Г. И. Фалин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ И ПЕНСИОННЫХ СХЕМ

АНКИЛ®

СЕРИЯ "БИБЛИОТЕКА АКТУАРИЯ"

Г.И. ФАЛИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ И ПЕНСИОННЫХ СХЕМ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Москва
2002

ББК 65.271я73
УДК 368(075.8)
Ф 19

Фалин Г.И.

Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. — Издание 2-е, переработанное и дополненное. — М.: Анкил, 2002 г. 262 стр.

ISBN 5-86476-194-X

В книге изложены основные математические модели и методы, необходимые для определения характеристик продолжительности жизни, разовых и периодических нетто-премий, страховых надбавок, резервов и т.д. для различных видов страхования и пенсионных схем.

Этот материал в основном соответствует требованиям квалификационного экзамена 150 "Актуарная Математика" Общества Актуариев (США) для лиц, претендующих на звание актуария.

Она предназначена для специалистов страховых компаний и негосударственных пенсионных фондов, занимающихся актуарными расчетами. Кроме того, книга может служить основой годового курса по финансовой и актуарной математике для студентов экономико-математических специальностей. Для понимания материала читатель должен владеть основными понятиями математического анализа и теории вероятностей.

ББК 65.271я73

ISBN 5-86476-194-X

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ко второму изданию

Цель книги - дать простое и сжатое изложение основных математических моделей и методов, необходимых для определения характеристик продолжительности жизни, разовых и периодических премий, страховых надбавок, резервов и т.д. для различных видов страхования жизни и пенсионных схем. Этот материал является важнейшей составной частью актуарной математики, которая наряду с соответствующими экономическими и юридическими дисциплинами образует теоретическую базу страхового дела.

При отборе материала я прежде всего руководствовался требованиями квалификационного экзамена 3 "Актуарные модели" Общества Актуариев (США) для лиц, претендующих на звание Associate of the Society of Actuaries (ASA). Соответственно при написании книги я ориентировался на классическую монографию Bowers et al. Actuarial Mathematics. Itasca, 1986, которая является базовым учебным пособием по этому курсу. Однако, имея в виду отечественную специфику, я не включил в книгу ряд традиционных разделов актуарной математики. Например, из-за отсутствия статистических данных нет смысла развивать теорию пенсионных схем, учитывающих причину выхода на пенсию, а также привязывающих размер пенсии к величине заработной платы перед выходом на пенсию (кроме того, такие схемы и не предлагаются негосударственными пенсионными фондами). С другой стороны, я счел необходимым включить в книгу основные сведения по финансовой математике, требуемые квалификационным экзаменом 2 "Теория процентов, экономика и финансы".

Наряду с упомянутой выше монографией "Actuarial Mathematics", при написании книги я использовал следующие учебники:

A. Neill. Life Contingencies. Heinemann, London, 1977.

H.U. Gerber. Life Insurance Mathematics. Springer-Verlag, 1995.

B. Benjamin and J.H. Pollard. The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics. Oxford, Butterworth-Heinemann Ltd, 1980.

K. Black, H.D. Skipper. Life Insurance. 12th ed. Prentice Hall, 1994.

B. Benjamin. General Insurance. Oxford, Butterworth-Heinemann Ltd, 1977.

J.J. McCutcheon, W.F. Scott. An Introduction to the Mathematics of Finance. Oxford, Butterworth-Heinemann Ltd, 1986.

S.G. Kellison. The Theory of Interest. 2nd ed., Richard D. Irwin,

Inc., 1991.

D.J.P. Hare, J.J. McCutcheon. An Introduction to Profit-Testing. Institute of Actuaries Education Service.

Life Insurance Course on Product Development for Actuaries. Swiss Insurance Training Center, 10-20 November 1997.

Actuarial Management of a Life Office. Swiss Insurance Training Center, 12-22 October 1998.

Г.И. Фалин, А.И. Фалин. Введение в актуарную математику. Москва, Издательство МГУ, 1994.

Г.И. Фалин. Математический анализ рисков в страховании. Москва, Российский юридический издательский дом, 1994.

Г.И. Фалин, А.И. Фалин. Теория риска для актуариев в задачах. Москва, Издательство ф-та ВМиК МГУ, 2001.

Некоторые задачи, приведенные в книге, взяты из квалификационных экзаменов Общества Актуариев.

Книга предназначена для специалистов страховых компаний и пенсионных фондов, занимающихся актуарными расчетами. Она может также служить основой годового курса для студентов экономико-математических специальностей, которые интересуются финансовой и актуарной математикой. Фактически книга написана на основе лекций по актуарной математике, которые я читал (и продолжаю читать) студентам механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Первое издание книги было выпущено МГУ им. М.В. Ломоносова в 1996 г. В настоящем издании добавлена новая глава, посвященная использованию Microsoft Excel для численных актуарных расчетов, более подробно рассмотрены некоторые теоретические темы, добавлены примеры расчетов и исправлены замеченные опечатки.

Для понимания материала, изложенного в книге, читатель должен владеть основными понятиями математического анализа и теории вероятностей, так что книга доступна студентам, получившим базовую математическую подготовку в объеме двух курсов университета.

Я был бы благодарен читателям за советы и пожелания по поводу книги, которые прошу направлять по адресу: Москва 119899, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей; e-mail: falin@mech.math.msu.su.

Г.И.Фалин

1. ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

1.1 Процентные ставки, накопления и приведенная ценность

1.1.1 Эффективная процентная ставка.

Понятие процентов на капитал возникает в следующей простейшей ситуации.

Предположим, что в момент t мы взяли в долг на некоторое время h определенную сумму C руб. Общепринято, что в момент $t+h$ возврата долга мы должны вернуть бо́льшую сумму $C+C'$. Сумма C' является наградой владельцу основного капитала C за то, что его средства использовались другим человеком. Обычно ее измеряют в относительных единицах; величина $i = C'/C$ называется *эффективной процентной ставкой* (effective rate of interest) за рассматриваемый промежуток времени. Соответственно, если мы даем в долг сумму C (например, кладем на свой счет в банке, вносим плату за страховку, вносим взнос в пенсионный фонд и т.д.), то спустя время h мы можем рассчитывать на определенный доход $C' = C \cdot i$ от инвестирования принадлежащего нам капитала C.

На практике процентная ставка i зависит от момента t заключения договора, величины основного капитала C, длительности промежутка h, на который даются в долг деньги: $i = i(t, C, h)$. Однако, чтобы не усложнять изложение, мы будем предполагать, что i не зависит от t и C (излагаемая ниже теория без труда обобщается на случай, когда i зависит от t; зависимость от C также может быть учтена, хотя это гораздо сложнее).

1.1.2 Простые и составные проценты.

Предположим теперь, что сумма C может инвестироваться на два последовательных промежутка времени; пусть $i_k, k = 1, 2$ – эффективная процентная ставка на k–ом промежутке. Существует две схемы исчисления дохода C' на объединенном интервале:

(1) принцип простых процентов (simple interest) предполагает, что проценты начисляются только на основной капитал. Поэтому $C' = Ci_1 + Ci_2$. Соответственно, итоговая процентная ставка $i = C'/C = i_1 + i_2$.

(2) принцип сложных процентов (compound interest) предполагает, что проценты начисляются не только на основной капитал, но и на уже заработанные проценты. Поэтому в конце второго интервала времени основной капитал C вырастет до величины $C + C' = C \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2)$. Соответственно, итоговая процентная ставка i определяется из условия $1 + i = (1 + i_1)(1 + i_2)$, т.е. $i = i_1 + i_2 + i_1 i_2$.

Если инвестор может свободно распоряжаться своими средствами, принцип простых процентов фактически не может существовать: в конце первого промежутка времени инвестор получает сумму $C \cdot (1 + i_1)$ и немедленно инвестирует ее как новый капитал на второй промежуток. Ясно, что в конце второго промежутка инвестор будет располагать суммой $C \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2)$. В этой ситуации использование банком или другим финансовым учреждением принципа простых процентов будет причинять неудобства клиентам, которые будут вынуждены постоянно закрывать и тут же открывать свои счета. Еще хуже то, что они могут инвестировать свои средства на очередной промежуток времени в другой проект. Поэтому в настоящее время общепринято использовать принцип сложных процентов при определении дохода от вложения средств.

1.1.3 Накопления.

Выберем некоторый промежуток времени в качестве единичного (как правило, это будет один год) и предположим, что процентная ставка за этот промежуток равна i. Допустим, что в момент $t_0 = 0$ сумма C инвестируется на n единиц времени. Принцип сложных процентов влечет, что в момент $t_0 + n$ капитал C превратится в сумму

$$C(n) = C \cdot (1 + i)^n. \tag{1.1.1}$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как справедливым образом определить доход на капитал, который инвестирован на время $\frac{n}{m}$. Обозначим эффективную процентную ставку для промежутка $1/m$ через $i_*^{(m)}$. Поскольку на единичный отрезок можно смотреть как на m последовательных отрезков длиной $1/m$ каждый, применяя формулу (1.1.1) мы получим, что

$$C \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i_*^{(m)})^m$$

и поэтому

$$i_*^{(m)} = (1+i)^{1/m} - 1. \tag{1.1.2}$$

Рассматривая отрезок $[0, n/m]$ как n последовательных отрезков длиной $1/m$ каждый и применяя формулы (1.1.1) и (1.1.2), мы получим для суммы $C(t)$, накопленной к моменту $t = n/m$, следующее выражение:

$$\begin{aligned} C(t) &= C \cdot (1 + i_*^{(m)})^n = C \cdot ((1+i)^{1/m})^n \\ &= C \cdot (1+i)^{n/m} = C \cdot (1+i)^t \end{aligned}$$

Поскольку любое действительное число t можно сколь угодно точно приблизить рациональными числами, предполагая непрерывность функции $C(t)$, мы получим, что формула

$$C(t) = C \cdot (1+i)^t \tag{1.1.3}$$

верна для любого $t > 0$.

Формула (1.1.3) описывает процесс накопления средств в ситуации, когда принят принцип сложных процентов, и является одной из основных формул финансовой математики.

1.1.4 Интенсивность процентов.

Из формулы (1.1.3) следует, что относительная скорость накопления средств

$$\frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{C(t)\Delta t}$$

дается формулой

$$\frac{(1+i)^{\Delta t} - 1}{\Delta t}.$$

Соответственно мгновенная относительная скорость накопления есть

$$\delta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(1+i)^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = \ln(1+i) \tag{1.1.4}$$

Величина δ в финансовой математике называется *интенсивностью процентов* (force of interest). Поскольку

$$i = e^{\delta} - 1, \tag{1.1.5}$$

формулу (1.1.3) для накоплений за время t можно переписать в виде:

$$C(t) = C \cdot e^{\delta t} \tag{1.1.6}$$

1.1.5 Номинальные процентные ставки.

Рассмотрим промежуток времени длиной $1/p$. Если в качестве единицы измерения принят один год, то наиболее интересными являются случаи: $p = 12$ (рассматриваемый промежуток времени равен одному месяцу), $p = 4$ (рассматриваемый промежуток времени равен одному кварталу), $p = 2$ (рассматриваемый промежуток времени равен полугодию). Как мы видели в п.1.1.3 (формула (1.1.2)), эффективная процентная ставка $i_*^{(p)}$ за этот промежуток времени есть

$$i_*^{(p)} = (1+i)^{1/p} - 1 = e^{\delta/p} - 1$$

Однако в финансовой математике принято характеризовать доходность вложения средств на промежутке $1/p$ не эффективной (т.е. реальной) процентной ставкой $i_*(p)$, а так называемой *номинальной процентной ставкой* (nominal rate of interest)

$$i^{(p)} = p \cdot i_*^{(p)} \tag{1.1.7}$$

Следует отметить, что номинальная процентная ставка $i^{(p)}$ является лишь удобным способом описания реально применяемой эффективной ставки $i_*^{(p)} = i^{(p)}/p$.

Из формул (1.1.2) и (1.1.5) мы имеем:

$$i^{(p)} = p((1+i)^{1/p} - 1) = p(e^{\delta/p} - 1) \tag{1.1.8}$$

Например, если $i = 20\%$, то $i_*^{(12)} = 1.53\%, i_*^{(4)} = 4.66\%, i_*^{(2)} = 9.54\%$. Таким образом, соответствующие номинальные процентные ставки равны $i^{(12)} = 18.37\%$, $i^{(4)} = 18.65\%$, $i^{(2)} = 19.09\%$.

Иногда величину $i^{(p)}$ называют *номинальной процентной ставкой, выплачиваемой (начисляемой) с частотой p* (nominal rate of interest payable (convertible) $p$thly). Понятие номинальной процентной ставки, а также формулы (1.1.7) и (1.1.2) очень важны при расчете рент, страховых премий, пенсий.

1.1.6 Приведенная ценность.

Предположим, что в момент $t > 0$ в будущем мы должны будем выплатить некоторую сумму C. Какую сумму $C(-t)$ должны мы вложить сейчас (в момент $t_0 = 0$), чтобы к моменту t иметь в точности требуемую сумму C? Как следует из (1.1.3), для этой суммы верно равенство

$$C(-t) \cdot (1+i)^t = C,$$

так что

$$C(-t) = C \cdot (1+i)^{-t} = C \cdot e^{-\delta t} \qquad (1.1.9)$$

Формулы (1.1.3) и (1.1.9) по существу означают, что ценность денег постоянно меняется с течением времени. Например, если эффективная годовая процентная ставка $i = 25\%$, то сумма $C = 500$ руб. в настоящий момент превратится в сумму $500(1+i) = 625$ руб. спустя один год. С другой стороны, $C = 500$ руб. в настоящий момент может быть получено инвестированием $500(1+i)^{-1} = 400$ руб. годом раньше. Если, например, в момент $t_0 = 0$ нам должны вернуть 500 руб, то мы можем согласиться на возврат 400 руб. в момент $t = -1$ (взяв на себя труд поместить их в банк, мы все равно получим в момент $t_0 = 0$ сумму 500 руб). Однако, в момент $t = 1$ мы должны требовать возврата 625 руб (если бы в момент $t_0 = 0$ нам вернули 500 руб, то поместив их в банк, к моменту $t = 1$ мы бы имели 625 руб.).

Таким образом, суммы

(1) 400 руб. в момент $t = -1$

(2) 500 руб. в момент $t = 0$

(3) 625 руб. в момент $t = +1$

в сущности эквивалентны (при фиксированной процентной ставке $i = 25\%$). Это и означает, что ценность денег постоянно меняется с течением времени.

Отсюда следует, что сравнивать, складывать и производить любые другие операции над денежными суммами можно только, если все эти суммы рассматриваются в один и тот же момент времени.

Как следует из (1.1.9), ценность в момент $t_0 = 0$ суммы C в момент $t > 0$ есть $C \cdot (1+i)^{-t} = C \cdot e^{-\delta t}$. Если $t < 0$, то стоимость в момент $t_0 = 0$ суммы C в момент t – это просто сумма, накопленная за время $t' = -t$. Как следует из (1.1.3), эта сумма равна $C \cdot (1+i)^{t'} = C \cdot (1+i)^{-t}$. Итак, вне зависимости от знака t ценность в момент $t_0 = 0$ суммы C в момент t есть

$$P(t) = C \cdot (1+i)^{-t} = C \cdot e^{-\delta t}. \qquad (1.1.10)$$

Величина $P(t)$ называется *современной ценностью* (present value) суммы C в момент t. Иногда употребляется термин современная стоимость, приведенная стоимость и т.д. Приведенная ценность единичной суммы ($C = 1$) обозначается $v(t)$:

$$v(t) = (1+i)^{-t} = e^{-\delta t} \qquad (1.1.10)$$

Величину $v = (1+i)^{-1} = e^{-\delta}$ называют *коэффициентом дисконтирования (учета)* (discount factor). С ее помощью можно переписать (1.1.10) как

$$P(t) = Cv^t \tag{1.1.11}$$

Поскольку начальный момент времени может быть выбран произвольно, ценность C_1 в момент t_1 суммы C_2 в момент t_2 дается формулой: $C_1 = C_2 v^{t_2 - t_1}$. Отсюда следует, что $C_1 v^{t_1} = C_2 v^{t_2}$ – эта формула выражает одинаковую ценность обеих сумм в момент $t_0 = 0$.

1.1.7 Учетная ставка

Предположим, что в момент $t_0 = 0$ мы даем взаймы сумму C. Тогда в момент $t = 1$ нам должны вернуть сумму $C \cdot (1+i)$, которая складывается из двух частей: возврата основного капитала C и процентов на капитал $C' = C \cdot i$.

Сумма $C \cdot i$ в момент $t = 1$, будучи приведенной к моменту $t_0 = 0$, имеет ценность $C \cdot i \cdot (1+i)^{-1}$. Поэтому проценты на капитал могут быть выплачены и заранее, в момент $t_0 = 0$ получения займа. Как следует из приведенных выше рассуждений, эти проценты, выплачиваемые вперед, составляют $d = i/(1+i)$ от суммы займа C. Величина d называется *эффективной учетной ставкой* (effective rate of discount) за единицу времени.

Учетная ставка d может быть выражена и через интенсивность процентов δ и коэффициент дисконтирования v :

$$d = 1 - v = 1 - e^{-\delta}. \tag{1.1.12}$$

Предположим теперь, что сумма $C = 1$ дается в долг на время $1/p$ с заблаговременной выплатой процентов. Как мы видели, эффективная процентная ставка есть $i_*^{(p)} = i^{(p)}/p = (1+i)^{1/p} - 1$. Именно эта сумма должна быть выплачена в момент $t = 1/p$ в виде процентов. Если ее привести к моменту $t_0 = 0$, то в силу (1.1.10) она будет иметь ценность $i_*^{(p)} \cdot (1+i)^{-1/p} = 1 - (1+i)^{-1/p}$. Поскольку $i = d/(1-d)$, для эффективной учетной ставки $d_*^{(p)}$ за время $1/p$ получим формулу:

$$d_*^{(p)} = 1 - (1-d)^{1/p}. \tag{1.1.13}$$

Однако в финансовой математике принято работать не с эффективными (т.е. реальными) учетными ставками за время $1/p$, а с так называемыми *номинальными* (т.е. условными, не существующими реально) *учетными ставками* (nominal rate of discount)

$$d^{(p)} = p \cdot d_*^{(p)} \tag{1.1.14}$$

Из формулы (1.1.13) мы имеем:

$$d^{(p)} = p(1 - (1 - d)^{1/p}) \tag{1.1.15}$$

Величину $d^{(p)}$ называют *номинальной учетной ставкой, начисляемой с частотой p* (nominal rate of discount convertible $p$thly).

Понятие номинальной учетной ставки, а также формулы (1.1.14) и (1.1.15) очень важны при расчете рент, страховых премий, пенсий.

1.2 Оценивание серии платежей. Общая модель детерминированной пенсионной схемы

Предположим, что мы должны вернуть два долга: 400 руб. через год и 600 руб. через два года. Однако мы хотели бы вернуть оба долга немедленно и наши кредиторы согласны пойти на это. Какую сумму мы должны выплатить в этой ситуации?

Предположим, что нам предлагают выплатить просто сумму 400+600=1000 руб. и допустим, что в течение рассматриваемого промежутка времени банки дают $i = 25\%$ годовых по вкладам. Если мы просто поместим 1000 руб. в банк, то через год мы будем иметь 1250 руб, из которых мы выплатим 400 руб. первого долга; оставшиеся 850 руб. через год превратятся в 1062 руб. 50 коп., из которых мы выплатим 600 руб. второго долга и будем иметь остаток в 462 руб. 50 коп.

Значит, выплачивая немедленно простую алгебраическую сумму долгов, мы переплачиваем значительную часть денег.

Имея в виду эти рассуждения, попробуем определить, какую сумму x мы должны вернуть в настоящий момент, для того, чтобы эта финансовая операция была справедливой.

Через год сумма x руб. превратиться в $x \cdot (1 + i)$ руб, из которых мы выплатим первый долг $C_1 = 400$ руб. Остаток $x \cdot (1+i) - C_1$ через год превратится в $(x \cdot (1+i) - C_1) \cdot (1+i) = x \cdot (1+i)^2 - C_1 \cdot (1+i)$ руб., из которых мы выплатим второй долг $C_2 = 600$ руб. Если остаток $x \cdot (1+i)^2 - C_1 \cdot (1+i) - C_2$ положителен, то эта операция несправедлива по отношению к должнику; если же остаток отрицателен, то эта операция несправедлива по отношению к кредиторам. Итак, сумма

x должна определятся из условия $x \cdot (1+i)^2 - C_1 \cdot (1+i) - C_2 = 0$, что дает:

$$x = C_1 \cdot (1+i)^{-1} + C_2 \cdot (1+i)^{-2}$$

Суммы $C_1 \cdot (1+i)^{-1} = C_1 v$ и $C_2 \cdot (1+i)^{-2} = C_2 v^2$ являются приведенными к настоящему моменту величинами долгов C_1, C_2, которые подлежат оплате в заданные моменты в будущем.

Итак, для того, чтобы рассматриваемая финансовая операция была справедливой, мы должны сначала привести оба долга к настоящему моменту:

(1) 400 руб. через год, сейчас имеют ценность $400(1+i)^{-1} = 320$ руб.

(2) 600 руб. через два года, сейчас имеют ценность $600(1+i)^{-2} = 384$ руб;

После этого мы можем подсчитать суммарный долг; в настоящий момент он равен 320+384=704 руб. Именно эту сумму мы и должны вернуть нашим кредиторам – это будет справедливое решение проблемы.

Действительно, если кредиторы просто поместят эту сумму в банк под $i = 25\%$ годовых, то через год они будут иметь $704 \cdot 1.25 = 880$ руб. За вычетом 400 руб. в счет погашения первого долга останется 480 руб. Через год они превратятся в $480 \cdot 1.25 = 600$ руб, что позволит точно погасить и второй долг.

Разобранный выше простой пример показывает, что если мы хотим оценить серию выплат, которые должны быть сделаны в разные моменты времени, то все эти выплаты должны быть приведены с помощью формулы (1.1.10) к некоторому фиксированному моменту $t_0 = 0$, после чего эти выплаты можно складывать, сравнивать и т.д.

С точки зрения приложений к страхованию и пенсионным схемам наиболее важной является задача определения современной стоимости a серии из n выплат величиной $b_1, b_2, ..., b_n$ соответственно, которые будут сделаны в некоторые моменты $t_1, t_2, ..., t_n$ в будущем. Величина a может рассматриваться, например, как сумма, которую человек должен внести в пенсионный фонд в момент заключения договора (этот момент обычно принимают за начальный) с тем, чтобы в будущем, в моменты $t_1, t_2, ..., t_n$, получать пенсию величиной $b_1, b_2, ..., b_n$. Как следует из вышесказанного,

$$a = b_1 v^{t_1} + b_2 v^{t_2} + ... + b_n v^{t_n}. \qquad (1.2.1)$$

Действительно, если величина a будет рассчитана по формуле

(1.2.1), то к моменту t_1 мы будем располагать капиталом

$$a(1+i)^{t_1} = av^{-t_1} = b_1 + b_2v^{t_2-t_1} + ... + b_nv^{t_n-t_1}.$$

Это позволит в момент t_1 выплатить первую пенсию величиной b_1. Оставшаяся сумма $a_1 = b_2v^{t_2-t_1} + ... + b_nv^{t_n-t_1}$ к моменту t_2, т.е. спустя время $t_2 - t_1$, возрастет до

$$a_1(1+i)^{t_2-t_1} = a_1v^{-t_2+t_1} = b_2 + b_3v^{t_3-t_2} + ... + b_nv^{t_n-t_2}.$$

Это позволит в момент t_2 выплатить вторую пенсию величиной b_2 и т.д. После выплаты $(n-1)-$ й пенсии в момент t_{n-1} мы будем иметь капитал $b_nv^{t_n-t_{n-1}}$. К моменту t_n, т.е. спустя время $t_n - t_{n-1}$ после момента t_{n-1}, эта сумма вырастет до b_n, что позволит нам успешно выплатить и последнюю пенсию (это означает, что расчет по формуле (1.2.1) справедлив по отношению к пенсионному фонду, которому не пришлось вносить собственные деньги). Оставшаяся после этого сумма будет равна нулю, что означает справедливость расчета по формуле (1.2.1) по отношению к человеку, который купил в момент $t_0 = 0$ рассмотренную пенсию.

В только что рассмотренной задаче плата за пенсии производилась в виде разового взноса в момент заключения договора. Однако обычно эта плата производится в виде нескольких платежей величиной $c_1, ..., c_k$, сделанных в моменты $\tau_1, ..., \tau_k$. Справедливое соотношение между взносами c_i и пенсионными выплатами b_i дается формулой:

$$c_1v^{\tau_1} + ... + c_kv^{\tau_k} = b_1v^{t_1} + ... + b_nv^{t_n}. \qquad (1.2.2)$$

Действительно, первая часть формулы (1.2.2) выражает современную ценность всех взносов в пенсионный фонд или страховую компанию, а правая – современную стоимость всех пенсионных выплат.

Более подробное обоснование формулы (1.2.2) (в духе обоснования формулы (1.2.1)) можно получить следующим образом.

Рассмотрим последовательность моментов времени $T_1, T_2, \ldots, T_{n+k}$, в которые осуществляется взнос в пенсионный фонд или выплата пенсии. Иными словами, объединим последовательности

$$t_1, t_2, \ldots, t_n$$

и

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$$

в одну. Обозначим u_i величину платежа из фонда в момент T_i. Это означает, что если момент T_i является некоторым моментом t_j, когда выплачивалась пенсия b_j, то $u_i = b_j$; если же T_i является некоторым моментом τ_j когда вносился взнос c_j в фонд, то $u_i = -c_j$. С учетом этих обозначений уравнение (1.2.3) можно переписать в виде

$$u_1 v^{T_1} + ... + u_{n+k} v^{T_{n+k}} = 0, \tag{1.2.3}$$

что совершенно аналогично уравнению (1.2.1). Рассуждения, проведенные при обосновании уравнения (1.2.1), как нетрудно видеть, применимы и в случае, когда некоторые из величин b_i отрицательны (в этом случае мы рассматриваем их как взносы в фонд и изменение капитала в момент t_i от величины $b_i + b_{i+1}v^{t_{i+1}-t_i} + ...$ до величины $b_{i+1}v^{t_{i+1}-t_i} + ...$ на самом деле означает его увеличение). Поэтому уравнение (1.2.3) выражает тот факт, что окончательный баланс по рассматриваемому счету будет нулевым. В некоторые моменты возможен временный отрицательный баланс; на этих промежутках долг клиента растет в соответствии с формулой сложных процентов и гасится будущими увеличенными взносами. Ясно, впрочем, что если выплаты пенсий начинаются только после выплаты всех взносов, то эта ситуация невозможна.

Описанная выше общая модель детерминированной пенсионной схемы на практике обычно не применяется. Реально используются схемы, обладающие той или иной формой регулярности как по величине взносов и выплат, так и по моментам осуществления этих платежей. Особо важным является случай серии платежей фиксированной величины, которые производятся через равные промежутки времени фиксированное число раз. Такие серии платежей обычно называют *постоянными рентами* (level annuity). Часто, если нет опасности путаницы с терминами, слово "постоянные" опускают. В обозначениях модели (1.2.1) постоянная рента может быть определена следующим образом:

$$b_1 = b_2 = ... = b_n; \; t_1 = t, t_2 = 2t, ..., t_n = nt$$

Еще один важный случай – это *возрастающие ренты* (increasing annuity), когда

$$b_1 = b, b_2 = 2b, ..., b_n = nb; \; t_1 = t, t_2 = 2t, ..., t_n = nt$$

1.3 Детерминированные постоянные ренты

Рассмотрим n последовательных единичных промежутков времени $(0,1)$, ..., $(n-1,n)$. Под моментом $t_0 = 0$ мы обычно будем подразумевать настоящий момент, а в качестве единичного промежутка времени будем рассматривать один год. Этот выбор, конечно, условен (например, в следующем разделе мы будем применять полученные ниже формулы к неделе, месяцу и т.д.).

