двусторонний поток удобно представлять в виде графической схемы.

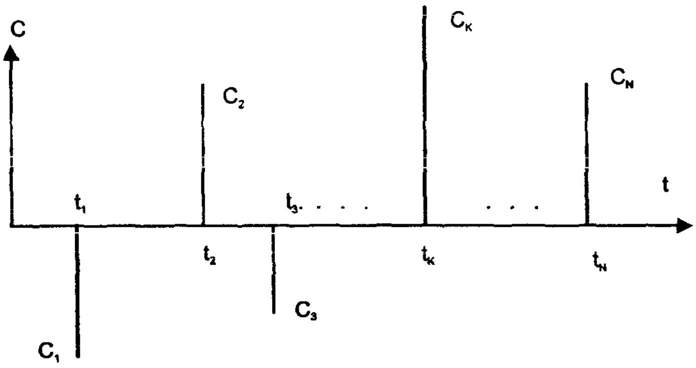


Рис. 2. **Двусторонний поток платежей**

Потоки платежей являются неотъемлемой частью всевозможных сделок на финансовом рынке: с кредитами, ценными бумагами, а также при управлении финансами предприятий, осуществлении инвестиционных проектов и во многих других задачах экономической теории и практики. Примерами потоков могут служить:

- поступающие в Пенсионный фонд взносы;
- календарь "порционной" выдачи кредита и погашений по нему;
- купонные выплаты владельцам облигаций;
- растянутые во времени инвестиции в проект и доходы от его реализации и т. д.

Заинтересованные в платежах стороны преследуют определенные цели, успешность в достижении которых, помимо прочего, зависит от размеров платежей и времени их поступления, то есть от параметров потока $\{C_i, t_i, N\}$ (рис. 2).

Получатели доходов стремятся к их увеличению и оценивают свой успех суммарным доходом, заработанным за полный срок действия платежей, - t_N. Разумеется, что с учетом временной неравноценности денег они не ограничиваются простой алгебраической суммой всех платежей, а оценивают их как взвешенную сумму, где весами являются множители наращения каждого платежа на определенную дату в будущем, например t_N.

Вопрос о выборе ставки начисления процентов, входящей в весовые коэффициенты, решается в зависимости от имеющихся альтернатив использования денежного капитала, например - внесение средств на депозит банка по ссудному проценту r. Ввиду однозначной математической связи наращения с дисконтированием за базовую оценку потока платежей можно принять и алгебраическую сумму дисконтированных платежей на какой-либо прошлый момент.

В финансовом анализе эти обобщенные характеристики (оценки) последовательности платежей называются ***наращенной суммой (S)*** и ***современной величиной*** (текущей или приведенной стоимостью) ***потока (A)***.

Их числовые значения дают будущий и соответственно упреждающий финансовые эквиваленты распределенного потока платежей. Можно сказать, что чистая приведенная величина равна той денежной массе, которая, будучи положена на депозит в банке по ставке r, вырастет к назначенной дате до величины суммы, наращенной по всему потоку и на ту же дату.

В качестве еще одной обобщающей характеристики остановимся на ***показателе внутренней нормы доходности (q)***. Содержательно этой характеристике отвечает такое значение ставки процента, при котором наращенная сумма потока затрат в точности совпадает с наращенной суммой от потока поступлений, иначе говоря, эта ставка характеризует эффективность, с которой используются расходуемые средства. Отсюда, в частности, следует, что, дисконтируя или начисляя по данной ставке, мы придем к нулевым значениям как приведенной, так, естественно, и наращенной характеристик.

Эти условия одновременно служат и уравнением для отыскания обсуждаемого показателя. Приведем элементарный пример. Пусть поток состоит из двух членов: выплаты, равной ($-S_0$), и поступления ($+S_T$). Тогда уравнение относительно внутренней нормы доходности q примет вид:

$$-S_0(1+q)^T + S_T = 0,$$

откуда

$$q = \left[\frac{S_T}{S_0}\right]^{\frac{1}{T}} - 1.$$

Видно, что в этом частном случае внутренняя доходность совпадает с эффективной ставкой процента, как она была определена формулой (9).

Основываясь на введенных определениях, легко понять, что с позиции получателя доходов потоковая ситуация тем лучше, чем выше значение ее обобщенных характеристик: чистого приведенного дохода, наращенной суммы, внутренней нормы доходности.

Рассматриваемые в финансовом анализе потоки платежей весьма разнообразны: сроки выплат, да и сами выплаты могут быть детерминированными величинами, но могут иметь и вероятностный характер. Так, например, в отличие от владельца облигации с фиксированной купонной ставкой акционер, оценивая свои шансы на будущие доходы, располагает лишь предположительными суждениями о дивидендах.

В настоящей главе мы ограничимся детерминированным случаем, который присущ анализу потоков платежей *в условиях определенности*.

При полной определенности платежи задаются фиксированными значениями выплат C_i и моментов их поступления t_i, $i = \overline{1,N}$. Этих данных достаточно для расчета основных системных параметров: S, A, q. Однако могут возникнуть случаи, когда заданными являются обобщенные характеристики и неполный набор параметров потока. В таких случаях может потребоваться найти недостающие параметры или параметр.

Ниже даются примеры решения подобных задач для некоторых типовых потоков. Ввиду того, что задачи на отыскание потоковых параметров носят единообразный характер и по существу базируются на элементарных основах, автор намеренно ограничил состав примеров, оставляя читателю возможные частные случаи и обобщения для самостоятельных упражнений или работы с литературой.

Финансовые ренты

Финансовая рента или ***аннуитет*** - это частный случай потока платежей, все члены которого - положительные величины, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны.

а) Общая постоянная рента. Такой рентой называется последовательность p одинаковых выплат на протяжении года в течение всего срока ренты n (число лет) с m-разовым ежегодным начислением процентов по одной и той же годовой ставке i (десятичная дробь).

При годовой сумме платежа R отдельные платежи $\frac{R}{p}$ следуют в конце каждого периода длительности $\frac{1}{p}$. На эти поступления наращиваются сложные проценты по ставке i/m столько раз, сколько периодов длины $\frac{1}{m}$ укладывается в течение оставшегося срока ренты. Очевидно, что k-й платеж отстоит от даты завершения n на расстоянии $\left(n-\frac{k}{p}\right)$ лет. Поэтому на него будет произведено $\left(n-\frac{k}{p}\right)m$ процентных начислении и его частичный вклад в наращенную сумму потока S составит величину:

$$S_k=\frac{R}{p}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{(np-k)m}{p}}.$$

С учетом того, что общее число платежей за весь срок n равно произведению np, будем иметь

$$S=\sum_{k=1}^{np}S_k=\sum_{k=1}^{np}\frac{R}{p}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{(np-k)m}{p}}.$$

Очевидно, что слагаемые этой суммы, записанные в обратном порядке, следуют в возрастающеи геометрическои прогрессии с первым членом R/p; знаменателем $(1+i/m)^{m/p}$ и числом членов np. Пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии, получим выражение для обобщенной характеристики:

$$S=\frac{R}{p}\times\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \qquad (12)$$

Формулу современной величины потока можно получить аналогичным путем, но уже дисконтируя отдельные платежи с последующим суммированием или, что даст тот же результат, дисконтируя обобщенную характеристику S на начало ренты:

$$A=S\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}=\frac{R}{p}\times\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \qquad (13)$$

Рассматривая в (12), (13) возможные комбинации значений m и p по признаку их совпадения или несовпадения с единицей, придем к современной и наращенной величинам потока для различных частных рент: годовой и p-срочной ($p > 1$), с однократным или m-кратным ($m > 1$) начислением процентов.

По мнению автора, для овладения методами финансовой арифметики первостепенное значение приобретает не запоминание отдельных формул, а знание общих принципов, посредством которых эти формулы выводятся. В связи с этим вам рекомендуется найти обобщенные характеристики перечисленных выше потоков непосредственно и проверить ответы на соответствие формулам (12), (13)

Простая годовая рента. Под этой рентой имеется в виду последовательность одинаковых погодовых выплат R в течение всего срока n (число лет) и с одноразовым ежегодным начислением процентов по одной и той же ставке j Пусть момент оценивания современной величины совпадает с началом ренты Численное значение этой характеристики определяется суммой дисконтированных членов ренты, что дает формулу:

$$A = R\gamma + R\gamma^{2} + \quad + R\gamma^{n} = R\gamma\frac{1-\gamma^{n}}{1-\gamma},$$

или, с учетом определения $\gamma = \frac{1}{1+j}$, - равносильное равенство:

$$A = R\frac{1-\gamma^{n}}{j} = R\left[1-(1+j)^{n}\right]/j.$$

Величина $[1 - (1 + j)^{-n}]/j$ обозначается a(n, j) и называется *коэффициентом приведения ренты*. С учетом этого обозначения имеем:

A = Ra(n, j).

Последняя запись совпадает с частным выражением общей формулы (13) при p = m = 1 Начисляя приведенную стоимость A на срок окончания n, найдем, что наращенная сумма простой годовой ренты

$S = A(1 + j)^{n} = R[(1 + j)^{n} - 1]/j$.

Величина $[(1 + j)^{n} - 1]/j$ обозначается s(n, j) и называется *коэффициентом наращения ренты*. С учетом этого обозначения имеем:

S = Rs(n, j).

Величины a(n, j) и s(n, j) связаны очевидным соотношением:

$s(n, j) = a(n, j)(1 + j)^{n}$, или s(n, j) = a(n, j)M(n, j).

Коэффициент наращения s(n, j) показывает, во сколько раз наращенная величина ренты больше ее годового платежа. Аналогичный смысл имеет и коэффициент приведения ренты.

Пример На счет в банке вносится сумма 100 тыс. руб, однако не сразу, а в течение 10 лет равными долями в конце каждого года. Какой будет сумма на счете после 10 лет, если годовая ставка i = 0,04 (4%).

Условиям данного примера соответствует рассмотренный выше наиболее простой случай - годовая рента: каждый год - один взнос и одно начисление. Итоговая величина на счете определяется числовым значением суммы S, полученной сложением накоплений по каждому взносу:

$$S = 10(1+0{,}04)^{9} + 10(1+0{,}04)^{8} + \ldots + 10 = \frac{10\{(1+0{,}04)^{10} - 1\}}{0{,}04} = 120 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Вечная (бессрочная рента). Вечная рента представляется последовательностью платежей, число членов которой не ограничено, - она выплачивается в течение бесконечного числа лет. Вечная рента не является чистой абстракцией и может использоваться для приближенного описания долгосрочных потоков, когда либо период всех выплат достаточно велик, либо не оговариваются какими-либо конкретными сроками прибыль от эксплуатируемого оборудования, выплаты по обязательствам пенсионных фондов, периодические купонные поступления для долгосрочных облигационных займов и т. д.

Современную величину вечной ренты можно определить, суммируя бесконечное число платежей R, дисконтированных на ее начало, или непосредственно из формулы для простой ренты, устремляя число ее членов к бесконечности. Независимо от способа получения приведенная стоимость такой ренты равна:

$$A_{\infty} = \frac{R}{j};$$

при этом, как легко доказывается формально и что следует по существу, ее наращенная сумма будет равна бесконечно большой величине.

Пример. Ставка процента выросла с 8 до 10%. Как это повлияло на капитал держателя бессрочной ценной бумаги, которая приносит ему ежегодно годовой доход в 100 долл.

Данная облигация обеспечивает своего владельца вечной рентой с последовательными выплатами в 100 долл. Для него это равносильно обладанию капиталом в размере:

$$K_1 = \frac{100}{0{,}08} = 1250 \text{ долл.}$$

при 8%-й ставке и соответственно -

$$K_2 = \frac{100}{0{,}01} = 1000 \text{ долл.}$$

при увеличении ставки до 10%.

Сравнивая, видим, что подъем процентной ставки приводит к снижению "равносильного" капитала:

$\Delta = 1250 - 1000 = 250$ долл.

Замечание. Выше показатели S, A получались сложением наращенных или дисконтированных значений по каждому индивидуальному платежу на "концевую" дату (либо на начало, либо на конец рассматриваемого периода). Как следует из содержания этих показателей, их можно вычислить также последовательным присоединением промежуточных результатов наращивания (соответственно дисконтирования) на дату очередного платежа и т. д. Для пояснения рассмотрим годовую ренту с членом R и ставкой начисления i. Тогда второму способу отвечает следующий ход рассуждений.

В конце первого года имеем поступление $S_1 = R$. В конце второго года на него начислятся проценты и добавится очередной платеж: $S_2 = R(1 + i) + R$. В конце третьего года начисление по первым трем платежам даст результат $S_3 = [R \times (1 + i) + R](1 + i) + R$ и т. д. вплоть до $S = S_n = S_{n-1}(1 + i) + R$.

б) Переменная рента. К этому типу относятся финансовые ренты, элементы которых изменяются в соответствии с каким-либо заданным правилом. Ограничимся рассмотрением ***двух типов*** переменной годовой ренты (выплаты в конце года): *с постоянным абсолютным* **a** и *с постоянным относительным* **q** приростами платежей.

1) Для ***первого типа*** последовательность платежей образует арифметическую прогрессию и n-й платеж $R_n = R_1 + (n - 1)a$. Дисконтируя на начало срока ренты, найдем современную величину:

$$A = R_1\gamma + (R_1 + a)\gamma^2 + ... + [(R_1 + (n - 1)a]\gamma^n, \tag{14}$$

где n - срок ренты, а дисконтный множитель $\gamma = \frac{1}{(1+i)}$.

Разделим равенство (14) на γ и запишем результат в виде следующего выражения:

$$A(1 + i) = R_1(1 + \gamma + ... + \gamma^{n-1}) + a\gamma + 2a\gamma^2 + ... + (n - 1)a\gamma^{n-1}.$$

Вычитая из обеих его частей соответствующие части формулы (14), имеем:

$$Ai = R_1(1 - \gamma^n) + a\gamma\frac{(1 - \gamma^n)}{1 - \gamma} - na\gamma^n$$

или, несколько преобразовав это выражение, найдем:

$$A = \left(R_1 + \frac{a}{i}\right)\frac{(1 - \gamma^n)}{i} - \frac{na\gamma^n}{i}.$$

Нетрудно понять, что здесь уменьшаемое

$$A^* = \left(R_1 + \frac{a}{i}\right)(\gamma^1 + \gamma^2 + ... + \gamma^n),$$

то есть дает современную величину постоянной ренты с членом $R_1 + \frac{a}{i}$.

Очевидно, что

$$S = A(1 + i)^n = \left(R_1 + \frac{a}{i}\right)\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right] - \frac{na}{i}.$$

Таким образом, для ренты, у которой размеры платежей образуют арифметическую прогрессию, эта характеристика совпадает с наращением для постоянной ренты с платежом, равным $R_1 + \frac{a}{i}$, за вычетом поправки, пропорциональной разности прогрессии.

Покажем, что те же формулы можно получить, основываясь на финансовых рассуждениях и применяя понятие бессрочной ренты Для этого составим портфель из n таких рент с одинаковыми платежами a и последовательно сдвинутыми началами, считая с k = 2 и до k = n + 1. Соответствующий этому портфелю финансовый поток имеет вид последовательности платежей, показанной на рис. 3.

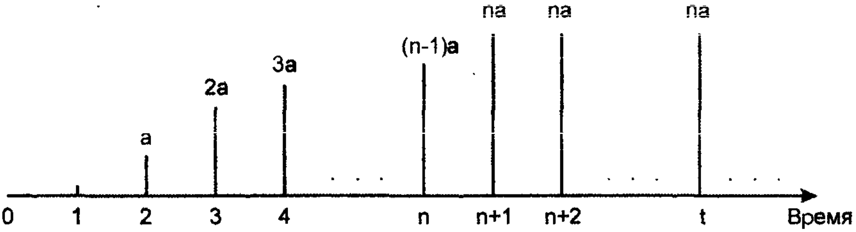


***Рис. 3.* Генерируемый портфелем финансовый поток**

Каждую входящую в портфель ренту с номером k можно заменить приведенной на предшествующий ее началу момент стоимостью $A_{k-1} = \frac{a}{i}$, k = 2, ... n + 1. В результате придем к рис. 4, на котором представлена эквивалентная финансовому потоку (рис. 3) последовательность платежей $\{A_{k-1}\}$.

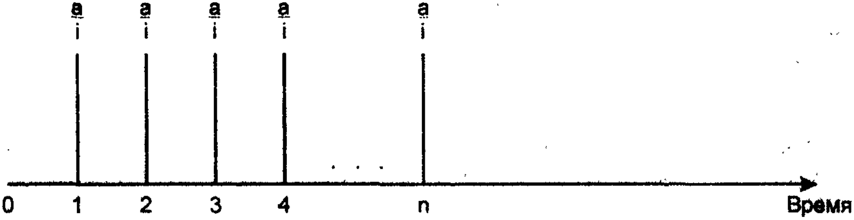


***Рис. 4.* Финансово-эквивалентная "портфелю" рента**

Напомним, что мы хотим получить приведенную стоимость укороченной по отношению к рис. 3 совокупности, составленной из платежей a, 2a, ..., (n - 1)a. Очевидно, что относительно этой части наведенный поток, изображенный на рис. 4, вбирает в себя излишек, порождаемый "оперением" {na, na, ...}. Современная величина этого добавка как раз совпадает с поправочным членом $\frac{na\gamma^n}{i}$ доказываемой формулы, а ее слагаемое $\frac{a}{i}\frac{(1-\gamma^n)}{i}$ равно приведенной стоимости финансовой ренты рис. 4.

Пример. Приведем задачу, основанную на ренте рассмотренного типа и имеющую "глубокий" деловой смысл. Когда-то эта задача предлагалась читателям "Экспресс-газеты" и никого не оставила равнодушным.

Однажды босс, будучи в хорошем расположении духа, сказал своей секретарше.

- Учитывая, что вы никогда не берете отпусков, я решил каждый год увеличивать вашу зарплату на 100 долл. С сегодняшнего дня в течение ближайшего года вы будете получать зарплату из расчета 600 долл. в год; в следующем году ваша зарплата составит 700 долл.; в следующем - 800 и т. д., то есть через каждый год она будет возрастать на 100 долл.

- Мое слабое сердце, - ответила секретарша, - не выдержит столь резких изменений. Пусть начиная с этого дня, зарплата мне, как вы и сказали, выплачивается из расчета 600 долл. в год, но пусть в конце шестого месяца моя годовая зарплата увеличится на 25 долл. и продолжает возрастать на 25 долл. через каждые шесть месяцев, до тех пор пока моя работа будет вас удовлетворять.

Босс милостиво улыбнулся своей преданной секретарше и согласился на ее вариант, но блеск его глаз побудил одного из сотрудников подсчитать, мудро ли он поступил, приняв предложение своей служащей.

А как считаете вы?

2) Пусть платежи характеризуются постоянным относительным приростом, то есть

$$\frac{R_t - R_{t-1}}{R_t} = k\ ;\ t = 2,\ 3,\ ...,\ n.$$

Тогда их дисконтированные значения образуют геометрическую прогрессию с первым членом $R_1\gamma$, знаменателем $q = (1 + k)\gamma$ и числом членов n. Сумма этих величин, очевидно, равна приведенной стоимости потока:

$$A = R_1\gamma\frac{(1+k)^n\gamma^n - 1}{(1+k)\gamma - 1} = R_1\frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k}.$$

Отсюда найдем характеристику

$$S = A(1+i)^n = R_1[(1+i)^n - (1+k)^n]/(i-k).$$

Пример. Предположим, что темп прироста совпадает со ставкой дисконтирования, то есть $R_t = R_1(1+i)^{t-1}$, $t = 1,n$. В этом случае приведенные стоимости всех разновременных платежей будут равны одной и той же величине $R_t\gamma^t = \frac{R_1}{1+i}$, которой отвечает современная величина всего потока:

$$A = \frac{nR_1}{1+i}.$$

Это же значение получится и из приведенной выше общей формулы с помощью раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ по правилу Лопиталя:

$$\lim_{k \to i} R_1 \frac{1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k} = \frac{R_1}{(1+i)^n} \lim_{k \to i} n(1+k)^{n-1} = \frac{R_1 n}{1+i}.$$

Нерегулярные потоки платежей

Они характеризуются присутствием хотя бы одной нерегулярной составляющей: временные интервалы между соседними выплатами могут быть любыми; размеры поступлений могут быть любыми.

Для получения их обобщающих характеристик требуется прямой счет, который предусматривает вычисление соответствующей характеристики отдельно по каждому платежу с последующим суммированием. При начислении процентов раз в году он сводится к отысканию следующих сумм:

$$S = \sum_t R_t(1+i)^{n-t}, \quad A = \sum_t R_t\gamma^t. \tag{15}$$

Заметим, что методы финансового анализа могут оказаться полезными в, казалось бы, далеких от его предназначения задачах. Характерным признаком таких возможностей является наличие потоковых величин, пусть даже и "некоммерческого" происхождения. В качестве иллюстрации покажем, как можно получить формулу цены многопередельного продукта с помощью наращенной суммы с переменной ставкой начисления процентов.

Пример. Рассмотрим цепочку взаимодействующих и технологически сопряженных производств. Допустимо принять, что в условиях свободной продажи каждый производитель руководствуется принципом ценообразования по себестоимости: $p = (1 + \alpha)\ C$, где p - цена, C - себестоимость, α - рентабельность, на которую ориентируется продавец. Себестоимость j-го промежуточного продукта складывается из себестоимости C_j^+, добавленной на j-й стадии технологического цикла, и стоимости потребленной в j-м звене продукции предыдущего передела.

Очевидно, что формула "звенного" ценообразования в подобной технологической цепочке совпадает с результатом разовой капитализации вклада по ставке α. Легко понять, что для данной цепной структуры цена конечного продукта P равна наращенной сумме потока платежей C_j по ставкам начисления α_j на единичных интервалах $[i, j+1], j = \overline{1,n}$ (рис. 5).

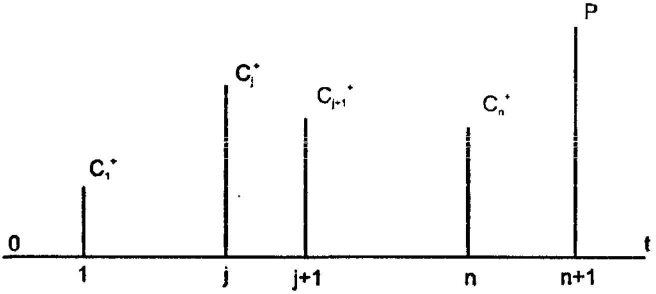


Рис. 5. **Ценообразующий поток платежей**

Отсюда имеем:

$$P = C_1^+\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i) + C_2^+\prod_{i=2}^{n}(1+\alpha_i) + \ldots + C_n^+(1+\alpha_n) = \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=j}^{n}(1+\alpha_i)C_j^+$$

1.3. Финансовая эквивалентность обязательств

Различные финансовые схемы можно считать эквивалентными в том случае, если они приводят к одному и тому же финансовому результату. В условиях определенности, когда все фигурирующие величины рассматриваются как детерминированные, финансовая эквивалентность сводится к соблюдению требования получить по разным финансовым операциям одинаковые денежные результаты.

С этой целью все платежи по сравниваемым вариантам приводят к одному и тому же моменту в прошлом, будущем или на промежуточную дату, что удобнее. Равенство приведенных величин фактически свидетельствует о безубыточности вносимых изменений для финансовых отношений участников или равновыгодности сравниваемых схем с позиции одного из участников, например инвестора.

При действии *стохастических факторов*, когда параметры финансовой операции и ее результаты могут меняться случайным образом, понятие эквивалентности существенно усложняется и рассматриваться здесь не будет.

Принцип эквивалентности лежит в основе многих финансовых расчетов долгосрочного и кратковременного характера. Он применяется при различного рода изменениях условий контрактов: их объединении, замене, досрочном погашении или, наоборот, пролонгировании сроков платежей и т. д. ***Общий метод решения подобных задач заключается в разра-***

ботке так называемого уравнения эквивалентности, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо одному моменту времени, приравнена сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате.

В заключение дадим несколько **примеров** на использование введенного здесь понятия.

а) Ранее в разделе эквивалентных ставок были найдены равносильные сложная процентная и учетная ставки. Очевидно, что тот же результат можно вывести и из уравнения эквивалентности, которое в данном случае имеет вид:

$$P = S(1 - d)^{t} = S(1 + i)^{-t}$$

б) ***Консолидирование задолженности***. Пусть платежи S_1, S_2, ..., S_m имеют сроки n_1, n_2, ..., n_m и объединены в одну сумму S_0 со сроком n_0.

Причем, если задан срок уплаты, то определяется S_0, и, наоборот, если задана величина уплаты, то находим n_0. И в том и в другом случае задача состоит в том, чтобы определить разовый платеж (S_0, n_0), финансово-эквивалентный потоку платежей $\{S_i, i = \overline{1,m}\}$.

Условие эквивалентности для решения этих задач получается уравниванием современной стоимости потока $\{S_i, i = \overline{1,m}\}$ с дисконтированной на ту же дату величиной платежа S_0. В зависимости от соотношения сроков n_m и n_0 (позже - раньше) можно, кроме того, воспользоваться равенством наращенных сумм ($n_0 > n_m$) или комбинированным вариантом дисконтирований будущих и наращений прошлых относительно n_0 значений $\{S_i\}$ ($n_0 < n_m$). Например, для консолидации по сложным процентам и при смешанном приведении платежей ($n_0 < n_m$) уравнение эквивалентности имеет вид:

$$S_0 = \sum_j S_j(1+i)^{t_j} + \sum_k S_k(1+i)^{-t_k},$$

где S_j, S_k - суммы объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$ и соответственно $n_k > n_0$; $t_j = n_0 - n_j$; $t_k = n_k - n_0$.

Пример. Поток платежей представляет собой годовую ренту сроком *m* и размером платежа R. Требуется заменить этот поток финансово-эквивалентной разовой выплатой.

1) Пусть задан срок выплаты: она производится с запаздыванием в один год, то есть $n_0 = m + 1$. Найти размер выплаты.

Для этой задачи уравнение эквивалентности имеет вид:

$S_0(1 + i)^{-1} = S$,

где $S = R\dfrac{(1+i)^m - 1}{i}$ - наращенная сумма ренты.

2) Пусть, наоборот, задана величина консолидирующей выплаты. Положим, для определенности, что она равна сумме всех членов ренты: $S_0 = mR$. Определим ее срок.

Понятно, что при выбранном размере заменяющего платежа его срок n_0 должен предшествовать времени окончания ренты m: $n_0 < m$ и является решением следующего уравнения эквивалентности:

$$mR(1+i)^{m-n_0} = S \cdot$$

в) *Консолидация на основе учетной ставки.* Два векселя со сроками 10.06 (10 тыс. руб.) и 01.08 (20 тыс. руб.) заменяются одним с продлением срока до 01.10. При объединении векселей применена простая учетная ставка 8%. Сроки пролонгации составят 113 и 61 день. Найти сумму S_0 нового векселя.

Заметим, что учетные ставки могут быть применимы и при расчете наращенной суммы: $S = P\dfrac{1}{1-nd}$. Это следует хотя бы из условия эквивалентности ставки простого процента i, при которой

$$S(1 - nd) = S(1 + ni)^{-1}.$$

Приравнивая наращенную сумму вексельных выплат заменяющему их платежу, найдем этот платеж:

$$S_0 = 10\left(1 - \frac{113}{360}0{,}08\right)^{-1} + 20\left(1 - \frac{61}{360}0{,}08\right)^{-1} = 30{,}532 \text{ (тыс. руб.).}$$

Заметим, что для сложных процентов уравнения эквивалентности дают одинаковые результаты независимо от используемой для приведения платежных потоков даты. В случае простого процента это не так, однако при достаточно малых уровнях ставки результаты получаются близкими. Поясним это с помощью рассмотренной выше задачи об объединении векселей.

г) Нойдем сумму S_0 нового векселя, опираясь на условие эквивалентности, полученное не по наращенной, как в примере в), сумме, а по текущим стоимостям на самую раннюю дату (10.06):

$$10 + 20\left(1 - \frac{52}{360}0{,}08\right) = S_0\left(1 - \frac{113}{360}0{,}08\right)$$

или

$$10\left(1 - \frac{113}{360}0{,}08\right)^{-1} + 20\left(1 - \frac{52}{360}0{,}08\right)\left(1 - \frac{113}{360}0{,}08\right)^{-1} = S_0 \cdot$$

Расхождение этого значения от оценки примера (в) определяется разностью:

$$\Delta = 20\left[\left(1 - \frac{52}{360}0{,}08\right)\left(1 - \frac{113}{360}0{,}08\right)^{-1} - \left(1 - \frac{61}{360}0{,}08\right)^{-1}\right].$$

Поскольку

$$\left(1 - \frac{52}{360}0{,}08\right)\left(1 - \frac{61}{360}0{,}08\right) = 1 - \frac{52 + 61}{360}0{,}08 + \frac{52 \times 61}{360 \times 360}(0{,}08)^2 \approx 1 - \frac{113}{360}0{,}08,$$

то эта разность (Δ) близка к нулю и, следовательно, результаты практически не зависят от того, строилось ли условие эквивалентности по наращению процентов или по их удержанию.

Расчеты показывают, что в последнем случае итоговое уравнение имеет вид:

$$10 + 20 \times 0{,}9884 = S_0 \times 0{,}9749$$

с решением $S_0 = 30{,}531$, то есть тем же, что и в ответе примера в).

Определение первичных параметров финансовых рент

К ***первичным*** относятся следующие параметры ренты: размеры платежей, моменты выплат, срок окончания. В этом смысле обобщенные показатели A, S и внутреннюю норму доходности q можно отнести к ***вторичным*** параметрам. Задачи на вычисление первичных характеристик относятся к проблеме выбора потока платежей, дающего требуемые финансовые результаты.

Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу построения такой годовой ренты, наращенная сумма которой совпадает с величиной процентов по данному обязательству.

Нетрудно убедиться, что для определения члена ренты R следует воспользоваться следующим уравнением:

$$R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = P\left[(1+i)^n - 1\right],$$

где слева стоит наращенная суммв, а справа - процентные деньги; P - сумма основного долга, n - срок обязательства, i - ставка процента по обязательству. Таким образом, разовую выплату процентов в конце срока можно заменить ежегодными погашениями в размере R = Pi.

Задача. Сумма инвестиций, осуществленных за счет привлеченных средств, равна 100 млн. руб. Предполагается, что отдача от них составит 20 млн. руб. ежегодно. За какой срок окупятся инвестиции, если на долг начисляются проценты по ставке i = 0,1.

Здесь поток поступлений представляет собой годовую ренту с членом R = 20. Определяемым параметром этой ренты является срок n, достаточный для погашения задолженности из наращенной суммы ренты.

Уравнение для отыскания n получим, приравнивая наращенные суммы или современные величины долга и ренты.

При использовании наращений будем иметь:

$$100(1 + 0,1)^n = \frac{20[(1 + 0,1)^n - 1]}{0,1},$$

откуда

$$n = \frac{\ln 2}{\ln 1,1} \approx 7,3 \text{ (года).}$$

Глава 2

Типовые приложения

Ниже даются примеры разных приложений из области кредитов, инвестиций и ценных бумаг. При этом мы ограничимся пока только *детерминированными постановками*, то есть случаями, для которых напрямую применимы изложенные ранее методы. Понятно, что в реальной действительности исходные данные в значительной мере случайны (курсы ценных бумаг, отдача инвестиций, процентные ставки и т. д.).

Кроме того, некоторых сведений может просто и не быть. При такой недостаточности информации говорят, что анализ и разработка финансовых схем проводятся *в условиях риска и неопределенности*. Для учета подобных условий детерминированного подхода уже недостаточно и приходится прибегать к вероятностным методам.

Вместе с тем методы анализа, ориентированные на полную определенность, во многих практических ситуациях позволяют получить "прикидочные" оценки с помощью простых расчетов. Они используются также для математического описания финансовых операций, проводимых в условиях неопределенности и риска.

В последнем случае первичные параметры полученного описания трактуются уже как случайные величины. Поэтому зависящие от них вторичные переменные, например обобщенные характеристики потоков, будут также случайны. В таких постановках в дополнение к изученным здесь приемам прибегают к вероятностным методам, а в случае оптимизации - к стохастическому программированию и моделям теории игр.

2.1. Кредитные расчеты

Для кредитной схемы в качестве исходных параметров выступают величина займа **D**, срок его погашения **n**, процент по кредиту **i**, под который выдаются деньги, и поток погашающих платежей $\{y_t\}$. В простейшем случае кредит погашается одним платежом в конце срока предоставления, то есть:

$$y_n = D(1 + i)^n. \tag{16}$$

Этот платеж состоит из двух частей: возврата основного долга D и выплаты процентов $I = D(1 + i)^n - D$,

то есть $y_n = D + I$.

В финансовой практике может оказаться, что у кредитора возникает необходимость вернуть часть денег досрочно, а заемщику, в свою очередь, удобнее производить выплаты (основной суммы и процентов по ней) по частям. Причины подобных ситуаций весьма разнообразны и могут быть вызваны как текущими потребностями в ликвидных средствах, так и прогнозируемыми возможностями альтернативных вложений и т. д.

Поэтому кредитор и заемщик зачастую предпочитают выплату не однократную, а в несколько приемов, то есть потоком платежей. В зависимости от преследуемых интересов стороны могут выбирать различные, удобные для них режимы в виде постоянных и переменных финансовых рент, а также нерегулярных потоков платежей.

Если выбор сделан, то планирование кредитной схемы сводится к определению членов ренты при условии равенства ее соответствующей обобщенной характеристики с величиной разового погашения (16) или с размером основного долга D.

В общем случае члены потока погашающих платежей состоят из двух денежных сумм: идущей на покрытие основного долга и выплачиваемой в виде процентов на его остаток, приуроченный к моменту предыдущего платежа:

$$y_t = D_t + I_t, \quad t = \overline{1, n}.$$

Здесь под моментом t подразумевается конец года t, а сумма всех промежуточных возвратов D_t равняется величине займа D:

$$\sum_{t=1}^{n} D_t = D.$$

Планирование в этих параметрах позволяет анализировать различные допустимые варианты финансового обслуживания долга, в том числе и с пропуском по какой-либо причине одной из названных компонент: $D_t I_t = 0$. Так, при разовой выплате долга в конце срока величина $D_n = D$ и поэтому все остальные компоненты долговых взносов отсутствуют: $D_1 = D_2 = ... = D_{n-1} = 0$. Как следствие - остаток долга на начало каждого года ($t = 1, ..., n$) остается неизменным и равным своей первоначальной величине D, а выплаты процентов, начисляемых на равные остатки, будут равны:

$$I_t = iD, \quad t = \overline{1, n}.$$

Понятно, что такая последовательность выплат ($y_t = iD$, $t = \overline{1, n-1}$, $y_n = D + iD$) финансово эквивалентна наращению (16).

Можно показать, что при указанной схеме процентных выплат отмеченный факт имеет место для любой последовательности погашений $\{D_t\}$ долга D такой, что $\sum_{t=1}^{n} D_t = D$.

Для кредита срочности n = 2 это свойство легко устанавливается прямой проверкой. В самом деле, пусть D_1 и D_2 - два произвольных по величине последовательных погашения основного долга D, то есть $D_1 + D_2 = D$. Тогда поток процентных платежей состоит всего из двух выплат: первая $I_1 = iD$ производится по всему долгу D, а вторая $I_2 = i(D - D_1)$ начисляется на его остаток $D - D_1$. Накладываясь, эти долговые выплаты и проценты образуют финансовую ренту из двух срочных уплат $y_1 = D_1 + iD$ и $y_2 = D_2 + i(D - D_1)$. Наращенная сумма такой ренты

$$S = y_1(1 + i) + y_2 = (D_1 + iD)(1 + i) + (D - D_1) + i(D - D_1) = D(1 + i)^2,$$

что совпадает с обслуживанием долга одной уплатой $У_2 = D(1 + i)^2$.

Для доказательства общего случая воспользуемся индукцией. Выделим в потоке погашающих платежей две части: по замыкающему покрытию долга D_n и по остатку $D - D_n$, погашаемому за срок n - 1.

Здесь первая часть вбирает в себя завершающее погашение D_n и последовательные выплаты процентов iD_n. Наращенная сумма такого потока платежей

$$S_n^{(1)} = iD_n(1 + i)^{n-1} + iD_n(1 + i)^{n-2} + ... + iD_n + D_n,$$

что, как легко убедиться, совпадает с формулой сложных процентов:

$$S_n^{(1)} = D_n(1 + i)^n.$$

Для второй части, то есть последовательности долговых уплат $\{D_t, t = \overline{1, n-1}\}$, в силу индукции эквивалентная ей на момент времени (n - 1) величина наращения составит:

$$S_{n-1}^{(2)} = (D - D_n)(1 + i)^{n-1},$$

что в конце года n дает значение:

$$S_n^{(2)} = (D - D_n)(1 + i)^n.$$

Таким образом, полная последовательность платежей $\{D_t, t = \overline{1, n}\}$ порождает наращение:

$$S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} = D(1 + i)^n,$$

что совпадает с условием кредита (16).

Приведем примеры распространенных кредитных схем.

Равные процентные выплаты

Этой схеме отвечает поток срочных уплат $\{y, t = \overline{1, n}\}$, изображенный на рис. 6.

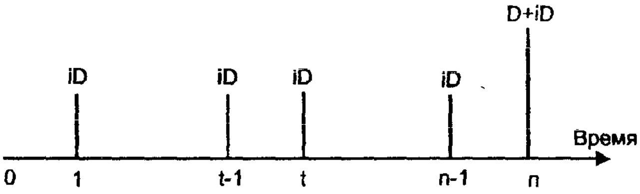


Рис. 6. **Долг погашается разово, проценты - в рассрочку**

Погашение долга равными суммами

Долг делится поровну между всеми ежегодными платежами, то есть $D_t = \frac{D}{n}$, $t = \overline{1,n}$. В этом случае остаток долга, что очевидно, следует арифметической прогрессии с разностью $\left(-\frac{D}{n}\right)$. Из чего вытекает, что выплачиваемые в году t + 1 проценты составят величину

$$I_{t+1} = i\left(D - \frac{D}{n}t\right).$$

Равные срочные выплаты

По этому методу на протяжении всего срока регулярно выплачиваются постоянные срочные уплаты $y_t = y$. Они образуют годовую ренту. Приравняв первоначальную сумму долга D современной величине этой ренты, получим уравнение относительно неизвестной y:

$$y(\gamma + \gamma^2 + ... + \gamma^n) = D,$$

где γ - дисконтный множитель. Откуда найдем размер уплаты

$$y = \frac{iD}{1 - \gamma^n}. \qquad (17)$$

Зная первую процентную выплату $I_1 = iD$ и платеж (17), найдем сумму первого погашения D_1. Это, в свою очередь, дает остаток долга для начисления процентов в следующем году, их величину I_2 и позволит определить платеж $D_2 = y - I_2$ и т. д. Видно, что с течением времени уплаты процентов уменьшаются, поэтому уплаты по долгу растут (так называемое прогрессивное погашение).

Аналогичные рассуждения позволяют найти *рекуррентные связи*, то есть зависимости между последовательными во времени значениями, что удобно для практических расчетов в более общих случаях. Здесь же они позволяют вывести формулы, связывающие текущие выплаты долга и процентов и исходные параметры n, i, D.

Действительно, пусть d_t - остаток долга на начало периода t, $d_1 = D$. Из (17) следует, что $iD = y - y\gamma^n$.

Отсюда получим, что

$$D_1 = y - iD = y\gamma^n, \quad D_2 = y - i(D - D_1) = y - i(D - y\gamma^n) = y\gamma^n + iy\gamma^n = y\gamma^{n-1}$$

и, в чем легко убедиться, $D_t = y\gamma^{n-(t-1)}$.

Из полученного выражения непосредственно следует, что платежи основного долга образуют ряд: D_1, $D_1(1 + i)$, ..., $D_1(1 + i)^{n-1}$, то есть каждый следующий член совпадает с наращением предыдущего.

Напомним, что, как уже отмечалось, все рассмотренные выше схемы приводят к одинаковому финансовому результату.

Формирование фонда

Поток уплат $\{y_t\}$ можно рассматривать как ренту кредитора, по которой он ежегодно начисляет проценты по ставке i и таким образом накапливает к концу срока n причитающуюся ему сумму (16). Очевидно, что накопление этой суммы может производить и заемщик, причем с выгодой для себя, если его ставка начисления j будет выше, то есть $j > i$.

Это достигается с помощью так называемого ***погасительного фонда***. Такой фонд формируется из последовательных взносов (например, на специальном счете в банке), на которые начисляются проценты. Размеры взносов независимо от характера формируемой ими ренты (постоянной, переменной и т. д.) выбираются так, чтобы ее наращенная по ставке j сумма равнялась наращенному долгу (16). Например, для схемы равных процентных выплат (рис. 6) накопление средств в погасительный фонд можно производить путем регулярных ежегодных взносов, таких, что:

$$\frac{R(1+j)^n - 1}{j} = D.$$

В этом случае срочная уплата заемщика (кредитная выплата) в момент t составит величину:

$$y_t = Di + R.$$

Ее часть Di в виде ежегодных процентов идет кредитору, а остаток R поступает в фонд. В конце срока накопленная в фонде сумма D направляется на погашение основного долга.

Наряду с кредитными расчетами, идея фондирования будущих обязательств широко используется во многих областях финансовой практики, в том числе в пенсионных системах, основанных на накопительном принципе.

В свою очередь, многообразие кредитных схем не исчерпывается различными вариантами применения сформулированных выше правил начисления процентов и уравнивания долговых выплат. Объектом соглашения может быть любой нерегулярный поток погашающих платежей - лишь бы он был финансово эквивалентен займу по его величине и сроку.

Пример. Проведем два простых расчета: по типовой схеме погашения долга равными суммами и опираясь только на требование финансовой равносимости. Пусть долг составляет 100 тыс. руб. при 5% годовых и его следует погасить за 5 лет.

Для первого из вариантов сумма погашения займа равна 100 : 5 = 20 тыс. руб. в год, а ежегодные процентные платежи составят 100 × 0,05 = 5 тыс. руб.; (100 - 20)0,05 = 4 тыс. руб. и т. д. Итоговый план обслуживания долга будет выглядеть так.

Год	Остаток долга на начало года	Сумма погашения долга	Выплата процентов	Срочная уппата
1	100	20	5	25
2	80	20	4	24
3	60	20	3	23
4	40	20	2	22
5	20	20	1	21

Предположим, что для второго варианта выплаты планируются в зависимости от прогнозов финансового состояния заемщика и образуют следующую последовательность: $y_1 = 0$; $y_2 = 40$ тыс. руб.; $y_3 = 50$ тыс. руб.; $y_4 = 0$. При этом окончательный расчет подводит завершающий платеж:

$$y_5 = 100 \times (1 + 0{,}05)^5 - [40(1 + 0{,}05)^3 + 50(1 + 0{,}05)^2] = 26{,}198 \text{ тыс. руб.}$$

В результате придем к следующему погашающему задолженность потоку:

Год	1	2	3	4	5
Платеж	-	40	50	-	26,198

Обратим внимание, что рассмотренные методы кредитных расчетов можно применять и для построения схем реструктуризации долга.

Пример. Допустим, что долг растет по закону финансовой пирамиды: каждый раз для его погашения берется новый кредит в объеме накопленной задолженности. В этом простейшем случае динамика долговой пирамиды в зависимости от числа займов t описывается формулой сложных процентов:

$$H_t = V_0(1 + p)^t,$$

где V_0 - первичный заем,

p - кредитная ставка,

H_t - высота пирамиды (накопленный долг).

В качестве схемы реструктуризации долга допустимо принять один из типовых вариантов, например порядок выплат, которому отвечает рис. 6. Тогда при отсрочке погашения на период T придем к потоку реструктуризации, изображенному на рис. 7.

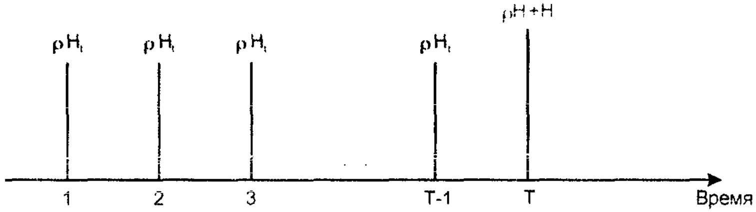


Рис. 7. **Схема реструктуризации равными процентными выплатами**

Заметим, что, несмотря на соблюдение требований финансовой эквивалентности, подобная пролонгация может нарушить платежеспособность кредитора, ухудшив тем самым его финансовое состояние, что само по себе не предвещает ничего хорошего.

2.2. Оценка инвестиционных процессов

Инвестиционный процесс - это последовательность взаимосвязанных инвестиций (вложений денег), растянутых на несколько временных периодов, отдача (доходы) от которых также растянута во времени. В терминах финансового анализа этот процесс характеризуется двусторонним потоком платежей, положительные члены которого соответствуют доходной части. а отрицательные - вложениям, необходимым для осуществления инвестиционного проекта.

Если речь идет о производственных инвестициях, то в большинстве случаев элементы этого потока формируются из показателей чистого дохода и инвестиционных расходов. Под *чистым доходом понимают общий доход (выручку), полученный в каждом временном отрезке, за вычетом всех платежей, связанных с его получением.* В эти платежи входят все действительные расходы (прямые и косвенные) по оплате труда и материалов, а также налоги.

Как мы уже знаем, при анализе подобных потоков широко используются их обобщенные параметры: наращенная сумма S, приведенная стоимость A, внутренняя норма доходности q. Для инвестиционных процессов эти показатели приобретают смысл количественных характеристик для оценки эффективности проектных вложений. Рассмотрим основные из них.

Чистый приведенный доход

В качестве первого измерителя наибольшее распространение получил чистый приведенный доход (net present value, NPV). При помощи данного показателя все доходы E_t и затраты C_t по анализируемому инвестиционному проекту приводятся (путем дисконтирования) к одному моменту времени, и берется их разность. В общем виде это можно записать как алгебраическую сумму:

$$W = \sum R_t \gamma^t, \qquad (18)$$

положительные и отрицательные слагаемые которой соответствуют доходам и капиталовложениям за период t, а γ - дисконтный множитель по ставке сравнения i ($\gamma = \frac{1}{1+i}$).

Содержание показателя W можно раскрыть на следующем **примере**. Пусть капиталовложения полностью осуществляются за счет заемных средств, причем ссуда выдана под ставку i. Наращение процентов на текущий доход также производится по этой ставке. Тогда W представляет собой ожидаемый чистый доход по инвестиционному проекту, приведенный к его началу. В общем случае это означает, что некоторые члены потока платежей

$$R_t = E_t - C_t,$$

то есть в период t наряду с инвестиционными расходами C_t имеет место отдача E_t на более ранние вложения.

Показатель эффективности W характеризует, на сколько приведенный доход перекрывает приведенные затраты, то есть является *абсолютной* характеристикой. Следующий показатель, который мы здесь рассмотрим, определяет, во сколько раз приведенный доход больше приведенных затрат, то есть является относительной характеристикой.

Рентабельность

Как отмечалось, этот показатель представляет собой отношение приведенных доходов к приведенным на эту же дату инвестиционным расходам. Условно будем говорить об этом показателе как о рентабельности и обозначим его через U:

$$U = \frac{\text{Сумма приведенных доходов}}{\text{Сумма приведенных затрат}} = \frac{\sum E_t\gamma^t}{\sum C_t\gamma^t}. \qquad (19)$$

В частном случае, когда инвестиции осуществляются разовой выплатой I, этот показатель имеет вид:

$$U = \frac{\sum E_t\gamma^t}{I}.$$

Еще одна распространенная разновидность показателя рентабельности (доходности инвестиций) оценивает эффективность инвестиций по отношению к результату, измеряемому величиной чистого приведенного дохода:

$$Q = \frac{NPV}{\sum C_t\gamma^t},$$

причем, как легко установить,

$$U = Q + 1.$$

Последнее соотношение фактически совпадает с тождеством, которое связывает множитель наращения и ставку процента или, скажем, индекс цен и темп инфляции. Именно поэтому показатель U иногда называют ***индексом** доходности или рентабельности*, отличая его тем самым от общепринятой характеристики доходности (рентабельности) Q.

Срок окупаемости

При анализе инвестиционных проектов важно знать срок, за который отдача от реализации проекта компенсирует издержки на его реализацию. В финансовом анализе соответствующие суммы вычисляются с учетом фактора времени, то есть определяется такой период времени, в течение которого сумма приведенных доходов достигнет или превзойдет (в предыдущий период она была меньше) сумму приведенных затрат. Этот период и называется сроком окупаемости. Применение данного показателя проиллюстрируем следующим примером.

Пример. Инвестиционный проект характеризуется следующими показателями:

Годы	0	1	2	3
Затраты (С)	100	50	-	-
Доходы (Е)	-	100	400	800

Определим срок окупаемости при доходности альтернативного вложения, равной 100% годовых.

Суммы затрат и доходов первого года соответственно равны:

$$100+\frac{50}{1+1}=125;\ 0+\frac{100}{1+1}=50,$$

для второго года сумма затрат: $100+\frac{50}{1+1}=125$, а сумма доходов:

$$0+\frac{100}{1+1}+\frac{400}{(1+1)^2}=150.$$

Сумма доходов превзошла сумму затрат в течение второго года, поэтому срок окупаемости равен 2 годам (проект окупается в течение второго года его реализации).

Внутренняя норма доходности (internal rate of return, IRR)

Этот измеритель эффективности производственных инвестиций фактически является аналогом одноименной обобщающей харвктеристики двустороннего потока. Его численное значение определяет ту ставку процента, при которой капитализация всех доходов на завершающую дату их поступления дает сумму, равную наращению инвестиционных затрат по той же ставке (обозначим ее q_B) и на ту же дату. В общем случае, когда инвестиции и отдача от них задаются в виде потока платежей $\{R_t\}$, q_B определяется из уравнения:

$$\sum R_t \gamma^t = 0. \qquad (20)$$

Здесь γ - дисконтный множитель по ставке q_B, R_t - член двустороннего потока платежей, t - время, измеряемое от начала осуществления инвестиционного процесса.

Из данного определения следует также, что внутренняя норма q_B имеет смысл такой ставки процента, для которой срок окупаемости проекта ($t_{ок}$) совпадает с его продолжительностью (T), то есть с датой поступления "замыкающего" дохода. Мы знаем, что при фиксированной ставке i меньшему сроку окупаемости инвестиций отвечает большая эффективность их использования.

Наоборот, при сроке окупаемости, фиксированном на дату продолжительности проекта, чем выше внутренняя норма доходности q_B, тем лучше. Так, если капиталовложения производятся только за счет привлеченных под ставку i средств, разность q_B - i показывает эффект инвестиционной деятельности. При $q_B = i$ доход только окупает инвестиции, при $q_B < i$ инвестиции убыточны.

Из сказанного вытекает, что уровень q_B полностью определяется внутренними характеристиками проекта $\{R_t,\ t = \overline{1, T}\}$ и является корнем уравнения (20). Следует, однако, отметить, что у данного уравнения может быть несколько корней. Действительно, его левая часть - многочлен от неизвестной γ, а всякий многочлен степени n, $n \geq 1$, имеет n корней, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность. По этой причине задача отыскания внутренней нормы доходности $q_B = \frac{1-\gamma}{\gamma}$ некорректна и в общем случае из найденных корней приходится выбирать тот единственный, который не противоречит инвестиционному смыслу решения.

Пример. Заемщик, определивший затраты I на осуществление мероприятия, то есть величину требуемой ссуды, рассчитывает процент, который он готов уплатить кредитору. При этом он основывается на проектной эффективности этого мероприятия.

Допустим, заемщик решил построить за счет кредита кирпичный завод и предполагает получить 15% прибыли на вложенный капитал ($П = 0{,}15I$). Из них 32% уйдет на уплату налогов, 28% - на "премирование" работников (повышение оплаты труда), что дает 60%. В результате ежегодный чистый доход предпринимателя составит величину

$$E_t = 0{,}15I\,(1 - 0{,}6) = 0{,}06I.$$

Кирпичный завод будет работать достаточно долго, и, следовательно, сроком окончания поступлений $\{E_t\}$ можно пренебречь. Заменяя бессрочную ренту $\{E_t, t = 1, 2, ...\}$ ее приведенной стоимостью, получим уравнение для выбранной нормы доходности:

$$-I + \frac{0{,}06I}{q_в} = 0$$

с решением $q_в = 0{,}06 = 6\%$.

Таким образом, максимальная приемлемая для заемщика ставка не должна превышать 6%-го уровня.

Показатель приведенных затрат

Пусть имеется ряд инвестиционных проектов, различающихся затратами, но тождественных по результату. Это могут быть различные варианты нового строительства, технического перевооружения или, скажем, конкурирующие проекты возведения моста и т. д. Сюда же относится случай, когда проекты можно условно привести к одинаковым результатам, скорректировав для этого издержки на их осуществление.

Для тождественных по итогам инвестиционных проектов практика предлагает метод их оценки путем сравнения соответствующих этим проектам затрат. Здесь наряду с *капитальными* затратами учитываются также *текущие* издержки, например себестоимость годового выпуска продукции на проектируемых фондах. В качестве примера рассмотрим проект j с разовыми капитальными вложениями и растянутыми во времени текущими издержками, приходящимися на период отдачи от этих вложений (рис. 8).

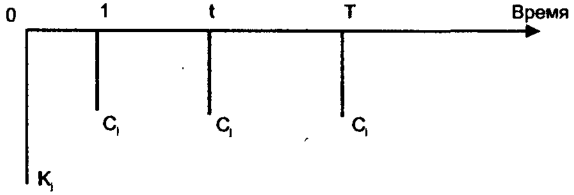


***Рис. 8.* Поток затрат по проекту с номером j**

Пусть n - число анализируемых проектов. Каждому из них соответствует свой поток затрат (рис. 8), и все они характеризуются достаточно длительным периодом отдачи Т. Имея это в виду, будем при определении современной величины A_j этого потока считать его длительность бесконечно большой. В результате найдем:

$$A_j = K_j + C_j\gamma + C_j\gamma^2 + ... + C_j\gamma^t + ... = K_j + \frac{C_j}{i},$$

где $\gamma = \frac{1}{1+i}$ - дисконтный множитель по ставке сравнения i.

Из сравниваемых вариантов наилучшим естественно считать такой вариант r, у которого современная величина потока затрат будет наименьшей:

$$A_r = \min_{j \le n}\{A_j\}.$$

Очевидно, что данный критерий выбора равносилен минимизации известного из экономической литературы показателя приведенных затрат

$$C_j + iK_j \to \min_j.$$

В бывшем СССР в качестве ставки сравнения i использовался нормативный коэффициент эффективности. Для ряда отраслей он был установлен в диапазоне от 0,1 до 0,5, а средний для народного хозяйства составлял 0,15 (минимально допустимая отдача с каждого рубля вложений), что предполагало максимально допустимые сроки окупаемости от 10 до 2, а в среднем - около 6 лет. Подобные нормативы экономической эффективности применяются в ряде стран при бюджетном финансировании освоения государственно важных технических и технологических новшеств.

Пример. Предприятие имеет возможность выбрать агрегат из трех предложенных вариантов, каждый из которых обеспечивает выпуск запланированного годового объема продукции. Варианты различаются себестоимостью годового выпуска и капитальными вложениями.

Вариант	Капиталовложения на внедрение агрегата, Kj, млн. руб.	Себестоимость годового выпуска продукции, Cj, млн. руб.	Приведенные затраты, млн. руб.
I	400	70	70 + 0,15 × 400 = 130
II	450	61	61 + 0,15 × 450 = 128,0
III	500	52	52 + 0,15 × 500 = 127

Исходя из нормативной минимально допустимой отдачи на вложенные средства в размере 15%, предприятие предпочтет вариант III, как обладающий минимальными приведенными затратами.

Указанные в этом разделе определения ограничиваются общей конструкцией расчетных формул, которая в каждом конкретном случае уточняется в зависимости от параметров проекта и характеристик внешней среды: динамики процентных ставок, темпов инфляции и т. д.

Так, полагая ставку наращения i = 0, мы придем к показателям, которые игнорируют действие фактора времени, но тем не менее они позволяют получить удобные для ручного счета грубые оценки эффективности. Например, если некоторое мероприятие дает ежегодную прибыль П, а капитальные затраты на его осуществление равны K, то упрощенный показатель срока окупаемости ($t_{ок}$) находится из уравнения:

$$(П + А)t_{ок} - K = 0,$$

где А - амортизационные отчисления в расчете на год.

По сравнению с расчетом, учитывающим время, эта оценка занижает величину срока, необходимого для окупаемости инвестиций.

Пример. Рассмотрим инвестиционный процесс, которому соответствует поток платежей, изображенный на рис. 9.

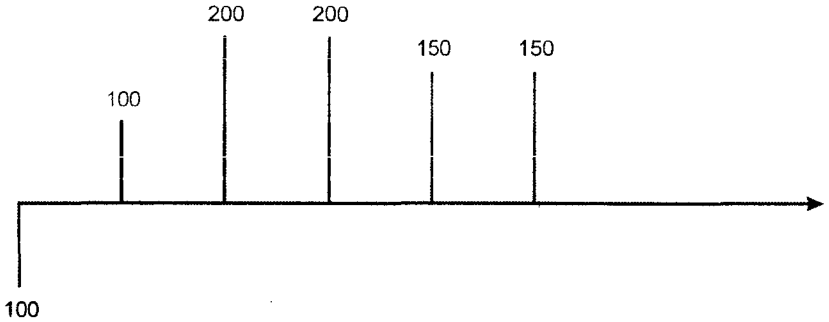


***Рис. 9.* Поток платежей по проекту**

В этом случае срок окупаемости без учета времени будет равен одному году ($t_{ок} = 1$). Оценка же, полученная дисконтированием по ставке, равной 100%, приведет к тождеству:

$$-100 + \frac{100}{1+1} + \frac{200}{(1+1)^2} = 0$$

и, следовательно, даст величину, вдвое большую ($t_{ок} = 2$).

При рассмотрении основанных на дисконтировании показателей эффективности инвестиций мы нигде специально не оговаривали, как поступать с относимой к себестоимости амортизацией. Вместе с тем согласно введенному в начале п. 2.2 понятию чистого дохода E_t можно понять, что амортизационные взносы из выручки не вычитаются. Отсюда, например, следует, что в случае прямых инвестиций величина E_t должна превышать размер прибыли на сумму амортизационных отчислений, то есть

$E_t = П_t + A_t$.

Формулы измерителей эффективности легко переписываются на более общий случай переменных ставок сравнения. Так, если значение ставки альтернативного вложения, скажем, нормы внутрифирменной прибыли, изменялось каждый год, то, например, показатель рентабельности (19) примет вид:

$$U = \frac{E(O) + \frac{E(1)}{1 + i_1} + \frac{E(2)}{(1 + i_1)(1 + i_2)} + \ldots + \frac{E(n)}{(1 + i_1)(1 + i_2) + \ldots + (1 + i_n)}}{C(O) + \frac{C(1)}{1 + i_1} + \frac{C(2)}{(1 + i_1)(1 + i_2)} + \ldots + \frac{C(k)}{(1 + i_1)(1 + i_2) + \ldots + (1 + i_k)}}, \quad (21)$$

где k - последний год, в котором были сделаны инвестиции по данному проекту; n - год окончания получения доходов.

В условиях инфляции с годовым темпом r при оценке эффективности проекта необходимо учитывать фактор обесценивания денежного потока $\{R_t,\ t = \overline{1,T}\}$. Это можно сделать с помощью корректировки платежей R_t к их реальному значению:

$$R_t^* = R_t(1 + r)^{-t}$$

или, что равносильно, заменяя ставку приведения i на скорректированную ставку i*(11):

$$1 + i^* = (1 + i)(1 + r).$$

При первом способе эффективности оцениваются по скорректированному потоку $\{R_t^*\}$ и ставке сравнения i; для второго варианта расчет производится с использованием номинальных значений $\{R_t\}$, но по скорректированной ставке i^*.

При изменяющихся темпах ежегодной инфляции $\{r_t\}$ учет обесценивания денег производится аналогично формуле (21). Например, реальные (скорректированные) значения членов потока доходов и расходов рассчитываются по формуле:

$$R_t^* = \frac{R_t}{(1 + r_1)(1 + r_2)\ldots(1 + r_t)}.$$

Пример. Освоение производства. Применение введенных здесь формул проиллюстрируем в терминах инвестиционных затрат предприятия на освоение производства новой продукции. Этап налаживания выпуска новых изделий сопряжен с дополнительными издержками и сопровождается падением прибыли. Это, в частности, вызвано перераспределением ресурсов в пользу новшества, что на первых порах не компенсирует снижение прибыли в "консервативном" производстве.

Однако за временным горизонтом освоения новая продукция становится экономически выгодной, общая прибыль предприятия возрастает и превышает исходный уровень. Вместе с тем период ее снижения порождает целый ряд трудностей, в том числе возможную нехватку средств на покрытие постоянных затрат: на содержание предприятия, строховку, заработную плату административно-управленческому персоналу (постоянные расходы) и т. п. Для простоты рассмотрения отмеченную закономерность представим трехступенчатым графиком (рис. 10).

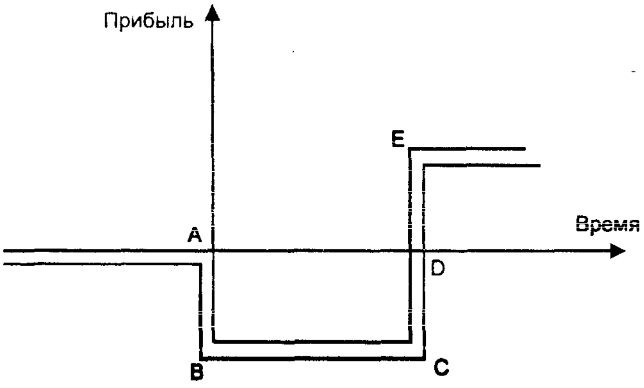


Рис. 10. **Динамика изменения прибыли**

Здесь первая, вторая и третья ступени отвечают соответственно исходному уровню прибыли, ее падению на стадии освоения и приращению после освоения. Очевидно, что *этап освоения* (AD) нуждается во вложениях, компенсирующих его невыгодность. Требуемые для этого инвестиции позволят "дальновидному" предприятию безболезненно пережить этот период и выйти на повышенный уровень прибыли ED. Для оценки эффективности этих затрат воспользуемся принятыми в инвестиционном анализе показателями приведенного дохода (18), рентабельности (19), срока окупаемости вложений и внутренней доходности проекта.

Обозначим период освоения AD через T. Пусть Δ^- и Δ^+ есть перепады прибыли: AB - потери и ED - превышение. Суть рассматриваемого мероприятия заключается в том, чтобы за счет нововведения получить прирост прибыли, что соответственно требует дополнительных затрат Δ^-T на этапе внедрения. Вопрос состоит в том, насколько эффективны эти затраты и стоит ли проводить данное мероприятие в жизнь.