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в конце этих промежутков, т.е. в моменты $1, 2, \ldots, n$, называется *запаздывающей рентой* (annuity payable in arrear или immediate annuity).

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в начале этих промежутков, т.е. в моменты $0, 1, 2, \ldots, n-1$, называется *упреждающей рентой* (annuity payable in advance или annuity-due).

Различие между запаздывающей рентой и упреждающей рентой условное и связано с выбором начала отсчета. Ясно, что если в качестве начального момента выбрать момент $t = 1$, то запаздывающая рента может рассматриваться как упреждающая.

Приведенная ценность запаздывающей (упреждающей) ренты в момент $t_0 = 0$ в финансовой математике обозначается $a_{\overline{n}|}$ (соответственно, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$). Иными словами, $a_{\overline{n}|}$ (соответственно, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$) – это ценность серии из n платежей величины 1, производимых через единичные интервалы, на единицу времени раньше, чем момент первого платежа (соответственно, в момент первого платежа).

Чтобы подсчитать эти величины, приведем с помощью формулы (1.1.11) каждый из n платежей к начальному моменту времени $t_0 = 0$, а затем сложим полученные значения:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \ldots + v^n \tag{1.3.1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} \tag{1.3.2}$$

Суммируя прогрессии, мы получим:

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= \frac{v - v^{n+1}}{1-v} = \frac{v(1-v^n)}{1-v} \\ &= \frac{1-v^n}{1/v-1} = \frac{1-v^n}{i} \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d} \tag{1.3.4}$$

В тривиальном случае $i = 0$, когда ценность денег не меняется с течением времени, очевидно, $a_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} = n$.

Кроме того, удобно положить $a_{\overline{0}|} = \ddot{a}_{\overline{0}|} = 0$. Это согласуется с обычной договоренностью считать суммы из нулевого количества слагаемых равными нулю.

Величины $a_{\overline{n}|}$ и $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ позволяют подсчитать величину суммы, которую нужно инвестировать в данный момент для того, чтобы получать фиксированный регулярный доход в будущем. С их помощью также можно определить величину регулярных выплат в случае, когда долг возвращается не одним платежом, а серией одинаковых платежей.

Предположим, например, что человек хотел бы положить на счет в банке определенную сумму x руб. с тем, чтобы спустя год ежегодно на протяжении 10 лет получать регулярную пенсию в 100 руб. Какова должна быть сумма x, если эффективная годовая процентная ставка $i = 25\%$.

В наших обозначениях $x = 100$руб$\cdot a_{\overline{10}|}$. В силу формулы (1.3.3), $a_{\overline{10}|} = (1 - v^{10})/i$, где $v = 1/(1+i) = 4/5 = 0.8$. Поэтому $a_{\overline{10}|} = (1 - 0.8^{10})/0.25 = 3.5705$ и, значит, $x = 357$руб. 05коп.

Рассмотрим теперь следующий пример. Человек взял в долг 1000 руб. на 5 лет под $i = 25\%$ годовых и хотел бы вернуть его пятью одинаковыми выплатами. Эти выплаты он хотел бы делать в конце каждого года. Определим величину y каждой из этих выплат.

Приведенная стоимость (в момент $t_0 = 0$ займа) пяти будущих выплат величиной y в моменты $t = 1, 2, 3, 4, 5$ может быть записана с помощью введеных нами обозначений как $y \cdot a_{\overline{5}|}$ Она должна равняться величине займа, так что

$$y = 1000/a_{\overline{5}|}.$$

Чтобы подсчитать $a_{\overline{5}|}$, вначале найдем v :

$$v = 1/(1+i) = 0.8,$$

а затем с помощью формулы (1.3.3) – $a_{\overline{5}|}$:

$$a_{\overline{5}|} = \frac{1 - v^5}{i} = \frac{1 - 0.8^5}{0.25} = 2.68928$$

Поэтому

$$y = 371\text{руб. } 85 \text{ коп.}$$

Итак, чтобы возвратить взятый долг в 1000 руб, нужно пять раз выплатить сумму 371 руб. 85 коп.

Полученные выше формулы могут быть применены и для расчета рент в условиях переменных процентных ставок, если они являются кусочно-постоянными. Мы продемонстрируем это на следующем примере.

Пример.

Эксперты банка предполагают, что на протяжении ближайших пяти лет эффективная годовая процентная ставка будет равна $i_1 = 10\%$, а на протяжении следующего пятилетия – $i_2 = 6\%$. Человек покупает десятилетнюю ренту с выплатой в конце каждого года 1000 руб. Подсчитайте ее стоимость.

Решение.

Приведенная ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ пяти годовых платежей в моменты 1,2,3,4,5 равна

$$1000 \cdot a_{\overline{5}|@i_1},$$

где символ $@i_1$ указывает эффективную годовую процентную ставку на промежутке, который рассматривается в качестве единичного, т.е.

$$1000\frac{1 - v_1^5}{i_1} \approx 3791\text{руб.}$$

Приведенная ценность в момент $t_5 = 5$ пяти годовых платежей в моменты 6,7,8,9,10 равна

$$1000 \cdot a_{\overline{5}|@i_2} = 1000\frac{1 - v_2^5}{i_2} \approx 4212\text{руб.}$$

Чтобы привести эту сумму к моменту $t_0 = 0$, умножим ее на v_1^5, что даст $\approx$ 2616 руб. Итак, стоимость ренты есть 3791 руб.+2616 руб.=6407 руб.

Рассмотренные выше рентные платежи начинались на первом же промежутке (0,1) (в начале его, т.е. в момент $t_0 = 0$, для упреждающей ренты и в конце, т.е. в момент $t_1 = 1$, для запаздывающей ренты). Для приложений важны также так называемые *отсроченные ренты* (deferred annuities). Чтобы их определить, рассмотрим последовательные единичные промежутки времени $(0, 1), (1, 2), ..., (m-1, m), (m, m+1), ..., (m+n-1, m+n)$. Как и раньше, под моментом $t_0 = 0$ мы будем подразумевать настоящий момент.

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в конце промежутков $(m, m+1), \ldots, (m+n-1, m+n)$, т.е. в моменты $m+1, \ldots, m+n$, называется *запаздывающей отсроченной рентой* (deferred immediate annuity). Ее ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ обозначается ${}_{m|}a_{\overline{n}|}$. Чтобы подсчитать эту величину, приведем каждый из n платежей в моменты $m+1, \ldots, m+n$ к начальному моменту времени, а затем сложим полученные значения:

$$ {}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^{m+1} + \ldots + v^{m+n}. \tag{1.3.5} $$

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в начале промежутков $(m, m+1), \ldots, (m+n-1, m+n)$, т.е. в моменты $m, \ldots, m+n-1$, называется *отсроченной упреждающей рентой* (deferred annuity-due). Ее ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ обозначается ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$. Чтобы подсчитать эту величину, приведем каждый из n платежей в моменты $m, \ldots, m+n-1$ к настоящему моменту времени, а затем сложим полученные значения:

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^{m} + \ldots + v^{m+n-1}. \tag{1.3.6} $$

Формулы (1.2.5) и (1.3.6) можно определенным образом преобразовать с тем, чтобы выразить отсроченные ренты через обычные. Во-первых, вынося в правых частях (1.3.5), (1.3.6) за скобку общий множитель v^m, мы получим:

$$ {}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^m(v + \ldots + v^n) = v^m a_{\overline{n}|}, \tag{1.3.7} $$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m(1 + \ldots + v^{n-1}) = v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}. \tag{1.3.8} $$

Интуитивно эти формулы совершенно очевидны. Они утверждают, что для того, чтобы оценить в момент 0 серию отсроченных платежей на интервалах $(m, m+1), \ldots, (m+n-1, m+n)$, можно сначала оценить эту серию в момент m (т.к. это начальная точка первого интервала из серии, речь идет об обычной ренте $a_{\overline{n}|}$ или $\ddot{a}_{\overline{n}|}$), а затем привести с помощью формулы (1.1.11) полученный результат на m единиц времени левее, т.е. к моменту 0.

Кроме того, дополняя суммы (1.3.5) и (1.3.6) начальными слагаемыми до сумм вида (1.3.1), (1.3.2), мы получим:

$$ \begin{aligned} {}_{m|}a_{\overline{n}|} &= (v + \ldots + v^m + v^{m+1} + \ldots + v^{m+n}) - (v + \ldots + v^m) \\ &= a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|} \end{aligned} \tag{1.3.9} $$

$$
\begin{aligned}
{}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} &= (1 + \ldots + v^{m-1} + v^m + \ldots + v^{m+n-1}) - (1 + \ldots + v^{m-1}) \\
&= \ddot{a}_{\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}
\end{aligned}
\tag{1.3.10}
$$

Часто полезно знать ценность ренты не в начальный момент времени, а в конце последнего платежного периода. Эту ценность можно интерпретировать как общую сумму, накопленную на банковском счете после серии регулярных взносов. Ее обозначают так же, как и соответствующую приведенную ценность в начальный момент, но с заменой буквы a на букву s.

Итак, $s_{\overline{n}|}$ – это приведенная ценность запаздывающей ренты в момент $t_n = n$ последнего платежа, а $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ – это приведенная ценность упреждающей ренты в момент $t_n = n$, т.е. спустя единицу времени после последнего платежа.

Формулы для накоплений $s_{\overline{n}|}$, $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ можно получить непосредственно, приведя каждый из n платежей к моменту $t_n = n$ и затем складывая полученные значения:

$$
s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + \ldots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i},
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{s}_{\overline{n}|} &= (1+i)^n + \ldots + (1+i) = \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \\
&= \frac{(1+i)^n - 1}{i/(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.
\end{aligned}
$$

Эти же формулы можно получить, приводя к моменту $t_n = n$ значение сответствующей ренты в момент $t_0 = 0$:

$$
s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{1.3.11}
$$

$$
\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{d}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{d}. \tag{1.3.12}
$$

Для отсроченных рент специальные обозначения для накоплений не нужны, т.к. с точки зрения последнего промежутка времени отсроченная рента не отличается от соответствующей обычной. Иными словами, допустим, что мы решим обозначить через ${}_{m|}s_{\overline{n}|}$ значение отсроченной запаздывающей ренты в конце последнего платежного периода (т.е. в момент $m+n$). Приводя n единичных платежей в моменты $m+1, \ldots, m+n$ к моменту $m+n$, мы имели бы

$$
{}_{m|}s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + \ldots + 1 = s_{\overline{n}|}.
$$

Введенные выше величины связаны между собой разнообразными тождествами. Часть из них мы уже привели. Более интересными являются следующие формулы:

$$ia_{\overline{n}|} + v^n = 1 \tag{1.3.13}$$

$$d\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n = 1 \tag{1.3.14}$$

$$is_{\overline{n}|} + 1 = (1+i)^n \tag{1.3.15}$$

$$d\ddot{s}_{\overline{n}|} + 1 = (1+i)^n \tag{1.3.16}$$

Они тривиально доказываются алгебраическими преобразованиями. Например, для первой формулы имеем:

$$ia_{\overline{n}|} + v^n = i\frac{1-v^n}{i} + v^n = 1 - v^n + v^n = 1.$$

Гораздо более интересной является их интерпретация на языке рент. Например, для первой формулы эта интерпретация выглядит следующим образом.

Поместим в момент $t_0 = 0$ на счет сумму $C = 1$. В момент $t_1 = 1$ мы получим в виде процентов сумму i и неизменный исходный капитал $C = 1$. Снимем сумму i со счета, а капитал инвестируем еще на один промежуток времени и т.д. В момент $t_n = n$ снимем со счета проценты i и исходный капитал $C = 1$. Таким образом, капитал $C = 1$, инвестированный в момент $t_0 = 0$ производит:

(1) серию из n платежей величины i каждый в конце каждого единичного периода, т.е. запаздывающую ренту; ее ценность в момент $t_0 = 0$ есть $ia_{\overline{n}|}$

(2) платеж суммы $C = 1$ в момент $t_n = n$; ее ценность в момент $t_0 = 0$ есть $1 \cdot v^n = v^n$.

Поэтому формула (1.3.13) выражает равенство в момент $t_0 = 0$ произведенных расходов и полученных доходов.

1.4 Детерминированные возрастающие ренты

Как и в модели раздела 1.3, рассмотрим n последовательных единичных промежутков времени $(0, 1), (1, 2), ..., (n-1, n)$. Под моментом $t_0 = 0$ мы обычно будем подразумевать настоящий момент, а в качестве единичного промежутка времени будем рассматривать один год. Как и раньше, подчеркнем, что этот выбор условен и с равным успехом, например, в качестве единичного промежутка можно рассматривать один квартал.

Серия из n выплат величиной $1, 2, ..., n$, сделанных в конце этих промежутков, т.е. в моменты $t_1 = 1, t_2 = 2, ..., t_n = n$, называется *запаздывающей возрастающей рентой* (increasing immediate annuity). Ее приведенная ценность в момент $t_0 = 0$ в финансовой математике обозначается $(Ia)_{\overline{n}|}$. В силу формулы (1.2.1)

$$(Ia)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + ... + nv^n. \tag{1.4.1}$$

Сумму в правой части этого равенства можно представить как $v(1+2v+...+nv^{n-1})$. Выражение в скобках – это производная суммы $v + v^2 + ... + v^n = \frac{v-v^{n+1}}{1-v}$ (это геометрическая прогрессия). Поэтому

$$(Ia)_{\overline{n}|} = v\frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}. \tag{1.4.2}$$

Используя формулу (1.3.3), мы можем выразить стоимость запаздывающей возрастающей ренты через стоимость соответствующей постоянной запаздывающей ренты:

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i(1-v)} - \frac{nv^n}{i} = \frac{a_{\overline{n}|}}{1-v} - \frac{nv^n}{i} = \frac{a_{\overline{n}|}}{d} - \frac{nv^n}{i}. \tag{1.4.3}$$

Серия из n выплат величиной $1, 2, ..., n$, сделанных в начале промежутков $(0, 1), ..., (n-1, n)$, т.е. в моменты $t_0 = 0, ..., t_{n-1} = n-1$, называется *упреждающей возрастающей рентой* (increasing annuity-due). Ее приведенная ценность в момент $t_0 = 0$ обозначается $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$. В силу формулы (1.2.1),

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = 1 + 2v + 3v^2 + ... + nv^{n-1}.$$

Сумма в правой части этого равенства была подсчитана при выводе формулы (1.4.2), так что

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}. \tag{1.4.4}$$

Используя формулу (1.3.4), мы можем выразить стоимость возрастающей упреждающей ренты через стоимость постоянной упреждающей ренты:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{(1-v)^2} - \frac{nv^n}{1-v} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{1-v} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{d}. \tag{1.4.5}$$

Рассмотренные выше возрастающие рентные платежи начинались на первом же промежутке (0,1) (в начале его, т.е. в момент $t_0 = 0$, для упреждающей ренты и в конце, т.е. в момент $t_1 = 1$, для запаздывающей ренты). Для приложений важны также так называемые *отсроченные возрастающие ренты* (deferred increasing annuity). Чтобы их определить, рассмотрим последовательные единичные промежутки времени
$(0,1), (1,2), ..., (m-1, m), (m, m+1), ..., (m+n-1, m+n)$. Как и раньше, под моментом $t_0 = 0$ мы будем подразумевать настоящий момент.

Серия из n выплат величиной $1, 2, ..., n$, сделанных в начале (конце) промежутков $(m, m+1)$,...,$(m+n-1, m+n)$, т.е. в моменты m,...,$m+n-1$ (соответственно, $m+1$,..,$m+n$, называется отсроченной возрастающей упреждающей (соответственно, запаздывающей) рентой. Ее ценность в настоящий момент времени $t_0 = 0$ обозначается ${}_{m|}(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ (соответственно, ${}_{m|}(Ia)_{\overline{n}|}$). Как и для постоянных рент, эти величины легко подсчитать в два приема: сначала нужно определить стоимость ренты в момент $t_m = m$ начала периода платежей, а затем привести эту стоимость к моменту $t_0 = 0$. Это немедленно дает:

$$ {}_{m|}(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = v^m \cdot (I\ddot{a})_{\overline{n}|}, \tag{1.4.6}$$

$$ {}_{m|}(Ia)_{\overline{n}|} = v^m \cdot (Ia)_{\overline{n}|}. \tag{1.4.7}$$

Часто полезно знать ценность ренты не в начальный момент времени, а в конце последнего платежного периода. Эту ценность можно интерпретировать как общую сумму, накопленную на банковском счете после серии регулярно увеличивающихся взносов. Ее обозначают так же, как и соответствующую приведенную ценность в начальный момент, но с заменой буквы a на букву s.

Итак, $(I\ddot{s})_{\overline{n}|}$, $(Is)_{\overline{n}|}$ – это приведенная ценность упреждающей и запаздывающей возрастающей ренты соответственно в момент $t_n = n$ окончания платежного периода (для запаздывающей ренты t_n – это момент последнего платежа, а для упреждающей – спустя единицу времени после последнего платежа). Формулы для накоплений можно получить, приводя к моменту $t_n = n$ значение соответствующей ренты в момент $t_0 = 0$:

$$ (I\ddot{s})_{\overline{n}|} = (1+i)^n (I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|} - n}{1-v} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|} - n}{d}, \tag{1.4.8}$$

$$ (Is)_{\overline{n}|} = (1+i)^n (Ia)_{\overline{n}|} = \frac{s_{\overline{n}|}}{1-v} - \frac{n}{i} = \frac{s_{\overline{n}|}}{d} - \frac{n}{i}. \tag{1.4.9}$$

Для отсроченных возрастающих рент, так же как и для отсроченных постоянных рент, специальные обозначения для накоплений не нужны, т.к. с точки зрения последнего промежутка времени отсроченная рента не отличается от соответствующей обычной.

С помощью полученных формул для простейших возрастающих рент можно определить стоимость рент, в которых величина выплат возрастает в соответствии с произвольной арифметической прогрессией. Именно, предположим, что выплаты производятся в моменты $t_0 = 0, t_1 = 1, ..., t_{n-1} = n-1$ и i–я выплата (т.е. выплата в момент $t_i = i$) дается формулой

$$b_i = \alpha + \beta i = (\alpha - \beta) + \beta(i+1), \ \ i = 0, 1, ..., n-1 \qquad (1.4.10)$$

На такую переменную ренту можно смотреть как на объединение двух рент – постоянной упреждающей ренты с величиной выплат $(\alpha - \beta)$ и возрастающей упреждающей ренты с единицей измерения выплат β. Поэтому ценность в момент $t_0 = 0$ ренты (1.4.10) есть

$$(\alpha - \beta)\ddot{a}_{\overline{n}|} + \beta(I\ddot{a})_{\overline{n}|}, \qquad (1.4.11)$$

а накопление к моменту $t_n = n$ есть

$$(\alpha - \beta)\ddot{s}_{\overline{n}|} + \beta(I\ddot{s})_{\overline{n}|}. \qquad (1.4.12)$$

С помощью полученных в разделах 1.3, 1.4 формул эти величины можно выразить и через основные параметры i, v, d.

Для иллюстрации развитой теории рассмотрим следующий пример.

Пример.

Участник пенсионного фонда желал бы получать пенсию раз в год на протяжении 20 лет через пять лет после заключения договора. Первая выплата должна составлять 1000 руб. с последующим увеличением на 200 руб. ежегодно. Считая, что годовая доходность средств, вложенных в пенсионный фонд, равна $i = 8\%$, определите стоимость этой ренты в момент заключения договора.

Решение.

Нашу ренту можно рассматривать как объединение двух рент – отсроченной на 5 лет упреждающей постоянной с величиной ежегодных выплат в 800 руб. и отсроченной на 5 лет упреждающей возрастающей с величиной единичных выплат 200 руб. Поэтому стоимость нашей ренты есть

$$800 \cdot {}_{5|}\ddot{a}_{\overline{20}|} + 200 \cdot {}_{5|}(I\ddot{a})_{\overline{20}|}.$$

В силу (1.3.10),

$$
\begin{aligned}
{}_{5|}\ddot{a}_{\overline{20}|} &= \ddot{a}_{\overline{25}|} - \ddot{a}_{\overline{5}|} = a_{\overline{24}|} - a_{\overline{4}|} \\
&= 10.5288 - 3.3121 = 7.2167.
\end{aligned}
$$

Кроме того, в силу (1.4.6), (1.4.4) и (1.3.8)

$$
\begin{aligned}
{}_{5|}(I\ddot{a})_{\overline{20}|} &= v^5 \cdot (I\ddot{a})_{\overline{20}|} = v^5 \frac{\ddot{a}_{\overline{20}|} - 20v^{20}}{1-v} \\
&= \frac{{}_{5|}\ddot{a}_{\overline{20}|} - 20v^{25}}{1-v} = \frac{7.2167 - 20 \cdot 0.14602}{0.074074} \\
&= 58.000108.
\end{aligned}
$$

Итак, стоимость рассматриваемой ренты есть

$$
800 \cdot 7.2167 + 200 \cdot 58.000108 \approx 17373 \text{руб. } 38 \text{ коп.}
$$

1.5 Детерминированные постоянные ренты, выплачиваемые с частотой p

Как и в начале раздела 1.3, рассмотрим n последовательных единичных промежутков времени $(0,1), (1,2), ..., (n-1,n)$. Под моментом $t_0 = 0$ мы обычно будем подразумевать настоящий момент, а в качестве единичного промежутка времени будем рассматривать один год.

Разобьем каждый из n единичных промежутков на p равных частей длиной $1/p$ каждая. Если, как мы отмечали, в качестве единицы времени принят один год, то наиболее интересными являются случаи: $p = 12$ (промежуток времени $1/p$ соответствует одному месяцу), $p = 4$ (промежуток времени $1/p$ соответствует одному кварталу), $p = 2$ (промежуток времени $1/p$ соответствует одному полугодию).

Серия из np выплат, каждая величиной $1/p$, сделанных в конце этих подпромежутков, т.е. в моменты

$$
1/p, ..., p/p = 1; 1+1/p, ..., 1+p/p = 2; ...; n-1+1/p, ..., n-1+p/p = n,
$$

называется *запаздывающей рентой, выплачиваемой с частотой* p (annuity payable $p$thly in arrear или immediate annuity payable $p$thly). Ее ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ обозначается $a^{(p)}_{\overline{n}|}$, а ценность в момент $t_n = n$ последнего платежного периода называется накоплением и обозначается $s^{(p)}_{\overline{n}|}$.

Обратим внимание читателя на то, что каждая выплата имеет величину $1/p$, так что в качестве единицы измерения денежных сумм рассматривается *алгебраическая* сумма всех выплат за единичный промежуток времени (в типичном случае – за год). Например, если на протяжении 5 лет в конце каждого месяца выплачивается 100 руб., то в качестве единицы измерения денежных сумм выступает 1200 руб. (так как ее 1/12 часть равна 100 руб.) и поэтому ценность этой ренты в настоящий момент равна $1200a_{\overline{5}|}^{(12)}$, а накопления к концу пятилетнего срока – $1200s_{\overline{5}|}^{(12)}$.

Серия из np выплат, каждая величиной $1/p$, сделанных в начале подпромежутков, т.е. в моменты $0, 1/p, ..., (p-1)/p; 1, 1+1/p, ..., 1+(p-1)/p; ...; n-1, n-1+1/p, ..., n-1+(p-1)/p$, называется *упреждающей рентой, выплачиваемой с частотой p* (annuity payable $p$thly in advance или $p$thly annuity-due). Ее ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ обозначается $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$, а ценность в момент $t_n = n$ последнего платежного периода называется накоплением и обозначается $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(p)}$.

Величины $a_{\overline{n}|}^{(p)}$ и $s_{\overline{n}|}^{(p)}$, так же как и величины $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$ и $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(p)}$, оценивают одну и ту же серию платежей, но в разные моменты времени ($t_0 = 0$ и $t_n = n$).

Поэтому с помощью общей формулы (1.1.11) между ними немедленно может быть установлена простая связь:

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = s_{\overline{n}|}^{(p)} \cdot v^n, \tag{1.5.1}$$

$$s_{\overline{n}|}^{(p)} = a_{\overline{n}|}^{(p)} \cdot (1+i)^n, \tag{1.5.2}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} = \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(p)} \cdot v^n, \tag{1.5.3}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(p)} = \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} \cdot (1+i)^n. \tag{1.5.4}$$

Таким образом, достаточно получить формулы только для величин $a_{\overline{n}|}^{(p)}$ и $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$. Поскольку упреждающая и запаздывающая ренты отличаются только в начальный и конечный моменты времени, мы имеем:

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}v^n. \tag{1.5.5}$$

Действительно, чтобы получить серию платежей, описываемую $a_{\overline{n}|}^{(p)}$, нужно из серии платежей, описываемой $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$, убрать платеж суммы $1/p$ в момент $t_0 = 0$ и добавить платеж суммы $1/p$ в момент $t_n = n$. Однако, поскольку все платежи приводятся к моменту $t_0 = 0$, последняя операция приводит к появлению члена $\frac{1}{p} \cdot v^n$, который дает ценность в момент $t_0 = 0$ платежа $1/p$ в момент $t_n = n$.

Итак, нам достаточно получить формулу для величины $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$.

С этой целью рассмотрим в качестве единичного отрезка времени p—ю долю первоначального единичного отрезка (например, если $p = 12$ и исходный единичный промежуток времени был один год, то новым единичным отрезком времени будет один месяц). Эффективная процентная ставка для этого нового единичного отрезка равна $i_*^{(p)} = i^{(p)}/p$, где $i^{(p)}$ – номинальная процентная ставка для основного единичного промежутка, начисляемая с частотой p (см. раздел 1.1). Соответственно, новая учетная ставка $d_*^{(p)}$ есть

$$d_*^{(p)} = \frac{i_*^{(p)}}{1 + i_*^{(p)}} = \frac{i^{(p)}}{p + i^{(p)}} = \frac{p((1+i)^{1/p} - 1)}{p + p((1+i)^{1/p} - 1)}$$
$$= \frac{(1+i)^{1/p} - 1}{(1+i)^{1/p}} = 1 - (1+i)^{-1/p} = 1 - (1-d)^{1/p} = d^{(p)}/p,$$

а новое значение коэффициента дисконтирования $v_*^{(p)} = 1 - d_*^{(p)} = (1 + i_*^{(p)})^{-1}$ есть

$$v_*^{(p)} = 1 - d^{(p)}/p = v^{1/p}.$$

Теперь на упреждающую ренту, выплачиваемую с частотой p на промежутке $(0, n)$, можно смотреть как на обычную упреждающую ренту, выплачиваемую на промежутке $(0, np)$. Поскольку каждая выплата равна $1/p$, мы имеем:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|@i}^{(p)} = \frac{1}{p} \cdot \ddot{a}_{\overline{np}|@i^{(p)}/p}, \tag{1.5.6}$$

где символ $@i$ указывает эффективную процентную ставку на промежутке, который рассматривается в качестве единичного.

Используя формулу (1.3.4), а затем (1.1.15), (1.1.12), (1.3.3), мы имеем (напомним, что для нового единичного промежутка параметры i, d, v нами обозначены $i_*^{(p)}, d_*^{(p)}, v_*^{(p)}$) :

$$\begin{aligned}
\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|@i} &= \frac{1}{p}\cdot\frac{1-(v_*^{(p)})^{np}}{d_*^{(p)}} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1-(1-d^{(p)}/p)^{np}}{d^{(p)}/p} \\
&= \frac{1-(1-d^{(p)}/p)^{np}}{d^{(p)}} = \frac{1-((1-d)^{1/p})^{np}}{d^{(p)}} \\
&= \frac{1-(1-d)^n}{d^{(p)}} = \frac{1-v^n}{d^{(p)}} \\
&= \frac{1-v^n}{d}\cdot\frac{d}{d^{(p)}} = \frac{d}{d^{(p)}}\ddot{a}_{\overline{n}|}.
\end{aligned} \tag{1.5.7}$$

Теперь для $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ из формулы (1.5.5) получим:

$$\begin{aligned}
a^{(p)}_{\overline{n}|} &= \frac{1-v^n}{d^{(p)}} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}v^n = \frac{1-v^n}{d^{(p)}} - \frac{1-v^n}{p} \\
&= \frac{(1-v^n)(p-d^{(p)})}{pd^{(p)}}.
\end{aligned}$$

С помощью (1.1.15), (1.1.8), (1.3.4) это равенство можно привести к виду:

$$\begin{aligned}
a^{(p)}_{\overline{n}|} &= \frac{(1-v^n)(1-d)^{1/p}}{p(1-(1-d)^{1/p})} = \frac{1-v^n}{p((1-d)^{-1/p}-1)} \\
&= \frac{1-v^n}{p((1+i)^{1/p}-1)} = \frac{1-v^n}{i^{(p)}} \\
&= \frac{1-v^n}{i}\cdot\frac{i}{i^{(p)}} = \frac{i}{i^{(p)}}a_{\overline{n}|}.
\end{aligned} \tag{1.5.8}$$

Мы определили величины $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ и $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ только для целых значений n. Нетрудно видеть, что прием с введением новой единицы времени позволяет естественно определить $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{t}|}$ и $a^{(p)}_{\overline{t}|}$ в случае, когда $t = n + k/p$, $0 \le k \le n-1$. Именно,

$$\begin{aligned}
\ddot{a}^{(p)}_{\overline{t}|@i} &= \frac{1}{p}\cdot\ddot{a}^{(p)}_{\overline{np+k}|@i^{(p)}/p} \\
&= \frac{1}{p}\cdot\frac{1-(v_*^{(p)})^{np+k}}{d_*^{(p)}} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1-(1-d^{(p)}/p)^{np+k}}{d^{(p)}/p} \\
&= \frac{1-(1-d^{(p)}/p)^{np+k}}{d^{(p)}} = \frac{1-((1-d)^{1/p})^{np+k}}{d^{(p)}} \\
&= \frac{1-(1-d)^{n+k/p}}{d^{(p)}} = \frac{1-v^t}{d^{(p)}}.
\end{aligned} \tag{1.5.9}$$

Теперь

$$a^{(p)}_{\overline{t}|@i} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{t}|@i} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}v^t = \frac{1-v^t}{i^{(p)}}. \tag{1.5.10}$$

Прием с введением новой единицы времени, использованный при выводе формул (1.5.7), (1.5.8), мы еще раз продемонстрируем на следующем примере.

Пример.

Человек получает ежемесячно пенсию в размере 1000 руб, которая выплачивается первого числа каждого месяца до 31 мая 1996 года. После получения очередной пенсии 1 сентября 1994 года этот человек пожелал получать пенсию два раза в месяц (1 и 15 числа). Определите величину X этой пенсии, если доходность средств, вложенных в фонд, равна $i = 12\%$ в год.

Решение.

Будем считать для упрощения расчетов, что все месяцы имеют одну длину, равную 1/12 года.

Расчеты удобнее всего вести выбирая месяц и 1/2 месяца в качестве новых единиц времени. Для этого введем в рассмотрение эффективные процентые ставки для одного месяца и 1/2 месяца; в силу формулы (1.1.2) они равны соответственно

$$i_*^{(12)} = (1+i)^{1/12} - 1$$

$$i_*^{(24)} = (1+i)^{1/24} - 1$$

Соответствующие коэффициенты дисконтирования есть

$$v_*^{(12)} = (1 + i_*^{(12)})^{-1} = (1+i)^{-1/12}$$

$$v_*^{(24)} = (1 + i_*^{(24)})^{-1} = (1+i)^{-1/24}$$

После получения пенсии 1 сентября 1994 года осталось выплатить еще 20 ежемесячных пенсий. Приведенная ценность на 1 сентября 1994 года этой ренты есть

$$1000a_{\overline{20}|@i_*^{(12)}} = 1000\frac{1-(v_*^{(12)})^{20}}{i_*^{(12)}} = 1000\frac{1-(1+i)^{-20/12}}{(1+i)^{1/12}-1}$$

Полумесячных пенсий за период действия договора нужно будет выплатить 41. Поскольку промежуток времени от 1 сентября 1994 года до первой такой пенсии 15 сентября 1994 года равен 1/2 месяца, приведенная ценность на 1 сентября этой новой ренты есть

$$Xa_{\overline{41}|@i_*^{(24)}} = X\frac{1-(v_*^{(24)})^{41}}{i_*^{(24)}} = X\frac{1-(1+i)^{-41/24}}{(1+i)^{1/24}-1}$$

Поэтому для величины X новой пенсии мы имеем уравнение:

$$X\frac{1-(1+i)^{-41/24}}{(1+i)^{1/24}-1} = 1000\frac{1-(1+i)^{-20/12}}{(1+i)^{1/12}-1},$$

откуда

$$X \approx 487\text{руб. } 77 \text{ коп.}$$

По аналогии с обычными отсроченными рентами можно ввести отсроченные ренты, выплачиваемые с частотой p. Чтобы их определить, рассмотрим последовательные единичные промежутки времени

$$(0,1),(1,2),...,(m-1,m),(m,m+1),...,(m+n-1,m+n)$$

и разобьем каждый из n единичных промежутков $(m,m+1),...,(m+n-1,m+n)$ на p равных частей длиной $1/p$ каждая. Серия из np выплат, каждая величиной $1/p$, сделанных в конце (начале) этих подпромежутков, называется *отсроченной запаздывающей* (соответственно, *упреждающей*) *рентой, выплачиваемой с частотой* p (английские термины deferred immediate annuity payable $p$thly и deferred annuity-due payable $p$thly, соответственно), а ее ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ обозначается ${}_{m|}a_{\overline{n}|}^{(p)}$ (соответственно, ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$).

Как мы уже отмечали, различие между отсроченными рентами и обычными связано только с выбором начального момента времени. Если в качестве начального рассмотреть момент $t_m = m$, то приведенная ценность описанных только что рент будет равна $a_{\overline{n}|}^{(p)}$ и $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$ соответственно. Чтобы свести дело к моменту $t_0 = 0$, достаточно умножить эти числа на v^m, что даст следующие формулы, аналогичные (1.3.7) и (1.3.8):

$$ {}_{m|}a_{\overline{n}|}^{(p)} = v^m \cdot a_{\overline{n}|}^{(p)}, \tag{1.5.11}$$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} = v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}. \tag{1.5.12}$$

Основные формулы (1.5.7) и (1.5.8) можно получить проще с помощью замены одной серии платежей другой, базируясь на понимании финансовой природы процентов.

Предположим, что капитал 1 инвестируется в момент $t_0 = 0$. За время $1/p$ он заработает сумму $i^{(p)}/p$ в качестве процентов (по определению процентной ставки $i^{(p)}$). Мы можем в момент $1/p$ снять эту сумму со счета и иметь остаток 1, равный первоначальному капиталу. К моменту $2/p$ этот капитал опять заработает сумму $i^{(p)}/p$ в качестве процентов. Мы можем в момент $2/p$ снять эту сумму со счета и иметь остаток 1, равный первоначальному капиталу, и т.д.

Следовательно, капитал 1, который инвестирован в момент $t_0 = 0$, произведет серию платежей величиной $i^{(p)}/p$ в моменты $1/p, 2/p, \ldots, p/p = 1$ и при этом в момент $t = 1$ мы будем иметь на счете исходный капитал 1. Из соображений пропорциональности, капитал $1/i^{(p)}$, инвестированный в момент $t_0 = 0$, произведет серию платежей величиной $1/p$ в моменты $1/p, 2/p, ..., p/p = 1$ и при этом в момент $t = 1$ мы будем иметь на счете исходный капитал $1/i^{(p)}$.

Рассматривая приведенные ценности в момент $t_0 = 0$ исходного капитала $C = 1/i^{(p)}$, запаздывающей ренты, выплачиваемой с частотой p на промежутке [0,1], и остатка на счете $C = 1/i^{(p)}$ в момент $t = 1$, мы имеем:

$$\frac{1}{i^{(p)}} = a_{\overline{1}|}^{(p)} + \frac{1}{i^{(p)}} v,$$

т.е.

$$a_{\overline{1}|}^{(p)} = \frac{d}{i^{(p)}}.$$

Таким образом, запаздывающая рента, выплачиваемая с частотой p на промежутке [0,1], равносильна одному платежу величиной $\frac{d}{i^{(p)}}$ в момент $t_0 = 0$. В свою очередь этот платеж в момент $t = 1$ имеет ценность $\frac{d}{i^{(p)}} \cdot (1 + i) = \frac{i}{i^{(p)}}$. Итак, мы можем заменить запаздывающую ренту, выплачиваемую с частотой p на промежутке [0,1], одиночной выплатой $\frac{i}{i^{(p)}}$ в момент $t = 1$. Соответственно, запаздывающая рента, выплачиваемая с частотой p на промежутке $[0, n]$, может быть заменена серией выплат величиной $\frac{i}{i^{(p)}}$ каждая в моменты $t = 1, 2, ..., n$. Эта серия по определению является обычной запаздывающей рентой, выплачиваемой раз в год, и поэтому ее ценность в момент $t_0 = 0$ есть $\frac{i}{i^{(p)}} a_{\overline{n}|}$, что и доказывает справедливость формулы (1.5.8).

1.6 Детерминированные возрастающие ренты, выплачиваемые с частотой p

Прием с введением новой единицы времени, неоднократно использовавшийся в разделе 1.5, применим и для расчета возрастающих рент, выплачиваемых чаще, чем раз в год. Мы не будем развивать систематическую теорию рент такого рода, а проанализируем следующую конкретную пенсионную схему.

Участник пенсионного фонда раз в квартал на протяжении 5 лет вносит в фонд взнос, размер которого увеличивается на 500 рублей каждый квартал. Первоначальный взнос равен 1000 руб. Через 5 лет после заключения договора (т.е. спустя 3 месяца после последнего взноса) этот человек получает раз в год на протяжении 5 лет постоянную пенсию.

Попробуем оценить величину этой пенсии, если годовая доходность средств, вложенных в фонд равна 10 %.

Поскольку 5 лет=20 кварталов, принимая один квартал в качестве единицы времени, а момент заключения договора в качестве начального момента, мы получим следующую формулу для величины взноса в момент $t_k = k$:

$$c_k = 1000 + 500k, \ \ k = 0, 1, ..., 19.$$

Применяя формулы (1.4.12), (1.4.8) и (1.3.12), мы можем выразить накопления к моменту первой пенсии следующим образом:

$$\begin{aligned}
A &= 500 \cdot \ddot{s}_{\overline{20}|} + 500 \cdot (I\ddot{s})_{\overline{20}|} = 500 \cdot \ddot{s}_{\overline{20}|} + 500 \cdot \frac{\ddot{s}_{\overline{20}|} - 20}{d_*} \\
&= 500 \cdot (1 + \frac{1}{d_*}) \cdot \ddot{s}_{\overline{20}|} - \frac{10000}{d_*} \\
&= 500 \cdot (1 + \frac{1}{d_*}) \cdot \frac{(1 + i_*)^{20} - 1}{d_*} - \frac{10000}{d_*}.
\end{aligned}$$

Здесь i_* и d_* – эффективная квартальная процентная ставка и эффективная квартальная учетная ставка соответственно. В силу (1.1.2) и (1.1.13)

$$i_* = i^{(4)}/4 = (1 + i)^{1/4} - 1 \approx 2.41\%$$

$$d_* = d^{(4)}/4 = 1 - (1 - d)^{1/4} \approx 2.3546\%$$

$$(1 + i_*)^{20} - 1 = (1 + i)^5 - 1 = 61.051\%$$

Поэтому

$$A \approx 138800\text{руб.}$$

Теперь мы можем оценить величину x регулярной ежегодной пенсии. Ее приведенная ценность на начало пенсионного периода равна $x \cdot \ddot{a}_{\overline{5}|} = x \cdot (1 + a_{\overline{4}|}) = x \cdot 4.1699$. Поэтому $x \approx 33300$ руб.

1.7 Непрерывные ренты

Изучим вначале поведение номинальной процентной ставки $i^{(p)}$ и номинальной учетной ставки $d^{(p)}$ при росте параметра p.

Рассмотрим прежде всего простой численный пример. Пусть эффективная годовая процентная ставка i=20%, так что интенсивность процентов $\delta = 18.23\%$. Используя формулы (1.1.8) и (1.1.15) мы без труда можем построить следующую таблицу, содержащую значения величин $i^{(p)}$ и $d^{(p)}$ для $p = 2,\ 4,\ 12,\ 52,\ 365$ (эти значения p соответствуют полугодию, кварталу, месяцу, неделе, одному дню):

p	$i^{(p)}$	$d^{(p)}$
2	19.09%	17.43%
4	18.65%	17.82%
12	18.37%	18.09%
52	18.26%	18.20%
365	18.24%	18.23%

Как мы видим, при росте p как величины $i^{(p)}$, так и величины $d^{(p)}$ стремятся к интенсивности процентов δ.

В общем виде этот результат является следствием равенств

$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty} i^{(p)} &= \lim_{p\to\infty} p \cdot (e^{\delta/p} - 1) \\ &= \lim_{p\to\infty} p \cdot \left(1 + \frac{\delta}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right) - 1\right) \\ &= \lim_{p\to\infty} (\delta + o(1)) = \delta, \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty} d^{(p)} &= \lim_{p\to\infty} p \cdot (1 - e^{-\delta/p}) \\ &= \lim_{p\to\infty} p \cdot \left(1 - 1 + \frac{\delta}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) \\ &= \lim_{p\to\infty} (\delta + o(1)) = \delta. \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

Таким образом, при достаточно большом p можно использовать приближенные равенства

$$i^{(p)} \approx \delta, \quad d^{(p)} \approx \delta. \tag{1.7.3}$$

Как следует из приведенной таблицы, точность этих приближений достаточно велика. Например, уже при $p = 12$ относительная погрешность меньше 1%.

Приближенные равенства (1.7.3) можно уточнить взяв больше членов в разложениях экспонент в правых частях формул (1.1.8) и (1.1.15). Например, добавляя член порядка $1/p^2$, мы получим следующие
асимптотические разложения:

$$i^{(p)} = p \cdot \left(1 + \frac{\delta}{p} + \frac{\delta^2}{2p^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right) - 1\right) = \delta + \frac{\delta^2}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right), \tag{1.7.4}$$

$$d^{(p)} = p \cdot \left(1 - 1 + \frac{\delta}{p} - \frac{\delta^2}{2p^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right)\right) = \delta - \frac{\delta^2}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right). \tag{1.7.5}$$

Этим разложениям соответствуют следующие приближенные формулы:

$$i^{(p)} \approx \delta + \frac{\delta^2}{2p}, \quad d^{(p)} \approx \delta - \frac{\delta^2}{2p}. \tag{1.7.6}$$

Следующая таблица содержит точные и подсчитанные по формулам (1.7.6) приближенные значения $i^{(p)}$ и $d^{(p)}$ для случая $i = 20\%$:

p	$i^{(p)}$ точно	$i^{(p)}$ приближенно	$d^{(p)}$ точно	$d^{(p)}$ приближенно
1	20%	19.89%	16.67%	16.57%
2	19.09%	19.06%	17.43%	17.40%
4	18.65%	18.65%	17.82%	17.82%
12	18.37%	18.37%	18.09%	18.09%

Как видно из этой таблицы, точность приближений (1.7.6) очень велика. Приближенные значения практически совпадают с точными.

Рассмотрим теперь упреждающую и запаздывающую ренты, которые выплачиваются с частотой p на промежутке $[0, n]$, и предположим, что $p \to \infty$. Используя формулы (1.7.1), (1.7.2), (1.5.7), (1.5.8), (1.3.3), (1.3.4), мы имеем:

$$\lim_{p\to\infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{d}{\delta}\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{\delta}, \tag{1.7.7}$$

$$\lim_{p\to\infty} a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{d}{\delta} a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{\delta}. \tag{1.7.8}$$

Тот факт, что пределы (1.7.7) и (1.7.8) совпадают, легко объяснить интуитивно.

Если $p \to \infty$, то мы имеем дело с большим числом малых платежей (величиной $1/p$ каждый), совершаемых через малые промежутки времени $1/p$. В пределе при $p \to \infty$ можно рассматривать поступление средств как непрерывный процесс, подобный течению жидкости. При этом в пределе различие между платежами в начале и в конце промежутков исчезнет, т.е. пределы (1.7.7) и (1.7.8) обязаны совпадать.

Рассматривая поступление средств в предельном случае $p = \infty$ как непрерывный поток жидкости, легко непосредственно определить величину этих пределов. Для этого подсчитаем скорость поступления средств. Пусть Δ-малый промежуток времени. Он состоит примерно из Δp промежутков длиной $1/p$ и поэтому на промежутке Δ поступит сумма, примерно равная $\frac{1}{p}\cdot(\Delta p) = \Delta$. Таким образом, скорость поступления средств в этой непрерывной модели постоянна и равна 1.

Для подсчета приведенной стоимости (в момент $t_0 = 0$) поступивших средств, разобьем промежуток $[0, n]$ на большое число малых промежутков $\Delta_j = (t_j, t_{j+1})$; $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = n$. На промежутке Δ_j поступит сумма, примерно равная Δ_j. Ее приведенная стоимость примерно равна

$$\sum_j v^{t_j} \cdot \Delta_j, \tag{1.7.9}$$

причем точность этого приближения увеличивается с уменьшением Δ_j, т.е. в пределе при $\max \Delta_j \to 0$ сумма (1.7.9) даст *точное* значение приведенной стоимости непрерывного потока платежей. Однако, сумма (1.7.9) – это ни что иное, как интегральная сумма для интеграла

$$\int_0^n v^t\,dt. \tag{1.7.10}$$

Поэтому точное значение приведенной стоимости непрерывного потока платежей в момент $t_0 = 0$, которое обозначается $\overline{a}_{\overline{n}|}$, дается интегралом (1.7.10):

$$\overline{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,dt = \int_0^n e^{-\delta t}\,dt = -\frac{1}{\delta} e^{-\delta t}\Big|_0^n = \frac{1-v^n}{\delta}. \tag{1.7.11}$$

Появившийся в этом рассуждении непрерывный поток платежей называется *непрерывно выплачиваемой рентой* (continuously payable annuity).

Фактически мы имеем дело с постоянной непрерывной рентой, когда скорость поступления средств не меняется с течением времени. Можно ввести и произвольную непрерывную ренту на промежутке $[0, n]$, которая характеризуется произвольной скоростью $\rho(t)$ поступления средств в момент t. Для такой ренты сумма, поступившая на малом промежутке $\Delta_j = (t_j, t_{j+1})$, приближенно равна $\rho(t_j) \cdot \Delta_j$, ее приведенная ценность в момент $t_0 = 0$ приближенно равна $v^{t_j}\rho(t_j)\Delta_j$, и поэтому общая приведенная стоимость примерно равна

$$\sum_j v^{t_j}\rho(t_j)\Delta_j. \tag{1.7.12}$$

Как и раньше, эта сумма может рассматриваться как интегральная сумма для интеграла

$$\int_0^n v^t\rho(t)dt. \tag{1.7.13}$$

Поскольку при $\max \Delta_j \to 0$ сумма (1.7.12) в пределе дает точное значение приведенной стоимости в момент $t_0 = 0$ рассматриваемого непрерывного потока платежей, интеграл (1.7.13) и дает эту приведенную стоимость.

Пределы (1.7.7) и (1.7.8) вместе с соотношением (1.7.11) позволяют записать приближенные равенства:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} \approx \overline{a}_{\overline{n}|}, \quad a_{\overline{n}|}^{(p)} \approx \overline{a}_{\overline{n}|}.$$

Используя асимптотические разложения (1.7.4) и (1.7.5), можно получить и более точные формулы:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} &= \frac{1-v^n}{d^{(p)}} = \frac{1-v^n}{\delta - \frac{\delta^2}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)} \\ &= \frac{1-v^n}{\delta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\delta}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)} = \overline{a}_{\overline{n}|} \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2p}\right) + o\left(\frac{1}{p}\right),\end{aligned} \tag{1.7.14}$$

$$\begin{aligned}a_{\overline{n}|}^{(p)} &= \frac{1-v^n}{i^{(p)}} = \frac{1-v^n}{\delta + \frac{\delta^2}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)} \\ &= \frac{1-v^n}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)} = \overline{a}_{\overline{n}|} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{2p}\right) + o\left(\frac{1}{p}\right).\end{aligned} \tag{1.7.15}$$

Сумма, накопленная к моменту t при непрерывном поступлении средств со скоростью 1, обозначается $\overline{s}_{\overline{t}|}$. Она может быть подсчитана приведением суммы $\overline{a}_{\overline{t}|}$ к моменту t :

$$\overline{s}_{\overline{t}|} = \overline{a}_{\overline{t}|} \cdot (1+i)^t = \frac{(1+i)^t - 1}{\delta}. \qquad (1.7.16)$$

Из (1.7.1), (1.5.9), (1.5.10) следует, что для $t = n + k/p$

$$\delta \cdot \overline{a}_{\overline{t}|} = d^{(p)} \cdot \ddot{a}^{(p)}_{\overline{t}|} = i^{(p)} \cdot a^{(p)}_{\overline{t}|} = 1 - v^n.$$

Эти соотношения означают, что непрерывная выплата процентов со скоростью δ, выплата процентов величиной $d^{(p)}/p$ в начале каждого промежутка длиной $1/p$ и выплата процентов величиной $i^{(p)}/p$ в конце каждого промежутка длиной $1/p$ равносильны. Этот вывод следует также и из того, что при инвестировании суммы 1 в момент $t_0 = 0$ непрерывная выплата процентов со скоростью δ на промежутке длиной $1/p$, выплата процентов величиной $d^{(p)}/p$ в начале этого промежутка и выплата процентов величиной $i^{(p)}/p$ в конце этого промежутка приводят к остатку на счете, равному 1.

Понятие непрерывной ренты позволяет естественным способом определить размер компенсации s в случае, когда человек, который получает заработную плату C к конце каждого промежутка длиной T, решил уволиться спустя время t, $0 \le t \le T$, после очередного платежа.

Поскольку человек рабтает непрерывно, естественно считать, что он зарабатывает деньги непрерывно с некоторой скоростью ρ. Выплата зарплаты в конце периода T означает, что эта непрерывная рента заменяется дискретной. Приравнивая стоимость в момент T непрерывной ренты на промежутке $[0, T]$ и стоимость единичного платежа C в тот же момент, мы имеем:

$$\rho \cdot \overline{s}_{\overline{T}|} = C,$$

т.е. в силу (1.7.16)

$$\rho = \frac{C\delta}{(1+i)^T - 1}.$$

Если человек проработал время t в очередном промежутке длиной T, то он должен получить непрерывное накопление

$$s = \rho \cdot \overline{s}_{\overline{t}|} = \rho \frac{(1+i)^t - 1}{\delta} = C \frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^T - 1}. \qquad (1.7.17)$$

Если процентная ставка i мала, то $(1+i)^t \approx 1+it$ и поэтому из (1.7.17) следует, что

$$s \approx C\frac{t}{T},$$

т.е. компенсация прямо пропорциональна отработанному времени. Однако, если i велико, то принцип прямой пропорциональности неприменим. Предположим, например, что $i = 300\%$, $T = 1$ месяц, $t = 1/2$ месяца. Тогда справедливая компенсация за отработанную половину месяца есть $C/3$, что гораздо меньше, чем $C/2$.

Рассмотрим теперь в определенном смысле двойственную ситуацию. Человек в момент $t_0 = 0$ оплачивает авансом C пользование некоторыми услугами в течение промежутка времени T. Спустя некоторое время он решает отказаться от этих услуг. В этой ситуации он может рассчитывать на определенную компенсацию s, которая тем больше, чем больше оплаченное, но не использованное время t (обратим внимание, что в отличие от предыдущего случая t обозначает не момент отказа, а время от момента отказа до момента T.)

Величина компенсации s обычно определяется в рамках следующей модели. Поскольку услугами человек может пользоваться в любой момент времени, естественно предположить, что сумма, гарантирующая пользование услугами на промежутке $(t, t+dt)$, есть $\rho\cdot dt$, где ρ – стоимость услуг в течение единицы времени. Это означает, что если человек желает оплатить право пользоваться услугами в течение промежутка $(0, T)$, он должен вносить непрерывную ренту со скоростью ρ. Оплата услуг авансом означает, что эта непрерывная рента заменяется единичной выплатой суммы C в момент $t_0 = 0$. Приравнивая стоимости этих платежей в момент $t_0 = 0$, мы получим:

$$C = \rho \cdot \overline{a}_{\overline{T}|},$$

откуда

$$\rho = \frac{C\delta}{1-v^T}.$$

Теперь легко определить величину компенсацинной выплаты. Как следует из проведенных рассуждений, она равна стоимости в момент $T-t$ отказа непрерывной ренты, выплачиваемой на промежутке $(T-t, T)$, т.е. в течение времени t :

$$s = \rho \cdot \overline{a}_{\overline{t}|} = \rho \cdot \frac{1-v^t}{\delta} = C\frac{1-v^t}{1-v^T}. \qquad (1.7.18)$$

1.8 Доходность инвестиционных проектов

Инвестиционный проект – это сделка, в которой инвестор в определенные моменты времени $t'_1, t'_2, \ldots$ вкладывает средства в размере $a'_1, a'_2, \ldots$ соответственно, а затем в моменты $t''_1, t''_2, \ldots$ получает доход в размере $a''_1, a''_2, \ldots$ соответственно.

Моменты $t'_1, t'_2, \ldots$, когда инвестор вкладывает средства, не обязаны предшествовать моментам $t''_1, t''_2, \ldots$, когда инвестор получает доход (хотя в приложениях к страхованию это обычно имеет место), а могут чередоваться.

Для упрощения теоретических рассуждений удобно рассматривать объединенную последовательность моментов времени $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ и считать, что

(1) если $t_k = t''_i$, то в момент t_k проект приносит прибыль в размере $c_k = a''_i$;

(2) если $t_k = t'_j$, то в момент t_k проект приносит отрицательный доход в размере $c_k = -a''_j$.

Последовательность $(t_1, c_1), \ldots, (t_n, c_n)$ называется чистым денежным потоком.

Инвестиционный проект можно рассматривать как банковский счет: если для некоторого k доход $c_k < 0$, то мы считаем, что в момент t_k вкладчик вносит сумму $-c_k$ на свой счет, а если $c_k > 0$, то мы считаем, что в момент t_k вкладчик снимает сумму c_k со счета.

Если i – годовая процентная ставка по этому счету, то в момент $t_n + 0$ баланс составит

$$-\sum_{k=1}^{n} c_k (1+i)^{t_n - t_k}. \tag{1.8.1}$$

Следует учесть, что в определенные промежутки времени возможен отрицательный баланс по счету (т.е. банк кредитует вкладчика). Формула (1.8.1) верна в предположении, что ставка, по которой банк дает деньги в долг, равна ставке i, в соответствии с которой банк начисляет проценты по вкладу.

Если считать, что в момент t_n проект завершается, то баланс (1.8.1) должен быть равен нулю. Это условие, как нетрудно видеть, можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (1+i)^{-t_k} = 0. \tag{1.8.2}$$

Сопоставляя инвестиционный проект и этот гипотетический банковский счет, естественно принять в качестве меры доходности инвестиционного проекта процентную ставку по банковскому счету, который обеспечивает тот же денежный поток. Эта процентная ставка называется *внутренней ставкой доходности* (internal rate of return – IRR). Уравнение (1.8.2), которому удовлетворяет величина IRR, называется *уравнением доходности* (yield equation).