Изобразим двустороннюю последовательность платежей по данному проекту в виде следующей графической схемы:

Рис. 11. **Поток платежей по проекту ($C_i = \Delta^-$, $E_j = \Delta^+$)**

Чистый приведенный доход (W):

$$W = -\Delta^- \left(\frac{1-\gamma^T}{1-\gamma}\right) + \Delta^+ \gamma^T \left(\frac{1-\gamma^L}{1-\gamma}\right).$$

Рентабельность (U):

$$U = \frac{\Delta^+\gamma^T (1-\gamma^L)}{\Delta^- (1-\gamma^T)}.$$

Срок окупаемости ($t_{ок}$) находится из формулы:

$$\Delta^-\left(\frac{1-\gamma^T}{1-\gamma}\right) = \Delta^+(\gamma^T + \ldots + \gamma^{t_{ок}}) = \Delta^+\left(\frac{\gamma^T - \gamma^{t_{ок}+1}}{1-\gamma}\right).$$

Уравнение для отыскания внутренней нормы доходности ($q_В$) имеет вид:

$$\Delta^-\left(\frac{1-\eta^T}{1-\eta}\right) = \Delta^+\eta^T\left(\frac{1-\eta^L}{1-\eta}\right),$$

где: $\eta = (1 + q_В)^{-1}$.

Применим эти формулы для частного случая $T = 1$, $L \gg 1$, $\gamma^L \approx 0$: период отдачи L существенно превышает единичный период освоения и величиной γ^L можно пренебречь. Подставив эти значения в предыдущие формулы, найдем:

$$W = -\Delta^- + \frac{\Delta^+}{i}; \quad U = \frac{\Delta^+}{\Delta^- i},$$

а уравнения для определения срока окупаемости и внутренней нормы доходности имеют вид:

$$\frac{\Delta^+}{i}\left(1-\gamma^{t_{ок}}\right) = \Delta^-; \quad \Delta^-(1-\eta) = \Delta^+\eta,$$

откуда $\gamma^{t_{ок}} = 1 - \frac{\Delta^- i}{\Delta^+}$; $q_В = \frac{\Delta^+}{\Delta^-}$.

Таким образом, принятие или непринятие проекта сводится к анализу следующих условий целесообразности:

$$W > 0, \ U > 1, \ \frac{q_В}{i} > 1.$$

Пример. Аренда оборудования. Частным случаем производственного инвестирования является аренда оборудования, где в качестве инвестиционных затрат выступают арендные платежи. Изменения их размеров по-разному сказываются на выигрышах участников: однонаправленно для того, кто сдает в аренду, и в противофазе для того, кто арендует.

У каждого, в общем случае, имеется несколько альтернативных возможностей и среди них - один наиболее эффективный вариант. Предположим, что для владельца оборудования - это его продажа, а для потенциального арендатора - покупка предполагаемого объекта аренды.

Обозначим переменной R величину годовой арендной платы, а функции выигрышей арендодателя и арендатора запишем как Ф(R), ψ(R). Уровни выигрыша по альтернативным сделкам: продажи для собственника и купли для соискателя - обозначим соответственно через φ* и ψ*.

В принятых обозначениях критерии целесообразности аренды по сравнению с конкурирующими вариантами примут вид следующей системы неравенств относительно R:

$$\begin{cases} \Phi(R) \geq \varphi^* & \text{– сдать в аренду выгоднее, чем продать;} \\ \Psi(R) \geq \Psi^* & \text{– арендовать выгоднее, чем купить.} \end{cases}$$

Чтобы решить задачу об аренде, перейдем от "буквенного" описания неравенств-ограничений к соответствующей им нормативной модели.

Начнем с дилеммы ***владельца***, который выбирает из двух возможностей: продать по цене P или сдать в аренду с платежом R. В случае аренды его доход определяется арендными взносами R и остаточной стоимостью оборудования S, которое возвращается по истечении срока аренды п.

Платежи R составляют простую годовую ренту с текущей стоимостью

$$A(R) = R \times a(n, j),$$

где a(n, j) - коэффициент приведения, зависящий от срока п и цены капитала j по известной нам формуле:

$$a(n, j) = \frac{1 - (1 + j)^{-n}}{j}.$$

Уточним, что здесь в качестве цены капитала имеется в виду норма прибыли, которую получает собственник оборудования от его использования. В свою очередь, остаточная стоимость S меняется в соответствии с нормой амортизации h, действующей как ставка простого процента:

$$S = P(1 - nh).$$

Таким образом, результирующая всех доходов от сдачи в аренду, приведенная к точке отсчета, составляет величину:

$$\Phi(R) = R \times a(n, j) + S(1 + j)^{-n},$$

а ее сравнение с ценой продажи P приводит к следующему условию выгодности для арендодателя:

$$R \times a(n, j) + S(1 + j)^{-n} \geq P.$$

Теперь оценим сделку с точки зрения ***арендатора***. Логично считать, что результаты эксплуатации оборудования не зависят от его "происхождения", то есть одинаковы как для арендуемого оборудования, так и для купленного. Поэтому предпочтительность будет определяться на основе сравнения затрат на аренду с ценой покупки P с учетом нормы прибыли арендатора i. При этом естественно считать, что оборудование уходит к тому, кто его эффективнее эксплуатирует, иначе говоря, $i > j$. Тогда современная величина арендных платежей есть $R \times a(n, i)$, а современная величина потерь, связанных с покупкой, есть $P - S(1 + i)^{-n}$. Поэтому условие выгодности для арендатора (второе неравенство системы) запишется в виде:

$$R \times a(n, i) \leq P - S(1 + i)^{-n}.$$

Из критерия целесообразности для владельца получим нижний предел расценки:

$$R_н = \frac{P - S(1+j)^{-n}}{a(n, j)}.$$

В свою очередь, рассматривая второе неравенство, найдем верхний предел для арендатора

$$R_в = \frac{P - S(1+i)^{-n}}{a(n, i)}.$$

Очевидно, что если

$$R_н \leq R_в,$$

то есть платежный минимум, который все еще устраивает арендодателя не превышает максимума, который готов уплатить арендующий, то задача определения размера платы за аренду оборудования разрешима и

$$R \in [R_н, R_в].$$

Для владельца оборудования важно обеспечить нужный уровень эффективности сдачи оборудования в аренду, в частности доходность должна быть больше нормы амортизации. Предположим, что годовой арендный платеж есть R^* ($R_н \leq R^* \leq R_в$). Тогда норма доходности аренды q рассчитывается из уравнения:

$$R^* a(n, q) = P - S(1 + q)^{-n}.$$

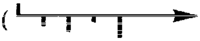
Ясно, что внутренняя норма доходности q должна быть больше нормы амортизации h. Разность $q - h$ в некоторой мере характеризует эффективность сделки, которая заведомо обеспечивает необходимые амортизационные отчисления ($q > h$).

Инвестирование на заемных средствах

Источником финансирования проекта могут быть как собственные, так и заемные средства или их комбинация. Если инвестор пользуется кредитом, то деньги, идущие на его погашение, изымаются из будущих доходов, которые приносит проект. Как учесть эти отвлечения в показателях эффективности?

На первых порах, чтобы ответить на поставленный вопрос, рассмотрим случай полного займа и ограничимся простым вариантом кредитуемого разового вложения I. Схему погашения долга зададим срочными уплатами Y_1, Y_2, ..., Y_T с дисконтированием по кредитной ставке j и такими, что

$$\sum Y_t(1 + j)^{-t} = I.$$

Сформированный поток погасительных платежей можно толковать как "перевернутый" инвестиционный процесс (), у которого поступление I предшествует издержкам {Yt}. Для него показатель чистого приведенного дохода

$$NPV_1 = I - \sum Y_t(1 + i)^{-t},$$

где i - альтернативная ставка, используемая для оценки эффективности капиталовложений.

Рассматриваемому инвестиционному проекту соответствует ординарный поток с начальным вложением I и распределенными во времени доходами E_1, E_2, ..., E_t (). Заметим, что срочности кредита и проекта можно считать равными одной той же величине T, удлиняя при необходимости более короткий горизонт и вводя нулевые платежи.

Для опорного инвестиционного процесса

$$NPV_2 = - I + \sum E_t(1 + i)^{-t}.$$

Суммируя NPV_1 с NPV_2, получим, ввиду адитивности рассматриваемой характеристики, интересующую нас оценку эффективности с учетом затрат на обслуживание кредита:

$$NPV = \sum(E_t - Y_t)(1 + i)^{-t}.$$

Таким образом, величина чистого приведенного дохода для кредитуемого проекта совпадает с текущей стоимостью потока доходов по проекту, скорректированных на величину срочных уплат по кредиту.

В том случае, если кредитный процент j совпадает со ставкой сравнения i (j = i), погасительные платежи $\{Y_t\}$ будут удовлетворять уравнению:

$$\sum Y_t(1 + i)^{-t} = I,$$

и тогда последняя формула для NPV примет вид:

$$NPV = - I + \sum E_t(1 + i)^{-t}.$$

Иначе говоря, *результат оценивания при i = j не зависит от источника финансирования, будь-то кредит или собственный капитал.* Этот вывод не является неожиданным, если мы вспомним известное из экономической науки понятие нормальной прибыли как элемента внутренних издержек. С точки зрения фирмы, эти издержки равны денежным платежам, которые могли бы быть получены за самостоятельно используемый ресурс при наилучшем из возможных способов его применения.

В нашем случае этот способ оценивается через ставку сравнения i. Будем для наглядности говорить о ней, как о ставке банковского процента. Тогда применительно к собственному капиталу внутренние издержки совпадут с ежегодной потерей процентных денег iI из-за отвлечения суммы I на прямое инвестирование. Выбрав проект, предприниматель, по существу, отказывается (жертвует) от получения депозитного дохода. Этот упущенный, или альтернативный, доход входит в издержки и должен учитываться через снижение доходов по инвестиционному проекту. Полагая в полученной выше формуле NPV платежи $Y_t = iI$, $t = 1, 2, ...,$ придем к следующей оценке:

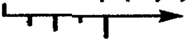
$$NPV = \sum(E_t - iI)(1 + i)^{-t}.$$

Вычитаемое в этой формуле дает приведенную стоимость вечной ренты с одним и тем же платежом iI. Ее величина совпадает с объемом инвестирования I. В результате приходим к формуле:

$$NPV = -I + \sum E_t (1 + i)^{-t},$$

которая годится как для заемных средств при совпадающих ставках $(j = i)$, так и при инвестировании собственного капитала.

Остановимся кратко на промежуточном *варианте с частичным кредитованием*. Обозначим через α долю собственных средств в общем объеме инвестиций I.

Повторяя предыдущие рассуждения, напишем формулу чистого приведенного дохода для кредитной схемы () с величиной основного долга $(1 - \alpha)I$:

$$NPV_1 = (1 - \alpha)I - \sum Y_t(1 + i)^{-t}$$

и для инвестиционного процесса с вложением I ():

$$NPV_2 = -I + \sum E_t(1 + i)^{-t}.$$

Складывая, получим итоговую оценку:

$$NPV = -\alpha I + \sum(E_t - Y_t)(1 + i)^{-t},$$

которая учитывает коэффициент самофинансирования α и выплаты $\{Y_t\}$ по кредиту с коэффициентом заемного финансирования $(1 - \alpha)$.

Как и раньше, при совпадении ставок $(j = i)$

$$(1 - \alpha)I = \sum Y_t(1 + i)^{-t}$$

и формула NPV приводится к "канонической" записи:

$$NPV = - I + \sum E_t(1 + i)^{-t},$$

которая охватывает все случаи $\alpha \in [0, 1]$.

Прежде чем приступить к очередной теме, привлечем внимание читателя к еще одному моменту. Переход к разностям $\{E_t - Y_t\}$ в показателе

NPV позволяет оптимизировать распределение долговой нагрузки $\{Y_t\}$ с учетом предусмотренных законодательством налоговых льгот. Не останавливаясь на технических подробностях подобного выбора, ограничимся здесь лишь концептуальным намеком.

Опуская для простоты индекс времени t, охарактеризуем в двух словах суть налогового поощрения за инвестиции. Пусть П - налогооблагаемая прибыль, а η - ставка налога. При отсутствии льготы прибыль после расчетов с бюджетом составит величину:

$$П_1 = П - ηП.$$

Суть льготы в том, что издержки Y исключаются из налогообложения, и поэтому оставшаяся после налогов прибыль

$$П_2 = П - η(П - Y)$$

и, следовательно, превысит $П_1$. В результате получим *льготу*

$$Л(Y) = П_2 - П_1 = ηY.$$

Согласно нормативам ее уровень не может превышать 50% налогооблагаемой прибыли. Данное ограничение преломляет линейную зависимость ηY на высоте 0,5П и заменяет ее на горизонтальную прямую. Аналитически это дает следующую ***связь размера льготы от величины инвестиции*** (срочной уплаты) Y:

$$Л(Y) = \begin{cases} \eta Y, \text{если } Y \le \dfrac{0{,}5П}{\eta}, \\ 0{,}5П, \text{если } Y > \dfrac{0{,}5П}{\eta}. \end{cases}$$

Таким образом, при выходе срочной уплаты по кредиту за отметку $λ^* = 0{,}5П/η$ льгота срезается до одного и того же уровня, равного 0,5П. Отсюда вытекает возможность более полного использования участков ее возрастания за счет максимально достижимого числа выплат Y_t, не превосходящих порога $λ^*$.

Этому, например, можно способствовать, увеличивая сроки использования кредита. В результате достигнутого при этом уменьшения размеров срочных уплат $\{Y_t\}$ придем к более длительному периоду получения полноценных налоговых льгот. Прочие мыслимые процедуры связаны с оптимизационным подходом и математическим моделированием и относятся скорее к методам исследования операций и их приложениям.

2.3. Отбор инвестиционных проектов

Ограниченность капитальных ресурсов и множественность инвестиционных альтернатив "вдохновляют" бизнес на поиск и реализацию наиболее эффективных областей приложения. Среди принимаемых им решений центральное место занимают разнообразные задачи выбора:

- простейшего - один проект из многих;

- "портфельного", когда формируется бюджет капитальных вложений в условиях определенности и при неполной информации, и т. д.

Оставаясь в рамках детерминированного подхода, обратим внимание, что результаты ранжирования различных инвестиционных альтернатив в общем случае зависят как от выбора ставки сравнения i, так и от применяемых для оценки показателей эффективности.

Чувствительность выбора по ставке дисконта

Напомним, что в качестве этой ставки следует ориентироваться на наиболее выгодное из доступных вложений: будь-то банковский процент по депозиту или норма прибыли для производственных инвестиций, или что-либо еще из набора предлагаемых рынком возможностей.

При растущей ставке роль удаленных платежей в текущей стоимости финансовых потоков слабеет и значимость коротких денег (проектов) начинает превалировать. Вместе с тем перекос в оценивании разновременных поступлений может быть вызван не объективно действующей реальностью, а ее субъективными искажениями применяемой для сравнения "ошибочной" ставкой. Как следствие, это приводит к проигрышным решениям и потере выгодных альтернатив.

В качестве наглядного пояснения воспользуемся сентиментальной житейской ситуацией, успешное разрешение которой требует самого пристального внимания к выбору альтернативной ставки.

Пример. Предположим, что две ваши бабушки оставили вам завещание на получение определенной суммы денег. По первому завещанию условия таковы: 50 тыс. руб. сейчас и еще 50 тыс. руб. - через год. По второму завещанию – 10 тыс. руб. сейчас, 50 тыс. - через год, и еще 50 тыс. в конце второго года. Вы можете выбрать только одно из завещаний. Какой вариант вы предпочтете, если рыночная ставка процента равна: а) 5%, б) 15%?

При 5%-й ставке текущая стоимость потока выплат по первому завещанию:

$$\text{ТС}_1(5\%) = 50 + \frac{50}{1,05} \approx 97,62,$$

а для второго -

$$\text{ТС}_2(5\%) = 10 + \frac{50}{1,05} + \frac{50}{(1,05)^2} \approx 102,97,$$

то есть следует выбрать второе завещание.

Если же ставка равна 15%,

$$\text{то ТС}_1(15\%) = 50 + \frac{50}{1,15} \approx 93,48, \quad \text{ТС}_2(15\%) = 10 + \frac{50}{1,15} + \frac{50}{(1,15)^2} \approx 91,29.$$

Таким образом, с повышением ставки дисконта до 15% более выгодным для наследника становится завещание первой бабушки ($\text{ТС}_1(15\%) > \text{ТС}_2(15\%)$).

Чувствительность выбора по показателю эффективности

Отбираемые проекты конкурируют между собой по оценкам различных показателей, используемых для измерения эффективности инвестиций. Проигравшие по всем "статьям" отбраковываются, и для дальнейшего сравнения остаются только те, которые в заданной совокупности не содержат доминирующих для всех критериев вариантов - так называемые *Парето-оптимальные альтернативы*.

В результате перед инвестором встает проблема их ранжирования по предпочтительности, или, при выборе одного, - проблема наилучшего. Ее решение, наряду с результатами анализа разных (зачастую противоречащих друг другу) оценок эффективности (NPV, $T_{ок}$, IRR, рентабельность), зависит от целого ряда неформальных моментов, скажем, дефицитности некоторых ресурсов, временных предпочтений по потоку отдач, сроков обновления и пр.

Отметим также, что сравнительная выгодность проектных вариантов, как правило, чутко реагирует на выбор уровня альтернативной ставки и, конечно, на рыночные риски и вероятностный характер инвестиционных процессов. Например, долгосрочный проект, невыгодный сегодня из-за высокого уровня ссудного процента, при будущем снижении ставки дисконта становится рентабельным.

Пример. Рассмотрим простейший тип инвестиционного процесса с разовым первоначальным вложением капитала I и последующими поступлениями денежных средств $\{E_t\}$. Очевидно, что если $\sum E_t < I$, то для такого проекта $NPV = \sum E_t \gamma^t - I < 0$. Поэтому анализ имеет смысл, по крайней мере, при условии, что суммарный будущий доход перекрывает объем разовой инвестиции ($\sum E_t > I$).

Обозначим функцией $\varphi(i)$ аналитическую зависимость (18), которая определяет показатель чистого приведенного дохода через ставку сравнения i. Для практически важных плюсовых значений i первая производная $\varphi'(i) < 0$, а вторая производная $\varphi''(i) > 0$; кроме того, разность $\varphi(0) = \sum E_t - I > 0$ и на бесконечности $\lim \varphi(i) \rightarrow - I < 0$. Отсюда вытекает, что $\varphi(i)$ является строго выпуклой убывающей функцией: ее график лежит под хордой, соединяющей две произвольные точки этого графика (рис. 12).

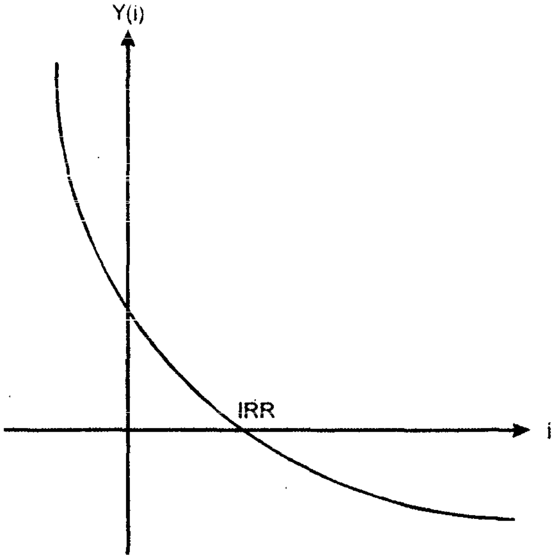


Рис. 12. **Выпуклость NPV для проекта с одноразовой инвестицией**

Согласно определению (20) абсцисса точки пересечения кривой φ(i) с горизонтальной осью дает численное значение показателя внутренней нормы доходности IRR. Факт единственности данной точки наряду с графической наглядностью может быть доказан математически. Оказывается, что уравнение (20), записанное по любому реальному проекту $\{C_t, E_s, t < S\}$ (рис. 13), для которого всегда $\sum_t C_t < \sum_{s>t} E_s$, имеет ровно один корень $\gamma^* \in (0, 1)$ и соответственно однозначно определяемый показатель IRR > 0.

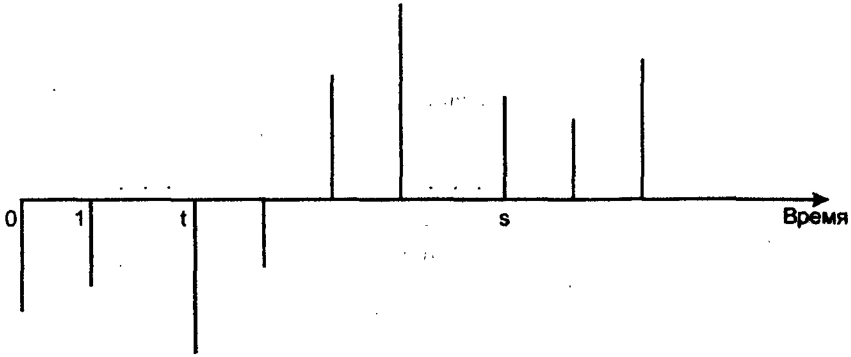


Рис. 13. **Инвестиционный проект с одной переменной знака в потоке платежей (IRR определяется однозначно)**

В самом деле, согласно известной из курса высшей алгебры теореме Декарта число плюсовых корней многочлена (20): $f(\gamma) = \sum R_t\gamma^t$ совпадает с числом перемен знаков в системе его коэффициентов; в нашем случае - одна перемена и, следовательно, - один корень $\gamma^* > 0$. Более того, так как $f(1) = -\sum_t C_t + \sum_{s>1} E_s > 0$, а $f(0) = -C_0 < 0$, то $\gamma^* < 1$, и, следовательно, показатель внутренней нормы доходности $q_в^* = \frac{1-\gamma^*}{\gamma^*} > 0$.

Обратимся теперь к рис. 14, с помощью которого покажем, как изменяются приоритеты инвестирования в зависимости от величин NPV и IRR и ставки сравнения i.

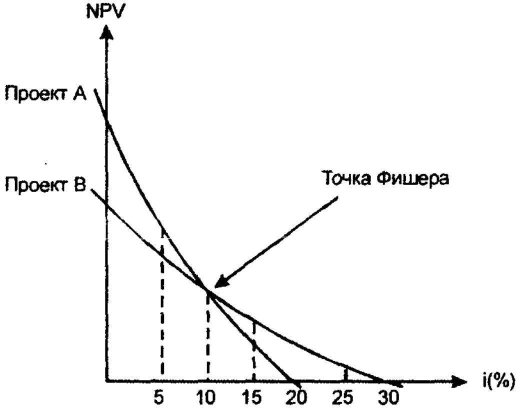


Рис. 14. **Кривые NPV по двум альтернативным проектам**

Сравнивая эти проекты по величине IRR, придем к следующим выводам:

- при цене капитала, предназначенного для инвестиций и равной, скажем, 5 или 15%, оба проекта приемлемы (IRR_A = 20% > 15%, IRR_B = 30% > 15%);
- для ставки i = 25% лучшим является проект В.

В отличие от IRR критерий NPV расставляет приоритеты и в ситуации (1): в пользу проекта А, если i = 5%, и за проект В при i = 15%.

Точка пересечения двух графиков (i = 10%), показывающая значение коэффициента дисконтирования, при котором оба проекта имеют одинаковый NPV, называется ***точкой Фишера***. В этой точке предпочтительнее будет проект, имеющий более высокий уровень IRR, в нашем случае - проект В.

В заключение отметим, что вопрос о том, какой из известных нам показателей эффективности лучше, не имеет прямого ответа. В практических расчетах предпочтение, как правило, отдается оценке NPV как показателю, дающему возможность наиболее объективно подойти к выбору проекта с точки зрения максимизации выгод (доходов). Однако возможны и отклонения. Так, если у фирмы ограничен собственный капитал и она не имеет широкого доступа к ссудному капиталу, то тогда главная цель инвестиций - получение наибольшего прироста на ограниченный капитал. В этом случае для фирмы главным показателем доходности проекта будет IRR.

Инвестиционный выбор с учетом внешних эффектов

Внешние эффекты (экстерналии) представляют собой издержки и выгоды, связанные с производством или потреблением блага, но выпадающие на долю лиц, не являющихся участниками данной рыночной сделки. Эти эффекты не находят на рынке адекватной денежной оценки, поскольку они направлены на третьих лиц и, следовательно, никак не отражаются в цене этого блага. При наличии таких внешних эффектов рынок выполняет свою функцию распределения ресурсов недостаточно эффективно.

Изучение этих эффектов экономической теорией началось с работ крупного английского экономиста Артура Пигу и получило дальнейшее развитие в трудах известного американского ученого, лауреата Нобелевской премии по экономике Рональда Коуза. В результате в современной экономической теории сформировалось целое научное направление, посвященное проблемам внешних эффектов и их интернализации.

Применительно к инвестициям одной из форм проявления экстерналий являются положительные или отрицательные эффекты, которые возникают у третьих лиц, то есть за пределами того проекта, который оценивает и рассчитывает реализовать инвестор. Примерами подобных влияний могут служить последовательные и параллельные взаимодействия, когда уровень производства одной фирмы зависит от мощности другой, или принятие нововведения технологически однородными предприятиями. К ним же относится производство общественных благ, например развитие инфраструктуры, которое порождает "незаработанные" выгоды у третьей стороны.

Учет этих эффектов относится к области экономического анализа, оценивающего доходность проектов с точки зрения *всего общества*, в то время как финансовый анализ направлен на оценку доходности только с позиций фирмы и ее кредитора (если проект кредитуется).

Игнорирование экстернальных проявлений может привести как к неэффективным по общественной выгоде инвестициям, так и к потере значимых с этой точки зрения проектов, например "локомотивных". В этом случае вопросы интернализации внешних эффектов могут решаться за счет привлечения их "носителей" к долевому участию в инвестициях, например, на уровне региональных внебюджетных фондов или на микроуровне - в ходе развертывания процессов вертикальной и горизонтальной интеграции.

Пример. Поясним, как скажутся внешние эффекты на расчетных значениях показателей эффективности и, соответственно, на инвестиционном выборе, в частности по критерию IRR.

Рассмотрим ординарный инвестиционный проект с однократным вложением I и последующим периодом достаточно продолжительных отдач. Будем для простоты считать их равными одной и той же величине U_0. Аппроксимируем поток платежей $\{U_0\}$ вечной рентой и найдем, что внутренняя норма доходности

$$q_0 = \frac{U_0}{I}.$$

Допустим, что наряду с потоком $\{U_0\}$ имеют место K внешних эффектов, причем каждый представляется в виде потока повторяющегося бессрочно платежа U_k, $k = \overline{1, K}$. Если все выигрыши, прямые и косвенные, свести в один, то придем к результирующему потоку отдач с платежом $V = U_0 + U_1 + \ldots + U_K$. С учетом издержек I найдем экономическую оценку внутренней нормы доходности

$$Q = \frac{V}{I} = q_0 + q_1 + \ldots + q_K,$$

которая перекрывает финансовую оценку q_0 на сумму значений критерия IRR по экстернальным эффектам.

Отсюда понятно, что выгодный для общества проект с позиций инвестора может оказаться убыточным и будет им отвергнут.

Чтобы этого избежать, можно перейти к ***долевому инвестированию*** *со стороны получателей внешнего эффекта*. Пусть α_k - доля k-го участника. Для ее назначения потребуем, например, чтобы внутренние нормы доходности для всех потенциальных инвесторов были равны:

$$\frac{U_0}{\alpha_0 I} = \frac{U_1}{\alpha_1 I} = \ldots = \frac{U_K}{\alpha_K I}.$$

Отсюда получим следующее условие пропорциональности долей и эффектов:

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_K = U_0 : U_1 : \ldots : U_K.$$

Из равенства этих отношений вытекает, что вклад каждого участника в совместное финансирование должен быть пропорционален получаемому им эффекту, то есть

$$I_k = \frac{U_k I}{\sum\limits_s U_s}.$$

При этом получаемые всеми участниками доходности составят одну и ту же величину:

$$IRR = \frac{U_k}{I_k} = \frac{\sum\limits_s U_s}{I} = Q,$$

где $Q = q_0 + q_1 + \ldots + q_K$.

О многоальтернативном выборе

И в заключение совсем кратко о задаче отбора нескольких инвестиционных проектов из группы возможных. Для решения подобных задач используют разнообразные схемы математического программирования - от упрощенной модели распределения капитальных ресурсов до вариантных постановок со многими критериями и ограничениями.

Чтобы дать некоторое представление о применяемых здесь методах, прокомментируем первую из названных задач и укажем некоторые особенности по второму подходу.

Итак, о **задаче выделения инвестиций на развитие предприятий**. Предположим, что указано n пунктов, где требуется построить или реконструировать предприятия одной отрасли, для чего выделено b рублей. Обозначим через $f_j(x_j)$ прирост мощности или прибыли на j-м предприятии, если оно получит x_j рублей капитальных вложений. Требуется найти такое распределение $(x_1, x_2, ..., x_n)$ капитальных вложений между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост мощности или прибыли:

$$Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n)$$

при ограничении по общей сумме капитальных вложений:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = b.$$

При этом считается, что все переменные x_j принимают только целые неотрицательные значения, например выделяемые предприятиям суммы кратны 100 тыс. руб. Таким образом, получена целочисленная сепарабельная задача, которая может быть решена методом динамического программирования. Последнее обстоятельство делает ее весьма популярной для обучения студентов этому методу.

Найденное в результате расчетов оптимальное решение можно трактовать как некоторый обобщенный инвестиционный проект, у которого, как легко понять, внутренняя норма доходности будет максимальна: $IRR = \frac{Z\max}{b}$.

В вариантных моделях в качестве первичных элементов формализации рассматриваются инвестиционные проекты и отвечающие им двоичные неизвестные, которые для отбираемых проектов принимают значение 1, а для неотбираемых - 0. Все проекты перенумеровываются, и каждому ставится в соответствие вектор его характеристик: упорядоченных во времени затрат, результатов и интересующих инвестора оценок эффективности.

Система критериев и ограничений формируемой модели записывается в виде взвешенных по двоичным переменным сумм соответствующих компонент этих векторов. Более того, благодаря булевым свойствам этих переменных с их помощью можно записать различные специальные ограничения, например по совместимости отбираемых проектов, их общему числу, взаимоисключаемости и т. д. и т. п.

В результате придем к модели оптимизации портфеля инвестиций, ее еще называют моделью формирования капитального бюджета, которая относится к классу задач двоичного программирования и решается с помощью известного метода ветвей и границ.

2.4. Финансовые расчеты на рынке ценных бумаг (РЦБ)

Рынок ценных бумаг (акций, облигаций, фьючерсов, опционов и пр.) предоставляет заинтересованным лицам возможности для выгодного вложения или привлечения денег.

Особую роль на этом рынке играют ***спекулянты***. Они получают доходы на сделках, комбинируя роли продавца и покупателя, сроки сделок и виды ценных бумаг. Общая тенденция их участия такова, что при росте цен предпочтение отдается продаже, а при удешевлении - привлекательной становится покупка. Как следствие - при массовых продажах превалирует предложение, а в противоположном случае - спрос. Эти изменения, как легко понять, способствуют сглаживанию ценовых выбросов и выравнивают курсовые колебания. В этом, как известно, и состоит положительное влияние спекуляций, предохраняющих рынок ценных бумаг от "разогрева" или падения.

И наконец, можно выделить участников, которых привлекает возможность страхования риска, например нежелательного изменения цены реального актива (валюты, товара, акций и т. д.) в планируемых с ним сделках.

В случае валюты такую возможность дает ***фьючерсный рынок***. Так, с позиции покупателя валюты, он *хеджируется*, когда приобретает контракт на ее покупку по приемлемой для себя цене и ниже ожидаемой, которая его не устраивает. Если к моменту выполнения контракта реальная цена окажется выше, то выигранная на фьючерсном рынке разница дает ему дополнительные средства на приобретение нужного количества валюты.

Если же стоимость контракта, по которой он открывает позицию, превысит реальную цену в будущем, то разница проигрывается; в этом случае она выступает как плата за страховку. Независимо от того, что произойдет с курсом валюты, фактические расходы покупателя по реальной сделке совпадут с изначально заявленной им ценой, то есть той, которую он назначил как участник рынка валютных фьючерсов.

Имея в виду применение изложенных ранее методов, остановимся здесь на характеристиках доходности ценных бумаг и их ***курсов***, то есть ***цен, по которым они покупаются и продаются***. Оставаясь в рамках детерминированного анализа, мы во всех наших изысканиях будем опираться на точное задание требующихся для расчетов данных: дивидендов по акциям, процентных ставок и т. д.

В противном случае предлагаемые здесь оценки будут носить приблизительный характер. Так, при ***вероятностном*** характере процентных ставок их фактические значения могут отклониться от ожидаемых, в том числе и в неблагоприятную сторону.

Величина возможных сдвигов зависит от меры рассеяния случайной ставки - ее дисперсии, что, собственно, и определяет риск участников сделки. Очевидно, что рисковая ценная бумага должна стоить меньше, то есть курсовую стоимость, найденную для детерминированного случая, следует скорректировать в сторону удешевления, и тем больше, чем выше риск.

Аналогично нужно подходить и для определения доходности. С увеличением риска требования инвестора к ожидаемой доходности возрастают. Это, в свою очередь, приводит к задаче о процентной ставке, увеличенной с учетом премии за риск.

Доходность ценных бумаг

Для расчета доходности ценной бумаги надо сопоставить получаемый по ней доход (аналог процентных денег) с ценой приобретения (начальный вклад). В случае, когда в расчет принимается полный доход за весь срок хранения, полученный инвестором как в виде дивидендов (d), так и за счет разницы в ценах продажи (C_t) и покупки (C_0), говорят о ***полной доходности***:

$$\text{полная доходность} = \frac{\text{полный доход}}{\text{цена покупки}} = \frac{d + C_t - C_0}{C_0}. \tag{22}$$

С позиции рынка упомянутые в определении (22) цены продажи и покупки инвестором совпадают соответственно с ценами покупки и продажи рынком, то есть с так называемыми в практике фондового рынка ценами ***рыночного спроса*** (ask-price) и ***рыночного предложения*** (bid-price). В реальной жизни они не совпадают.

Покупая ценные бумаги у одних и продавая их другим, фондовый рынок в лице своих профессиональных торговцев (дилеров, расчетных фирм, брокеров и т. д.) взимает плату за посреднические услуги, извлекая ее из превышения цены продажи (ask-price) над ценой покупки (bid-price), то есть покупает дешевле, чем продает. Если учесть разницу (***спред***) в этих ценах (bid-ask spread) для одного и того же момента времени t: $\underline{C}_t < \overline{C}_t$, то придем к уточненной формуле эффективности (полной доходности):

$$\text{полная доходность} = \frac{\text{дивиденды за период + цена "бид" в конце - цена "аск" в начале периода}}{\text{цена "аск" в начале периода}} = \frac{d + \underline{C}_t - \overline{C}_0}{\overline{C}_0}.$$

В отличие от этого показателя участниками фондового рынка широко используется еще одна характеристика - показатель ***текущей доходности***, учитывающий только текущий доход в расчете на текущий курс:

$$\text{текущая доходность} = \frac{\text{текущий доход (процентные выплаты за текущий период)}}{\text{текущая курсовая стоимость}}. \tag{23}$$

При этом *предполагается*, что прибыль инвестора формируется только за счет текущих доходов (предусмотренными по ценной бумаге порционными выплатами за период их начисления), а спекулятивный доход, извлекаемый за счет возможной перепродажи, отсутствует.

Так, для облигаций, приобретаемых с дисконтом (например, для ГКО), текущий доход определяется разницей между номиналом и текущей котировкой на вторичном рынке, в случае купонных облигаций - доходом, выплачиваемым по купонам; при определении текущего дохода по акциям в расчет принимаются только дивидендные выплаты.

Этот измеритель удобен для оценивания текущей конъюнктуры как обращающихся на рынке ценных бумаг, так и тех, что имеются на руках у инвестора (в знаменателе расчетной формулы (23) стоит не цена приобретения, а текущий курс).

При решении конкретных задач формулы показателей доходности (22), (23) уточняются как по видам ценных бумаг (различные типы облигаций, акций, срочных контрактов и т. д.), так и в зависимости от динамики курса, длительности учитываемого периода, потока дивидендов.

В литературе для специалистов-практиков (работников инвестиционных институтов, фондовых бирж и других участников рынка) зачастую предлагаются упрощенные зависимости, которые приводят к грубым оценкам, в частности без учета времени и риска. По мнению автора, адекватность применяемого способа расчета зависит от рассматриваемых инвестиционных альтернатив и позиции оперирующей стороны. Принимающее решение лицо, исходя из собственных интересов или интересов заказчика, подыскивает такую расшифровку общих формул (22), (23), которая дает достоверные оценки и способствует получению высоких финансовых результатов. В условиях детерминированного анализа для этого необходимо овладеть алгебраическими приемами обработки потоков платежей и методами измерения эффективности инвестиций.

Последнее стоит подчеркнуть особо: доходы по ценной бумаге допустимо рассматривать как отдачу на вложенный в нее капитал. В этом смысле генерируемому ценной бумагой финансовому потоку можно сопоставить инвестиционный процесс, например для акции это будет поток платежей, изображенный на рис. 15.

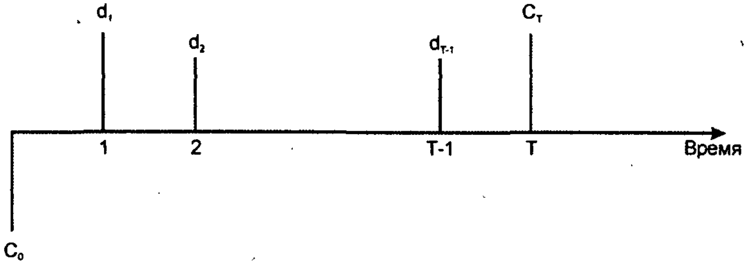


Рис. 15. **Инвестиционный процесс, соответствующий вложению в акцию (C_0 - цена покупки, C_T - цена продажи, d_1, d_2, ..., d_{T-1} - дивиденды)**

Отсюда понятно, что в качестве измерителя доходности акции наряду с показателем (22) целесообразно, кроме того, использовать известный нам из инвестиционного анализа показатель внутренней нормы доходности. В случае ординарного потока, что соответствует рис. 15, его значение определяется однозначно из уравнения:

$$-C_0 + \sum_t d_t\gamma^t + C_T\gamma^T = 0,$$

где $\gamma = \frac{1}{1 + IRR}$. Разумеется можно пойти дальше и для отбора и сравнения различных вложений использовать прочие известные нам по предыдущему разделу критерии эффективности инвестиций: чистый приведенный доход, срок окупаемости, рентабельность.

Примеры

Облигации. Эти долговые бумаги характеризуются:

- номинальной стоимостью;
- сроком погашения;
- купоном, то есть процентными выплатами, которые производятся с определенной периодичностью на протяжении срока обращения облигации.

Купонная ставка по облигации рассчитывается по отношению к номинальной стоимости независимо от рыночного курса облигации:

$$\text{купонная ставка} = \frac{\text{доход (процентные выплаты) в руб.}}{\text{номинальная стоимость}} \times 100\%.$$

Используя эту формулу, можно рассчитать, сколько рублей получит владелец облигации в виде дохода по купонам или, другими словами, процентные платежи по облигации:

$$\begin{array}{c}\text{доход (процентные}\\ \text{выплаты) за год}\end{array} = \frac{\text{номинальная стоимость} \times \text{купонная ставка}}{100\%}.$$

В практике используются различные ***типы облигаций***:

- *бескупонные*, по которым не производятся купонные платежи, а выплачивается только номинальная стоимость в момент погашения, например государственные ценные бумаги, приобретаемые с дисконтом (цена покупки ниже номинала);
- *купонные*, которые покупаются и гасятся по номиналу, например облигации федерального займа с плавающей купонной ставкой и т. д.

1) Оценим ***текущую доходность*** вложений в бескупонную облигацию с номиналом P и курсовой стоимостью C = 95%, приобретаемой на весь оставшийся до погашения срок, равный $T_{\text{дней}}$. Здесь, согласно положению о фондовых биржах, курс облигации указан в процентах к ее номинальной стоимости.

Очевидно, что для расчета текущей доходности к погашению по ставке простого процента следует воспользоваться формулой:

$$\eta_{\text{тек}} = \frac{(100\% - C)360}{C \times T}100\%$$

или

$$\eta_{\text{тек}} = \frac{(\text{дисконт} \times 360)}{(\text{номинал} - \text{дисконт})T}100\%.$$

Так, если до погашения осталось 40 дней, то текущая доходность

$$\eta = \frac{5 \times 360}{95 \times 40}100\% \approx 47{,}4\%.$$

Та же формула справедлива и для доходности по цене размещения на первичном аукционе. Используемый на рынке ГКО показатель ***эффективной доходности*** ($\eta_{\text{эф}}$) опирается на понятие эффективной ставки (9), рассчитываемой по формуле сложного процента. Для трехмесячных ГКО такая ставка фактически предполагает возможность четырехкратного реинвестирования вклада С на этом рынке. Так, при С = 80% из соотношения $C(1 + \eta_{\text{эф}})^{1/4} = P$ находим:

$$\eta_{\text{эф}} = \left(\frac{100}{80}\right)^4 - 1 = 1{,}44 = 144\%.$$

2) Облигация, выпущенная номиналом 100000 руб., с *купонной* ставкой 8% сроком на 5 лет, продавалась с дисконтом 20%. Тогда для держателя облигации, который реализует свой доход в виде дисконта при погашении ее эмитентом согласно формулам ручного счета (22, 23) (без приведения во времени):

$$\begin{matrix}\text{полная доходность} \\ \text{(по формуле простых} \\ \text{процентов)}\end{matrix} = \frac{\text{5-летний доход}}{\text{цена покупки} \times \text{5-летний срок}} \times 100\% =$$

$$= \frac{(100000 \times 8\% \times 5 + 100000 \times 20\%)}{100000 \times 80\% \times 5(\text{лет})} \times 100\% = 15\%,$$

$$\text{текущая доходность} = \frac{\text{годовой купонный доход}}{\text{рыночная цена}} \times 100\% =$$

$$= \frac{10^5 \times 8\%}{10^5 \times 80\%} \times 100\% = 10\%.$$

В этом примере можно прийти к более точной оценке ***полной доходности***, которая учитывает неравноценность денег, поступающих владельцу облигации в различные годы. Для этого следует использовать показатель

IRR. Дисконтирующий по этой ставке множитель γ находится из уравнения (20), которое по исходным данным имеет вид:

$$-80\% + 8\%(\gamma + \gamma^2 + \ldots + \gamma^5) + 100\%\gamma^5 = 0,$$

где $\gamma = (1 + IRR)^{-1}$. Найденный с помощью компьютера положительный корень этого уравнения $\gamma \approx 0{,}8788$. Откуда $IRR = \frac{1}{\gamma} - 1 \approx 0{,}1379 = 13{,}79\%$ ·

Определяемый таким образом измеритель называют еще ***обещанной доходностью к погашению***, подчеркивая тем самым роль сложившейся на рынке курсовой стоимости P. Продавая по этой цене, рынок как бы обещает покупателю доходность r, уравнивающую цену покупки с текущей стоимостью будущих поступлений:

$$P = \sum \frac{C_t}{(1 + r)^t}.$$

3) В ситуации, когда инвестор получает доход в виде разницы между покупной ценой и ценой продажи облигации другому инвестору, корректно рассматривать прирост курсовой стоимости как доход инвестора (а падение - как убыток). Соотнося этот доход с ценой покупки, придем к показателю доходности подобной сделки. Например, доходность ГКО с позиции продавца на вторичном аукционе рассчитывается по так называемому показателю ***доходности к аукциону***:

$$\eta = \frac{(\text{цена продажи - цена покупки}) \times 360}{\text{цена покупки} \times \text{срок владения}} \times 100\%.$$

4) Облигации без обязательного погашения с периодической (пусть раз в год) выплатой процентов.

Доход от данного вида облигаций получают только в виде процентов, поскольку выплату номинала в необозримом будущем не следует принимать в расчет.

Пусть g - объявленная годовая норма доходности облигации,

N - номинальная цена (руб.),

C - курс покупки (%).

Определим цену облигации (руб.) через ее курс (%):

$$P = \frac{CN}{100}. \qquad (24)$$

Вложение P обеспечивает инвестору бесконечный поток доходов, то есть вечную ренту с членом g × N.

Описанную ситуацию вполне корректно можно интерпретировать в терминах инвестиционного проекта, для которого измеритель внутренней нормы доходности q определяет эффективность вложений в данную облигацию, то есть доходность. Соотношение (20) для определения этой числовой характеристики находится уравниванием современной величины A ренты, полученной дисконтированием по ставке q, с ценой облигации P. Очевидно, что приведенная стоимость

$$A = Ng\gamma + Ng\gamma^2 + \ldots + Ng\gamma^n + \ldots = \frac{Ng}{q}.$$

Приравнивая ее к цене P, найдем доходность

$$q = \frac{Ng}{P}$$

или с учетом (24)

$$q = \frac{g}{C}100\%.$$

Например, для вечной ренты, приносящей 4,5% дохода и купленной по курсу 90%, доходность составит:

$$q = \frac{4{,}5}{90}100\% = 5\%.$$

Акции. По доходности акция характеризуется существенно более высокой, чем облигации, степенью неопределенности как по дивидендам, так и по изменению ее цены.

Известны различные приемы, например методы *технического* и *фундаментального* анализа, которые используют инвесторы для повышения своей информированности и, тем самым, снижения риска. Не останавливаясь на этих подробностях, ограничимся здесь примерами применения отдельных формул.

5) Инвестор приобрел за 800 руб. *привилегированную акцию* АО номинальной стоимостью 1000 руб. с фиксированным размером дивиденда 30% годовых. В настоящее время курсовая стоимость акции - 1200 руб. Определите текущую доходность по данной акции (без учета налогов).

Укажем на одну из особенностей привилегированных акций, которую необходимо учитывать при решении задачи. В отличие от обыкновенных акций для них процент выплат фиксирован и определяется как для купонных облигаций по номиналу.

Отсюда текущий доход d = 1000 руб. × 30% = 300 руб. Текущая доходность, согласно определению (23), рассчитывается по отношению к курсовой стоимости в данный момент, а не к стоимости в момент покупки. Таким образом, показатель текущей доходности

$$\eta = \frac{300}{1200} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

Заметим, что эффективность вложений инвестора в этом случае совпадает с внутренней нормой доходности q двустороннего потока с затратным платежом - 800 руб. и бессрочно растянутыми во времени порциями доходов по 300 руб. каждая.

Для рассматриваемой бессрочной ренты современная величина

$$A = \frac{300}{q}.$$

Приравнивая ее затратам инвестора, получим, что

$$\frac{300}{q} = 800,$$

и, следовательно, доходность вложения

$$q = \frac{3}{8} \approx 37{,}5\%.$$

6) Возможна ситуация, когда инвестор продает акцию, не успев получить дивиденд. В этом случае можно говорить о ***доходности операций с акцией***:

$$\eta = \frac{\text{прибыль от перепродажи}}{\text{цена приобретения}} \times 100\%. \qquad (25)$$

Рассмотрим такой **пример**. Пусть инвестор приобретает акцию с предполагаемым ростом курсовой стоимости 43% за квартал и в конце квартала продает ее. Инвестор имеет возможность оплатить за свой счет 60% от фактической стоимости акции. Под какой максимальный квартальный процент может взять инвестор ссуду в банке, с тем чтобы обеспечить доходность на вложенные собственные средства на уровне не менее 30% за квартал (без учета налогов).

Для рассматриваемой ситуации прибыль в (25) должна учитывать не только разницу цен, но и выплату по ссуде. Пусть x - квартальная ставка процента, а N - начальный курс. По условию инвестор оплачивает 0,6N за счет собственных средств, при этом наращенная сумма его долга равна 0,4N(1 + x). Прибыль от операции, как легко понять, даст сумму:

$$П = 1{,}43N - (0{,}6N + 0{,}4N(1 + x)),$$

то есть будет меньше разницы цен 1,43N - N на величину выплачиваемых процентов 0,4Nx. Сопоставляя ее с затратами инвестора, равными 0,6N, найдем квартальную доходность:

$$\eta = \frac{0{,}43N - 0{,}4Nx}{0{,}6N}.$$

По условию $\eta \geq 0{,}3$. Откуда $x \leq 0{,}625$, то есть максимально приемлемая ставка $X_{max} = 62{,}5\%$.

В формуле (25) за период начисления принят промежуток времени T (например, в годах) между датами продажи по цене C_T и покупки с предшествующей ценой C_0. Отсюда, опираясь на правило простых процентов, получим оценку годовой доходности:

$$\eta_Г = \frac{C_T - C_0}{C_0 T},$$

отвечающую начислению $C_T = C_0 (1 + T\eta_Г)$.

В том случае, когда для сравнения альтернатив применяют сложный процент, следует использовать эффективную ставку (9). Тогда показатель годовой доходности от перепродажи акции примет вид сложного процента:

$$\eta_{эф} = \left[\frac{C_T}{C_0}\right]^{\frac{1}{T}} - 1,$$

для которого $C_T = C_0 (1 + \eta_{эф})^T$.

Завершим рассмотрение примеров рядом иллюстративных задач на определение доходности операций с *производными* ценными бумагами.

7) Текущий курс акций составляет 30 долл. Инвестор соглашается купить опцион за 200 долл. на покупку 100 акций по 35 долл. через два месяца. Допустим, что к назначенному сроку курс акций поднимется до 50 долл. Какова годовая ставка процента на вложенные в покупку опциона 200 долл.?

По условию инвестор выигрывает разницу между курсом акции (50 долл.) и ее контрактной ценой (35 долл.), равную 15 долл. Сопоставляя его двухмесячный выигрыш по всем акциям (очищенный от затрат на опцион) с размером этих затрат, получим годовую доходность:

$$\eta = \frac{((50 - 35) \times 100 - 200) \times 12}{200 \times 2} \times 100\% = 3900\%.$$

8) Согласно правилам *фьючерсной* торговли для открытия одной позиции (приобретения одного валютного фьючерса) участник должен внести порядка 10% от объема заключенного контракта по текущему курсу. Пусть для определенности эта сумма равна Р руб., а τ - количество календарных дней, в течение которых изменялась котировочная цена по данному контракту. В этих обозначениях доходность вложения по ставке простого процента можно рассчитать по формуле:

$$\eta = \frac{\text{(изменение котировочной цены)}}{P} \times \frac{360}{\tau} \times 100\%.$$

Следует иметь в виду, что эта величина может быть и отрицательной, например, для покупателя (игрока на повышение) при снижении котировок (в соответствии с механизмом проведения торгов).

Дадим числовую иллюстрацию. Пусть текущий курс доллара соответствует 25 руб. Тогда для заключения тысячедолларового контракта необходимо внести 10% его объема, то есть P = 25 × 1000 × 0,1 = 2500 руб. При росте котировочной цены на 1 руб./долл. выигрыш покупателя составит 1000 руб. Это обеспечивает доходность игры на повышение:

$$\eta = \frac{1000}{2500} \times 100\% = 40\%,$$

что в расчете на год дает 14400%. Эффект высокого процента, так называемый *"эффект рычага"*, объясняется системой финансовых гарантий и сборов на бирже, определенных правилами фьючерсной торговли. Так, в рассмотренном примере для ведения фьючерсной операции задействуется в 10 раз меньше средств, чем при игре на валютной бирже.

9) В завершение приведем описание схемы, основанной на ***комбинировании*** различных активов. Схема предельно проста.

В начале операции берется валютный кредит, который затем конвертируется в рубли по курсу "спот" (текущему курсу межбанковской валютной биржи). Полученная сумма (в рублях) делится на две части:

- первая часть расходуется для закупки наличной валюты на один из ближайших месяцев на фьючерсном рынке;
- вторая (оставшаяся) часть помещается в активы: ГКО, депозит и т. д. по выбору инвестора.

Непременным условием проведения схемы является то, чтобы выбранный актив был ликвиден на дату исполнения фьючерсного контракта. В конце операции происходит обратная конвертация рублей в валюту по фьючерсному курсу и возврат кредита.

Проведем анализ данной операции с точки зрения ее целесообразности. Для простоты пренебрежем относительно малыми затратами инвестора, необходимыми для участия во фьючерсных торгах, то есть первой частью рублевой наличности. Без ограничения общности сумму основного долга примем равной одному доллару. Для наглядности представим всю операцию в виде цепной схемы, изображенной на рис. 16.

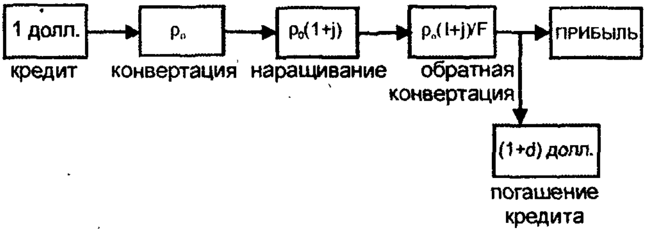


***Рис. 16.* Арбитраж "cash and carry"**

Поясним обозначения, принятые в схеме:

ρ_0 - начальный курс доллара,

j - доходность по рублевому активу,

d - ставка по валютному кредиту,

F - фьючерсный курс (стоимость контракта в момент открытия позиции).

Заметим, что фигурирующие здесь ставки j, d приведены к дате исполнения фьючерсного контракта. Очевидно, что условие целесообразности состоит в том, чтобы получить положительную прибыль:

$$П = \frac{P_0(1 + j)}{F} - (1 + d) > 0,$$

что устанавливает следующее ограничение на доходность j:

$$j > \frac{F}{P_0}(1 + d) - 1.$$

До сих пор при расчете доходности ценных бумаг мы пренебрегали влиянием налогов. При необходимости его можно учесть, скорректировав доход на величину налогового изъятия. В результате придем к показателям доходности с учетом налогообложения:

$$\begin{matrix}\text{текущая доходность}\\ \text{с учетом налогооб-}\\ \text{ложения}\end{matrix} = \frac{\text{дивиденды за год (в руб.) - сумма налогов}}{\text{текущая курсовая стоимость}}, \quad (26)$$

$$\begin{matrix}\text{полная доходность}\\ \text{с учетом налого-}\\ \text{обложения}\end{matrix} = \frac{\begin{matrix}\text{(все полученные дивиденды - все уплаченные}\\ \text{налоги + прибыль от перепродажи - налог)}\end{matrix}}{\text{цена покупки}}. \quad (27)$$

10) Правительство РФ решает выпустить сроком на три месяца краткосрочные долговые обязательства, доход по которым выплачивается в виде дисконта. Банковская ставка по депозитам - 60%. Обязательства размещаются среди производственных предприятий. Определите размер дисконта (при расчете необходимо учесть налогообложение).

Легко понять, что данные долговые обязательства удастся разместить в том случае, если доход предприятия-покупателя окажется не меньше, чем его процентные деньги при том же вложении. Для эмитента чем выше цена размещения, тем лучше. Поэтому цена продажи, а значит, и дисконт должны удовлетворять следующему условию:

ДИСКОНТ = ДЕПОЗИТНЫЙ ДОХОД,

причем, согласно требованию задачи, при определении обеих частей этого равенства надо учитывать налоги.

Допустим, что доход по долговым обязательствам государства налогом не облагается, а доходы (проценты) по депозиту облагаются налогом на прибыль по ставке, равной 32%. Обозначим искомый дисконт через X%, тогда цена приобретения долгового обязательства равна 100 - X(%).

Очевидно, что показатель доходности краткосрочных долговых обязательств должен быть сопоставим с уровнем банковской ставки по депозитам в пересчете на трехмесячный период, то есть 60% : 4 = 15%. С учетом сказанного процентные деньги за вычетом налогов составят 0,68 от величины (100 - X) × 0,15. Таким образом, дисконт определяется из уравнения:

$$X = (100 - X) \times 0,15 \times 0,68$$

и составляет 9,25%, а цена размещения - 90,75% от номинала.

Курсы ценных бумаг

Курсовые стоимости выявляются (формируются) на рынке ценных бумаг в ходе взаимодействия спроса с предложением и представляют собой цены, по которым эти ценные бумаги продаются и покупаются. Так, на фондовой бирже курс определяется путем единовременного сопоставления всех поступивших на биржу в течение определенного периода времени приказов на покупку и продажу какой-либо одной ценной бумаги.

По результатам этого сопоставления биржа оформляет сделки, причем пары из приказов на покупку и продажу подбираются таким образом, чтобы *максимизировать количество проданных и купленных ценных бумаг.* Очевидно, что при такой организации торгов устанавливаемый биржей курс (P_E) (цена, взвешенная по всем сделкам) уравновешивает спрос на ценную бумагу с ее предложением. Математически это означает, что

$$P_E = \arg\left\{\max_{p} \min[D(p), S(p)]\right\}, \tag{28}$$

где D(p), S(p) - кривые спроса и предложения, которые соответствуют поданным на биржу заявкам. Графически решению (28) отвечает максимальная ордината пунктирной кривой $\varphi(p) = \min[D(p), S(p)]$, изображенной на рис. 17.

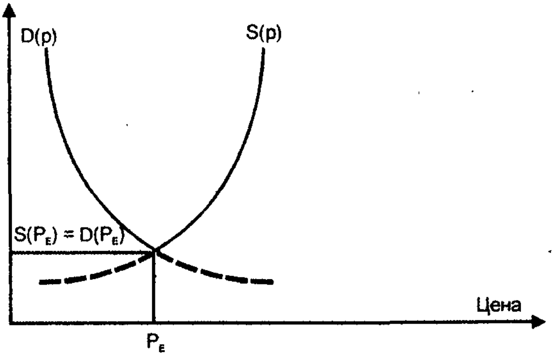


Рис. 17. **Курс как равновесная цена**

Заметим, что предложенная интерпретация не является универсальной и по мере нарушения условий совершенной конкуренции теряет свою привлекательность. Однако в любом случае, вне зависимости от конкурентных характеристик рынка ценных бумаг, формирование курсовых стоимостей всегда происходит под влиянием ценовых предпочтений его участников.

В свою очередь, эти предпочтения зависят от конкурирующих альтернатив: для одних - отказаться от продажи и довольствоваться дивидендами по ценной бумаге, для других - не покупать, а положить свои деньги, например, на депозит в банке. Принимая свои решения, заинтересованные стороны анализируют значительное число факторов как фундаментального характера (скажем, общеэкономическое состояние и политическую обстановку), так и текущего (рыночную конъюнктуру, спекулятивные мотивы, субъективную потребность в деньгах и т. д.). В случае коротких временных отрезков определяющую роль играет технический анализ; при увеличении инвестиционной дальновидности доминирует фундаментальная информация.

Опираясь на материал данного пособия, ограничимся здесь рассмотрением только двух факторов - *дохода по ценной бумаге* и *ставки сравнения* и проанализируем их влияние на величину курсовой стоимости. Не прибегая пока к математическому обоснованию, отметим одну из фундаментальных закономерностей, которую выявляет фондовый рынок: ***стоимость акций возрастает с ростом дивиденда и убывает пропорционально размеру банковской ставки.***

Вместе с тем следует оговориться, что для приобретаемых с дисконтом облигаций данное утверждение требует уточнения в своей первой части. Для них получаемый при погашении доход меняется в сторону, противоположную цене покупки.

Суть использования математических расчетов для определения того, во сколько должен оценивать рынок ту или иную ценную бумагу, сводится к следующему. Допустим, что заранее известен поток доходов y_1, y_2, ..., y_n по какой-либо ценной бумаге за весь срок ее действия n. За оценку ее курса принимается такой депозитный вклад P под банковскую ставку i, который к концу срока n возрастет до величины, равной наращенной сумме потока доходов $\left\{y_k, k = \overline{1,n}\right\}$ на ту же дату.

Как следует из этого определения, для инвестора с таким "бюджетом" (P) безразлично, положить ли все деньги на депозит или потратить их на ценные бумаги. Очевидно, что из совпадения наращенных сумм вытекает равенство современных величин, то есть ***формула для расчетов курса*** примет следующий вид:

$$P = \frac{y_1}{(1+i)} + \frac{y_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{y_n}{(1+i)^n}, \qquad (29)$$

иначе говоря, курсовая стоимость оценивается суммой всех дисконтированных доходов.

То, что мы записали, можно рассматривать как теоретическую, или справедливую, цену. Участвующий в сделках инвестор волен придерживаться отличных от теории соображений, например дисконтировать по ставке доступных для него финансовых операций. В результате подобных разночтений устанавливаемая на рынке стоимость ценной бумаги будет отличаться от расчетной оценки (29). Так, в случае превышения это означает, что рынок переоценивает торгуемую бумагу, и в этом случае ее выгодно продавать, если же наоборот, то предпочтительной становится покупка.

В общем случае последнее слагаемое в (29), наряду с дивидендной выплатой, содержит также доход инвестора по рассматриваемой ценной бумаге: а) при погашении - для облигаций или б) за счет продажи - в случае акций. Таким образом, его можно записать в виде суммы финального дивиденда (купонного платежа) D_n и финальной выплаты F:

$$y_n = D_n + F,$$

где F - номинал в случае (а) и соответственно доход от продажи в случае (б).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) **"Вечная облигация"**. Пусть срок погашения облигации достаточно велик. В этом случае фактом погашения облигации по номинальной стоимости можно пренебречь: $F/(1 + i)^n \approx 0$, а слагаемые в (29) рассматривать как члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $b_n = y/(1 + i)^n$, где y - купонный платеж ($y_1 = y_2 = ... = y$). По формуле суммы членов бесконечной прогрессии $S_\infty = \frac{b_1}{1-q}$

получим *курсовую стоимость облигации*:

$$P = \frac{y}{i},$$

где доход y равен произведению купонной ставки на номинал F, то есть

$$\textit{курсовая стоимость} = \frac{\text{купонная ставка}}{\text{банковская ставка}} \times \textit{номинал.}$$

Отсюда понятно, что если купонная ставка по облигации совпадает с применяемой ставкой дисконтирования, то оценка текущей стоимости такой облигации будет равна ее номиналу.

2) **Бескупонная облигация с погашением по номиналу**. Полагая в (29) $y_1 = y_2 = ... = y_{n-1} = 0$, $y_n = F$, найдем цену n-периодной бескупонной облигации, выраженную через ее номинальную стоимость F:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

или в процентах к номиналу:

$$P(\%) = \frac{100\%}{(1+i)^n}.$$

Например, для одноперiодной облигации $n = 1$ инвестор, формируя заявку, указывает цену покупки, ориентируясь на условия аукциона и приемлемую для него доходность j:

$$P\% = \frac{100\%}{1+j}.$$

3) **Привилегированная или простая акция с известным размером дивиденда**. В этом случае $F = 0$, так как акции эмитентом не погашаются; $y_1 = y_2 = ... = y_n = y$. Полагая, что n стремится к бесконечности, придем к тем же формулам, что и в п. 1).

4) **Облигации с периодической выплатой процентов, погашаемые в конце срока**. Пусть дата покупки совпадает с датой купонных платежей или с датой выпуска. Пользуясь обозначениями формулы (29), придем к следующему потоку доходов $\left\{y_i, i = \overline{1, n}\right\}$:

$$y_1 = y_2 = ... = y_{n-1} = y, \; y_n = y + N,$$

где $y = rN$ - купонный платеж, r - купонная ставка, N - номинальная цена. Отсюда получим курсовую стоимость:

$$P = \frac{N}{(1+i)^n} + rN\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^k}. \tag{30}$$

Обозначая через K первое слагаемое этой формулы, приведем ее к равенству:

$$P = K + rN\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right),$$

которое эквивалентно соотношению:

$$P = K + \frac{r}{i}(N - K).$$

Последняя формула связывает текущую цену P с дисконтированной величиной K финальной выплаты N и четко выделяет роль купонного процента r.