Вообще говоря, уравнение доходности имеет несколько действительных корней. Интерпретировать как процентную ставку можно лишь корень, который больше, чем -1; при этом лишь положительный корень означает собственно доход. Ясно, что если не делать никаких предположений о структуре инвестиционного проекта, то уравнение доходности может иметь несколько таких корней. В этом случае считают, что внутренняя ставка доходности не определена.

В приложениях к страхованию жизни приходится иметь дело с проектами, в которых все отрицательные платежи предшествуют положительным:

$$c_1, c_2, \ldots, c_l < 0, \; c_{l+1}, \ldots, c_n > 0.$$

Для таких проектов уравнение доходности имеет единственный корень $i_0 > -1$, который принимают в качестве IRR. Для доказательства перепишем уравнение доходности (1.8.2) в виде

$$\sum_{k=1}^{l}(-c_k)(1+i)^{t_l-t_k} = \sum_{k=l+1}^{n} c_k(1+i)^{t_l-t_k}. \tag{1.8.3}$$

В левой части этого равенства показатели степеней, $t_l - t_k$, положительны (в случае $k = l$ соответствующий показатель степени равен 0), а в правой – отрицательны. Поэтому при $i \in (-1, +\infty)$ левая часть возрастает от $-c_l$ до $+\infty$, а правая – убывает от $+\infty$ до 0. Поэтому уравнение (1.8.3) имеет и притом единственный корень $i_0 \in (-1, +\infty)$.

Если, кроме того, абсолютная величина всех отрицательных платежей меньше, чем сумма всех положительных:

$$-c_1 - c_2 - \cdots - c_l < c_{l+1} + \cdots + c_n, \tag{1.8.4}$$

то этот корень уравнения доходности положителен. Для доказательства достаточно отметить, что при выполнении условия (1.8.4) в точке $i = 0$ левая часть уравнения (1.8.3) меньше правой.

Величину IRR удобно определять численно с помощью Microsoft Excel. Рассмотрим, например, следующую задачу.

Пример[1]. 1 января 1996 г. инвестор вкладывает 1000 в фонд. 1 января 1998 г. он вкладывает еще 1000. Процентная ставка, в соответствии с которой фонд ежегодно увеличивает вклад, меняется от года к году и равна эффективной годовой процентной ставке, соответствующей ставке роста ВВП за последний квартал предыдущего года.

Следующая таблица содержит данные о размере ВВП (в условных единицах).

год	3-й квартал	4-й квартал
1995	800.0	808.0
1996	850.0	858.5
1997	900.0	918.0
1998	930.0	948.6

Через четыре года, 1 января 2000 г., инвестор получает все накопленные средства.

Найдите внутреннюю ставку доходности этого проекта.

Решение. Эффективная *квартальная* процентная ставка роста ВВП за последний квартал 1995, 1996, 1997, 1998 года равна 1%, 1%, 2% и 2% соответственно. Поэтому фонд начисляет первые два года $(1.01^4-1) \approx 4.06\%$ годовых, а последние два года – $(1.02^4-1) \approx 8.24\%$. К 1 января 2000 г. средства инвестора вырастут до

$$\left(1000 \cdot \left(1.01^4\right)^2 + 1000\right) \cdot \left(1.02^4\right)^2 \approx 2440.40.$$

Чистый денежный поток, описывающий этот проект есть:

$$t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = 2, t_4 = 3, t_5 = 4$$
$$c_1 = -1000, c_2 = 0, c_3 = -1000, c_4 = 0, c_5 = 2440.40.$$

Откроем новый файл программы Microsoft Excel и внесем в ячейки A1,B1,C1,D1,E1 появившейся таблицы значения c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 соответственно; в ячейку F1 введем формулу =IRR(A1:E1). Программа автоматически подсчитает корень соответствующего уравнения доходности (он равен $i_0 \approx 6.7822\%$) и внесет его в ячейку F1.

Следует отметить, что внутренняя ставка доходности является простейшей характеристикой доходности инвестиционного проекта.

---

[1] *Course/Exam 2 – Economics, Finance and Interest Theory,* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, November 2000, Problem 51.

В некоторых случаях ее использование может привести к ошибочным решениям и поэтому нужен более детальный анализ.[2]

1.9 О стандартизации терминологии и обозначений

Как мы видели, в теории сложных процентов естественно появляется большое число понятий, величин и обозначений, полезных при финансовых расчетах. Для того, чтобы упростить общение между актуариями, облегчить внедрение результатов научных исследований и т.п., еще в 1898 году II Международный актуарный конгресс, состоявшийся в Лондоне, решил стандартизовать термины и обозначения основных величин, встречающихся в финансовой и актуарной математике. Изменения и дополнения, связанные с развитием актуарной науки, были утверждены на XIV Международном актуарном конгрессе, состоявшемся в Мадриде в 1954 году. Ряд новейших обозначений утвержден только национальными профессиональными обществами актуариев. Введенные в предыдущих разделах обозначения для приведенных стоимостей и накоплений для различных регулярных рент являются простейшими образцами такой стандартизации. Как нетрудно видеть, основные правила, регулирующие эти обозначения, следующие:

1. приведенная стоимость ренты в настоящий момент времени обозначается буквой a, накопление – буквой s;

2. если рента упреждающая, то сверху ставится двоеточие; если рента непрерывная – то черта;

3. срок выплаты ренты указывается в виде индекса справа внизу, обрамленного уголком;

4. если рента отсрочена на m лет, то внизу слева ставится индекс m с вертикальной чертой.

В последующих разделах нашей книги число таких обозначений (порой довольно необычных) еще больше возрастет. Свободное владение этими понятиями и обозначениями является важной неотъемлемой частью профессиональных знаний актуария. Поэтому мы обращаем внимание читателя на необходимость серьезного отношения к проблеме запоминания терминов и обозначений.

Необходимо подчеркнуть, что эта стандартизация относится к литературе на английском языке. Если с обозначениями никаких

---

[2] Подробнее об оценке и сравнении инвестиционных проектов можно прочитать, например, в учебнике J.J. McCutcheon, W.F. Scott. *An Introduction to the Mathematics of Finance.* Oxford, Butterworth-Heinemann Ltd, 1986.

проблем не возникает (латинские буквы и специальные символы без изменений должны использоваться в отечественной литературе), то термины приходится переводить на русский язык. Общепринятого стандарта здесь нет и поэтому в разных учебниках и статьях можно встретить разные варианты перевода.

В настоящее время обсуждается вопрос о целесообразности введения новых обозначений. Это связано с широким использованием персональных компьютеров для актуарных расчетов (что делает мало полезными целый ряд классических понятий актуарной и финансовой математики вроде упрощающих функций) и набора текстов (например, в системе TeX символ $\ddot a^{(p)}_{\overline{n}|}$ набирается следующей цепочкой символов: `$\ddot a^{(p)}_{\overline n\vert}$`; кроме того, классические актуарные обозначения не имеют линейной структуры и поэтому не могут использоваться в качестве идентификаторов в компьютерных программах).

1.10 Примеры расчетов

Пример 1[3]**.** 1 января 2002 г. человек в возрасте 40 лет заключает договор страхования жизни на 10 лет со страховой суммой 100 000 и 5-летним периодом выплаты премий. Известно, что

(1) страховое возмещение выплачивается в момент смерти;
(2) премия в размере 4 000 платится в начале года на протяжении 5 лет;
(3) $i = 0.05$.

Подсчитайте величину потерь компании по этому договору, приведенную к моменту его заключения, если застрахованный умирает 30 июня 2004г.

Решение. Поскольку остаточное время жизни T_{40} точно известно:

$$T_{40} = 2.5,$$

в рассматриваемой ситуации полностью отсутствует фактор случайности.

Мы точно знаем обязательства компании; они заключаются в выплате 100 000 в момент $T_{40} = 2.5$ (момент подписания договора при-

---

[3] *Course/Exam 3 – Actuarial Models*, The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, May 2001, Problem 2.

нимается в качестве начального). Приведенная стоимость этих обязательств равна

$$100\,000 \cdot (1.05)^{-2.5} \approx 88\,517.$$

Мы также точно знаем, что страхователь выплатил 3 премии (по 4000 каждая): 1 января 2002 г., 1 января 2003 г. и 1 января 2004 г. Приведенная стоимость этого денежного потока равна

$$4\,000 \cdot (1 + 1.05^{-1} + 1.05^{-2}) \approx 11\,438.$$

Поэтому потери компании, приведенные на момент заключения договора, составляют сумму 77 079.

Пример 2[4]**.**

Рента выплачивается ежегодно с запаздыванием на протяжении 20 лет. Первая выплата имеет величину 8 000, а величина каждой последующей выплаты уменьшается на 300 каждый год. Найдите современную стоимость этой ренты при годовой процентной ставке $i = 5\%$.

Решение. Пусть современная стоимость равна X. Тогда

$$X = 8000v + 7700v^2 + 7400v^3 + \cdots + 2600v^{19} + 2300v^{20}$$

и поэтому

$$(1+i)X = 8000 + 7700v + 7400v^2 + \cdots + 2600v^{18} + 2300v^{19}.$$

Вычитая мы получим:

$$iX = 8000 - 300(v + v^2 + \cdots + v^{19}) - 2300v^{20}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} X &= \frac{8000 - 300a_{\overline{19}|} - 2300v^{20}}{i} \\ &= \frac{8000i - 300(1 - v^{19}) - 2300iv^{20}}{i^2} \\ &\approx 70\,151. \end{aligned}$$

---

[4]J.J. McCutcheon, W.F. Scott. *An Introduction to the Mathematics of Finance.* Oxford, Butterworth-Heinemann Ltd, 1986. Problem 3.6.1

Использование функций, связанных с возрастающими рентами, позволяет дать более короткое решение.

Рассмотрим эту ренту как постоянную ренту величиной 8300 в год, минус возрастающая рента, для которой r-й платеж имеет величину $300r$. Значит,

$$\begin{aligned} X &= 8300(v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{20}) - 300(v + 2v^2 + 3v^3 + \cdots + 20v^{20}) \\ &= 8300a_{\overline{20}|} - 300(Ia)_{\overline{20}|} \\ &= 8300a_{\overline{20}|} - 300\frac{\ddot{a}_{\overline{20}|} - 20v^{20}}{i} \\ &\approx 70\ 151. \end{aligned}$$

2. ОСНОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ

2.1 Время жизни как случайная величина

Неопределенность момента смерти является основным источником случайности при страховании жизни. Поэтому создание адекватной теории для страхования жизни должно начинаться с разработки системы понятий и определения величин, позволяющих высказывать объективные суждения о продолжительности жизни. Основным является следующий вывод.

Относительно момента смерти отдельного человека нельзя сказать ничего определенного. Однако, если мы имеем дело с большой однородной группой людей и не интересуемся судьбой отдельных людей из этой группы, то мы находимся в рамках теории вероятностей как науки о массовых случайных явлениях, обладающих свойством устойчивости частот. Соответственно *мы можем говорить о продолжительности жизни как о случайной величине* T.

Наряду с моментом смерти важную роль в страховании играет причина смерти. Дело в том, что договоры страхования обычно не покрывают риск смерти в результате совершения противоправных действий, случайного отравления алкоголем, самоубийства (в течение двух первых лет действия договора) и т.п. Кроме того, размер страхового возмещения может зависеть от причины смерти; например, если смерть явилась следствием несчастного случая, то страховая сумма обычно удваивается. Это означает, что следует рассматривать двухмерную случайную величину (T, J), где T указывает момент смерти, а вторая компонента J – причину смерти. Однако, поскольку наша цель заключается в изложении *основ* теории страхования жизни, мы не будем явно учитывать причину смерти в нашем изложении.

2.2 Функция выживания

В теории вероятностей описывают стохастическую природу любой случайной величины T функцией распределения $F(x)$, которая определяется как вероятность того, что случайная величина T не больше, чем число x :

$$F(x) = \mathbf{P}(T \leq x).$$

В актуарной математике принято работать не с функцией распределения, а с дополнительной функцией распределения $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, которая дает вероятность того, что случайная величина T больше, чем число x. Применительно к продолжительности жизни, $1 - F(x)$ — это вероятность того, что человек доживет до возраста x лет. Функция $s(x) = 1 - F(x)$ называется *функцией выживания* (survival function):

$$s(x) = \mathbf{P}(T > x).$$

Некоторое представление о характере зависимости $s(x)$ от x дает следующая таблица, построенная на базе таблицы продолжительности жизни населения США:

x	$s(x)$	x	$s(x)$
0	1	60	.837
5	.985	65	.771
10	.983	70	.682
15	.982	75	.568
20	.977	80	.432
25	.971	85	.280
30	.965	90	.142
35	.958	95	.050
40	.949	100	.012
45	.936	105	.002
50	.915	110	0
55	.883		

Как и всякая дополнительная функция распределения положительной случайной величины, функция выживания обладает следующими свойствами:

$$s(x) \text{ убывает (нестрого)}, \tag{2.2.1}$$

$$s(0) = 1, \tag{2.2.2}$$

$$s(+\infty) = 0, \tag{2.2.3}$$

$$s(x) \text{ непрерывна справа.} \tag{2.2.4}$$

Эти свойства являются характеристическими, т.е. если некоторая функция $s(x)$ обладает этими свойствами, то она является дополнительной функцией распределения некоторой положительной случайной величины, т.е. описывает некоторый закон смертности.

Кроме того, естественно допустить, что $s(x)$ непрерывна, т.к. в противном случае существовал бы некоторый фиксированный возраст, по достижении которого обязательно умирала некоторая доля населения. Это замечание, в частности, влечет,что функцию выживания можно было бы определить и как $\mathbf{P}(T \geq x)$ (соответственно понимая под функцией распределения $\mathbf{P}(T < x)$).

Денежные выплаты, связанные с различными видами страхования и пенсионными схемами, определяются тем, жив или нет в рассматриваемый момент времени человек, с которым заключен договор. Если $T = x$, то факт, жив или нет человек в момент x, является предметом соглашения. Обычно мы будем считать, что человек уже мертв в этот момент. Однако иногда формулы упрощаются, если считать, что человек еще жив в этот момент. Поскольку событие $\{T = x\}$ имеет нулевую вероятность, решать эту проблему можно любым удобным способом.

Второе естественное ограничение связано с убыванием функции выживания. Ясно, что $s(x)$ должна быть строго убывающей функцией, т.к. в противном случае существовал бы фиксированный неслучайный возрастной промежуток, когда смерть невозможна.

Рассмотрим теперь вопрос о возможных значениях величины T. С одной стороны, вряд ли мы можем допустить, что какой-то человек проживет 1000 лет. С другой стороны, предположение о том, что человек может прожить x сек, но не может прожить $x + 1$ сек, в равной степени неестественно. Однако это ведет к заключению,что потенциально время жизни безгранично. В актуарной науке в зависимости от ситуации допускают оба предположения. В таблицах продолжительности жизни обычно считают,что существует некоторый *предельный возраст* (limiting age) ω (как правило, $\omega = 100 - 120$ лет) и соответственно $s(x) = 0$ при $x > \omega$. При описании смертности аналитическими законами обычно считают, что время жизни неограниченно, однако подбирают вид и параметры законов так, чтобы вероятность жизни свыше некоторого возраста была бы пренебрежимо мала.

Функция выживания имеет простой статистический смысл. Допустим, что мы наблюдаем за группой из l_0 родившихся людей и фиксируем их моменты смерти: $T^{(1)}, T^{(2)}, ..., T^{(l_0)}$. Обозначим число живых представителей этой группы в возрасте x через $L(x)$. Ясно, что

$$L(x) = \sum_{i=1}^{l_0} I(T^{(i)} > x),$$

где $I(A)$ – индикатор события $A: I(A) = 1$, если событие A осуществилось и $I(A) = 0$ в противном случае.

Для $l_x \equiv \mathbf{E}L(x)$ отсюда имеем:

$$\begin{aligned} l_x \equiv \mathbf{E}L(x) &= \sum_{i=1}^{l_0} \mathbf{E}(I(T^{(i)} > x)) \\ &= \sum_{i=1}^{l_0} \mathbf{P}(T^{(i)} > x) = \sum_{i=1}^{l_0} s(x) = l_0 s(x). \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Итак, функция выживания $s(x)$ описывает среднюю долю живых представителей некоторой фиксированной группы новорожденных к моменту x.

В актуарной математике часто работают не с функцией выживания $s(x)$, а с только что введенной величиной l_x (зафиксировав начальный размер группы l_0). Скажем, в таблицы продолжительности жизни населения США включена величина l_x при $l_0 = 100000$. В терминах переменной l_x приведенная выше таблица для функции выживания может быть интерпретирована следующим образом: из 1000 новорожденных до возраста 10 лет доживает 983 человека, до 20 лет – 977 человек, до 30 лет – 965 человек, до 40 лет – 949 человек, до 50 лет – 915 человек, до 60 лет – 837 человек, до 70 лет – 682 человека, до 80 лет – 432 человека, до 90 лет – 142 человека, до 100 лет – 12 человек, до 110 лет – ни одного (на самом деле $s(110)$ величина порядка $10^{-4} - 10^{-5}$, так что из 1 млн. новорожденных несколько десятков человек доживут до 110 лет).

2.3 Кривая смертей

Приведенные только что численные данные можно переформулировать следующим образом: в первые десять лет жизни умрет примерно 17 человек, в возрасте от 10 до 20 лет – 6 человек,от 20 до 30 лет – 12 человек, от 30 до 40 лет – 16 человек,от 40 до 50 лет – 34 человека, от 50 до 60 лет – 78 человек, от 60 до 70 лет – 155 человек, от 70 до 80 лет – 250 человек, от 80 до 90 лет – 290 человек, от 90 до 100 лет – 130 человек, от 100 до 110 лет – 12 человек.

Очевидно, что эти данные (о среднем числе умерших за данный интервал $(x, x+10)$ нагляднее характеризуют смертность, чем данные об общем числе доживших до возраста x. Они позволяют выделить как наиболее опасные – первое десятилетие жизни (смертность втрое выше, чем во второе десятилетие) и период от 70 до 90 лет, за который умирает более половины состава исходной группы в 1000 человек.

В связи с этим мы введем новую случайную величину ${}_tD_x$ как число умерших в возрасте от x до $x+t$ лет (из фиксированного числа l_0 новорожденных). Она связана с ранее введенной величиной $L(x)$, выражающей число живых представителей этой группы к моменту x, простым соотношением:

$$ {}_tD_x = L(x) - L(x+t) = \sum_{i=1}^{l_0} I(x < T^{(i)} \leq x+t). \qquad (2.3.1) $$

Среднее значение случайной величины ${}_tD_x$, т.е. среднее число представителей группы, умерших в возрасте от x до $x+t$ лет, обозначается ${}_td_x$:

$$ {}_td_x = \mathbf{E}_tD_x. \qquad (2.3.2) $$

Нетрудно видеть, что

$$ {}_td_x = l_x - l_{x+t} = l_0(s(x) - s(x+t)). \qquad (2.3.3) $$

Здесь $s(x) - s(x+t) = \mathbf{P}(x < T \leq x+t)$ – вероятность смерти в промежутке $(x, x+t]$.

Случай $t = 1$ встречается в актуарной математике особенно часто. Это связано как с обычным для людей счетом прожитых лет целыми годами, так и с обычной практикой страхования жизни на 1, 3, 5 и т.п. целое число лет. Поэтому в актуарной математике принято опускать индекс 1, указывающий на то, что рассматриваемая величина относится к периоду 1 год. Таким образом, ${}_1d_x$ обозначается просто d_x:

$$ d_x = l_x - l_{x+1} = l_0(s(x) - s(x+1)). \qquad (2.3.4) $$

Применяя формулу Лагранжа, мы можем записать $s(x) - s(x+1)$ как $-s'(c)$, где c – некоторое число между x и $x+1$. Имея ввиду, что $s'(x)$ мало меняется на протяжении одного года, можно считать, что верно приближенное равенство:

$$d_x \approx -l_0 s'(x).$$

Величина $f(x) = -s'(x) = F'(x)$, как известно, в обычном курсе теории вероятностей называется плотностью случайной величины T (и функции распределения $F(x)$). Как мы теперь видим, она крайне полезна и в актуарной математике, т.к. приближенно описывает долю умерших на интервале $(x, x+1)$ из исходной группы в l_0 новорожденных (точнее говоря, при малых t величина $-s'(x)t$ приближенно описывает долю умерших в возрасте от x до $x+t$ лет из исходной группы в l_0 новорожденных). В актуарной математике график плотности $f(x)$ (или, что практически одно и то же, график функции $l_0 f(x)$) называют *кривой смертей* (the curve of deaths).

Представление о характере зависимости $f(x)$ от x можно получить из таблицы, которая приведена в разделе 5.1; наряду с другими характеристиками продолжительности жизни в ней табулирована функция $d_x \approx l_0 f(x)$.

Поскольку функция выживания $s(x)$ убывает, плотность $f(x) = -s'(x)$ – неотрицательна:

$$f(x) \geq 0. \tag{2.3.5}$$

Кроме того, из свойств (2.2.2), (2.2.3) функции выживания мы имеем:

$$\int_0^\infty f(x)dx = -\int_0^\infty ds(x) = -s(x)\Big|_0^\infty = -s(\infty) + s(0) = 1, \tag{2.3.6}$$

$$\int_x^\infty f(u)du = -\int_x^\infty ds(u) = -s(u)\Big|_x^\infty = -s(\infty) + s(x) = s(x). \tag{2.3.7}$$

Наоборот, если некоторая функция $f(x)$ обладает свойствами (2.3.5), (2.3.6), то функция $s(x)$, построенная по формуле (2.3.7), обладает свойствами (2.2.1)–(2.2.4), т.е. описывает некоторый закон смертности. Формулы (2.3.7) показывают, что функции распределения $F(x)$ и выживания $s(x)$ могут быть восстановлены по плотности. Таким образом:

свойства (2.3.5), (2.3.6) являются характеристическими свойствами кривой смертей;

кривая смертей может быть использована в качестве первичной характеристики продолжительности жизни.

2.4 Интенсивность смертности

Вернемся опять к численным данным относительно числа умерших за десятилетние периоды из $l_0 = 1000$ новорожденных. За каждое из десятилетий от 60 до 70 лет и от 90 до 100 лет умерло примерно одно и то же число людей (155 и 130 соответственно). Однако, если учесть, что к моменту 60 лет в живых было 837 человек, а к моменту 90 лет - только 142 человека, то становится ясно, что характеризовать смертность за определенный период времени абсолютными цифрами явно недостаточно. Необходимо указывать, какую долю число умерших за период составляет от числа живых к началу этого периода. Эта доля для периода $60 < t < 70$ равна 18,5% , а для периода $90 < t < 100$ - 91,5% . Она выражает вероятность смерти в течение ближайшего десятилетия человека, дожившего до 60 и 90 лет соответственно.

В общем случае вероятность смерти человека, дожившего до x лет, в течение ближайших t лет равна:

$$\mathbf{P}(x < T \leq x + t | T > x) = \frac{\mathbf{P}(x < T \leq x + t)}{\mathbf{P}(T > x)} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}$$
$$= \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}. \tag{2.4.1}$$

Если t мало или $f(u)$ мало меняется на интервале $x < u < x + t$, то применяя формулу Тейлора, можно написать приближенное равенство:

$$\mathbf{P}(x < T \leq x + t | T > x) \approx \frac{f(x)}{1 - F(x)} t$$

Величина

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \tag{2.4.2}$$

называется *интенсивностью смертности* (the force of mortality) и играет важную роль в актуарной математике, т.к. при малых t величина $\mu_x t$ приближенно выражает вероятность смерти в интервале $(x, x+t)$ человека, дожившего до x лет.

Представление о характере зависимости μ_x от x можно получить из таблицы, которая приведена в разделе 4.1; наряду с другими характеристиками продолжительности жизни в ней табулирована функция

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \approx \mu_x.$$

Нетрудно понять, что:

$$\mu_x \geq 0. \tag{2.4.3}$$

Определение μ_x как $F'(x)/(1 - F(x))$ или $-s'(x)/s(x)$ можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно $F(x)$ (или относительно $s(x)$), откуда мы получаем следующие формулы:

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\int_0^x \mu_u du\right\}, \quad s(x) = \exp\left\{-\int_0^x \mu_u du\right\}. \tag{2.4.4}$$

Условие $F(+\infty) = 1$ означает, что верно свойство:

$$\int_0^\infty \mu_u du = +\infty. \tag{2.4.5}$$

Наоборот, допустим, что некоторая функция μ_x обладает свойствами (2.4.3), (2.4.5). Тогда функция $s(x)$, построенная по формуле (2.4.4) обладает свойствами (2.2.1)–(2.4.4), т.е. описывает некоторый закон смертности. Формулы (2.4.4) показывают, что функции распределения $F(x)$ и выживания $s(x)$ могут быть восстановлены по плотности. Таким образом:

свойства (2.4.3), (2.4.5) являются характеристическими свойствами интенсивности смертности;

интенсивность смертности может быть использована в качестве первичной характеристики продолжительности жизни.

2.5 Макрохарактеристики продолжительности жизни

С практической точки зрения крайне важны такие макрохарактеристики продолжительности жизни как среднее $\overset{\circ}{e}_0 \equiv \mathbf{E}T$, дисперсия $\mathbf{Var}T$, медиана $m(0)$.

В соответствии с общими теоремами теории вероятностей, среднее время жизни дается формулой:

$$\overset{\circ}{e}_0 \equiv \mathbf{E}T = \int_0^\infty x f(x) dx.$$

Для приложений к задачам страхования удобно выразить среднее время жизни через функцию выживания. Вывод соответствующей формулы начнем со следующего замечания. Поскольку

$$\int_y^\infty x f(x) dx \geq y \int_y^\infty f(x) dx = y s(y),$$

а интеграл в левой части при $y \to \infty$ стремится к нулю (в силу конечности среднего времени жизни), функция $ys(y)$ при $y \to \infty$ также стремится к нулю. Теперь интегрируя по частям, мы имеем:

$$\overset{\circ}{e}_0 = -\int_0^\infty x ds(x) = -xs(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty s(x)dx = \int_0^\infty s(x)dx. \quad (2.5.1)$$

Дисперсия времени жизни $\mathbf{Var}T$ описывает размеры случайных колебаний времени жизни вокруг среднего значения и вычисляется по формулам:

$$\mathbf{Var}T = \mathbf{E}(T - \mathbf{E}T)^2 = \mathbf{E}T^2 - (\mathbf{E}T)^2.$$

Таким образом, подсчет дисперсии сводится к подсчету второго момента $\mathbf{E}T^2$. Как известно из общего курса теории вероятностей,

$$\mathbf{E}T^2 = \int_0^\infty x^2 f(x)dx.$$

Однако для применений в актуарной математике удобнее выразить $\mathbf{E}T^2$ через функцию выживания. Так же как и при выводе формулы (1.5.1), мы имеем:

$$\mathbf{E}T^2 = 2\int_0^\infty xs(x)dx. \quad (2.5.2)$$

Медиана времени жизни $m(0)$ определяется как корень уравнения

$$s(m) = 0.5. \quad (2.5.3)$$

Имея в виду непрерывность и строгую монотонность функции выживания, можно гарантировать существование и единственность медианы. Медиана времени жизни – это такой возраст, что смерть до этого возраста и дожитие до этого возраста равновероятны:

$$\mathbf{P}(T < m(0)) = \mathbf{P}(T \geq m(0)) = 0.5.$$

Используя формулу (2.2.5), определение медианы времени жизни можно переписать следующим образом:

$$l_{m(0)} = 0.5 l_0.$$

Иными словами, медиана времени жизни – это возраст, до которого доживает ровно половина представителей исходной группы новорожденных.

2.6 Аналитические законы смертности

Для упрощения расчетов, теоретического анализа и т.д. естественно попытаться описать получаемые эмпирическим путем данные о функции выживания или интенсивности смертности с помощью простых аналитических формул.

Простейшее приближение было введено в 1729 г. де Муавром (de Moivre), который предложил считать, что время жизни равномерно распределено на интервале $(0, \omega)$, где ω – предельный возраст. Таким образом, в модели де Муавра

$$f(x) = 1/\omega, F(x) = x/\omega, s(x) = 1 - x/\omega, \mu_x = 1/(\omega - x), 0 < x < \omega.$$

Сравнение графиков этих функций с реальными графиками функции выживания $s(x)$, функции смертей $f(x)$, интенсивности смертности μ_x показывает, что закон де Муавра не является очень хорошим приближением. Например, первая формула означает, что кривая смертей $f(x)$ является горизонтальной линией, в то время как эмпирические данные указывают на пик в районе 80 лет.

В модели, которую предложил в 1825 г. Гомпертц (Gompertz), интенсивность смертности μ_x приближается показательной функцией вида $Be^{\alpha x}$, где $\alpha > B > 0$ – некоторые параметры. Как нетрудно видеть, для любой функции такого вида выполнены свойства (2.4.3), (2.4.5), так что она действительно может рассматриваться в качестве интенсивности смертности. Соответствующая функция выживания $s(x)$ имеет вид

$$s(x) = \exp[-B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha]$$

а кривая смертей $f(x) = B\exp[\alpha x - B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha]$. Нетрудно показать, что в этом случае $f(x)$ уже имеет максимум в точке $x = (\ln\alpha - \ln B)/\alpha$.

Мэйкхам (Makeham) в 1860 г. обобщил предыдущую модель, приблизив интенсивность смертности μ_x функцией вида $A + Be^{\alpha x}$. Постоянное слагаемое A позволяет учесть риски для жизни, связанные с несчастными случаями (которые мало зависят от возраста), в то время как член $Be^{\alpha x}$ учитывает влияние возраста на смертность. Как нетрудно видеть, для любой функции такого вида выполнены свойства (2.4.3), (2.4.5), так что она действительно может рассматриваться в качестве интенсивности смертности. В этой модели

$$s(x) = \exp[-Ax - B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha],$$
$$f(x) = [A + Be^{\alpha x}]\exp[-Ax - B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha].$$

Второй закон Мэйкхама, введенный в 1889 году, приближает интенсивность смертности μ_x функцией вида $A + Hx + Be^{\alpha x}$. В этой модели

$$s(x) = \exp[-Ax - Hx^2/2 - B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha],$$
$$f(x) = [A + Hx + Be^{\alpha x}]\exp[-Ax - Hx^2/2 - B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha].$$

Вейбулл (Weibull) в 1939 году предложил приближать интенсивность смертности μ_x более простой степенной функцией вида kx^n. Как нетрудно видеть, для любой функции такого вида выполнены свойства (2.4.3), (2.4.5), так что она действительно может рассматриваться в качестве интенсивности смертности. Соответственно функция выживания дается формулой

$$s(x) = \exp(-kx^{n+1}/(n+1)),$$

а кривая смертей $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = kx^n \exp(-kx^{n+1}/(n+1))$$

с максимумом в точке $x = (n/k)^{1/(n+1)}$.

В модели Пека (Perk), введенной в 1931 году, интенсивность смертности μ_x приближается функцией вида $\dfrac{A + Be^{\alpha x}}{Ke^{-\alpha x} + 1 + De^{\alpha x}}$.

2.7 Примеры расчетов

Пример 1. Покажите, что

$$f(x) = \frac{x}{a^2}e^{-x/a}$$

может рассматриваться как кривая смертей. Определите вид соответствующих функции выживания $s(x)$ и интенсивности смертности μ_x, а также соответствующую среднюю продолжительность жизни $\mathring{e}_0$. Имея в виду таблицу из раздела 5.1, проанализируйте степень соответствия предложенного аналитического описания реальным данным.

Решение.

1. Ясно, что $f(x) \geq 0$ при $x \geq 0$. Кроме того, интегрируя по частям, мы получим:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty xe^{-x/a}dx = -\frac{x}{a}e^{-x/a}\Big|_0^\infty + \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-x/a}dx = 1.$$

Следовательно, выполнены оба характеристических свойства плотности распределения неотрицательной случайной величины (2.3.5) и (2.3.6).

2. Чтобы определить вид функций выживания $s(x)$ и интенсивности смертности μ_x, воспользуемся формулами (2.3.7) и (2.4.2):

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_x^\infty f(u)du = \frac{1}{a^2}\int_x^\infty ue^{-u/a}du \\ &= -\frac{u}{a}e^{-u/a}\Big|_x^\infty + \frac{1}{a}\int_x^\infty e^{-u/a}du \\ &= \frac{x}{a}e^{-x/a} - e^{-u/a}\Big|_x^\infty = \frac{x+a}{a}e^{-x/a}, \end{aligned}$$

$$\mu_x = \frac{\frac{x}{a^2}e^{-x/a}}{\frac{x+a}{a}e^{-x/a}} = \frac{x}{a(x+a)}.$$

3. Средняя продолжительность жизни, соответствующая рассматриваемому виду кривой смертей, может быть подсчитана с помощью формулы (2.5.1):

$$\begin{aligned} \mathring{e}_0 &= \int_0^\infty \frac{x+a}{a}e^{-x/a}dx = -\int_0^\infty (x+a)de^{-x/a} \\ &= -(x+a)e^{-x/a}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x/a}dx = a + a = 2a. \end{aligned}$$

Поскольку $f'(x) = (1 - x/a)e^{-x/a}/a^2$, кривая смертей $y = f(x)$ сначала возрастает от 0 до $1/(ae)$ на интервале $0 \le x \le a$, а затем убывает до 0 на интервале $a \le x < \infty$. Таким образом, предложенная функция улавливает некоторые черты реальной кривой смертей. Однако, в то время как в реальности максимум кривой смертей достигается около возраста, соответствующего среднему времени жизни, у нас точка максимума вдвое меньше, чем среднее время жизни.

Отметим, что случайная величина T, имеющая плотность

$$f(x) = \frac{x}{a^2}e^{-x/a},$$

может рассматриваться как сумма двух независимых случайных величин X_1 и X_2, каждая из которых имеет экспоненциальное распределение со средним a. Говорят, что T имеет распределение Эрланга второго порядка. Это распределение, в свою очередь, может рассматриваться как частный случай еще более общего распределения – так называемого гамма-распределения. С помощью гамма-распределения можно добиться большего соответствия реальным данным.

Пример 2. Используя таблицу значений функции выживания из п.2.2, подсчитайте среднее и дисперсию числа представителей исходной группы в l_0 новорожденных, которые умрут в возрасте от 50 до 70 лет.

Решение. Интересующая нас случайная величина была обозначена ${}_{20}D_{50}$. Ее среднее значение ${}_{20}d_{50}$ немедленно может быть подсчитано с помощью формулы (2.3.3):

$$ {}_{20}d_{50} = 1000(0.915 - 0.682) = 233(\text{человека}). $$

Для подсчета дисперсии случайной величины ${}_{20}D_{50}$ применим формулу (2.3.1). Поскольку случайные величины $T^{(i)}$ независимы,

$$ \mathbf{Var}\,{}_{20}D_{50} = 1000\mathbf{Var}I(50 < T^{(i)} < 70). $$

Но

$$ \begin{aligned} \mathbf{Var}I(50 < T^{(i)} < 70) &= \mathbf{E}\{I(50 < T^{(i)} < 70)\}^2 \\ &\quad - \{\mathbf{E}I(50 < T^{(i)} < 70)\}^2 \\ &= \mathbf{P}(50 < T^{(i)} < 70) - \{\mathbf{P}(50 < T^{(i)} < 70)\}^2 \\ &= {}_{20}d_{50}[1 - {}_{20}d_{50}/l_0]/l_0. \end{aligned} $$

Таким образом, $\mathbf{Var}\,{}_{20}D_{50} = 233[1 - 233/1000] = 178.711$. Соответственно среднее квадратическое отклонение равно 13.368.

Следующая задача по форме является типичной задачей квалификационного экзамена Общества Актуариев (США).

Пример 3. Какая из следующих функций может рассматриваться в качестве функции выживания:

I. $s(x) = \exp(x - 0.7(2^x - 1))$;

II. $s(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$;

III. $s(x) = \exp(-x^2)$.

A. Только I и II;

B. Только I и III;

C. Только II и III;

D. I, II и III;

E. Правильный ответ не дается ни одним из вариантов A, B, C, D.

Решение. Ясно, что для всех трех функций $s(0) = 1$, $s(+\infty) = 0$. Кроме того, все три функции непрерывны. Таким образом, ключевым является вопрос о монотонном убывании.

Функции II и III, очевидно, убывающие.

Для функции I производная показателя экспоненты равна $1 - 0.7 \cdot 2^x \cdot \ln 2$. Эта функция должна быть отрицательна при всех x. Поскольку она убывающая, достаточно проверить, что она отрицательна при $x = 0$, т.е. $1 - 0.7 \cdot \ln 2 < 0$. Однако $\ln 2 < 1$ и поэтому $0.7 \cdot \ln 2 < 1$, так что $1 - 0.7 \cdot \ln 2 > 0$. Таким образом, функция I не может рассматриваться в качестве функции выживания. Соответственно правильным ответом будет C.

3. ОСТАТОЧНОЕ ВРЕМЯ ЖИЗНИ

3.1 Распределение остаточного времени жизни

Страховая компания имеет дело с конкретными людьми, дожившими до определенного возраста. Статистические свойства времени жизни таких людей существенно отличаются от свойств времени жизни новорожденных. Если человек в возрасте x лет обратился в страховую компанию (в актуарной математике такого человека обозначают (x)), то заведомо известно, что он дожил до x лет, и поэтому все случайные события связанные с этим человеком, должны рассматриваться при условии, что $T > x$. В частности, среднее время жизни этого человека – это условное среднее $\mathbf{E}(T|T > x)$ и оно не обязано совпадать с $\mathbf{E}T$, вероятность смерти этого человека в течение ближайщих 10 лет – это вероятность того, что $x < T < x + 10$ *при условии*, что $T > x$ и, как мы видели, в рассмотренном выше иллюстративном примере, она сильно зависит от x (эта вероятность равнялась 18,5% для $x = 60$ лет и 91,5% для $x = 90$ лет).

Для человека в возрасте x лет обычно рассматривают не продолжительность жизни T, а остаточное время жизни $T_x = T - x$. Распределение случайной величины T_x – это условное распределение величины $T - x$ при условии, что $T > x$. Таким образом, для $F_x(t) \equiv \mathbf{P}(T_x \leq t)$ мы имеем:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \mathbf{P}(T - x \leq t|T > x) = \mathbf{P}(T \leq x + t|T > x) \\ &= \frac{\mathbf{P}(x < T \leq x + t)}{\mathbf{P}(T > x)} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Соответствующая функция выживания есть

$$s_x(t) \equiv 1 - F_x(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)},$$

так что плотность $f_x(t)$ случайной величины T_x может быть подсчитана по формуле:

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{1-F(x)}, 0 \leq t < \infty. \tag{3.1.2}$$

Интенсивность смертности, связанная с величиной T_x, есть

$$\mu_x(t) \equiv \frac{f_x(t)}{\bar{F}_x(t)} = \frac{f(x+t)/s(x)}{s(x+t)/s(x)} = \frac{f(x+t)}{s(x+t)} = \mu_{x+t}.$$

Это соотношение означает, что интенсивность смертности спустя время t для человека, которому сейчас x лет, равна интенсивности смертности в возрасте $x+t$ для новорожденного. Иными словами, интенсивность смертности в данном возрасте $x+t$ не зависит от уже прожитых лет.

Таким образом, график функции $y = f_x(t)$ – это сдвинутая влево и сжатая по вертикали кривая смертей. Поэтому в отличие от кривой смертей он не имеет особенности возле точки $t = 0$ (резкое убывание функции $f(x)$ на интервале $0 \leq t \leq 1$ и более плавное убывание на интервале $1 \leq t \leq 10$ хорошо видно, например, из приведенной в разделе 5 иллюстративной таблицы продолжительности жизни).

Для того, чтобы проиллюстрировать понятие остаточного времени жизни, рассмотрим несколько конкретных аналитических законов смертности.

(1) Рассмотрим прежде всего закон де Муавра. Поскольку $0 < T < \omega$, остаточное время жизни T_x не превосходит $\omega - x$, т.е. случайная величина T_x принимает значения из конечного промежутка $(0, \omega - x)$. Как следует из результатов, полученных в п.2.6, для $0 < t < \omega - x$ плотность распределения остаточного времени жизни имеет вид:

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{s(x)} = \frac{1/\omega}{1 - x/\omega} = \frac{1}{\omega - x}.$$

Это равенство означает, что остаточное время жизни T_x также равномерно распределено, однако на промежутке $(0, \omega - x)$.

(2) Рассмотрим теперь закон Мэйкхама $\mu_t = A + Be^{\alpha t}$. Как следует из результатов, полученных в п.2.6, плотность распределения остаточного времени жизни имеет вид:

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{s(x)} = \frac{[A + Be^{\alpha(x+t)}]e^{-A(x+t)-B(e^{\alpha(x+t)}-1)/\alpha}}{e^{-Ax-B(e^{\alpha x}-1)/\alpha}}$$
$$= [A + Be^{\alpha x}e^{\alpha t}]e^{-At-Be^{\alpha x}(e^{\alpha t}-1)/\alpha}.$$

Это равенство означает, что остаточное время жизни T_x также имеет распределение типа Мэйкхама; его параметры A_x, B_x, α_x (индекс x подчеркивает возможную зависимость от прожитого времени) связаны с соответствующими параметрами A, B, α исходного распределения Мэйкхама следующими соотношениями: $A_x = A, B_x = Be^{\alpha x}, \alpha_x = \alpha$.

(3) Предположим, что кривая смертей описывается формулой

$$f(x) = \frac{x}{a^2}e^{-x/a}, \ x \geq 0.$$

Этот закон изучался в п.2.8 (пример 1), где было показано, что соответствующие функция выживания $s(x)$ и интенсивность смертности μ_x даются формулами:

$$s(x) = \frac{x+a}{a}e^{-x/a}, \ x \geq 0,$$
$$\mu_x = \frac{x}{a(x+a)}, \ x \geq 0.$$

Поэтому плотность распределения остаточного времени жизни T_x имеет вид:

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{s(x)} = \frac{\frac{x+t}{a^2}e^{-(x+t)/a}}{\frac{x+a}{a}e^{-x/a}}$$
$$= \frac{x+t}{a(x+a)}e^{-t/a}, \ t \geq 0.$$

Переписав эту формулу в виде

$$f_x(t) = \frac{x}{x+a}\frac{1}{a}e^{-t/a} + \frac{a}{x+a}\frac{t}{a^2}e^{-t/a}, \tag{3.1.3}$$

мы можем сказать, что $f_x(t)$ является взвешенной суммой экспоненциальной плотности $\frac{1}{a}e^{-t/a}$ и эрланговской плотности $\frac{t}{a^2}e^{-t/a}$. Поэтому дополнительная функция распределения величины T_x есть:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_x > t) &= \frac{x}{x+a}e^{-t/a} + \frac{a}{x+a}\frac{t+a}{a}e^{-t/a} \\ &= e^{-t/a} + \frac{t}{x+a}e^{-t/a}. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Отметим, что при больших значениях x $\mathbf{P}(T_x > t) \approx e^{-t/a}$. Таким образом, при $x \longrightarrow \infty$ T_x не стремится к нулю (как следовало бы ожидать исходя из интуитивных соображений), а имеет собственный предел, являющийся экспоненциальной величиной со средним a. Соответственно рассмотренный закон смертности заведомо нельзя применять для больших возрастов (в связи с этим выводом мы рекомендуем еще раз обратиться к примеру 1, п.2.8).

3.2 Основные величины, связанные с остаточным временем жизни

Вероятность $\mathbf{P}(T_x \le t)$ в актуарной науке обозначается символом ${}_tq_x$:
$$ {}_tq_x \equiv \mathbf{P}(T_x \le t). \tag{3.2.1} $$
Она выражает вероятность смерти человека возраста x лет в течение ближайших t лет. С учетом этого обозначения формулу (3.1.1) можно переписать в виде:
$$ {}_tq_x = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}. \tag{3.2.2} $$
Дополнительная вероятность $\mathbf{P}(T_x > t)$ в актуарной науке обозначается символом ${}_tp_x$. Она выражает вероятность того, что человек в возрасте x лет проживет еще по меньшей мере t лет. Из (3.2.2) мы получим следующую формулу:
$$ {}_tp_x \equiv \mathbf{P}(T_x > t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}. \tag{3.2.3} $$
Случай $t = 1$ играет особую практическую роль и встречается наиболее часто. Для него принято опускать передний индекс у переменных ${}_tq_x$ и ${}_tp_x$. Таким образом, символ q_x обозначает вероятность того, что человек в возрасте x лет умрет в течение ближайшего года, а символ p_x обозначает вероятность того, что человек в возрасте x лет проживет еще по меньшей мере один год. Из общих формул (3.2.2) и (3.2.3) мы имеем:
$$ q_x \equiv \mathbf{P}(T_x \le 1) = \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}, \tag{3.2.4} $$
$$ p_x \equiv \mathbf{P}(T_x > 1) = \frac{s(x+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+1}}{l_x}. \tag{3.2.5} $$
С помощью вероятностей p_x можно подсчитать и более общие вероятности ${}_tp_x$:
$$ {}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{s(x+1)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+2)}{s(x+1)} \cdot \ldots \cdot \frac{s(x+t)}{s(x+t-1)} \tag{3.2.6} $$
$$ = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+t-1}. $$

Поскольку ${}_tq_x = 1 - {}_tp_x$, $q_x = 1 - p_x$, эту формулу можно переписать в виде:

$$ {}_tq_x = 1 - (1 - q_x)...(1 - q_{x+t-1}). \tag{3.2.7} $$

Формула (3.2.6) имеет простой интуитивный смысл. Она выражает тот факт, что человек в возрасте x лет проживет еще t лет, если

он проживет еще один год (вероятность этого события равна p_x);

при условии, что он доживет до возраста $x + 1$ лет, он проживет еще один год (вероятность этого события равна p_{x+1});

...

при условии, что он доживет до возраста $x+t-1$ лет, он проживет еще один год (вероятность этого события равна p_{x+t-1}).

Рассмотрим теперь более общее событие, заключающееся в том, что человек возраста x проживет еще t лет, но умрет на протяжении u последующих лет.

В терминах остаточного времени жизни T_x это событие можно выразить двойным неравенством: $t < T_x \leq t + u$. Его вероятность обозначается ${}_{t|u}q_x$:

$$ {}_{t|u}q_x \equiv \mathbf{P}(t < T_x \leq t + u). \tag{3.2.8} $$

Нетрудно видеть, что эта вероятность может быть выражена как через функцию распределения остаточного времени жизни ${}_tq_x$, так и через дополнительную функцию распределения ${}_tp_x$:

$$ \begin{aligned} {}_{t|u}q_x &\equiv \mathbf{P}(t < T_x \leq t + u) \\ &= \mathbf{P}(T_x \leq t + u) - \mathbf{P}(T_x \leq t) \\ &= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x, \end{aligned} \tag{3.2.9} $$

$$ \begin{aligned} {}_{t|u}q_x &\equiv \mathbf{P}(t < T_x \leq t + u) \\ &= \mathbf{P}(T_x > t) - \mathbf{P}(T_x > t + u) \\ &= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x. \end{aligned} \tag{3.2.10} $$

Имея в виду формулы (3.2.2) и (3.2.3), можно свести дело к основной функции нашей теории – функции выживания $s(x)$:

$$ {}_{t|u}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)}. \tag{3.2.11} $$

Случай $u = 1$ представляет особый интерес для приложений к страхованию жизни. Как обычно, соответствующий индекс принято опускать. Итак, ${}_{t|}q_x$ – это вероятность того, что человек в возрасте x лет проживет еще t лет, но умрет на протяжении следующего года. Приведенные выше общие формулы дают:

$$ {}_{t|}q_x = {}_{t+1}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x - {}_{t+1}p_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+1)}{s(x)}. \quad (3.2.12) $$

3.3 Макрохарактеристики остаточного времени жизни

Среднее значение остаточного времени жизни человека в возрасте x лет, $\mathbf{E}T_x$, обозначается $\overset{\circ}{e}_x$ и называется *полной вероятной продолжительностью жизни* (the complete-expectation-of-life):

$$ \overset{\circ}{e}_x \equiv \mathbf{E}T_x. $$

Поскольку случайная величина T_x неотрицательна, ее среднее значение $\mathbf{E}T_x$ может быть выражено через дополнительную функцию распределения $\mathbf{P}(T_x > t) = {}_tp_x$ как $\int_0^\infty \mathbf{P}(T_x > t)dt$. Имея в виду формулу (3.1.1), мы окончательно получим:

$$ \overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{s(x)} \int_0^\infty s(x+t)dt = \frac{1}{s(x)} \int_x^\infty s(u)du. \quad (3.3.1) $$

Для второго момента T_x мы аналогично имеем:

$$ \begin{aligned} \mathbf{E}[T_x]^2 &= 2\int_0^\infty t\mathbf{P}(T_x > t)dt \\ &= 2\int_0^\infty t \cdot {}_tp_x dt \\ &= \frac{2}{s(x)} \int_0^\infty ts(x+t)dt. \end{aligned} $$

Среднее остаточное время жизни можно выразить и через другие характеристики жизни. С этой целью рассмотрим группу из l_0 новорожденных и обозначим через σ_x суммарное число лет, прожитых представителями этой группы в возрасте x и более. Таким образом, если время жизни i-го представителя группы, $T^{(i)}$, меньше чем x, его вклад в сумму σ_x равен 0. Если же $T^{(i)} > x$, то вклад в сумму равен $T^{(i)} - x$.

Эти рассуждения можно выразить следующей формулой:

$$ \sigma_x = \sum_{i=1}^{l_0} (T^{(i)} - x)^+, $$

где $a^+ = \max(a, 0)$.

Отсюда для $\mathfrak{T}_x = \mathbf{E}\sigma_x$ имеем:

$$\mathfrak{T}_x = l_0 \mathbf{E}(T^{(i)} - x)^+.$$

Дополнительная функция распределения величины $(T^{(i)} - x)^+$ есть

$$\mathbf{P}((T^{(i)} - x)^+ > t) = \mathbf{P}(T^{(i)} - x > t) = \mathbf{P}(T^{(i)} > x + t) = s(x + t).$$

Отметим, что это распределение имеет атом в нуле, равный

$$\mathbf{P}(T^{(i)} < x) = 1 - s(x).$$

Поэтому

$$\mathfrak{T}_x = l_0 \int_0^\infty s(x + t)dt = l_0 \int_x^\infty s(u)du. \tag{3.3.2}$$

Теперь формуле (3.3.1) для величины $\overset{\circ}{e}_x$ можно придать следующий вид:

$$\overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{l_0 s(x)} l_0 \int_x^\infty s(u)du = \frac{\mathfrak{T}_x}{l_x}. \tag{3.3.3}$$

Медиана остаточного времени жизни $m(x)$ определяется как корень уравнения

$$\mathbf{P}(T_x > m) = 0.5. \tag{3.3.4}$$

Используя формулу (3.1.1), определение медианы остаточного времени жизни можно переписать следующим образом:

$$l_{x+m(x)} = 0.5 l_x. \tag{3.3.5}$$

3.4 Частичная остаточная продолжительность жизни

Часто договор страхования жизни заключается на конечный период времени в n лет и страховка выплачивается либо в момент смерти застрахованного, если она наступит до истечения n-летнего периода, либо в конце этого периода, если смерть не наступила. Это так называемое *n-летнее страхование на дожитие* или *смешанное страхование* (n-year endowment insurance.) Момент выплаты страховки можно выразить формулой $\min(T_x, n)$. С точки зрения страховой компании – это момент "смерти" застрахованного. Поэтому его называют частичной продолжительностью жизни. Соответствующее среднее значение называют *частичной средней продолжительностью жизни* и обозначают $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$:

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|} \equiv \mathbf{E}\min(T_x, n).$$

Для его расчета найдем дополнительную функцию распределения случайной величины $\min(T_x, n)$, т.е. $\mathbf{P}(\min(T_x, n) > t)$. Прежде всего отметим, что эта функция может быть отлична от нуля только для $t < n$. Кроме того, для $t < n$ событие $\min(T_x, n) > t$ равносильно тому, что $T_x > t$. Значит, верно равенство:

$$\mathbf{P}(\min(T_x, n) > t) = \begin{cases} {}_tp_x, & \text{для } 0 \le t < n, \\ 0, & \text{для } t \ge n. \end{cases}$$

Применяя формулу (3.2.3), мы получим:

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{s(x)} \int_0^n s(x+t)dt = \frac{1}{s(x)} \int_x^{x+n} s(u)du. \tag{3.4.1}$$

3.5 Примеры расчетов

Пример 1. Используя таблицу для функции выживания из п.2.2, определите вероятность того, что остаточное время жизни (20) лежит в промежутке от 40 до 50 лет.

Решение. Искомая вероятность $\mathbf{P}(40 < T_{20} < 50)$ была нами обозначена как ${}_{40|10}q_{20}$. В силу (3.2.10) она равна ${}_{40}p_{20} - {}_{50}p_{20}$. Применяя формулу (3.2.3), мы можем свести дело к функции выживания, так что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(40 < T_{20} < 50) &= \frac{s(60)}{s(20)} - \frac{s(70)}{s(20)} \\ &= \frac{s(60) - s(70)}{s(20)} \\ &= \frac{0.837 - 0.682}{0.977} \approx 0.16 \end{aligned}$$

Менее формальный подход позволяет рассчитать искомую вероятность проще (мы просто используем определение остаточного времени жизни и применяем определение условной вероятности):

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(40 < T_{20} < 50) &= \mathbf{P}(40 < T - 20 < 50 | T > 20) \\
&= \mathbf{P}(60 < T < 70 | T > 20) = \frac{\mathbf{P}(60 < T < 70)}{\mathbf{P}(T > 20)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(T > 60) - \mathbf{P}(T > 70)}{\mathbf{P}(T > 20)} = \frac{s(60) - s(70)}{s(20)} \\
&= \frac{0.837 - 0.682}{0.977} \approx 0.16
\end{aligned}$$

Пример 2. Предположим, что в возрасте от 30 до 33 лет интенсивность смертности может быть описана формулой $\mu_x = 0.001x$. Подсчитайте ${}_{2|}q_{30}$.

Решение. В силу формулы (3.2.12) искомая вероятность есть

$${}_{2|}q_{30} = \frac{s(32) - s(33)}{s(30)},$$

С помощью формулы (2.4.4) мы можем свести дело к интенсивности смертности:

$$\begin{aligned}
{}_{2|}q_{30} &= \frac{\exp(-\int_0^{32} \mu_u du) - \exp(-\int_0^{33} \mu_u du)}{\exp(-\int_0^{30} \mu_u du)} \\
&= \exp\left(-\int_{30}^{32} \mu_u du\right) - \exp\left(-\int_{30}^{33} \mu_u du\right) \\
&= e^{-0.062} - e^{-0.0945} \approx 0.03.
\end{aligned}$$

Пример 3. Предположим, что смертность описывается законом

$$s(x) = \sqrt{1 - x/110}, \ 0 \le x \le 110.$$

Найдите вероятность того, что человек в возрасте 50 лет умрет в течение ближайшего года, а также его среднее остаточное время жизни.