Формула (29) курсовой стоимости P получена при условии, что дата покупки совпадает с датой дивидендного платежа или с датой выпуска. Пусть покупка производится между двумя купонными выплатами со сдвигом τ, отнесенным к длительности купонного периода. В этом случае цену Р следует скорректировать с учетом наращения на момент покупки. Скорректированная таким образом цена должна быть равна величине:

$$P_\tau = P(1 + i)^\tau.$$

Пример. Определить ориентировочную рыночную стоимость облигации номиналом 100000 руб. при условии, что срок погашения облигации через 3 года, купонная ставка - 10% годовых, ставка банковского процента i = 4%

Подставляя данные примера в расчетную формулу (30), найдем курс:

$$P = \frac{100000}{(1{,}04)^3} + \frac{10000}{(1{,}04)} + \frac{10000}{(1{,}04)^2} + \frac{10000}{(1{,}04)^3} = 116662 \text{ (руб.)}.$$

Если же воспользоваться нижней формулой, то ее первое слагаемое

$$K = \frac{100000}{(1{,}04)^3} \approx 88888,$$

сомножитель

$$\frac{r}{i} = \frac{0{,}1}{0{,}04} = 2{,}5$$

и вся формула в целом дает значение

$$P \approx 88888 + 2{,}5(100000 - 88888) = 116668 \text{ (руб.)},$$

то есть с точностью до арифметических округлений - тот же результат.

Пример. Определите, по какой цене (в процентах к номиналу) будет совершена сделка купли-продажи "однопериодной" облигации на предъявителя при условии, что годовой купон - 10%, сделка заключается за 18 дней до выплаты дохода, а расчетный год считается равным 360 дням (прочие ценообразующие факторы, а также налогообложение в расчет не принимать).

При этом следует учесть, что получателем дохода (процентов) по облигации в данном случае будет ее предъявитель, то есть покупатель.

Очевидно, что в силу близости даты покупки к сроку погашения удержанием с номинала можно пренебречь и при определении цены сделки необходимо учесть ту часть дохода, которая причитается продавцу за время владения облигацией. В результате получим:

$$P = 100\% + \frac{10\%(360 - 18)}{360} \approx 109{,}5\%.$$

5) **Депозитный сертификат**. Такие сертификаты (заемные свидетельства) выдаются банками в обмен на размещаемые у них средства. Депозитный сертификат предназначен только для юридических лиц; срок его обращения не может превышать 1 года. Коммерческий банк при досрочном предъявлении депозитного сертификата к оплате не обязан возвращать деньги, если иное не предусмотрено условиями выпуска. Возможна уступка прав требования по сертификату, то есть перепродажа его на

вторичном рынке. При этом расчет текущей стоимости зависит от возможных за период действия сертификата изменений процентной ставки.

Пример. Пусть депозитный сертификат был выпущен на сумму 1000 руб. под 12% годовых. Следовательно, при его гашении через год владелец получит 1120 руб.

Предположим, что через полгода ставка уменьшилась до 6%. Тогда стоимость этого сертификата за полгода до его погашения будет оцениваться величиной:

$$P = \frac{1120}{(1{,}06)^{1/2}} \approx 1088 \text{ (руб.)}.$$

При неизменной ставке и на ту же дату его цена составила бы величину:

$$P = \frac{1120}{(1{,}12)^{1/2}} \approx 1058 \text{ (руб.)},$$

то есть снижение уровня процента вызвало прирост цены на величину:

$$\Delta P = 1088 - 1058 = 30 \text{ (руб.)}.$$

Пример. Что выгоднее производственному предприятию (с учетом налогообложения прибыли в 32% годовых): инвестировать 1 млн. руб. на депозит в банке сроком на год с выплатой 21% годовых или купить депозитный сертификат того же банка со сроком погашения через год и выплатой 17% годовых (доход от покупки депозитного сертификата облагается налогом по ставке 15%)?

Подсчитаем доходы предприятия D_1 и D_2, которые оно может получить от помещения денег на банковский счет и соответственно в депозитный сертификат. Учитывая налоги, найдем, что доход от вложения денег в депозит банка

$$D_1 = 1 \text{ млн. руб.} \times 0{,}21 \times 0{,}68 = 142{,}8 \text{ тыс. руб.},$$

а прибыль от покупки сертификата

$$D_2 = 1 \text{ млн. руб.} \times 0{,}17 \times 0{,}85 = 144{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

Вторая величина больше, поэтому выгоднее купить сертификат.

Приведенные здесь формулы позволяют получить ориентировочные оценки курсовой стоимости, зависящие от выбранной ставки сравнения и ожидаемых доходов. Однако даже для "однобумажного" рынка соискатели ценной бумаги и ее продавцы могут опираться на различные, приемлемые для них ставки и учитывать, наряду с оговоренными, множество других ценообразующих факторов, в том числе риски, ликвидность, оперативные данные и фундаментальную информацию.

В результате называемые цены будут различны, а курсовая стоимость сформируется в ходе рыночного усреднения. Те же формулы можно применять для получения возможных значений при установлении договорной цены в индивидуальных сделках, когда окончательный выбор происходит по итогам переговоров.

Глава 3
Математические основы финансового анализа в условиях риска и неопределенности

3.1. Риски и их измерители

Случайность и неопределенность как факторы, создающие риск

До сих пор мы имели дело с финансовыми задачами, в которых интересующие нас характеристики однозначно определялись при заданных значениях влияющих на них детерминированных факторов. Вместе с тем реальность финансового рынка такова, что не располагает к детерминированному толкованию его задач: при таком подходе решения, как правило, носят весьма приближенный характер и дают грубые оценки, не учитывающие вероятностного происхождения и (или) неопределенности участвующих в задаче параметров.

Как и в общей схеме исследования операций для задач, решаемых участниками финансового рынка, можно выделить **контролируемые** и **неконтролируемые** (неподвластные оперирующей стороне) факторы.

Среди последних, в зависимости от информированности о них, различаются *неопределенные* и случайные. При этом к ***случайным*** параметрам относятся те, относительно которых известны необходимые для описания случайных величин (случайных процессов) характеристики: законы распределения или, по крайней мере, их первые моменты - математические ожидания и дисперсии.

Для ***неопределенных*** факторов вероятностные суждения о них полностью отсутствуют; в лучшем случае предвидения оперирующей стороны о возможных последствиях подкрепляются знанием диапазонов численных значений влияющих переменных.

Поясним сказанное на **примере** будничной задачи пассажира метро, следующего со станции А на станцию В, имеющую два выхода в город: по ходу поезда - выход С и от хвостового вагона - выход D. Обозначим длину платформы через ℓ и пусть для определенности учреждение F, в которое спешит наш пассажир, расположено ближе к выходу D. Рационализируя свое поведение, гражданин старается угадать место посадки так, чтобы по прибытии на станцию В оказаться ближе к пункту назначения F.

Очевидно, что при полном знании он сядет в последний вагон. В общем случае пассажир-"оптимизатор" стремится занять положение x (считая от D), экономящее его путь по станции В до требуемого выхода. Такой пассажир при полном незнании взаимного расположения F, C и D (неопределенность) будет выбирать x так, чтобы свести к минимуму максимальное из двух возможных расстояний (рисков) x и ℓ - x, то есть будет решать следующую минимаксную задачу:

$$\min_{x} \{\max(x, \ell - x) \mid 0 \le x \le \ell\}.$$

Тогда его выбор, как легко понять из рис. 18, определится условием $x = \ell - x$.

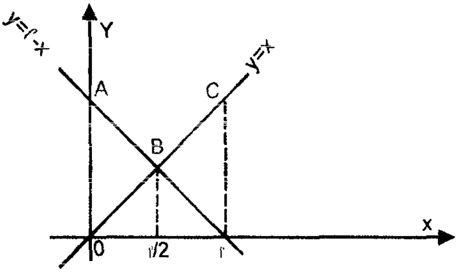


***Рис. 18.* Графическое решение минимаксной задачи**

На этом графике ломаная ABC представляет график функции $\varphi(x) = \max(x, \ell - x)$, а ее низшая (переломная) точка B дает искомое решение $x = \ell/2$. Отсюда следует, что в условиях неопределенности предпочтительное место посадки, что собственно и отражается повседневным опытом, есть середина платформы.

При вероятностном знании (случайность) мнения пассажира о том, какой из выходов выгоднее, - будут различны. Здесь разница проявляется через значение вероятностей (весов) p и q его противоположных суждений о том, к которому выходу будет ближе F. Пусть p - вероятность того, что F ближе к D, а q - вероятность альтернативы ($p + q = 1$). В этом случае риски x, $\ell - x$ уже неравнозначны, а взвешиваются с вероятностями p и q, то есть задача пассажира примет вид:

$$\min_x \{\max(px, q(\ell - x) / 0 \le x \le \ell\},$$

а ее решение находится из уравнения:

$$px = q(\ell - x),$$

то есть $x = q\ell$, $\ell - x = p\ell$.

Таким образом, чтобы определиться с расстоянием x на станции отправления A, пассажиру следует разделить протяженность ℓ обратно пропорционально известным ему вероятностям p и q. Например, при $p = 4/5$ избегающий риска пассажир, сообразуясь с этой вероятностью, займет место $x = \ell/5$.

В качестве финансовой аналогии рассмотренного выше можно привести, например, **задачу** о диверсификации единичного вклада по двум депозитам: рублевому и в валюте.

Наращенная сумма такого вклада на конец периода начисления, скажем года, запишется в виде:

$$S = x_0(1 + r) + \frac{(1 - x_0)}{K_0} \times (1 + d)K_1.$$

В этой формуле r и d - процентные ставки по рублевому и валютному депозитам; K_0, K_1 - курс доллара к рублю в начале и конце периода; дробь x_0 определяет пропорцию, в которой вклад разделяется на рублевую и валютную части.

Согласно принятым обозначениям x_0 - доля рублевого вложения; остаток $(1 - x_0)$ вкладчик конвертирует в доллары и помещает на валютный депозит. В конце срока с помощью обратной конвертации по курсу K_1 валюта переводится в рубли и итоговая рублевая наличность определяется суммой S. Очевидно, что для вкладчика важно определить пропорцию x_0 наилучшим, в смысле приумножения своего богатства, образом.

Пусть будущий курс K_1 (курс валюты на конец срока депозита) известен. Тогда задача становится элементарной. Депозиты будут равновыгодны, если множители наращения $(1 + r)$ и $\frac{K_1(1+d)}{K_0}$ совпадают. В этом случае депозитное вложение доллара с предварительной конвертацией и без нее дает одинаковый результат, то есть $K_0(1 + r) = K_1(1 + d)$.

При нарушении этого условия в пользу рубля (рублевый депозит выгодней) курс K_1 будет меньше величины

$$\alpha = \frac{K_0(1+r)}{(1+d)}$$

и все нужно хранить в рублях ($x_0 = 1$); наоборот, при $K_1 > \alpha$ выгодным становится валютный вклад: его-то и следует использовать ($x_0 = 0$).

В реальности ***будущий курс валюты*** точно неизвестен. Он может быть задан коридором возможных значений ($K_1 \in [a, b]$), с наличием вероятностных характеристик или без них. Заметим, что диапазонную неопределенность при необходимости можно смоделировать вероятностной, рассматривая величину K_1 как случайную и равномерно распределенную в интервале (a, b).

Рассмотрим **задачу** инвестора как игру с природой, которая может назначать доллару любой курс K_1 в заданном промежутке [a, b].

Здесь можно выделить два крайних случая, когда неопределенность снимается. Очевидно, что если $b < \alpha$, то $K_1(1 + d) < K_0(1 + r)$ при всех возможных вариантах реализации неопределенности $K_1 \in [a, b]$, и тогда следует использовать только безрисковую компоненту ($x_0 = 1$).

В случае, когда $a > \alpha$ (то есть при самом неблагоприятном для валютного депозита курсе $K_1 = a$ он все равно выгоднее), оптимальным объектом вложения становится рисковый актив ($x_0 = 0$).

Для промежуточного варианта, когда $\alpha \in [a, b]$, доходность сравниваемых активов зависит от того, в каком из двух диапазонов $I_1 = [a, \alpha]$ или $I_2 = [\alpha, b]$ окажется значение курса K_1. Чтобы смягчить проигрыш, который дает однородный вклад в случае ошибочных предсказаний, целесообразно его диверсифицировать по двум депозитам. Как выбрать наилучшую пропорцию x_0 смеси?

Очевидно, что доходность комбинированного вклада будет ниже, чем для оптимальной чистой стратегии (заранее неизвестной), но выше доходности ошибочной чистой стратегии. Так, при $K_1 \in I_1$ риск смешанной стратегии определяется ее проигрышем по сравнению с наращением на рублевом депозите ($x_0 = 1$). Отсюда и из формулы для наращения S найдем величину недобора:

$$F(x_0, K_1 \in I_1) = (1 + r) - S = \frac{1}{K_0}(1 - x_0)(K_0(1 + r) - K_1(1 + d)).$$

Аналогичная формула возможных потерь в случае $K_1 \in I_2$ имеет вид:

$$F(x_0, K_1 \in I_2) = \frac{1}{K_0} x_0(K_1(1 + d) - K_0(1 + r)).$$

Допустим, что осторожный инвестор, желающий обеспечить себе твердый доход, придерживается критерия минимизации наибольшего из этих двух рисков. Математически это означает, что он решает следующую минимаксную задачу:

$$\min_{x_0} \max \{F(x_0, K_1 \in I_1), F(x_0, K_1 \in I_2)\}.$$

Очевидно, что

$$F(x_0, K_1 \in I_1) \le F(x_0, a), F(x_0, K_1 \in I_2) \le F(x_0, b).$$

Таким образом, задача свелась к определению оптимального значения x_0 из условия:

$$\min_{x_0} \max \{F(x_0, a), F(x_0, b)\},$$

и уравнение $F(x_0, a) = F(x_0, b)$ для определения наилучшей пропорции x_0 примет вид:

$$(1 - x_0)(K_0(1 + r) - a(1 + d)) = x_0(b(1 + d) - K_0(1 + r)).$$

Откуда после очевидных упрощений найдем формулу оптимальной (в смысле минимакса) пропорции:

$$x_0 = \frac{\alpha - a}{b - a}.$$

Как следует из приведенных выше неравенств, это решение дает гарантированный результат, то есть независимо от варианта реализации неопределенности $K_1 \in [a, b]$ потери заведомо не превысят минимаксного значения рисков.

В качестве **примера** возьмем следующий набор исходных данных: $K_0 = 5500$; $r = 0,2$; $d = 0,1$, и пусть годовой прогноз инвестора для возможных значений будущего курса K_1 ограничивается вилкой неопределенности: $a = 5600$, $b = 6100$.

При этих условиях параметр $\alpha = \frac{5500 \times 1,2}{1,1} = 6000$ и оптимальная пропорция примет значение $x_0 = \frac{6000 - 5600}{6100 - 5600} = 0,8$, то есть 80% рублевой наличности надо разместить под ставку $r = 0,2$, а остальные 20% следует конвертировать в доллары и положить на валютный депозит.

Задачу о депозите можно продолжить, *заменив неопределенность вероятностным описанием курса K_1*. Подобная постановка нам еще встретится при изложении общей задачи об оптимальном портфеле, поэтому здесь мы ее рассматривать не будем.

Отмеченная выше разница между риском и неопределенностью относится к способу задания информации и определяется наличием (в случае *риска*) или отсутствием (при *неопределенности*) вероятностных характеристик неконтролируемых переменных. В упомянутом смысле эти термины употребляются в ***математической теории исследования операций***, где различают задачи принятия решений при риске и соответственно в условиях неопределенности.

Риск как несоответствие ожиданиям

В подобных задачах окончательный выбор основан на оценивании и сравнении различных возможных альтернатив. При этом предполагается, что для каждого мыслимого способа действия прогнозируемые последствия могут из-за влияния неконтролируемых факторов не совпасть с тем, что произойдет на самом деле. Вызванные данными расхождениями потери (а возможно, и приобретения) зависят от меры случайности этих рассогласований, а также от их амплитудных характеристик (величины рассогласований). Чем больше разброс возможных значений относительно ожидаемой величины, тем выше риск.

Таким образом, каждый результат по каждому допустимому варианту взвешивается по ***двум критериям***. Один дает *прогнозную* характеристику варианта, а другой - меру возможного расхождения: *риск*.

Например, в качестве первого критерия может быть среднее значение (математическое ожидание) возможного результата; второй критерий дает его изменчивость (степень риска). При этом, как правило, рискованность варианта возрастает с ростом ожидаемой результативности.

Таким образом, каждый результат по каждой сомнительной альтернативе взвешивается по двум этим критериям. На что решится оперирующая сторона, зависит от ее отношения к риску, от того, в каких пропорциях она готова обменять дополнительные порции риска на дополнительные порции выигрыша. Подробно эти вопросы будут изучаться в разделе, посвященном модели поведения инвестора.

Меры риска

Ответ на вопрос "Что принять за меру риска?" зависит от содержания конкретной задачи, которую решает финансовый аналитик. В приложениях широко применяют различные типовые конструкции, основанные на показателях изменчивости или вероятности сопряженных с риском состояний.

Так, финансовые риски, вызванные колебаниями результата вокруг ожидаемого значения (например, эффективности) оценивают с помощью дисперсии или ожидаемого абсолютного уклонения от средней. В задачах управления капиталом распространенным измерителем степени риска является *вероятность возникновения убытков или недополучения доходов по сравнению с прогнозируемым вариантом.*

3.2. Среднеквадратическая характеристика риска

Опираясь на формулы доходности (22), (23), можно понять, что при действии стохастических причин любое ее конкретное значение r является реализацией определенной случайной величины R. При этом ожидаемый результат оценивается математическим ожиданием E(R), а его колеблемость - дисперсией V(R).

Чем больше дисперсия (вариация), тем в среднем больше отклонение, то есть выше неопределенность и риск. За степень рискованности таких вложений зачастую принимают величину среднеквадратического отклонения $\sigma(R) = \sqrt{V(R)}$.

Доходность R - относительная характеристика. Поэтому для измерения ее риска достаточно ограничиться *абсолютным показателем рассеяния σ(R).* Этого нельзя сказать об абсолютных характеристиках (доходе, валовом выпуске, цене и т. д.). Для них в качестве информативной может оказаться такая относительная мера рассеяния, как *коэффициент вариации.*

Для детерминированной эффективности величина σ(R) равна нулю и вложение становится безрисковым: его эффективность не отклоняется от ожидаемого значения. *Использование* ***среднеквадратического отклонения (СКО) в качестве меры риска*** *особенно удобно тогда, когда распределение вероятностей имеет форму колокола.* В такой ситуации, аппроксимируя нормальным законом с параметрами E(R) и σ(R), мы можем предсказать вероятность любого данного отклонения от ожидаемой доходности.

В самом деле, из теории известно, что для нормального распределения вероятность того, что удаленность от середины не превысит δ, вычисляется по формуле:

$$P(|R - E(R)| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ - функция Лапласа, $\sigma = \sigma(R)$.

В частности, при $\delta = \sigma$ получим вероятность уклонения в пределах одного СКО:

$$P = 2\Phi(1),$$

что в соответствии с таблицей значений функции $\Phi(x)$ дает 68% шансов попадания в интервал $(E(R) \pm \sigma)$.

Пример. Случайная доходность ценной бумаги имеет нормальное распределение с ожидаемым значением $E(R) = 8\%$ и риском $\sigma = 14\%$. Тогда с вероятностью 0,68 данная ценная бумага принесет доход в интервале -6% (8 - 14) и 22% (8 + 14).

Как измеритель риска показатель СКО не делает различия между разнонаправленными отклонениями, будь-то благоприятное (в сторону возрастания доходности) или злонамеренное, при котором полученный результат хуже ожидаемого.

В том случае, если направления "ухода" для инвестора небезразличны, он может воспользоваться модифицированной характеристикой, измеряющей риск только невыгодных значений. В ее основе лежит понятие ***полудисперсии***, которая считается по убыточным уклонениям и обнуляет квадраты всех превышений. В дискретном случае расчет полудисперсии может проводиться по формуле:

$$V^*(R) = \sum p_i (r_i - E(R))^2,$$

где берутся только те значения r_i, которые меньше $E(R)$.

С формальной точки зрения, к обсуждаемому показателю можно прийти, основываясь на случайной величине:

$$U(R) = \min\{R, E(R)\}.$$

С ее помощью полудисперсия получается как усредненное по вероятностям значение квадрата разности $W = U(R) - E(R)$. Отсюда в случае непрерывного распределения с плотностью $f(r)$ будем иметь следующую формулу:

$$V^*(R) = E(W^2) = \int_{-\infty}^{E(R)} (r - E(R))^2 f(r)dr.$$

Применяя ее к условиям разобранного выше, примера придем к половинной, по сравнению с вычисленной ранее, вероятности: $p^* = \Phi(1) = 0{,}34$, которая соотносится только с неблагоприятными исходами. Это означает, что имеется 34% шансов того, что фактический результат будет находиться в интервале минус одно СКО от ожидаемого значения $E(R)$, то есть от -6% до 8%.

Таким образом с вероятностью 0,34 ценная бумага даст разочаровывающий результат, который хуже среднего.

Как видно из формулы дисперсии $V(R) = E[R - E(R)]^2$, она не дает полной картины линейных уклонений $\Delta(R) = R - E(R)$, более наглядных для оценивания рисков.

Тем не менее задание дисперсии позволяет установить связь между линейным и квадратичным отклонениями с помощью известного *неравенства Чебышева.*

Вероятность (Вер) того, что случайная величина отклоняется от своего математического ожидания больше, чем на заданный допуск δ, не превосходит ее дисперсии, деленной на δ^2.

Применительно к случайной эффективности R можно записать:

$$\text{Вер}(|R - E(R)| > \delta) \le \frac{V(R)}{\delta^2}. \qquad (31)$$

Отсюда видно, что незначительному риску по среднеквадратичному отклонению соответствует малый риск и по линейным отклонениям: точки R с большой вероятностью будут располагаться внутри δ-окрестности ожидаемого значения E(R), то есть линейные уклонения в среднем уменьшаются по мере уменьшения квадратичных уклонений.

Пример. Сравним по риску вложения в две акции: A и B. Каждая из них по-своему откликается на возможные рыночные ситуации, достигая с известными вероятностями определенных значений доходности.

	Ситуация 1		Ситуация 2	
	вероятность	доходность	вероятность	доходность
A	0,5	20%	0,5	10%
B	0,99	15,1%	0,01	5,1%

Выбранные акции таковы, что имеют одинаковую ожидаемую доходность: $e_A = 0{,}5 \times 20 + 0{,}5 \times 10 = 15\%$, $e_B = 0{,}99 \times 15{,}1 + 0{,}01 \times 5{,}1 = 15\%$. Измерим риск отклонением по абсолютному значению разницы между "фактом" и ожиданием.

Найдем эти отклонения: $\Delta_{A1} = 20 - 15 = 5\%$, $\Delta_{A2} = 15 - 10 = 5\%$, $\Delta_{B1} = 15{,}1 - 15 = 0{,}1\%$, $\Delta_{B2} = 15 - 15{,}1 = 9{,}9\%$.

Оценивая ожидаемый риск средним абсолютным отклонением, получим его меру для каждой акции: $\varepsilon_A = 5\%$, $\varepsilon_B = 0{,}99 \times 0{,}1 + 0{,}01 \times 9{,}9 = 0{,}198\%$. Измеряя изменчивость среднеквадратичным отклонением, придем к следующим мерам рисков:

$$\sigma_A = \sqrt{0{,}5 \times 5^2 + 0{,}5 \times 5^2} = 5\%, \quad \sigma_B = \sqrt{0{,}99 \times (0{,}1)^2 + 0{,}01 \times (9{,}9)^2} = 0{,}995\%.$$

Из сопоставления всех найденных значений видно, что превышение риска по активу A сохраняется независимо от способа измерения ε и σ, то есть данные меры изменчивости взаимно согласованы.

3.3. Риск разорения

Особый вариант риска связан с разорением. В общем случае этот риск порождается такими большими "минусовыми" отклонениями ($R < E(R)$), которые не оставляют инвестору возможность их компенсировать. Попробуем определить вероятностную меру разорения, приписывая ей вероятность осуществления подобного события.

Пример. Предположим, что на рынке могут возникнуть только два исхода и на каждый из них акции А и В откликаются неслучайным образом. Вероятности этих исходов и соответствующих им значений доходности зададим следующей таблицей.

	Исход 1		Исход 2	
	вероятность	доходность	вероятность	доходность
А	0,2	5%	0,8	1,25%
В	0,2	-1%	0,8	2,75%

Согласно этой таблице доходности акций, в отличие от предыдущего примера, однозначно определяются состояниями рынка, реализованными с заданными вероятностями ($p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,8$). Прослеживая по таблице отрицательную связь между эффективностями, можно утверждать, что коэффициент корреляции $\sigma_{AB} = -1$. В рассматриваемом случае ожидаемые доходности акций совпадают:

$$e_A = 5 \times 0,2 + 1,25 \times 0,8 = 2\%,$$

$$e_B = -1,0 \times 0,2 + 2,75 \times 0,8 = 2\%$$

и дисперсии (квадратичные характеристики рисков) также совпадают:

$$V_A = (5 - 2)^2 \times 0,2 + (1,25 - 2)^2 \times 0,8 = 2,25,$$

$$V_B = (-1 - 2)^2 \times 0,2 + (2,75 - 2)^2 \times 0,8 = 2,25.$$

Заодно можно убедиться, что коэффициент корреляции

$$\sigma_{AB} = \frac{E(r_A r_B) - e_A e_B}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{0,2 \times 5(-1) + 0,8 \times 1,25 \times 2,75 - 2 \times 2}{\sqrt{2,25}\sqrt{2,25}} = -1.$$

Предположим теперь, что инвестор взял деньги в долг под процент, равный 1,5%. Ставка процента по кредиту ниже ожидаемой доходности по акциям, которые будут приобретены на заемные деньги, поэтому действия инвестора вполне разумны.

Однако, если инвестор вложит деньги в акции А, то при исходе 1 он выиграет (5 - 1,5) = 3,5%, а при исходе 2 проиграет (1,25 - 1,5) = - 0,25%, причем с вероятностью $p_2 = 0,8$. Напротив, если он вложится в актив В, то разорение ему грозит с вероятностью $p_1 = 0,2$ в первой ситуации (исход 1), когда он теряет (- 1 - 1,5) = - 2,5%.

Подсчитаем ожидаемые потери (П) при покупке акций А и В соответственно:

$$П_A = 0,8 \times 0,25 = 0,2; \; П_B = 0,2 \times 2,5 = 0,5.$$

Как видим, в первом случае они меньше. Зато риски разорения, оцениваемые через вероятность наступления события, наоборот, при приобретении акций А будут больше (0,8 > 0,2). Это превышение возможности банкротства должно отпугивать осторожного вкладчика, который к тому же "играет" на заемном капитале, от акций А в пользу бумаг В.

В свою очередь, ожидаемый риск $П_А < П_В$ склоняет его к выбору в пользу акций А. Как действовать в подобной ситуации инвестору? Это зависит от его индивидуальных предпочтений, выражаемых, в том числе, *функцией полезности инвестора* - понятием, которое будет изучаться в следующем разделе.

Сравнивая в описанных примерах ситуации, полезно отметить, что при равенстве ожидаемых значений доходности, дисперсий и при отсутствии собственных средств риск разорения может быть различным.

Пример. Продолжим пример и рассмотрим два способа снижения риска разорения: разделение вклада по вложениям (А и В) и разделение капитала по источникам (собственный и заемный).

Диверсификация вложений. На такую возможность снижения риска указывает наличие полной отрицательной корреляции $\sigma_{AB} = -1$. Эта отрицательная связь обусловлена противоположными реакциями активов А и В на возможные исходы: при изменении рыночной ситуации проигрыш по одной из бумаг смягчается выигрышем по другой. Отсюда появляется возможность такого комбинирования активов, при котором достигаемая доходность смеси независимо от исхода будет достаточна для погашения взятого кредита.

Пусть x_A, x_B - доли вложений в акции А и В, $x_A + x_B = 1$. Доходность смеси:

$$R = x_A R_A + x_B R_B = x_A R_A + (1 - x_A) R_B,$$

где R_A, R_B - случайные доходности акций А и В. Очевидно, что ситуационные доходности смешанного вклада равны:

для первого исхода

$$r_1 = 5\% x_A + (1 - x_A)(-1\%),$$

и для второго исхода

$$r_2 = 1{,}25\% x_A + (1 - x_A) \times 2{,}75\%.$$

Отсюда придем к условиям гарантированного неразорения:

$$\begin{cases} r_1 = 6x_A - 1 > 1{,}5, \\ r_2 = 2{,}75 - 1{,}5x_A > 1{,}5. \end{cases}$$

Решая эту систему неравенств, получим:

$$0{,}42 < x_A < 0{,}83.$$

Выбирая пропорции x_A, $x_B = 1 - x_A$ в соответствии с найденным диапазоном, инвестор полностью исключает риск разорения.

Более того, полная обратная корреляция активов ($\sigma_{AB} = -1$) позволяет распределить вложения таким образом, чтобы получить безрисковую по среднеквадратической характеристике комбинацию, то есть комбинацию с детерминированной эффективностью ($\sigma^2(R) = 0$). В самом деле, с учетом $\sigma_{AB} = -1$, $\sigma_A{}^2 = \sigma_B{}^2 = 2{,}25$ и по правилам теории вероятностей дисперсия эффективности смеси:

$$\sigma^2(R) = x_A{}^2\sigma_A{}^2 - 2x_Ax_B\sigma_A\sigma_B + x_B{}^2\sigma_B{}^2 = 2{,}25(x_A - x_B)^2.$$

Таким образом, выбирая $x_A = x_B = 1/2$, то есть вкладываясь в каждый актив половиной капитала, инвестор добивается детерминированной доходности $r = 2\%$, что одновременно избавляет его и от риска разорения.

Диверсификация капитала. Риск разорения можно также снизить, увеличивая в "единичном" вкладе *долю собственных средств*. Обозначим эту долю через ϑ. Очевидно, что выплаты процентов по долгу при наличии собственных средств ϑ уменьшатся по сравнению с их отсутствием ($\vartheta = 0$) на величину, определяемую произведением ставки процента на ϑ.

Снижение этих выплат сужает условия разорения: риск разорения отменяется, если доход инвестора от акции перекроет объем задолженности. Так, если

$$101{,}25\% \geq 101{,}5\% \ (1 - \vartheta),$$

то есть при $\vartheta \geq 0{,}0025$ элиминируется риск по акциям А. Аналогично, чтобы гарантированно исключить риск разорения от приобретения акций В, доля собственных средств ϑ должна удовлетворять условию:

$$99\% \geq 101{,}5\% \ (1 - \vartheta),$$

то есть $\vartheta \geq 0{,}0246$, что вдесятеро превышает требования к собственному капиталу по сравнению с вложением в акции А.

3.4. Показатели риска в виде отношений

Только что мы убедились, что с ростом доли личных средств (наряду с заемными) инвестора при покупке ценных бумаг риск его разорения падает. Но достигается это ценой снижения рентабельности собственного капитала. Финансисты поэтому стремятся найти определенный компромисс между риском разорения и рентабельностью. Для этого они ограничивают риск, измеряемый отношением максимума потерь Y к величине собственного капитала некоторым приемлемым для них пороговым значением (ξ_1 и ξ_2):

$$K_1 = \frac{Y}{C} < \xi_1$$

или с учетом вероятности потерь:

$$K_2 = \frac{pY}{C} < \xi_2.$$

В этих формулах K_1, K_2 - ***коэффициенты риска***; Y - максимально возможная сумма убытка, руб.; p - вероятность потерь; C - объем собственных денежных ресурсов с учетом точно известных поступлений, руб.; ξ_1, ξ_2 - позиционные ограничения на риск.

В финансовом менеджменте чаще применяют обратные коэффициенты $\frac{C}{Y}$ и $\frac{C}{pY}$, которые уместно назвать ***коэффициентами покрытия рисков*** и которые ограничиваются снизу $\left(>\frac{1}{\xi_1},>\frac{1}{\xi_2}\right)$.

Здесь в знаменателе стоят неблагоприятные риски-отклонения Y, взвешенные, по необходимости, с учетом их вероятности. В числителе указываются размеры фонда собственных средств, которыми названные риски могут покрываться.

Дадим с этих позиций интерпретацию распространенного в бухгалтерской практике *коэффициента Кука*:

$$H_K = \frac{\text{собственный капитал}}{\text{Активы, взвешенные с учетом риска}}.$$

Здесь в качестве весов рассматриваются риски-вероятности. Их изначальный смысл состоит в том, что они указывают вероятность потери соответствующего актива.

Их же инструктивный смысл, обусловленный задачами нормативного регулирования, которые решает Центральный банк, хотя и коррелирует с изначальным, но частично искажает фактические вероятности в пользу этих задач. В частности, с целью сохранения финансовой стабильности коммерческих банков (КБ) от них требуется соблюдение определенного минимального значения коэффициента Кука ($\geq h_{min}$).

Но вернемся к нашей интерпретации. Обозначим собственный капитал КБ через C и пусть A_i - объем его i-ого актива, а p_i - вероятность потери этого актива. При такой трактовке произведение p_iA_i дает ожидаемые потери по активу i, а $\sum_i p_i A_i$ в знаменателе дроби - ожидаемые потери в целом по активной части бухгалтерского баланса.

Таким образом, из нормативного ограничения h_{min} вытекает, что собственный капитал должен гарантированно покрывать часть ожидаемых потерь всех активов, равную дроби h_{min}:

$C \geq h_{min}$ × ожидаемые потери всех активов.

Пусть, например, имеется только один, абсолютно рисковый актив A ($p = 1$), тогда при $h_{min} = 0{,}05$ это неравенство означает, что средства, "пропавшие" в данном активе, не должны превосходить 20-кратного размера собственного капитала.

С этих позиций можно дать интерпретацию и других нормативов, скажем, ликвидности и платежеспособности. Мы, однако, этого делать не будем по причине неактуальности для дальнейшего изложения.

Дробные риски не нормированы, то есть могут меняться в произвольных границах, однако их численные значения так или иначе связаны с вероятностью: альтернатива с большим показателем K_1 имеет и более высокую вероятность разорения.

3.5. Вероятностные риски

О возможных уклонениях от ожидаемого результата можно говорить как о *рисках неопределенности*, а о вероятностях этих уклонений - как о **вероятностных рисках**. Последние, в частности, *измеряют вероятности нежелательных событий, отрицательно или даже разрушительно влияющих на финансовые результаты.* Ограничимся здесь примерами двух видов подобных рисков: кредитного и депозитного.

Если существует кредитный риск, то соответствующий актив либо принесет к концу периода определенный доход (который обычно выше, чем у безрискового актива), либо не вернется в полном объеме. *Вероятность, с которой этот актив не будет возвращен, и является* ***кредитным риском.***

Очевидно, что пропажа части активов чревата, например, для коммерческого банка не только снижением доходности, но и возможной нехваткой средств для погашения обязательств. В этом смысле нормативные ограничения рисков по различным категориям активов (наличность, ценные бумаги, ссуды и т. д.), которые устанавливает Центральный банк, выполняют роль инструментов управления в общей системе регулирования банковской деятельности.

Риски пассивов, по мнению автора, заслуживают не менее пристального внимания вопреки тому, что в инструкциях Центробанка им не отводится должного места. Позиция автора опирается на факты нашей жизни, когда мы с вами оказывались свидетелями (хорошо, если не участниками) банкротств даже крупных банков по причине массового оттока депозитов. Справедливости ради, отметим, что частично этот тип риска учитывается в завышении одноименных нормативов по активам, где, например, риск долгосрочных кредитов приравнен единице.

Под ***рискованными пассивами*** *следует понимать пассивы с вероятностным характером или неопределенностью их изъятия в течение срока, на который рассчитывается финансовый результат.* В качестве примера можно назвать депозиты до востребования и остатки на расчетных счетах предприятий - клиентов КБ. За ***меру*** такого ***риска (депозитного)*** целесообразно принять *вероятность оттока пассивов в течение рассматриваемого срока.*

Очевидно, что депозитный риск может привести к потере активов, которые банк будет вынужден потратить на выполнение своих обязательств перед вкладчиками. В подобной ситуации *депозитный риск индуцирует риск активов* и осложняет финансовое положение коммерческого банка.

Пример. В общем случае депозитный риск зависит от длины анализируемого периода и динамики изъятия вкладов. Для наших целей достаточно его простейшего описания через вероятность (q) оттока депозитов за данный период.

Если отзываемые депозиты оплачиваются за счет имеющихся активов и начальный актив совпадает с начальным пассивом (А = П), то ожидаемый процентный доход банка составит:

$$e_М = П(r_А - r_П) - П \times q(1 + r_А),$$

где $r_А$, $r_П$ - ставки по активам и пассивам, то есть ожидаемый доход равен безрисковой марже за вычетом потерь из-за прогнозируемого ухода пассивов в объеме П × q.

Здесь депозитный риск целиком перешел в риск активов: формула не изменится и запишется точно так же для случая безрисковых пассивов П и кредитного риска q.

Очевидно, что рисковые активы и пассивы можно трактовать как безрисковые, корректируя при этом вероятностные характеристики процентных ставок таким образом, чтобы получить эквивалентные финансовые результаты. При этом потери (изъятия) части рисковых активов (пассивов) переводятся в адекватные изменения процентных ставок, начисляемых на их исходные значения (без учета потерь).

Пример. Покажем, как это делается. Пусть a - актив, одновременно свободный от кредитного риска ($\varsigma = 0$) и от риска процентной ставки (r_a - детерминированная величина, $\sigma_a^2 = 0$). Тогда проценты в конце периода составят величину $S = ar_a$. При наличии кредитного риска процентные выплаты становятся случайной величиной, для которой можно записать следующий ряд распределения:

S	ar_a	$-a$
P	$1 - \varsigma$	ς

Этой таблице однозначно соответствуют вероятности эквивалентной процентной ставки R_a:

R_a	r_a	-1
P	$1 - \varsigma$	ς

Отсюда найдем ее математическое ожидание:

$$e_a = r_a(1 - \varsigma) - \varsigma$$

и дисперсию:

$$\sigma_a^2 = E(R_a^2) - e_a^2 = \varsigma(1 - \varsigma)(1 + r_a)^2.$$

Пусть кредитный риск $\varsigma = 0{,}05$, а безрисковая ставка $r_a = 0{,}1 = 10\%$. В данном случае риск актива можно перевести в риск случайной процентной ставки с ожидаемым значением $e_a = 0{,}1 \times 0{,}95 - 0{,}05 = 0{,}045 = 4{,}5\%$ и дисперсией $\sigma_a^2 = 0{,}05 \times 0{,}95 \times (1{,}1)^2 = 0{,}575$ (риск $\sigma_a = 0{,}758 = 7{,}58\%$).

3.6. Двухкритериальная трактовка риска

Пусть имеется набор альтернатив и каждая альтернатива характеризуется двумя показателями: убытком Δ_i и его вероятностью p_i: $\alpha_i = (\Delta_i, p_i)$. Инвестор склоняется к выбору такой альтернативы, для которой:

$$\Delta_i \to \min, \; p_i \to \min, \qquad (32)$$

то есть желает свести к минимуму и вероятностный риск, и риск-уклонение.

Так, в примере п. 3.3 риск альтернатив А и В можно представить векторами $\alpha_A = (0{,}25\%, 0{,}8)$ и $\alpha_B = (2{,}5\%, 0{,}2)$. Сопоставляя их, приходим к выводу, что альтернатива А лучше по критерию потерь, но хуже по риску-вероятности. Здесь нет доминирования преимуществ ни по одной из альтернатив, и окончательный выбор связан с компромиссом.

На него можно пойти, основываясь, например, на скаляризации критериев p и Δ показателем ожидаемого убытка $\Pi = p\Delta$ и выбирая альтернативу по минимальному значению этого показателя: $p_i\Delta_i \xrightarrow[i]{} \min$. Результатом такого выбора будет вариант А с $\Pi_A = 0{,}2 = \min(0{,}2;\, 0{,}5)$.

Еще один прием компромисса состоит в разделении вклада по активам А и В согласно правилу минимакса. Переписывая его в терминах нашего примера, получим минимаксную задачу:

$$Z = \min_x \{\max(x_A\Pi_A, (1 - x_A)\Pi_B)\}.$$

Ее решение $x_A = \frac{5}{7}$ находится из уравнения:

$$\Pi_A x_A = \Pi_B(1 - x_A),$$

где $\Pi_A = 0{,}2$; $\Pi_B = 0{,}5$. Полученная пропорция позволяет снизить риск до значения $Z(x_A = \frac{5}{7}) = \frac{1}{7} < \min(\Pi_A, \Pi_B)$, с той же ожидаемой доходностью $e_Z = 2\%$.

В дальнейшем, в разделе по оптимальному портфелю, мы продемонстрируем влияние диверсификации на снижение дисперсионной меры риска (среднеквадратичного отклонения). В частности, там будет показано, что за счет определенного смешения активов с полной отрицательной корреляцией ($\sigma_{AB} = -1$) можно достичь даже нулевого (в смысле среднеквадратичного отклонения) риска.

Рассмотренный здесь частный пример тем не менее обнаруживает ***общее положение***: наличие у риска двух сторон - *вероятности* и *уклонения* (цены). Катастрофические последствия больших уклонений Δ даже при малом шансе *p* требуют самого тщательного анализа подобных исходов.

Среди уже рассмотренных скалярных измерителей риска можно выделить те, чья конструкция содержит элементы как риска-отклонения, так и риска-вероятности: это прежде всего *среднеквадратические* меры (СКО и дисперсия) и показатели риска, задаваемые *минимаксом.* Подобные числовые характеристики представляют собой скалярную свертку двухкритериального риска (32).

Одно и то же значение дисперсии σ^2 случайной величины воспринимается по-разному в зависимости от размера M ожидаемого результата. Соотнося числовые значения этих показателей - дисперсию с математическим ожиданием, придем к относительной характеристике риска в виде известного нам из теории вероятностей *коэффициента вариации*:

$$K = \sigma/M.$$

Эту меру рассеяния можно также рассматривать как свертку, заменяющую двухкритериальную задачу на максимум среднего выигрыша и минимум риска ($M \to \max$, $\sigma \to \min$) однокритериальной минимизацией относительного риска ($\sigma/M \to \min$).

Пример. Пусть A - вклад, размещенный в рисковый актив под ставку r_a. Под рисковым будем понимать актив, подверженный кредитному риску. Обозначим вероятность возможной утраты этого актива через ς.

Учитывая, что размер актива в конце рассматриваемого срока принимает различные значения с некоторыми вероятностями, можно считать эту величину дискретной случайной величиной, что позволяет записать для нее ряд распределения. В нашем случае этот ряд задается таблицей:

A	a	O
P	1 - ς	ς

Математическое ожидание для этой случайной величины $e_A = (1 - \varsigma)a$. Сравнивая табличные значения со средним e_A, найдем риски отклонения:

$$^{+}\Delta = a - e_A = \varsigma a; \; ^{-}\Delta = O - e_A = - (1 - \varsigma)a.$$

Применяя формулу дисперсии:

$$\sigma_A{}^2 = (1 - \varsigma)^{+}\Delta^2 + \varsigma\, ^{-}\Delta^2,$$

получим квадратическую меру риска:

$$\sigma_A{}^2 = \varsigma(1 - \varsigma)a^2$$

как результат свертки рисков-вероятностей и рисков-отклонений.

Выше мы определили математическое ожидание величины актива, приносящего процентный доход, отсюда ожидаемый размер наращенной суммы

$$e_S = e_A(1 + r_a)$$

и соответственно ожидаемая процентная ставка

$$e_a = (e_S - a)/a = (1 - \varsigma)(1 + r_a) - 1 = r_a(1 - \varsigma) - \varsigma,$$

что совпадает с оценкой, полученной ранее другим способом в п. 3.5.

Пример. Усложним предыдущий пример. Будем считать, что инвестиции A состоят из двух частей: собственного капитала K и займа П. Имея на руках эту сумму, инвестор размещает ее таким образом, чтобы в конце срока получить процентную маржу $\text{М} = \text{А}(1 + r_\text{А}) - \text{П}(1 + r_\text{П}) - \text{К}$. Эта маржа с учетом тождества $\text{А} = \text{П} + \text{К}$ равна разности:

$$\text{М} = r_\text{А}\text{А} - r_\text{П}\text{П} = (r_\text{А} - r_\text{П})\text{П} + r_\text{А}\text{К},$$

где $r_\text{А}$, $r_\text{П}$ - соответственно ставки по выданным кредитам и привлеченным депозитам ($r_\text{А} > r_\text{П}$).

При отсутствии каких бы то ни было рисков фактический и ожидаемый результаты совпадают с тем, что дает эта формула. В таком случае эффективность (рентабельность) собственных средств определяется величиной

$$\text{ЭСС} = \frac{\text{М}}{\text{К}} = \frac{(\text{К} + \text{П})r_\text{А} - \text{П}r_\text{П}}{\text{К}} = r_\text{А} + \frac{\text{П}(r_\text{А} - r_\text{П})}{\text{К}}. \qquad (33)$$

Полученное равенство есть хорошо узнаваемое из финансового менеджмента определение ***эффекта финансового рычага (ЭФР)*** - приращение к рентабельности собственных средств (РСС = $r_\text{А}$), получаемое благодаря использованию кредита (П), несмотря на платность последнего ($r_\text{П}$).

Изменим слегка ситуацию, введя в действие кредитный риск (как в предыдущем примере), сохранив при этом гипотезу о безрисковости пассивов, означающую безрисковость сроков и ставок привлечения. Ради упрощения будем считать совпадающими сроки займа П с периодом предоставления кредитов.

Усредняя в исходной формуле маржу М, заменим случайную ставку $r_\text{А}$ на ее ожидаемое значение $e_\text{А} = r_\text{А}(1 - \varsigma) - \varsigma$. В результате получим выражение математического ожидания процентного дохода с учетом риска ς:

$$e_\text{М} = [r_\text{А}(1 - \varsigma) - \varsigma]\text{А} - r_\text{П}\text{П} = [r_\text{А} - \varsigma(1 + r_\text{А})](\text{К} + \text{П}) - r_\text{П}\text{П},$$

которое можно упростить до следующей формулы:

$$e_\text{М} = \text{П}(r_\text{А} - r_\text{П}) + \text{К}r_\text{А} - \varsigma(\text{П} + \text{К})(1 + r_\text{А}).$$

В этом выражении можно выделить безрисковую маржу, сделанную на заемных средствах и проценте с капитала, и ожидаемый урон по наращению из-за риска ς (вычитаемое). Соотнося ожидаемые потери с величиной собственных средств, придем, согласно общему определению п. 3.4, к мере риска, задаваемой следующей дробью:

$$\mu = \frac{\varsigma(\text{П} + \text{К})(1 + r_\text{А})}{\text{К}} = \frac{\varsigma(1 + r_\text{А})}{\rho},$$

где $\rho = \dfrac{\text{К}}{\text{П} + \text{К}}$ - коэффициент самофинансирования.

Таким образом, степень риска μ гиперболически убывает с ростом коэффициента самофинансирования ρ и меняется пропорционально вероятности "пропаж" ς. В свою очередь этот риск μ вносит элемент неопределенности в рентабельность собственного капитала и ослабляет действие финансового рычага. Действительно, в этих условиях величина ожидаемой рентабельности, как видно из формулы:

$$E(\text{ЭСС}) = \frac{e_{\text{М}}}{K} = r_{\text{А}} + \frac{\text{П}(r_{\text{А}} - r_{\text{П}})}{K} - \frac{\varsigma(1 + r_{\text{А}})}{\rho},$$

уменьшается по сравнению с детерминированным случаем (33) на величину риска $\mu = \varsigma(1 + r_{\text{А}})/\rho$.

Пример. Пусть некто взял в долг под ставку $r_{\text{П}} = 15\%$, а кредитует по ставке $r_{\text{А}} = 25\%$ и действует наполовину за свой счет ($\rho = 1/2$, П/К = 1). Тогда уже при кредитном риске $\varsigma = 0{,}2$ получим, что: Е(ЭСС) = 25% + (25% - 15%) - 2 × 0,2 × × 125% = - 15%, то есть риск разорения весьма велик.

3.7. Отношение к риску

Характер и динамика хозяйственных процессов во многом зависят от экономических побуждений, мотивов и личностных особенностей работающих людей. Человек - это неотъемлемая активная составляющая экономической системы, и познать ее без модельных представлений об экономическом поведении людей не представляется возможным.

Поэтому экономическая теория уделяет столь важное внимание формированию модели "человека экономического", в частности на основе постулата о его рациональном поведении.

Среднестатистический человек-оптимизатор постоянно находится в ситуации выбора между конкурирующими целями. Движимый поиском выгоды, он считает, прогнозирует, выбирает и конструирует свое поведение таким образом, чтобы улучшить собственное положение.

Однообразие его микроэкономических поступков облегчает развитие макроэкономических представлений. Что благоразумно для отдельной семьи, не станет бессмысленным для общества в целом.

Однако то, что остается от индивидуума после "научной" операции усреднения, не имеет ничего общего с его бесконечной сложностью, которая познается искусством. "Человек, всегда и везде, кто бы он ни был, любил действовать так, как он хотел, а вовсе не так, как повелевали ему разум и выгода; хотеть же можно и против собственной выгоды, а иногда и положительно должно" (Ф.М. Достоевский).

Функция полезности дохода

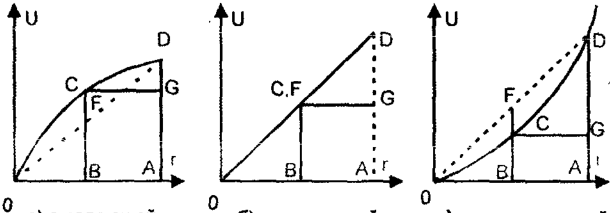
Современная теория финансов также базируется на аксиоматических предпосылках о поведении индивидуумов, но уже в качестве инвесторов при совершении операций на финансовых рынках. Их поведение предполагается рациональным и описывается в простейших ситуациях максимизацией ожидаемого значения функции полезности дохода (ФП).

Ее вид выбирается таким образом, чтобы *математические свойства функции соответствовали свойствам инвестиционных решений*, зависящим, в первую очередь, от отношения к доходу и сопряженному с ним риску. Те, кто знаком с методом производственной функции (ПФ), могут без труда усмотреть аналогию с построением типовых зависимостей выпуска от затрат.

Чтобы облегчить понимание предмета, пожертвуем математическими тонкостями, освободив место для графических иллюстраций. Читателю с обостренным чувством математической строгости можно рекомендовать специальную литературу с "недозированным" применением формализаций.

В наших рассуждениях будем исходить из ***упрощенного понятия полезности***, в соответствии с которым *все побуждения представительного инвестора полностью описываются одной числовой величиной - доходом, и чем больше доход, тем больше полезность от обладания им.* Таким образом, полезность рассматривается нами как неубывающая функция U(г) с единственной переменной - доходом г; примем, что U(0) = 0.

Теоретически могут существовать ***три типа возрастания функции U(г)***: с затухающими, неизменными и нарастающими приростами полезности ΔU при движении аргумента по оси дохода с одинаковым шагом Δг. Этим возможностям отвечают варианты графиков, изображенных на рис. 19.



а) с падающей отдачей

б) с постоянной отдачей

в) с возрастающей отдачей

Рис. 19. **Три типа возрастания полезности**

Подумаем, какой из этих типов функции полезности больше соответствует поведенческой характеристике инвестора. На рис. 19 абсциссы соответствуют доходу, а ординаты - значениям полезности. При сравнении кривых просматривается разница между (а), (б) и (в) в смысле оценок превышения полезности от выигрыша некоторой суммы (ВА) по сравнению с потерей той же суммы (ВО = ВА).

Так, для (а) - при одинаковых выигрышах и потерях последние воспринимаются более ощутимо (GD < ВС), в случае (в) - более ощутимы выигрыши (GD > ВС), а у (б) - оценки одинаковых приобретений и потерь равнозначны (GD = ВС).

Отсюда понятно, что экономическое поведение по типу (а), при котором человек больше боится потерять, чем желает приобрести, будет отличаться от типов (б) и (в) в пользу осторожных решений и умеренных действий. Этого почти достаточно, чтобы классифицировать кривую (а) как полезность для не склонных к риску инвесторов.

Чтобы разнообразить понимание проблемы, применим рис. 19 к поведению инвесторов, выбирающих между рисковым и безрисковым вложениями. Итак, пусть (а), (б), (в) - три вкладчика и каждый из них руководствуется своей кривой полезности, изображенной на рис. 19. Им предлагается на выбор поместить свои средства в безрисковую операцию с доходом 0В или принять на себя риск вложения с равновероятными исходами: получить доход 0А или не получить ничего (то есть 0). Заметим, что согласно условию ожидаемый доход E_r альтернативы, связанной с риском, тот же, что и для стабильного варианта: $E_r = 1/2$ 0А = 0В.

В соответствии с общей теорией будем считать, что каждый может сравнивать не только события, но и комбинации событий с данными вероятностями. В нашем случае - события А и 0 с вероятностями $P_A = P_0 = \frac{1}{2}$.

То же самое предполагается для связанных с этими событиями полезностей, то есть количественно определенная (выраженная числом) полезность понимается как объект, для которого подсчет математического ожидания является законным.

Теперь мы вправе ожидать следующего. Каждый из инвесторов сравнивает полезность (ВС) стабильного дохода (0В) с математическим ожиданием полезности E_u = BF (то есть E_u = 1/2AD) как функции случайного дохода и выбирает ту альтернативу, у которой значение сравниваемого показателя больше (max (ВС, BF)).

Проверяя это условие для каждой кривой на рис. 19, можно утверждать, что инвестор (а) остановится на безрисковом варианте (ВС > BF), для вкладчика (б) обе альтернативы (без риска или с ним) равнозначны (ВС = BF) и ему все равно, какой из них воспользоваться. Инвестор (в) предпочтет связанные с риском вложения с определенной ожидаемой прибылью стабильному получению этой ожидаемой суммы (ВС < BF).

Таким образом, каждый вид кривой полезности (а), (б), (в) дает один из "чистых" вариантов модели отношения человека к риску: не расположенный к риску (а); безразличный (нейтральный) (б); расположенный (склонный) к риску, у которого "полезность азарта" вытесняет полезность дохода (в). Переменчивость поведения в реальных сценариях сплошь и рядом не укладывается в один из этих типов: кривая полезности может иметь и выпуклые (рис. 19в) и вогнутые (рис. 19а) участки, например, такие как на рис. 20.

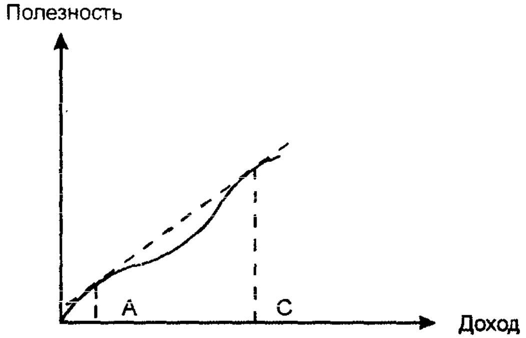


***Рис. 20.* Функция полезности с переменным отношением к риску**

Индивидуум, чье отношение к риску отражается данной кривой, может участвовать в азартных играх, когда он находится на выпуклом участке графика полезности (АС), а на вогнутых участках он избегает риска и готов оплачивать страховку.

Реальный опыт, основанный, в том числе, и на многочисленных специальных экспериментах, убеждает, что *большинство субъектов экономики (индивидуумы, фирмы, инвесторы и т. п.) в своих действиях и решениях* ***склонны к стабильности.***

В пользу такого вывода говорит, например, более высокий уровень ожидаемой эффективности рисковых вложений по сравнению с безрисковыми. При игнорировании риска вложения потекли бы к более эффективным, но менее надежным активам. В результате возросшего спроса на рисковые инвестиции их ожидаемые доходности поползли бы вниз до уровня эффективности безрисковых вложений.

То, что этого не происходит, свидетельствует о неприятии инвесторами большого риска. Подтверждение этому можно найти в самых различных областях экономической жизни: профессии с высоким уровнем риска гарантируют в среднем более высокую оплату, чем профессии с низким уровнем риска; для нестабильной экономики, в которой хозяйствующие субъекты преимущественно планируют свою деятельность на краткосрочную перспективу, характерны увеличенные ставки процентов; экономические агенты покупают страховки и предпринимают значительные усилия для диверсификации своих портфелей и т. д.

Мы надеемся, что перечисленного достаточно, чтобы убедить читателя в закономерности допущения несклонности инвестора к риску. Следовательно, мы с полным основанием можем следующим образом ответить на поставленный в начале данного подраздела вопрос - *наиболее адекватно поведение инвестора описывает графическая модель (а), изображенная в левой части рис. 19.* Эту строго вогнутую функцию называют ***функцией уклонения от риска***, а линейную и строго выпуклую функцию (рис. 19б и в) - соответственно ***нейтральной относительно риска*** и ***функ-***

цией стремления к риску. Здесь, пожалуй, уместно напомнить, что такое строго вогнутая и строго выпуклая функции. Первая характеризуется тем, что все точки любой дуги ее графика лежат над соответствующей хордой, а для второй - хорда выше любой дуги.

Концепция функции полезности является важнейшим элементом общей теории риска. В данной работе, опуская сложные теоретические построения, мы ограничимся достаточно простыми для использования в математических моделях функциями полезности.

Примерами такого рода функций являются ***квадратичная*** ($u = r - ar^2$), ***логарифмическая*** ($u = \ln r$), ***логарифмическая со сдвигом*** ($u = \ln(1 + ar)$), ***экспоненциальная*** ($u = 1 - \exp(-ar)$, ***степенная*** ($u = r^\alpha$, $0 < \alpha < 1$). Эти функции широко используют при математическом осмыслении инвестиционных задач и для выявления закономерностей финансового рынка.

Однако зависят они только от дохода r и поэтому не учитывают влияния внешних факторов на предпочтения человека (инвестора) и, следовательно, на течение кривых полезности. Тем не менее при их конструировании математические свойства подбирались таким образом, чтобы соответствовать типовым разновидностям инвестиционного поведения. Это определяет возможности их прикладного и теоретического приложений.

3.8. Типовые функции полезности дохода

В настоящем разделе мы прокомментируем наиболее распространенные типовые зависимости.

Квадратичная функция полезности

Рассмотрим следующий вид этой функции:

$$U(r) = ar + br^2 \ (a > 0,\ b < 0). \qquad (34)$$

Функция (34), известная еще как *полезность Неймана-Монгенштерна (ФП Н.-М.)*, широко используется в теории финансов, в частности - рынка ценных бумаг. В основе этой популярной функции лежит известная теорема Н.-М., в которой доказывается, что *при определенных допущениях индивид ведет себя таким образом, чтобы максимизировать ожидаемое значение полезности* (34). Мы также будем опираться на эту функцию в отдельных разделах модели оптимального портфеля и для равновесного анализа цен рисковых активов.

Из графика квадратичной зависимости (34) понятно, что как кривая полезности он имеет смысл только на ограниченном интервале $(0, -\frac{a}{2b})$, где предельная полезность $\frac{du}{dr} = a + 2br > 0$ (рис. 21).

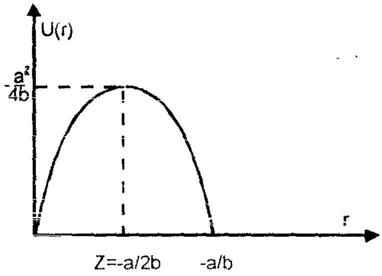


Рис. 21. **Квадратичная функция полезности**

Из-за этого анализ, проводимый с помощью такой простой функции, ограничен и может применяться только теми инвесторами, которые просчитывают варианты с возможностью дохода R ниже критического уровня Z = - a/2b. Здесь прописной R обозначен случайный доход с возможными значениями $r \in (0;\ -a/2b)$.

Пример. Рассмотрим простейшую иллюстрацию выбора по максимуму ожидаемой полезности (34). Возьмем два различных инвестиционных портфеля. При одинаковой ожидаемой величине отдачи один из них не связан с риском (доход полностью определен), а другой связан с риском.

Характеристики рискового портфеля зададим следующей таблицей распределения:

R - случайный доход	- 4	4
P - вероятности	0,5	0,5

Этот портфель сулит приращение вложенных средств на 4 ед. с вероятностью 0,5 или их потерю на те же 4 ед. с той же вероятностью 0,5.

Второй портфель с риском не связан и не обещает никаких изменений с вложенными средствами, зато позволяет сохранить их без всяких потерь. Иначе говоря, индивид сберегает, но не инвестирует, то есть данный портфель содержит только деньги.

Пусть функция полезности $U(r) = 1{,}2r - 0{,}1r^2$. Так как для первого портфеля доход R - случайная величина, то и U(R) - случайная величина с таким рядом распределения:

U(R)	U(- 4) = - 6,4	U(4) = 3,2
P	0,5	0,5

Посчитаем для него ожидаемую величину полезности:

$$E_u = E(U(R)) = 0{,}5(-6{,}4) + 0{,}5 \times 3{,}2 = -1{,}6.$$

Для второго портфеля доход есть неслучайная величина r = 0 и его полезность U(r = 0) = 0 также неслучайна, а потому ее ожидаемое значение совпадает с ней самой и равно нулю.

Таким образом, для безрискового портфеля величины ожидаемой полезности больше (0 > - 1,6), то есть инвестор предпочтет деньги.

Графически это решение выглядит следующим образом (рис. 22).

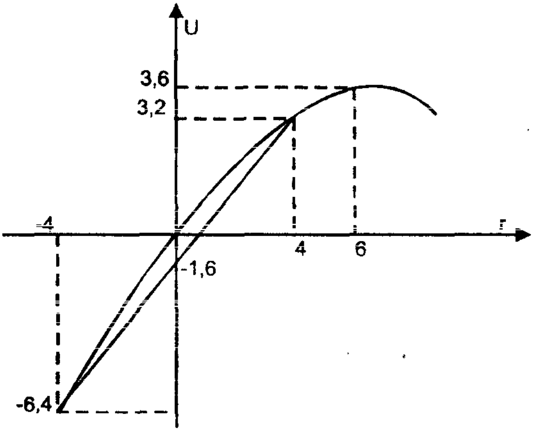
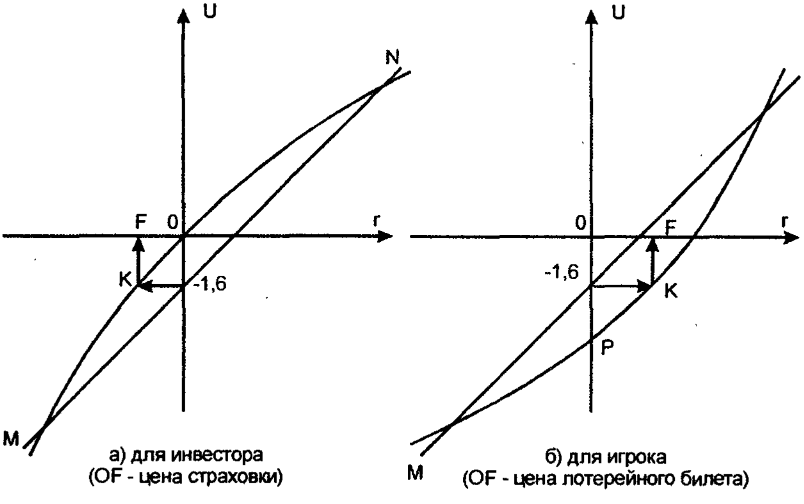


Рис. 22. **График простейшего выбора**

Зададимся вопросом: "А какой безрисковый доход имеет ту же полезность (- 1,6)"? Денежное выражение этой полезности (потеря полезности по сравнению с "замороженным" вкладом, то есть с нулем) можно найти графически, как это показано на рис. 23а.