Решение. Искомая вероятность была нами обозначена q_{50}. Для ее подсчета применим формулу (3.2.4):

$$q_{50} = \frac{s(50) - s(51)}{s(50)} = 1 - \frac{\sqrt{1 - 51/110}}{\sqrt{1 - 50/110}} = 1 - \sqrt{\frac{59}{60}} \approx 0.84\%.$$

Дополнительная функция распределения величины T_{50} в силу (3.1.1) дается формулой:

$$\mathbf{P}(T_{50} > t) = \frac{s(50+t)}{s(50)} = \sqrt{1 - t/60},\ 0 \le t \le 60$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{e}_{50} \equiv \mathrm{E}T50 &= \int_0^{60} \sqrt{1 - t/60}dt \\ &= \frac{2}{3} \cdot (-60) \cdot \left(1 - \frac{t}{60}\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{60} \\ &= 40 \text{ (лет)}. \end{aligned}$$

Пример 4[6]**.** Какие из следующих утверждений верны:

I. ${}_{t+r}p_x \ge {}_r p_{x+t}$ $\quad (t, r \ge 0)$;

II. ${}_r q_{x+t} \ge {}_{t|r} q_x$ $\quad (t, r \ge 0)$;

III. Если $s(x)$ описывается законом де Муавра, медиана остаточного времени жизни (x) равна среднему остаточному времени жизни (x).

A. Только I и II;

B. Только II и III;

C. Только II и III;

D. I, II и III;

E. Правильный ответ не дается ни одним из вариантов A, B, C, D.

Решение. Рассмотрим отдельно каждое из утверждений I, II, III.

I. Используя соотношение (3.2.3), мы можем переписать наше утверждение в виде:

$$\frac{s(x+t+r)}{s(x)} \ge \frac{s(x+t+r)}{s(x+t)},$$

что эквивалентно более простому утверждению

$$s(x+t) \ge s(x).$$

Это утверждение ложно, т.к. функция выживания убывающая.

---

[6] *Course 150 – Actuarial Mathematics,* The Society of Actuaries, May 1994, Problem 7.

II. Используя формулы (3.2.2) и (3.2.10), мы можем переписать рассматриваемое утверждение в виде:

$$\frac{s(x+t)-s(x+t+r)}{s(x+t)} \geq \frac{s(x+t)-s(x+t+r)}{s(x)}.$$

Поскольку функция выживания убывает, $s(x+t) \geq s(x+t+r)$ и поэтому это неравенство эквивалентно более простому утверждению

$$s(x) \geq s(x+t).$$

Это утверждение истинно, т.к. выражает свойство монотонного убывания функции выживания.

III. Как мы видели в п.3.1, величина T_x имеет равномерное распределение на промежутке $(0, \omega - x)$. Поэтому среднее остаточное время жизни есть

$$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^{\omega - x} s(u)du = \int_0^{\omega - x}\left(1 - \frac{u}{\omega - x}\right)du = \frac{\omega - x}{2}.$$

Медиана $m(x)$ остаточного времени жизни находится из соотношения (3.3.4), которое в рассматриваемом случае примет вид:

$$\frac{m}{\omega - x} = 0.5.$$

Отсюда

$$m(x) = \frac{\omega - x}{2}$$

и, значит, $\overset{\circ}{e}_x = m(x)$. Соответственно правильным ответом будет C.

Пример 5[7]**.** Рассмотрим двух человек в возрасте x и y соответственно. Предположим, что:

1. время жизни первого человека описывается законом де Муавра с предельным возрастом ω;

2. время жизни второго человека при $t \geq y$ характеризуется постоянной интенсивностью смертности μ;

3. остаточные времена жизни T_x и T_y независимы.

Определите вероятность того, что (x) умрет на протяжении ближайших n лет $(n + x < \omega)$ и ранее (y).

[7] *Course 150 – Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, May 1994, Problem 11.

Решение. Искомая вероятность может быть выражена как

$$A = \mathbf{P}(T_x \le n,\ T_x < T_y).$$

В соответствии с формулой полной вероятности

$$A = \int_0^n \mathbf{P}(T_y > t) \cdot f_x(t) dt,$$

где $f_x(t)$ – плотность остаточного времени жизни (x). Как мы знаем, T_x описывается законом де Муавра с предельным возрастом $\omega - x$. Поэтому

$$f_x(t) = \frac{1}{\omega - x}, \quad 0 < t < \omega - x.$$

Для $\mathbf{P}(T_y > t)$ в силу (3.2.3) и (2.4.4) мы имеем:

$$\mathbf{P}(T_y > t) = \frac{s(y+t)}{s(y)} = \exp\left\{-\int_y^{y+t} \mu_u du\right\} = e^{-\mu t}.$$

Поэтому искомая вероятность есть:

$$A = \int_0^n e^{-\mu t} \frac{1}{\omega - x} dt = -\frac{1}{\mu(\omega - x)} e^{-\mu t}\Big|_0^n = \frac{1 - e^{-\mu n}}{\mu(\omega - x)}.$$

4. ОКРУГЛЕННОЕ ВРЕМЯ ЖИЗНИ

4.1 Распределение округленного времени жизни

Мы уже обращали внимание читателя на то, что обычно люди ведут счет прожитых лет целыми годами, а страховые компании обычно заключают договоры страхования жизни на 1, 3, 5 и т.п. целое число лет. В связи с этим естественно рассмотреть наряду с обычной продолжительностью жизни T_x ее целую часть $K_x = [T_x]$. Таким образом, если, например, $T_x = 18$ лет 9 месяцев $= 18.75$ лет, то $K_x = 18$ лет. Мы будем называть величину K_x *округленной остаточной продолжительностью жизни* (curtate-future-lifetime). Следует подчеркнуть, что округление производится не до ближайшего целого, а всегда с недостатком (т.е. до ближайшего целого, меньшего, чем данное дробное число). В этом смысле английский термин curtate ("урезанная") точнее, чем принятый нами термин "округленная".

Поскольку случайная величина K_x принимает только целые значения, ее стохастическая природа характеризуется (как это принято в теории вероятностей) не функцией распределения, а распределением, т.е. набором вероятностей $\mathbf{P}(K_x = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Так как событие $\{K_x = k\}$ эквивалентно тому, что $\{k \leq T_x < k+1\}$, верно равенство:

$$\mathbf{P}(K_x = k) = \mathbf{P}(k \leq T_x < k+1).$$

Вероятность $\mathbf{P}(k \leq T_x < k+1)$ в силу непрерывности случайной величины T_x равна вероятности $\mathbf{P}(k < T_x \leq k+1)$, которая была нами обозначена в разделе 3 как ${}_{k|}q_x$. Используя (3.2.10) мы теперь можем выразить распределение случайной величины K_x в терминах функции выживания:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(K_x = k) &= \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} \\ &= \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} \\ &= \frac{d_{x+k}}{l_x},\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

что, в свою очередь, позволяет применить (2.4.4) и выразить это распределение в терминах интенсивности смертности:

$$\mathbf{P}(K_x = k) = \exp\left(-\int_x^{x+k} \mu_u du\right) - \exp\left(-\int_x^{x+k+1} \mu_u du\right) \tag{4.1.2}$$

Функция распределения округленного времени жизни K_x очень просто связана с функцией распределения точного времени жизни T_x. Именно, пусть $t = n + \tau$, где $0 \leq \tau < 1$ (так что $n = [t]$). Тогда

$$\mathbf{P}(K_x \leq t) = \mathbf{P}(K_x \leq n) = \mathbf{P}(T_x < n+1) = \mathbf{P}(T_x < [t]+1). \tag{4.1.3}$$

Выше мы вели разговор только об остаточном времени жизни T_x, не касаясь исходной случайной величины нашей теории – продолжительности жизни T. Однако поскольку $T = T_0$, все сказанное выше относится и к величине T. В частности, распределение округленного времени жизни $K_0 = [T]$ может быть определено по формуле:

$$\mathbf{P}(K_0 = k) = s(k) - s(k+1) = \frac{l_k - l_{k+1}}{l_0} = \frac{d_k}{l_0} \tag{4.1.4}$$

или

$$\mathbf{P}(K_0 = k) = \exp\left(-\int_0^k \mu_u du\right) - \exp\left(-\int_0^{k+1} \mu_u du\right). \tag{4.1.5}$$

Как следует из изложенного в п.2.3, зависимость $\mathbf{P}(K_0 = k)$ от k приближенно может быть описана с помощью $f(k)$, где $f(x)$ – плотность случайной величины T. Таким образом, кривая смертей дает представление и о распределении округленного времени жизни.

4.2 Среднее округленное время жизни и его дисперсия

Математическое ожидание случайной величины K_x называется *средней округленной продолжительностью жизни* (curtate-expectation-of-life) и обозначается e_x:

$$e_x \equiv \mathbf{E}K_x.$$

В соответствии с общей формулой для дискретной случайной величины

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(K_x = k).$$

Применяя (4.1.1), мы можем выразить e_x в терминах функции выживания:

$$e_x = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} s(x+k). \tag{4.2.1}$$

Подобным же образом для второго момента $\mathbf{E}(K_x)^2$, который необходим для расчета $\mathbf{Var}K_x$, мы имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[K_x]^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\mathbf{P}(K_x = k) \\
&= \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)s(x+k) \\
&= \frac{2}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} ks(x+k) - e_x.
\end{aligned}$$

Более интересным является следующее соотношение, связывающее среднее округленное время жизни и вероятность смерти в течение ближайшего года:

$$q_x = \frac{1 + e_{x+1} - e_x}{1 + e_{x+1}}.$$

Для доказательства этого факта прежде всего отметим, что

$$e_x \equiv \mathbf{E}K_x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(K_x \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_x \geq n).$$

Но

$$\mathbf{P}(T_x \geq n) \equiv {}_np_x = p_x \cdot {}_{n-1}p_{x+1}.$$

Поэтому

$$e_x = p_x \sum_{n=1}^{\infty} {}_{n-1}p_{x+1} = p_x \sum_{n=0}^{\infty} {}_n p_{x+1} = p_x \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} {}_n p_{x+1}\right).$$

Сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} {}_n p_{x+1}$$

в силу уже проведенных выкладок равна e_{x+1}.

Итак,

$$e_x = p_x \cdot (1 + e_{x+1}),$$

откуда:

$$p_x = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}},$$

что равносильно доказываемому соотношению.

4.3 Приближения для дробных возрастов

Мы определили округленное время жизни K_x через точное время жизни T_x и получили ряд формул, выражающих характеристики величины K_x через характеристики T_x. Однако реальная статистика доступна именно для округленного времени жизни K_x, причем только для целых значений x (в годах). Это связано как с удобством сбора статистических данных, так и с традиционной формой их представления в таблицах продолжительности жизни, где аргументы принимают только целочисленные значения. Соответственно возникает задача определения характеристик величины T_x, если известны характеристики величины $K_x = [T_x]$ (причем только для целых значений x). Как показывает формула (4.1.3), для целых значений t и x можно абсолютно точно определить распределение T_x через распределение K_x:

$$\mathbf{P}(T_x \leq t) = \mathbf{P}(K_x \leq t - 1), \ t = 1, 2, 3, \ldots$$

Таким образом, наша задача может рассматриваться как задача интерполяции. При этом, как нетрудно понять, достаточно рассмотреть задачу интерполяции только для функции выживания $s(x)$ (поскольку более сложные величины могут быть выражены через $s(x)$).

В актуарной математике обычно решают эту задачу, постулируя тот или иной вид функции $s(x)$ между узлами интерполяции, т.е. получают искомую функцию $s(x)$, склеивая в целочисленных точках более простые функции. Мы рассмотрим три таких постулата.

4.3.1 Равномерное распределение смертей.

Самой простой является интерполяция линейными функциями:

$$s(x) = a_n + b_n x \text{ при } n \le x \le n+1.$$

Поскольку значения $s(n)$ и $s(n+1)$ – известны, из уравнений

$$a_n + b_n n = s(n),$$
$$a_n + b_n(n+1) = s(n+1)$$

можно определить a_n и b_n:

$$a_n = (n+1)s(n) - ns(n+1),$$
$$b_n = s(n+1) - s(n).$$

Таким образом, на отрезке $n \le x \le n+1$ функция $s(x)$ приближается линейной функцией :

$$s(x) = (n+1-x)s(n) + (x-n)s(n+1), \; n \le x \le n+1 \qquad (4.3.1)$$

Записывая x в виде $x = n+t$, где $0 \le t < 1$, этой формуле можно придать вид:

$$s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1), \; 0 \le t \le 1. \qquad (4.3.2)$$

Для плотности $f(x)$ это приближение дает:

$$f(x) = -s'(x) = s(n) - s(n+1), \; n < x < n+1. \qquad (4.3.3)$$

Соответственно для интенсивности смертности μ_x мы имеем следующее приближение:

$$\mu_x = \frac{s(n) - s(n+1)}{(n+1)s(n) - ns(n+1) - x[s(n) - s(n+1)]}, \; n < x < n+1. \qquad (4.3.4)$$

С помощью величины $q_n = (s(n) - s(n+1))/s(n)$ (она была введена в п.3.2 как вероятность того, что человек в возрасте n лет умрет в течение ближайшего года) эту формулу можно переписать в виде:

$$\mu_x = \frac{q_n}{1-(x-n)q_n}, \quad n < x < n+1,$$

или, что то же самое,

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{1 - tq_n}, \quad 0 < t < 1. \tag{4.3.5}$$

Подчеркнем, что рассматриваемое приближение влечет *возрастание* интенсивности смертности между узлами интерполяции.

Отметим, что в целочисленных точках плотность $f(x)$ и интенсивность смертности μ_x не определены.

Одно из наиболее важных следствий предположения о линейной интерполяции функции выживания заключается в следующем. Рассмотрим величину ${}_tq_n$ (n – целое, $t \in (0,1)$). Для нее имеем:

$$\begin{aligned}
{}_tq_n &\equiv \mathbf{P}(T_n < t) = 1 - \mathbf{P}(T_n > t) \\
&= 1 - s_n(t) = 1 - \frac{s(n+t)}{s(n)} = 1 - \frac{(1-t)s(n) + ts(n+1)}{s(n)} \\
&= t\frac{s(n) - s(n+1)}{s(n)} = tq_n.
\end{aligned}$$

Далее, для целого n и $(t, t+u) \subset (0,1)$

$$\begin{aligned}
{}_{t|u}q_n &\equiv \mathbf{P}(t < T_n < t+u) = \mathbf{P}(T_n < t+u) - \mathbf{P}(T_n < t) \\
&= (t+u)q_n - tq_n = uq_n.
\end{aligned}$$

Итак, в предположении о линейной интерполяции функции выживания вероятность смерти в течение части года пропорциональна длине этой части.

Верно и обратное утверждение, если вероятность смерти в течение (начальной) части года пропорциональна длине этой части (т.е. ${}_tq_n = tq_n$), то для дробных возрастов (между двумя соседними целыми) функция выживания является линейной. Действительно, всегда верны равенства

$$\begin{aligned}
{}_tq_n &= 1 - \frac{s(n+t)}{s(n)}, \\
q_n &= 1 - \frac{s(n+1)}{s(n)}.
\end{aligned}$$

Поэтому равенство ${}_tq_n = tq_n$ влечет, что

$$s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1).$$

Введем теперь случайную величину τ_x, равную дробной части величины T_x: $\tau_x = \{T_x\}$. Таким образом, $T_x = K_x + \tau_x$, где K_x "– округленное время жизни. Величина τ_x описывает момент смерти внутри года. Ее условное распределение, при условии, что смерть наступила в возрасте $x + n$ лет, есть:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\tau_x \le t|K_x = n) &= \mathbf{P}(T_x - K_x \le t|K_x = n)\\ &= \mathbf{P}(T_x \le t + n|K_x = n)\\ &= \mathbf{P}(T_x \le t + n|n \le T_x < n+1)\\ &= \frac{\mathbf{P}(n \le T_x < n+1, T_x \le t+n)}{\mathbf{P}(n \le T_x < n+1)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(n \le T_x \le n+t)}{\mathbf{P}(n \le T_x < n+1)}\\ &= \frac{s(x+n) - s(x+n+t)}{s(x+n) - s(x+n+1)},\ 0 < t \le 1.\end{aligned}$$

Применяя формулу (4.3.2), мы получим (отметим, что в этом рассуждении мы предполагаем, что x "– целое число):

$$\mathbf{P}(\tau_x \le t|K_x = n) = t,\ 0 \le t \le 1.$$

Справа стоит функция распределения случайной величины, имеющей равномерное распределение на (0,1). Таким образом, рассматриваемой интерполяции соответствует предположение о том, что смерть в любой день между двумя днями рождений человека равновероятна. Обратим внимание также на то, что условное распределение $\mathbf{P}(\tau_x \le t|K_x = n)$ не зависит от n. Поэтому оно совпадает с безусловным распределением $\mathbf{P}(\tau_x \le t)$ и, кроме того, случайные величины K_x и τ_x – независимы.

Верно и обратное утверждение, если случайная величина $\tau \equiv \tau_0$ равномерно распределена на $(0,1)$ и не зависит от $K \equiv K_0$, то то для дробных возрастов (между двумя соседними целыми) функция выживания является линейной. Действительно, всегда верно равенство

$$\mathbf{P}(\tau \le t|K = n) = \frac{s(n) - s(n+t)}{s(n) - s(n+1)},\ 0 < t \le 1.$$

Поэтому равенство $\mathbf{P}(\tau \le t|K = n) = t$ влечет, что

$$s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1).$$

4.3.2 Постоянная интенсивность смертности.

Будем приближать функцию выживания $s(x)$ на отрезке $n \le x \le n+1$ показательной функцией $a_n e^{-b_n x}$. Поскольку значения $s(n)$ и $s(n+1)$ известны, из уравнений

$$a_n e^{-b_n n} = s(n),$$

$$a_n e^{-b_n(n+1)} = s(n+1)$$

можно определить a_b и b_n:

$$a_n = s(n)p_n^{-n},$$

$$b_n = -\ln p_n,$$

где величина $p_n = s(n+1)/s(n)$ была введена в п.3.2 как вероятность того, что человек в возрасте n лет проживет еще по меньшей мере один год.

Таким образом,

$$s(x) = s(n)p_n^{x-n}, \ n \le x \le n+1. \tag{4.3.6}$$

Записывая x в виде $x = n + t$, где $0 \le t < 1$, этой формуле можно придать вид:

$$s(n+t) = s(n)p_n^t, \ 0 \le t \le 1. \tag{4.3.7}$$

Для плотности $f(x)$ это приближение даст:

$$f(x) = -s(n)p_n^{x-n} \ln p_n, \ n < x < n+1. \tag{4.3.8}$$

Отсюда для интенсивности смертности μ_x мы имеем следующее приближение:

$$\mu_x = -\ln p_n, \ n < x < n+1,$$

т.е. рассматриваемой интерполяции соответствует предположение о постоянной интенсивности смертности между двумя днями рождений.

4.3.3 Предположение Балдуччи (Balducci).

Предположение Балдуччи внешне похоже на предположение о равномерном распределении смертей, однако, в отличие от последнего, линейными функциями интерполируется $1/s(x)$. Нетрудно понять, что это приводит к следующим формулам, которые аналогичны формулам (4.3.1) и (4.3.2):

$$\frac{1}{s(x)} = \frac{n+1-x}{s(n)} + \frac{x-n}{s(n+1)}, \ n \le x \le n+1,$$

$$\frac{1}{s(n+t)} = \frac{1-t}{s(n)} + \frac{t}{s(n+1)}, \ 0 \le t \le 1.$$

Отсюда можно получить явную формулу для $s(x)$ на отрезке $n \le x \le n+1$:

$$\begin{aligned} s(n+t) &= \frac{s(n)s(n+1)}{(1-t)s(n+1)+ts(n)} \\ &= \frac{s(n+1)}{p_n + tq_n}, \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

где вероятности p_n и q_n были определены в п.3.2 как вероятность того, что человек в возрасте n лет проживет еще по меньшей мере один год, и вероятность того, что человек в возрасте n лет умрет на протяжении этого года, соответственно.

Для плотности $f(x)$ это приближение дает:

$$f(n+t) = \frac{s(n+1)q_n}{(p_n + tq_n)^2}, \ 0 < t < 1.$$

Соответственно для интенсивности смертности μ_x мы имеем следующее приближение:

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{p_n + tq_n}, \ 0 < t < 1.$$

Важно подчеркнуть, что предположение Балдуччи влечет *убывание* интенсивности смертности между узлами интерполяции.

Одно из наиболее важных следствий предположения Балдуччи заключается в следующем. Рассмотрим величину ${}_{1-t}q_{n+t}$[8] (n – целое, $t \in (0,1)$). Для нее имеем:

$$\begin{aligned} {}_{1-t}q_{n+t} &\equiv \mathbf{P}(T_{n+t} < 1-t) = 1 - \mathbf{P}(T_{n+t} > 1-t) \\ &= 1 - s_{n+t}(1-t) = 1 - \frac{s(n+t+1-t)}{s(n+t)} = 1 - \frac{s(n+1)}{s(n+t)} \\ &= (1-t)\frac{s(n)-s(n+1)}{s(n)} = (1-t)q_n. \end{aligned}$$

[8]Вероятность такого рода появляется при оценке резервов для дробных моментов времени (см. ниже раздел 11.3, формулы (11.3.6), (11.3.7), (11.3.8)).

Итак, в предположении Балдуччи вероятность смерти до очередного дня рождения пропорциональна времени до этого дня рождения.

Верно и обратное утверждение, если вероятность смерти до очередного дня рождения пропорциональна времени до этого дня рождения (т.е. ${}_{1-t}q_{n+t} = (1-t)q_n$), то для вида функции выживания для дробных возрастов (между двумя соседними целыми) верно предположение Балдуччи. Действительно, всегда верно равенство

$$ {}_{1-t}q_{n+t} = 1 - s_{n+t}(1-t) = 1 - \frac{s(n+1)}{s(n+t)}. $$

Поэтому равенство ${}_{1-t}q_{n+t} = (1-t)q_n$ влечет, что

$$ \frac{1}{s(n+t)} = \frac{1-t}{s(n)} + \frac{t}{s(n+1)}, \ 0 \le t \le 1. $$

4.4 Интегральные характеристики распределения времени жизни для дробных возрастов

В этом пункте мы введем несколько величин, которые позволяют интегрально характеризовать распределение момента смерти внутри года.

Рассмотрим человека в возрасте x лет (x "– целое) и допустим, что его остаточное время жизни T_x меньше 1, т.е. этот человек умрет до момента $x+1$. Простейшей интегральной характеристикой момента смерти внутри года смерти является

$$ a(x) \equiv \mathbf{E}(T_x | T_x < 1). \qquad (4.4.1) $$

Это среднее может быть посчитано с помощью условной дополнительной функции распределения $\mathbf{P}(T_x > t | T_x < 1)$ (ясно, что эта функция равна 0 для $t \ge 1$):

$$ a(x) = \int_0^1 \mathbf{P}(T_x > t | T_x < 1) dt. $$

Поскольку

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T_x > t | T_x < 1) &= \frac{\mathbf{P}(t < T_x < 1)}{\mathbf{P}(T_x < 1)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(t < T - x < 1 | T > x)}{\mathbf{P}(T - x < 1 | T > x)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(x + t < T < x + 1 | T > x)}{\mathbf{P}(T < x + 1 | T > x)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(x + t < T < x + 1)}{\mathbf{P}(x < T < x + 1)} \\
&= \frac{s(x+t) - s(x+1)}{s(x) - s(x+1)},
\end{aligned}$$

мы получим следующую формулу:

$$a(x) = \int_0^1 \frac{s(x+t) - s(x+1)}{s(x) - s(x+1)} dt. \tag{4.4.2}$$

Подсчитаем теперь величину $a(x)$ для всех трех введенных выше предположений о характере смертности для дробных возрастов.

1. *Равномерное распределение смертей.* В силу (4.3.2),

$$\begin{aligned}
a(x) &= \int_0^1 \frac{(1-t)s(x) + ts(x+1) - s(x+1)}{s(x) - s(x+1)} dt \\
&= \int_0^1 (1-t) dt = 1/2.
\end{aligned}$$

Используя полученный ранее результат о равномерном распределении величины τ_x на $(0, 1)$ и независимости K_x и τ_x, можно дать менее формальный вывод:

$$a(x) \equiv \mathbf{E}(T_x | T_x < 1) = \mathbf{E}(\tau_x | K_x = 0) = 1/2.$$

2. *Постоянная интенсивность смертности.* Используя (4.3.7),

мы имеем:

$$\begin{aligned}a(x) &= \int_0^1 \frac{s(x)p_x^t - s(x+1)}{s(x) - s(x+1)}dt \\ &= \frac{s(x)}{s(x) - s(x+1)}\left\{p_x^t/\ln p_x\Big|_0^1 - p_x\right\} \\ &= \frac{s(x)}{s(x) - s(x+1)}\left\{\frac{p_x - 1}{\ln p_x} - p_x\right\} \\ &= \frac{1}{1-p_x}\left\{-p_x - \frac{1-p_x}{\ln p_x}\right\} \\ &= \frac{1}{q_x}\left\{-p_x - \frac{q_x}{\ln p_x}\right\} \\ &= -\frac{1}{\ln p_x} - \frac{p_x}{q_x}.\end{aligned}$$

Поскольку $p_x = 1 - q_x$ и величина q_x достаточно мала, можно разложить $\ln p_x$ в ряд по степеням q_x:

$$\ln p_x = -q_x - q_x^2/2 - q_x^3/3 - \dots ,$$

что даст следующую формулу для $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1}{2} - \frac{q_x}{12} + o(q_x).$$

3. Предположение Балдуччи. В силу (4.3.9),

$$\begin{aligned}a(x) &= \frac{s(x+1)}{s(x) - s(x+1)}\int_0^1 \left(\frac{1}{p_x + tq_x} - 1\right)dt \\ &= \frac{p_x}{q_x}\left\{\frac{\ln(p_x + tq_x)}{q_x}\Big|_0^1 - 1\right\} = \frac{p_x}{q_x}\left\{-\frac{\ln p_x}{q_x} - 1\right\} \\ &= -\frac{p_x}{q_x^2}(q_x + \ln p_x).\end{aligned}$$

Раскладывая в ряд по степеням q_x, мы получим следующую формулу для $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1}{2} - \frac{q_x}{6} + o(q_x).$$

Еще одна интерпретация величины $a(x)$ может быть получена следующим образом.

Рассмотрим группу из l_0 новорожденных и обозначим через S_x суммарное число лет, прожитых между моментами x и $x+1$ теми членами группы, которые умерли в возрасте от x до $x+1$ лет. Иными словами, если обозначить через $T^{(i)}$ момент смерти i-го человека из этой группы, I_i "– его вклад в сумму S_x, то

$$S_x = \sum_{i=1}^{l_0} I_i,$$

а

$$I_i = \begin{cases} 0, & \text{если } T^{(i)} \leq x \text{ или } T^{(i)} > x+1, \\ X_i - x, & \text{если } x < T^{(i)} \leq x+1. \end{cases}$$

Ясно, что $0 \leq I_i \leq 1$. Поэтому дополнительная функция распределения случайной величины I_i, $\mathbf{P}(I_i > t)$, отлична от нуля только для $t < 1$. Событие $\{I_i > t\}$ при $0 < t < 1$ наступает, если $x + t < T^{(i)} < x + 1$. Поэтому

$$\mathbf{P}(I_i > t) = s(x+t) - s(x+1).$$

Отметим, что распределение величины I_i имеет атом в нуле, равный $s(x+1) + 1 - s(x)$.