Проведем горизонтальную линию от точки (0, - 1,6) до кривой полезности (точка K), а затем - вертикаль через точку K до пересечения с горизонтальной осью. Эквивалентная денежная сумма определяется абсциссой точки F. Принимающий решение готов заплатить эту сумму, чтобы исключить свое участие в игре, иначе говоря, - исключить риск с помощью страховки.



а) для инвестора
(OF - цена страховки)

б) для игрока
(OF - цена лотерейного билета)

Рис. 23. **Безрисковые эквиваленты простейшего выбора**

Для склонного к риску кривая полезности повернется вниз, и ее дуга окажется под прямой MN (рис. 23б). В результате уровень полезности безрискового портфеля опустится ниже отметки (- 1,6) до точки P, а отрезок OF будет справа и укажет ту сумму, которой готов пожертвовать любитель азарта, чтобы включиться в игру.

Заметим, что данный пример имеет демонстрационный характер. Ответ был очевиден с самого начала, и его можно угадать. В самом деле, поскольку сравниваемые активы равноэффективны, то не склонный к риску инвестор (модель с квадратичной функцией полезности) выберет тот вариант, который имеет меньший разброс результата, в нашем случае - безрисковый (23а), а для выбирающего риск предпочтительным окажется портфель "со случайностью" (23б).

Логарифмическая функция полезности

Эта функция имеет вид:

$$U(r) = \log_a r. \qquad (35)$$

Известно, что функция полезности задается с точностью до монотонно неубывающего преобразования. Поэтому выбор основания a у логарифма (35) принципиального значения не имеет и определяется удобством:

$$\log_a r - \log_a b \times \log_b r.$$

Впервые такая полезность была рассмотрена Д. Бернулли в связи с так называемым Петербургским парадоксом, изложенным в его статье для Императорской академии наук в Петербурге в 1738 г. Его рассуждения основывались на гипотезе о том, что полезность бесконечно малого выигрыша dx пропорциональна этому выигрышу и обратно пропорциональна денежной сумме, которой игрок обладает:

$$dU = U(x + dx) - U(x) = \frac{Kdx}{x}. \qquad (36)$$

Следовательно, при выборе надлежащих единиц числовой полезности можно считать, что K = 1 и прирост полезности от обладания суммой x_2 по сравнению с x_1, таким образом, равен:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

Превышение Δ_{12} полезности Δ_1 от выигрыша конечной суммы η по сравнению с антиполезностью $-\Delta_2$ потери той же суммы есть разность $\Delta_1 - \Delta_2$ (см. рис. 24).

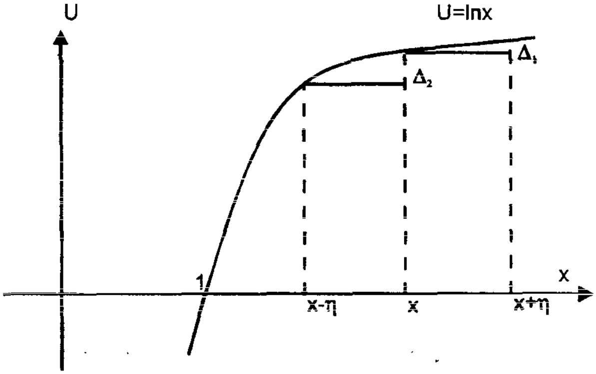


Рис. 24. **Логарифмическая функция полезности (x > 0)**

Здесь $\Delta_1 = \int\limits_{x}^{x+\eta} \frac{dZ}{Z} = \ln\frac{x+\eta}{x}$, $\Delta_2 = \int\limits_{x-\eta}^{x} \frac{dZ}{Z} = \ln\frac{x}{x-\eta}$. Вычитая, найдем:

$$\Delta_{12} = \ln\frac{x+\eta}{x} - \ln\frac{x}{x-\eta} = \ln\left(1 - \frac{\eta^2}{x^2}\right).$$

Таким образом, превышения нет, так как избыточность $\Delta_{12} < 0$, то есть при одинаковых выигрышах и потерях последние более ощутимы, чем первые.

И в завершение приведем следующую экономическую сентенцию, заимствованную из Адама Смита. "К бережливости нас побуждает желание улучшить наше положение, - говорит А. Смит, - и это желание, в конце концов, оказывается сильнее, чем стремление к наслаждениям, толкающее нас к расходам".

Пример. Парадокс Петербургской игры. Прежде чем перейти к нему, рассмотрим конструктивно схожие игры, но без парадокса. Каждая такая игра состоит из серии партий, и их число n оговаривается заранее. Перед началом каждой партии игрок уплачивает некоторый взнос μ, так что $n\mu$ - общий уплаченный им взнос. Предполагается, что игрок обладает неограниченным капиталом, то есть никакой проигрыш не может вызвать окончание игры.

Введем случайную величину X_K как (положительный или отрицательный) выигрыш при K-ом повторении игры. Тогда сумма $S_n = x_1 + ... + x_n$ является суммарным выигрышем при n повторениях игры, а $(S_n - n\mu)$ - общий чистый выигрыш. Пусть для определенности игра проводится машиной, при опускании в которую игроком взноса μ включается вероятностный механизм выигрыша X_K.

Если случайная величина X_K имеет конечное математическое ожидание $m = E(X_K)$, то согласно закону больших чисел среднее значение из n выигрышей оказывается близким к m и весьма правдоподобно, что при больших n разность $(S_n - nm) = n\left(\frac{S_n}{n} - m\right)$ окажется малой по сравнению с n.

Следовательно, если $\mu < m$, то при больших n игрок будет, вероятно, иметь выигрыш $S_n - n\mu = n\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)$ порядка $n(m - \mu)$.

Понятно, что $n(m - \mu) > 0$. По тем же соображениям взнос $\mu > m$ практически наверняка приводит к убытку.

В общем случае оговаривается существование не только $E(X_K)$, но и дисперсии $D(X_K)$, и закон больших чисел дополняется *центральной предельной теоремой (в курсе теории вероятностей)*. Последняя говорит о том, что весьма правдоподобно, что при $\mu = m$ чистый выигрыш $S_n - n\mu$ будет иметь величину порядка $\sqrt{n}$ и что при достаточно больших n этот выигрыш будет с примерно равными шансами положительным или отрицательным, то есть игра становится безобидной.

В отличие от представленной схемы *для Петербургской игры* платеж $E(X_K)$ равен бесконечности, и, следовательно, к ней нельзя применять закон больших чисел. Иначе говоря, при назначенном взносе μ невозможно выяснить, будет ли она для играющего благоприятной, убыточной или безобидной, и это несмотря на то, что ожидаемый выигрыш сулит бесконечность.

Тем не менее этот парадокс можно разрешить, вводя функцию полезности (35), то есть предполагая, что отношение игрока к деньгам описывается гипотезой (36). Покажем, как это делается.

Начнем с того, что познакомим читателя с самой игрой. В ней участвуют двое. Петр собирает взносы и реализует механизм случайного выигрыша по партиям: бросает монету раз за разом, пока она не выпадет "орлом". Он обязуется платить Павлу 2 дуката, если "орел" выпадет при первом бросании, 4 дуката - если при втором, 8 - если при третьем и т. д., так что каждый неудачный для него бросок удваивает величину платежа. Предположим, что мы хотим определить ожидаемый результат Павла.

Испытание (партия) Петербургской игры состоит в бросании правильной монеты до тех пор, пока не выпадет "орел". Если это случится на r-ом бросании, то игрок получает 2^r дукатов. Другими словами, "партийный" выигрыш представляет собой случайную величину, принимающую значения $2^1, 2^2, 2^3, \ldots$ с вероятностями $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \ldots$ соответственно.

Математическое ожидание формально определяется суммой

$\sum_{r=1}^{\infty} x_r f(x_r)$, в которой $x_r = 2^r$ и $f(x_r) = 2^{-r}$, так что каждое слагаемое равно единице.

Разумеется, что здесь x_r - r-е значение случайной величины x независимо от номера партии. Таким образом, конечного математического ожидания не существует и закон больших чисел "не работает".

Между тем от парадокса бесконечности вполне возможно уйти, если оценивать результат не в деньгах, а в единицах полезности. При таком подходе "истинная ценность" выигрыша измеряется его ожидаемой полезностью:

$$E(U(x)) = \sum_{r=1}^{\infty} U(x_r)f(x_r), \tag{37}$$

где согласно (35) $U(x_r) = \log_2 x_r$, а значение $x_r = 2^r$ принимается с вероятностью $f(x_r) = 2^{-r}$. Подставляя эти обозначения в (37), получим, что:

$$E(U(x)) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{2^r}. \tag{38}$$

Пусть $a_r = \frac{r}{2^r}$, тогда $\lim \frac{a_{r+1}}{a_r} = \frac{1}{2} < 1$, то есть выполняется признак сходимости бесконечного ряда $\{a_r\}$. Отсюда вытекает, что ожидаемая полезность (38), равная сумме U^* этого ряда, будет конечной: $E(U(x)) = U^*$.

Павел оценивает свой взнос μ в единицах полезности и потому его чистый результат определяется разностью $(S_n - n\log_2\mu)$, где $S_n = U(x_1) + \ldots + U(x_n)$ и при больших n $\frac{Sn}{n} \approx U^*$.

Короче, случай $\log_2\mu < U^*$ ($\mu < 2^{U^*}$) благоприятен для Павла, а случай $\log_2\mu > U^*$ ($\mu > 2^{U^*}$) неблагоприятен; при $\mu = 2^{U^*}$ получим безобидную Петербургскую игру при шансах 50 на 50% с чистым выигрышем или проигрышем порядка $\sqrt{n}$.

В данном примере переход от риск-нейтрального отношения ($U(x) = x$ - полезность денег совпадает с их количеством) к осторожности ($U(x) = \log_2 x$) позволил получить ответы на все поставленные вопросы.

Известны и другие приемы разрешения Петербургского парадокса. Из них наиболее близкий к изложенному здесь основан на введении переменного взноса $\mu = \log_2 n$ и видоизмененной записи закона больших чисел. Переменный взнос неудобен в игорном доме; однако Петербургская игра и без того неосуществима вследствие ограниченности имеющихся денежных средств.

Несмотря на игровой характер, этот пример имеет прямое отношение к современной финансовой теории, поскольку в нем выясняется, сколько следует платить за обладание рисковым активом, причем с учетом индивидуального отношения к риску. То же самое можно сказать и о концепции полезности и ее возможностях для анализа эффективности и отбора инвестиционных проектов с рисковыми условиями реализации.

Ступенчатая функция полезности дохода

Инвестор с начальным капиталом W получает случайный доход R. За меру риска его деятельности можно принять вероятность разорения. Тогда вероятность противоположного события (неразорения) является, как легко уяснить, математическим ожиданием полезности в виде следующей ступенчатой функции случайной величины (рис. 25):

$$U(R) = \begin{cases} 1, & \text{если } R + W \geq 0, \\ 0, & \text{если } R + W < 0. \end{cases} \tag{39}$$

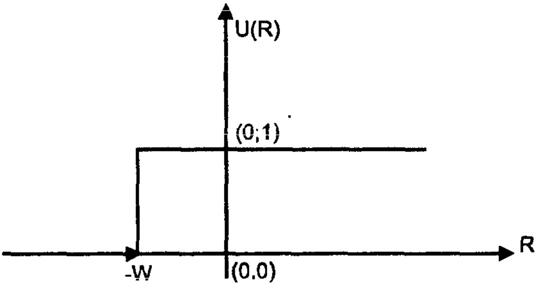


Рис. 25. **Функция полезности в задаче о разорении**

В самом деле, по определению математического ожидания

$$E(U(R)) = \int_{-\infty}^{\infty} U(R)f(R)dR\,,$$

где f(R) - плотность распределения вероятностей случайного дохода R. Для ступенчатой функции полезности (39) эта характеристика равна:

$$E(U(R)) = \int_{-W}^{\infty} f(R)dR = P(R \geq -W) = P(R + W \geq 0),$$

то есть определяет вероятность того, что полученный доход будет не меньше -W, иначе говоря, начального капитала W хватит, чтобы покрыть убытки (W ≥ - R).

Таким образом, стремление инвестора к максимизации ожидаемой полезности (39) побуждает его к поиску таких решений, которые дают максимум вероятности неразорения.

Для прикладного использования функции полезности (39), например, при диагностировании финансовой устойчивости, приходится получать выражение случайного дохода R в зависимости от влияющих факторов (например, для банка - процентного дохода в зависимости от объемов и структуры пассивов и активов) и сравнивать его с собственным капиталом W.

3.9. Функция полезности карты кривых безразличия

Вначале дадим несколько предварительных соображений. Естественно считать, что при выборе из доступных альтернатив инвестор сравнивает их между собой, руководствуясь ожидаемым доходом и риском. Не склонный к риску финансист заведомо отбраковывает невыгодные по данным показателям варианты.

Например, предоставлена возможность выбора между вложениями в два вида ценных бумаг, причем $m_1 > m_2$, а $\sigma_1 \le \sigma_2$. Любой разумный инвестор, конечно, вложит деньги в 1-й вид. Если, напротив, $m_1 \le m_2$, а $\sigma_1 > \sigma_2$, то инвестор выберет 2-й вид, поскольку с ним связана меньшая неопределенность, а по доходности он не уступает.

Но в общем случае, когда:

$m_1 < m_2, \sigma_1 < \sigma_2$

(или $m_1 > m_2, \sigma_1 > \sigma_2$),

однозначного разумного решения нет. Инвестор может предпочесть вариант с большим ожидаемым доходом, связанным, однако, с большим риском, либо вариант с меньшим ожидаемым доходом, но более гарантированным и менее рискованным. Сказанное отразим следующей диаграммой (рис. 26).

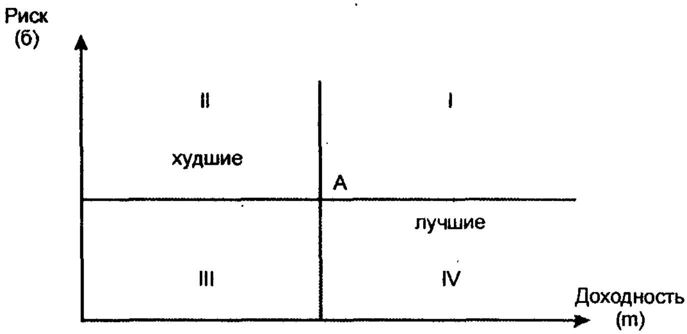


***Рис. 26.* Выбор варианта**

Установленные выше параметры сравнения по доходности и риску позволяют нанести на график-схему рис. 26 любые варианты, заданные в координатах m и σ. Пусть в качестве опорной взята альтернатива А. По отношению к ней все остальные можно представить в виде матрицы, изображенной на рис. 26. Те из них, которые попали в сектор II, следует рассматривать как менее привлекательные, чем А; все проекты ниже и правее точки А должны оцениваться как более выгодные. Для выбора между вариантом А и теми, которые располагаются в первом и третьем секторах, правила принятия решения четких ориентиров не дают. Здесь все зависит от субъективного мнения относительно риска и дохода, то есть от допускаемого инвестором компромисса между этими показателями.

Типы кривых безразличия в зависимости от отношения к риску

Выбор, который делает инвестор, во многом зависит от свойств его характера; от его склонности к риску; от того, сколькими порциями дохода он готов пожертвовать ради упрочения надежности в его получении и каков для него эффект замещения рисков доходами.

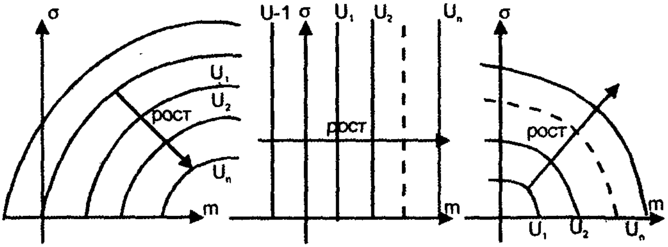
Эти рассуждения подразумевают наличие у инвестора некоторой функции U(σ, m), с помощью которой он может анализировать варианты, причем предпочтение отдается варианту с большим значением этой функции. При существовании такой зависимости эквивалентные варианты будут определяться из уравнения:

$$U(\sigma, m) = C.$$

Это уравнение неявным образом задает σ как функцию m при фиксированной правой части C. График этой функции соединяет все точки данного уровня полезности и называется ***кривой безразличия уровня C***. Для различных значений уровня получим карту кривых безразличия, и задача инвестора будет состоять в том, чтобы, исходя из своих бюджетных возможностей, подобраться к кривой безразличия с максимально возможным уровнем C.

Можно сказать, что полезность кривой безразличия для инвестора тем выше, чем больше уровень C. Этим и объясняется название рассматриваемой зависимости U(σ, m) как функции полезности карты кривых безразличия, или, кратко, ***уровневой функции полезности***.

Как и для функции полезности дохода (рис. 19), строение типовых уровневых кривых полезности зависит от "темперамента" субъекта. На рис. 27 изображены карты типовых кривых безразличия для нерасположенных (а), равнодушных (б) и склонных к риску (в).



а) неприятие риска
б) нейтральность к риску
в) уровневая полезность "азарта"

Рис. 27. **Три типа кривых безразличия (U1 < U2 < ... < Un...)**

Графики наглядно демонстрируют, что характер этих кривых отражает модели разных типов восприятия рисков. Инвестор (а), двигаясь по кривой безразличия, сохраняет уровень полезности своих вложений, компенсируя более высокий риск приростом ожидаемого дохода, и по мере восхождения требует на каждую дополнительную единицу риска все большей компенсации.

Субъект (в) по натуре - "безрассудный" игрок и ради риска готов "карабкаться" по кривой безразличия вверх вопреки потерям ожидаемого дохода.

Пример модели промежуточного поведения показывает инвестор (б): он безразличен к неопределенности σ и для него, чем крупнее ожидаемый выигрыш m, тем будет лучше, вне зависимости от сопровождающих этот выигрыш рисков.

При фиксированном доходе m и снижающемся риске полезность инвестиций у (а) растет, для (в) - падает, а в случае (б) - не меняется (рис. 27).

Уровневая функция полезности, выводимая из полезности Неймана-Монгенштерна

Рассмотрим квадратичную функцию полезности, отличающуюся от функции (34) наличием свободного члена, и возьмем его таким, что:

$$U(R) = aR + b(R - E(R))^2, \ (b < 0). \qquad (40)$$

Запись функции полезности Неймана-Монгенштерна (ФП Н.-М.) в форме (40) более наглядна, нежели в функции (34): инвестор считает полезным для себя увеличить доход R, но избегает при этом его отклонений от прогнозного значения E(R). Чем больше $|b|$, тем сильнее проявляется тенденция к снижению рисков-уклонений, связанных со случайностью, таким образом, $\frac{1}{|b|}$ ассоциируется с показателем склонности к риску. Переходя в функции (40) к ожидаемой полезности, получим *уровневую* ФП Н.-М.:

$$U(m, \sigma) = am + b\sigma^2, \qquad (41)$$

где $m = E(R)$, $\sigma^2 = E(R - E(R))^2$, $U(m, \sigma) = E(U(R))$.

Можно сказать, что как критерий максимизации выражение (41) представляет свертку двух критериев: максимума ожидаемого дохода m и минимума риска σ^2.

Подчеркнем, что функция полезности карты кривых безразличия (41) и функция полезности дохода (40) однозначно связаны друг с другом. Отсюда понятно, что решения инвестиционных задач, полученные по любой из этих функций, должны совпасть, а кривые безразличия можно рассматривать либо как траекторию постоянной полезности $U(m, \sigma)$, либо как траекторию постоянной ожидаемой величины полезности Н.-М. $E[U(x)]$.

Пример. Используя данные примера из п. 3.8, убедимся, что ФП (41) приводит к тому же результату, что и ФП (34). В нашем случае:

$U(m, \sigma) = E(U(R)) = 1{,}2E(R) - 0{,}1E(R)^2$.

Отсюда, применяя известную формулу $\sigma^2(R) = E(R^2) - E^2(R)$, получим

$U(m, \sigma) = 1{,}2m - 0{,}1m^2 - 0{,}1\sigma^2$. (42)

Сравним значения этой функции, используя характеристики первого и второго портфелей (тот же пример). Эти портфели сулят нулевые ожидаемые доходы ($m_1 = m_2 = 0$), и поскольку второй портфель безрисковый, то $\sigma_2^2 = 0$. Дисперсию дохода для первого (рискового) портфеля сосчитаем, воспользовавшись его рядом распределения:

$\sigma_1^2 = 0{,}5(-4)^2 + 0{,}5 \times (4)^2 = 16$.

Вычислим уровневые полезности каждого портфеля:

$U_1 = U(m = 0, \sigma_1 = 4) = -0{,}1 \times 4^2 = -1{,}6$; $U_2 = U(m = 0, \sigma_2 = 0) = 0$.

$U_2 > U_1$, поэтому получим то же, что и раньше: следует выбрать безрисковый портфель (рис. 28).

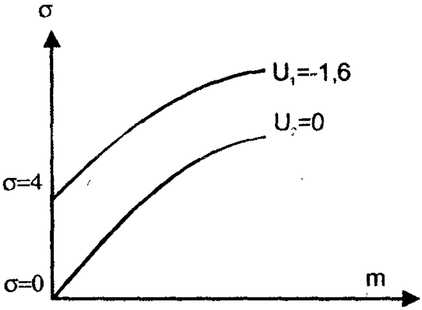


Рис. 28. **Кривая безразличия, на которой лежит рисковый портфель, расположена выше. Уровень кривой безразличия совпадает с ожидаемой величиной полезности дохода вдоль нее (см. пример п. 3.8)**

Пример. Рассмотрим простейшую задачу портфельных инвестиций и решим ее двумя способами: максимизируя ожидаемую полезность и с помощью уровневой функции полезности.

Итак, имеются два актива со случайными эффективностями R_1, R_2. Возможные значения этих эффективностей и их вероятности сведены в таблицу:

Вероятности (p)	0,2	0,8
R1	5%	1,25%
R2	-1%	2,75%

Пусть функция полезности инвестора

$U(R) = 1{,}2R - 0{,}1R^2$. (43)

Будем искать оптимальные пропорции x_1, x_2 ($x_1 + x_2 = 1$) составного актива по критерию ожидаемой полезности.

При этом способе полезность составного актива выступает как случайная величина со значениями, зависящими от долей x_1 и x_2. Комбинируя эти значения полезности с заданными вероятностями (p), придем к математической постановке интересующей нас задачи максимизации.

Чтобы воспользоваться этой схемой, запишем ряд распределения случайной эффективности смеси (составного актива):

Вероятности (p)	0,2	0,8
Доход "смеси" (R)	$5x_1 + (-1)(1 - x_1) = 6x_1 - 1$	$1,25x_1 + 2,75(1 - x_1) = 2,75 - 1,5x_1$

От него с помощью функции (43) легко перейти к ряду распределения случайных значений полезности U(R):

Вероятности (p)	0,2	0,8
Полезность (U(R))	$U_1(x_1) = 1,2(6x_1 - 1) - 0,1(6x_1 - 1)^2$	$U_2(x_1) = 1,2(2,75 - 1,5x_1) -$ $- 0,1(2,75 - 1,5x_1)^2$

и найти:

$$E(U(R)) = 0,2U_1(x_1) + 0,8U_2(x_1). \tag{44}$$

Дифференцируя это выражение по x_1, получим уравнение:

$$0,2(1,2 \times 6 - 0,2(6x_1 - 1)6) + 0,8(-1,2 \times 1,5 - 0,2(2,75 - 1,5x_1)(-1,5)) = 0,$$

из которого найдем, что $x_1 = 0,5$, то есть в каждый актив следует вложиться половиной наличности. Вычисляя (44) при $x_1 = 0,5$, найдем, что максимум ожидаемой полезности равен двум: $\max E(U(R)) = 0,2U_1(0,5) + 0,8U_2(0,5) = 2$.

Решим ту же задачу, опираясь на уровневую функцию полезности (42), выводимую из функции полезности инвестора (43). Для оптимизации по данному методу необходимо выразить ожидаемую доходность смеси и дисперсию этой доходности через неизвестные x_1 и x_2.

В примере п. 3.3 эти активы уже фигурировали и там было установлено, что $m_1 = m_2 = 2$ и $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 2,25$ и $\sigma_{12} = -1$. Отсюда легко получить характеристики составного актива: $m = 2$, $\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 - 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2 = 2,25(2x_1 - 1)^2$.

Подставляя эти формулы в функцию (42), получим следующую задачу максимизации:

$$2 - 0,1 \times 2,25(2x_1 - 1)^2 \underset{x_1}{\rightarrow} \max, \tag{45}$$

которая имеет очевидное решение $x_1 = 0,5$, что совпадает с ответом, найденным первым методом. Максимальный уровень, то есть значение критерия (45) на оптимальном решении $x_1 = 0,5$, тот же, что и у максимума ожидаемой доходности — 2.

Кривая безразличия для уровневой ФП Н.-М.

Ее уравнение выводится из уровневой ФП Н.-М. (41) и имеет вид:

$$\sigma = \sqrt{\frac{c - am}{b}}, \text{ где } m \geq \frac{c}{a}.$$

Этой зависимости соответствует карта кривых безразличия, изображенных на рис. 29.

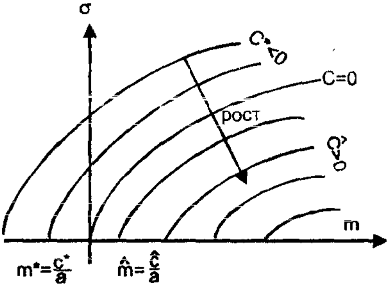


Рис. 29. **Кривые безразличия уровиевой функции полезности**

Как видим, характер полученных кривых согласуется с линиями уровня, нанесенными на рис. 27 для случая (а) (неприятие риска).

3.10. Снижение риска

Данная глава вводит читателя в ту область финансовой теории, которая занимается рисками. Чтобы не нарушить логики подачи материала, нам пришлось отказаться от обильного текстоемкого рассмотрения этих вопросов, оставив наиболее сложные из них на потом. В полупопулярном изложении конкретные финансовые инструменты (фьючерсы, опционы и т. д.) и методы ограничения риска достаточно подробно проявились в многочисленных изданиях по ценным бумагам и финансовой периодике.

Есть еще, конечно, накопленный опыт у различных финансовых институтов: коммерческих банков, инвестиционных компаний и пр. Однако в рыночных условиях его распространение сдерживается по той простой причине, которая в научных терминах именуется принципом технологической замкнутости. В этом, в частности, заключается не последний довод для автора в пользу изложения не набора одиночных сведений, а концептуальных положений и базовых понятий, необходимых в том числе и для освоения последующего материала.

И в завершение несколько слов *о задаче снижения риска.* Общая постановка проблемы исследования финансовых операций обязательно включает два основополагающих критерия: ожидаемый финансовый результат и риск. Оперирующая сторона может влиять на числовые значения этих критериев, учитывая изменения контролируемых переменных и собственные возможности управления некоторыми из них.

В свою очередь, неконтролируемые параметры находятся вне сферы действия и знаний того, кто разрабатывает и принимает решения по финансовой операции. Их учет возможен лишь на основе использования игровых принципов, в частности гарантированного результата, или прибегая к помощи ситуационного анализа.

Отсюда ясно, что снизить риск, оставаясь на уровне приемлемого финансового результата, можно за счет расширения состава контролируемых параметров, иначе говоря, за счет добавочной информации. Вместе с тем такое расширение должно быть экономически оправданным, то есть *цена добытых сведений не должна перекрывать выигрыш от их использования.*

Еще одно очевидное положение заключается в том, что успех финансовой схемы во многом зависит от тех конструктивных элементов, из которых она складывается. Отсюда вытекают еще два общеизвестных принципа ограничения риска: *диверсификация* и *страхование.*

Диверсификация предполагает включение в финансовую схему различных по своим свойствам активов. Чем их больше, тем, в силу закона больших чисел, значительнее (из-за взаимопогашения рисков-уклонений) их совместное влияние на ограничение риска. Подробнее этот эффект будет обсуждаться в следующей главе, посвященной оптимальному портфелю ценных бумаг.

В случае риска разорения используют ***страхование*** (перенесение убытков на других лиц с помощью гарантий), но это уже ближе к проблемам страхового дела и актуарной математики. В финансовом анализе в смысле страхования зачастую употребляют также термин *хеджирование*, имея при этом в виду любую схему, позволяющую ограничить риск.

Так, если инвестор сознательно использует противоположную реакцию разных ценных бумаг на одно и то же событие, то говорят, что он применяет хеджирование. В этом смысле можно сказать, что *хеджирование есть специальный случай диверсификации.*

Упомянем еще один из основных приемов борьбы с рисками, основанный на их распределении между большим количеством лиц. Здесь уже имеет место не диверсификация вклада по активам, а ***диверсификация актива по вкладам*** ("диверсификация наоборот"), например совместное инвестирование одного проекта разными лицами (инвестпулы).

Пример. Влияние информированности на степень риска финансовой операции проиллюстрируем историческим эпизодом, приведенным А. Толстым в романе "Черное золото". Но прежде ознакомим читателя с понятием "асимметричной информации". Упомянутая в названии "асимметрия" означает различную степень информированности, например, участников финансового рынка. В результате тот, кто полнее осведомлен, получает конкурентные преимущества и может рассчитывать на более высокие финансовые результаты.

Именно так случилось с бароном Ротшильдом - величайшим финансовым игроком на рынке ценных бумаг - ему повезло быть поблизости от битвы при Ватерлоо. Узнав о неожиданном разгроме Наполеона, он в утлой лодчонке, ночью, переплыл бурный Ла-Манш, загнал десяток лошадей, но поспел к открытию Лондонской биржи и встал на своем квадрате у колонны. Одежда его была в пыли, борода растрепана, глаза блуждали. Он униженно протягивал для продажи английские бумаги - это могло означать только то, что Наполеон вышел победителем при Ватерлоо. Началась паника, английские ценные бумаги полетели вниз, а тайные маклеры Ротшильда скупали их до того часа, когда решетчатые крылья оптического телеграфа принесли истинную весть о полном торжестве англичан. К вечеру этого дня Ротшильд стал самым богатым человеком в Европе.

Пример. Исключение риска с помощью страховки. Предположим, что владелец имеет недвижимость в сумме 50000 долл. Вероятность того, что он понесет имущественные убытки в 10000 долл., составляет 0,1. Если стоимость страховки равна возможному убытку (то есть страхование с точки зрения статистики обосновано) - страховой полис на покрытие возможного убытка в 10000 долл. будет стоить 10000 × 0,1 = 1000 долл.

В таблице показаны два варианта отношения к материальному имуществу: страховать его или нет.

Страхование	Вероятность потерь 0,1	Вероятность отсутствия потери 0,9	Ожидаемый размер имущества	Риск
Нет	40000	50000	m1 = 49000	σ1 = 3000
Да	49000	49000	m2 = 49000	σ2 = 0

Здесь $m_1 = 0,1 \times 40000 + 0,9 \times 50000 = 49000$. Абсолютный риск (σ), измеренный среднеквадратичным отклонением, составит:

$$\sigma_1 = \sqrt{0,1 \times 9^2 \times 10^6 + 0,9 \times 10^6} = 3000,$$

а относительный риск, измеренный коэффициентом вариации, будет равен $\eta_1 = \frac{\sigma_1}{m_1} = 0,06$.

Ясно, что при одном и том же ожидаемом состоянии материального имущества (полная компенсация потерь при страховом возмещении за вычетом стоимости полиса) страхование полностью исключает риск. Что бы ни случилось, благосостояние в любом случае будет на одном и том же уровне - 49000.

На этом рассмотрение примеров закончим, имея в виду, что диверсификация риска будет дана в следующей главе, а хеджированию будет посвящена вся вторая часть.

Глава 4

Задача об оптимальном портфеле ценных бумаг

Данный раздел посвящен проблеме формирования портфеля ценных бумаг. Ее постановка и решение даются при упрощающих допущениях об отсутствии связанных с инвестициями трансакционных издержек и налоговых обязательств. Считается, что в исходной точке инвестор располагает конкретной суммой денег и инвестирует их на определенный промежуток времени, покупая ценные бумаги. В конце этого промежутка он их распродает и получает доход за весь срок владения. Принимая решение, инвестор стремится к высокому доходу за весь период до распродажи портфеля и одновременно хочет, чтобы результат был настолько определенный, насколько это возможно. Вот вкратце сюжет, который составляет основу математического содержания этой главы.

Вначале дадим общую формализованную постановку задачи оптимизации портфеля, составляемого только из рисковых компонентов (ценных бумаг).

Затем для наглядности изучим "облегченный" двухвидовой портфель. Изменения портфельных свойств при добавлении безрискового актива и доказательство теоремы об инвестировании в два фонда рассмотрим на примере трехкомпонентного портфеля.

Далее охарактеризуем особенности, которые появляются при переходе к большеразмерному случаю (многокомпонентному портфелю). В заключение исследуем вопрос о соответствии оптимального состава портфеля инвестора структуре ценных бумаг, обращающихся на фондовом рынке, то есть портфелю рынка.

4.1. Модель задачи оптимизации рискового портфеля

Обозначим через x_j, $j = 1, ..., n$, - долю в общем вложении, приходящуюся на j-й вид ценных бумаг, так что:

$$\sum_{i=1}^{n} x_j = 1. \tag{46}$$

Эффективность портфеля:

$$R_p = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j, \tag{47}$$

где R_j - случайные эффективности с известными математическими ожиданиями $E(R_j) = m_j$ и дисперсиями $D(R_j) = \sigma_j^2$.

Не расположенный к риску инвестор действует в соответствии с теоремой Неймана-Монгенштерна, составляя портфель таким образом, чтобы максимизировать математическое ожидание полезности (34) дохода R_p. Очевидно, по общему свойству задач условной оптимизации, что с расширением выбора (47) (при росте n) шансы на более высокий уровень ожидаемой полезности увеличиваются, то есть ему и в самом деле приходится решать портфельную задачу. Из предыдущего материала мы знаем, что к одинаковому оптимальному результату можно прийти, пользуясь вместо (34) уровневой функцией полезности U(m, σ) (41).

В качестве целевой эту функцию, как уже отмечалось, можно рассматривать как скаляризацию двухкритериальной задачи оптимизации с ограничением (46) и критериями $E(R_p) \to \max$, $D(R_p) \to \min$. Постулируемые здесь критерии цели вытекают из утверждения, что инвестор при выборе между портфелями будет стремиться максимизировать свой ожидаемый доход при данной степени риска или минимизировать свой риск при данном уровне ожидаемого дохода.

Чтобы записать эту задачу через неизвестные $\{x_j, j = \overline{1,n}\}$, нам придется воспользоваться правилами теории вероятностей для получения ожидаемого значения и дисперсии случайной эффективности R_p. Переходя к математическому ожиданию суммы (47), получим формулу ожидаемого эффекта:

$$m_p = E(R_p) = \sum_{j=1}^{n} x_j E(R_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j .$$

В силу условия (46) величина m_p, будучи ожидаемым доходом на единицу капитала, является поэтому и характеристикой ожидаемой доходности.

Для записи дисперсии воспользуемся определением ковариации двух случайных величин R_i и R_j:

$$V_{ij} = E((R_i - m_i)(R_j - m_j)).$$

Отклонение от ожидаемого значения определится следующим образом:

$$R_p - m_p = \sum_{j=1}^{n} x_j (R_j - m_j) .$$

Математическое ожидание квадрата этого отклонения есть дисперсия эффективности портфеля

$$V_p = E((R_p - m_p)^2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j E((R_i - m_i)(R_j - m_j)) = \sum_i \sum_j V_{ij} x_i x_j .$$

Очевидно, что:

$$V_{ii} = E((R_i - m_i)^2) = \sigma_i^2,$$

то есть V_{ii} являются дисперсиями R_i.

Модель двухкритериальной оптимизации портфеля инвестора

Суммируя записанные выше отдельные элементы формализации, придем к следующей оптимизационной задаче, которую решает инвестор:

$$m = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j \to \max ; \ \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \to \min ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \qquad (48)$$

В общем случае неизвестные x_j могут быть больше, меньше или равны нулю. Их знаковость указывает характер сделки: покупка ценной бумаги для плюса ($x_j > 0$) и ее продажа без обеспечения - операция типа short sale - в минусовом случае ($x_j < 0$). Если для первого вида ($x_j > 0$) смысл сделки понятен из названия: купить дешевле и затем дороже продать, то вторая рекомендация ($x_j < 0$) раскрывается правилами короткой продажи и требует дополнительного пояснения.

Короткая продажа (short-sale). Биржевая продажа ценных бумаг без покрытия или, как еще говорят, без обеспечения совершается путем займа ценных бумаг для их использования в первоначальной сделке (продажа), а затем погашения займа такими же ценными бумагами, приобретенными в последующей сделке (покупка).

При таком способе торговли выручка от продажи взятых взаймы акций идет впереди покупательских расходов, необходимых для возвращения одолженных бумаг. И поэтому логика обычной рыночной сделки меняется на прямо противоположную: "Продать дорого, а затем дешево купить".

Продажи без покрытия не столь уж редки и вызывают глубокий интерес участников финансового рынка; на Нью-Йоркской фондовой бирже они составляют от 6 до 8% общего числа заключенных сделок и имеют тенденцию к росту.

Попробуем теперь разобраться в их отношениях с портфелем ценных бумаг. Переменная $x_j < 0$ указывает на продажу того, чего нет, а ее величина дает долю прироста объема вкладываемых средств в результате такой продажи. Манипулируя знаками сделок, инвестор может нарастить вложения в высокодоходные ценные бумаги за счет выручки от коротких продаж менее выгодных бумаг.

Вместе с тем на пути реализации такой схемы имеется целый ряд *препятствий*. Одно из них - предусматриваемые биржей финансовые гарантии, по которым деньги за короткую продажу можно получить лишь после возвращения занятых акций. Поэтому когда в задаче про портфель говорят об операциях типа short-sale, то имеют в виду любые доступные сделки по продажам без обеспечения с условием полной предварительной оплаты. Это могут быть как биржевые короткие продажи при соответствующих договоренностях с брокером, так и срочные контракты с платежом в начале и поставкой в конце.

После этого краткого отступления вернемся к исходной задаче (48): Пока что мы выяснили, что если некоторые переменные этой задачи окажутся отрицательными, то это будет означать, что по данным позициям следует участвовать в операциях, аналогичных продажам без покрытия. Очевидно, что точка (x_1, ..., x_n), доставляющая максимум полезности U(m, σ), принадлежит множеству таких допустимых точек задачи (48), которые не могут быть улучшены сразу по двум критериям: m и σ. В теории многокритериальной оптимизации такие решения называются ***Парето-оптимальными***, или ***эффективными***.

Чтобы пояснить смысл этого понятия, представим себе контур, соединяющий точки с координатами m, σ, вычисленными для допустимых точек некоторого "условного" множества x (рис. 30).

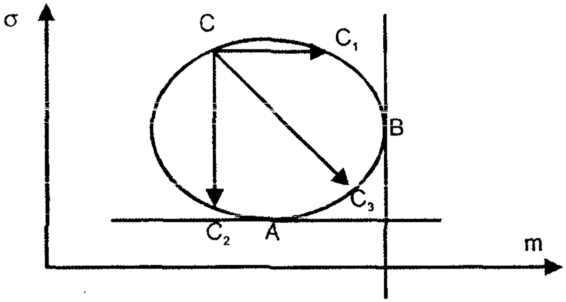


Рис. 30. **Восходящая дуга АВ соответствует Парето-оптимальному множеству решений**

Множеству эффективных точек соответствует восходящая дуга АВ: для любой посторонней точки, например С, можно построить улучшающую ее точку (*) в том смысле, что либо $m^* > m$, $\sigma^* = \sigma$ (точка C_1), либо $m^* = m$, $\sigma^* < \sigma$ (точка C_2), либо $m^* > m$, $\sigma^* < \sigma$ (точка C_3), а для "своих" точек этого сделать нельзя.

В связи с этим ясно, что поиск оптимального по критерию полезности U(m, σ) портфеля можно проводить в два этапа: вначале, решая задачу (48), найти множество эффективных портфелей, а затем из этого множества отобрать портфель с максимальным уровнем полезности. Очевидно, что это может быть сделано с помощью множества эффективных точек.

Для решения задачи первого этапа воспользуемся известным методом сведения многокритериальных задач к однокритериальным. Его суть состоит в замене критерия ограничивающим его значение условием.

Однокритериальная модель эффективного портфеля

Задавшись уровневым ограничением m_p на величину критерия ожидаемого эффекта, сведем двухкритериальный выбор (48) к следующей однокритериальной задаче оптимизации *Г. Марковица.*

Найти доли x_j распределения исходного капитала, минимизирующие вариацию эффективности портфеля:

$$V_p = \sum_i \sum_j V_{ij} x_i x_j \qquad (49)$$

при условии, что обеспечивается заданное значение m_p ожидаемой эффективности, то есть:

$$\sum_j m_j x_j = m_p, \qquad (50)$$

и выполняется бюджетный баланс:

$$\sum_j x_j = 1. \qquad (51)$$

Решение этой задачи обозначим знаком *. Если $x_j^* > 0$, то это означает рекомендацию вложить долю x_j^* наличного капитала в ценные бумаги вида j.

Если $x_j^* < 0$, то это означает рекомендацию участвовать в операции типа коротких продаж (short-sale), что позволит добавить к собственному капиталу величину заемного ($-x_j^*$). При этом, несмотря на потерю процентов $m_j x_j^*$, общий выигрыш инвестора возрастет.

Математически это следует из расширения допустимого множества задачи, а по экономической сути объясняется тем, что выигрыш за счет дополнительно приобретенных на занятые деньги бумаг превышает издержки по операциям short-sale. Если таковые операции невозможны, то приходится вводить дополнительное требование: значения x_j не должны быть отрицательными.

Решение задачи о максимально полезном портфеле

Чтобы перейти ко второму этапу - поиску портфеля наивысшей пользы, необходимо получить множество эффективных точек x*, решая задачу Г. Марковица при разных значениях m_p. В плоскости портфельных характеристик m_p, σ_p найденным эффективным точкам будет соответствовать соединяющая их кривая, которая называется ***траекторией эффективных портфелей***, или, кратко, эффективной траекторией.

Полезно подчеркнуть, что, *во-первых*, множество эффективных портфелей составляет подмножество множества допустимых портфелей и, *во-вторых*, что на эффективной траектории допустимые портфели являются одновременно и эффективными в том смысле, что они дают минимальный риск при фиксированной ожидаемой доходности или максимальную ожидаемую доходность при данном риске.

В дальнейшем мы обоснуем вид эффективной траектории "а", изображенной на рис. 31, на котором, кроме того, показаны характеристики риска и дохода всех доступных инвестору портфелей (заштрихованная область).

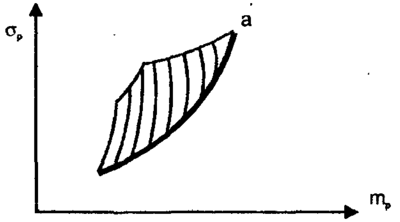


Рис. 31. **Выделение эффективных портфелей**

Имея кривую "а", инвестор находит на ней точку m_A, σ_A, в которой полезность U(m, σ) максимальна, и вслед за этим устанавливает оптимальный для себя портфель как решение x* задачи (49) - (51) при $m_p = m_A$. Пользуясь картой кривых безразличия (рис. 29), представим это решение графически, как показано на рис. 32.

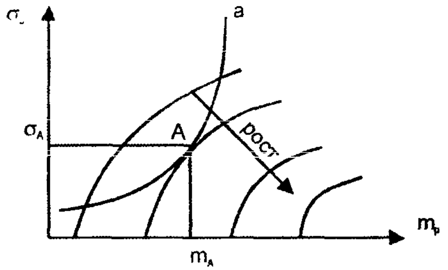


Рис. 32. **Графическое решение задачи о максимально полезном рисковом портфеле**

Влияние диверсификации вклада на снижение риска

Мы уже упоминали об этом эффекте в конце предыдущей главы в связи с задачей ограничения риска. Настало время обсудить его (эффект диверсификации) более подробно. Предположим сначала, что инвестор формирует портфель из тех видов ценных бумаг, случайные доходности которых взаимно независимы, а следовательно, и некоррелированы, то есть $V_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Желая получить портфель с ожидаемым эффектом m_p, равным приемлемой для инвестора величине M, он может ограничить свой выбор таким набором из n видов ценных бумаг, для которых $M = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} m_j$. Для такого инвестора задача (49) - (51) примет следующий вид:

$$\min\left(V_p = \sum_j x_j^2\sigma_j^2 \,/\, \sum_j m_j x_j = \frac{1}{n}\sum_j m_j, \sum_j x_j = 1\right). \tag{52}$$

Ранее в качестве одной из числовых мер риска нами рассматривалось среднеквадратическое отклонение. В модели (52) эта величина представлена выражением:

$$\sigma_p = \left(\sum_j x_j^2\sigma_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

и характеризует риск, связанный с инвестированием в портфель ценных бумаг. Зачастую этот риск так и именуют - *"риск портфеля"*.

Очевидно, что вектор X с одинаковыми компонентами $X_j = \frac{1}{n}$ дает допустимое решение задачи (52). Значение критерия $\sigma_p^* = \sqrt{V_p^*}$ на оптимальном решении x* не может превысить величину:

$$\sigma_p = \left(\frac{1}{n^2}\sum \sigma_j^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n}\left(\sum_j \sigma_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\bar{\sigma} = \max_j \sigma_j$, тогда:

$$0 < \sigma_p^* \le \sigma_p \le \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{\sigma}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}},$$

то есть при росте числа n видов ценных бумаг, включаемых в портфель, риск эффективного портфеля (52) ограничен и стремится к нулю при n → ∞.

Отсюда вытекает **главное практическое правило финансового рынка**: для повышения надежности эффекта от вклада в рискованные ценные бумаги целесообразно делать вложения не в один их вид, а составлять портфель, содержащий возможно большее разнообразие ценных бумаг, эффект от которых случаен, но случайные отклонения независимы.

Этот принцип - хорошо узнаваемые правила житейской мудрости: "Не ставь все на одну карту", или "Don't put all your eggs in one basket" ("Не складывай все яйца в одну корзину"). Нарушая их, инвестор обрекает себя либо на низкую эффективность вклада, либо на излишне высокий риск.

Однако в реальности большого разнообразия достичь трудно, поскольку *гипотеза независимости эффектов в достаточной степени условна* и ограничивает возможности подобного расширения: технологическая сопряженность и экономическая взаимозависимость хозяйствующих субъектов естественным образом проявляются в статистическом взаимодействии случайных эффективностей ценных бумаг.

Отметим также, что с *практической* точки зрения выгоды от масштабной диверсификации далеко не бесспорны: ее экономически обоснованные размеры ограничиваются влиянием *трансакционных издержек*. С ростом числа сделок эти издержки делают включение в портфель малых партий большого числа активов неоправданно дорогим занятием.

Пример. Рассмотрим условную ситуацию, когда инвестор может формировать портфель из различных видов ценных бумаг, эффективности которых - независимые случайные величины.

Ожидаемые значения эффективностей и их среднеквадратичных отклонений приведены в таблице:

j	1	2	3	4	5	6
m_j	11	10	9	8	7	6
σ_j	4	3	1	0,8	0,7	0,7

Если инвестор вложит свой капитал поровну в ценные бумаги только первых двух видов, то ожидаемая эффективность портфеля $m_p = 1/2(11 + 10) = 10{,}5$ окажется чуть меньше, чем покупка только 1-го вида, но зато среднеквадратичное отклонение портфеля $\sigma_p = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 3^2} = 2{,}5$ окажется меньшим, чем у наименее "рискового" из этих двух видов (2,5 < min (4; 3)).

В следующей таблице показаны ожидаемые эффективности и среднеквадратичные отклонения портфелей, составленных поровну из первых двух, трех и т. д. ценных бумаг, с характеристиками из 1-й таблицы.

n	2	3	4	5	6
m_p	10,5	10	9,5	9	8,5
σ_p	2,5	1,7	1,23	1,04	0,87

Ясно, что диверсификация позволила снизить риск почти втрое при потере ожидаемой эффективности всего на 20%.

Из теории вероятностей известно, что при некоторых весьма общих условиях характер распределения суммы независимых случайных величин стремится к нормальному закону (теорема Ляпунова). На этом основании при достаточно большом числе бумаг случайную эффективность портфеля R_p можно считать нормально распределенной величиной с математическим ожиданием m_p и дисперсией V_p. Отсюда найдем оценку риска через вероятность абсолютного уклонения:

$$P(|R_p - m_p| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma),$$

где $\sigma = \sqrt{V_p}$, а $\Phi(x)$ - функция Лапласа.

В частности, при $\delta = 2\sigma$ справедливо равенство:

$$P(|R_p - m_p| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0{,}9544,$$

то есть имеются 95% шансов в пользу того, что все фактические результаты будут находиться в интервале плюс-минус два СКО.

Так, для рассмотренного выше "табличного" портфеля из шести бумаг эта оценка дает 95% гарантии того, что будущая доходность не выйдет из интервала:

$$(8{,}5 - 2 \times 0{,}87;\ 8{,}5 + 2 \times 0{,}87) = (6{,}76;\ 10{,}24).$$

4.2. Эффективные портфели из двух активов

Предлагаемые модели в значительной мере иллюстративны. В силу своей простоты они позволяют записать решения в явном виде и наглядно пояснить результаты общего случая. Кроме того, будет проведен анализ задачи о двувидовом портфеле с безрисковой составляющей. Его результаты потребуются нам при изложении *модели Д. Тобина*, которая отличается от задачи Г. Марковица (49) - (51) тем, что учитывает возможность привлечения безрисковых ценных бумаг (скажем, купонных облигаций), имеющих гарантию со стороны государства и покупаемых по номинальной стоимости.

Эффективная траектория для рискового портфеля

В дальнейшем нам потребуется формула *парного коэффициента корреляции* (нормированного показателя степени статистической связи):

$$r_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sigma_i \sigma_j},$$

где V_{ij} - ковариация двух случайных величин R_i, R_j. Рассмотрим возможность комбинирования в портфеле двух видов рисковых ценных бумаг с характеристиками $(m_1, \sigma_1) < (m_2, \sigma_2)$. Запишем соотношения (49), (50), (51), полагая $n = 2$:

$$V_p = x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2r_{12}\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2,$$

$$m_p = m_1x_1 + m_2x_2,\ x_1 + x_2 = 1. \qquad (53)$$

В этом случае при каждом заданном значении m_p получается единственный допустимый портфель (точка А на рис. 33).

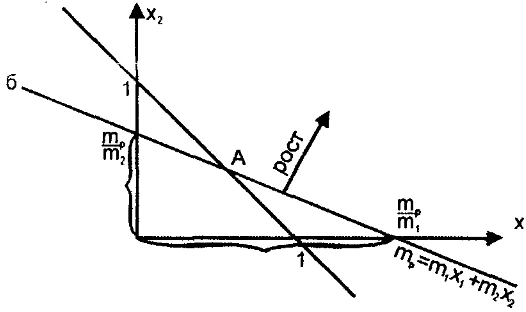


***Рис. 33.* Единственность допустимого портфеля при n = 2**

При повышательном движении прямой "б" можно выйти на допустимые точки со сколь угодно высоким уровнем m_p, что достигается с помощью коротких продаж по первому активу $(x_1 < 0,\ x_2 > 1)$. При запрете на короткие продажи возможности для формирования портфеля с задаваемым уровнем средней доходности m_p ограничиваются значениями персональных характеристик m_1, m_2: $m_1 \le m_p \le m_2$.

Исключая x_2, преобразуем (53) к следующему виду:

$$V_p = \sigma_p^2 = (\sigma_1^2 - 2r_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)x_1^2 + 2\sigma_2(r_{12}\sigma_1 - \sigma_2)x_1 + \sigma_2^2, \qquad (54)$$

$$m_p = (m_1 - m_2)x_1 + m_2.$$

Характеристика m_p линейно зависит от x_1. Поэтому $\sigma_p^2(m_p)$ - неотрицательная квадратичная функция от m_p, причем ее график при нулевом дискриминанте квадратного трехчлена (54) касается горизонтальной оси. Этот дискриминант $D = 4\sigma_2^2\sigma_1^2(r_{12}^2 - 1)$.

Отсюда следует, что нулевой риск можно получить только при комбинации активов с полной положительной или отрицательной корреляцией: $r_{12} = \pm 1$. Для $r_{12} = -1$, когда эффективности меняются разнонаправленно, этот вывод согласуется со здравым смыслом и был ранее отмечен в примере п. 3.9.

Для плюсовой единичной корреляции безрисковый портфель можно получить, сочетая "закупки" одного из активов с короткими продажами другого, что с учетом поменявшей знак переменной фактически меняет корреляцию на обратную.

Понятно, что для достаточно больших m_p, достигаемых с помощью операции short-sale, допустимые портфели будут эффективны (рис. 34).

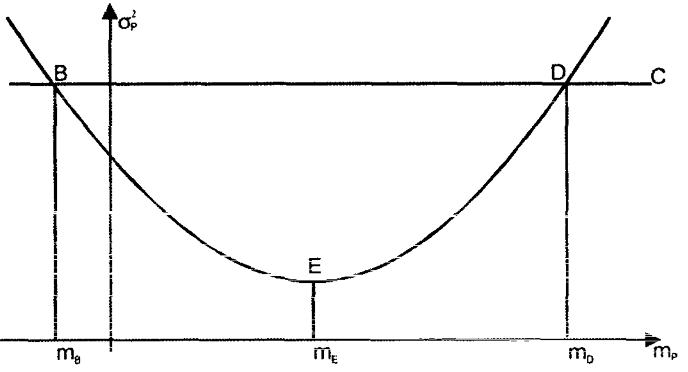


Рис. 34. **При заданном уровне С риска σ_p^2 тот из двух допустимых портфелей В, D эффективен (D), у которого больше ожидаемая доходность ($m_D > m_B$)**

Отсюда **вывод**: при использовании операции типа short-sale можно получать эффективные портфели сколь угодно высокой доходности m_p.

Очевидно, что переход к координате σ_p сохранит конфигурацию графика рис. 34. Назовем соответствующую кривую ***графиком допустимых портфелей***, или допустимой траекторией. При ограничении на знак переменных эта траектория будет находиться в пределах промежутка $[m_1, m_2]$, при снятии ограничения на знак ветви этой кривой уйдут в бесконечность. Восходящая часть этой кривой будет определять эффективную траекторию: укороченную до точки m_2 кривую "б", если short-sale невозможен, и простирающуюся в бесконечность кривую "а" при наличии взятого в долг капитала.

Для "большеразмерного" портфеля эти кривые расходятся (кривая "а" не продолжает кривую "б", как в двумерном случае, а располагается ниже), но ведут себя аналогичным образом. Доказано, что их наклон, отображающий зависимость риска (среднеквадратичного отклонения) от эффективности, постепенно возрастает (в математике такая функция называется строго выпуклой). Естественно, при большей свободе правил игры можно добиться лучших результатов (кривая риска "а" расположена ниже кривой "б" (рис. 35)).

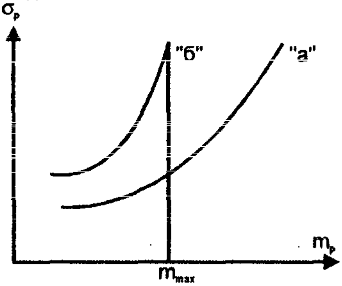


Рис. 35. **Эффективные траектории в многомерном случае**
а) при допущении short-sale б) при запрещении short-sale

Пример. Рассмотрим влияние корреляции на характер траектории эффективных портфелей. Пусть $m_1 = 0$, $\sigma_1 = 1$ и соответственно $m_2 = 1$, $\sigma_2 = 2$, и выделим четыре случая: $r_{12} = 0; 3/4; 1; -1$. Формула абсциссы вершины параболы (54) имеет вид:

$$x_{1B} = \frac{(\sigma_2 - r_{12}\sigma_1)\sigma_2}{(\sigma_1^2 - 2r_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}.$$

Подставляя в нее исходные данные, вычислим для каждого варианта корреляции координату x_{1B}. Соответственно для каждого случая получим координату $x_{1B} = \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, 2, \frac{2}{3}$. Отсюда и из формул (54) определим повариантные значения доходности m_{pB} и риска σ_{pB} для "вершинного" портфеля, то есть того, который располагается в начале эффективной траектории. Данные вычислений сведем в следующую таблицу:

№ варианта	I	II	III	IV
r12	0	s	1	-1
x1B	4/5	5/4	2	2/3
mpB	1/5	-1/4	-1	1/3
σpB	√4/5	√7/8	0	0

При полном вложении в один из активов: $x_1 = 1$ или $x_2 = 1$, независимо от номера варианта $m_p = 0$, $\sigma_p = 1$ и соответственно $m_p = 1$, $\sigma_p = 2$. Этих данных вполне хватает, чтобы представить все четыре случая в удобном для сравнения графическом виде (рис. 36).

Различия между графиками по расположению вершины M относительно полосы $[m_1, m_2]$ и характеру течения кривых в координатах "доходность - риск" вызваны различием корреляций, так как прочие условия во всех вариантах совпадают.

В нашем примере $m_1 = 0$; $m_2 = 1$. Поэтому, комментируя различия, воспользуемся обозначением [0; 1], хотя выводы будут справедливы и для произвольных значений $0 \leq m_1 < m_2$.

В случае полной корреляции ($r_{12} = \pm 1$) эффективные траектории представляют собой повышающие полупрямые, упирающиеся в ось абсцисс, и весь риск в точке M элиминируется. Внутри полосы [0; 1] отрицательная единичная корреляция выгоднее, вне этой полосы предпочтительнее становится случай $r_{12} = 1$.

Для независимых активов вершина M всегда находится в полосе [0; 1], и этот случай занимает промежуточное по выгоде положение между вариантами детерминированной линейной связи ($r_{12} = \pm 1$). При плюсовой корреляции вершина может оказаться и левее полосы [0; 1].

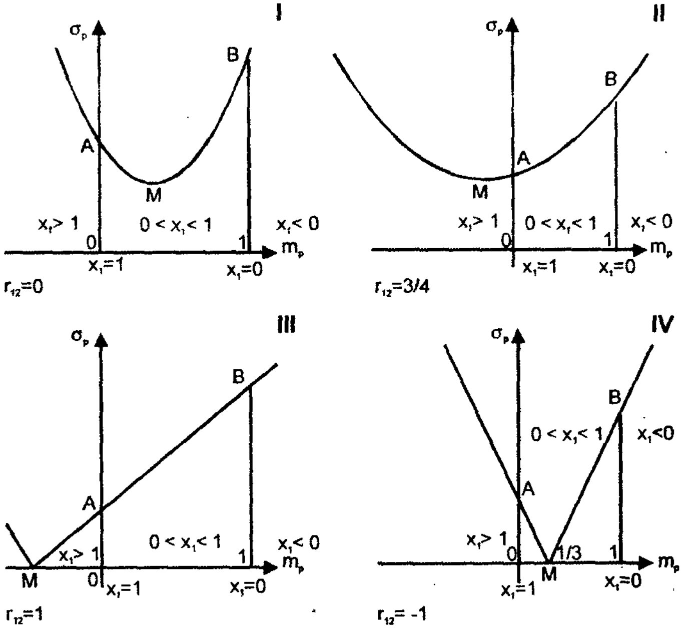


Рис. 36. **Влияние корреляции на поведение допустимой траектории и ее эффективной части**

Двувидовой портфель с безрисковой составляющей

Несмотря на простоту, эта модель является важным элементом портфельной теории и понадобится нам, когда мы будем изучать расширение Д. Тобина для задачи Г. Марковица. Найдем эффективную траекторию таких портфелей. Пусть r_0 - эффективность безрискового вложения, а случайная эффективность R_r имеет ожидание m_r и вариацию σ_r^2, естественно $r_0 < m_r$. Деление вклада на безрисковую и рисковую части в долях x_0 и $x_r = 1 - x_0$ приводит к портфелю со случайной эффективностью:

$$R_p = x_0 r_0 + x_r R_r.$$

Ожидаемое значение этой эффективности и ее среднеквадратичное отклонение равны:

$$m_p = x_0 r_0 + (1 - x_0) m_r,\ \sigma_p = |1 - x_0| \sigma_r. \tag{55}$$

Допустим, что имеется возможность брать и давать в долг под безрисковую ставку r_0, то есть переменная x_0 может быть любого знака. В отличие от этого, по рисковому активу операция short-sale лишена финансового смысла, поскольку при $x_r = 1 - x_0 < 0$ разность $m_p - r_0 = (x_0 - 1)(r_0 - m_r) < 0$.

Следовательно, $m_p < r_0$, а $\sigma_p = (x_0 - 1)\sigma_r > 0$. Эта смесь (составной актив) заведомо хуже, чем однородный безрисковый вклад. Чтобы уйти с неэффективной траектории, следует ввести ограничение неотрицательности для x_r или равносильное условие $x_0 \leq 1$.

Исключая $x_0 \leq 1$ из соотношений (55), получим:

$$\sigma_p = \frac{m_p - r_0}{m_r - r_0} \sigma_r, \tag{56}$$

то есть связь между риском σ_p и ожидаемой эффективностью m_p линейна (рис. 37).

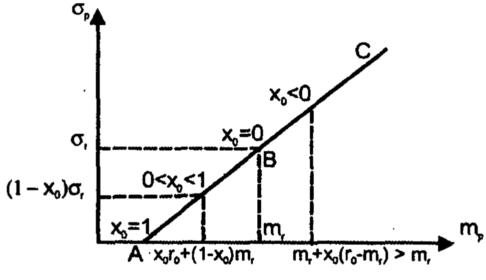


Рис. 37. **Эффективная траектория двувидового портфеля с безрисковой составляющей**

Очевидно, что все сочетания активов, представленные точками луча AC, являются Парето-оптимальными, причем часть AB всей траектории относится к случаю отсутствия заемного капитала ($x_0 \geq 0$). Продолжающая эту часть полупрямая BC появляется при разрешении брать в долг под ставку r_0 (x_0 - без ограничения на знак). При допущении такой возможности, как видно из рис. 37, можно получить любую ожидаемую доходность, но при этом риск тоже растет.

Из множества эффективных портфелей инвестор отберет такой, который доставляет максимум полезности U(m, σ).

Пример. Некто может беспроцентно ссужать или занимать деньги (r_0 = 0, x_0 - без ограничения на знак), а кроме того, он имеет возможность вложиться под рисковую ставку R_r с характеристиками m_r = 2, σ_r^2 = 4. Очевидно, что брать деньги в долг под рисковую ставку R_r (short-sale), чтобы беспроцентно держать их у себя, - бессмысленно, то есть $x_r = 1 - x_0 \geq 0$. Отношение индивида к риску задано уровневой функцией полезности $U(m, \sigma) = m - \frac{1}{8}\sigma^2$.