Значит,

$$\mathbf{E}I_i = \int_0^1 [s(x+t) - s(x+1)]dt,$$

и поэтому

$$\mathbf{E}S_x = l_o \int_0^1 [s(x+t) - s(x+1)]dt = \int_0^1 (l_{x+t} - l_{x+1})dt.$$

Теперь формулу (4.4.2) можно записать следующим образом:

$$a(x) = \frac{\mathbf{E}S_x}{d_x}, \tag{4.4.3}$$

где величина $d_x = l_x - l_{x+1} = l_0(s(x) - s(x+1))$ была определена в п.2.3 как среднее число представителей исходной группы, умерших в возрасте от x до $x+1$ лет.

Формула (4.4.3) выражает тот факт, что среднее суммарное число лет, прожитое между моментами x и $x+1$ теми представителями группы, которые умерли в возрасте от x до $x+1$ лет, равно произведению среднего числа умерших d_x на среднее условное остаточное время жизни $a(x)$.

Наряду с величиной S_x рассматривают аналогичную величину S_x^*, равную суммарному числу лет, прожитых *всеми* представителями исходной группы из l_0 новорожденных между моментами x и $x+1$. Таким образом, в отличие от S_x, величина S_x^* включает и тех представителей исходной группы, которые дожили до момента $x+1$. Поскольку вклад каждого из них в S_x^* равен 1, верна формула:

$$S_x^* = S_x + L(x+1),$$

где величина $L(x+1)$ была определена в п.2.2 как число живых представителей к моменту $x+1$.

Отсюда для $L_x = \mathbf{E}S_x^*$ имеем:

$$L_x = \mathbf{E}S_x + \mathbf{E}L(x+1) = \int_0^1 (l_{x+t} - l_{x+1})dt + l_{x+1} = \int_0^1 l_{x+t}dt. \quad (4.4.4)$$

В терминах L_x величина $a(x)$ может быть выражена как:

$$a(x) = \frac{L_x - l_{x+1}}{l_x - l_{x+1}} \equiv \frac{L_x - l_{x+1}}{d_x}. \quad (4.4.5)$$

Поскольку в таблицах продолжительности жизни обычно табулируют величины l_x и L_x, с помощью (4.4.5) можно подсчитать $a(x)$.

Кроме того, с помощью величины L_x можно подсчитать введенное в п.3.3 среднее суммарное число лет, прожитых представителями группы из l_0 новорожденных на интервале (x, ∞). Именно из (3.3.2) и (4.4.4) мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_x &= l_0 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x+k}^{x+k+1} s(u)du = l_0 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 s(x+k+t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 l_{x+k+t}dt = \sum_{k=0}^{\infty} L_{x+k} = \sum_{n=x}^{\infty} L_n. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

4.5 Примеры расчетов

Пример 1. Предположим, что $q_{70} = 0.04$, а $q_{71} = 0.05$. Подсчитайте вероятность того, что (70) умрет в возрасте от $70\frac{1}{2}$ до $71\frac{1}{2}$ лет в предположении Балдуччи для дробных возрастов и при предположении о равномерном распределении смертей.

Решение. Искомая вероятность есть $\mathbf{P}(\frac{1}{2} < T(70) < 1\frac{1}{2})$. В п.3.2 она была обозначена ${}_{1/2|}q_{70}$. В силу формулы (3.2.12) она равна $(s(70.5) - s(71.5))/s(70)$. Дальнейший расчет будет зависеть от сделанного предположения о характере смертности для нецелочисленных возрастов.

1. Предположение Балдуччи.

С помощью (4.3.9) мы можем аппроксимировать $s(70.5)$ величиной

$$\frac{s(71)}{p_{70} + 0.5q_{70}} = \frac{s(71)}{0.96 + 0.02} = \frac{s(71)}{0.98},$$

а $s(71.5)$ – величиной

$$\frac{s(72)}{p_{71} + 0.5q_{71}} = \frac{s(72)}{0.95 + 0.025} = \frac{s(72)}{0.975}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\frac{1}{2} < T(70) < 1\frac{1}{2}\right) &= \frac{s(71)/0.98 - s(72)/0.975}{s(70)} \\
&= \frac{s(71)}{s(70)}\frac{1}{0.98} - \frac{s(72)}{s(70)}\frac{1}{0.975} \\
&= p_{70}/0.98 - p_{71}p_{70}/0.975 \\
&= 0.96/0.98 - 0.95 \cdot 0.96/0.975 \approx 4.42\%.
\end{aligned}$$

2.Предположение о равномерном распределении смертей.

С помощью (4.3.2) мы можем аппроксимировать $s(70.5)$ величиной $0.5s(70) + 0.5s(71)$, а $s(71.5)$ – величиной $0.5s(71) + 0.5s(72)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\frac{1}{2} < T(70) < 1\frac{1}{2}\right) &= 0.5\frac{s(70) + s(71) - s(71) - s(72)}{s(70)} \\
&= 0.5\left[1 - \frac{s(72)}{s(70)}\right] = 0.5[1 - p_{71}p_{70}] \\
&= 0.5[1 - 0.95 \cdot 0.96] = 4.4\%.
\end{aligned}$$

Пример 2. Покажите, что при предположении о равномерном распределении смертей среднее время жизни человека возраста x, $\mathring{e}_x$, и его среднее округленное время жизни, e_x, при целом x связаны соотношением:

$$\mathring{e}_x = e_x + 0.5.$$

Решение. Поскольку $T_x = K_x + \tau_x$ и случайная величина τ_x равномерно распределена на $(0, 1)$,

$$\mathring{e}_x \equiv \mathbf{E}K_x + \mathbf{E}\tau_x = e_x + 0.5.$$

Пример 3[9]**.** Известно, что $q_x = 0.12$. Какое из следующих утверждений истинно:

I. ${}_{\frac{1}{3}}q_{x+\frac{1}{2}} = 0.0426$, если принято предположение о равномерном распределении смертей;

II. ${}_{\frac{1}{3}}q_x = 0.0435$, если принято предположение Балдуччи;

II. ${}_{\frac{1}{2}}q_x = 0.0619$, если принято предположение о постоянной интенсивности смертности.

A. Только I и II;

B. Только I и III;

C. Только II и III;

D. I, II и III;

E. Правильный ответ не дается ни одним из вариантов A, B, C, D.

Решение. Подсчитаем все величины, фигурирующие в условии задачи:

I. В силу (3.2.2), (4.3.2), (3.2.4),

$$\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{3}}q_{x+\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{s(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}{s(x+\frac{1}{2})} = 1 - \frac{s(x+\frac{5}{6})}{s(x+\frac{1}{2})} \\
&= 1 - \frac{\frac{1}{6}s(x) + \frac{5}{6}s(x+1)}{\frac{1}{2}s(x) + \frac{1}{2}s(x+1)} = \frac{2s(x) - 2s(x+1)}{3s(x) + 3s(x+1)} \\
&= \frac{2 - 2(1-q_x)}{3 + 3(1-q_x)} = \frac{2q_x}{6 - 3q_x} \approx 0.0426,
\end{aligned}$$

---

[9] *Course 150 – Actuarial Mathematics,* Sample Examination #2, The Society of Actuaries, 1982, Problem 28.

т.е. I истинно.

II. В силу (3.2.2), (3.2.4), (3.2.5) и (4.3.9),

$$\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{3}}q_x &= 1 - \frac{s(x+\frac{1}{3})}{s(x)} = 1 - \frac{s(x+1)}{(p_x + \frac{1}{3}q_x)s(x)} \\
&= 1 - \frac{s(x+1)}{s(x+1) + \frac{1}{3}(s(x) - s(x+1))} = 1 - \frac{s(x+1)}{\frac{1}{3}s(x) + \frac{2}{3}s(x+1)} \\
&= 1 - \frac{p_x}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}p_x} = \frac{1-p_x}{1+2p_x} \\
&= \frac{q_x}{1+2(1-q_x)} \approx 0.0435,
\end{aligned}$$

т.е. II истинно.

III. В силу (3.2.2) и (4.3.7),

$${}_{\frac{1}{2}}q_x = 1 - \frac{s(x+\frac{1}{2})}{s(x)} = 1 - \frac{s(x)p_x^{1/2}}{s(x)} = 1 - (1-q_x)^{1/2} \approx 0.0619,$$

т.е. III истинно. Соответственно правильным ответом будет D.

Пример 4. Известно, что при предположении о равномерном распределении смертей $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{1}|} = F$, а в предположении Балдуччи $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{1}|} = G$. Подсчитайте

$$\lim_{q_x \to 0} \frac{F-G}{q_x^2}.$$

Решение. В силу (3.4.1), (4.3.2), (3.2.4) мы имеем:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{s(x)} \int_x^{x+1} s(u)du = \frac{1}{s(x)} \int_0^1 s(x+t)dt \\
&= \frac{1}{s(x)} \int_0^1 [(1-t)s(x) + ts(x+1)]dt \\
&= \frac{1}{s(x)}[(1-0.5)s(x) + 0.5s(x+1)] \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{s(x+1)}{s(x)}\right) = \frac{1}{2}(1+1-q_x) = 1 - 0.5q_x.
\end{aligned}$$

Аналогично, в силу (3.4.1), (4.3.9) и (3.2.4) мы имеем:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{s(x)} \int_0^1 s(x+t)dt = \frac{1}{s(x)} \int_0^1 \frac{s(x+1)}{p_x + tq_x} dt \\ &= \frac{s(x+1)}{s(x)} \cdot \frac{1}{q_x} \ln(p_x + tq_x)\Big|_0^1 = \frac{1-q_x}{q_x}[-\ln(1-q_x)]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} F - G &= 1 - 0.5q_x + \frac{1-q_x}{q_x} \ln(1-q_x) \\ &= 1 - 0.5q_x + \frac{1-q_x}{q_x} \cdot \left(-q_x - \frac{q_x^2}{2} - \frac{q_x^3}{3} + o\left(q_x^3\right)\right) \\ &= \frac{q_x^2}{6} + o\left(q_x^2\right), \end{aligned}$$

так что

$$\lim_{q_x \to 0} \frac{F-G}{q_x^2} = \frac{1}{6}.$$

5. ТАБЛИЦЫ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ

5.1 Общие таблицы продолжительности жизни

Статистические данные о продолжительности жизни суммируются в таблицах продолжительности жизни. Простейшим видом таблиц являются таблицы, содержащие информацию о статистических свойствах времени жизни случайно выбранного человека, относительно которого известен только его возраст. Такие таблицы называют ***общими*** или ***упрощенными*** (aggregate tables). Они позволяют получить общую приближенную картину смертности. В принципе для решения любой задачи достаточно знания функции выживания $s(x)$, однако для наглядности в таблицы обычно включают введенную в п.2.2 величину $l_x = l_0 \cdot s(x)$, выражающую среднее число живых представителей некоторой группы из $l_0 = 100000$ новорожденных к возрасту x лет.

Для удобства пользования в таблицы обычно включают и производные величины:

$d_x = l_x - l_{x+1}$ ”– число представителей группы, умерших в возрасте от x до $x+1$ лет,

$q_x = d_x / l_x$ ”– долю представителей группы, доживших до возраста x лет, которые умрут в течение ближайшего года.

В качестве шага таблицы обычно рассматривают 1 год, т.е. табулируют значения различных функций от x для $x = 0, 1, 2, \ldots$ лет. Выводы для дробных возрастов могут быть получены с помощью теории, развитой в предыдущем разделе. В частности, полезными могут оказаться обычно включенные в таблицу величины

L_x – среднее суммарное число лет, прожитых представителями группы в возрасте от x до $x+1$ лет (см. п.4.4);

$\mathfrak{T}_x$ – среднее суммарное число лет, прожитых представителями группы в возрасте x лет и более (см. п.3.3);

$\mathring{e}_x$ – среднее остаточное время жизни.

Хотя, как следует из (3.3.3) и (4.4.6), $\mathring{e}_x$ может быть определено с помощью $\mathfrak{T}_x$ и l_x, а $\mathfrak{T}_x$ – с помощью L_x, для удобства пользования в таблицы включают все три величины.

Таким образом, типичная таблица продолжительности жизни (ниже мы будем часто использовать ее для расчетов) выглядит следующим образом:

x	q_x	l_x	d_x	L_x	$\mathfrak{T}_x$	$\mathring{e}_x$
0	0.011890	100000	1189	99403.13	7805063.61	78.05
1	0.000982	98811	97	98762.48	7705660.48	77.98
2	0.000709	98714	70	98678.99	7606898.00	77.06
3	0.000507	98644	50	98619.00	7508219.01	76.11
4	0.000426	98594	42	98573.00	7409600.01	75.15
5	0.000386	98552	38	98533.00	7311027.02	74.18
6	0.000335	98514	33	98497.50	7212494.02	73.21
7	0.000315	98481	31	98465.50	7113996.52	72.24
8	0.000264	98450	26	98437.00	7015531.02	71.26
9	0.000224	98424	22	98413.00	6917094.02	70.28
10	0.000213	98402	21	98391.50	6818681.03	69.29
11	0.000203	98381	20	98371.00	6720289.53	68.31
12	0.000244	98361	24	98349.00	6621918.53	67.32
13	0.000305	98337	30	98322.00	6523569.53	66.34
14	0.000448	98307	44	98285.00	6425247.53	65.36
15	0.000631	98263	62	98231.99	6326962.53	64.39
16	0.000815	98201	80	98160.99	6228730.54	63.43
17	0.000927	98121	91	98075.49	6130569.55	62.48
18	0.001071	98030	105	97977.48	6032494.07	61.54
19	0.001144	97925	112	97868.98	5934516.58	60.60
20	0.001268	97813	124	97750.97	5836647.61	59.67
21	0.001321	97689	129	97624.47	5738896.63	58.75
22	0.001374	97560	134	97492.97	5641272.16	57.82
23	0.001437	97426	140	97355.97	5543779.19	56.90
24	0.001501	97286	146	97212.96	5446423.23	55.98
25	0.001565	97140	152	97063.96	5349210.26	55.07
26	0.001639	96988	159	96908.46	5252146.30	54.15
27	0.001714	96829	166	96745.95	5155237.85	53.24
28	0.001800	96663	174	96575.95	5058491.89	52.33
29	0.001886	96489	182	96397.94	4961915.95	51.42

30	0.001973	96307	190	96211.94	4865518.00	50.52
31	0.002070	96117	199	96017.43	4769306.07	49.62
32	0.002179	95918	209	95813.42	4673288.63	48.72
33	0.002288	95709	219	95599.42	4577475.21	47.83
34	0.002409	95490	230	95374.91	4481875.79	46.94
35	0.002540	95260	242	95138.90	4386500.89	46.05
36	0.002673	95018	254	94890.89	4291361.99	45.16
37	0.002828	94764	268	94629.87	4196471.10	44.28
38	0.002984	94496	282	94354.86	4101841.23	43.41
39	0.003142	94214	296	94065.84	4007486.37	42.54
40	0.003322	93918	312	93761.83	3913420.52	41.67
41	0.003515	93606	329	93441.31	3819658.70	40.81
42	0.003709	93277	346	93103.79	3726217.39	39.95
43	0.003928	92931	365	92748.26	3633113.61	39.09
44	0.004159	92566	385	92373.23	3540365.34	38.25
45	0.004404	92181	406	91977.70	3447992.11	37.40
46	0.004664	91775	428	91560.67	3356014.41	36.57
47	0.004937	91347	451	91121.13	3264453.74	35.74
48	0.005237	90896	476	90657.58	3173332.62	34.91
49	0.005552	90420	502	90168.53	3082675.03	34.09
50	0.005883	89918	529	89652.98	2992506.50	33.28
51	0.006242	89389	558	89109.42	2902853.52	32.47
52	0.006631	88831	589	88535.85	2813744.10	31.68
53	0.007037	88242	621	87930.77	2725208.25	30.88
54	0.007475	87621	655	87292.68	2637277.49	30.10
55	0.007934	86966	690	86620.08	2549984.80	29.32
56	0.008438	86276	728	85910.97	2463364.72	28.55
57	0.008966	85548	767	85163.35	2377453.75	27.79
58	0.009530	84781	808	84375.71	2292290.40	27.04
59	0.010134	83973	851	83546.06	2207914.69	26.29
60	0.010767	83122	895	82672.89	2124368.63	25.56
61	0.011456	82227	942	81754.19	2041695.75	24.83
62	0.012192	81285	991	80787.47	1959941.56	24.11
63	0.012965	80294	1041	79771.24	1879154.08	23.40
64	0.013791	79253	1093	78703.97	1799382.85	22.70
65	0.014688	78160	1148	77583.17	1720678.88	22.01

66	0.015634	77012	1204	76406.84	1643095.71	21.34
67	0.016634	75808	1261	75173.97	1566688.87	20.67
68	0.017707	74547	1320	73883.07	1491514.90	20.01
69	0.018859	73227	1381	72532.12	1417631.83	19.36
70	0.020085	71846	1443	71119.62	1345099.71	18.72
71	0.021391	70403	1506	69644.57	1273980.09	18.10
72	0.022773	68897	1569	68106.48	1204335.52	17.48
73	0.024269	67328	1634	66504.31	1136229.04	16.88
74	0.025847	65694	1698	64837.59	1069724.73	16.28
75	0.027533	63996	1762	63106.80	1004887.14	15.70
76	0.029341	62234	1826	61311.94	941780.34	15.13
77	0.031254	60408	1888	59454.01	880468.40	14.58
78	0.033305	58520	1949	57534.50	821014.39	14.03
79	0.035495	56571	2008	55554.91	763479.90	13.50
80	0.037828	54563	2064	53517.74	707924.99	12.97
81	0.040306	52499	2116	51426.49	654407.26	12.47
82	0.042971	50383	2165	49284.65	602980.76	11.97
83	0.045792	48218	2208	47096.75	553696.11	11.48
84	0.048815	46010	2246	44868.27	506599.36	11.01
85	0.052029	43764	2277	42605.22	461731.09	10.55
86	0.055463	41487	2301	40314.62	419125.87	10.10
87	0.059128	39186	2317	38003.97	378811.25	9.67
88	0.063034	36869	2324	35681.78	340807.28	9.24
89	0.067188	34545	2321	33357.60	305125.50	8.83
90	0.071624	32224	2308	31041.42	271767.90	8.43
91	0.076381	29916	2285	28743.25	240726.48	8.05
92	0.081430	27631	2250	26474.16	211983.23	7.67
93	0.086797	25381	2203	24246.17	185509.08	7.31
94	0.092545	23178	2145	22070.79	161262.90	6.96
95	0.098702	21033	2076	19959.06	139192.11	6.62
96	0.105238	18957	1995	17922.54	119233.05	6.29
97	0.112192	16962	1903	15972.78	101310.51	5.97
98	0.119663	15059	1802	14119.74	85337.74	5.67
99	0.127555	13257	1691	12373.07	71217.99	5.37
100	0.136089	11566	1574	10740.65	58844.93	5.09
101	0.145116	9992	1450	9229.14	48104.27	4.81

102	0.154765	8542	1322	7843.99	38875.13	4.55
103	0.164958	7220	1191	6588.75	31031.15	4.30
104	0.175983	6029	1061	5464.31	24442.39	4.05
105	0.187601	4968	932	4469.77	18978.08	3.82
106	0.200198	4036	808	3601.97	14508.30	3.59
107	0.213445	3228	689	2855.98	10906.34	3.38
108	0.227649	2539	578	2225.17	8050.36	3.17
109	0.242733	1961	476	1701.00	5825.18	2.97
110	0.259259	1485	385	1273.30	4124.19	2.78
111	0.276364	1100	304	931.67	2850.88	2.59
112	0.295226	796	235	664.85	1919.22	2.41
113	0.315508	561	177	461.37	1254.36	2.24
114	0.335938	384	129	310.75	792.99	2.07
115	0.360784	255	92	202.18	482.25	1.89
116	0.386503	163	63	126.41	280.06	1.72
117	0.420000	100	42	75.22	153.65	1.54
118	0.448276	58	26	42.45	78.43	1.35
119	0.500000	32	16	22.18	35.98	1.12

Особо подчеркнем, что эта таблица является чисто иллюстративной. Гипотетическая группа людей, для которой составлена эта таблица, отличается большой долей долгожителей. Скажем, средняя продолжительность жизни в соответствии с этой таблицей равна 78 лет, в то время как для мужчин в Англии в 1961 году она равнялась 68 лет, а для населения США в 1979 году – 74 года. Из 100000 новорожденных до 105 лет в нашей группе доживает 4968 человек, в США – 179 человек, а в Англии (из мужчин) – около 5 человек.

5.2 Таблицы отбора риска

При анализе характеристик продолжительности жизни в разделах 2 "– 4 и описании структуры таблицы продолжительности жизни в разделе 5.1 мы вели речь о наудачу выбранном человеке. Однако неявно мы предполагали, что выбор не такой уж и случайный. Как минимум, ясно, что речь идет не о случайно выбранном жителе планеты, а о жителе определенного государства. Очевидно, что статистические свойства продолжительности жизни совершенно различны у жителя высокоразвитой страны Запада и жителя бедного африканского государства – поэтому абсолютно общая таблица вообще не представляет реального интереса.

Однако ясно, что и среди жителей одной страны существуют различные группы людей с разными характеристиками продолжительности жизни: вероятно, смертность среди домохозяек меньше, чем среди шахтеров; смертность среди людей, прошедших медицинскую комиссию перед заключением договора страхования, меньше, чем в среднем по стране; смертность среди людей, вышедших на пенсию по болезни, наоборот, выше (конечно, во всех случаях мы должны сравнивать людей в одном возрасте x). Но ведь страховая компания имеет дело не с абстрактными людьми, а с вполне конкретными, относительно которых доступна определенная информация (профессия, перенесенные болезни и т.д.). Поэтому ясно, что компания должна иметь целый спектр таблиц продолжительности жизни для различных групп населения. Такие таблицы называются *таблицами с отбором* (select tables) или *таблицами отбора риска.*

Термин "отбор" связан с тем, что люди попадают в группу, для которой составляется таблица, после некоторого отбора. Иногда этот отбор кем-то специально проводится (например, медицинской комиссией перед заключением договора страхования), иногда человек сам отбирает себя (например, при оформлении пожизненной ренты), иногда это происходит по причине внешних обстоятельств (например, при оформлении пенсии по болезни). Смертность среди людей, включенных в такую группу, зависит не только от возраста x, но и от того, когда произошел отбор. Рассмотрим, например, людей, успешно прошедших медицинский андеррайтинг и заключивших договоры страхования жизни. Ясно, что вероятность смерти в течение ближайшего года человека из этой группы существенно меньше, чем вероятность смерти в течение ближайшего года случайно выбранного человека в том же возрасте. Более интересно то, что вероятность смерти в течение ближайшего года человека, только что прошедшего отбор меньше, чем вероятность смерти в течение года человека в том же возрасте, но прошедшего отбор несколько лет тому назад. Например, вероятность смерти мужчины в возрасте 52 года по данным страховой статистики Великобритании за 1970-1972 гг. составляет 0,344% для первого года договора, 0,429% – если с момента заключения договора прошел уже год и 0,603%, если договор был заключен 2 или больше лет тому назад.

В связи с этим величины, включенные в таблицы с отбором, имеют два аргумента: один показывает момент отбора x, а второй – время t, прошедшее с момента отбора. Чтобы указать эту зависимость, в актуарной математике не пишут $f(x,t)$ или $f_{x,t}$ (как мы это сделали бы в общем курсе математики), а употребляют следующее обозначение:

$$f_{[x]+t}.$$

При фиксированном возрасте $x+t$ и моменте отбора $[x]$ (или, что то же самое, промежутке времени t, прошедшем с момента отбора) величина вида $f_{[x]+t}$ ничем принципиально не отличается от величины f_{x+t} (мы лишь явно указываем некоторое дополнительное условие, при котором она рассматривается). Поэтому для характеристик продолжительности жизни "отобранных" людей справедливы все результаты, полученные в разделах 2 "– 4, включая введенные там обозначения (точно так же, как для условных вероятностей в классическом курсе теории вероятностей справедливы все теоремы, доказанные для обычных вероятностей). Например, $q_{[x]+t}$ обозначает условную вероятность смерти в течение года человека в возрасте $x+t$ лет, который t лет назад (т.е. в возрасте x лет) был отобран в группу.

Если обозначить через τ_s время, прошедшее с момента отбора, то

$$q_{[x]+t} = \mathbf{P}(T_{x+t} \leq 1 | \tau_s = t)$$

Можно ввести более сложные характеристики смерти в выделенной группе, аналогичные характеристикам, введенным в разделе 3:

$p_{[x]+t} = \mathbf{P}(T_{x+t} > 1 | \tau_s = t)$ – вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который был t лет назад (т.е. в возрасте x лет) отобран в группу, проживет еще по меньшей мере год;

${}_nq_{[x]+t} = \mathbf{P}(T_{x+t} \leq n | \tau_s = t)$ – вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который отобран t лет назад, умрет на протяжении ближайших n лет;

${}_np_{[x]+t} = \mathbf{P}(T_{x+t} > n | \tau_s = t)$ – вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который отобран t лет назад, проживет еще по меньшей мере n лет;

${}_{n|m}q_{[x]+t} = \mathbf{P}(n < T_{x+t} \leq n+m | \tau_s = t)$ – вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который отобран t лет назад, проживет еще n лет, но умрет на протяжении m последующих лет;

${}_{n|}q_{[x]+t} = \mathbf{P}(n < T_{x+t} \leq n+1 | \tau_s = t)$ – вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который отобран t лет назад, проживет еще n лет, но умрет на протяжении следующего года.

Все эти вероятности могут быть выражены через вероятности $q_{[x]+t}$. Прежде всего ясно, что

$$p_{[x]+t} = 1 - q_{[x]+t}, \tag{5.2.1}$$

$$_np_{[x]+t} = 1 - {}_nq_{[x]+t}, \tag{5.2.2}$$

$$\begin{aligned} {}_{n|m}q_{[x]+t} &= {}_{n+m}q_{[x]+t} - {}_nq_{[x]+t} \\ &= {}_np_{[x]+t} - {}_{n+m}p_{[x]+t}. \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Более интересной является следующая формула:

$$_np_{[x]+t} = p_{[x]+t} \cdot p_{[x]+t+1} \cdot \ldots \cdot p_{[x]+t+n-1}. \tag{5.2.4}$$

Для ее доказательства отметим, что человек в возрасте $x + t$ лет, который был отобран t лет назад, проживет n лет (до возраста $x + t + n$ лет), если:

он не умрет в течение первого из этих n лет; вероятность этого события есть $p_{[x]+t}$;

при условии, что он прожил год (т.е. дожил до возраста $x+t+1$), он не умрет в течение второго года; т.к. в возрасте $x+t+1$ с момента отбора пройдет $t + 1$ лет, вероятность этого события равна $p_{[x]+t+1}$;

...

при условии, что он дожил до возраста $x+t+n-1$, он не умрет в течение промежутка $(x+t+n-1, x+t+n)$; т.к. в возрасте $x+t+n-1$ с момента отбора пройдет $t + n - 1$ лет, вероятность этого события равна $p_{[x]+t+n-1}$.

Фрагмент таблицы с отбором, который содержит вероятность смерти в течение ближайшего года, может выглядеть примерно следующим образом:

	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	...
$[x]$	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$q_{[x]+3}$	$q_{[x]+4}$	...
30	$103 \cdot 10^{-5}$	$170 \cdot 10^{-5}$	$209 \cdot 10^{-5}$	$225 \cdot 10^{-5}$	$240 \cdot 10^{-5}$	...
31	$124 \cdot 10^{-5}$	$186 \cdot 10^{-5}$	$222 \cdot 10^{-5}$	$236 \cdot 10^{-5}$	$252 \cdot 10^{-5}$	...