Решим вместе с вкладчиком его задачу и найдем оптимальный портфель. Уравнение (56) траектории эффективных портфелей для нашего субъекта примет вид:

$$\sigma = m.$$

Определению эффективного портфеля с оптимальным сочетанием доходности m и риска σ отвечает следующая оптимизационная задача:

$$\max\left(m - \frac{1}{8}\sigma^2 \,/\, \sigma = m\right).$$

Она сводится к максимизации квадратичной функции:

$$Y(m) = m - \frac{1}{8}m^2$$

при условии, что $m \geq 0$, и имеет очевидное решение:

$$m^* = 4.$$

Отсюда и из (55) найдем риск $\sigma^* = 4$, оптимальные пропорции $x_r^* = 1 - x_0^* = 2$, $x_0^* = -1$ и максимальный уровень полезности Y(4) = 2. На рис. 38 дано графическое решение задачи с помощью карты кривых безразличия $m - \frac{1}{8}\sigma^2 = C$.

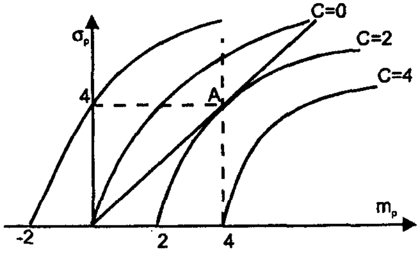


Рис. 38. **Оптимальный портфель А - точка касания кривой безразличия $\sigma = \sqrt{8(m - c)}$ и эффективной траектории $\sigma = m$.**

Согласно полученному ответу (точка А) вкладчик-оптимизатор воспользуется возможностью беспроцентного кредита для удвоения капитала и полностью инвестирует его в рисковый актив.

4.3. Задача об эффективном портфеле с безрисковой компонентой

Эта задача отличается от постановки (49) - (51) тем, что инвестор, кроме рисковых ценных бумаг, учитывает также возможность безрисковых вложений с гарантированной эффективностью r_0. Обозначив долю таких вложений через x_0, придем к следующему расширению задачи (49) - (51):

$$\min\left(\sum_{i=0}\sum_{j=0} V_{ij}x_i x_j / r_0 x_0 + \sum_{j=0} m_j x_j = m_p, x_0 + \sum_{j=0} x_j = 1\right). \tag{57}$$

Вложение в два фонда

Рассмотрим случай без ограничения на знак неизвестных x_0, x_1, ..., x_n. Очевидно, что всякий эффективный портфель траектории "а" на рис. 35 является допустимым для задачи (57) при том же значении ожидаемой доходности m_p.

Возьмем какой-нибудь портфель В на этой траектории и будем сочетать его с безрисковым вкладом по схеме рис. 37 (точки В, А). В результате получим прямолинейную траекторию всех возможных портфелей, представленную на рис. 39 лучом AF.

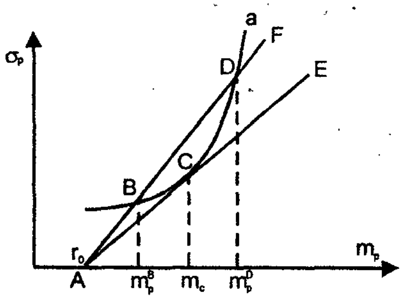


***Рис. 39.* АСЕ - эффективная траектория при допущении заемного капитала и безрисковых вложений**

Обозначим пропорции эффективного портфеля В, полученные как решение укороченной задачи (49) - (51), через x_1^B, x_2^B, ..., x_n^B. Очевидно, что $x_0 + \sum_{j=0}(1 - x_0)x_j^B = 1$ и, кроме того,

$$r_0 x_0 + m_p^B(1 - x_0) = r_0 x_0 + \sum_{j=0} m_j(1 - x_0)x_j^B = m_p.$$

Отсюда следует, что портфель (x_0, $(1 - x_0)$ x_1^B, ..., $(1 - x_0)$ x_n^B) является допустимым для задачи (57), то есть траектория AF - одна из допустимых. Но она для модели (57) неэффективна, так как в диапазоне доходностей (m_p^B, m_p^D) ее портфели дают более высокий риск, чем у кривой "а", (рис. 39). Отсюда ясно, что получить эффективную траекторию в задаче (57) можно только с помощью такой точки С на траектории "а", в которой прямая АСЕ касается этой траектории. Так, из рис. 39 видно, что с помощью означенной прямой можно добиться любой доходности $m_p \geq r_0$ с наименьшим по сравнению со всеми другими допустимыми портфелями риском.

При запрещении заемного капитала, то есть для неотрицательных переменных x_0, x_1, ..., x_n, аналогичные доводы подсказывают, что кривая эффективных комбинаций АСЕ получается сочленением касательной АС с последующей за точкой С частью траектории "б", перенесенной на рис. 40 с рис. 35.

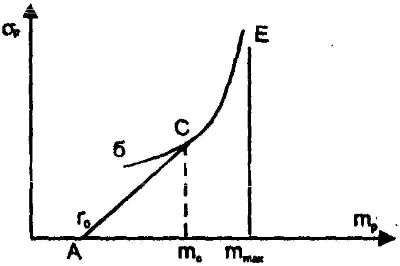


Рис. 40. **АСЕ - эффективная траектория при запрещении заемного капитала и допущении безрисковых вложений**

Вид ломаной кривой АСЕ на рис. 40 объясняется понижающим влиянием детерминированной компоненты r_0 на ожидаемую доходность и риск портфеля. Из-за этого портфели с ее участием не могут дать достаточно высоких значений $m_p > m_c$, и для таких уровней доходности приходится довольствоваться комбинациями только рисковых вложений.

Изложенного достаточно, чтобы понять, что при возможности безрисковых вложений задача инвестора сводится к поиску оптимального по полезности распределения капитала между безрисковым активом А и рисковым портфелем С. При данном значении эффективности r_0 портфель С определяется единственным образом и будет один и тот же для всех вкладчиков, независимо от их оценок полезности.

Более того, "касательный" портфель С по результату смешивания его с безрисковым активом А оказывается наилучшим по сравнению с прочими рисковыми портфелями эффективной траектории ("а" или "б"). Имея это в виду, будем называть портфель, который в координатах x_1, ..., x_n соответствует точке касания С, оптимальным рисковым или, кратко, ***оптимальным портфелем***.

Допустим, что финансовый рынок отмечен высокой непредсказуемостью и не оставляет инвестору никаких направлений для извлечения гарантированного дохода. При таком раскладе остается единственная безрисковая "лазейка" - беспроцентное сбережение денег, например в домашней копилке до лучших времен.

В анализируемой ситуации $r_0 = 0$ и модель расширенной задачи (57) примет вид:

$$\min(\sum_i \sum_j V_{ij} x_i x_j / \sum_j m_j x_j = m_p; \sum_j x_j \leq 1),$$

то есть повторяет постановку задачи о рисковом портфеле (49) - (51) с одним отличием: жесткое бюджетное ограничение (51) заменяется неравенством $\sum x_j \leq 1$. Последнее условие предусматривает возможность неполного инвестирования наличных средств.

Графически этому отвечает тот же рисунок 40, но с касательной AC, выходящей из начала координат (рис. 41).

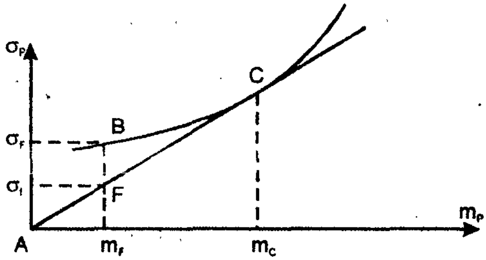


Рис. 41. **Примеры двух портфелей: с жестким (B) и соответственно нежестким (F) бюджетным ограничением**

Из сравнения эффективных траекторий: криволинейной для рисковых бумаг и прямой при двух фондах ($r_0 = 0$; m_c), понятно, что на оптимальных решениях консервативного инвестора ($m_p < m_c$) бюджетное условие ($\sum xj \leq 1$) обратится в строгое неравенство. Получающийся при этом остаток дает оптимальную долю средств, которые следует направить на беспроцентное накопление. Отсюда следует, что при "поголовной" нестабильности финансового рынка желаемую в среднем доходность, например m_F, можно получать с меньшим риском ($\sigma_f < \sigma_F$) за счет недоинвестирования наличного капитала. В перенасыщенной риском экономике подобные причины приводят к чрезмерному отвлечению денег и порождают спад предложения на рынке капитала.

Пример. Найдем оптимальный портфель на траектории эффективных комбинаций из двух рисковых ценных бумаг с характеристиками $m_1 = 2$, $\sigma_1 = 1$; $m_2 = 3$, $\sigma_2 = 2$; $r_{12} = 1/2$ при условии, что эффективность добавляемого безрискового актива $r_0 = 1$.

Подставляя данные примера в (54), получим, что:

$\sigma_p^2 = 3x_1^2 - 6x_1 + 4$, $m_p = - x_1 + 3$.

Исключив x_1, придем к уравнению эффективной траектории:

$$\sigma_p = \sqrt{3m_p^2 - 12m_p + 13},$$

"стартующей" из низшей точки $m_{pB} = 2$, $\sigma_{pB} = 1$.

Чтобы найти абсциссу m_C точки касания С, запишем известное уравнение касательной к функции $f(x)$ в точке x_0:

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

В обозначениях нашего примера оно примет вид:

$$\sigma = \sqrt{3m_c^2 - 12m_c + 13} + \frac{(6m_c - 12)}{2\sqrt{3m_c^2 - 12m_c + 13}}(m - m_c).$$

Данная прямая проходит через точку А с координатами $m = r_0 = 1$, $\sigma = 0$ (рис. 39). Это позволяет получить следующее уравнение для неизвестной доходности m_C оптимального портфеля:

$$\sqrt{3m_c^2 - 12m_c + 13} + \frac{3(m_c - 2)}{\sqrt{3m_c^2 - 12m_c + 13}}(1 - m_c) = 0.$$

Откуда $m_C = \frac{7}{3}$, $\sigma_c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Пользуясь связью между m_p и $x_1 (x_1 = 3 - m_p)$ найдем, полагая $m_p = \frac{7}{3}$, структуру оптимального портфеля:

$$x_1 = 3 - 7/3 = 2/3,\ x_2 = 1/3.$$

Таким образом, в оптимальном портфеле С на две стоимостные единицы ценных бумаг первого вида должна приходиться одна стоимостная единица бумаг второго вида.

Теорема об инвестировании в два фонда

Эта теорема утверждает, что если инвесторы интересуются только ожидаемой доходностью и стандартным отклонением своего портфеля, то каждый инвестор-оптимизатор будет комплектовать портфель только из "касательного" (оптимального) портфеля С и безрискового актива.

Подтвердим предшествующее графическое обоснование математическим доказательством. Чтобы не утомлять читателя матричными обозначениями в многомерном случае, предложим ему покомпонентную запись на примере трехвидового портфеля. Для большего упрощения задачи ограничимся некоррелированными активами и неизвестными x_0, x_1, x_2 произвольного знака. Несмотря на эти частности, нашего рассмотрения вполне достаточно, чтобы понять, как доказывается теорема в общем случае.

При $n = 3$ и $V_{12} = 0$ из общей записи (57) получим следующую модель сформулированной задачи:

$$\min(\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 / r_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_p, x_0 + x_1 + x_2 = 1). \qquad (58)$$

Для ее решения воспользуемся *методом множителей Лагранжа* и введем функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = \sigma_1{}^2 x_1{}^2 + \sigma_2{}^2 x_2{}^2 + \lambda_1(m_p - r_0x_0 - m_1x_1 - m_2x_2) + \lambda_2(1 - x_0 - x_1 - x_2).$$

Тогда решение поставленной задачи должно удовлетворять соотношениям:

$\dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$, $i = 0, 1, 2, j = 1, 2$, что приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} \begin{array}{lllr} & & - r_0\lambda_1 \; - \lambda_2 & = 0 \\ 2\sigma_1{}^2 x_1 & & - m_1\lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ & 2\sigma_2{}^2 x_2 & - m_2\lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ r_0x_0 + m_1x_1 + m_2x_2 & & & = m_p \\ \quad x_0 + x_1 + x_2 & & & = 1 \end{array} \end{cases}$$

Из первых трех уравнений, заменяя $\lambda_2 = - r_0\lambda_1$, найдем:

$$x_1 = \frac{(m_1 - r_0)\lambda_1}{2\sigma_1^2}, \; x_2 = \frac{(m_2 - r_0)\lambda_1}{2\sigma_2^2}. \qquad (59)$$

Исключая из четвертого и пятого уравнений переменную x_0, придем к соотношению:

$$(m_1 - r_0)x_1 + (m_2 - r_0)x_2 = m_p - r_0. \qquad (60)$$

Подставляя (59) в (60), получим уравнение для λ_1:

$$\frac{(m_1 - r_0)^2\lambda_1}{2\sigma_1{}^2} + \frac{(m_2 - r_0)^2\lambda_1}{2\sigma_2{}^2} = m_p - r_0,$$

откуда $\overset{o}{\lambda}_1 = \dfrac{2}{g}(m_p - r_0)$, где

$$g = \frac{(m_1 - r_0)^2}{\sigma_1{}^2} + \frac{(m_2 - r_0)^2}{\sigma_2{}^2},$$

и компоненты оптимального решения (59)

$$\overset{o}{x}_1 = \frac{(m_1 - r_0)}{g\sigma_1{}^2}(m_p - r_0), \overset{o}{x}_2 = \frac{(m_2 - r_0)}{g\sigma_2{}^2}(m_p - r_0).$$

Отсюда видно, что отношение долей рисковых вложений

$$\frac{\overset{o}{x}_1}{\overset{o}{x}_2} = \frac{(m_1 - r_0)\sigma_2{}^2}{(m_2 - r_0)\sigma_1{}^2} \qquad (61)$$

не зависит от назначаемого инвестором уровня ожидаемой доходности m_p.

Подставляя найденные оптимальные значения $\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2$ в критерий задачи (58), определим минимум дисперсии портфеля при заданном m_p:

$$\overset{0}{\sigma}_p{}^2 = \frac{1}{g^2}\left(\left(\frac{m_1 - r_0}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2 - r_0}{\sigma_2}\right)^2\right)(m_p - r_0)^2.$$

Из этого соотношения с учетом обозначения g следует линейность уравнения эффективной траектории модели (58):

$$\overset{0}{\sigma}_p = \frac{1}{\sqrt{g}}(m_p - r_0). \tag{62}$$

Пусть m_p^* - ожидаемая эффективность рискового портфеля с пропорциями (61). Очевидно, что этот портфель получается как решение задачи (58) при $m_p = m_p^*$, у которого $\overset{0}{x}_0 = 0$, и он обязан лежать на прямой (62). Полагая в (58) $x_0 = 0$, придем к "укороченной" оптимизационной задаче (53) ($m_p = m_p^*$, $r_{12} = 0$) с тем же оптимальным решением, но уже на эффективной траектории "a" (рис. 35).

Таким образом, точка на прямой (62), соответствующая $x_0 = 0$, должна лежать на кривой $\sigma_p^*(m_p^*)$ (кривая "a" на рис. 35), то есть $\overset{0}{\sigma}_P(m_P^*) = \sigma_P^*(m_P^*)$. В то же время при всех $m_p \neq m_p^*$ минимум риска для задачи (58) будет меньше, чем у задачи (53) $\overset{0}{\sigma}_P(m_P) < \sigma_P^*(m_P)$. Иначе говоря, прямая (62) расположена под кривой "a" и имеет с ней одну общую точку - точку касания (m_p^*, σ_p^*), что было представлено на рис. 39 (прямая AE касается кривой "a" в точке C).

В заключение несколько слов о портфельных задачах произвольной размерности. Как и в рассмотренных частных случаях, если ограничения на знак отсутствуют, эти задачи допускают явное решение и его можно найти методом множителей Лагранжа.

Не приводя соответствующих доказательств, дадим формулы полученного Д. Тобиным решения расширенной задачи (57). Пусть V - матрица ковариаций рисковых видов ценных бумаг, $X = (x_i)$, $M = (m_i)$ - вектор-столбцы долей капитала, вкладываемых в i-й вид рисковых бумаг и ожидаемых эффективностей этого вида, $i = 1, \ldots, n$. Пусть также I - n-мерный вектор-столбец, компоненты которого равны 1. Тогда оптимальное значение долей x_i есть

$$\overset{0}{X} = \frac{m_p - r_0}{(M - r_0 I)^T V^{-1}(M - r_0 I)} V^{-1}(M - r_0 I) \cdot \tag{63}$$

Здесь V^{-1} - матрица, обратная к V, T - знак транспонирования, и поэтому $(M - r_0 I)^T$ - вектор-строка. В числителе дроби стоит число, в знаменателе, если выполнить все действия, тоже получится число. Сопоставляя компоненты вектора $\overset{o}{X}$, нетрудно удостовериться, что оптимальные пропорции рисковых вложений не зависят от m_p. В то же время сумма этих компонент пропорционально увеличивается с ростом m_p, и поэтому "безрисковая" часть $\overset{o}{x}_0$, дополняющая эту сумму до единицы, будет уменьшаться.

Выразим риск оптимального портфеля в зависимости от его доходности. Для этого в формулу вариации портфеля $V_p = X^TVX$ подставим оптимальный вектор $\overset{o}{X}$, обозначив знаменатель формулы (63) через d^2. Применяя правила матричной алгебры, получим:

$$V_p = [(m_p - r_0)^2/d^4][V^{-1}(M - r_0I)]^TV[V^{-1}(M - r_0I)] =$$

$$= [(m_p - r_0)^2/d^4][(M - r_0I)^T(V^T)^{-1}VV^{-1}(M - r_0I)].$$

Ввиду того что $V_{ij} = V_{ji}$, матрица V - симметричная, то есть $V^T = V$ и, следовательно,

$$V_p = (m_p - r_0)^2/d^2 \text{ или } \sigma_p = (m_p - r_0)/d.$$

Перегруппировав, определим линейное соотношение между эффективностью портфеля и его риском

$$m_p - r_0 = d\sigma_p \text{ или } m_p = r_0 + d\sigma_p.$$

Подставим это соотношение в числитель формулы (63) и получим следующую связь между оптимальным решением $\overset{o}{X}$ и риском σ_p:

$$\overset{o}{X} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{(M - r_0I)^TV^{-1}(M - r_0I)}}V^{-1}(M - r_0I).$$

На эту формулу можно смотреть как на запись оптимального решения портфельной задачи по критерию максимума эффекта и с ограничением на риск:

$$\max\left(r_0x_0 + \sum_{j=0} m_jx_j \Big/ \sum_{i=0}\sum_{j=0} V_{ij}x_ix_j = \sigma_p, x_0 + \sum_{j=0} x_j = 1\right). \qquad (64)$$

В этом можно убедиться, решив задачу о портфеле максимальной эффективности (64) методом множителей Лагранжа, однако подобное соответствие вполне предсказуемо и объясняется взаимностью задач (57), (64).

При добавлении ограничений на неотрицательность неизвестных анализ усложняется и аналитические решения уступают место алгоритмам квадратичного программирования. В этом случае представление о свойствах решения можно получить с помощью обобщенного метода Лагранжа, вводя дополнительные множители $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)'$ по каждому неравенству $x_j \geq 0$, и со ссылкой на *теорему Куна-Таккера.*

Опуская подробный анализ, основанный на условиях дополняющей нежесткости, ограничимся здесь кратким описанием **качественных особенностей эффективного портфеля**:

- с увеличением требуемой ожидаемой эффективности вклады в каждую ценную бумагу ***меняются линейно***, если возможен short-sale, или *кусочно-линейно*, если такие операции запрещены. Некоторые вклады растут (это относится к более эффективным, но и более рисковым ценным бумагам), некоторые уменьшаются (менее эффективные и менее рисковые ценные бумаги);
- ***мера риска*** эффективного портфеля возрастает с ростом требуемой ожидаемой эффективности, причем *одинаковым последовательным **приростом этой меры отвечают все меньшие и меньшие приросты эффективности.***

Соответствующие этим выводам графические иллюстрации можно получить, опираясь на частные случаи эффективных портфелей, рассмотренных выше; для рискового портфеля из трех активов подтверждающие диаграммы имеются в работе Первозванских (см. список литературы).

Выбор портфеля при возможности безрискового заимствования и кредитования

В задаче о таком портфеле переменная x_0 может быть любого знака. Имея возможность получения и предоставления займов по безрисковой ставке r_0, инвестор выберет оптимальный портфель, найдя точку касания своей кривой безразличия с линейным эффективным множеством. На рис. 42 изображены два возможных варианта: для осторожного инвестора А и для инвестора В с более легкомысленным отношением к риску.

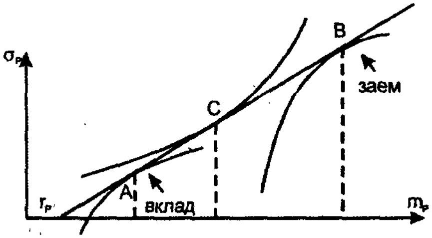


***Рис. 42.* Влияние безрискового заимствования и кредитования на выбор портфеля**

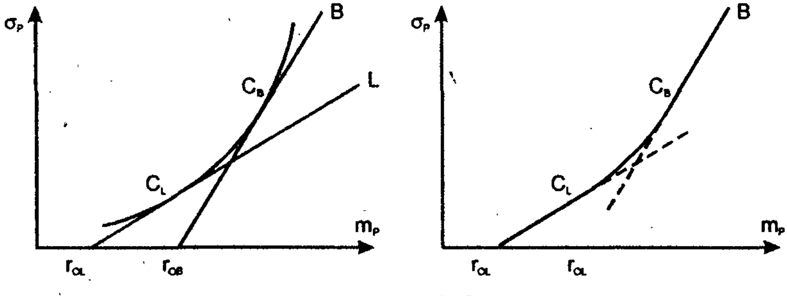
Здесь А и В - точки касания кривых безразличия первого и второго участников к линии эффективных портфелей из двух компонент: безрисковой по ставке r_0 и оптимального портфеля С. Консервативный инвестор А ориентируется на умеренную доходность $m_A < m_C$ и определенную часть своего капитала оставляет в безрисковом виде: ссужает его под ставку r_0 ($x_0 > 0$).

Его более легкомысленный коллега B надеется на высокую доходность $m_B > m_C$ и не слишком озабочен возможными расхождениями от средней оценки. В связи с этим он действует правее точки C в области отрицательных значений x_0. В этом положении отражается ситуация, когда B занимает деньги под безрисковый процент r_0 (уходит в короткую позицию по деньгам), но вкладывает их все равно в некоторой пропорции, которая соответствует точке C.

До сих пор считалось, что безрисковые ставки заимствования и кредитования одинаковы. Рассмотрим теперь, что произойдет, если предположить, что инвестор может взять в долг, но по ставке, превышающей доходность от инвестирования в безрисковый актив. Обозначим эти ставки через r_{0B} и r_{0L}, причем $r_{0B} > r_{0L}$.

Один из способов оценки влияния сделанного предположения на эффективное множество заключается в следующем. Начнем с того, что оценим, как будет выглядеть эффективное множество, если получение и предоставление займа возможны по одной и той же ставке r_{0L}. Результирующее эффективное множество является прямой линией, проходящей через точки r_{0L} и C_L (рис. 43а).

Рассмотрим, что произойдет, если величину ставки поднять до r_{0B}, но оставить одной и той же как для получения, так и для предоставления займа. Результирующим эффективным множеством будет прямая линия, проходящая через точки r_{0B} и C_B (рис. 43а). Заметим, что портфель C_B расположен выше портфеля C_L на эффективной траектории Марковица, поскольку он является точкой касания для прямой, соответствующей большей безрисковой ставке.



а) оценка различных безрисковых ставок

б) эффективная траектория при неравных безрисковых ставках

Рис. 43. **Учет различия ставок заимствования и кредитования**

Поскольку инвестор не может занять по ставке r_{0L}, то часть линии, выходящей из r_{0L}, которая продолжается правее C_L, недоступна для инвестора и поэтому далее не рассматривается.

Аналогично, так как инвестор не может предоставить заем по ставке r_{0B}, то часть линии, выходящей из r_{0B}, которая располагается левее C_B, не годится инвестору и поэтому далее также не рассматривается.

Юго-восточная граница множества оставшихся в рассмотрении портфелей, показанного на рис. 43б, является *результирующим эффективным множеством*. Оно состоит из трех различных, но соединенных между собой частей:

- первой частью является прямой отрезок, соединяющий r_{0L} и C_L, который представляет собой комбинации различных объемов безрискового кредитования в сочетании с инвестированием в портфель рискованных активов C_L;
- второй частью является участок кривой из эффективного множества Марковица, соединяющий точки C_L и C_B;
- третьей частью является прямой луч, выходящий из точки C_B, который представляет различные комбинации заимствования в сочетании с инвестированием в рискованный портфель C_B.

Оптимальным портфелем для инвестора, как и прежде, будет портфель, который соответствует точке касания кривой безразличия инвестора с эффективным множеством. В зависимости от вида кривых безразличия точка касания может оказаться на любом из трех сегментов, составляющих эффективное множество.

4.4. Рыночный портфель

Будем считать, что состояние и динамику рынка ценных бумаг в течение длительного времени определяют его участники. В свою очередь, их поведение диктуется "предписаниями" портфельной теории. Все они максимизируют личные полезности, добиваясь правильного распределения капитала между безрисковыми и рисковыми вложениями. Последние производятся в пропорциях, задаваемых структурой оптимального портфеля С (рис. 39), и по объему могут равняться любой дробной части этого портфеля.

Таким образом, предполагается, что поведение всех участников соответствует одной и той же модели (57), то есть они знают все параметры $\{V_{ij}\}$, r_0, $\{m_j\}$, иначе говоря, располагают одинаковыми сведениями и принимают на этой основе наилучшие решения. При этом считается, что рынок рационально реагирует на обновление информации, то есть на нем мгновенно производится коррекция цен и коррекция действий.

Ясно, что перечисленное является некоторой идеализацией реальных условий, игнорирующей возможные отклонения из-за нестационарности рынка, воздействия внешних факторов или по причине несимметричной информации и т. д.

На таком идеальном рынке инвесторы-максимизаторы предъявляют спрос на рисковые ценные бумаги в ассортименте, совпадающем с пропорциями "касательного" портфеля С. В зависимости от соотношения этого спроса и рыночного предложения цены на активы уменьшаются (при избыточности предложений) или растут (при дефиците).

С учетом подобных ценовых изменений корректируются параметры модели (57), а следовательно, и спрос на ценные бумаги. Этот процесс самоорганизуется таким образом, что по всем видам финансовых активов предложение и спрос выравниваются. В результате *рисковый портфель рынка ценных бумаг* (предложение рисковых активов) *приближается и начитает копировать структуру оптимального портфеля С* (спрос на рисковые активы).

Отсюда следует, что при сделанных допущениях о характере фондового рынка задача отыскания оптимального рискового портфеля С решается самим рынком. А если так, то инвестору можно не проводить самостоятельных расчетов, а достаточно "перерисовать" найденное рынком решение: проанализировать рыночные пропорции обращающихся ценных бумаг и формировать свой портфель, придерживаясь этих пропорций.

Высказанные здесь гипотезы - замкнутость, стационарность, равновесность, абсолютная ликвидность бумаг и бесфрикционность (отсутствие зазора между ценами спроса и предложения) - лежат в основе *теории равновесия на конкурентном финансовом рынке*. Центральное место в ней занимает *модель В. Шарпа*, известная как ***модель установления цен на капитальные активы*** (Capital Asset Pricing Model, CAPM), где под ценой актива подразумевается показатель эффективности.

Реальный фондовый рынок по своим характеристикам расходится с идеальным. Этот рынок постоянно испытывает воздействие внешних факторов (не замкнут) и в силу этого не обязательно стационарен. Для него может не выполняться гипотеза малости влияния на цену, например из-за сговора между частью участников. Ему присуща асимметричность информированности. Расценки, применяемые при покупке и продаже ценных бумаг, при выдаче и получении кредита, - неодинаковы.

По мере удаления от условий идеальной конъюнктуры понятие соответствия между рыночным и оптимальным (касательным) портфелем С инвестора теряет смысл, что ставит под сомнение целесообразность копирования инвестором портфеля рынка. В связи с этим для получения приемлемых результатов инвесторы при работе на фондовом рынке зачастую опираются на собственные модификации модели (57) с учетом доступной им информации и нарушений гипотезы об идеальном рынке.

Представление о таких моделях и портфельных эвристиках, широко внедряемых в практику и простых по сравнению с оптимизацией, можно почерпнуть из финансовой периодики и деловой литературы. Здесь эти вопросы не рассматриваются, а будут даны только обещанные ранее элементы классической портфельной теории.

Определение рыночного портфеля

Пусть конкурентный финансовый рынок пребывает в равновесии. Это означает, что спрос всех инвесторов по каждому активу совпадает с совокупным предложением этого актива.

В соответствии с теоремой о двух фондах каждый инвестор комплектует портфель только из долей оптимального рискового портфеля C и безрискового актива с доходностью r_0 таким образом, чтобы максимизировать свою уровневую полезность U(m, σ) (рис. 44).

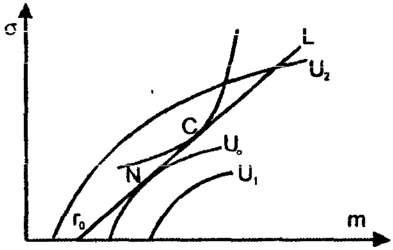


Рис. 44. Оптимальный выбор инвестора

Точка N, выбранная не безразличным к риску инвестором, определяется точкой касания подходящей кривой безразличия $U(m, \sigma) = U_0$ и прямой эффективных двухфондовых портфелей L.

Напомним, что вид этих уровневых кривых уже обсуждался - чем выше кривая, тем ниже полезность. Поэтому-то точка N дает максимум полезности: более низкая кривая (U_1) неосуществима, а более высокая (U_2) - невыгодна.

Выбор точки N задает пропорции деления капитала между безрисковым активом и портфелем C. Решение инвестора под номером K можно представить числом α_K, определяющим в его портфеле стоимостную долю безрискового актива. Тогда $(1 - \alpha_K)$ - доля рискового актива C.

Если $\alpha_K = 1$, то весь капитал инвестируется в безрисковый актив; при $\alpha_K = 0$ весь капитал инвестируется в портфель C; если $\alpha_K < 0$, инвестор занимает деньги (под безрисковый процент r_0) и расширяет закупки портфеля C $(1 - \alpha_K > 1)$. Очевидно, что разные α_K отвечают разным точкам касания N_K для несхожих по функции полезности вкладчиков.

Если W_K - суммарный капитал инвестора K, то $Y_K = (1 - \alpha_K)W_K$ - капитал, вложенный в портфель C. Пусть соотношение $\gamma_1 : \gamma_2 : \ldots : \gamma_n$ задает пропорции, в которых рисковые бумаги входят в этот портфель, $(\sum\gamma_i = 1)$. Тогда $\gamma_i Y_K$ - вклад K-го инвестора в акцию i.

Обозначим рыночную стоимость фирмы i, выражаемую ценой всех ее акций, через V_i. По предположению, рынок находится в равновесии. Тогда суммируя все вложенные в акции этой фирмы капиталы, можем записать баланс спроса на i-й актив его предложению:

$$\sum_s \gamma_i Y_s = V_i$$

и поскольку суммарный капитал уравновешивает стоимость V всех рыночных активов $\sum_s Y_s = V$, где V - суммарная рыночная стоимость всех фирм. Из этих соотношений выведем, что

$$\frac{V_i}{V} = \frac{\sum_s \gamma_i Y_s}{\sum_s Y_s} = \gamma_i, \tag{65}$$

то есть доля всех акций i в оптимальном портфеле C равна доле этих акций на всем рынке. Таким образом, *равновесный портфель рынка имеет ту же структуру, что и оптимальный (касательный) портфель, вычисленный на основе вероятностных характеристик ценных бумаг*, а сам рынок имеет свойства, присущие этому оптимальному портфелю. В связи с этим последний отождествляют с ***рыночным портфелем*** и, говоря о нем, называют его рыночным.

Одним из следствий результата (65) является тот факт, что каждый инвестор K владеет одинаковой, присущей ему долей Z_K каждой фирмы. В самом деле, доля стоимости фирмы i, принадлежащая инвестору K, определяется отношением:

$$Z_i^K = \frac{\gamma_i Y_K}{V_i} = \frac{\gamma_i Y_K}{\sum_s \gamma_i Y_s} = \frac{Y_K}{\sum_s Y_s},$$

не зависящим от i, то есть будет одна и та же для всех фирм ($Z_K = Z_I^K = \ldots = Z_n^K$). Таким образом, каждый инвестор владеет одинаковыми частями каждой фирмы, равными доле участия его капитала ($Y_K/\Sigma Y_S$) на рынке рисковых активов.

Основное уравнение равновесного рынка

На траектории "а" эффективных рисковых портфелей выделим точку рыночного портфеля C (рис. 39). Пусть $i \le n$ - некоторый рисковый актив. Построим кривую риска "б", отвечающую всевозможным долевым сочетаниям Q и (1 - Q) вложений капитала в акции i и в портфель C. Это приведет к следующей диаграмме (рис. 45).

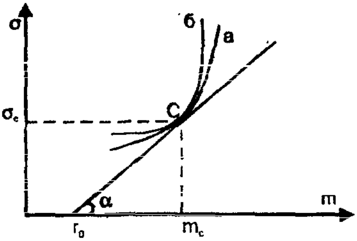


Рис. 45. **Взаиморасположение эффективной кривой "а" и кривой риска "б"**

Поясним характер расхождения этих кривых. Очевидно, что при $Q \neq 0$ комбинированный вклад дает неэффективную смесь рисковых активов. Поэтому кривая "б" должна быть над эффективной траекторией "а". При $Q = 0$ и та и другая кривая дают точку рыночного портфеля C, то есть соприкасаются в этой точке. Поэтому касательная из точки r_0 к кривой "а" будет касаться в той же точке C и кривой "б". Этих замечаний уже достаточно, чтобы получить основное свойство рыночного портфеля. Пусть

Q - смесь акции i с портфелем C, которая имеет доходность:

$R(Q) = QR_i + (1 - Q)R_C$.

Отсюда найдем математическое ожидание этой доходности:

$$m(Q) = Qm_i + (1 - Q)m_C \tag{66}$$

и ее среднеквадратичное отклонение (53):

$$\sigma(Q) = \sqrt{Q^2\sigma_i{}^2 + 2Q(1-Q)r_{ic}\sigma_i\sigma_c + (1-Q)^2\sigma_c{}^2}\,. \tag{67}$$

Интересующее нас соотношение получим, приравняв значения тангенса одного и того же угла α, вычисленные двумя способами. Во-первых, этот тангенс равен угловому коэффициенту прямой r_0C, то есть $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sigma_c}{m_c - r_o}$, и, во-вторых, он совпадает со значением производной функции $\sigma(m)$, изображенной графиком "б", вычисленной в точке m_C, то есть при $Q = 0$.

При нахождении этой производной заметим, что соотношение (66) позволяет выразить дисперсию (67) как сложную функцию от m;

$\sigma = \sigma(Q(m))$, где $Q = \dfrac{m - m_c}{m_i - m_c}$, откуда:

$$\frac{d\sigma}{dm}(Q) = \frac{d\sigma}{dQ}(Q) \times \frac{dQ}{dm} = \frac{Q\sigma_i^2 + (1-2Q)r_{ic}\sigma_i\sigma_c - (1-Q)\sigma_c^2}{\sigma(Q)} \times \frac{1}{(m_i - m_C)}.$$

Полагая Q = 0, получим, что

$$\sigma(0) = \sigma_c, \quad \frac{d\sigma}{dm}(0) = \frac{r_{ic}\sigma_i\sigma_c - \sigma_c^2}{\sigma_c} \times \frac{1}{(m_i - m_c)}.$$

Приравняв эту производную угловому коэффициенту, придем к равенству:

$$\frac{r_{ic}\sigma_i - \sigma_c}{m_i - m_c} = \frac{\sigma_c}{m_c - r_0},$$

из которого легко выводится следующее **основное уравнение равновесного рынка**:

$$m_i - r_0 = \frac{r_{ic}\sigma_i}{\sigma_c}(m_c - r_0). \tag{68}$$

Коэффициент пропорциональности:

$$\beta_i = \frac{r_{ic}\sigma_i}{\sigma_c} = \frac{\text{cov}(R_i, R_c)}{V_c} \tag{69}$$

называется ***бета вклада i-ой бумаги относительно оптимального (рыночного) портфеля***.

Превышение ожидаемой эффективности какой-либо рисковой ценной бумаги или портфеля рисковых ценных бумаг над эффективностью безрискового вклада именуется ***премией за риск***.

Линия рынка ценных бумаг (security market line, SML)

Соотношение (68) означает, что премия за риск, связанный с любой ценной бумагой $i \leq n$, пропорциональна премии за риск рыночного портфеля в целом с коэффициентом пропорциональности β_i.

Если по оси абсцисс откладывать величины бета (β), а по оси ординат - ожидаемую эффективность (m), то получим прямую, именуемую **линией рынка ценных бумаг** (рис. 46).

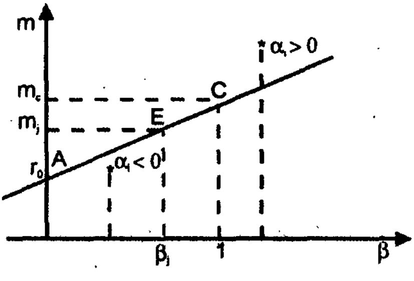


***Рис. 46.* Линия рынка ценных бумаг**

Эта прямая проходит через точку A (0, r_0), соответствующую безрисковому активу, и точку C (1, m_C), представляющую оптимальный рисковый портфель. В самом деле, для безрискового актива показатель корреляции $r_{0C} = 0$. Поэтому его бета вклада $\beta_0 = 0$ и премия (68) ему не выплачивается ($m_0 = r_0$).

Напротив, ввиду идентичности оптимального и рыночного портфелей в формуле (68) $\beta_C = 1$, и, следовательно, премии владельцам этих портфелей (инвестору и рынку) будут одинаковыми.

Располагая этой прямой, можно по известному бета ценной бумаги j найти ее ожидаемую эффективность в виде ординаты m_j соответствующей точки E на данной прямой.

Бета вклада

Остановимся на свойствах данного показателя, которые обусловлены влиянием парной статистической связи случайных эффективностей рынка и обращающихся на нем ценных бумаг. Приведем необходимые для этого сведения из регрессионного анализа двух случайных величин Y, X и прежде всего формулу линейной аппроксимации:

$$\hat{Y} = \frac{r_{yx}\sigma_y}{\sigma_x} \times (x - m_x) + m_y. \tag{70}$$

Известно, что данное соотношение дает линейное по X приближение для случайной величины Y, наилучшее в том смысле, что:

$$M(Y - \hat{Y})^2 = \min_{a,b} M(Y - aX - b)^2.$$

Легко убедиться, опираясь на формулу (70), что дисперсия:

$$D(Y) = M(\hat{Y} - m_y)^2 + M(Y - \hat{Y})^2. \tag{71}$$

Формулам (70) и (71) можно дать следующую наглядную иллюстрацию:

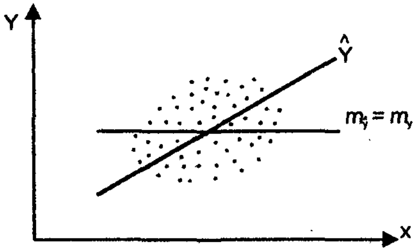


Рис. 47. **Поле корреляции и прямая регрессии** $\hat{Y}$

Первое слагаемое в формуле (71) определяется отклонениями точек прямой $\hat{Y}$ от математического ожидания m_y, а второе - вариацией переменной Y относительно прямой $\hat{Y}$. В случае линейной детерминированной связи Y от X каждому x будет соответствовать единственное значение y на прямой регрессии, и поэтому $M(Y-\hat{Y})^2 = 0$, а $M(\hat{Y}-m_y)^2 = D(Y)$.

Для независимой пары Y, X их корреляция $r_{yx} = 0$, и линейное соотношение (70) дает прямую нулевого наклона $\hat{Y} = m_y$; при этом $M(\hat{Y}-m_y)^2 = 0$, а вся дисперсия сосредоточена во втором слагаемом: $M(Y-\hat{Y})^2 = D(Y)$.

Подытоживая, можно сказать, что слагаемое $M(\hat{Y}-m_y)^2$ характеризует ту часть флуктуаций переменной Y, которая вызвана линейным влиянием входной переменной X, а остаток $M(Y-\hat{Y})^2$ дисперсии D(Y) определяется действием неучтенных факторов.

Используя эти формулы, проанализируем зависимость случайной эффективности $Y = R_i$ ценной бумаги i от случайной эффективности рынка $X = R_C$. В этих обозначениях формула квадратичной линейной регрессии $\hat{r}_i$ случайной величины R_i на случайную величину R_C имеет вид:

$$r_i = \frac{r_{ic}\sigma_i}{\sigma_c}(r_c - m_c) + m_i. \qquad (72)$$

Откуда видно, что угловой коэффициент прямой (72) совпадает с бета вклада (69). Соотношение (72) дает наилучшую среднеквадратичную линейную оценку эффективности акции i в зависимости от реализованного значения r_C. Поэтому понятно, что бета величины ценных бумаг являются коэффициентами, определяющими влияние общей ситуации на рынке на судьбу каждой ценной бумаги.

Если β_i положительна, то эффективность актива меняется однонаправленно с рынком, если β_i отрицательна, то эффективность актива будет снижаться при возрастании эффективности рынка.

Чем больше абсолютное значение бета вклада актива, тем чувствительнее реагирует его эффективность на изменения общерыночной ситуации R_C. Этот вывод тем точнее, чем меньше разброс $M(R_i - \hat{R}_i)^2$.

Равенство (71) можно интерпретировать как разложение общего риска на две части: обусловленную влиянием рынка (рыночный риск) и ту, что определяется воздействием внешних факторов. При этом сила рыночного влияния оценивается той долей общей дисперсии, которая приходится на вариацию точек регрессии (72):

$$\eta = \frac{M(\hat{R}_i - m_i)^2}{M(R_i - m_i)^2} = \frac{\beta_i^2\sigma_c^2}{\sigma_i^2} = r_{ic}^{\ 2}. \qquad (73)$$

Как видим, эта величина совпадает с квадратом коэффициента корреляции случайных эффективностей R_i и R_C.

Заметим, что более точному размежеванию риска отвечает известное разложения дисперсии:

$$D(Y) = D(M(Y/x)) + MD(Y/x), \tag{74}$$

где первое слагаемое - дисперсия условного математического ожидания, а второй член - математическое ожидание условной дисперсии. Если теоретическая регрессия $M(Y/x)$ линейна, то есть задается уравнение (70), разложения (74) и (71) совпадают, и, таким образом, при выполнении гипотезы линейности проведенное здесь рассмотрение становится строгим.

Ввиду независимости эффективных рисковых комбинаций от безрисковой альтернативы r_0 в "касательный" портфель С вполне могут попасть акции с ожидаемой доходностью m_i, ниже, чем ставка r_0. Эти бумаги, как видно из (68), имеют минусовые бета вклада и отрицательно коррелированы с рынком ($r_{ic} < 0$). Как мы уже знаем, подобные бумаги обладают хеджирующими свойствами, то есть позволяют ограничить риск портфеля.

Как следует из формулы премирования

$$m_i - r_0 = \beta_i(m_C - r_0),$$

назначаемые рынком поощрения зависят от линии поведения ценных бумаг. Те, что копируют рыночные тенденции ($r_{ic} > 0$), премируются, причем тем щедрее, чем выше "рыночная" компонента риска (73). "Строптивые" ценные бумаги ($r_{ic} < 0$), напротив, штрафуются и тем жестче, чем больше вносимый рынком риск (73) расширяет диапазон их "неповиновения".

Альфа вклада

Модель (68) определяет эффективность m_i тех ценных бумаг, которые покупаются и продаются на идеальном рынке. Реальные ценные бумаги могут отклоняться от прямой (рис. 46), отвечающей модели идеального конкурентного рынка. Соответствующие этим отклонениям невязки α_i между фактическими значениями m_i и модельными оценками вызваны погрешностями описания реальной рыночной ситуации оптимальным портфелем и называются ***альфа вклада***:

$$\alpha_i = m_i - (r_i + \beta_i(m_C - r_0)).$$

Наблюдаемые всплески ($\alpha_i > 0$) и провалы ($\alpha_i < 0$) означают, что *теоретическая* линия рынка ценных бумаг (SML) занижает (соответственно завышает) возможности ценной бумаги i. Поэтому одна из практических рекомендаций финансового анализа сводится к включению в портфель прежде всего тех ценных бумаг, которые недооценены рынком ($\alpha_j > 0$), то есть продаются дешевле, чем того заслуживают.

На рис. 46 точки, соответствующие недооцененным ценным бумагам, будут располагаться выше линии рынка АС, а точки, соответствующие переоцененным ценным бумагам, - ниже этой линии.

Линия рынка капитала (capital market line, CML)

В теореме об инвестировании в два фонда была найдена эффективная траектория общей задачи (57), которая, как оказалось, определяется касательной из точки (r_0, 0) к эффективной траектории "укороченной" задачи (49) - (51) (рис. 39). В результате задача инвестора свелась к отысканию такой точки на касательной прямой, которая дает оптимальное по индивидуальной полезности сочетание рыночного портфеля С с безрисковым активом r_0.

Данная прямая не персонифицирована по инвесторам и может рассматриваться как неотъемлемая характеристика конкурентного финансового рынка. В теории она называется ***линией рынка капитала*** и имеет вид касательной, изображенной на рис. 48.

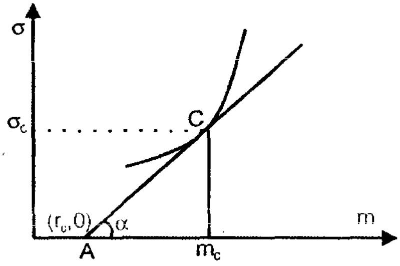


Рис. 48. **АС - линия рынка капитала**

Пусть m_c и σ_c - ожидаемая доходность и стандартное отклонение в точке С. Тогда угловой коэффициент прямой:

$$\lambda = tg\alpha = \frac{\sigma_c}{m_c - r_0}$$

определяет величину риска, поощряемого единичной премией.

Можно сказать, что восходящее движение вдоль линии капитала оплачивается неизменным размером добавочного риска на очередную добавочную единицу доходности Δm_p, то есть риск взимается пропорционально. Для сравнения отметим, что при перемещении по криволинейной траектории эффективных рисковых портфелей (рис. 35) последовательные приросты ожидаемой доходности отличаются прогрессивным возрастанием риска.

И наконец, на кривой безразличия уровневой полезности U(m, σ) (рис. 38) компенсация возрастающего риска возрастанием доходности производится во все увеличивающихся пропорциях, то есть имеет место регрессивное рискообложение.

Обратную "среднему" риску λ величину:

$$\mu = \frac{m_c - r_0}{\sigma_c}$$

иногда именуют ***рыночной ценой риска***, ее также допустимо назвать премией за единицу риска, или ***средней ценой риска***.

На эффективной траектории рисковых портфелей в точке С средняя и предельная цены риска совпадают:

$$\frac{m_c - r_0}{\sigma_c} = \frac{d(m_c - r_0)}{d\sigma},$$

правее - средняя цена будет выше, а при движении к началу (левее) предельное поощрение риска станет преобладать над средним.

Ранее, при обсуждении рыночной доли в разложении (71), было показано, что вносимый рынком риск по ценной бумаге i можно измерить характеристикой рассеяния:

$$\xi_i = \sqrt{M(\hat{R}_i - m_i)^2} = |\beta_i|\,\sigma_c.$$

За этот риск рынок премирует или штрафует в размере:

$$\Pi_i = \begin{cases} \mu\xi_i, \text{ если } r_{ic} > 0, \\ -\mu\xi_i, \text{ если } r_{ic} < 0, \end{cases}$$

меняя тем самым ожидаемую эффективность i-го вложения до уровня $m_i = r_0 + \Pi_i$. Это соотношение с учетом равенства $\Pi_i = \frac{(m_c - r_0)}{\sigma_c} \times \beta_i \sigma_c$ дает иную форму записи SML (68).

Равновесная цена на идеальном рынке

Напомним, что цена и ожидаемая доходность финансового актива находятся в обратной зависимости. Например, когда облигация имеет высокую цену, уровень ее доходности низок; когда цена низка - уровень доходности высок.

Рыночное равновесие определяет усредненную цену финансового актива и соответственно ожидаемый уровень его доходности. При прочих равных условиях кривую спроса можно представить как нормальную убывающую зависимость, связывающую цену актива с величиной спроса на него со стороны инвесторов. Более высокая цена, очевидно, ведет к меньшему совокупному спросу. Заимствуя из экономической теории термин ***"неценовые детерминанты спроса"***, можно в качестве таковых выделить следующие: *цены других активов, риски, корреляции, расположенность к риску.*

При изолированном изменении любого из этих факторов спрос на данный актив будет меняться. Так, с возрастанием риска он снизится, что отзовется увеличением равновесной ожидаемой доходности. Напротив, актив, который отрицательно коррелируется с рынком, пользуется повышенным спросом, так как он помогает инвесторам уменьшить риск их портфелей. Поэтому, несмотря на его более низкую ожидаемую доходность, инвесторы все равно будут вкладывать в него средства.

Очевидно, что взаимное расположение разных кривых спроса связано также с отношением инвесторов к риску. Более осторожные реагируют на риск резким свертыванием спроса и тем самым сообща сбивают цену. Отсюда можно заключить, что общий уровень цен на равновесном рынке, помимо собственно рисков, испытывает также давление, зависящее от отношения инвесторов к риску, и с ростом их агрессивности повышается.

Допустимо считать, что в краткосрочном периоде рыночное предложение активов не меняется и равновесие цен зависит только от изменений спроса, вызванных в том числе действием *неценовых детерминант*. Покажем, как учитывается их влияние в колебаниях рыночной стоимости фирмы.

Для упрощения выкладок рассмотрим простой случай двухпозиционного рынка. По одной позиции рынок сводит кредиторов и заемщиков, которые привлекают и размещают деньги под безрисковый процент r, а по другой - выступает посредником между продающей свои акции фирмой и инвесторами. Рынок является бескорыстным в том смысле, что использует одни и те же цены для покупки и продажи, то есть не берет комиссионных.

Итак, на рынке присутствует одна фирма и K инвесторов. Спрос каждого инвестора определим через желаемую для приобретения долю фирмы - $Z_к$, где к = 1, 2, ..., K.

Пусть $W_к$ - начальный капитал инвестора к. Каждый инвестор на двухпозиционном рынке решает задачу размещения своего капитала между двумя видами вложений: в акции фирмы и под неслучайную ставку r, то есть - уже известную нам задачу о двувидовом портфеле с безрисковой составляющей.

Его окончательный выбор на прямой эффективных портфелей (56) зависит от его отношения к риску и определяется личной функцией полезности дохода $F_к$:

$U_к = F_к - C_кF_к2, C_к > 0.$

Будем считать, что каждый инвестор предусматривает возможность использования заемного капитала по ставке r, с тем чтобы увеличить свою долю $Z_к$.

Обозначим рыночную стоимость фирмы, приуроченную к дате принятия инвестиционных решений, то есть к началу периода, через $V_х$. Эта стоимость формируется под влиянием индивидуальных решений $\left\{Z_к, к = \overline{1,K}\right\}$, составляющих совокупный инвестиционный спрос на акции фирмы.

В свою очередь, предпочтения $Z_к$ участников зависят от прогнозируемого ими экономического состояния фирмы. На основе этих прогнозов у каждого участника складывается свое мнение-оценка возможной стоимости фирмы V на конец рассматриваемого периода. Последнее позволяет считать цену V случайной величиной с заданными средними: математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

Легко понять, что, если разрешено инвестировать за счет заемных средств, рынок будет способствовать такому перераспределению капиталов (от тех, кто избегает короткой позиции, к тем, кто ее использует), при котором в равновесии

$$\sum W_K = V_X,\ \sum Z_K = 1. \tag{75}$$

Выбирая объем вложения $Z_K V_X$, инвестор K в конце периода будет располагать средствами

$$F_K = (W_K - Z_K V_X)\rho + Z_K V = \rho W_K + Z_K(V - \rho V_X). \tag{76}$$

В этом выражении множитель $\rho = 1 + r$ - коэффициент наращения по начальному вкладу $(W_K - Z_K V_X)$, а второе слагаемое $Z_K V$ равно стоимости принадлежащих инвестору акций в конце периода.

Задача инвестора состоит в том, чтобы максимизировать ожидаемую полезность благосостояния F_K. Эта полезность является сложной функцией от переменной Z_K.

Ее первая производная $\frac{dU_k}{dZ_k} = \frac{dU_k}{dF_k} \times \frac{dF_k}{dZ_k} = (1 - 2C_k F_k)(V - \rho V_x)$, а вторая производная

$$\frac{d^2U_k}{dZ_k^2} = \frac{d^2U_k}{dZ_k dF_k} \times \frac{dF_k}{dZ_k} = (-2C_k)(V - \rho V_x)^2 < 0.$$

Поэтому, если нет ограничений на короткую позицию, необходимое и достаточное условие точки максимума запишется в виде:

$$E[(1 - 2C_K F_k)(V - \rho V_X)] = 0. \tag{77}$$

Подставляя (76) в (77), получим следующее уравнение для определения оптимального значения Z_K:

$$E\left\{\left[\frac{1}{2Ck} - \rho W_k - Z_K(V - \rho V_x)\right][V - \rho V_x]\right\} = 0. \tag{78}$$

Откуда:

$$Z_K E(V - \rho V_x)^2 = \left(\frac{1}{2C_k} - \rho W_k\right) E(V - \rho V_x).$$

Раскрывая математические ожидания в левой и правой частях этого равенства, получим:

$$Z_K(E(V^2) - 2m\rho V_x + \rho^2 V_x^2) = \left(\frac{1}{2C_k} - \rho W_k\right)(m - \rho V_x). \tag{79}$$

Рассмотрим равенства (79) при различных к = 1, 2, ..., K и сложим их с учетом (75) и тождества $E(V^2) = \sigma^2 + m^2$. В результате получим:

$$\sigma^2 + m^2 - 2m\rho V_x + \rho^2 v_x^2 = (m - \rho V_x)\left(\sum \frac{1}{2C_k}\right) - \rho V_x(m - \rho V_x).$$

Это соотношение приводится к виду:

$$(m - \rho V_x)\left(\sum \frac{1}{2C_k} - m\right) = \sigma^2.$$

Раскрывая, найдем рыночную стоимость фирмы:

$$V_x = \frac{1}{\rho}\left[m - \frac{\sigma^2}{\left(\sum \frac{1}{2C_k} - m\right)}\right]. \qquad (80)$$

Таким образом, текущая стоимость фирмы может рассматриваться как дисконтированная величина ее цены m, ожидаемой на конец периода, скорректированная с учетом риска и предрасположенностью к нему инвесторов. Эта предрасположенность характеризуется величинами $\{C_K\}$. Инвесторы с малым значением этого коэффициента почти не обращают внимания на риск; для тех же, кто осторожничает, его величина будет существенно выше.

Согласно свойствам квадратичной функции полезности $U_K(F_K)$ значение аргумента

$$F_к \le \frac{1}{2C_к}.$$

Поэтому, как следует из (75), (76),

$$V = \sum F_к \le \sum \frac{1}{2C_к}$$

и, следовательно,

$$\sum \frac{1}{2C_к} - m > 0.$$

Анализируя формулу ценообразования (80) для крайних случаев убывания и роста коллективной склонности к риску $\left(\sum \frac{1}{2C_к}\right)$, получим, что на рынке агрессивных инвесторов цена (80) растет и приближается к безрисковому варианту $\left(V_x \to \frac{m}{\rho}\right)$, а для осторожных падает вплоть до обесценивания.

Таким образом, выводы модели полностью согласуются с наблюдаемой реальностью - с массовым ростом рископредрасположенности участников рынка ценных бумаг общий уровень цен на нем повышается.

Здесь мы ограничились частным случаем одной фирмы. В случае со многими фирмами-продавцами (j = 1, 2, 3 ...) формулы равновесных цен имеют вид:

$$Vx_j = \frac{1}{\rho}\left[m_j - \frac{\sum_i \sigma_{ij}}{\sum_k \frac{1}{2C_k} - \sum_i m_i}\right].$$

Такое расширение позволяет выявить влияние взаимных ковариаций будущих цен и их математических ожиданий.

Процентная ставка, скорректированная с учетом риска

Рассмотрим операцию с ценной бумагой, состоящую из покупки ее в начале периода по цене P_0 и продажи в конце периода по цене P_1. Дивидендные выплаты, полученные таким "однопериодным" акционером, обозначим через D_1. В детерминированном анализе за возможную оценку курсовой стоимости принимается уже знакомая нам величина:

$$P_0 = \frac{P_1 + D_1}{1 + r_0},$$

где r_0 - эффективность безрискового вложения.

Вместе с тем для инвестора-практика более точной оценкой стоимости является дисконтированная величина ожидаемого дохода, основанная на ставке, которую он прогнозирует в качестве эффективности вклада. В модели системы установления цен на капитальные активы (CAPM) эта ставка m_i определяется ожидаемой доходностью i-го вложения и согласно основному уравнению равновесного рынка (68):

$$m_i = r_0 + \beta_i(m_c - r_0).$$

Дисконтируя по этой ставке (по рыночной цене капитального актива), получим ***оценку текущей стоимости***:

$$P_0 + \frac{E(P_1) + E(D_1)}{1 + r_0 + \beta_i(m_c - r_0)}. \qquad (81)$$

В этой формуле числитель равен ожидаемым от акции платежам: математическому ожиданию случайного дохода за счет будущих продаж и дивидендных поступлений ($E(P_1)$, $E(D_1)$), а знаменатель равен единице плюс процентная ставка, требуемая инвесторами.

Чем больше вносимый рынком риск, тем (при *положительных* бета) больше требуемая ставка доходности и, следовательно, тем меньше цена акции при заданном уровне будущих потоков платежей.

Напротив, для *отрицательно* коррелированных активов ($r_{ic} < 0$), то есть $\beta_i < 0$, инвестор, высоко оценивая их хеджирующие способности, готов поступиться частью дохода ($m_i < r_0$) и корректирует безрисковую ставку r_0 в сторону удорожания P_0. В формуле (81) цена акции выражена с помощью коэффициента дисконтирования, скорректированного с учетом риска и знака корреляции.

Опираясь на определение (69) коэффициентов "бета", выведем еще одну формулу цены P_0, основанную на "переадресации" риска со ставки дисконтирования на ожидаемые платежи. Для этого преобразуем выражение (81), раскрыв ковариацию в определении бета i-го вклада (69). Доходность акции i за период владения ею равна:

$$R_i = \frac{P_1 + D_1 - P_0}{P_0},$$

отсюда

$$\mathrm{cov}(R_i, R_c) = \mathrm{cov}\left(\frac{P_1 + D_1 - P_0}{P_0} R_c\right),$$

где случайная величина R_c - доходность рыночного портфеля С. Используя определение ковариации, перейдем к математическим ожиданиям и получим:

$$\mathrm{cov}(R_i, R_c) = E\left\{\left[\frac{P_1 + D_1 - P_0}{P_0} - \frac{E(P_1 + D_1) - P_0}{P_0}\right]\left[R_c - E(R_c)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{P_0} E\{[(P_1 + D_1) - E(P_1 + D_1)][R_c - E(R_c)]\} = \frac{1}{P_0}\mathrm{cov}(P_1 + D_1, R_c),\ \text{т. е.}$$

$$\beta_i = \frac{1}{P_0}\frac{\mathrm{cov}(P_1 + D_1, R_c)}{\sigma_c^2}.$$

Подставляя это выражение в (81), будем иметь:

$$P_0 = \frac{E(P_1 + D_1)}{1 + r_0 + \frac{1}{P_0}\frac{\mathrm{cov}(P_1 + D_1, R_c)}{\sigma_c^2}(m_c - r_0)},$$

откуда

$$P_0(1 + r_0) + \frac{\mathrm{cov}(P_1 + D_1, R_c)}{\sigma_c^2}(m_c - r_0) = E(P_1 + D_1)$$

и, наконец,

$$P_0 = \frac{E(I) - r_{Ic}\sigma_I\mu}{1 + r_0}. \qquad (82)$$

В этой формуле

$\mu = \frac{m_c - r_0}{\sigma_c}$ - рыночная цена риска, $I = P_1 + D_1$ - поступления за период, r_{Ic} - коэффициент корреляции случайных величин I, R_c.

В записи (82) дисконтируют по безрисковой ставке, а чтобы учесть риск, корректируют числитель формулы (81), заменяя его на безрисковый эквивалент будущим платежам. Как подход с корректировкой коэффициента дисконтирования (81), так и подход с безрисковым эквивалентом (82) могут применяться для оценивания курсовых стоимостей конкретных акций.

Если величина бета эмпирически оценена, то САРМ позволяет с помощью линии ценных бумаг (рис. 46) найти ожидаемую доходность акции, которая одновременно дает коэффициент дисконтирования будущих рисковых поступлений.

Выше для простоты были рассмотрены частные случаи проблемы равновесных цен. В общей постановке эта проблема формулируется в тех же условиях, что и расширенная задача об эффективном портфеле (57).

Представим себе инвесторов, которые, опираясь на функции полезности и результаты расчета модели (57), определились с оптимальными решениями своих портфельных задач. Таким образом, каждый знает наилучшие пропорции распределения имеющегося капитала по интересующим его активам. Этого, однако, мало. Чтобы воплотить найденные решения, необходимо еще знать и цены, по которым следует покупать акции. Ответ на данный вопрос дают формулы цен равновесия на идеальном рынке.

О статистическом направлении в САРМ

Рассмотренные в данной главе методы применяются для решения портфельных задач инвестора и для оценивания доходностей и курсовых стоимостей ценных бумаг. Модели и формулы, которые при этом используются, требуют знания определенных вероятностных характеристик финансового рынка и его составных: дисперсий и математических ожиданий, корреляций, условных математических ожиданий.

Количественные оценки этих характеристик находят в результате статистической обработки необходимых для этого реальных данных с помощью хорошо известных методов. Для экономии расчетов в статистике финансового рынка обосновывается целесообразность применения ***метода ведущего фактора***, роль которого играет эффективность рыночного портфеля R_C. Эта величина, именуемая ***эффективностью рынка***, ***представляет собой взвешенную (с учетом капитала) сумму эффективностей всех рисковых ценных бумаг, обращающихся на рынке.***

Конечно, на практике невозможно следить за поведением всех ценных бумаг, поэтому рассмотрению подлежат истории только тех, которые на протяжении достаточно длительного периода фигурируют на торгах и оборот которых достаточно существен для рынка, а в качестве ведущего фактора используют какой-либо биржевой индекс, рассчитанный с учетом их цен. Эти индексы позволяют оценивать рыночную конъюнктуру одним числом, и чем больше это число, тем конъюнктура считается лучше.

Пример. Рассмотрим три ценовых состояния рынка (конъюнктуры) с двумя видами акций: А, В.

Конъюнктура / Цена	1	2	3
А	8	11	9
В	12	9	13

Из таблицы видно, что третий столбец лучше первого (цены всех акций выше), однако оставшиеся пары (1; 2) и (2; 3) несравнимы.

Биржевые индексы обычно определяются через взвешенную среднеарифметическую величину всех цен, образующих корзину индекса.

Обозначим n_A и n_B число торгуемых акций вида А и В, тогда $N = n_A + n_B$ - общее число бумаг. Пользуясь этими обозначениями, введем следующий индекс:

$$\text{Ind} = \frac{n_A}{N} P_A + \frac{n_B}{N} P_B = \frac{S}{N},$$

где P_A, P_B - курсы, а S - стоимость "корзины".

Положим $n_A = 150$, $n_B = 200$. По табличным данным найдем индекс для каждого состояния. В результате будем иметь:

Номер состояния m	1	2	3
S(m)	3600	3450	3950
Ind(m)	10,28	9,86	11,28

Таким образом, сравнивая значения индекса, выявим, что наилучшей из всех является третья конъюнктура.

Исторически первым (1886 г.) в "списке" биржевых индексов был показатель, введенный Чарльзом Х. Доу и *Эдуардом Д. Джонсом.* В настоящее время он относится к наиболее известным и рассчитывается путем сложения цен включенных в него акций на момент закрытия биржи и деления полученной суммы на определенный коэффициент.

Аналогично строятся и другие индексы. Например, широко распространенный *Standart and Poor's 500 index* - индекс 400 индустриальных, 20 транспортных, 40 коммунальных и 40 финансовых компаний и ряд других.

Пусть даны последовательности наблюдений эффективности $R_j^{(t)}$, $t = 1, 2, ..., T$ и ведущего фактора $R_C^{(t)}$, относящегося к тем же моментам времени.

Согласно принятой гипотезе случайные величины R_j и R_C связаны соотношением:

$$R_j = a_j + b_j R_C + e_j,$$

где e_j - взаимно не коррелированные и не коррелированные с R_C случайные величины с нулевым ожидаемым значением, а постоянные параметры a_j, b_j подлежат оценке по наблюдениям. Отсюда вытекает, что теоретическая регрессия R_j относительно случайной эффективности рынка R_C будет линейна:

$$E(R_j/R_C) = a_j + b_j R_C.$$

Известно, что условное математическое ожидание дает наилучшее среднеквадратичное приближение среди всех функций $f(R_C)$. Таким образом, принятая гипотеза означает, что теоретическая регрессия $E(R_j/R_C)$ совпадает со среднеквадратичной линейной регрессией (70).

Из основного соотношения следует, что:

$$m_j = a_j + b_j m_C,$$

и, следовательно,

$$R_j - m_j = b_j (R_C - m_C) + e_j.$$

Отсюда для вариаций получаем:

$$V_j = b_j^2 V_C + V_{ej},$$

а для ковариаций ($i \neq j$) имеем:

$$V_{ij} = E\{(R_i - m_i)(R_j - m_j)\} = b_i b_j V_C,$$

где учитываются некоррелированности e_i, e_j, R_C.

Как следует из (69) и (70), в рассматриваемом случае коэффициент регрессии b_i для i-й ценной бумаги совпадает с ее бета вклада β_i.

При нарушении гипотез идеального финансового рынка возможности применения моделей CAPM и методов классической статистики ограничиваются. С целью преодоления возникающих при этом трудностей прибегают как к более "изощренным" ***методам идентификации***, так и к разработке различных портфельных эвристик, в значительной степени основанных на здравом смысле и возможностях компьютеризации. Эти направления, однако, выходят за рамки обсуждавшихся здесь подходов, и мы их не рассматриваем.

ЧАСТЬ II

ХЕДЖИРОВАНИЕ

Глава 1

Защитные портфели и опционное хеджирование

Стремление финансиста избежать риска и обеспечить себе гарантированную доходность вложенного капитала побуждает его к такой организации портфеля активов, при которой получается минимально возможный разброс эффективностей относительно приемлемого для него значения. Эта проблема близка по содержанию еще одной, практически важной, *задаче составления такого портфеля, доход от которого заведомо позволит обслужить все имеющиеся на заданную дату обязательства (долги).*

Одна из главных проблем финансовой математики и финансовой инженерии состоит в том, чтобы выявить условия, при которых подобное снижение риска осуществимо. И если это так, то определить начальный капитал, делающий возможным подобное хеджирование.

В настоящем разделе рассматриваются некоторые из методов решения поставленных вопросов, где в качестве объединяющего признака выступает отрицательная коррелированность эффективностей портфельных компонентов. В связи с этим соответствующие стратегии хеджирования основываются на противопоставлении опционов на акции и самих акций, а также облигаций различной срочности.

В целях доступности для экономически ориентированного читателя при обсуждении опционов ограничимся простыми моделями, достаточными для понимания общего направления при снятии упрощающих допущений.

При изложении основной материал "разбавляется" необходимыми для его понимания сведениями по опционам и облигациям. Так, для опционов на примере обсуждаемых моделей решается задача определения их "справедливой" цены (премии эмитента). Соответствующий принцип ценообразования не укладывается в единообразную схему для неконтрактных ценных бумаг (акций и облигаций), основанную на дисконтировании "датированных" доходов. Это объясняется ***спецификой опционного контракта по сравнению с данными бумагами***, его хеджирующими свойствами и предъявляемыми к договорам требованиями согласования. Последние в данном случае сводятся к невозможности получения участниками сделки (продавцом опциона и его покупателем) безрискового дохода.

Что касается облигаций, то при изучении хеджирующего пакета по мере необходимости включаются сведения, связанные с риском процентных ставок и их временной структурой, которые, кроме того, имеют и самостоятельный интерес.

Ранее при изучении портфеля ценных бумаг мы обратили внимание на то, что наличие в нем активов с отрицательно коррелированными доходностями снижает риск портфеля. Данное свойство применяют для получения защищенных от риска финансовых вложений, сочетая те направления, у которых возможные уклонения доходностей от их ожидаемых значений противоположны.

Опционы и акции

Этим, в том числе, объясняется становление на развитых финансовых рынках биржевой торговли по заключению контрактов с опционами и фьючерсами - одними из основных финансовых инструментов, относящихся к производным ценным бумагам и обладающих хеджирующими достоинствами. О масштабах торговли можно судить хотя бы потому, что, например, в 1995 г. на Нью-Йоркской бирже в дневном обороте заключалось 3,4 млн. опционных контрактов. Если учесть, что каждый единичный контракт - это сделка на куплю или продажу 100 акций, то, следовательно, ежедневно было задействовано порядка 340 млн. акций.

Высокий спрос на фьючерсы и опционы поддерживается, в отличие от акций, благодаря заинтересованности инвесторов в снижении портфельного риска и вопреки неблагоприятным значениям ожидаемой доходности (низкая) и риска (высокий). Для удачливых инвесторов достигаемые здесь эффективности могут быть намного выше, чем по акциям, что, впрочем, уравновешивается, в силу контрактного характера этих бумаг, проигрышем "оппонентов".

Пример. Полярность изменения доходностей финансового актива и заключенного на него срочного контракта проиллюстрируем на примере акции и колл-опциона. Пусть для определенности это будет Европейский тип опциона "при деньгах" (контрактная цена равна текущему курсу), который дает право на дату покупки акции по цене, равной текущей котировке S, и допустим, что за контрактный срок T дивиденды на акцию выплачиваться не будут.

При удорожании акции до уровня $S_T > S$ держатель опциона воспользуется своим правом и эмитент вынужден будет исполнить контракт по заниженной цене. В результате его брутто-потери (без учета премии) составят величину $f_T = S_T - S$, равную тому выигрышу, который он имеет как владелец акции (происходит перекачка выигрыша по акции в карман держателя опциона). В противоположной ситуации, если произойдет понижение цены ($S_T < S$), он потеряет по акции, но выиграет по опциону (получит премию без вычетов).

На рынке ценных бумаг отмеченная разнонаправленность обнаруживает себя через отрицательную статистическую связь (корреляцию) доходностей по акциям и опционам.

Этот пример подсказывает, в частности, один из доступных способов получения безрискового портфеля через соблюдение хеджирующей пропорции между числом проданных колл-опционов (короткая позиция), в расчете на одну купленную акцию. Заметим, что разнообразие опционных позиций (2 × 2 = 4) по вариантам сделки (купить, продать) и видам опционов ("колл", "пут") позволяет прийти к другим вариантам отрицательных корреляций, например сочетать покупку акций и пут-опционов на нее. Это, в свою очередь, расширяет возможности составления хеджирующих смесей. Некоторые из них будут даны в разделе, посвященном составлению защитных портфелей с использованием опционов.

Облигации разной срочности

В качестве еще одного варианта отрицательной коррелированности рассмотрим *разнопериодные облигации*. В дальнейшем будет показано, как это свойство позволяет решать "защитные" задачи от риска, связанного с изменением процентной ставки. Для простоты ограничимся обсуждением бескупонных облигаций.

В общем случае разные периоды будут отличаться эффективностями вложений. Информация об этом содержится в кривой доходности (yield curve), отражающей зависимость доходности к погашению от срока выпуска до погашения. Взаимоотношение между доходностью и срочностью долговых контрактов (облигаций) называется еще ***временной структурой процентных ставок*** (term structure of interest rates). Практически эта кривая строится по текущим рыночным ценам на государственные долговые обязательства (которые признаются безрисковыми) различных сроков погашения. Обычно кривая доходности имеет положительный наклон, то есть ценные бумаги с большим сроком до погашения имеют более высокую доходность.

В повседневной деятельности инвесторы в зависимости от своих запросов опираются на различные варианты кривых доходности. Для сравнительного анализа временной структуры ими привлекаются как процентные ставки, выводимые из текущих котировок однотипных бумаг с разными датами эмиссии, например трехмесячных ГКО, так и кривые доходности, отслеживающие динамику ее изменения и персонифицированные по выпускам. Наличие подобной информации позволяет менеджеру активно управлять портфелем облигаций, занимаясь либо его комплектацией, либо выбором времени продажи одного выпуска и купли другого, либо и тем и другим.

Остановимся на ***двух способах инвестирования в зависимости от длительности ценных бумаг с фиксированной доходностью***:

- для краткосрочных облигаций - это покупка и хранение их до срока погашения, а затем реинвестирование поступивших средств;
- другой вариант - игра на кривой доходности при наличии определенных условий. Одно из условий состоит в том, что кривая доходности имеет наклон вверх. Другое условие - это уверенность инвестора в том, что кривая доходности в будущем не изменится. При данных ограничениях инвестор, играющий на кривой доходности, покупает ценные бу-

маги, имеющие более длительный срок до погашения, чем это ему в действительности необходимо, а затем продает их до срока погашения, получая таким образом некоторую дополнительную прибыль.

Пример. Рассмотрим инвестора, который вкладывает средства в 90-дневные казначейские векселя. В данный момент они продаются по 98,25 долл. при номинале в 100 долл., то есть их доходность составляет (за год):

$$\frac{100-98,25}{98,25}\times\frac{365}{90}\times 100\approx 7,22\%.$$

Однако 180-дневные казначейские векселя продаются по 96 долл., что дает большую доходность:

$$\frac{100-96}{96}\times\frac{365}{180}\times 100\approx 8,45\%.$$

Изобразим возрастающую кривую доходности, на которой расположены эти значения.

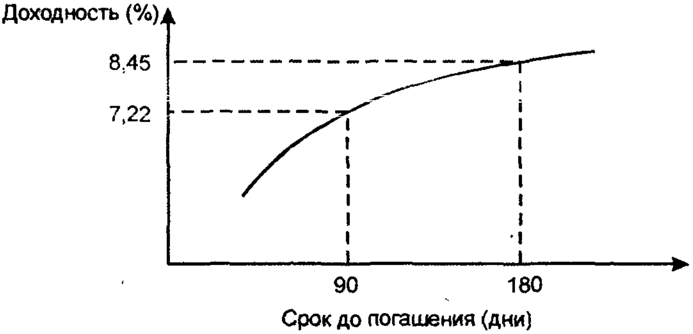


Рис. 1. **Кривая доходности казначейских векселей**

Согласно этой кривой за 90 дней до срока истечения ожидаемая цена продажи длинных векселей будет равна дисконтированной по ставке 7,22% величине их номинала, что, как легко убедиться, даст 98,25 долл. (Заметим, что это значение совпадает с текущей ценой 90-дневных векселей, поскольку в соответствии со сделанным предположением кривая доходности не поменялась за 90 дней). Это означает, что ожидаемая ставка доходности от перепродажи составит:

$$\frac{98,25-96,00}{96,00}\times\frac{365}{90}\times 100,\text{ то есть }9,5\%.$$

Итак, ожидаемая доходность при игре по кривой выше, чем доходность "ожидания" по короткой облигации (9,5 > 7,22). Данное явление происходит потому, что инвестор ожидает получить прибыль за счет досрочной реализации 180-дневных векселей, которые были первоначально приобретены.

Таким образом, с точки зрения доходности из двух альтернатив - покупка и погашение 90-дневных векселей или покупка 180-дневных бумаг и их продажа через те же 90 дней - вторая оказывается предпочтительнее.

Разумеется, что для убывающей кривой доходности вывод поменяется на противоположный. Если же эффективности не зависят от горизонта погашения (доходность постоянна), альтернативы становятся равновыгодными.

Ситуационно подходящий срок погашения может следовать календарным обязательствам инвестора, например необходимости покрыть задолженность в определенном объеме на определенную дату. Допустимо, конечно, отложить требуемую сумму и держать ее в кубышке до наступления момента истины. Но разумнее обойтись меньшей суммой и наращивать ее до нужного размера с помощью облигаций. Для этого можно купить облигации с погашением на нужный период или воспользоваться более короткими бумагами и реинвестированием. Еще один способ - вложиться в облигации с превосходящим периодом и продать их по срочности обязательства.

Следует иметь в виду, что в реальности будущие процентные ставки случайны. Поэтому как реинвестирование (короткие бумаги), так и игра на кривой доходности более рискованны, чем просто покупка бумаг с подходящим сроком погашения.

В самом деле, при многошаговом наращении по однопериодным бумагам и преждевременной продаже длинных бумаг результаты будут зависеть от случайных в будущем ставок по формулам начисления и соответственно дисконтирования по сложным процентам. Отсюда понятно, что получаемые по каждому варианту изменения в выигрышах будут по разному реагировать на изменение процентных ставок: копируя их для коротких бумаг и отрицая для длинных.

Пример. Пусть для простоты кривая доходности горизонтальна, то есть доходность к погашению не зависит от времени погашения t. Иначе говоря, текущие P_t и номинальные F_t стоимости связаны одной той же (в отличие от предыдущего примера) ставкой дисконтирования r:

$$P_t(1 + r)^t = F_t, \ t = 1, 2, ...,$$

то есть все контракты независимо от срока их действия имеют одну и ту же внутреннюю норму доходности.

Обозначим базовую процентную ставку, действующую в настоящий момент, через r_0. Для покрытия задолженности D на дату T можно воспользоваться одним из трех вариантов вложения: в однопериодные, T-периодные и в облигации с погашением позже долга (L > T) и номиналом $D(1 + r_0)^{L-T}$.

При начальном капитале $I = D(1 + r_0)^{-T}$ и неизменной в будущем процентной ставке все три способа, приуроченные к моменту выплаты T (разовое погашение, реинвестирование, досрочная продажа), финансово эквивалентны и безрисковы. Независимо от случайных изменений процентной ставки первый способ (покупка Т-бумаг и хранение их до срока погашения) остается безрисковым и обеспечивает обслуживание долга за счет вырученных при погашении средств D.

Если в момент, следующий за настоящим, ставка вырастет до величины $r > r_0$, то результат реинвестирования D_1 превысит величину долга D:

$$D_1 = I(1+r)^T = D\left(\frac{1+r}{1+r_0}\right)^T > D,$$

а игра на кривой доходности приведет к недостаче:

$$D_2 = \frac{I(1+r_0)^L}{(1+r)^{L-T}} = D\left(\frac{1+r_0}{1+r}\right)^{L-T} < D.$$

Таким образом, доходность реинвестирования (короткие бумаги) станет выше, а доходность перепродажи (длинные бумаги) снизится.

При падении ставки ($r < r_0$) выводы поменяются на симметричные. Отсюда видно, что *случайные доходности активов, предшествующих долгу и следующих за ним, меняются разнонаправленно, то есть имеют* ***отрицательную корреляцию.***

Попутно заметим, что на этом свойстве основан способ получения защитного пакета из коротких и длинных облигаций, к теории которого мы еще вернемся.

1.2. Элементарные основы опционного хеджирования

Познакомим читателя с некоторыми приемами редуцирования риска, предлагаемыми теорией опционов. Для облегчения при первоначальном знакомстве ограничимся элементарными вариантами неопределенности финансового рынка, что, впрочем, не снижает концептуальной общности изложения.

Предварительные сведения об опционах

Опцион - это ценная бумага (контракт), выпускаемая фирмами, корпорациями, банками и другими финансовыми институтами и дающая покупателю право купить или продать определенную ценность (акцию, облигацию, валюту...) в установленный период или момент времени на заранее оговоренных условиях.

В качестве этих условий выступают зафиксированная в договоре цена предмета сделки (*цена исполнения*) и размер премии (*цена опциона*), уплачиваемой покупателем опционного контракта его продавцу. Необходимость такой выплаты возникает в связи с преимуществами (о которых мы скажем чуть позже) владельца прав по сравнению с их гарантом - продавцом опциона.

Полезно отметить, что в отличие от опционов близкие им по духу *фьючерсные контракты* свободны от правовых перекосов и представляют собой соглашения-обязательства купить или продать определенную ценность (зерно, золото, валюту...) в определенный момент в будущем по (фьючерсной) цене, оговариваемой в момент заключения сделки.

Опционы обычно делятся на два класса - опционы *Европейского типа* и *Американского типа* и бывают двух видов: *колл-опционы* (право купить) и *пут-опционы* (право продать).

Американские опционы могут исполняться в любой момент времени до даты истечения срока их действия. В отличие от американских *европейские опционы могут быть исполнены только на дату окончания контракта*. ***В дальнейшем мы будем рассматривать только европейский тип и для экономии сосредоточимся преимущественно на опционах "колл"***. Переход к пут-опционам не требует значительных усилий и зачастую может быть выполнен с помощью "симметричных" рассуждений. Что же касается американских опционов, то здесь симметрия не поможет и, чтобы не усложнять пособие, мы их не даем.

Обсуждение мотивов опционных сделок сопроводим рассмотрением графиков выигрышей их участников. Пусть для опциона с контрактной ценой K премия, уплаченная в начале срока, равна C и пусть на конец срока курс акций установился на уровне S; безрисковый процент с периодом начисления, равным срочности опциона, обозначим через r.

Покупатель опциона "колл" рассчитывает на повышение цен. Если окажется, что $S > K$, то по условиям контракта он имеет право купить акцию по льготной цене K. Значит, купив по этой цене и сразу же продав по (рыночной) цене S, будет иметь доход, равный $S - K$.

Если же $S \le K$, то пользоваться предоставленным правом покупки по цене K бессмысленно (так как можно купить и по более низкой цене S) и, следовательно, доход держателя контракта будет равен нулю. С учетом выплачиваемой надписателю опциона премии *чистый доход покупателя* в первом рассмотренном случае ($S > K$) будет равен:

$$(S - K) - C(1 + r).$$

Во втором же случае ($S \le K$) его доход, приведенный на ту же дату, сравняется с отрицательной величиной $\{-C(1 + r)\}$, то есть на самом деле он потеряет выплаченную эмитенту премию.

Объединяя эти случаи одной записью, придем с следующей *функции выигрыша покупателя*:

$$f = \max(0, S - K) - C_T = \max(-C_T, S - K - C_T),$$

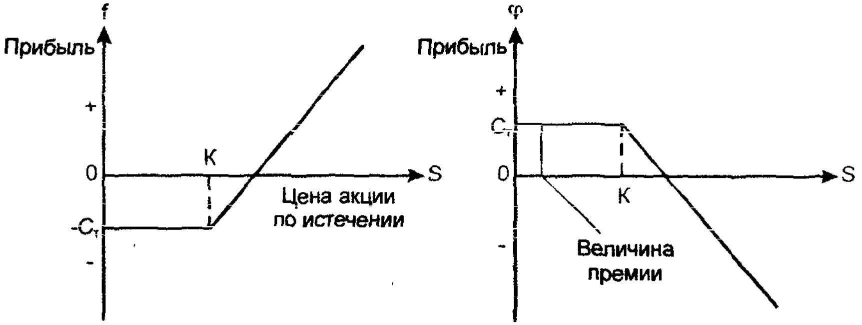
где $C_T = C(1 + r)$ - премия, приведенная к дате истечения опциона.

Так как выигрыш покупателя - это проигрыш продавца, то одноименная *функция для надписателя (продавца) опциона* задается равенством:

$$\varphi = -f = \min(C_T, C_T + K - S),$$

а ее график представляет собой зеркальное отражение ломаной линии выигрышей и потерь f.

На рис. 2 представлены графики этих функций в зависимости от цены акции S.



а) покупка опциона "колл" б) продажа опциона "колл"

Рис. 2. **Выигрыши и потери от колл-опциона**

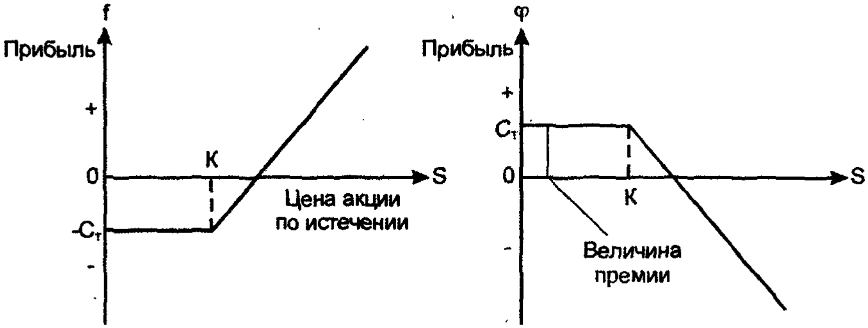
Графики в *случае* ***пут-опциона*** строятся аналогично. Для разнообразия проведем рассуждения с точки зрения продавца. Ему выгодна ситуация роста цен (S > K), вынуждающая покупателя отказаться от невыгодной сделки. Если же S ≤ K, то право продать по контрактной цене будет реализовано и продавец "пута" обязан будет приобрести актив дороже, чем он стоит на реальном рынке. В результате его платежи будут следующим образом зависеть от цены S:

$$\varphi = \begin{cases} C_T, & S > K, \\ C_T - (K - S), & S \le K, \end{cases}$$

и с учетом их направления дадут покупателю опциона доход

$f = -\varphi$.

Соответствующие этим зависимостям графики изображены на рис. 3.



а) покупка опциона "пут" б) продажа опциона "пут"

Рис. 3. **Выигрыши и потери от пут-опциона**

Как следует из приведенных графиков, риск покупателя опциона ограничен величиной уплачиваемой им премии C_T (ценой опциона). Для продавца же опциона потери могут быть намного больше, а в случае опциона "колл" - как угодно велики.

Отмеченная неравновесность дает повод использовать опцион как своего рода страховой полис, приобретаемый для защиты от опасного движения цен. Еще одно преимущество, которое создают особенности инвестирования в опцион, - это ***эффект рычага***. Его действие объясняется тем, что, скажем, для дорожающих акций их покупка по опциону может обойтись на порядок дешевле, чем на рынке "спот" (реальном). В данном случае инвестиции покупателя, равные цене опциона C, порождают отдачу в размере S - K. Рассматривая простейший поток из двух таких платежей, запишем уравнение для определения внутренней нормы доходности:

$$-C+\frac{S-K}{1+q}=0.$$

Решая его, найдем эффективность вложений в опцион за срок его действия

$$q=\frac{S-K-C}{C}.$$

Отсюда видно, что при большом перепаде S - K достигаемая на рынке опционов доходность может многократно превысить доступные эффективности вложений в первичные ценные бумаги.

Пример. С целью двойной иллюстрации - эффекта рычага и страхования - сравним два инвестиционных выбора. Пусть начальный капитал инвестора равен 200 долл. Предположим, что он может купить на эти деньги одну акцию компании А по курсу в 200 долл. или приобрести, исходя из премии в два доллара за акцию, месячный опцион на покупку 100 акций этой компании по цене 210 долл. Предположим далее, что за месяц курс акций повысится до 220 долл. Если владелец опциона воспользуется сделкой, купив 100 акций по контрактной цене, то он сможет продать их с доходом 220 - 210 = 10 долл. на каждой, то есть заработать 1000 долл. Или, за вычетом 200 долл., потраченных на покупку опциона, получить 800 долл. чистой прибыли (в действительности эта сумма будет незначительно уменьшена за счет уплаты комиссионных брокеру и накладных расходов).

Сравнительно с покупкой опциона перепродажа акции дала бы доход только в 220 - 200 = 20 долл., то есть удачная опционная сделка в описанном случае оказывается в 40 раз прибыльнее. Ее месячная доходность

$$q=\frac{10\times100-2\times100}{2\times100}\times100\%=400\%,$$

в то время как доходность от акции

$$\eta = \frac{20}{200} \times 100\% = 10\%.$$

При неблагоприятном раскладе курс снизится, пусть на ту же величину в 20 долл., и тогда составит 180 долл. за акцию. Очевидно, что в этом случае покупатель опциона воспользуется своим правом отказаться от сделки, для которой цена исполнения выше цены "спот" (210 > 180) и в результате ограничит свои потери затратами на опцион (200 долл.). Потери же от инвестирования в акцию составят 20 долл.

Таким образом, соотношение повариантных потерь будет в четыре раза ниже, чем соотношение повариантных выигрышей, и с увеличением размаха ценовых флуктуаций (до нуля вниз и неограниченно вверх) меняется в пользу опциона.

Аналогично для владельца акций приобретение опциона "пут" на нее может дать высокую, но теоретически ограниченную $< \frac{K - C}{C}$ - рис. 3а) рентабельность при снижении котировок; в случае же их подъема риск по опциону ограничивается величиной премии.

При оперировании с опционами риск покупателя переходит в доход продавца, а выигрыши первого оборачиваются для второго риском. Поэтому недостатки опционов для надписантов являются продолжением их достоинств для держателей: ограниченность риска и возможность нелимитированной прибыли трансформируются в ограниченную размером премии прибыль и перспективы нелимитированного риска.

Эти отрицательные для надписантов факторы нивелируются их опытом и информационной осведомленностью, размерами премии, уровнем фиксации цены исполнения, а также гибким использованием инвестиционных стратегий, основанных на комбинировании разнородных финансовых инструментов.

Пример. Потенциальный эмитент опциона располагает достоверными данными о надвигающемся двухнедельном сползании курса акций компании В с 50 тыс. руб. до, как минимум, 44 тыс. руб. за штуку. На данный момент переломная точка на рынке этих акций еще не наступила и большинством он воспринимается как рынок быков.

Правдоподобная сказка, отвечающая этой ситуации, состоит в следующем. Надписатель продает асимметрично информированному инвестору двухнедельный колл на 100 акций по цене 50 тыс. руб. и с премией в размере 1 тыс. руб. за 1 акцию, всего 100 тыс. руб. Спустя полмесяца цена акции снизится, например до 44 тыс. руб. Самое разумное, что может предпринять "прозревший" покупатель, - это воспользоваться своим правом на отказ и инвестировать, при необходимости, в реальный рынок. Благодаря этому продавец получит прибыль, равную размеру выплаченной ему премии, то есть 100 тыс. руб.

Введение в задачи опционного хеджирования

Как уже отмечалось, наряду с профессиональным опытом, способы снижения риска включают обращение к хеджирующим (hedge - забор) стратегиям. Опуская спекулятивные возможности опционного рынка, сосредоточимся на решаемых с его помощью вопросах хеджирования от неблагоприятных изменений на финансовом рынке:

- противостояние обесцениванию портфеля ценных бумаг;
- противостояние угрозе невыполнения платежных поручений.

Развитые в этом направлении результаты относятся к одному из наиболее сложных разделов теоретической и прикладной финансовой математики. Адаптируя их к данному пособию, ограничимся на первых порах элементарным введением и сведем к минимуму, пусть читатель не обижается, требования к его математической подготовке. Именно поэтому для начала при изложении методов опционного хеджирования будем придерживаться *простейшей модели ценовой динамики акций*: один период и два возможных концевых значения.

Согласно этой модели в конце периода цена акции S случайна и может принимать два значения: низкое - S_d и высокое - S_u. Отсюда, для акции с начальной ценой S_0 возможные значения ее случайной доходности

$$\rho = \begin{cases} d \\ u \end{cases}$$

таковы, что

$$S_d = S_0(1 + d),$$

$$S_u = S_0(1 + u). \qquad (1)$$

Дополнительно предполагается неотрицательность безрискового процента r ($r \geq 0$) и выполнимость неравенств

$$-1 < d < r < u. \qquad (2)$$

Ограничение $d > -1$ означает положительность финальной цены S, что естественно по самому смыслу понятия "цена" акции.

Безрисковый процент r можно мыслить как ставку банковского счета, значение которой известно уже сегодня. В то же время доходность вложения в акции ρ станет известной только с наступлением завтра, то есть в конце периода.

Принятое выше условие (2) исключает возможность арбитража между акцией и банковским счетом, то есть извлечение дохода за счет перевода одного из этих активов в другой. При его нарушении создаются следующие варианты подобных переходов:

- если $r > u$, то надо продать акции и инвестировать вырученную сумму под безрисковый процент r;
- если $d > r$, то надо снять деньги со счета и купить акцию.

Данного ознакомления достаточно, чтобы перейти к рассмотрению типовых схем хеджирования с примерами разрешимых ими практических задач. Автор надеется, что понимание этих упрощенных схем окажется полезным для эмпирического получения "практиками" таких решений, которые окажутся близки к рекомендациям финансовой теории в более сложных случаях.

1.3. Портфель с покупкой акций и продажей колл-опционов (портфель, защищающий акции)

Вообразите, что вы намерены приобрести акцию компании "Народный автомобиль". Предстоящее вложение сопряжено с риском случайной доходности ρ, и этот риск ведет себя по сценарию биномиальной однопериодной модели (1). Принимая во внимание пессимистическую оценку S_d, вы опасаетесь получить доходность меньше депозитной ($d < r$). Зная о блокирующем воздействии продаваемых "коллов" на потери и выигрыши по реальному активу (рис. 2), вы решаете подстраховать покупку интересующей вас акции продажей "не интересующих" вас опционов. Для этого требуется найти ответы на два вопроса: по какой цене (С) и сколько (n) опционов следует продать, и решить их так, чтобы независимо от будущих цен (S_d или S_u) обеспечить себе безрисковую доходность r на вложенный капитал.

Предположим, что мы покупаем одну акцию по цене S_0 и продаем n колл-опционов по цене С каждый. Этот портфель обойдется нам в сумму уплаченных за акцию денег за минусом нашей выручки от продажи опционов. Инвестированный в него капитал определяет первоначальную стоимость портфеля

$$I_0 = S_0 - nC. \qquad (3)$$

Наш финансовый результат на конец периода зависит от будущего курса S_d или S_u и цены исполнения K (контрактной цены акции) и определяется повариантными стоимостями портфеля:

$$I_d = S_d - n\max(O, S_d - K),$$

$$I_u = S_u - n\max(O, S_u - K).$$

Отсюда видно, что данные стоимости могут, в лучшем случае, совпасть с ценой "спот" или быть меньше ее на величину потерь из-за неблагоприятной разницы цен.

Мы хотим построить безрисковый портфель. Поэтому его стоимость по истечении периода не должна зависеть от случая, то есть должно выполняться равенство

$$I_d = I_u. \qquad (4)$$

Еще одна цель, которую мы преследуем, - увеличение первоначального капитала I_0 по безрисковой ставке r, что с учетом предыдущего равенства приводит к системе уравнений:

$$I_0(1 + r) = I_d = I_u \qquad (5)$$

относительно искомых неизвестных n и C.

Для определения числа n воспользуемся развернутой записью уравнения (4):

$$S_d - n\varphi_d = S_u - n\varphi_u,$$

в которой

$$\varphi_d = \max(O,\ S_d - K),$$

$$\varphi_u = \max(O,\ S_u - K). \qquad (6)$$

Решая полученное уравнение, находим n:

$$n = \frac{S_u - S_d}{\varphi_u - \varphi_d}. \qquad (7)$$

Данный параметр называется **коэффициентом хеджирования**. Так как $S_u > S_d$, что дает $\varphi_u > \varphi_d$, то этот коэффициент $n > 0$.

Из формулы начисления процентов (5) на вклад (3) придем к уравнению относительно неизвестной цены опциона (премии) C:

$$S_0 - nC = \frac{S_d - n\varphi_d}{1 + r} = \frac{S_u - n\varphi_u}{1 + r}.$$

В результате найдем, что для определения цены опциона можно использовать любую из следующих формул:

$$C = \frac{S_0}{n} - \frac{S_d - n\max(O; S_d - K)}{n(1 + r)} \qquad (8)$$

или

$$C = \frac{S_0}{n} - \frac{S_u - n\max(O; S_u - K)}{n(1 + r)},$$

где коэффициент n определен соотношением (7).

Отсюда видно, что цена колл-опциона (C) зависит от текущей цены акции (S_0), от ее будущих значений (S_d, S_u), от цены исполнения опциона (K) и от безрисковой процентной ставки (r).

Пример. Определим коэффициент хеджирования для следующих данных: колл-опцион подписан на акцию, цена которой в момент его исполнения может быть равна 20 ($S_d = 20$) или 40 ($S_u = 40$). Цена исполнения опциона равно 30 ($K = 30$).

Найдем выигрыши покупателя опциона, равные на конец периода одномоментным потерям его продавца:

$$\varphi_d = \max(0;\ 20 - 30) = 0,$$

$$\varphi_u = \max(0;\ 40 - 30) = 10.$$

Отсюда и из формулы (7) получаем, что $n = 2$.

Для простоты вместо банковского счета рассмотрим банковский сейф, то есть положим $r = 0$ и пусть текущий курс акции $S_0 = 28$. Из этих начальных условий и выражения (8) найдем цену продажи:

$$C = \frac{28}{2} - \frac{20 - 2\max(0;\ 20 - 30)}{2 \times (1 + 0)} = 4.$$

Следовательно, исходная стоимость (3) нашего портфеля

$I_0 = 28 - 2 \times 4 = 20.$

Правила конструирования, которым мы следовали, устроены таким образом, что к моменту погашения опциона сформированный портфель должен дать те же 20 платежных единиц ($r = 0$). В самом деле, в конце срока его стоимость при каждой ценовой ситуации оценивается величинами:

$I_d = 20 - 2\max(0;\ 20 - 30) = 20,$

$I_u = 40 - 2\max(0;\ 40 - 30) = 20.$

и это согласуется с теоретическим требованием (5) при $r = 0$.

Таким образом, купив одну акцию за 28 д. ед. и продав два колл-опциона с премией в 4 д. ед. за штуку, мы получим при сложившейся финансовой конъюнктуре безрисковый портфель, который защищает акцию от возможного обесценивания.

Пример. Решим задачу хеджирования при условии, что текущая котировка акции S_0 равна 30, а прогнозы возможных значений будущего курса оцениваются величинами $S_u = 50$, $S_d = 20$. Пусть контрактная цена установлена на уровне 40 д. ед. ($K = 40$) и ставка банковского процента $r = 20\%$.

Выясним сколько опционов "колл" и по какой цене следует продать, чтобы исключить риск приобретения акции, обусловленный "неоднозначностью" ее будущих курсовых стоимостей.

Легко подсчитать, что для данного примера грядущие по опциону платежи (6) могут принимать два значения: $\varphi_d = 0$, $\varphi_u = 10$ и, следовательно, коэффициент хеджирования $n = 3$, а цена продажи $C \approx 4{,}4$ (формулы (7), (8)).

Нулевые значения φ_d в предыдущих двух примерах не должны вводить читателя в заблуждение; очевидно, что для практически возможного случая $S_d > K$ этот показатель будет больше нуля.

Пример. При наличии риска (2) результат однопериодного начисления на вклад S_0 по ставке r попадает в интервал $(S_d,\ S_u)$ и может случиться, что сам интервал окажется выше цены исполнения K. Предположим, что эта цена назначена на уровне текущего биржевого курса ($K = S_0$), и пусть $S_0 = 30$, $r = 40\%$, $S_d = 40$ и $S_u = 50$.

Тогда результат гипотетического наращения $S_0(1 + r)$ удовлетворяет двустороннему неравенству:

$S_d = 40 < 30(1 + 0{,}4) < 50 = S_u$

и, следовательно,

$\varphi_d = \max(0; 40 - 30) = 10$,

то есть минимально возможный платеж оказался ненулевым:

$(0 < \varphi_d < \varphi_u)$.

Цена опциона С, определяемая формулой (8), может рассматриваться как справедливая в том смысле, что отклонения от нее в ту или иную сторону нарушают паритет интересов между продавцом и покупателем защитного портфеля. Поясним это, оперируя для простоты нулевой ставкой r (r = 0). Рассматриваемый нами портфель состоит из одной акции и nналписанных колл-опционов и должен продаваться и покупаться по цене $I_0 = S_0 - nC$.

Если назначаемая премия E > C, то портфель подешевеет ($S_0 - nE < S_0 - nC$) и его покупатель обеспечит себе, в силу "устройства" данного портфеля, поступление $S_0 - nC$ и получит, как принято говорить, free-lunch (бесплатный ленч) в размере e = n(E - C).

Аналогично, если E < C, то портфель станет дороже и каждый будет стремиться его продать. Однако, лишившись портфеля, он лишится и причитающихся по нему финансовых платежей $S_0 - nC$. Эти потери тем не менее будут перекрыты начальной выручкой $S_0 - nE$ на величину безрискового дохода e = n(C - E). В случае если значение премии E = C, то ни продавец, ни покупатель не имеют возможности арбитража (то есть возможности получить чистый доход, ничем не рискуя).

1.4. Портфель из акций и банковского счета (портфель, защищающий обязательства)

Вначале несколько наводящих соображений. Пусть на некоторую дату вы имеете платежное обязательство. Характер ваших финансовых операций таков, что его размер определяется ценовой предысторией некоторых активов, считая от текущего момента и до срока платежа. Случайные колебания их цен соответственно порождают случайные изменения объемов предстоящих вам выплат.

Подобная неопределенность будущей обстановки чревата для вас риском невыполнения контрактных условий, и вы заинтересованы в том, чтобы противостоять этому риску и обслужить задолженность с наименьшими затратами начального капитала.

Предлагаемые финансовой математикой методы позволяют выявить условия (характеристики рынка ценных бумаг), при которых хеджирование осуществимо, и если это так, то определить тот начальный капитал, который это хеджирование делает возможным.

Ключевая идея, объединяющая данные методы, сводится к построению такого защитного портфеля, состоящего из "вовлеченных" рисковых активов (акций) и банковского счета (облигаций), что на дату платежного поручения случайная стоимость портфеля гарантированным образом воспроизводит любой из вариантов реализованной задолженности, то есть будет не меньше. *В теории эти варианты отождествляются с выплатами эмитента по опциону, а цена последнего используется для определения* ***первоначального капитала.***

Представленная здесь ситуация гораздо сложнее той частной задачи, на которой мы объясним, как решаются поставленные вопросы. Принятые упрощения сводятся к рассмотрению одного единственного актива (акции) с одношаговой "ценовой" памятью и биномиальным значением будущего курса (1). Исходя из этих предположений в качестве удобной модели, пригодной для описания случайного платежного поручения, воспользуемся колл-опционом, точнее теми его правилами (6), которые определяют потери продавца в пользу покупателя. На примере данной модели покажем, как хеджируются обязательства посредством так называемого ***синтетического опциона***, то есть портфеля, воспроизводящего платежи по опционному контракту.

Хеджирование синтетическим опционом "колл"

В силу хеджирующих достоинств минусовой корреляции между акцией и опционом (см. п. 1) разумно часть средств в составе конструируемого портфеля вложить в акции и пусть δ - число акций, приобретенных на эти средства. Эта покупка обойдется хеджеру (страхователю) в сумму:

$$I_0 = \delta S_0,$$

которую он частично соберет из выручки С от продажи опциона, а остаток покроет денежным займом В, взятым под безрисковую ставку r:

$$C + B = \delta S_0.$$

Таким образом, цена портфеля в начале периода (начальный капитал) определяется ценой колл-опциона, то есть

$$\delta S_0 - B = C. \qquad (9)$$

Капитал в конце периода складывается из стоимости входящих в портфель акций, уменьшенной на выплаты по кредиту: $\delta S - B(1 + r)$.

Отсюда видно, что будущая цена портфеля является дискретной случайной величиной с двумя возможными значениями: $\delta S_u - B(1 + r)$ и $\delta S_d - B(1 + r)$, которым однозначно соответствуют значения случайной выплаты по опциону φ_u и φ_d (6).

В результате решение задачи хеджирования свелось к поиску таких значений δ и В, при которых повариантные обязательства по опциону покрываются повариантными размерами нашего капитала. Очевидно, что отвечающие этим требованиям условия воспроизведения запишутся в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \delta S_u - B(1 + r) = \varphi_u, \\ \delta S_d - B(1 + r) = \varphi_d. \end{cases}$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\delta = \frac{\varphi_u - \varphi_d}{S_u - S_d}, \quad B = \frac{\varphi_u S_d - \varphi_d S_u}{(S_u - S_d)(1 + r)}$$

или с учетом соотношений (1),

$$\delta = \frac{\varphi_u - \varphi_d}{S_0(u - d)}, \quad B = \frac{\varphi_u(1 + d) - \varphi_d(1 + u)}{(u - d)(1 + r)}. \tag{10}$$

При построении данного портфеля $\pi = (\delta, B)$ использовались те же составляющие: акция, опцион, банковский счет и с теми же "периодными" свойствами, что и для хеджирования акции в п. 3. Поэтому, уединив акцию и приведя к ней объемные показатели рассмотренной задачи, получим тот же, что и в п. 3, защитный портфель с коэффициентом хеджирования $n = \frac{1}{\delta}$ и начальным капиталом $I_0 = \frac{B}{\delta}$. Отсюда и из условия (5) найдем связь с параметрами синтетического опциона:

$$\delta = \frac{1}{n}, \quad B = \delta I_0 = \frac{S_u - n\varphi_u}{n(1 + r)} = \frac{S_d - n\varphi_d}{n(1 + r)}$$

и, пользуясь ею, перепишем (9) в виде:

$$\frac{S_0}{n} - \frac{I_0}{n} = C,$$

что совпадает с определением (3). Таким образом, независимо от объекта хеджирования, будь то акция (п. 3) или обязательства по опциону (п. 4), теоретическая цена опциона будет одна и та же.

Риск-нейтральная оценка премии за опцион

Преобразуем формулу цены колл-опциона (9) к виду оценки, моделирующей нейтральное отношение к риску. Ее вывод основывается на искусственном введении в биномиальную модель расчетных псевдовероятностей ценовых значений S_d, S_u. Этот прием оказался продуктивным не только для изучаемой элементарной ситуации, но и для развития теории и техники расчетов в общем случае как дискретной, так и непрерывной случайной цены акции S.

Не приводя здесь соответствующих результатов, остановимся на частном варианте одноходовой двухценовой неопределенности, который иллюстрирует данный подход. Для этого заменим δ и B в способе определения премии (9) их выражениями (10). В результате получаем:

$$C = \frac{(\varphi_u - \varphi_d)}{S_0(u - d)} S_0 - \frac{\varphi_u(1 + d) - \varphi_d(1 + u)}{(u - d)(1 + r)} =$$

$$= \frac{(1 + r)\varphi_u - (1 + r)\varphi_d - (1 + d)\varphi_u + (1 + u)\varphi_d}{(u - d)(1 + r)} = \frac{(r - d)\varphi_u + (u - r)\varphi_d}{(u - d)(1 + r)}.$$

Итоговое выражение цены запишем как взвешенную сумму дисконтированных на начало периода выплат (6):

$$C = \frac{(r-d)}{(u-d)} \times \frac{\varphi_u}{(1+r)} + \frac{(u-r)}{(u-d)} \times \frac{\varphi_d}{(1+r)}. \qquad (11)$$

Обозначим:

$$P_u = \frac{(r-d)}{(u-d)}, \; P_d = \frac{(u-r)}{(u-d)}. \qquad (12)$$

Так как $P_u + P_d = 1$ и $u > r > d$, то есть $0 < P_u, P_d < 1$, то P_u и P_d можно трактовать как вероятности двух взаимоисключающих исходов некоторой случайной величины.

Ассоциируем эти вероятности с возможными значениями случайного курса S, то есть постулируем следующий ряд его распределения:

S	S_d	S_u
P	P_d	P_u

Заметим, что образованные таким образом вероятности не имеют ничего общего с истинными вероятностями верхнего S_u и нижнего S_d (за исключением малоправдоподобного совпадения) ценовых значений. То же, естественно, относится и к определяемым с их помощью аналогам числовых характеристик случайных величин, например к математическому ожиданию и дисперсии.

Вместе с тем их использование позволяет значительно упростить расчеты и придать им изящную смысловую интерпретацию.

По правилам теории вероятностей наличие функциональных зависимостей между ценой акции S и ее доходностью $\rho = (S - S_0) / S_0$, а также размером платежа по опциону $\Phi = \max(0; S - K)$ позволяет перенести введенные для цен S_u, S_d вероятности P_u, P_d на соответствующие им возможные значения случайных величин ρ и Φ. В результате придем к следующим таблицам вероятностей несовместных исходов по доходности ρ и для платежа Φ:

ρ	$d = (S_d - S_0)/S_0$	$u = (S_u - S_0)/S_0$
P	P_d	P_u

Φ	$\varphi_d = \max(0; S_d - K)$	$\varphi_u = \max(0; S_u - K)$
P	P_d	P_u

Пользуясь вероятностями P_d и P_u, найдем для каждой из таблиц сумму взвешенных по ним табличных значений и, основываясь на вероятностных аналогиях, договоримся толковать эти суммы в качестве математических ожиданий соответствующих случайных величин: цены S, доходности ρ и платежа Φ. С учетом нашего соглашения получим, применяя формулы (12), следующие ожидаемые значения фигурирующих показателей:

$$E(S) = P_u S_u + P_d S_d = \frac{(r-d)}{(u-d)} S_0(1+u) + \frac{(u-r)}{(u-d)} S_0(1+d) = S_0(1+r),$$

$$E(\rho) = P_u u + P_d d = \frac{(r-d)}{(u-d)} u + \frac{(u-r)}{(u-d)} d = r,$$

$$E(\Phi) = P_u \varphi_u + P_d \varphi_d = \frac{(r-d)\varphi_u + (u-r)\varphi_d}{(u-d)}.$$

Отсюда видно, что ожидаемая доходность акции равняется значению безрисковой ставки r,

$$E(S) = S_0(1 + E(\rho)),$$

а цена опциона C, определяемая формулой (11), совпадает с дисконтированной на безрисковый процент r величиной ожидаемого платежа:

$$C = \frac{E(\Phi)}{(1+r)}. \tag{13}$$

Переходя к подробной записи, получим так называемую **риск-нейтральную оценку премии**:

$$C = P_u \frac{\varphi_u}{(1+r)} + (1 - P_u)\frac{\varphi_d}{(1+r)}.$$

Приписываемая этой оценке нейтральность объясняется тем, что способ ее расчета сродни рассуждениям инвестора, который пренебрегает риском своих вложений. В самом деле, дисконтируя по безрисковой ставке r, покупатель опциона придет к такой оценке его текущей стоимости (13), которая игнорирует возможные несоответствия будущих поступлений их ожидаемой величине (учитывает математическое ожидание случайной величины Ф и не учитывает ее дисперсии). Выбирая между банковским счетом и опционом, он сравнивает ожидаемый доход E(Ф) с начисляемой по вкладу суммой C(1 + r) и выбирает уровень C, руководствуясь условием эквивалентности:

$$E(\Phi) = C(1 + r). \tag{14}$$

То же относится и к владельцу синтетического опциона, который, пользуясь псевдовероятностями P_u и P_d, приравнивает ожидаемую доходность своих вложений в акцию к доходности безрискового депозита:

$$P_u u + P_d d = r. \tag{15}$$

Этим они оба отличаются от небезразличных к риску участников рынка ценных бумаг. Последние, оценивая курсовые стоимости акции, учитывают риск, например, с помощью приемов, изложенных ранее в первой части: либо корректируют ставку дисконтирования (формула 81 первой части), либо вносят поправку на риск в величину ожидаемого дохода (формула 82 первой части).

Непочтительному отношению к риску, которое обнаруживает наблюдаемый нами инвестор, соответствуют нейтральные по данной характеристике функции полезности дохода и уровневая.

Действительно, если полезность денег измерять их количеством, то условие (14) будет означать, что при равенстве ожидаемых результатов полезность безрискового варианта совпадает с ожидаемой полезностью нестабильного дохода Ф. Отсюда понятно, что поведение инвестора, опирающегося на условие безразличия (14), может быть истолковано линейной функцией, нейтральной к риску: ее ординаты - полезность - совпадают с ее абсциссами - доходом. Аналогичное рассуждение и с тем же выводом можно провести и по отношению к равенству (15).

Вкладчик, использующий критерии равновыгодности (14), (15), нацелен на ожидаемый доход и не обращает внимания на сопутствующий ему риск. Очевидно, что в терминах уровневой полезности такому "мировоззрению" также будет отвечать нейтральность к риску. Графически это изображается картой кривых безразличия, представленных на рис. 27б первой части.

Однопериодное хеджирование с помощью риск-нейтральной оценки

Не обсуждая далее содержательных аспектов, перейдем к применению данного метода для решения защитных задач. Хотя приводимые ниже расчеты носят простой арифметический характер, соответствующие вычисления становятся гораздо более сложными и трудоемкими в случае большого числа этапов (периодов) и более сложных моделей, описывающих эволюцию цен.

Пример. Биржевой брокер, выполняя поручение своего клиента купить валюту, продает ему опцион "колл" на 100 единиц требуемой тому валюты (α). В качестве средства платежа выступает валюта β, и пусть S_0, S_1 - стоимости 100 ед. валюты α, измеряемые в единицах валюты β в начале и в конце периода. Текущее соотношение курсов таково, что $S_0 = 150$ (β) (то есть 100 (α) = 150 (β)), и ожидается, что в момент $n = 1$ цена S_1 может стать равной 180 (повышение курса валюты α) или 90 (понижение курса валюты α). Предположим, что контрактная цена установлена на уровне текущего курса, то есть $K = 150$ (β) и пусть для простоты процентная ставка банковского счета $r = 0$.

Очевидно, что с ростом курса эмитент лишится суммы:

$$\varphi_u = 30\ (\beta),$$

в случае же удешевления - потерь не произойдет и, следовательно,

$$\varphi_d = 0.$$

Желая гарантированно избежать возможного проигрыша $\varphi_u = 30$ (β), брокер обращается к методу синтетического опциона и применяет его для определения параметров хеджирования (δ, B) и цены опциона C.

Решим вместе с брокером его задачу. Найдем доходности валютного рынка:

$$d = \frac{90 - 150}{150} = -\frac{2}{5}, \quad u = \frac{180 - 150}{150} = \frac{1}{5}.$$

Подставив эти значения в уравнение (15), получим, что

$$\frac{1}{5}P_u + (1 - P_u)\left(-\frac{2}{5}\right) = 0,$$

и найдем псевдовероятности:

$$P_u = \frac{2}{3}, \quad P_d = \frac{1}{3}.$$

Согласно (13) величина премии для опциона

$$C = \frac{2}{3} \times 30 = 20$$

и по формулам (10)

$$\delta = \frac{30}{150\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right)} = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{30\left(1 - \frac{2}{5}\right)}{\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right)} = 30 \cdot$$

Тогда начальный капитал (9) (начальная стоимость портфеля) может быть записан в виде:

$$\frac{1}{3}150 - 30 = 20.$$

Заметим, что величину заемного капитала B можно было получить и из соотношения (9), что, естественно, дает тот же результат:

$$B = \frac{1}{3}150 - 20 = 30.$$

Следуя найденному решению, брокер (он же эмитент опциона) возьмет в кредит 30 ед. валюты β, в нашем случае беспроцентно ($r = 0$), добавит к занятым деньгам выручку от продажи опциона (C = 20 (β)) и полученную сумму 50 (β) конвертирует (по курсу 100 (α) = 150 (β)) в валюту α. Это даст ему 100 : 3 = 33,33 (α) единиц этой валюты.

Если в конце срока произойдет поднятие валюты α, то 33,33 (α) будут (по курсу 100 (α) = 180 (β)) давать 180 : 3 = 60 единиц валюты β, что в точности равно той сумме, которую эмитент должен вернуть на банковский счет (30 (β)) и по условиям контракта выплатить покупателю (180 - 150 = 30 (β)).

Если же происходит понижение курса валюты α, то выплачивать покупателю ничего не надо (φ_d = 0), но необходимо вернуть долг (30 (β)). Но 33,33 (α) по новому курсу 100 (α) = 90 (β) в точности дадут 30 (β), что эмитент и вернет на банковский счет.

Заметим, что в этом числовом примере надписатель опциона остается при своих и в случае поднятия валюты α, и при ее снижении (ничего не выигрывает и ничего не проигрывает). Вместе с тем, будучи брокером, он получает от клиента, помимо платы за опцион C, еще и вознаграждение, скажем, комиссионные, за предоставленную возможность участия на рынке. Не проводя хеджирования, эмитент подвергал бы свой брокерский доход опасности валютного риска, который ему удается свести на нет с помощью синтетического опциона.

Пример. Изменим ставку r в условиях предыдущей задачи на ненулевую и для арифметических удобств положим r = 0,2.

Убедитесь, что при этой ставке премия за опцион увеличится и достигнет величины C = 25 (β), заемный капитал снизится до B = 25 (β), а α-валютное наполнение портфеля останется тем же $\left(\delta = \frac{1}{3}\right)$; проинтерпретируйте хеджирующие свойства сформированного вами портфеля.

1.5. Многопериодное хеджирование (динамический защитный портфель)

Биномиальная однопериодная модель сводит эволюцию цены к достижению ею одного из двух возможных значений. В реальности таких значений может быть бесконечно много, и окончательный выбор определяется характером *изменения цены как случайной функции времени*. Проблема моделирования ценовой динамики связана с естественным стремлением "угадать" будущее значение курса. Здесь наряду с упомянутыми ранее методами технического и фундаментального анализа достаточно широкое распространение получили ***вероятностные модели***, которые используются для расчетов различных финансовых инструментов, в том числе при опционном хеджировании.

К этому семейству относится, в частности, рассмотренная выше элементарная модель биномиального ценообразования на период. Ее можно расширить на любое число периодов. При этом коэффициенты u и d, а также ставка процента r могут меняться от периода к периоду. Хотя на каждом шаге возможны только два ценовых значения, при большом числе периодов это позволяет аппроксимировать достаточно плавно изменяющуюся цену с широким диапазоном возможных значений на дату окончания. Например, если опционы исполняются в конце торгового дня, "периодом" можно считать один час (соответственно подобрав величины u, d и r). Если до конца дня остается 7 часов, то финальная цена акции в соответствии с многопериодной биномиальной моделью может иметь до $2^7 = 128$ значений.

Формулы δ-хеджирования

Не вдаваясь в теоретическое многообразие применяемых в многопериодном случае методов, ограничимся примером двух периодов, который тем не менее сохраняет специфику динамического хеджирования и ценообразования, используемых в общем случае.

Добавим к рассмотренной ранее одноходовой модели еще один период и допустим, что в зависимости от реализованного в конце первого периода ценового значения дальнейшее движение цены происходит по тем же правилам и в тех же пропорциях u и d. Тогда возможные траектории цен будут выглядеть следующим образом (рис. 4).

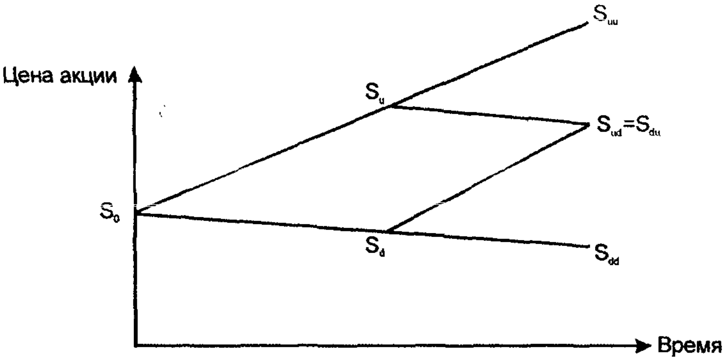


***Рис. 4.* Схема двухпериодной модели**

Здесь согласно сделанным допущениям:

$S_u = S_0(1 + u)$, $S_d = S_0(1 + d)$ - высокая и низкая цены в конце периода 1;

$S_{uu} = S_0(1 + u)^2$, $S_{dd} = S_0(1 + d)^2$, $S_{ud} = S_{du} = S_0(1 + u)(1 + d)$ - высокая, низкая и промежуточная цены в конце периода 2.

В общем случае, если тангенсы прямолинейных отрезков меняются в зависимости от промежуточных состояний, $S_{ud} \neq S_{du}$; в рассматриваемом упрощенном варианте эти тангенсы неизменны, и поэтому число различных возможных у финальной цены значений будет равно $2^2 - 1$, то есть трем.

Решая задачу покрытия обязательств для двухпериодного опциона "колл", определим цены C_u и C_d, воспроизводящих эти обязательства портфелей отдельно в каждом промежуточном состоянии S_u и S_d, что при попятном движении к вершине дерева S_0 дает, по аналогии с одно-периодным случаем, требуемый для хеджирования начальный капитал C, то есть цену опциона.

Сочетая выручку от продажи опциона по данной цене с заемными средствами, его надписатель проводит попериодное хеджирование (прямое движение от вершины S_0), манипулируя с этой целью количеством акций и объемом заемных средств в составе защитного портфеля (синтетического опциона). В начальный момент он подгоняет число акций δ_0 таким образом, чтобы обеспечить приписываемые защитному портфелю стоимости C_u и C_d на конец первого периода. Очевидно, что условия такой воспроизводимости имеют следующий вид:

$$\delta_0 S_u - B_0(1 + r) = C_u,$$

$$\delta_0 S_d - B_0(1 + r) = C_d,$$

и, значит, $\delta_0 = \dfrac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$, $B_0 = \delta_0 S_0 - C$.

Аналогично в начале второго периода, когда обстановка прояснится, производится окончательная ревизия защитного портфеля с помощью все той же схемы, примененной к одному из реализованных состояний S_u или S_d.

Для верхнего узла соответствующие условия запишутся в виде:

$$\delta_{1u} S_{uu} - B_0(1 + r)^2 - \mathrm{sgn}(\delta_{1u} - \delta_0)B_1(1 + r) = \varphi_{uu},$$

$$\delta_{1u} S_{ud} - B_0(1 + r)^2 - \mathrm{sgn}(\delta_{1u} - \delta_0)B_1(1 + r) = \varphi_{ud},$$

где $\mathrm{sgn}x$ (= 1 при $x > 0$, = 0 при $x = 0$, = -1 при $x < 0$), а $\mathrm{sgn}(\delta_{1u} - \delta_0)B_1$ - изменения банковского счета, обусловленные продажей или покупкой акций в зависимости от соотношения чисел δ_{1u} и δ_0.

Отсюда требуемое число акций

$$\delta_{1u} = \frac{\varphi_{uu} - \varphi_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}}.$$

Аналогично этому в нижнем состоянии

$$\delta_{1d} = \frac{\varphi_{ud} - \varphi_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}}.$$

В случае многих периодов соответствующий коэффициент получается так же, как для рассмотренного двухъярусного варианта: делением "размаха" воспроизводимых стоимостей на величину ценового "расхождения" акции.

В литературе этот способ определения требуемого количества акций δ известен как метод δ-хеджирования, а сам **параметр δ называется коэффициентом δ-хеджирования**. Основанная на данном методе стратегия состоит в том, чтобы следить, в какой точке находишься, и держать в памяти показатели, благодаря которым можно покупать и продавать так, чтобы получалось заранее определенное (воспроизводимое) число.

Пример на хеджирование двухпериодного опциона

В качестве ситуационного "гарнира" рассмотрим торговую сессию, на которой первично размещается тысяча (1000) опционов на покупку акций некоторой фирмы. Действующему по поручению данной фирмы брокеру удалось реализовать эти опционы по цене, выше теоретической, и он заинтересован в том, чтобы защититься от риска возможного подъема акций и тем самым удержать полученную им разницу и оплату своих услуг.

Используя данный пример, проделаем все расчеты, необходимые для применения δ-хеджирования в двухпериодной биномиальной модели. В качестве отправной точки зададимся следующими числовыми характеристиками опциона: срок исполнения - два периода, цена исполнения - 500 д. е. ($K = 500$). Будем, кроме того, считать, что безрисковый процент r и возможные доходности d и u базовой акции не меняются и по каждому из периодов имеют следующие одни и те же значения: $r = 10\%$, $d = - 20\%$, $u = 20\%$. Приступая к построению динамического портфеля, мы исходим из возможности продавать и покупать акции по действующим текущим ценам, причем цена на начало первого периода известна и равна 500 д. е. ($S_0 = 500$).

Бинарное дерево цен. Вычисления начнем с определения возможных по периодам ценовых значений. После закрытия каждого периода рыночная цена акции может либо увеличиться, либо пойти вниз в зависимости от реализованного значения индекса цен: $1 + u = 1{,}2$ или $1 + d = 0{,}8$. Таким образом, переоценка курса акций происходит в ходе возможных перемещений по ценовым уровням первого и второго периодов:

$$S_u = 1{,}2S_0 = 600,\ S_d = 0{,}8S_0 = 400$$

и соответственно (рис. 4)

$$S_{uu} = 1{,}2S_u = 720,\ S_{ud} = 0{,}8S_u = 480,\ S_{du} = 1{,}2S_d = 480,\ S_{dd} = 0{,}8S_d = 320.$$

В результате будем иметь дерево цен с тремя конечными вершинами, где числа в узлах показывают возможные значения цены по каждому периоду (рис. 5).

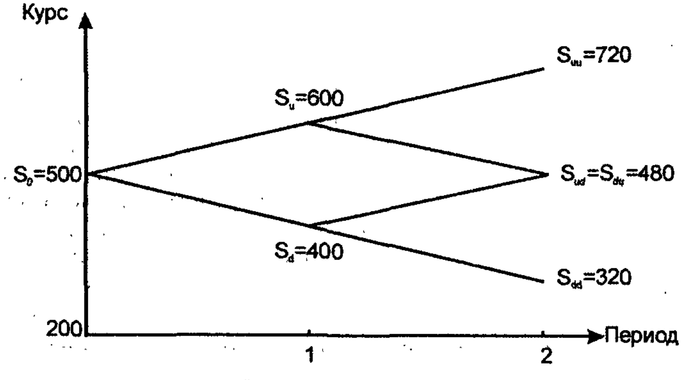


***Рис. 5.* Дерево цен**

Псевдовероятности. Чтобы воспользоваться методом риск-рейтральной оценки, найдем расчетные вероятности P_u и P_d, приписываемые возможным значениям случайной доходности базовой акции. По условию эти значения не зависят от номера периода; поэтому и соответствующие им вероятности переходов в верхнее (P_u) и нижнее (P_d) положения не меняются по каждому из указанных направлений. В рассматриваемом случае уравнение (15) примет вид:

$$0{,}2P_u - 0{,}2P_d = 0{,}1,$$

где $P_u + P_d = 1$. Решая, получим $P_u = 0{,}75$; $P_d = 0{,}25$.

Платежные обязательства по опциону. Рассчитаем возможные выплаты эмитента по опциону в зависимости от реализовавшегося ценового сценария на дату исполнения. Применяя формулы (6) для каждого концевого узла, найдем терминальные значения платежных обязательств эмитента или выступающего от его лица брокера. Двигаясь сверху вниз, получим:

$$\varphi_{uu} = \max(0;\ 720 - 500) = 220,$$

$$\varphi_{ud} = \max(0;\ 480 - 500) = 0,$$

$$\varphi_{dd} = \max(0;\ 320 - 500) = 0.$$

Цена опциона. Для определения цены воспользуемся принципом воспроизводимости (9), (10), (13) последующих по отношению к каждому узлу ценового дерева (рис. 4) платежей. В рассматриваемом двухпериодном случае требуемые для этого вычисления сводятся к последовательному применению данного принципа с помощью трех однопериодных моделей. Две из них соответствуют движению от концевых вершин к промежуточным состояниям S_u и S_d. Рассматривая вспомогательный (несуществующий) однопериодный опцион по верхнему из этих узлов, найдем справедливую премию (цену) (13):

$$C_u = \frac{0{,}75 \times 200}{1{,}1} = 150.$$

Для нижнего узла расчетная по второй вилке цена (13) будет нулевой: $C_d = 0$.

Это, впрочем, понятно и без расчетов и объясняется отсутствием платежных обязательств, то есть риска потерь, по нижнему сценарию ($\varphi_{dd} = \varphi_{du} = 0$).

Замыкая метод воспроизводимости промежуточных капиталов, в нашем случае $C_u = 150$ и $C_d = 0$, на "текущую" вершину S_0 получим по формуле дисконтирования средней стоимости (13) искомую цену двухпериодного опциона:

$$C = \frac{0{,}75 \times 150}{1{,}1} = 102,(27),$$

то есть величину необходимого для хеджирования начального капитала.

Коэффициенты δ-хеджирования. Для двух и более периодных опционов двухмерности защитного портфеля (акция, банковский счет) не хватает, чтобы изначально обеспечить разовое покрытие всех обязательств. Это происходит из-за превышения размерности требующих воспроизведения платежей числа настраиваемых параметров (δ, B) и поэтому неразрешимости соответствующей системы уравнений, у которой число неизвестных оказывается меньше числа условий. В этом случае, согласно общей теории, оптимальной будет стратегия синтетического опциона, меняющегося во времени в соответствии с расчетными коэффициентами δ-хеджирования.

Вычислим эти коэффициенты по данным рассматриваемого примера. Разделив разность стоимостей $C_u = 150$ и $C_d = 0$ на разность цен $S_u = 600$ и $S_d = 400$, получим начальный коэффициент:

$$\delta_0 = \frac{150}{600 - 400} = 0{,}75.$$

Для определения коэффициентов следующего периода найдем аналогичные отношения по каждому промежуточному состоянию S_u и S_d, где в качестве воспроизводимых стоимостей выступают "висячие" платежи φ_{uu}, φ_{ud}, φ_{dd} (конечные стоимости защитных портфелей). В результате будем иметь:

$$\delta_{1u} = \frac{220}{720 - 480} = 0{,}91(66),\ \delta_{1d} = 0.$$

Оптимальная хеджирующая стратегия. Для того чтобы описать ее устройство, определим, какое количество акций надо держать в защитном портфеле в исходной (S_0) и промежуточных (S_u, S_d) точках. Это можно подсчитать, если известно, какое количество колл-опционов продано в порядке первичного размещения. Для того чтобы закрыть короткую позицию (продажу) по колл-опционам (1000) длинной позицией (покупкой) по акциям, нужно умножить 1000 на вычисленные коэффициенты (δ_0, δ_{1u}, δ_{1d}): в начальной позиции мы имеем 1000 × 0,75 = 750, дальше снизу вверх 0 и 916,(66) ≈ 917.

Опираясь на найденные значения коэффициентов, опишем стратегию динамического δ-хеджирования. Требуемый для ее реализации капитал изымается из выручки от продажи опционов в объеме, равном произведению теоретически справедливой цены C на число размещенных контрактов:

$$C_0 = 102{,}(27) \times 1000 = 102272{,}(72) \approx 102273.$$

В начальной позиции (n = 0) хеджеру, чтобы купить 750 акций, нужно иметь 375000 д. ед. (500 × 750). Располагая начальным капиталом $C_0 = 102272{,}(72)$, он снимает недостающую ему сумму $B_0 = 375000$ -

- 102272,(72) = 272727,(27) с банковского счета под ставку $r = 10\%$ и приобретает требуемые ему акции в требуемом ему количестве.

Проследим, как производится перебалансировка защитного портфеля в ответ на изменения цены базовой акции в начале второго периода ($n = 1$). Количество акций на начало первого периода - 750.

Если цена акции повысилась до 600 д. ед., то число акций надо довести до 917. Для этого следует докупить 167 акций, которые оплачиваются за счет дополнительного займа B_{1u} = 100200 (600 × 167). Что будет дальше, то есть на дату истечения ($n = 2$)?

В конце срока хеджер распродает все имеющиеся в защитном портфеле акции, а выручку направляет на погашение своих обязательств - по опциону и долговых. Правила δ-хеджирования таковы, что поступления от продаж должны в точности соответствовать всем платежным поручениям. Убедимся в этом. Для этого подсчитаем деньги, заработанные на продаже акций по каждому варианту (S_{uu}, S_{ud}): верхнему, для которого выручка

$$M_{uu} = 720 \times 917 = 660240,$$

и нижнему с поступлением

$$M_{ud} = 480 \times 917 = 440160.$$

Очевидно, что данные варианты тождественны по величине начисленной по займу суммы:

$$Z = B_0(1 + r)^2 + B_1(1 + r) = 272727,(27) \times 1,21 + 100200 \times 1,1 \approx 440220,$$

но различаются размерами выплат по опциону: наличием обязательства в объеме 220000 (1000 × 220) для верхнего положения и отсутствием обязательств, то есть нулевым платежом, внизу. Проверяемое условие сводится к выявлению наличия следующего баланса:

выручка = накопленный долг + обязательства по опциону.

В нашем случае из-за необходимости арифметических округлений данное тождество принимает вид двух приближенных равенств по верхнему (S_{uu}) и соответственно нижнему (S_{ud}) состояниям:

$$660240 \approx 440220 + 220000;\ 440160 \approx 440220,$$

что, впрочем, не влияет на существо дела.

Перейдем к составляющей стратегии хеджирования, которая включается в нижней точке S_d. На нисходящем отрезке траектории ($S_0 \rightarrow S_d$) цена снизится до 400 д. ед., а соответствующий коэффициент хеджирования δ_{1d} обнулится ($\delta_{1d} = 0$). Согласно процедурам хеджирования это означает, что все содержащиеся в защитном портфеле акции (750 штук) следует продать, а выручку направить на обслуживание долга.

В этом случае (так же, как и для уже рассмотренных выше альтернатив) поступления от продажи акций

$$M_d = 400 \times 750 = 300000$$

в точности закроют наращенные на ту же дату обязательства по займу

$$Z = B_0(1 + r) = 272727,(27) \times 1,1 = 299999,(9).$$

Обсуждение. Независимо от варианта ценовой траектории брокер, применяющий технику синтетического опциона, полностью исключает риск неплатежей и оказывается в состоянии выполнить свои обязательства при любом возможном сценарии развития рыночной конъюнктуры.

Так, если опционы проданы по теоретической цене $C = 102,(27)$, он ничего не выигрывает и ничего не проигрывает как в случае поднятия курса акции, так и в случае его снижения, но сохраняет при этом свои "брокерские" комиссионные. Если же ему удалось разместить контракты по цене 112,5, то есть выше теоретической на 10%, то в расчете на 1000 проданных опционов, его чистый доход, помимо комиссионных, достигнет 10227 д. е. (10,2(27) × 1000).

Итак, чтобы сохранить выгоду от продажи по завышенной цене, надо создать защитный портфель. Если этого не сделать, то при неудачном будущем можно проиграть. В нашем случае - это обязательство $\varphi_{uu} = 220$, которое не покрывается наращенной суммой начального капитала:

$$112,5 \times (1 + 0,1)^2 = 136,12 < 220.$$

У критически настроенного читателя в отношении действий хеджера может возникнуть целый ряд вопросов. В частности, если акция двухгодичная и выплата происходит в конце второго периода, надо ли что-то предпринимать в первый период. Может быть, лучше дождаться его окончания, определить по схеме, в какой точке мы оказались, и после этого по однопериодной модели, всегда дающей верный результат, найти коэффициент хеджирования δ и составить правильный портфель?

Однако такая логика ожидания не дает желаемого результата. Следуя ей, "примерный" хеджер приходит в точку $S_u = 600$ с все еще пустым портфелем. Заполняя его в соответствии с коэффициентом $\delta_{1u} = 0,91(66)$, он должен будет купить 917 акций по цене 600 д. ед., то есть заплатить 550200 д. ед. Между тем, последовательно хеджируясь, мы могли бы купить это же количество акций по частям и в итоге затратить значительно меньше средств.

Но если до конца первого периода мы ничего не предпринимали, то дальше хеджироваться бесполезно, так как полностью исключить риск непокрытия обязательств уже не удастся. Подтвердим это с помощью все того же примера. Начальный капитал $C_0 = 102272,(72)$ на конец первого периода возрастет до величины:

$$C_0(1 + 0,1) = 112499,(9) \approx 112500,$$

что меньше стоимости требуемых нам 917 акций на 437700 д. ед. Заняв эту недостающую сумму, мы купим акции и одновременно примем на себя обязательства вернуть в конце второго периода "набежавший" долг в размере 437700(1 + 0,1) = 481470 д. ед.

В зависимости от реализованного на конечную дату варианта неопределенности к этому долгу в верхней точке (S_{uu}) добавится платеж по опционам ($1000\varphi_{uu}$), равный 220000, в нижней же точке (S_{ud}) не добавляется ничего ($\varphi_{ud} = 0$).

Таким образом, при наименее благоприятном верхнем исходе итоговое обязательство составит 701470 денежных единицы (481470 + 220000), которые не покрываются выручкой от продажи акций, равной 660240 д. ед. (720 × 917). При этом недостача в 41230 д. ед. соответствует 5,9% от требуемой суммы и, следовательно, отсутствует необходимая наличность и присутствует ненужный риск, от которого не удалось избавиться.

В завершение примера обратим внимание на одну особенность хеджера, которая коренным образом отличает его от спекулянта. Последний, как мы уже неоднократно отмечали, стремится покупать акции тогда, когда они дешевле, и продавать их, когда они подорожают. Хеджер же делает все наоборот. Так, в нащем примере он при подъеме в точку S_u (удорожание) докупал к имеющимся 750 акциям еще 167 штук, а при скатывании в нижнюю точку S_d (удешевление) полностью распродавал имеющиеся у него 750 акций. Это объясняется тем, что при подъеме курса на завершающий срок обязательства по колл-опциону растут и, следовательно, растут требования к направляемым на их покрытие средствам; источником же этих средств служит выручка от распродажи содержащихся в защитном портфеле акций.

Обобщая, можно сказать, что "крылатый" совет спекулянтам от барона Ротшильда "Покупайте дешево и дорого продавайте" *в назидание хеджерам оборачивается отрицающей его формулой "Покупайте дорого и продавайте, когда дешево".*

Продемонстрированная в примере техника расчетов единообразно распространяется на многошаговый вариант, при этом, чем короче назначается шаг, тем развесистее получится дерево биномиальной модели и тем точнее она будет имитировать процесс ценовой эволюции. Процедуры, копирующие изложенные выше правила обратной разметки узловых цен и их прямого воспроизведения, легко алгоритмизируются и переносятся на ЭВМ. Это, в свою очередь, позволяет автоматизировать расчеты, связанные с поэтапным пересмотром защитного портфеля и переторговлей.

Отметим *принципиальную разницу в подходах, используемых для установления рациональных курсов первичных ценных бумаг по сравнению с теоретическим ценообразованием опционов.* Если в первом случае цена считается из условия воспроизводимости ожидаемых доходов, то для опциона определяющими являются условия воспроизводимости, но уже ожидаемых платежей по обязательствам (11). Справедливости ради, заметим, что для покупателя опциона "колл" это будут ожидаемые им поступления.

В случае n-периодного колл-опциона для однократного расчета цены следует найти современную величину ожидаемого платежа, иначе говоря,

$$C = \frac{M(\Phi)}{(1+r)^n}.$$

Несмотря на то что выручка C от продажи опциона покрывает ожидаемый платеж M(Ф), риск несоответствия, измеряемый среднеквадратическим отклонением

$$\sigma(\Phi) = M[\Phi - M(\Phi)]^2 = M[\Phi - C(1 + r)^n]^2,$$

будет сохраняться. Для того чтобы избавиться от этого риска, продавец опциона может воспользоваться представленными в данном разделе схемами и направить свой начальный капитал C на формирование защитного портфеля.

Пример. Согласно данным базового примера случайный платеж Ф имеет три возможных значения: $\varphi_{uu} = 220$, $\varphi_{ud} = 0$, $\varphi_{dd} = 0$. Их вероятности можно определить с помощью известной схемы Бернулли: каждый раз происходит случайное испытание, и каждый раз может с вероятностью $P_u = 0{,}75$ произойти подъем или с вероятностью $P_d = 0{,}25$ - спуск.

В соответствии с решеткой случайных блужданий, изображенной на рис. 5, интересующие нас вероятности будут равны:

$$P_{uu} = P_u^2 = 0{,}5625;\ P_{ud} = P_uP_d + P_dP_u = 0{,}375;\ P_{dd} = P_d^2 = 0{,}0625.$$

Отсюда ожидаемая эмитентом выплата получится как взвешенная по этим вероятностям сумма платежей φ_{uu}, φ_{ud} и φ_{dd}, из которых два последних равны нулю:

$$M(\Phi) = 0{,}5625 \times 220 = 123{,}75.$$

Дисконтируя эту величину по ставке r = 0,1 на начало, найдем цену опциона

$$C = \frac{123{,}75}{(1{,}1)^2} = 102{,}27,$$

что совпадает с полученным ранее результатом пошаговых расчетов.

Оценим риск платежа Ф, который можно исключить с помощью хеджирования. В отличие от относительного измерителя, которым является процентная ставка, величина платежа абсолютна, и поэтому в качестве измерителя риска воспользуемся относительным, в отличие от СКО, показателем: коэффициентом вариации $æ = \sigma(\Phi)/M(\Phi)$. Найдем абсолютный риск, измеряемый дисперсией:

$$\sigma^2(\Phi) = M(\Phi)^2 - M^2(\Phi) = 0{,}5625 \times 220^2 - 123{,}75^2 = 11910{,}9375.$$

Подставляя это значение в формулу относительного измерителя, получим интересующее нас значение:

$$æ = \frac{109{,}14}{123{,}75} = 0{,}88.$$

1.6. Защитные портфели, основанные на опционах "пут"

Синтетический пут-опцион

Основанное на пут-опционах хеджирование проводится аналогично. Поэтому для изложения сути дела вполне достаточно уже разобранных приемов "самообороны" как от возможного в будущем обесценивания ваших акций (п. 3), так и от возможного зависания ваших будущих обязательств (п. 4).

Пример. Чтобы убедиться в схожести (с точностью до незначительных модификаций) используемых подходов, ограничимся простой арифметической иллюстрацией построения синтетического опциона. Напомним, что этот финансовый инструмент представляет собой такую смесь банковского счета (облигаций) и акций, которая прикрывает обязательства эмитента по опциону (исключает риск его неплатежеспособности). Для удобства сравнения защитные портфели по каждому типу опциона ("колл", "пут") будем конструировать параллельно и при условии, что объектом надписания является один и тот же базовый актив - акции компании "Рога и копыта".

Расчеты будем вести, опираясь на биномиальную одношаговую модель, в которой текущая цена акции S_0 = 100, а случайная величина будущей цены состоит из двух значений: высокого - S_u = 160 и низкого - S_d = 80. Допустим, что условия надписания каждого из опционов ("пут" и "колл") предусматривают одну и ту же цену исполнения, равную текущему курсу акции, то есть К = 100. Зададимся, кроме того, безрисковой ставкой процента r = 10% независимо от того, ссужаются деньги или берутся взаймы.

Ниже в обозначениях одноименные характеристики колл- и пут-опционов будем различать соответствующими этим опционам индексами "К" и "П". Очевидно, что обязательства продавца колл-опциона в случае повышения цены акции и при ее понижении будут равны следующим величинам:

$$\varphi_u^К = \max\{0, 160 - 100\} = 60,$$

$$\varphi_d^К = \max\{0, 80 - 100\} = 0.$$

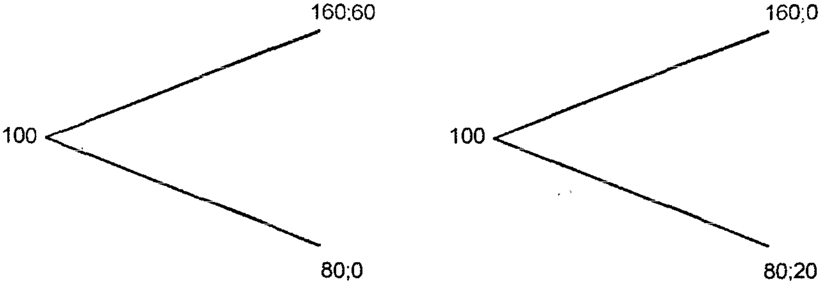
Аналогично, пользуясь правилами подсчета платежей для пут-опциона, придем в верхнем положении S_u к нулевому обязательству:

$$\varphi_u^П = \max\{0, 100 - 160\} = 0,$$

а в нисходящей точке S_d получим ненулевое платежное поручение на сумму:

$$\varphi_d^П = \max\{0, 100 - 80\} = 20.$$

Для наглядности данные о ценах и платежных обязательствах представим с помощью двух "рогаток", изображенных на рис. 6.



а) опцион на покупку б) опцион на продажу

Рис. 6. **Цены и платежи для однопериодной срочности**

Пусть δ - число акций в защитном портфеле, а B - первоначальный размер средств на банковском счете. Капитал этого портфеля складывается из двух составляющих. В исходной точке его значение дает величину:

$$I_0 = \delta S_0 + B,$$

которая на дату истечения меняется до финальной стоимости портфеля

$$I = \delta S + B(1 + r).$$

Для того чтобы портфель защищал обязательства, эта стоимость должна их воспроизводить. Если это так, то обменяв портфель на деньги, его владелец всегда рассчитается по долгам: и при подъеме цены до S_u, и при ее снижении до S_d.

Исходя из этого, условия хеджирования можно записать двумя (по числу исходов) линейными соотношениями относительно идентифицирующих портфель переменных δ, B. Используя в этих соотношениях известные нам числовые данные, придем к следующим системам уравнений для определения синтетических опционов "колл" и "пут":

$$\begin{cases}160\delta_к + 1{,}1B_к = 60,\\ 80\delta_к + 1{,}1B_к = 0.\end{cases} \qquad \begin{cases}160\delta_п + 1{,}1B_п = 0,\\ 80\delta_п + 1{,}1B_п = 20.\end{cases}$$

Решая эти системы, найдем защитные по каждому из рассматриваемых опционов портфели:

$$\pi_к = (\delta_к = 0{,}75;\ B_к = -54,\ (54));\ \pi_п = (\delta_п = -0{,}25;\ B_п = 36,\ (36)).$$

Каждый такой портфель оплачивается капиталом, который эмитент опционов формирует за счет выручки от их продажи. Поэтому цена опциона должна равняться начальной стоимости портфеля:

$$C = \delta S_0 + B_0.$$

Это тем более верно, что любой из выбранных нами портфелей порождает те же платежи, что и отвечающий ему опцион.

Подставляя в формулу ценообразования числовые параметры портфелей $\pi_{\text{к}}$ и $\pi_{\text{п}}$, определим интересующие нас цены опционов "колл" и "пут":

$$C_{\text{к}} = 0,75 \times 100 - 54,(54) = 20,(46);\ C_{\text{п}} = -0,25 \times 100 + 36,(36) = 11,(36).$$

Проинтерпретируем полученные выше числовые характеристики. Начнем с *опциона "колл"*. Чтобы его воспроизвести, следует занять 54,(54) д. е., добавить к ним премию за опцион $C_{\text{к}} = 20,(46)$ и все средства инвестировать в отрасль, работающую на "нужды гребеночной и мундштучной промышленности", то есть купить 0,75 базовых акций.

Что касается *опциона "пут"*, то для его защиты от риска следует провести "короткую" продажу 0,25 акций, а вырученные деньги вместе с доходом по опциону $C_{\text{п}} = 11,(36)$ предоставить в кредит (то есть инвестировать в безрисковую облигацию 36,(36) д. е.). Напомним, что согласно правилам "short sale" продаваемые без покрытия акции берутся в долг, а затем на дату истечения покупаются и возвращаются их первоначальному владельцу, в нашем случае - через период и за счет накопленных на банковском счете средств (погашение облигации).

Несмотря на видимую равновыгодность, выбор объекта надписания ("колл" и "пут") может, помимо всего прочего, зависеть от складывающейся на рынке ценных бумаг обстановки. Например, при повышении спроса на опционы определенного направления создаются условия для их выигрышной (по завышенной цене) продажи с последующим сохранением полученной разницы с помощью хеджирования.

Взаимосвязь опционов "колл" и "пут"

Обратим внимание на следующие зависимости между коэффициентами хеджирования и размерами средств на банковских счетах, которые объединяют представленные выше "левую" и "правую" задачи:

$$\delta_{\text{к}} - \delta_{\text{п}} = 0,75 - (-0,25) = 1,$$

$$B_{\text{п}} - B_{\text{к}} = 36,(36) - (-54,(54)) = \frac{K = 100}{1,1} = 90,(90).$$

То, что это совпадение неслучайно, легко убедиться, перейдя к алгебре. В самом деле, аналитическое обобщение этих задач на любой набор выплат дает следующие пары условий воспроизводимости:

$$\begin{cases} S_u\delta_{\text{к}} + (1+r)B_{\text{к}} = S_u - K \\ S_d\delta_{\text{к}} + (1+r)B_{\text{к}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_u\delta_{\text{п}} + (1+r)B_{\text{п}} = 0, \\ S_d\delta_{\text{п}} + (1+r)B_{\text{п}} = K - S_d. \end{cases}$$

Решая данные системы, например, по правилу Крамера, найдем параметры синтетического колл- и соответственно пут-опционов:

$$\delta_K = \frac{S_u - K}{S_u - S_d},\ B_K = -\frac{S_d(S_u - K)}{(1+r)(S_u - S_d)};$$

$$\delta_п = -\frac{K - S_d}{S_u - S_d}, \quad B_п = \frac{S_u(K - S_d)}{(1+r)(S_u - S_d)},$$

для которых (что проверяется непосредственно)

$$\delta_к - \delta_п = 1, \quad B_п - B_к = \frac{K}{1+r}. \qquad (16)$$

Опираясь на эти свойства, выясним, как связаны цены разнонаправленных однопериодных опционов. Мы знаем, что цена опциона равна начальному капиталу I_0, то есть

$$C_к = \delta_к S_0 + B_к, \quad C_п = \delta_п S_0 + B_п.$$

Откуда, с учетом (16),

$$C_п - C_к = -S_0 + \frac{K}{1+r}$$

и, следовательно, взаимосвязь "пут-колл" (put-call parity) имеет вид:

$$S_0 + C_п - C_к = \frac{K}{1+r}. \qquad (17)$$

Это означает, что портфель, состоящий из акции, пут-опциона и короткой позиции по (проданному) колл-опциону, будет продаваться и покупаться по цене, равной цене исполнения, дисконтированной на безрисковый процент. Отсюда ясно, что специализированную по данному типу опциона систему уравнений можно использовать не только по прямому назначению, но также и для определения стратегии хеджирования по отношению к опциону противоположной направленности.

Заметим также, что если цена исполнения опционов совпадает с сегодняшней рыночной ценой актива ($K = S_0$), то, как видно из (17),

$$C_к - C_п = S_0 - \frac{S_0}{1+r} > 0,$$

то есть опцион на покупку дороже опциона на продажу.

Пример. Воспользуемся формулой (17) и найдем цену пут-опциона из предыдущего примера с условиями $S_0 = K = 100$, $C_К = 20,(46)$. Вычисляя, получим то же значение:

$$C_п = 20,(46) - 100 + \frac{100}{1+0,1} = 11,37,$$

которое было рассчитано в предыдущем примере без использования соотношения дополнительности (17).

Установленные выше взаимосвязи между однопериодными опционами "колл" и "пут" носят общий характер и присутствуют также в более сложных случаях многошаговой и непрерывной эволюции цен. В связи с этим приемы пут-опционного хеджирования аналогичны тому, что делается при рассмотрении колл-опционов.

1.7. О хеджировании с учетом непрерывной эволюции цен

До сих пор кардинальные вопросы теории опционов: определение рациональной премии за опцион и определение хеджирующей стратегии эмитента - решались исходя из дискретных представлений эффективности безрисковых и рисковых вложений по банковскому счету и для акции

$$r_t = \frac{B_{t+1} - B_t}{B_t}, \quad \rho_t = \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t}. \qquad (18)$$

Здесь $r_t = r$ - неменяющаяся во времени безрисковая ставка процентов, а последовательность ρ_1, ρ_2, ... - независимые (в вероятностном смысле) случайные величины с двумя возможными значениями d и u.

Чтобы получить ответы на те же вопросы применительно к непрерывному времени, следует перейти от характеристик динамических рядов (18) к их дифференциальным аналогам, измеряющим темпы прироста на непрерывных траекториях.

Модель Блэка-Шоулза

В теории фондового рынка рассмотрение подобных характеристик для решения проблемы непрерывного времени базируется на следующих динамических моделях их поведения:

а) эффективность безрисковых вложений определяется постоянной силой роста δ, так что величина вклада B(t) изменяется во времени согласно уравнению:

$$\frac{dB}{dt} \times \frac{1}{B(t)} = \delta. \qquad (19)$$

Заметим, что непрерывное наращение процентов по правилу (19) является, о чем уже упоминалось в самом начале (ч. I п. 1.1), достаточно точным приближением дискретной капитализации (ч. I, формула 7). Эта аппроксимация действует тем точнее, чем будет выше частота оборачиваемости денег; в нашем случае - чем больше единичных периодов начисления уложится в сроке до исполнения контракта;

б) эффективность вклада в акции (или любые ценные бумаги, на которые выпускается опцион) случайна и меняется согласно стохастическому уравнению

$$\frac{dS}{dt} \times \frac{1}{S} = \mu + \sigma n\,(t), \qquad (20)$$

где n(t) - случайный процесс с некоррелированными значениями, нулевым математическим ожиданием и бесконечной дисперсией - так называемый *"белый шум"*.

В основе этого термина лежат физические представления, связанные с быстро изменяющимися величинами, значения которых, разделенные очень малыми промежутками времени, практически независимы. При разложении таких случайных функций на элементарные гармонические колебания гармоники всех частот оказываются одинаковыми по интенсивности. Эта аналогия с белым цветом и послужила причиной того, что такие случайные функции называются белыми шумами.

Корреляционная функция подобных процессов представляется в виде произведения скаляра α, называемого интенсивностью, на δ - функцию разности аргументов. В модели (20) фигурирует белый шум с единичной интенсивностью ($\alpha = 1$), то есть

$$\mu\, [n(t) \times n(t')] = \delta(t - t'),$$

где $\delta(x) = 0$, при $x \neq 0$, $= \infty$, при $x = 0$, и $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = 1$ при любом $\varepsilon > 0$.

С помощью "белого шума" в соотношении (20) моделируется достаточно хаотичный характер поведения цен, который сказывается на неупорядоченности флуктуаций относительной скорости их изменения вокруг ожидаемого значения μ.

Из уравнения (20) следует, что логарифм цены является нормально распределенной случайной величиной, математическое ожидание которой увеличивается за время t на μt, а дисперсия - на $\sigma^2 t$, так что μ есть скорость роста ожидаемого значения, а σ^2 - скорость роста дисперсии, предполагаемые постоянными.

Приняв модель (20), Блэк и Шоулз установили следующую ***формулу для оценки действительной стоимости опциона "колл"***:

$$C_{\text{к}} = SN(d_1) - Ke(-\delta T)N(d_2), \qquad (21)$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (\delta + 05\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad (22)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (\delta - 0{,}5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \qquad (23)$$

$$N_{(d)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\,. \qquad (24)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

S - текущая рыночная цена базисного актива;

K - цена исполнения опциона;

δ - безрисковая ставка непрерывных процентов в расчете на год (в виде десятичной дроби);

T - время до истечения, представленное в долях в расчете на год;

σ - риск базисной акции, измеренный стандартным отклонением ее доходности, представленной как непрерывно начисляемый процент в расчете на год (в виде десятичной дроби);

N(d) - вероятность того, что при нормальном распределении с нулевым средним и единичной дисперсией результат будет меньше d.

Несмотря на кажущуюся сложность формулы (21), она достаточно широко используется на практике. Например, воспользовавшись ею, можно обнаружить ситуации, когда рыночная цена опциона серьезно отличается от его действительной цены (21). Опцион, который продается по существенно более низкой цене, чем полученная по формуле Блэка-Шоулза, является кандидатом на покупку; и, наоборот, - тот, который продается по значительно более высокой цене, - кандидат на продажу.

Более того, при правильном прочтении запись (21) подсказывает, как алгоритмически провести хеджирование, согласуя его с наблюдаемым курсом акции. Чтобы это прояснить, сравним равенство (9) для синтетического однопериодного колл-опциона с обсуждаемой формулой (21). Мы видим, что величина $N(d_1)$ в соотношении (21) соответствует множителю δ в (9). Так как δ - это коэффициент хеджирования, то величину $N(d_1)$ в формуле Блэка-Шоулза можно объяснить аналогичным образом. То есть, она показывает количество акций, которое инвестору следует купить, чтобы получить такие же выплаты, как и по опциону "колл".

Аналогично величина $KN(d_2)/e(-\delta T)$ соответствует B. При этом B - это сумма средств, которую хеджер занимает, осуществляя данную стратегию, то есть величина $KN(d_2)$ соответствует номиналу займа, поскольку его сумма должна быть возвращена кредитору в момент T - дату истечения. Поэтому $e(-\delta T)$ - это дисконтирующий множитель, указывающий на то, что ставка процента по займу составляет δ и он предоставляется на период T.

Таким образом, сложная на первый взгляд формула Блэка-Шоулза получает простое объяснение. Она позволяет рассчитать начальную стоимость синтетического опциона, состоящую из средств на банковском счете и в акциях, а также хеджирующую стратегию, которая дает в момент T те же выплаты, что и опцион "колл".

Доказательство Блэка-Шоулза базируется на теории случайных процессов и завершается интегрированием уравнения в частных производных. И то и другое перекрывает математические горизонты данной книги и выходит за рамки требований к ее читателю, ограниченных отчасти возможностями и вкусами ее автора.

Вместе с тем идея доказательства достаточно прозрачна: составляется безрисковый портфель (аналог (3)) из опциона на покупку и некоторого количества акций. Его конструкция подгоняется таким образом, чтобы из смеси опциона с акциями получить безрисковый актив (облигацию). Цена такого портфеля в любой момент времени не должна зависеть от курса акции, а определяется лишь эффективностью безрисковой компоненты.

Моделируя эти требования, авторы доказательства приходят к базовому дифференциальному соотношению относительно функции $C_K(S, t)$ (цены опциона) при очевидном краевом условии:

$$C_K(S, T) = \max(S - K, 0). \qquad (25)$$

Это равенство, как легко понять, отражает стоимость опциона на момент его исполнения: ничего не стоит, если контрактная цена K больше курса S; при выгодной для покупателя контрактной цене ($K < S$) его справедливая стоимость определяется разницей $S - K$.

Формула (21) и является результатом интегрирования с заменой отсчета времени назад, от даты исполнения опциона.

Приложения формулы Блэка-Шоулза

Приведем цитату из известного учебника Р. Брейли, С. Майерса "Принципы корпоративных финансов", рекомендуемого для изучения во многих университетах, в котором выводится эта формула: "Насколько далека эта теория от практики и далеко ли теоретики оторвались от нужд биржевых спекулянтов? Оказывается, нет. Это одна из наиболее часто используемых формул. Брокеры и дилеры в течение дня много раз используют ее в своих практических расчетах".

Почему это так и как пользоваться формулой, вы сейчас увидите на простых иллюстрациях. Для этого нам потребуется таблица значений функции N(d), которая позволяет упростить процесс вычислений.

Оценка премии за опцион. Покажем на конкретных числах, как пользоваться данной таблицей и формулой (21) для рационального назначения премии за опцион.

Пример. *Определим стоимость опциона "колл", который истекает через три месяца и имеет цену исполнения 40 долл. (таким образом, $T = 0{,}25$ и $K = 40$). Кроме того, текущий курс и риск базисной обыкновенной акции составляют соответственно 36 долл. и 50%, а безрисковая ставка равна 5% ($S = 36$, $\sigma = 0{,}5$, $\delta = 0{,}05$). Подставляя числовые данные в формулы (22) и (23), найдем значения d_1 и d_2:*

$$d_1 = \frac{\ln(36/40) + (0{,}05 + 0{,}5(0{,}5)^2) \times 0{,}25}{0{,}5\sqrt{0{,}25}} = -0{,}25;$$

$$d_2 = -0{,}25 - 0{,}5\sqrt{0{,}25} = -0{,}50.$$

Таблица значений N(d) для отдельных значений d

d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)
		-1,00	0,1587	1,00	0,8413
-2,95	0,0016	-0,95	0,1711	1,05	0,8531
-2,90	0,0019	-0,90	0,1841	1,10	0,8643
-2,85	0,0022	-0,85	0,1977	1,15	0,8749
-2,80	0,0026	-0,80	0,2119	1,20	0,8849
-2,75	0,0030	-0,75	0,2266	1,25	0,8944
-2,70	0,0035	-0,70	0,2420	1,30	0,9032
-2,65	0,0040	-0,65	0,2578	1,35	0,9115
-2,60	0,0047	-0,60	0,2743	1,40	0,9192
-2,55	0,0054	-0,55	0,2912	1,45	0,9265
-2,50	0,0062	-0,50	0,3085	1,50	0,9332
-2,45	0,0071	-0,45	0,3264	1,55	0,9394
-2,40	0,0082	-0,40	0,3446	1,60	0,9452
-2,35	0,0094	-0,35	0,3632	1,65	0,9505
-2,30	0,0107	-0,30	0,3821	1,70	0,9554
-2,25	0,0122	-0,25	0,4013	1,75	0,9599
-2,20	0,0139	-0,20	0,4207	1,80	0,9641
-2,15	0,0158	-0,15	0,4404	1,85	0,9678
-2,10	0,0179	-0,10	0,4602	1,90	0,9713
-2,05	0,0202	-0,05	0,4801	1,95	0,9744
-2,00	0,0228	0,00	0,5000	2,00	0,9773
-1,95	0,0256	0,05	0,5199	2,05	0,9798
-1,90	0,0287	0,10	0,5398	2,10	0,9821
-1,85	0,0322	0,15	0,5596	2,15	0,9842
-1,80	0,0359	0,20	0,5793	2,20	0,9861
-1,75	0,0401	0,25	0,5987	2,25	0,9878
-1,70	0,0446	0,30	0,6179	2,30	0,9893
-1,65	0,0495	0,35	0,6368	2,35	0,9906
-1,60	0,0548	0,40	0,6554	2,40	0,9918
-1,55	0,0606	0,45	0,6736	2,45	0,9929
-1,50	0,0668	0,50	0,6915	2,50	0,9938
-1,45	0,0735	0,55	0,7088	2,55	0,9946
-1,40	0,0808	0,60	0,7257	2,60	0,9953
-1,35	0,0885	0,65	0,7422	2,65	0,9960
-1,30	0,0968	0,70	0,7580	2,70	0,9965
-1,25	0,1057	0,75	0,7734	2,75	0,9970
-1,20	0,1151	0,80	0,7881	2,80	0,9974
-1,15	0,1251	0,85	0,8023	2,85	0,9978
-1,10	0,1357	0,90	0,8159	2,90	0,9981
-1,05	0,1469	0,95	0,8289	2,95	0,9984

Воспользуемся теперь таблицей функции N(d) для получения значений $N(d_1)$ и $N(d_2)$.

$N(d_1) = N(-0{,}25) = 0{,}4013;$

$N(d_2) = N(-0{,}50) = 0{,}3085.$

И наконец, используем основное соотношение (21) для определения справедливой цены колл-опциона:

$$C_K = 36 \times 0{,}4013 - \left(\frac{40 \times 0{,}3085}{e^{0{,}05 \times 0{,}25}} \right) = 14{,}45 - 12{,}19 = 2{,}26 \text{ (долл.)}.$$

Если в настоящий момент этот опцион продается за 5 долл., то инвестору следует подумать, не выписать ли несколько опционов. Так как они переоценены (согласно модели Блэка-Шоулза), то можно рассчитывать на то, что в ближайшем будущем их цена упадет. Таким образом, продавец получит премию 5 долл. и может ожидать покупку по более низкой цене, что принесет ему доход от разницы цен. Напротив, если опцион "колл" продается за 1 долл., то следует купить его. Так как он недооценен, то можно ожидать роста его стоимости в будущем.

Возможности для таких сделок создаются достаточно ликвидным рынком биржевых опционов с правилами торговли, вроде тех, что действуют на фьючерсных торгах.

Хеджирование. Модель Блэка и Шоулза не только отвечает на вопрос о рациональной стоимости опциона, но позволяет, сверх того, найти оптимальный хеджирующий портфель: его компоненты задаются в функции непрерывного времени. Не вдаваясь в подробности теоретического решения этой задачи, ограничимся здесь лишь наводящими соображениями и простой арифметикой.

Подчеркнем, что формула ценообразования (21) не привязана жестко к моменту эмиссии, а годится для опциона любого возраста в пределах его жизненного срока. Как и в дискретном времени, траектория цены задает динамику стоимости защитного портфеля. В свою очередь, эта стоимость определяется сложением денежных средств по содержащимся в портфеле (синтетическом опционе) ценным бумагам: акциям и облигациям (банковскому счету) - уменьшаемое и вычитаемое формулы (21).

Стоимостные вариации, обнаруживаемые в ходе расчетов по мере "взросления" опциона, сигнализируют о необходимости и направлениях в изменении составляющих защитный портфель компонент: уменьшить число акций и вернуть часть долга или, при подъеме курса, дозанять и прикупить акций в количестве, определяемом коэффициентом хеджирования, и так до следующей календарной даты, предполагающей ревизию портфеля.

Изменения рыночной цены базисной акции влияют на прогнозы предстоящих на дату истечения платежей, то есть на ожидаемые продавцом опциона риски покрытия обязательств. В связи с чем возникает потребность в адаптации защитного портфеля (акции, банковский счет) к меняющейся конъюнктуре. Очевидно, что слишком часто пересматривать портфель, то есть подгонять его содержимое к текущей ситуации, не представляется возможным, хотя бы по причине трансакционных издержек.

В то же время при значимых изменениях курса вопросы перестройки теряющего защитные свойства портфеля требуют активного вмешательства. Для восстановления хеджирующей способности можно воспользоваться формулой (21) и с ее помощью рассчитать, как надо изменить портфель в ответ на сложившуюся на фондовом рынке обстановку, а затем реализовать эти изменения на практике.

Пример В условиях предыдущего примера портфельный набор устанавливается с помощью расчетных значений $N(d_1) = 0.4013$ и $N(d_2) = 03085$ купить 0,4013 акций по цене 36 долл и продать 0,3085 трехмесячных облигаций (взять в долг) с номиналом 40 долл. Допустим, что на фоне вялотекущих ценовых изменений хеджер в течение первого месяца со дня продажи опциона предпочитал бездействовать Однако на конец месяца курс резко упал до 26 долл. и возникла необходимость в адаптации портфеля.

Чтобы принять рациональные решения по улучшению портфеля рассчитаем характеристики синтетического опциона на текущую дату, то есть за два месяца до окончания. Для этого воспользуемся формулой Блэка-Шоулза с новыми значениями T и S:

$$T = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = 0{,}1(6)\,,\ S = 26 \text{ долл.}$$

С учетом этих изменений определим отвечающие им значения d_1 и d_2:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{26}{40}\right) + (0{,}05 + 0{,}5(0{,}5)^2) \times 0{,}1(6)}{0{,}5\sqrt{0{,}1(6)}} = -1{,}97\,,$$

$$d_2 = -\ 1{,}97\ - 0{,}5\sqrt{0{,}1(6)} = -2{,}147$$

и по таблице найдем, что:

$$(d_1) = N(-\ 1{,}97) = 0{,}0242;$$

$$N(d_2) = N(-\ 2{,}147) = 0{,}0148.$$

Таким образом (по смыслу показателей $N(d_1)$ и $N(d_2)$), для переживаемой даты с курсом в 26 долл. защитный портфель должен состоять из 0,0242 акций и 0,0148 облигаций. Чтобы выйти на эти характеристики, следует продать 0,3771 акций (0,4013 - 0,0242) и на вырученные деньги выкупить 0,2937 облигаций (0,3085 - 0,0148), то есть сократить долг.

Очередную перестройку портфеля можно вновь приурочить к значимым отклонениям курса и т. д.

Читателя не должны смущать полученные при расчетах дробные числа: 0,4013; 0,3085; 0,0242 и 0,0148. В реальных задачах число проданных опционов или количество акций, на которое пишется опцион, достаточно для того, чтобы пересчитать дробные показатели в целые, то есть перейти к штукам. Так надписание 1000 колл-опционов в условиях нашего примера потребует одновременного приобретения 401 акции (0,4013 × 1000), а затем, в соответствии с задачей хеджирования, продажи 377 единиц (0,3771 × 1000).

Статистическое оценивание риска акции. Анализ формулы Блэка-Шоулза позволяет обнаружить направление зависимости цены C_K от каждой из пяти переменных:

- рыночной стоимости акции S;
- цены исполнения опциона K;
- времени до даты истечения T;
- ставки без риска δ и риска акции σ.

Что произойдет с ценой опциона "колл" при изменении одной из переменных, когда остальные четыре сохраняют свои значения? А будет следующее.

1. Чем выше цена базисной акции S, тем больше стоимость опциона "колл".

2. Чем выше цена исполнения K, тем меньше стоимость опциона "колл".

3. Чем больше времени до даты истечения T, тем больше стоимость опциона "колл".

4. Чем выше ставка без риска δ, тем больше стоимость опциона "колл".

5 Чем больше риск обыкновенной акции, тем больше стоимость опциона "колл".

Отмеченные связи проявляются на рынке опционов и объясняются характером отношения его участников к риску и доходности. Скажем, по п. 2, рост цены K повышает вероятность держателя опциона на отказ и соответственно чистых потерь в пользу продавца. В связи с чем "осторожный инвестор" реагирует снижением спроса и, как следствие, опцион дешевеет. Таким образом, можно сказать, что выводы 1 + 5, а следовательно и модель Блэка-Шоулза, соответствуют закономерностям, наблюдаемым на реальном рынке.

Из перечисленных пяти переменных первые три (S, K и T) определить легко. Для оценки четвертой переменной - безрисковой ставки δ - можно использовать доходность к погашению государственных облигаций, дата погашения которых близка к дате истечения опциона.

Что касается риска σ, то согласно принятым в формулах (22), (23) обозначениям он измеряется среднеквадратическим отклонением силы роста курсовой стоимости. Отметим без доказательства, что этот показатель доходности, как следует из уравнения (20), совпадает с натуральным логарифмом от величины (S_t/S_{t-1}):

$$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right),$$

где S_t и S_{t-1} - рыночная цена базисной акции соответственно в момент t и t - 1.

Отсюда ясно: чтобы определить переменную σ^2, следует получить выборку значений $\{r_t\}$ и, пользуясь этими данными, оценить дисперсию по известным из статистики формулам.

Например, набор рыночных цен $\{S_t\}$ может состоять из цен закрытия в конце каждой из 53 недель. Если цена в конце одной недели было равно 105 долл., а цена в конце следующей недели составляла 107 долл., то доходность *за данную неделю r_t будет равна 1,886% (ln(107/105)). Таким образом, мы* получим 52 значения недельной доходности.

Получив n значений доходности акции, определяем среднюю доходность:

$$E(R) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t .$$

Затем средняя доходность используется для оценки дисперсии за период. Она равна квадрату стандартного отклонения:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum (r_t - E(R))^2 .$$

Эта величина зависит от продолжительности периода времени, за который определяется каждое значение доходности. В нашем примере рассчитывалась доходность за неделю, которая может быть использована для получения величины дисперсии за неделю. Соответственно, на основе дневной доходности будет определяться дисперсия в расчете на день, значение которой будет меньше дисперсии за неделю. Однако необходимо получить дисперсию не за неделю и не за день, а в расчете на год, как того требуют формулы (23), (24). Ее получают, умножив дисперсию за период на число таких периодов в году.

Возможность подобного перехода вытекает из свойств модели (20). Таким образом, недельная дисперсия умножается на 52 для получения годовой дисперсии σ^2.

Существуют и другие методы определения общего риска акции, но мы их рассматривать не будем и ограничимся изложенным выше.

Паритет пут- и колл-опционов (общий случай)

Полученное на примере однопериодной модели свойство дополнительности (17) устанавливает связь и для всех прочих вариантов ценообразования опционов как на основе многопериодных моделей, так и по формуле Блэка-Шоулза. Поэтому построение защитных портфелей для пут-опционов не отличается чем-то существенным и его можно выполнить, прибегая по необходимости к известному соотношению паритета для европейских опционов:

$$C_п = C_к + \frac{K}{e^{\delta T}} - S . \qquad (26)$$

Для доказательства покажем, что при нарушении (в ту или иную сторону) равенства (26) у участников рынка появляется возможность арбитража, то есть создаются условия получить безрисковый доход. А это противоречит одной из основных гипотез теории эффективного рынка о его справедливости, то есть об отсутствии на нем арбитражных возможностей.

Предположим сперва, что

$$C_п - C_к + S > \frac{K}{e^{\delta T}}. \tag{27}$$

В этом случае поступим так: продадим акцию, продадим пут-опцион и купим колл-опцион. От этой операции мы выручим сумму $I_0 = C_п - C_к + S$. Если цена акции в конце срока окажется больше K, то пут-опцион не исполняется, а колл-опцион выгодно исполнить, чтобы получить акцию по цене K < S, так что расход составит K. В результате наращенная на начальный капитал I_0 сумма превысит затраты на величину:

$$\Delta = (C_п - C_к + S)e\delta T - K > 0. \tag{28}$$

Если же цена акции на дату истечения окажется меньше K, то колл-опционы исполнять невыгодно, зато против нас исполняется пут-опцион и мы обязаны купить акцию по контрактной цене K, так что в конце периода чистый доход окажется равным той же величине (28). В результате наша прибыль гарантируется независимо от колебаний будущей цены акции. С учетом постулируемой безарбитражности рынка соотношение (27) между стоимостями опционов $C_п$ и $C_к$ выполняться не может.

Невозможность противоположного неравенства доказывается аналогично. В этом случае, в чем нетрудно убедиться, арбитражная комбинация включает продажу опциона "колл" в сочетании с покупкой акций и пут-опциона. Таким образом, гарантированная прибыль невозможна только тогда, когда имеет место взаимосвязь (26),

В завершение еще раз подчеркнем значимость рассмотренного в последнем разделе теоретического направления, посвященного моделированию фондового рынка в непрерывном времени. Определяющие результаты в этой области были получены в работах Ф. Блэка и М. Шоулза "Расчеты опционов и обязательства корпораций" и Р. Мертона "Теория рациональных расчетов опционов", которые заложили принципиально новые основы для теории и практики расчетов опционов и других ценных бумаг.

Глава 2

Хеджирование процентного риска с помощью облигаций

В отличие от акций облигации снабжают своего держателя фиксированными поступлениями на протяжении всего срока их действия. Эти деньги доходят до него в виде периодических купонных платежей и выплаты номинала на дату погашения. Предопределенность будущих поступлений позволяет, комбинируя облигации разной срочности, конструировать потоки доходов с нужными свойствами, например подгонять денежные приходы о предстоящими изъятиями на обязательства или инвестиции.

Но фиксированные выплаты по облигациям не означают фиксированной доходности, которая связана с ценой приобретения и, кроме того, может меняться в связи с неопределенностью будущего. Это, в свою очередь, создает риск изменения ставки реинвестирования по коротким облигациям (риск реинвестирования) и риск изменения процентной ставки при досрочной продаже длинных облигаций.

Более того, как уже объяснялось в начале предыдущей главы, эффективности этих способов инвестирования по-разному откликаются на те или иные изменения процентной ставки и имеют отрицательную корреляцию. Отмеченная разнонаправленность служит основанием для построения диверсифицированного портфеля облигаций, не восприимчивого к изменениям процентных ставок.

В качестве элементарного примера остановимся на ситуации срочного обязательства. Для его покрытия допустимо воспользоваться бескупонными облигациями той же срочности и в точности обслужить долг, причем вне зависимости от того, как поведет себя процентная ставка в пределах отпущенного времени. А можно попытаться составить смесь из разнопериодных облигаций и такую, что ее приведенная на дату обязательства стоимость погашает долг при любых возможных нестабильностях процентной ставки.

Реализуемость подобного подхода обосновывается известной из теории инвестиций ***теоремой об иммунитете***, то есть способности противостоять риску, впервые полученной П. Самуэльсоном. Ознакомлению с этой теоремой и основанными на ней способами хеджирования риска и будет посвящен материал данной главы.

2.1. Дюрация

Текущая стоимость финансового потока

Рассмотрим детерминированный поток неотрицательных платежей, следующих в последовательные моменты времени t = 1, 2, .., T (финансовая рента). Пусть r_{01}, r_{02}, ..., r_{0T} - временная структура действующих в настоящий момент времени процентных ставок. Здесь, согласно принятой символике, r_{0t} является доходностью к погашению t-периодной бескупонной облигации, размещаемой в начальной точке отсчета всех периодов.

Если мы знаем доходность к погашению в любом периоде, мы можем вычислить текущую стоимость (дисконтированную величину) каждого сосредоточенного платежа C_t и, просуммировав, получить цену, или текущую стоимость всего потока:

$$P = \frac{C_1}{(1 + r_{01})} + \frac{C_2}{(1 + r_{02})^2} + \cdots + \frac{C_T}{(1 + r_{0T})^T}.$$

Заметим, что в качестве составляющих одностороннего потока $\left\{C_t, t = \overline{1,T}\right\}$ могут, по договоренности, рассматриваться как доходы, так и изъятия, и в зависимости от этого текущая стоимость P будет относиться к финансовому потоку активов или долгов. В реальной практике для дисконтирования в этой формуле применяют также банковские проценты $\left\{в_{0t}, t = \overline{1,T}\right\}$, где $в_{0t}$ - ставка по вкладу или кредиту (безфрикционность) на срок t. При этом неявно предполагается, что

$$\left\{r_{0t} = в_{0t}, t = \overline{1,T}\right\}, \qquad (29)$$

а для теоретического обоснования такой подмены опираются на арбитражные рассуждения об эквивалентности депозита и облигации.

В самом деле, пусть для t-периодной бескупонной облигации с номиналом F_t рыночный курс

$$P_{0t} > \frac{F_t}{(1 + в_{0t})^t}.$$

При этом соотношении облигацию лучше продать, а вырученные деньги P_{0t} положить на депозит и к концу срока t получить арбитражный доход:

$$A = P_{0t}\,(1 + в_{0t})^t - F_t.$$

В противном случае, когда

$$P_{0t} < \frac{F_t}{(1 + в_{0t})^t},$$

деньги с банковского счета целесообразно поместить в облигацию и получить, погасив ее, безрисковую прибыль:

$$A = F_t - P_t\,(1 + в_{0t})^t.$$

Отсюда следует, что равенство (29) или равносильное ему условие

$$P_{0t} = \frac{F_t}{(1 + в_{0t})^t}$$

будут иметь место только при условии, что на финансовом рынке отсутствуют арбитражные возможности. Понятно, что эти представления могут рассматриваться лишь только как некоторое приближение к реальному рынку, который, увы, несправедлив и изобилует арбитражными приманками.

Понятие фрактальности

Естественно, что в финансовой математике изучаются и арбитражные рынки. Таковыми являются, например, многие рынки с так называемой "фрактальной" структурой (fraction - дробь). На них присутствуют инвесторы с разными диапазонами дальновидности и разными возможностями и имеет место "неоднородность", "дробность" или, как еще говорят, "фрактальность" интересов участников рынка.

Сравнительно новая концепция фрактальности не заменяет ни рассмотренную ранее концепцию эффективности, ни концепцию безарбитражности, о которой мы также упоминали в предыдущей части. Более того, все эти понятия взаимно дополняют друг друга, раскрывая все многообразие и сложность такого объекта, как финансовый рынок.

На нефрактальном рынке, например при избытке по причине развивающейся инфляции краткосрочных вложений, долгосрочные инвесторы не могут провести распродажу своих активов и сменить амплуа.

В результате рынок становится неликвидным и теряет устойчивость. Все это говорит о том, что для стабильности финансового рынка он должен обладать необходимым разнообразием, то есть быть фрактальным.

В заключение, не выходя за рамки описательного уровня, перечислим ***отличительные особенности рынка с фрактальной структурой***:

- в каждый момент времени на таком рынке цены корректируются инвесторами в зависимости от той информации, которая существенна для их инвестиционного горизонта;
- в случае коротких временных горизонтов определяющую роль играет техническая информация и технический анализ, а при увеличении длины временного горизонта доминирующую роль начинает играть фундаментальная информация;
- цены складываются в результате взаимодействия "краткосрочных" и "долгосрочиых" инвесторов;
- высокочастотная составляющая в ценах определяется действиями "краткосрочных" инвесторов; низкочастотные, гладкие составляющие отражают активность "долгосрочных" инвесторов (рис. 7)
- рынок начинает терять ликвидность, устойчивость, когда на нем исчезают инвесторы с разными инвестиционными горизонтами, то есть теряется его фрактальность.

Рис. 7. **Повышающийся и понижающийся тренды с наложением зигзагов (высокочастотной составляющей)**

Еще раз о процентном риске

При расчете доходности к погашению мы неявно предполагали, что все денежные поступления каждый период реинвестируются под процент, соответствующий этой доходности на оставшееся до погашения время, то есть исходили из эффективной ставки (1.9). Но эта теоретическая величина может и не совпасть с будущими попериодными значениями процента. В результате возникает как риск реинвестирования, так и риск процентной ставки при продаже до срока погашения.

Рыночные цены складываются под влиянием ожидаемых ставок и определяют, в свою очередь, обещанные рынком доходности к погашению. Перенос ставок на будущее исходит из предположения о стационарности их структуры, то есть неменяющейся кривой доходности. Если это не так, то по причине расхождения фактических доходностей от приписываемых им "исторических" значений расчетная цена может, и даже существенно, разойтись с ценой рыночного равновесия.

В результате такого пренебрежения риском изменений процентных ставок можно понести потери как из-за обесценивания активов, так и по причине ошибочных вложений или непокрытия имеющихся долгов. Соответствующие этим потерям примеры были даны в предыдущей главе, точнее в ее первом разделе, посвященном отрицательно коррелированным финансовым инструментам. В связи с этим возникают задачи контролирования процентного риска для получения безрисковой доходности на вложенный капитал, а также с целью гарантированного погашения обязательств.

Одним из способов решения подобных задач является целенаправленное формирование такого пакета облигаций, который, обладая требуемыми свойствами, сохраняет их независимо от изменений уровня процента на рынке.

Допустим, что принадлежащий нам пакет облигаций генерирует финансовый поток $\left\{C_t, t = \overline{1,T}\right\}$, текущая стоимость которого P уравновешивает обязательную для нас календарную выплату. Приведенная величина этого потока зависит от процентных ставок $\left\{r_{0t}, t = \overline{1,T}\right\}$, поэтому их вероятностные изменения могут неблагоприятно сказаться на ее размерах и поставить под вопрос обслуживание нашего долга. В связи с этим возникает необходимость в индикаторе чувствительности цены потока P на изменения процентных ставок $\{r_{0t}\}$ и конструировании на этой основе потоков с привлекательными реакциями их текущих стоимостей на возмущения мультиплицирующих множителей $\{(1 + r_{0t})^t\}$.

Упростим поднятые здесь вопросы до уровня горизонтальной кривой доходности:

$$r_{01} = r_{02} = ... = r_{0T} = r_0$$

и будем считать, что могут иметь место только параллельные сдвиги этой кривой и если они происходят, то в самом начале, то есть скажутся на ценах всех облигаций.

Изменения действующей процентной ставки r_0 могут быть вызваны разными причинами, в том числе и такой очевидной, как *состояние денежного рынка*. Так, уменьшение денежный массы приводит к неудовлетворенному на деньги спросу, и владельцы облигаций начинают их продавать. В результате процентная ставка меняется на более высокую $r > r_0$. При избытке денег их сбрасывают на покупку облигаций, что приводит к росту цен и снижению уровня процента до нового значения $r < r_0$.

Разумеется, реальный рынок может вести себя отлично от принятых здесь упрощенных правил. Например, начальные уровни доходности по одногодичным и трехгодичным облигациям составляют 10 и 10,5 %, а через год упадут на 1 и 0,8% соответственно. Тем не менее, несмотря на условность рассматриваемой ситуации (реальная структура и сдвиги ставок - не горизонтальна и не параллельны), она достаточно поучительна с точки зрения демонстрации возможного подхода к хеджированию процентного риска облигациями. В практике его основные положения допустимо применять как на эмпирическом уровне, так и с помощью более сложных моделей.

В этих моделях делаются разные предположения о форме кривой доходности и ее изменениях в будущем. Следовательно, менеджер должен выбрать ту модель, которую он считает самой точной. Интересно, что, как показывают исследования, ***наиболее подходящей оказывается модель иммунизации*** (модель создания искусственной невосприимчивости к риску), которая будет описана ниже, а не более сложные.

Мера чувствительности цены к изменению ставки

Эта мера основана на известном из дифференциального исчисления понятии эластичности, смысл которого состоит в соотнесении относительных изменений зависимой переменной *y* и ее аргумента *x*. Согласно определению *эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительных приростов переменных y и x.*

Если эластичность изменения переменной y при изменении переменной x обозначить $E_x(y)$, то, используя определение производной, получаем, что

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{dy}{dx} \times \frac{x}{y}. \qquad (30)$$

Отсюда видно, что коэффициент эластичности показывает относительное изменение исследуемого показателя под действием единичного относительного изменения влияющего фактора при неизменных значениях прочих факторов.

Для практических вычислений дифференциалы в формуле (30) заменяют на приращение одноименных переменных. Чтобы оценить правомерность такой замены, воспользуемся известной из математического анализа формулой прироста функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) \quad f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x),$$

где $f'(x_o)$ - значение производной в точке x_0, а слагаемое $o(\Delta x)$ - величина высшего порядка малости по сравнению с Δx.

Аппроксимируя в окрестности точки x_0 функцию $f(x)$ линейной зависимостью (касательной):

$$y = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

придем к приближенному равенству

$$\frac{\Delta y}{y_0} \approx \frac{f'(x_0)}{y_0} \times \Delta x = \frac{f'(x_0)x^0}{y_0} \times \frac{\Delta x}{x_0} = E_{x0}(y) \times \frac{\Delta x}{x_0}, \qquad (31)$$

где $E_{x0}(y)$ - эластичность y по x в точке $x = x_0$.

Отсюда, в том числе, получается формула для оценивания нового значения функции в ответ на изменение аргумента (движение по касательной, заменяющее движение по кривой):

$$y \approx (1 + E_{x_0}(y)\frac{\Delta x}{x_0})y_0.$$

Для достаточно малых вариаций аргумента x погрешности вычислений по этим формулам довольно малы и эти приближения дают вполне приемлемые результаты.

Введенный здесь показатель (30) широко применяется в различных направлениях экономического и финансового анализа, для которых эластичность выступает в качества одного из определяющих параметров, например:

- в теории потребления и методе производственной функции - это эластичности спроса и предложения по доходам, ценам и факторам производства;

- в финансовом анализе - эластичность стоимости облигаций по множителю наращения $\mu = 1 + r$.

Опираясь на данный показатель, легко перейти к измерителю чувствительности по ставке r, однако именно он, в силу аналитических и инструментальных удобств, лежит в основе рассматриваемого ниже понятия "дюрация".

Дюрация как мера чувствительности

Рассмотрим последовательность платежей $\{C_1, C_2, ..., C_T\}$, то есть случай, когда деньги поступают в моменты времени 1, 2, .., T. Предположим, что эти платежи неотрицательны. Чтобы иметь возможность работать с неотрицательным потоком платежей, будем заниматься долгом и активом по отдельности.

Запишем текущую стоимость потока платежей, которая, при условии постоянства процентных ставок $\{r_{0t} = r\}$, удовлетворяет следующему соотношению:

$$P = \sum_{t=1}^{T} C_t(1+r)^{-t} = \sum_{t=1}^{T} C_t\mu^{-t}, \qquad (32)$$

где коэффициент

$\mu = 1 + r$.

Согласно определению (30) интересующий нас показатель эластичности

$$\underset{\mu}{E}(P) = \frac{dP}{d\mu} \times \frac{\mu}{P}.$$

Тогда можно записать:

$$\frac{dP}{d\mu} = -\sum tC_t\mu^{-t-1}$$

и, следовательно,

$$E_\mu(P) = -\sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t\mu^{-t}}{P} = -\sum_{t=1}^{T} t\frac{Ct}{P(1+r)^t} \qquad (33)$$

Формально правая часть равенства является эластичностью приведенной стоимости потока по отношению к (1 + r).

Например, если поток платежей представлен выплатами по купону и номинальной стоимостью облигации F, то есть Ct = C, при t < T и Cт = C + F, то данный показатель будет характеризовать процентное изменение цены облигации по сравнению с процентным изменением (1 + r).

При необходимости значение показателя (33) можно пересчитать в числовую характеристику чувствительности на процентную ставку r. В самом деле, эластичность

$$E_r(P) = \frac{dP}{dr} \times \frac{r}{P} = \frac{dP}{dr} \times \frac{(r+1)}{P} \times \frac{r}{(r+1)} = \frac{r}{(r+1)} \times \left(\frac{dP}{d\mu} \times \frac{\mu}{P}\right)$$

то есть

$$E_r(P) = \frac{r}{(r+1)} \times E_\mu(P).$$

Если в формуле (33) отвлечься от знака "минус", то придем к определению показателя дюрации:

$$Д = -E_\mu(P) = \sum_{t=1}^{T} t \frac{C_t}{P(1+r)^t}. \qquad (34)$$

Отсюда и из соотношения между эластичностями $E_r(P)$ и $E_\mu(P)$ можно заключить, что платежные потоки с одинаковой дюрацией сходным образом откликаются на изменения процентной ставки и несходным, если их дюрации различны. Так, облигации, имеющие равные сроки погашения, но неодинаковые купонные выплаты, могут по-разному реагировать на процентный риск, то есть курсы этих облигаций могут меняться по-разному при заданном изменении процентной ставки.

Чтобы перейти к прогнозным оценкам ценовых изменений, вызванных сдвигами ставки, воспользуемся формулами предыдущего раздела. Подчеркнем, что нужные нам соотношения выводились с помощью линейных приближений, которые действуют при достаточно малых диапазонах изменения влияющей переменной. Вводя необходимые переобозначения, перепишем формулу оценивания (31) в требуемых здесь терминах:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -Д \frac{\Delta r}{1+r} \qquad (35)$$

Другими словами, процентное изменение текущей стоимости потока платежей (облигации) приблизительно равно произведению дюрации на процентное изменение величины "единица + ставка" и противоположно по знаку.

Пример. Рассмотрим облигацию, которая в настоящий момент продается за 1000 долл. при доходности 8%. Пусть ее дюрация составляет 10 лет. Насколько измениться цена этой облигации при увеличении доходности до 9 %.

Пользуясь формулой (35), спрогнозируем относительный прирост:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -10 \times \frac{0{,}09 - 0{,}08}{1{,}08} = -0{,}0926,$$

что в пересчете на проценты дает:

$$\frac{\Delta P}{P} \times 100\% \approx -10 \times \frac{9-8}{1{,}08}\% = -9{,}26\%.$$

Итак, мы выяснили, что рост доходности на 1% приведет к падению курса порядка 9,26%. В результате измененная цена облигации приблизится к значению:

$$P \approx (1 - 0{,}0926)1000 = 907{,}4 \text{ долл.}$$

Отметим, что приближение (35) безразлично к полярности изменения ставки r в том смысле, что дает равные по абсолютной величине оценки относительных изменений цены Р в ответ на одинаковые плюсовые или минусовые перепады уровня процента. Это заключение опирается на линейное приближение функции с точностью до первого порядка малости.

Более точные выводы получаются исходя из разложения функции f(x) в ряд Тейлора вплоть до квадратичных членов:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$$

или, в принятых здесь обозначениях,

$$P(r) = P(r_0) + P'(r_0)\Delta r + \frac{P''(r_0)}{2}\Delta r^2 + o(\Delta r^2). \qquad (36)$$

Из формулы (32) видно, что $P'(r) < 0$, $P''(r) > 0$. Поэтому функция P(r) - строго выпуклая и в силу ее свойств уменьшение доходности облигаций ($\Delta r < 0$) приведет к росту ее курса на величину, большую, чем соответствующее падение курса при увеличении доходности на ту же величину. Подобная асимметрия, однако, не улавливается маржинальным анализом, основанным на линейном приближении и показателе дюрации.

Это, в частности, хорошо видно из графической иллюстрации, приведенной на рис. 8 ($P^+ - P_0 > P_0 - P^-$; $\alpha - P_0 = P_0 - \beta$).

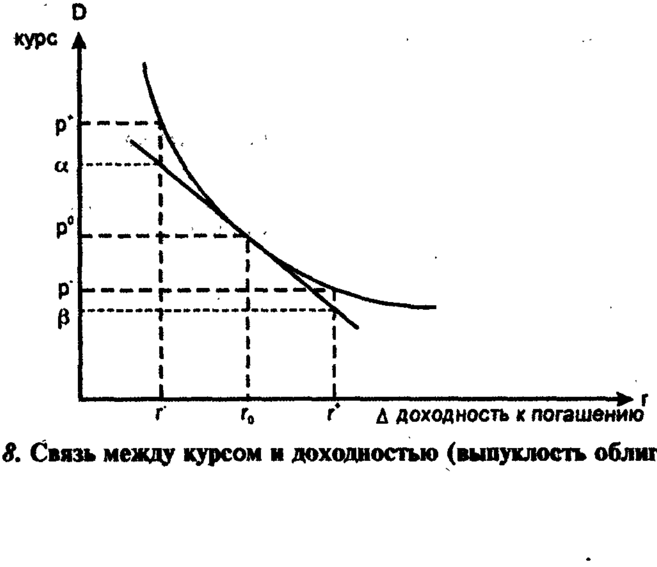


Рис. 8. **Связь между курсом и доходностью (выпуклость облигаций)**

Пример. Для сосредоточенного платежа текущая стоимость получается дисконтированием на текущую дату, то есть $P = \frac{C_t}{(1+r)^t}$. Поэтому дюрация (34) для такого платежа совпадает с датой его проведения: Д = t.

Отсюда, в частности, видно, что для t-годичной бескупонной облигации однопроцентный прирост коэффициента μ порождает t-процентное относительное удешевление ее цены.

Переходя к эластичности по ставке, получим, что

$$E_r(P) = -\frac{r}{r+1}t, \tag{37}$$

то есть относительному повышению ставки в 1 % соответствует относительное падение цены в $\frac{r}{r+1}t(\%)$.

В нашем случае

$$\frac{\Delta\mu}{\mu}100\% = \frac{\Delta r}{1+r}100\% = 1\%,$$

и поэтому

$$\frac{\Delta r}{r}100\% = \frac{1+r}{r}(\%),$$

В ответ на такое изменение уровня процента r эластичность (37) изменится в той же пропорции. Это означает, что она составит те же t(%), которые были получены при рассуждении по формуле (34).

Пусть t = 3, r = 1. При этих значениях однопроцентный прирост μ наводится двухпроцентным изменением ставки $\left(\frac{1+r}{r} = 2\right)$ и отрицательный прирост теоретической цены составит 3% (t = 3).

Дюрация как средний срок платежа

Но есть и другое, отличное от меры чувствительности, толкование понятия "дюрация" (duration - длительность). Чтобы прийти к нему, перепишем определение дюрации (34) в следующем виде:

$$Д = \sum_{t=1}^{T} t\omega_t, \tag{38}$$

где

$$\omega_t = \frac{C_t}{P(1+r)^t}. \tag{39}$$

Поскольку

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{C_t}{(1+r)^t}=P,$$

то

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{C_t}{P(1+r)^t}=\sum_{t=1}^{T}\omega_t=1.$$

Чтобы получить обещанную интерпретацию, сопоставим потоку платежей $\left\{C_t, t=\overline{1,T}\right\}$ искусственную случайную величину Q, равную дате платежа: ее возможные значения соответствуют последовательным моментам прихода датированных выплат. Таким образом, случайная величина Q принимает целочисленные значения от 1 до T. Вероятность каждого из этих значений определим той долей ω_t, которую вносит отдельный платеж C_t потока в приведенную стоимость P всего потока:

$$P(Q=t)=\omega_t. \qquad (40)$$

В основе такого назначения лежит достаточно распространенное в экономическом и финансовом анализе рассуждение, опирающееся на классическое определение вероятности (отношение числа благоприятствующих исходов к их общему числу). В нашем случае это позволяет прибегнуть к следующим доводам в пользу определения (40).

В цене потока P присутствуют все дисконтированные из разновременных выплат $\{C_t\}$ рубли. Проведем следующий мысленный эксперимент. Ссыплем все деньги P в один большой кошелек и, крепко зажмурившись, вытянем из него наугад одну рублевую монету. Число исходов, благоприятствующих тому, что эта монета относится к платежу C_t, равно полному числу таких монет и составляет величину:

$$m=\frac{C_t}{(1+r)^t}.$$

В свою очередь, общее число возможных исходов, очевидно, совпадает с количеством всех монет:

$$n=P.$$

Поэтому за оценку вероятности P (Q = t) естественно принять частоту появления рубля, датированного t-ым платежом:

$$P(Q=t)=\frac{m}{n},$$

что и совпадает с определением (39).

Введем обобщенную характеристику потока платежей $\{C_t\}$, равную псевдослучайной величине Q, со следующим рядом распределения:

Q	1	2	...	t	...	T
P	ω_1	ω_2		ω_t		ω_T

Найдем математическое ожидание и дисперсию этой величины.

$$E(Q) = 1 \times \omega_1 + 2\omega_2 + \ldots + T\omega_T = \sum_{t=1}^{i} t\omega_t .$$

$$\sigma^2(Q) = E(Q^2) - E^2(Q) = \sum_{t=1}^{T} t^2\omega_t - (\sum_{t=1}^{T} t\omega_t)^2 .$$

Отсюда и из (38) следует, что

$$E(Q) = Д, \sigma^2(Q) = E(Q^2) - Д^2. \qquad (41)$$

Таким образом, величину дюрации можно интерпретировать как среднюю длительность платежа в потоке $\{C_t, t = \overline{1,T}\}$, иначе говоря, эластичность (34) равна средневзвешенному времени выплат с весами ω_i. Отсюда следует, что при прочих равных, например для потоков с одинаковыми текущими стоимостями, преобладание более ранних платежей уменьшает дюрацию, в то время как "тяжелые хвостовые" выплаты приводят к ее росту.

Пример. Рассмотрим два потока платежей A и B с перераспределением денежных поступлений на начало и соответственно конец платежного периода.

A = (1600, 400, 100), B = (100, 400, 1600)

Пусть для арифметической простоты денежная оценка времени r = 0 и, следовательно, текущие стоимости (ТС) этих потоков будут одинаковы:

ТС(A) = ТС(B) = 2100.

Для каждого потока имеем следующие ряды распределения:

Q(A)	1	2	3
ω(A)	1600/2100 = 16/21	400/2100 = 4/21	100/2100 = 1/21

и

Q(B)	1	2	3
ω(B)	100/2100 = 1/21	400/2100 = 4/21	1600/2100 = 16/21

Откуда найдем дюрацию, или среднюю срочность платежа, по каждому из потоков:

$$Д(A) = 1 \times \frac{16}{21} + 2 \times \frac{4}{21} + 3 \times \frac{1}{21} = \frac{27}{21},$$

$$Д(B) = 1 \times \frac{1}{21} + 2 \times \frac{4}{21} + 3 \times \frac{16}{21} = \frac{57}{21}.$$

Таким образом, дюрация потока с прогрессирующими выплатами существенно перекрывает дюрацию последовательности регрессивных платежей:

$Д(B) \approx 2,1\ Д(A)$.

Очевидно, что введенные выше характеристики дюрации (эластичность, средний срок платежа) применимы также и к распределенному потоку задолженностей с той лишь разницей, что в каждом таком потоке даты выплат, как правило, жестко закреплены.

Дюрация как средний срок погашения

Рассмотрим портфель, составленный из разнопериодных $(t = \overline{1,T})$ бескупонных облигаций с погашением по номиналу $\left\{C_t, t = \overline{1,T}\right\}$.

Финансовая рента хозяина такого портфеля представляет собой поток фиксированных платежей. Эти платежи можно мыслить как купонные выплаты, а сам портфель - трактовать как некий купонный контракт с периодической выплатой процентов $\{C_1, C_2, ..., C_{T-1}\}$ и погашением Ст. Очевидно, что варьируя возрастную структуру облигаций, можно устроить портфель таким образом, чтобы с точностью до штучного числа включаемых бумаг воспроизвести любой, наперед заданный, поток.

Учитывая разновременность погасительных сроков, придадим времени до погашения форму целочисленной случайной величины Q с множеством возможных значений от 1 до T. Начальная стоимость портфеля P определяется приведенный ценой всех входящих в него облигаций и вычисляется по формуле (32), а динамика стоимости - последовательными значениями $\left\{P_t = P(1 + r)^t, t = \overline{1,T}\right\}$.

Очевидно, что эти суммы есть не что иное, как финансово эквивалентные начальному капиталу размеры погашения в момент $t = \overline{1,T}$. Таким образом, для произвольной даты $t \le T$ полный размер погашения равен P_t, а его фактическое исполнение ограничивается погасительным взносом C_t. Отсюда, пользуясь, как и раньше, "принципом" кошелька, можно приписать значению t случайной величины Q вероятность, равную отношению C_t/P_t, что совпадает с (39).

В результате по правилам теории вероятностей получим, что для пакета бескупонных облигаций среднее время погашения совпадает с дюрацией генерируемого эти пакетом потока выплат {Ct}:

$$E(Q) = Д = \sum_{t=1}^{T} t\omega_t .$$

В этом случае дисперсию σ^2 (Q), определяемую формулой (41), можно трактовать как меру риска: чем она ниже, тем более сконцентрированы моменты погашения вокруг среднего значения. И наоборот, при расползании дисперсии вес удаленных от ожидаемой даты выплат увеличивается.

Разнообразие относящихся к дюрации терминов можно продолжить и в зависимости от характера приложений относиться к этому понятию как к характеристике среднего срока жизни облигаций или - среднего срока, через который инвестор вернет деньги, и т. д.

Показатель дюрации можно рассматривать как еще одну, наряду с наращенной суммой и современной величиной, практически важную обобщающую характеристику потока платежей.

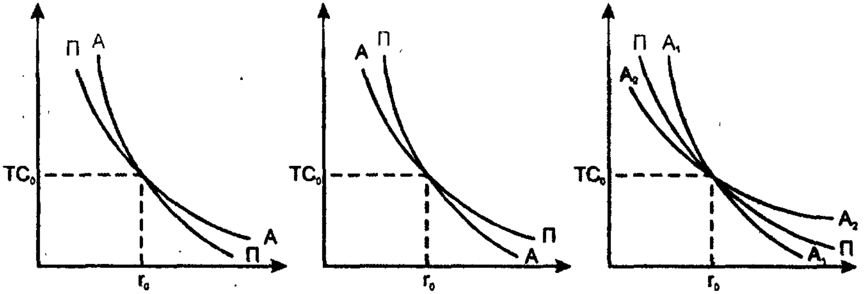
Так, для потока срочных уплат, идущих на погашение кредита, росту его дюрации соответствует перераспределение денежной нагрузки на отдаленные сроки. Однако в условиях неопределенности будущей процентной ставки это, в силу возрастания эластичности, чревато возможными убытками. Поэтому окончательный выбор требует разумного компромисса между двумя противостоящими критериями: оттянуть сроки выплат и избежать чрезмерного риска.

2.2. Иммунизация

Введение понятия дюрации привело к развитию техники управления пакетами облигаций, которая известна под названием **иммунизация** (immunization). Именно эта техника позволяет портфельному менеджеру быть относительно уверенным в получении ожидаемой суммы дохода. Иначе говоря, когда портфель сформирован, он защищен от нежелательных эффектов, связанных с возможными в будущем колебаниями процентных ставок.

Связь иммунизации с выпуклостью

Поясним эту связь с помощью следующих картинок.



а) полное хеджирование б) неполное хеджирование в) отсутствие хеджирования

Рис. 9. **Связь взаимной кривизны финансовых потоков с их иммунизацией к риску процентной ставки**

Здесь выпуклые кривые ПП и АА - графики текущих стоимостей потока пассивов и потока активов, изображенные в осях "доходность - цена". Для базового процента r_0 в каждом рассматриваемом варианте (а), (б), (в) текущая стоимость актива равна текущей стоимости долга:

$TC(A) = TC(\text{П}) = TC_0$.

Поэтому, если уровень процента сохранится ($r = r_0$), для закрытия долга можно использовать любой из выделенных на рис. 3 активов.

Другое дело, если мы станем принимать во внимание возможные изменения этого уровня. Тогда представленные на "триптихе" платежные ситуации будут характеризоваться последовательным снижением противорискового иммунитета по мере перехода от оптимального начала (а) через приемлемое продолжение (б) к непригодному варианту (в).

В случае (а) актив перекрывает обязательства: у разницы ТС (А) - ТС(П) в точке r_0 окажется минимум. В этом варианте мы имеем полное хеджирование.

В центральной части кривая пассива будет выше: обнулению разности текущих стоимостей ТС(А) - ТС(П) в точке r_0 отвечает максимум. Вместе с тем, поскольку в этой точке кривые касаются, то, как следует из линейной части формулы (36), недостача П - А будет иметь тот же порядок малости, что и Δr^2.

Это, хоть и хуже, чем в предыдущем случае, но все же терпимо. В этом смысле можно сказать, что имеет место неполное хеджирование.

Все кривые последнего графика пересекаются. Из-за отсутствия общей касательной расхождения между ними будут зависеть, в силу соотношения (36), не только от квадратичных членов Δr^2, но и от линейных уклонений $\Delta r = r - r_0$. Таким образом, наш портфель, составленный из актива и долга, оказался чувствительным к риску процентной ставки, то есть не иммунизирован к ее изменениям.

Итак, если процентная ставка измениться, то *в <u>случае (а)</u>* ничего плохого не произойдет. Нам будет только выгоднее: при всех $r \neq r_0$ мы полностью закроем долг и в силу преимуществ кривой АА по выпуклости получим еще, хоть и незначительный, но все же доход (А - П > 0).

<u>Для промежуточного варианта (б)</u> смесь финансовых потоков А и П нечувствительна к малым вариациям процентной ставки. Потому ее изменение хоть и ухудшает нашу платежеспособность, но столь незначительно, что этим можно пренебречь.

Если мы имеем дело с небольшими величинами Δr, то выполнение двух правил:

1) ТС(А) = ТС(П),

2) касание в точке r_0

достаточно, чтобы в первом приближении *считать наш портфель иммунизированным.*

Этим мы заведомо исключаем неблагоприятную ситуацию 9в) с риском неплатежей для кривых A_1A_1 и A_2A_2 справа и соответственно левее точки r_0.

Допустим, что такое положение нас не устраивает и мы хотим достичь ***полного хеджирования***. Тогда следует сформировать финансовый поток активов таким образом, чтобы зависимость его цены от процентной ставки была более выпуклой, чем для потока пассивов.

Меру выпуклости финансового потока характеризует вторая производная. В нашем случае при базовом значении $r = r_0$ текущие стоимости ТС(А) и ТС(П) равны. Потому сформулированное требование приводится к тому, чтобы при $r = r_0$ вторые производные в разложениях текущих стоимостей (36) удовлетворяли следующему условию:

3) ТС''(А) > ТС''(П).

Теорема об иммунитете

Перейдем на более удобную символику, отражающую зависимость вторичных потоковых характеристик от уровня доходности r. Для этого переобозначим текущие стоимости через α (r) по активам ($\alpha(r)$ = ТС(А)) и через $\pi(r)$ для потока долгов ($\pi(r)$ = ТС(П)). Теорема об иммунитете (впервые сформулирована американским экономистом Полом Самуэльсоном) утверждает, что финансовый портфель можно иммунизировать к изменениям процентной ставки, выравнивая для этого текущие стоимости и дюрации составляющих его активов и задолженностей.

Проверим, так ли это. Согласимся с рекомендациями теоремы и, исходя из сложившейся процентной ставки r_0, подгоним наши активы к имеющимся пассивам так, что в точке r_0

$$\alpha (r_0) = \pi(r_0), Д(А) = Д(П). \qquad (42)$$

Пользуясь определением дюрации (34), перейдем к подробной записи:

$$Д(А) = -E_{1+r_0}(\alpha(r)) = -\frac{\alpha'(r_0)}{\alpha(r_0)}(1 + r_0),$$

$$Д(П) = -E_{1+r_0}(\pi(r)) = -\frac{\pi'(r_0)}{\pi(r_0)}(1 + r_0),$$

Заменяя равенство дюраций через равенство правых частей этих соотношений и имея в виду, что

$$\alpha(r_0) = \pi (r_0) \qquad (43)$$

придем к равенству производных:

$$\alpha'(r_0) = \pi'(r_0). \qquad (44)$$

Отсюда следует, что кривые $\alpha(r)$ и $\pi(r)$ в окрестности точки r_0 совпадают с точностью до $o(\Delta r)$, то есть имеют в этой точке общую касательную

$$f(r) = f (r_0) + f'(r_0) (r - r_0),$$

$$\text{где } f(r_0) = \alpha(r_0) = \pi(r_0), f'(r_0) = \alpha'(r_0) = \pi'(r_0). \qquad (45)$$

Следовательно, разность этих кривых

$$\varphi(r) = \alpha(r) - \pi(r)$$

имеет тот же порядок малости, что и квадрат отклонения Δr.

Поэтому ее график определяется с точностью до параболической зависимости с неопределенным пока направлением (вверх или вниз) ветвей (рис. 10).

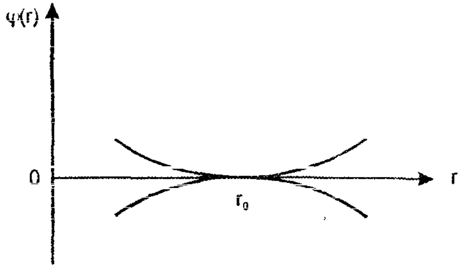


Рис. 10. **График разности текущих стоимостей**

И в том и в другом случае

$\varphi(r_0) = 0,\ \varphi'(r_0) = 0,$

то есть, следуя правилам (42), мы добились того, что составленный нами из актива и долга портфель потерял чувствительность к малым изменениям процентной ставки. Это неплохо, но еще лучше, если у разницы ТС(А) - ТС(П) в точке r_0 окажется минимум (ветви вверх).

Докажем, что для этого нужно добиться того, чтобы дисперсия времени поступления по активам была больше, чем дисперсия времени изъятия по пассивам:

$$\sigma^2 (Q_A) > \sigma^2(Q_П), \qquad (46)$$

где Q_A, $Q_П$ - случайные, точнее псевдослучайные, величины, равные моментам платежа актива и соответственно - по обязательствам.

Распознавание на рис. 10 зависит от знака второй производной $\varphi''(r_0)$: вверху - плюс и минус под осью 0r. Выясним этот знак при условии, что выполняется неравенство (46). Прежде чем перейти к нужным нам производным $\alpha''(r_0)$ и $\pi''(r_0)$, которые определяют знаковость $\varphi''(r_0)$), получим общую формулу дифференцирования текущей стоимости (32) произвольного потока $\left\{C_t, t = \overline{1,T}\right\}$:

$$P'(r) = -\sum_{t=1}^{T} tC_t(1+r)^{-t-1} \text{ и } P''(r) = -\sum_{t=1}^{T} t(t+1)C_t(1+r)^{-t-2}.$$

Отсюда, разделяя обозначения по случайным величинам Q_A и $Q_П$ на их значения τ, λ и соответствующие вероятности υ_τ, u_λ, запишем:

$$\varphi''(r_0) = \alpha''(r_0) - \pi''(r_0) =$$

$$= \frac{1}{(1+r_0)^2}\left\{\sum \tau^2 A_\tau (1+r_0)^{-\tau} + \sum \tau A_\tau (1+r_0)^{-\tau} - \sum \lambda^2 П_\lambda (1+r_0)^{-\lambda} - \sum \lambda П_\lambda (1+r_0)^{-\lambda}\right\}$$

где $\{A_\tau\}$ - платежи по активу, $\{П_\lambda\}$- задолженности.

Откуда, используя обозначения (39) и (45), получим:

$$\varphi''(r_0) = \frac{f(r_0)}{(1+r_0)^2}\left\{\sum \tau^2 \upsilon_\tau(r_0) - \sum \lambda^2 u_\lambda(r_0) + \sum \tau \upsilon_\tau(r_0) - \sum \lambda u_\lambda(r_0)\right\}.$$

Основываясь на вероятностной интерпретации (40), это соотношение можно представить в следующем виде:

$$\varphi''(r_0) = \frac{f(r_0)}{(1 + r_0)^2} \left\{ \left[E(Q_A)^2 - E(Q_П)^2 \right] + \left[E(Q_A) - E(Q_П) \right] \right\},$$

где согласно формулам (41)

$E(Q) = Д$, а $E(Q^2) = \sigma^2(Q) + Д^2$.

Тогда с учетом условий (42), придем к соотношению:

$$\varphi''(r_0) = \frac{f(r_0)}{(1 + r_0)^2} \left\{ \sigma^2(Q_A) - \sigma^2(Q_П) \right\},$$

которое в силу (46) доказывает, что

$\varphi''(r_0) > 0$.

Отсюда следует, что выполнимость условий (42) и (46) достаточна для того, чтобы обеспечить полное хеджирование процентного риска.

Заметим, что в случае рассредоточенного актива и сосредоточенной задолженности условие (46) выполняется автоматически (σ^2 $(Q_A) > 0$, $\sigma^2(Q_П) = 0$). Поэтому для гарантированного покрытия такой задолженности годится любой набор облигаций, согласованный с пассивом по первым двум правилам (42).

И наконец, напомним, что во всех наших рассуждениях предназначаемые для хеджирования активы предполагаются *абсолютно ликвидными*. В случае облигаций это означает возможность получения их денежного эквивалента на любую актуальную для хеджера дату. Требуемые замены облигаций на деньги предполагают наличие развитого вторичного рынка и производятся в сочетании реинвестирования одних бумаг с досрочной продажей (игрой на кривой доходности) для других.

Пример. Не ограничивая общности, рассмотрим простейший случай нулевой процентной ставки: $r_0 = 0$. При такой текущей конъюнктуре долги будут беспроцентны, а облигации станут покупаться и продаваться по одинаковой цене, равной их номинальной стоимости. Из-за возможной нестабильности денежной массы имеется риск процентной ставки, то есть $r < 0$ при избытке денег, $r > 0$ - при их дефиците.

Предположим, что вы обременены обязательством выплатить через два года ($t = 2$) 200 долл. и заинтересованы, вопреки возможным сдвигам процента, во что бы то ни стало расплатиться с вашим кредитором.

Вашим чаяниям, как легко проверить, отвечает, например, портфель из двух бескупонных облигаций с одинаковым номиналом в 100 долл. и временами погашения $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$.

При нулевой доходности цена денег во времени не меняется. А раз так, то и приведенная стоимость портфеля совпадет с суммой номинальных стоимостей входящих бумаг:

$ТС(А) = 100 + 100$

и будет равна текущей цене долга:

$$ТС(П) = 200.$$

Ваш долг уплачивается разово, поэтому его дюрация равна сроку выплаты, то есть

$$Д(П)=2,$$

а дюрация смеси ваших активов, найденная по формулам (38), (39), составит величину:

$$Д(А) = 1\times\frac{100}{200} + 3\times\frac{100}{200} = 2.$$

Установленные равенства текущих стоимостей и соответственно дюраций дают в совокупности условия хеджирования (42) и означают, что вы добились желаемой невосприимчивости (иммунитета) вашего портфеля к изменениям процента.

В качестве цифровой иллюстрации противостояния риску, которое обнаруживает составленный портфель, приведем следующую числовую таблицу:

ставка	ТС(А)	ТС (долг)	Д(А)	ТС(А) - ТС(долг)
-0,25	370, 37	355,56	2,28	14,81
-0,20	320,31	312,50	2,22	7,81
-0,15	280,48	276,82	2,16	3,66
-0,10	248,28	246,91	2,10	1,37
-0,05	221,90	221,61	2,05	0,29
0	200	200	2	0
+0,05	181,62	181,40	1,95	0,22
+0,10	166,04	165,29	1,90	0,75
+0,15	152,71	151,23	1,86	1,48
+0,20	141,20	138,89	1,82	2,31
+0,25	131,20	128,00	1,78	3,20

Поясним ее устройство. В середине первого столбца выделен опорный процент - $r_0 = 0$. Вверх и вниз от него с шагом 0,05 помещены соответствующие этому движению измененные значения процентной ставки. Следующие два столбца отражают текущую стоимость потока активов и текущую стоимость долга. Видно, что текущая стоимость действительно зависит от процентной ставки, - каждый раз она пересчитывается по формуле (32). Это монотонно убывающая зависимость.

Далее - дюрация по активам. Она тоже зависит от уровня процента, потому что веса (39) зависят от коэффициента дисконтирования, то есть от процентной ставки. Табличное значение 2 достигается дюрацией как раз в строке, соответствующей нулевому проценту. Но если теперь взять разность в текущих стоимостях, то станет ясно, что она всегда положительна.

Из того, что первая из сравниваемых альтернатив является активом, а вторая - долгом, получается следующее: хотя при базовом проценте текущие стоимости совпадают (разница равна нулю), тем не менее при отклонении от исходного уровня текущая стоимость актива оказывается больше, чем текущая стоимость долга. Таким образом, во-первых, при базовой процентной ставке долг закрывается активом, во-вторых, если процентная ставка отклонится от базовой, то в результате вы получите добавочно какой-то выигрыш. Это интересное явление основано на понятии дюрации и объясняется превосходящей кривизной графика ТС(А) по сравнению с течением кривой ТС (долг).

Все эти выводы, основанные на разложении Тейлора (36), будут справедливы при условии достаточной малости уклонения Δr с точностью до второго порядка малости.

Определение хеджирующих пропорций

Иммунизированный портфель должен удовлетворять условиям (42). Чтобы добиться этого, надо уметь выравнивать текущие стоимости и дюрации активов со значениями таких же характеристик для долгов. Для простоты пренебрежем целочисленностью решаемых ниже задач и будем считать вполне реальным покупку любой дробной части облигации.

Предварительно изложим некоторые наводящие соображения, основанные на формуле (38). Посмотрим на эту формулу как на способ вычисления дюрации для "колоды" из T бескупонных облигаций с датами погашения $t = 1, 2, .., T$. Дюрация каждой такой бумаги, как и для любого сосредоточенного платежа, совпадает с периодом ее действия ($Д_t = t$), а коэффициенты ω_t, на что указывает формула (39), определяют доли вложения капитала P в облигацию t. Поэтому правая часть в (38) есть не что иное, как взвешенное среднее индивидуальных дюраций.

Рассмотрим "купонный контракт", составленный из тех же облигаций, но уже не поштучно, а в количестве Q_t по каждому их типу.

Очевидно, что независимо от кратности взятых бумаг дюрации соответствующих компонент сохраняются, а доли вложений ω_t по различным направлениям в общем случае поменяются.

По формуле (38), но уже с другими весами

$$\omega_t = \frac{Q_t C_t}{P(t + r)^t} = \frac{Q_t P_t}{P},$$

найдем, что дюрация нашего составного актива

$$Д = \sum \frac{Q_t P_t}{P} \times Д_t,$$

где $P_t = C_t(1 + r)^{-t}$ - текущий эквивалент номинала C_t;

$P = \sum Q_t P_t$ - вложенный капитал;

$Д_t = t$ - дюрация t-ой выплаты.

И в этом случае дюрация "суммы" вычисляется через усреднение дюраций по всем слагаемым.

Перейдем к комбинированию финансовых потоков, когда в качестве m-ой опорной единицы ($m = \overline{1,M}$) выступает последовательность распределенных во времени платежей $\left\{C_t^m, t = \overline{1,T_m}\right\}$, например портфель формируется из купонных облигаций.

Пусть в портфельной совокупности на Q_1 единиц первого актива приходится Q_2, Q_3 и т. д. Q_M бумаг прочих выпусков. Очевидно, что дюрация кратного потока $\left\{Q_m C_t^m, t = \overline{1,T_m}\right\}$ не зависит от растяжения Q_M. Покажем, что и в этом случае дюрация портфеля будет равняться взвешенному среднему дюраций отдельных компонент. С этой целью введем пару искусственных случайных величин: дату портфельного платежа Y и номер портфельной компоненты X. Сроки выплат по каждой компоненте (потоку) m = 1, 2, .., M будем ассоциировать с возможными значениями условной случайной величины - датой потокового платежа. Ее среднее, согласно вероятностному толкованию (41), совпадает с дюрацией выделенного потока, то есть

$$M\left(Y/_{X = m}\right) = Д_m, \tag{47}$$

где $M\left(Y/_{X = m}\right)$ - условное математическое ожидание случайной величины Y при условии, что реализованное значение случайной величины X равно m.

По правилам действия с условными случайными величинами:

$$M(Y) = M[M\, Y/_X].$$

Здесь M(Y) - средняя дата платежа (ее математическое ожидание) по всей совокупности значений случайной величины Y, то есть дюрация портфеля в целом, а правая часть - сумма взвешенных по их вероятностям P(X = m) значений $M\left(Y/_{X = m}\right)$. В результате можно записать, что

$$Д = \sum_{m=1}^{M} P(X = m) \times M\left(Y/_{X = m}\right). \tag{48}$$

В качестве оценок фигурирующих в этой сумме вероятностей естественно принять частоту υ_m, с которой попадается дисконтированный рубль из потока m кратности Qm в текущей стоимости P всего портфеля, то есть

$$P(X = m) = \frac{Qm\sum C_t^m (1 + r)^{-t}}{\sum Qm \sum C_t^m (1 + r)^{-t}},$$

или с точностью до нумерации:

$$\upsilon_m = \frac{QmPm}{\sum QmPm} = \frac{QmPm}{P}.$$

Подставляя эти вероятности в соотношение (48), придем, с учетом замены (47), к уже знакомому нам по частным случаям разложению дюрации:

$$Д = \sum_{m=1}^{M} \upsilon_m Дm, \qquad (49)$$

где Дm - дюрация m-ой компоненты, а υ_m - ее стоимостная доля.

Это соотношение вместе с условием нормировки

$$\sum_{m=1}^{M} \upsilon_m = 1$$

можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных $\{\upsilon_m\}$. Решая ее, получим пропорции, с помощью которых дюрация портфеля выравнивается до требуемого значения Д. В общем случае, при M > 2, задача имеет не единственное решение. Тогда окончательный выбор остается за хеджером и его оптимизирующими соображениями, например исходя из желания минимизировать риск σ^2 (Q) (41).

Еще одно правило в условиях хеджирования (42) относится к балансу текущих стоимостей. Для его выполнения инвестор должен располагать начальным капиталом в объеме $P = I_0$, где I_0 - директивный уровень текущей стоимости, и распорядиться этим капиталом так, чтобы объем вложений по каждой альтернативе составлял величину:

$$I_m = \upsilon_m I_0, m = \overline{1, M}.$$

Покажем, как можно использовать установленные свойства для решения практических задач. Для этого приведем два примера, во-первых, на получение ожидаемой суммы дохода и, во-вторых, на купирование (покрытие) задолженности.

Пример. Предположим, что инвестор может воспользоваться двумя различными выпусками - А и В. Облигации А имеют период созревания 3 года, их рыночная цена составляет 950 долл., номинал - 1000 долл., годовой купон - 80 долл. Облигации В имеют период созревания 1 год, рыночную цену - 973 долл., номинал - 1000 долл. и купон 70 долл.

Действующие рыночные цены наводят процентную ставку, которую с достаточной для наших целей точностью можно считать равной 10 %:

$$TC(A) = \frac{80}{1,1} + \frac{80}{(1,1)^2} + \frac{1080}{(1,1)^3} = 950,87 \approx 950,$$

$$TC(B) = \frac{1070}{1,1} = 972,72 \approx 973.$$

Поэтому для удобства расчетов примем и в том и в другом случае обещанную ставку r за 10%. Предположим также, что инвестор хотел бы вложить деньги сроком на 2 года.

Если в эти 2 года на кредитном рынке не произойдет никаких изменений, вкладчик получит одинаковый результат от инвестиций в облигации А с их последующей продажей через 2 года или от двукратного последовательного вложения денег в облигации В, то есть реинвестированием по прошествии года. Он также может купить оба выпуска в любых пропорциях. Однако при изменении рыночной ситуации за всем этим стоят возможные потери.

Если до окончания двухлетнего срока процентные ставки по гарантированным бумагам поднимутся, то есть повысится спрос на деньги, инвестор вынужден будет продать облигации А по более низкой цене, чем при стабильном рынке, а значит, понесет убытки. Наоборот, при падении спроса на кредит в течение первого года инвестор не сможет реинвестировать деньги в облигации В с той же высокой 10%-й ставкой.

Иммунизация позволяет найти такие пропорции между А и В, которые дают возможность компенсировать одни потери за счет других приобретений. Обозначая искомые пропорции через υ_A и υ_B, получим следующую систему уравнений для их определения:

$$\begin{cases} \upsilon_A + \upsilon_B = 1, \\ \upsilon_A Д_A + \upsilon_B Д_B = 2. \end{cases} \qquad (50)$$

Дюрацию облигации А подсчитаем по формулам (38), (39), подставив в них необходимые для этого данные:

$$Д_A = \frac{1}{950}\left(1 \times \frac{80}{1{,}1} + 2\frac{80}{1{,}21} + 3\frac{1080}{1{,}33}\right) = 2{,}78 \text{ (года.)}$$

Для облигации В все выплачивается в конце года, поэтому $Д_B = 1$ году.

В результате система (50) запишется в виде:

$$\begin{cases} \upsilon_A + \upsilon_B = 1, \\ 2.78\upsilon_A + \upsilon_B = 2. \end{cases}$$

Откуда можно получить, что

$\upsilon_A = 0{,}56$, $\upsilon_B = 0{,}44$.

Приобретая облигации в этих пропорциях, инвестор гарантированно получит двухгодовой доход в размере не менее 10% от всей затраченной суммы.

Допустим, что предназначенный для вклада капитал составляет 10500 долл. Распределяя его в заданных пропорциях, получим 5880 долл. для А и 4620 долл. для В.

Отсюда, с учетом штучности товара, придем к приближенному ответу: купить 6 облигаций А и 5 облигаций В. Нетрудно подсчитать, что сдача от первой покупки составит 180 долл. Суммируя их с 4620 долл. и добавляя еще 65 долл., получим сумму, достаточную для воплощения целочисленного ответа по В.

Пример. Ваш долг "красен" платежом в 27000 руб. через два года. Возможности ваших вложений ограничены действующей ставкой r = 0,5 и следующими видами облигаций.

Срок действия (год)	Одноопериодные	Двухпериодные	Трехпериодные
Вид облигации (номер)	1	2	3
Номинальная цена (руб.)	1500	4500	6750

Вычисляя текущие стоимости по долгу и для каждой облигации, получим следующую строку "справедливых" цен (руб.):

TC(долг)	TC(1)	TC(2)	TC(3)
$\frac{27000}{(1+0{,}5)^2} = 12000$	$\frac{1500}{(1+0{,}5)} = 1000$	$\frac{4500}{(1+0{,}5)^2} = 2000$	$\frac{6750}{(1+0{,}5)^3} = 2000$

В условиях стабильной (неменяющейся) процентной ставки для покрытия долга можно воспользоваться рынком "времени" и обменять на нем сумму в 12000 руб. на любую доступную комбинацию торгуемых бумаг.

Например, можно купить 12 коротких облигаций (12000 : 1000) и через год реинвестировать вырученные от их погашения 18000 руб. (1500 × 12) в 18 облигаций того же вида (18000 : 1000). Спустя год выкупная цена этих бумаг поднимется до 27000 руб. (1500 × 18), что в точности закроет долг.

С другой стороны, если предпочесть трехпериодные облигации, то денег хватит на то, чтобы приобрести 6 таких бумаг (12000 : 2000). Продав их за год до срока погашения (в конце второго года), получим те же 27000 руб. (6750 × 6/1,5), которые уйдут на обслуживание задолженности.

При желании совместить даты погашения долга и опорных бумаг следует приобрести 6 двухгодичных облигаций (27000 : 4500), которые гасятся через два года и дают их владельцу требуемую для расчетов сумму (4500 × 6 = 27000).

Для получения того же финансового результата можно воспользоваться всеми тремя типами облигаций, комбинируя их в соответствии с условием:

$$1000x + 2000y + 2000z = 12000,$$

где x, y, z - число бумаг каждого вида (короткие, средние, длинные).

Вместе с тем следует иметь в виду, что подобная диверсификация, например x = 2, y = 3, z = 2, усложняет задачу, обременяя инвестора дополнительными хлопотами, связанными в реинвестированием и досрочной продажей.

Изменим ситуацию и допустим, что на рынке облигаций действует риск ценовых колебаний, наведенный процентным риском. Будем, как и в теории, считать, что измененная ставка скажется на значениях всех текущих стоимостей ТС(1), ТС(2), ТС(3).

Очевидно, что, как бы ни повела себя процентная ставка для погашения долга в конце второго периода, достаточно 6 среднесрочных (27000 : 4500) облигаций (даты долга и погашения совпадают). Поэтому, купив 6 двухгодичных бумаг, вы вернете долг.

Если те же 12000 руб. будут вложены в один из оставшихся видов, то по известным (в частности, по предыдущему примеру) причинам вы можете на дату долга не набрать нужной суммы со всеми вытекающими из-за этого неприятностями.

Для хеджирования риска неплатежеспособности воспользуемся методом иммунизации и с его помощью составим защищающий обязательства портфель. Это, кроме того, позволит получить в случае изменившейся ставки активный остаток средств после уплаты долга.

Как следует из правила выравнивания текущих стоимостей, необходимый для иммунизации начальный капитал

Io = ТС(долг) = 12000.

Обозначим искомые доли вложений в короткие и длинные облигации через υ_A и υ_B По условиям примера $Д_A = 1$, $Д_B = 3$.

Тогда второе правило хеджирования - выравнивание дюраций - можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \upsilon_A + \upsilon_B = 1, \\ \upsilon_A + 3\upsilon_B = 2. \end{cases}$$

Откуда найдем, что $\upsilon_A = \upsilon_B = 1/2$. Это означает, что одну половину капитала Io следует вложить в бумаги А, а на оставшуюся половину купить бумаги В. Таким образом, иммунизированный портфель должен состоять из шести коротких и трех длинных облигаций.

Замечание. Рассматривая в качестве покупных цен определенные ранее текущие стоимости, мы, фактически, отождествляем последние с рыночными курсами. Если это так, то рассматриваемый в примере уровень ставки ($r = 0{,}5$) есть не что иное, как доходность к погашению.

Рассмотрим случай, когда задача хеджирования имеет не единственное решение, то есть для иммунизации можно воспользоваться комбинированием из более чем двух видов бескупонных облигаций. Пусть даты их погашения Q = 1, 2, ..., L - 1, L + 1, ..., T и пусть долг характеризуется срочностью L, то есть Д (долг) = L. Обозначим хеджирующие пропорции через $\upsilon_t, t = \overline{1,T}, t \neq L$.

Запишем условие выравнивания дюраций актива и долга:

$$\begin{cases} \sum t\upsilon_t = L, \\ \sum \upsilon_t = 1, \\ \upsilon_1, \upsilon_2, \dots, \upsilon_T \geq 0. \end{cases} \qquad (51)$$

Система (51) обладает многими решениями и поэтому не дает однозначного выбора хеджирующей смеси.

Допустим, что мы заинтересованы в сокращении уклонений от среднего срока платежа, то есть руководствуемся критерием минимума дисперсии (41):

$$\sigma^2(Q) = E(Q^2) - L^2.$$

В результате придем к задаче линейного программирования с целевой функцией:

$$\sum t^2 \upsilon_t, \rightarrow \min \qquad (52)$$

и системой ограничений (51). Покажем, что оптимальному "плану" этой задачи отвечает портфель из двух видов бумаг с ближайшими (до и после долга) датами гашения. Из теории линейного программирования следует, что в оптимальном решении должны присутствовать ровно две ненулевые компоненты, а финансовый смысл задачи подсказывает, что одна компонента будет впереди долга, а вторая - позже. Обозначая искомые неизвестные через υ_{L-S} и υ_{L+K}, преобразуем схему оптимизации (51), (52) к следующему виду:

$$(L - S)^2\upsilon_{L-S} + (L + K)^2\upsilon_{L+K} = \min,$$

$$(L - S)\ \upsilon_{L-S} + (L + K)\ \upsilon_{L+K} = L, \qquad (53)$$

$$\upsilon_{L-S} + \upsilon_{L+K} = 1,$$

$$S = \overline{1, L-1}, K = \overline{1, T-L}.$$

Подставим решение системы ограничений равенств:

$$\upsilon_{L+K} = \frac{S}{S+K}, \ \upsilon_{L-S} = \frac{K}{S+K}$$

в формулу критерия и получим тривиальную оптимизационную задачу:

$$\min\{KS/K \le T - L,\ S \le L - 1\}.$$

Ее ответ

$$K^0 = \min_{K \le T-L} K,\ S^0 = \min_{S \le L-1} S$$

полностью согласуется с устанавливаемым фактом.

Пример. Допустим, что долг следует возвратить через четыре года. Возможности хеджирования процентного риска ограничены пятью видами облигаций со сроками погашения Q = 1, 3, 6, 7, 8.

Согласно полученной выше рекомендации для построения "сфокусированного" портфеля (с минимальным разбросом платежей вокруг среднего срока) следует воспользоваться трех- и шестипериодными облигациями.

Для наших данных уравнения (51) примут вид системы:

$$\begin{cases} 3\upsilon_3 + 6\upsilon_6 = 4, \\ \upsilon_3 + \upsilon_6 = 1, \end{cases}$$

решение которой определяет хеджирующие пропорции

$$\upsilon_3 = \frac{2}{3}, \quad \upsilon_6 = \frac{1}{3}.$$

2.3. Предназначенный портфель и форвардные ставки

Согласование денежных потоков

Если есть возможность подбирать облигации с теми же сроками, что и у долгов, то допустимо использовать процедуру иммунизации специального типа, известную как согласование денежных потоков (cash matching). По этой процедуре облигации приобретаются таким образом, что финансовый поток, получаемый в каждый период, в точности равен ожидаемому оттоку средств за этот же период.

Портфель с согласованными денежными потоками по облигациям часто называют предназначенным портфелем. Заметим, что для такого портфеля нет необходимости реинвестировать поступающие платежи и, значит, отсутствует риск при реинвестировании. Более того, поскольку бумаги не продаются до срока погашения, то отсутствует также риск, связанный с процентной ставкой.

Пример. Допустим, что из средств, полученных по облигациям, ожидается только один платеж. В этой простейшей ситуации портфель будет состоять из бескупонных облигаций со сроком погашения, соответствующим дате планируемого платежа. Так, если необходимый платеж составляет 1000000 руб. по истечении 2 лет, то это достигается покупкой требуемого числа бескупонных облигаций со сроком обращения 2 года.

Однако зачастую согласование денежных потоков обеспечивается не столь просто. Дело в том, что ожидаемые выплаты из капитала могут составлять неравномерную последовательность, для которой не существует бескупонных облигаций. Действительно, часто трудно (а то и невозможно) и довольно дорогостояще в точности согласовать поступающие платежи с требуемыми выплатами.

Форвард на облигацию

Другой возможный способ, позволяющий хеджировать риск процентной ставки, связан со специальным финансовым инструментом - форвардным контрактом на облигацию. В общем случае ***форвардный контракт*** *является обязательством покупки или продажи какого-то (реального или финансового) актива в определенный момент в будущем и по оговоренной цене.* Эта цена называется ***ценой поставки*** и устанавливается в момент заключения контракта.

Однако, поскольку никаких платежей при оформлении контракта не производится, цена поставки устанавливается так, чтобы текущая стоимость форвардного соглашения была равна нулю. В противном случае появилась бы возможность арбитража, при которой либо продавец, либо покупатель бесплатно получил бы финансовый актив с положительной текущей стоимостью.

Для форварда на облигацию основная идея хеджирования состоит в том, чтобы купив облигации с более поздним, чем долг, сроком, продать ее на дату обязательства по цене, которая не зависит от процентного риска и адекватна действующей структуре процентных ставок $\left\{r_{0t}, t=\overline{1,T}\right\}$.

Пример. Пусть последовательность доходностей к погашению имеет плоскую структуру, то есть $r_{0t} = r$, $t = \overline{1,T}$. Найдем цену P будущей поставки T-периодной бескупонной облигации с номиналом F на дату t.

Обозначим через $f_{t,T}$ тот годовой процент, который установится на периоде [t, T]. При известном значении этого показателя интересующая нас величина

$$P=\frac{F}{(1+f_{t,T})^{T-t}}.$$

С другой стороны, это же значение можно получить, нарастив современную стоимость облигации $F/(1 + r)^T$ на дату ее форвардной продажи t.

В результате придем к уравнению с неизвестной $f_{t,T}$:

$$\frac{F}{(1+r)^T}\times(1+r)^t=\frac{F}{(1+f_{t,T})^{T-t}},$$

которое имеет очевидное решение

$$f_{t,T} = r.$$

Таким образом, в простейшем случае, когда кривая доходности горизонтальна, все будущие ставки $\{f_{t,T};\ t=\overline{1,2,\ldots,T-1}\}$ совпадают с базовым уровнем текущего процента r. Как следствие, цена форвардной поставки, дающая нулевую приведенную стоимость контракта, должна равняться дисконтированной на дату продажи t величине номинала F, то есть

$$P=\frac{F}{(1+r)^{T-t}}. \qquad (54)$$

В результате, если нам удастся договориться о форвардной цене (54), то купив T-периодную облигацию по сегодняшнему курсу

$$P_0=\frac{F}{(1+r)^T},$$

мы гарантированно обеспечим себя требуемой суммой P на требуемую дату t.

Заметим, что процентный риск в условиях форвардного соглашения действует в обе стороны, например при снижении уровня процента он благоприятствует покупателю. Поэтому цена (54) является согласованной и, кроме того, исключает возможность арбитража.

Например, если

$$P > \frac{F}{(1+r)^{T-t}}, \text{ то } \frac{P}{(1+r)^t} > \frac{F}{(1+r)^T} = P_0.$$

Откуда вытекает возможность такой стратегии: занять сумму $\frac{P}{(1+r)^t}$ на t периодов, купить бескупонную облигацию за Ро, продать форвард на облигацию и оставить за собой излишек $\Delta = \frac{P}{(1+r)^t} - P_0$.

Спустя срок t поставить облигацию, выручить сумму Р и закрыть ею наращенную величину долга. При этом у нас останутся ранее полученные деньги, которые дадут арбитражную прибыль $\pi = \Delta(1+r)^t = P - \frac{F}{(1+r)^{T-t}}$.

В случае, когда $P < \frac{F}{(1+r)^{T-t}}$,

следует продать облигацию в короткой позиции, инвестировать выручку Ро и купить форвардный контракт. В результате получается безрисковый доход, равный превышению наращенной на вклад суммы над ценой исполнения:

$$\pi = P_0(1+r)^t - P = \frac{F}{(1+r)^{T-t}} - P.$$

В общем случае доходности к погашению $\{r_{0t}\}$ различаются. В связи с этим справедливая контрактная цена находится дисконтированием по форвардной ставке, выводимой из спот-ставок $\{r_{0t}\}$ по правилам финансовой эквивалентности.

Связь между годовой спот-ставкой, двухгодовой спот-ставкой и годовой форвардной ставкой

Форвардная ставка - это тот процент, который мы рассчитываем получить на будущие вложения; в нашем случае - от первого до второго года. Сейчас этого процента еще нет и не будет до тех пор, пока не наступит время его действия. Зато сейчас известны спот-ставки r_{01}, r_{02}. Их исходящие моменты зафиксированы в начальной точке, а сами они рассматриваются как базовые. Нас интересует форвардный (его еще называют ***наведенным***) процент $f_{1,2}$ (рис. 11).

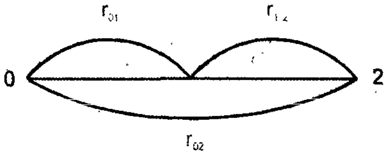


Рис. 11. **Соответствие ставок на первый год, второй год и два года**

Предположим, что мы хотим положить деньги в банк на два года. Существуют два способа размещения денег:

- можно поместить деньги на один год под процент r_{01}, а затем получившуюся сумму с начисленными процентами еще раз положить в банк на один год под процент $f_{1,2}$;
- второй способ поведения состоит в том, чтобы положить деньги сразу на два года под процент r_{02}.

Мы представили два варианта помещения денег на один и тот же срок. Казалось бы, комбинируя их, мы могли бы получать арбитражную прибыль. Но прежде всего должно быть выполнено условие финансовой эквивалентности (безарбитражности) этих способов, известное под названием "сложный процент":

$$(1 + r_{01})(1 + f_{1,2}) = (1 + r_{02})^2. \tag{55}$$

Из этого равенства мы можем рассчитать процент $f_{1,2}$:

$$(1+f_{1,2}) = \frac{(1+r_{02})^2}{(1+r_{01})}. \tag{56}$$

Процент $f_{1,2}$ является наведенным. Он вычисляется по r_{02} и r_{01} и предполагается, что действовать он будет в будущем. Можно сказать, что $f_{1,2}$ есть ставка в коэффициенте дисконтирования, которая используется для определения стоимости, например, доллара через год при условии, что этот доллар будет получен через два года.

При такой трактовке вместо соотношения эквивалентности (55) будем иметь следующее равносильное ему условие-равенство:

$$\frac{1/(1+f_{1,2})}{(1+r_{01})} = \frac{1\,(\text{долл.})}{(1+r_{02})^2}, \tag{57}$$

что может быть переписано в виде (56) или (55).

Пример. Пусть годовая и двухгодовая спот-ставки составляют 7 и 8% соответственно. Это означает, что рынок установил приведенную стоимость 1 долл., который будет выплачен через один год, на уровне 1/1,07 = 0,9346 долл. В свою очередь, в соответствии с двухгодовой спот-ставкой сегодняшняя стоимость одного доллара, получаемого через два года, вычисляется с помощью дисконтирующего множителя $1/(0{,}08)^2$ и равна 0,8573.

Подставляя эти данные в (57), получим следующее уравнение:

$$\frac{0{,}9346}{(1+f_{1,2})} = 0{,}8573,$$

решением которого является $f_{1,2} = 9{,}01\%$.

Найденная ставка позволяет уже сейчас оценить ту стоимость, которую будет иметь "двухлетний" доллар на конец первого года:

$$\frac{1}{(1+f_{1,2})} = \frac{1}{1{,}0901} = 0{,}9173 \text{ (долл.)}.$$

Точно таким же способом эту ставку можно использовать для ценообразования форвардных контрактов: тоже дисконтировать, но уже номинальную стоимость облигации.

Пример. Двухлетняя бескупонная облигация имеет номинал F. Дата поставки по форвардному соглашению - конец первого года. Тогда стоимость форвардного контракта, то есть цена поставки этой облигации за год до ее погашения, должна оцениваться величиной:

$$P = \frac{F}{(1+f_{1,2})}.$$

Форвардная ставка для произвольного будущего периода

Наведенной форвардной ставкой между моментами времени t и T, вычисленной сегодня, называется величина $f_{t,T}$, удовлетворяющая уравнению:

$$(1 + r_{0t})^t(1 + f_{t,T})^{T-t} = (1 + r_{0T})^T. \quad (58)$$

Набор форвардных ставок для произвольных будущих сочетаний t и T полностью определяется последовательностью действующих сейчас процентов $\{r_{01}, r_{02}, \ldots, r_{0t}, \ldots\}$. Так, для форвардной ставки, наведенной между годами t - 1 и t, связь (58) со спот-ставками переписывается в виде:

$$(1 + r_{0t-1})^{t-1}(1 + f_{t-1,t}) = (1 + r_{0t})^t.$$

Мы выяснили, что наряду с заданными процентными ставками существуют и форвардные (наведенные) процентные ставки. Как воспользоваться ими? Если есть возможность применить наведенную процентную ставку, то тем самым мы не подвергаемся риску, связанному с изменением процентной ставки. Например, если в разработке сложной финансовой стратегии используется наведенная процентная ставка, то нас может не беспокоить реальная процентная ставка, которая сложится в будущем. Уже сейчас следует использовать наведенный процент, который получается из соотношения (58).

Список литературы

1. О'Брайен Дж., Шривастава С. Финансовый анализ и торговля ценными бумагами / Пер. с англ. - М., 1995.
2. Ильф И.А., Петров Е.П. Золотой теленок. - М., 1956.
3. Ковалев В.В. Методы оценки инвестиционных проектов. - М., 1998.
4. Малыхин В.И. Финансовая математика. - М., 1998.
5. Меньшиков И.С. Финансовый анализ ценных бумаг. - М., 1998.
6. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. - М., 1994.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1 / Пер. с англ. - М., 1967.
8. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. - М., 1992.
9. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. - М., 1998.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Содержание понятий, вынесенных в название настоящей книги, шире содержания самой книги, которое ограничивается проекцией данных понятий на финансовую область.

В широком смысле **инвестирование** означает вложение денег в настоящем с целью получения будущего дохода: расстаться с меньшей суммой сегодня, чтобы встретиться с большой суммой завтра. Так называемые *реальные* (прямые) инвестиции идут в реальный сектор экономики и расходуются на прирост основных фондов, создание запасов, жилье. Из прочих разновидностей инвестиций отметим затраты на научные исследования, разработки, инновации, а также вложения в человеческий капитал.

Принимаемые по этим направлениям инвестиционные решения предприятий направлены на рост их производственных возможностей, что в перспективе дает увеличение объемов выпуска и финансовых поступлений. Для изучения подобных связей в экономической теории параллельно описанию динамики фондов применяют метод производственной функции и модели потребления. Получаемые при этом выводы расширяют научные представления по целому ряду узловых проблем:

- каким образом объем выпуска за данный период распределяется между текущим и будущим потреблением;
- какова роль инвестиционной активности предприятий в определении уровня производства и безработицы на макроуровне;
- как влияют инвестиции на долгосрочный экономический рост.

В отличие от реальных, инвестиции, о которых преимущественно идет речь в данной книге, оседают на финансовом рынке и являются предметом финансовой теории. На микроуровне финансовые инвестиции конкурируют с производственными, и приоритеты существенно зависят от соотношения между ставкой процента и нормой прибыли.

Однако в масштабах всей экономики эти виды вложений скорее дополняют друг друга, нежели соревнуются между собой. Так, средства, поступившие на финансовый рынок от одних (финансовые инвестиции), могут заимствоваться бюджетами других участников и направляться ими в производство (реальные инвестиции). Разумеется, отмеченные взаимодействия не исчерпывают ролевого многообразия заинтересованных сторон (хеджеров, спекулянтов, инвесторов и т. д.), но тем не менее обнаруживают положительную связь роста реальных инвестиций от степени развития институтов финансового инвестирования.

С процессом инвестирования связаны два фактора - **время** и **риск**. Если время - это некоторый параметр, приводящий разноудаленные деньги к общему знаменателю, то риски порождаются неопределенностью будущего и при его "злонамеренной" реализации создается угроза потерь, противоречащих самому духу инвестирования. При этом следует иметь в виду, что с растяжением временного горизонта риски, как правило, растут, и это следует учитывать при сравнении разновозрастных сумм.

Финансовый рынок расширяет бюджетные возможности субъектов экономики, но вместе с тем ввиду свойственной ему нестабильности будущего хода событий может дать и плачевные результаты. Для реальных инвестиций проблемы могут быть приблизительно теми же. В расширительном смысле можно сказать, что в рыночной экономике проклятие риска порождает издержки того же порядка, что и для проклятия размерности в условиях иерархии (командно-административной системы).

В инвестиционной среде проблемы противостояния риску объединяются термином "хеджирование" и решаются с помощью инструментов финансового рынка. Связанные с этим издержки выступают в качестве платы инвестора за возможность получения предопределенного результата. Упуская при этом потенциально возможные положительные всплески ("кто не рискует, тот не пьет шампанского"), хеджирующийся инвестор исключает отрицательные флуктуации и независимо от будущего положения вещей получает предусмотренный им заранее и устраивающий его доход.

Принципы хеджирования, которым следуют на финансовом рынке, могут также быть использованы и используются на товарных рынках. Это и составление портфеля закупок торгово-посреднической фирмы, и "созвучная" задача формирования производственной программы, и ряд других задач. Их, кроме того, привлекают при разработке вариантов перекрестного хеджирования между прямыми и финансовыми вложениями, а также схем (так называемых реальных опционов), применяемых для оценки выбора в связи с инвестиционными проектами, недвижимостью и т. п.

Хеджируемся мы и в обыденной жизни - от наивных и жестоких обычаев наших прапращуров, связанных с жертвоприношениями, до самодиверсификации по Э. Фромму: "Цель рыночного характера - полнейшая адаптация, чтобы быть нужным, сохранить спрос на себя при всех условиях, складывающихся на рынке личностей". Во избежание неудобств в повседневном общении мы зачастую безотчетно эксплуатируем правило отрицательной корреляции, например действуем согласно нравоучению известного англичанина Честерфилда (1694 - 1773): "Хорошие манеры - лучшая защита от дурных манер другого".

Однако вернемся к основной теме. Для расчетливого инвестора шансы на удачливое решение будут тем выше, чем точнее будет его информированность о причинах и следствиях финансового рынка. При совершенной осведомленности о нужных параметрах необходимость хеджироваться отпадает и альтернатива выбора однозначно определяется с помощью известных методов детерминированной финансовой математики. Другая крайность - полное незнание, в том числе из-за действия "беспричинной" случайности, приближает деятельность на фондовом рынке к игровым забавам казино.

В реальности субъекты рынка ценных бумаг всегда располагают определённой информацией, которую они извлекают из деловой литературы, своего прошлого участия и складывающихся во внешней среде условий. Продавать или покупать, по какой цене, когда, на какой срок, хеджировать или нет - вот краткий список основных вопросов, которые можно отнести как на область портфельного инвестирования, так и на прочие сегменты финансового рынка. Для их разрешения эмпирическое инвестирование накопило множество приёмов, массовое следование которым может и порой приводит к результатам, прямо противоположным ожидаемому.

В плане объяснения подобных явлений значительный интерес представляет *концепция рефлексивности*, предложенная Дж. Соросом в его монографии "Алхимия финансов". Использование механизма рефлексивности в соединении с *финансовой экстрасенсорикой* принесло ему миллиарды долларов и сделало финансовую теорию экспериментальной наукой.

Критикуя модели случайного блуждания, уравнивающие шансы каждого отдельного участника на то, что его показатели окажутся выше или ниже средних, автор концепции выявляет неформализуемую неопределенность, порождаемую действием человеческого фактора: инвестор не может полностью познать систему, частью которой является он сам. Например, решения, принимаемые по прогнозам котировочных ситуаций, могут приводить к состояниям, отличным от априорных оценок.

Таким образом, предпочтения участников финансового рынка вносят элемент неопределенности, и при некоторых, особых обстоятельствах эта неопределенность становится существенной. Возможны случаи, когда оказываемые предпочтения меняют фундаментальные условия, и тогда рыночные котировки следуют по особому пути и сами становятся частью этих условий. Отсюда понятно, что работоспособность точных методов рассчитана на состояния, в которых значимостью периодически действующей рефлексивности можно пренебречь, и поэтому задачу выявления этих состояний (периодов безрефлексивного развития) следует рассматривать как одно из важных направлений финансовой теории и практики.

Говоря об "Алхимии финансов", необходимо отметить, что она в отличие от финансовой математики основывается на методологии общественных наук, понимаемой, например, в смысле социологического повествования А. Зиновьева "На пути к сверхобществу" или непосредственно по Дж. Соросу: "Когда в событиях действуют мыслящие участники, причинно-следственная связь не ведет напрямую от факта к факту, а проходит от факта к восприятию и от восприятия к факту".

Еще одно направление - *эмпирическая финансовая математика*: сбор и обработка результатов наблюдений о состояниях и характеристиках финансового рынка. Выводимые в ходе статистического или нейронного моделирования зависимости носят информационный характер и не вскрывают внутреннего устройства изучаемых явлений. Тем не менее они дают пищу для получения злободневных прогнозов и для разработки на этой основе эффективных финансовых операций. Вместе с тем статистический барометр отказывается работать при мажорных проявлениях фактора рефлексивности (двусторонней обратной связи) и не предупреждает о резких перепадах биржевой погоды, о взрывном характере движения цен вблизи нижней границы или вблизи пикового момента.

В этом смысле нейротехнологии обладают интеллектуальными преимуществами и расширяют возможности продуктивных вычислений для нестандартных ситуаций и в сферах, относящихся к области человеческого мышления: способности обучаться на некотором множестве примеров, обобщать прецеденты для новых случаев, выявлять существенные свойства и неочевидные закономерности в обрабатываемых данных и т. д.

В основе их применения лежит понятие искусственной нейросети, условно имитирующей сложившиеся к настоящему времени представления об анатомии мозга и элементарных функциях биологических нейронов. Подобно теоретической статистике, специальная область математики - *нейроматематика* - разрабатывает алгоритмы настройки и обучения таких сетей для решения определенных классов задач. Предлагаемые на рынке программных продуктов пакеты, специализированные на нейросетевых принципах, позволяют их пользователю справиться с проблемами идентификации, для которых традиционные статистические методы оказываются недостаточными, в том числе для трудноформализуемых ситуаций в финансовой области.