32	$139 \cdot 10^{-5}$	$191 \cdot 10^{-5}$	$231 \cdot 10^{-5}$	$251 \cdot 10^{-5}$	$265 \cdot 10^{-5}$	...
33	$154 \cdot 10^{-5}$	$207 \cdot 10^{-5}$	$244 \cdot 10^{-5}$	$262 \cdot 10^{-5}$	$281 \cdot 10^{-5}$	...
34	$175 \cdot 10^{-5}$	$212 \cdot 10^{-5}$	$251 \cdot 10^{-5}$	$279 \cdot 10^{-5}$	$297 \cdot 10^{-5}$	...

5.3 Таблицы с отбором ограниченного действия

Тонкий статистический анализ показывает, что обычно влияние отбора продолжается неограниченно долго. Однако, как правило, зависимость характеристик смертности от времени, прошедшего с момента отбора, быстро уменьшается и через некоторое время (с той или иной степенью точности) эти характеристики зависят только от достигнутого возраста. Следует подчеркнуть, что само влияние отбора сохраняется, в том смысле, что эти характеристики отличаются от популяционных.

Промежуток времени r, после которого зависимостью от момента отбора можно пренебречь и рассматривать все характеристики продолжительности жизни только как функции достигнутого возраста, называется (хотя этот термин не очень верно передает суть дела) *периодом действия отбора* (select period).

Рассмотрим, например, таблицу с отбором, приведенную в предыдущем разделе. Для возраста $x = 34$ года мы имеем следующие значения вероятности смерти в зависимости от промежутка времени t, прошедшего с момента отбора:

$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$175 \cdot 10^{-5}$	$207 \cdot 10^{-5}$	$231 \cdot 10^{-5}$	$236 \cdot 10^{-5}$	$240 \cdot 10^{-5}$

Видно, что вначале влияние момента отбора существенно. Однако для $t = 3$ и $t = 4$ значения очень близки. Поэтому приближенно можно считать, что период действия отбора равен трем годам, и заменить в этой таблице все столбцы, соответствующие $t \geq 3$, одним столбцом, который бы давал значение q_x только как функцию возраста. Полученная таблица будет выглядеть следующим образом (для удобства мы добавили столбец, содержащий значения возраста $x + 3$):

$[x]$	$t=0$ $q_{[x]}$	$t=1$ $q_{[x]+1}$	$t=2$ $q_{[x]+2}$	q_{x+3}	$x+3$
30	$103\cdot10^{-5}$	$170\cdot10^{-5}$	$209\cdot10^{-5}$	$229\cdot10^{-5}$	33
31	$124\cdot10^{-5}$	$186\cdot10^{-5}$	$222\cdot10^{-5}$	$241\cdot10^{-5}$	34
32	$139\cdot10^{-5}$	$191\cdot10^{-5}$	$231\cdot10^{-5}$	$254\cdot10^{-5}$	35
33	$154\cdot10^{-5}$	$207\cdot10^{-5}$	$244\cdot10^{-5}$	$267\cdot10^{-5}$	36
34	$175\cdot10^{-5}$	$212\cdot10^{-5}$	$251\cdot10^{-5}$	$283\cdot10^{-5}$	37

Такая таблица называется *таблицей с отбором ограниченного действия* (select-and-ultimate table). Предельные значения q_x (которые заменяют $q_{[x-t]+t}$ при $t \geq r$ образуют так называемую *предельную таблицу* (ultimate table). По своей структуре она является таблицей простейшего типа, рассмотренной в п.5.1.

Расчет характеристик смертности среди представителей выделенной группы может быть значительно упрощен, если вместо вероятностей $q_{[x]+t}$ ввести в рассмотрение специальные величины $l_{[x]+t}$, которые аналогичны величинам l_{x+t} из общих таблиц смертности.

Рассмотрим некоторую таблицу с отбором, действующим r лет, и определим величины $l_{[x]+t}$ с помощью следующей формулы, аналогичной (3.2.5):

$$l_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+1}}{p_{[x]+t}}. \tag{5.3.1}$$

Поскольку период действия отбора равен r, мы полагаем:

$$l_{[x]+t} = l_{x+t}, \text{если } t \geq r. \tag{5.3.2}$$

Например, если период действия отбора ограничен двумя годами, то мы вводим величины $l_{[x]}$ и $l_{[x]+1}$ с помощью формул:

$$l_{[x]+1} = \frac{l_{x+2}}{p_{[x]+1}}, \tag{5.3.3}$$

$$l_{[x]} = \frac{l_{[x]+1}}{p_{[x]}} = \frac{l_{x+2}}{p_{[x]}\cdot p_{[x]+1}}. \tag{5.3.4}$$

Поскольку

$$p_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}}, \tag{5.3.5}$$

$$q_{[x]+t} = 1 - p_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}}, \tag{5.3.6}$$

величины $l_{[x]+t}$ могут использоваться в качестве первичных характеристик смертности среди представителей выделенной группы. Однако важнее то, что более сложные характеристики смертности, такие как ${}_nq_{[x]+t}$, ${}_np_{[x]+t}$, ${}_{n|m}q_{[x]+t}$, ${}_{n|}q_{[x]+t}$, могут быть проще выражены через величины $l_{[x]+t}$, чем через величины $q_{[x]+t}$.

Используя соотношение (5.3.5), мы можем переписать формулу (5.2.4) следующим образом:

$${}_np_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}} \cdot \frac{l_{[x]+t+2}}{l_{[x]+t+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{l_{[x]+t+n}}{l_{[x]+t+n-1}} = \frac{l_{[x]+t+n}}{l_{[x]+t}}. \tag{5.3.7}$$

Теперь из (5.2.2) для ${}_nq_{[x]+t}$ мы имеем:

$${}_nq_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+n}}{l_{[x]+t}}. \tag{5.3.8}$$

Для ${}_{n|m}q_{[x]+t}$ из (5.2.3) и (5.3.7) получим:

$${}_{n|m}q_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+n} - l_{[x]+t+n+m}}{l_{[x]+t}}. \tag{5.3.9}$$

Для дальнейшего упрощения формул можно ввести величины

$$d_{[x]+t} = l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}, \tag{5.3.10}$$

так что, например, (5.3.6) примет вид:

$$q_{[x]+t} = \frac{d_{[x]+t}}{l_{[x]+t}}. \tag{5.3.11}$$

Нетрудно видеть, что формулы (5.3.7), (5.3.8), (5.3.9) аналогичны формулам (3.2.3), (3.2.2) и (3.2.10) соответственно. Поэтому часто в таблицы с отбором ограниченного действия включаются только величины $l_{[x]+t}$. Например, приведенную выше таблицу, содержащую величины $q_{[x]}$, $q_{[x]+1}$, $q_{[x]+2}$ и q_{x+3}, можно заменить следующей таблицей, содержащей величины $l_{[x]}$, $l_{[x]+1}$, $l_{[x]+2}$, l_{x+3}:

	$t=0$	$t=1$	$t=2$		
$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	$l_{[x]+2}$	l_{x+3}	$x+3$
30	96171	96072	95909	95709	33
31	95999	95880	95702	95490	34
32	95797	95664	95481	95260	35
33	95595	95448	95250	95018	36
34	95371	95204	95002	94764	37

5.4 Некоторые дополнительные замечания

5.4.1. Таблицы продолжительности жизни, которые составлены на основании реальных статистических данных, отражают прошлый опыт, в то время как применяются они для оценки смертности в будущем. В связи с этим необходимо иметь в виду следующее.

В настоящее время в экономически развитых странах наблюдается общая тенденция уменьшения смертности (хотя в последние годы уменьшение смертности замедляется и, видимо, смертность достигает некоторого предельного значения). Следует отметить, что не исключен и рост смертности из-за эпидемии СПИДа. В России смертность сильно выросла за последние 30 лет (хотя отмечались и небольшие периоды времени, когда она падала, например, во второй половине 80-х годов после антиалкогольной кампании). Это хорошо видно из следующей таблицы, которая содержит вероятности смерти от всех причин (в промилле) для мужчин трудоспособного возраста (от 16 до 59 лет) с 1960 по 2000 гг.[10]

1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966
5.5	5.7	5.7	5.7	5.6	5.8	5.9
1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
6.1	6.3	6.7	6.8	6.8	6.7	6.7
1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
6.9	7.1	6.9	7.8	7.9	8.3	8.5
1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
8.6	8.4	8.6	9.0	8.2	6.8	6.7
1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
6.8	7.3	7.6	7.8	9.1	11.6	13.2
1995	1996	1997	1998	1999	2000	
12.5	11.2	9.9	9.6	10.6	11.5	

Уменьшение смертности с течением времени уменьшает риск для компании, занимающейся страхованием жизни, однако увеличивает потери от страхования рент. Увеличение смертности с течением времени увеличивает риски в страховании жизни, но уменьшает потери от рент.

Поэтому нужно не просто использовать имеющиеся таблицы, а учитывать среднесрочные/долгосрочные (в зависимости от вида договора) тенденции в изменении смертности. Обычно это делается включением в расчеты коэффициентов, описывающих эти тенденции. Расчеты проводятся для нескольких сценариев развития событий – ожидаемого, пессимистического, оптимистического.

5.4.2. Договор страхования может быть в любой момент времени расторгнут страхователем. Иногда это происходит из-за финансовых проблем (так что страхователь не может платить очередные премии или он хочет разорвать договор, чтобы получить выкупную сумму), иногда из-за того, что страхователя не устраивает вид покрытия и т.д. Однако, если человек чувствует, что у него со здо-

---

[10]Данные взяты из Таблицы 5.4, Демографический ежегодник России. Госкомстат, Москва, 2001.

ровьем не все в порядке, он будет пытаться изыскать дополнительные финансовые ресурсы, сократить свои расходы и т.д., но вряд ли расторгнет договор страхования. С другой стороны, человек с очень хорошим здоровьем, чем-то неудовлетворенный договором, может разорвать договор без особых колебаний. Это может привести к тому, что среди застрахованных увеличится доля людей с более высокой смертностью. Соответственно средняя смертность по всему портфелю может значительно увеличиться. Отмеченное явление также нужно учитывать при разработке таблицы смертности, используемой в актуарных расчетах (его отрицательное влияние обычно компенсируют уменьшением выкупной суммы, достаточным для того, чтобы покрыть расходы из-за увеличившейся смертности.)

5.4.3. Приведенные выше таблицы учитывают только изменение смертности в зависимости от возраста (и, в случае таблиц отбора риска, в зависимости от момента отбора). Однако на смертность влияет ряд других факторов. Самый важный из них – пол застрахованного. Смертность среди женщин намного меньше, чем среди мужчин (в возрасте 20 – 40 лет примерно в 4 раза). Следует, впрочем, отметить, что для ряда страховых продуктов (например, страхования нетрудоспособности) риск выше для женщин. Поэтому для мужчин и женщин нужно использовать различные таблицы смертности.

Влияние курения на смертность общепризнанно. В среднем возрасте курение увеличивает вероятность смерти в 2 – 3 раза; для пожилых людей вероятность смерти практически не зависит от факта курения. Реально очень трудно проверить, является ли человек курильщиком. Дополнительная проблема связана с определением самого термина (курильщик ли мужчина, который курил с 16 до 36 лет и бросил курить только год назад?). Большая смертность от несчастных случаев в России (40% всех смертей в трудоспособном возрасте в 1995 году) приводит к тому, что в России влияние курения на смертность не так велико, как на Западе. Тем не менее, этот факт необходимо учитывать и использовать раздельные таблицы смертности для курильщиков и некурящих.

В случае отбора смертность зависит от характера отбора, а не только от времени, прошедшего с момента отбора. Ясно, например, что если при заключении договора страхования жизни оценка состояния здоровья проводится только на основании вопросника, уменьшение смертности по отношению к популяционной не будет таким значительным, а действие отбора не таким длительным, как в случае медицинского обследования.

Статистика смертности зависит от типа страхового продукта. Например, люди, покупающие ренту, обычно имеют хорошее здоровье и хорошую наследственность, так что смертность среди них намного ниже, чем в среднем для населения (поэтому при расчете рент обычно используют специальные таблицы (annuity tables), отражающие статистику смертности среди получателей рент).

5.4.4. При оценке финансовых обязательств страховщика регулирующие органы часто предписывают использование таблиц, которые предсказывают более высокую смертность, чем можно ожидать на самом деле. Это делается для того, чтобы обеспечить дополнительные гарантии выполнения страховой компанией своих обязательств.

5.4.5. Таблицы смертности, заболеваемости и другие таблицы, необходимые для актуарных расчетов, должны составляться на основании детальных, реальных, надежных статистических данных для *застрахованных*. На очень развитых страховых рынках (США, страны Западной Европы, особенно Великобритания, и ряд других стран) эти данные действительно доступны.

К сожалению, такая статистика в России фактически отсутствует. Имеющиеся данные (например, популяционная статистика) очень неустойчивы, и их динамика не очень понятна. Не ясно, как статистика смертности и заболеваемости зависит от уровня андеррайтинга, процедур урегулирования убытков, методов продаж, статистики расторжения договоров. В этой ситуации многие страховщики просто используют чрезмерно консервативный подход к оценке смертности и заболеваемости, непомерно завышая стоимость страховых продуктов.

Однако в теории страхования жизни разработаны определенные подходы к решению проблемы неполной и недостоверной статистики смертности на развивающихся страховых рынках.

Прежде всего можно приближенно оценить предельную страховую смертность на основе популяционной смертности. Популяционная смертность примерно в 1,5 раза выше предельной страховой (при "среднем" уровне андеррайтинга и урегулирования убытков). Это хорошо видно из следующей таблицы, где приведены популяционные вероятности смерти мужчин в Великобритании (1970 — 1972 гг.), q_x^{pop}, и предельные вероятности q_x^{ult} из таблиц страховой смертности

Великобритании 1967 — 1970 гг.:

x	20	30	40	50	60	70
q_x^{pcp}	0.106%	0.097%	0.226%	0.739%	2.075%	5.546%
q_x^{ult}	0.089%	0.065%	0.144%	0.479%	1.443%	3.911%

Влияние андеррайтинга на первых годах действия договора на развивающихся рынках обычно учитывают с помощью приближений. Одно из самых простых выглядит следующим образом: $r = 1$ (отбор действует один год), $q_{[x]} = kq_x^{ult}$, где k – некоторый параметр (обычно $k = 50\%$).

В качестве примера более сложного приближения приведем следующее:

$$l_{[x]+t} = l_{x+t}^{ult} - \left(l_x^{ult} - l_{[x]}\right) \cdot \left(1 - \frac{t}{r}\right)^h,$$

где $t = 1, \ldots, r-1$, r – период отбора, h – некоторый параметр.

В практике страхования и перестрахования жизни широко используется и другой подход. Страховые тарифы устанавливаются на базе консервативных предположений о смертности, а в договор страхования (перестрахования) вносится условие о “делении дохода”.

Например, для договоров перестрахования жизни это условие предполагает, что в конце каждого года составляется баланс доходов и убытков (при этом обычно требуется, чтобы в течение года было перестраховано некоторое минимальное число договоров, как правило, несколько сотен). Доходная часть включает чистую перестраховочную премию (т.е. за вычетом премии, которая была возвращена страховщику за разорванные договоры), резерв неурегулированных убытков на начало года и т.д. Расходы включают оплаченные убытки, расходы по урегулированию убытков, административные расходы перестраховщика (обычно эта сумма берется как определенный процент от общей перестраховочной премии за год или от чистой перестраховочной премии), резерв неурегулированных убытков на конец года, потери (если они были) из предыдущего баланса доходов и убытков и т.д. Если расходы превышают доходы, то потери будут учтены при подготовке баланса доходов и расходов следующего года. Если доходы превышают расходы, то часть "прибыли" возвращается прямому страховщику. Часто это 50% от "прибыли", но если прибыль велика, то эта сумма подсчитывается по более сложной формуле и может составлять 90% "прибыли". Если за некоторый год перестраховщиком был получен "доход" от перестрахования и произошел страховой случай, который не был заявлен в рассматриваемом году, перестраховщик имеет право пересчитать "доход" и потребовать возврата излишне выплаченных сумм.

Таким образом, актуарий страховой компании должен проделать большую исследовательскую работу с тем, чтобы сконструировать таблицу, соответствующую разрабатываемому страховому продукту.

5.5 Примеры расчетов

Пример 1. Используя таблицу для вероятностей $q_{[x]+t}$ из раздела 5.3, подсчитайте величину ${}_2q_{[32]+1}$.

Решение. Величина ${}_2q_{[32]+1}$ дает вероятность того, что человек в возрасте 33 лет, который был отобран $t = 1$ год тому назад, умрет на протяжении ближайших двух лет (т.е. до наступления 35 лет). Удобно рассчитывать дополнительную вероятность $1 - {}_2q_{[32]+1}$, которая равна вероятности того, что человек доживет до 35 лет. Очевидно, что человек доживет до 35 лет, если:

1) он доживет до 34 лет (вероятность этого события есть $1 - q_{[32]+1}$);

2) при условии, что он дожил до 34 лет, он доживет до 35 лет (т.к. в возрасте 34 года с момента отбора пройдет 2 года, вероятность этого события есть $1 - q_{[32]+2}$).

Итак,

$$1 - {}_2q_{[32]+1} = (1 - q_{[32]+1}) \cdot (1 - q_{[32]+2}),$$

т.е.

$${}_2q_{[32]+1} = q_{[32]+1} + q_{[32]+2} - q_{[32]+1} \cdot q_{[32]+2} \approx 422 \cdot 10^{-5}.$$

Расчет вероятности ${}_2q_{[32]+1}$ с помощью таблицы для величин $l_{[x]+t}$ намного проще. В силу формулы (5.3.8),

$$\begin{aligned} {}_2q_{[32]+1} &= \frac{l_{[32]+1} - l_{[32]+3}}{l_{[32]+1}} = \frac{l_{[32]+1} - l_{35}}{l_{[32]+1}} \\ &= \frac{95664 - 95260}{95664} \approx 422 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Пример 2[11]**.** Рассмотрим следующую таблицу с отбором, который действует 2 года:

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
30	1000	998	995	32
31	996	994	988	33
32	994	990	982	34
33	987	983	970	35

Какое из следующих утверждений верно?

I. ${}_2p_{[31]} > {}_2p_{[30]+1}$;

II. ${}_{1|}q_{[31]} > {}_{1|}q_{[30]+1}$;

III. ${}_2q_{[33]} > {}_2q_{[31]+2}$.

A. Ни одно из них.

B. Только I.

C. Только II.

D. Только III.

E. Правильный ответ не дается ни одним из вариантов A, B, C, D.

Решение.

I. В силу (5.3.7)

$$
{}_2p_{[31]} = \frac{l_{[31]+2}}{l_{[31]}} = \frac{l_{33}}{l_{[31]}} = \frac{988}{996} = 0.9919679;
$$

$$
{}_2p_{[30]+1} = \frac{l_{[30]+3}}{l_{[30]+1}} = \frac{l_{33}}{l_{[30]+1}} = \frac{988}{998} = 0.98998,
$$

т.е. утверждение I истинно.

II. В силу (5.3.9),

$$
{}_{1|}q_{[31]} \equiv {}_{1|1}q_{[31]} = \frac{l_{[31]+1} - l_{[31]+2}}{l_{[31]}}
$$

$$
= \frac{994 - 988}{996} = 0.0060241;
$$

[11] *Course 150 – Actuarial Mathematics*, Sample Examination #3, The Society of Actuaries, 1982, Problem 12.

$$
{}_{1|}q_{[30]+1} \equiv {}_{1|1}q_{[30]+1} = \frac{l_{[30]+2} - l_{[30]+3}}{l_{[30]+1}}
$$

$$
= \frac{l_{32} - l_{33}}{l_{[30]+1}} = \frac{995 - 988}{998} = 0.007014,
$$

т.е. утверждение II – ложно.

III. В силу (5.3.8),

$$
{}_{2}q_{[33]} = \frac{l_{[33]} - l_{[33]+2}}{l_{[33]}}
$$

$$
= \frac{l_{[33]} - l_{35}}{l_{[33]}} = \frac{987 - 970}{987} = 0.0172239;
$$

$$
{}_{2}q_{[31]+2} = \frac{l_{[31]+2} - l_{[31]+4}}{l_{[31]+2}}
$$

$$
= \frac{l_{33} - l_{35}}{l_{33}} = \frac{988 - 970}{988} = 0.0182186,
$$

т.е. утверждение III – ложно.

Таким образом, правильный ответ – B.

Пример 3[12]**.** Для некоторой таблицы с отбором, действующим 2 года, известно, что $q_{[x]} = (1 - 2k)q_x$, $q_{[x]+1} = (1 - k)q_{x+1}$, $l_{[32]} = 90$, $l_{32} = 100$, $l_{33} = 90$, $l_{34} = 63$. Подсчитайте $l_{[32]+1}$.

Решение. Прежде всего определим неизвестный параметр k. Для этого отметим, что

$$
p_{32} = \frac{l_{33}}{l_{32}} = \frac{90}{100} = 0.9,
$$

$$
p_{33} = \frac{l_{34}}{l_{33}} = \frac{63}{90} = 0.7.
$$

Поэтому $q_{32} = 1 - p_{32} = 0.1$, $q_{33} = 1 - p_{33} = 0.3$ и, значит,

$$
q_{[32]} = (1 - 2k) \cdot 0.1 = 0.1 - 0.2k;
$$

$$
q_{[31]+1} = (1 - k) \cdot 0.1 = 0.1 - 0.1k;
$$

[12] *Course 150 – Actuarial Mathematics,* Sample Examination #2, The Society of Actuaries, 1982, Problem 10.

$$q_{[33]} = (1 - 2k) \cdot 0.3 = 0.3 - 0.6k;$$

$$q_{[32]+1} = (1 - k) \cdot 0.3 = 0.3 - 0.3k.$$

Теперь для $l_{[32]}$ из (5.3.4) имеем:

$$l_{[32]} = \frac{l_{34}}{p_{[32]} \cdot p_{[32]+1}} = \frac{63}{(0.9 + 0.2k) \cdot (0.7 + 0.3k)}.$$

Поскольку по условию $l_{[32]} = 90$, мы получим следующее уравнение:

$$63 = (0.9 + 0.2k) \cdot (0.7 + 0.3k) \cdot 90.$$

Отсюда $k = \frac{1}{6}$ и поэтому, в частности, $p_{[32]} = 0.9 + \frac{1}{6} \cdot 0.2 = \frac{14}{15}$. Теперь в силу формулы (5.3.4),

$$l_{[32]+1} = l_{[32]} \cdot p_{[32]} = 90 \cdot \frac{14}{15} = 84.$$

6. АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ КРАТКОСРОЧНОГО СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ

6.1 Краткосрочное страхование жизни

В актуарной математике модели страхования жизни условно делят на две большие группы в зависимости от того, принимается или нет в расчет доход от инвестирования собранных премий. Если нет, то мы говорим о *краткосрочном страховании* (short-term insurance); обычно в качестве такого "короткого" интервала мы будем рассматривать интервал в 1 год. Если же да, то мы говорим о *долгосрочном страховании* (long-term insurance). Конечно, это деление условное и, кроме того, долгосрочное страхование связано с рядом других обстоятельств.

6.2 Анализ индивидуальных убытков при краткосрочном страховании жизни

Простейший вид страхования жизни заключается в следующем. Страхователь платит страховой компании p руб. (эта сумма называется *страховой премией* – premium), а компания обязуется выплатить лицу, в пользу которого заключен договор, страховую сумму (sum assured)[13] b руб. в случае смерти застрахованного в течение года по причинам, перечисленным в договоре (и не платит ничего, если он не умрет в течение года или умрет по причине, которая не покрывается договором). Страхователем может быть сам застрахованный или другое лицо (например, его работодатель).

Величина *страховой выплаты* (benefit), конечно, много больше, чем страховая премия: $b \gg p$, и нахождение "правильного" соотношения между ними – одна из важнейших задач актуарной математики.

[13]В Великобритании для страхования жизни принят термин "assurance", а термин "insurance" используется в страховании "не-жизни"; в США для всех видов страхования используется термин "insurance".

Купив за p руб. страховой *полис* (policy), страхователь избавил выгодоприобретателя от *риска* (risk) финансовых потерь, связанных с неопределенностью момента смерти застрахованного. Этот риск приняла на себя страховая компания. Для страховой компании риск заключается в случайности *убытка* (claim) по рассматриваемому договору; если застрахованный не умирает в течение года, то убыток равен 0; если же он умирает, то убыток равен b руб. Этот *индивидуальный убыток* (individual claim) является элементарной составляющей финансового риска компании и поэтому изучение финансовой деятельности компании начинается с изучения индивидуальных убытков.

Прежде всего мы отмечаем, что индивидуальный убыток ξ является случайной величиной. Поэтому важнейший элемент его анализа – это определение распределения этой случайной величины. В рассматриваемой нами простейшей схеме страхования распределение величины ξ имеет вид:

$$\pi_i = \mathbf{P}(\xi = i) = \begin{cases} p_x, & \text{если } i = 0 \\ q_x, & \text{если } i = b \end{cases}$$

где x – возраст застрахованного, q_x – вероятность того, что человек в возрасте x лет умрет в течение ближайшего года по причине, покрываемой договором, $p_x = 1 - q_x$.

Средняя величина убытка есть

$$\mathbf{E}\xi = 0 \cdot \pi_0 + b \cdot \pi_b = b \cdot q_x, \tag{6.2.1}$$

а дисперсия

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}\xi &= \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 = 0^2 \cdot \pi_0 + b^2 \cdot \pi_b - (b \cdot q_x)^2 \\ &= b^2 q_x - b^2 \cdot q_x^2 = b^2 \cdot p_x \cdot q_x. \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Часто удобнее представлять случайную величину ξ в виде произведения двух величин:

$$\xi = I \cdot \beta,$$

где I – индикатор события “был страховой случай”:

$$I = \begin{cases} 0, & \text{если не было страхового случая} \\ 1, & \text{если был страховой случай,} \end{cases}$$

а β – величина страхового возмещения при условии, что был страховой случай.

В рассматриваемой нами простейшей схеме страхования величина I имеет распределение

$$\mathbf{P}(I=0)=p_x, \quad \mathbf{P}(I=1)=q_x,$$

а β является детерминированной величиной b.

Наряду с величиной ξ, описывающей индивидуальный убыток, мы введем новую случайную величину $L=\xi-p$, которая описывает потери компании от заключенного договора страхования. Она принимает два значения: $-p$ и $b-p>0$ с вероятностями $\mathbf{P}(I=0)=p_x$ и $\mathbf{P}(I=1)=q_x$ соответственно. Таким образом, с вероятностью p_x компания имеет доход p рублей, а с вероятностью q_x терпит потери, равные $b-p$ рублей.

Средние потери компании равны $\mathbf{E}L=\mathbf{E}\xi-p=bq_x-p$. Эта формула позволяет получить простейшие выводы о величине страховой премии. Ясно, что средние потери компании должны быть неотрицательны, т.е. $p \geq bq_x$. Минимально возможное значение p равно $p_0=bq_x$. Оно соответствует нулевым средним потерям компании и называется *нетто-премией* (net premium). На самом деле реальная плата за страховку (брутто-премия или офисная премия) больше нетто-премии. Разница между ними (нагрузка) позволяет страховой компании покрыть административные расходы, обеспечить доход и, что самое главное, гарантировать малую вероятность разорения компании. Подробнее мы будем обсуждать этот вопрос позже, однако уже сейчас отметим, что неразорение компании означает просто выполнение своих обязательств перед клиентами, и в этом смысле разумное увеличение платы за страховку в интересах самих клиентов.

Страховая сумма часто принимается равной 1 или 1000. Это означает, что премия выражается как доля от страховой суммы или на 1000 страховой суммы соответственно.

В более сложных моделях страхования жизни величина ущерба при наступлении страхового случая, β, может быть случайной величиной. В качестве примера рассмотрим следующий договор страхования: если смерть застрахованного наступила от несчастного случая, то выгодоприобретателю выплачивается 500 000 руб., в случае смерти от “естественных” причин страховая выплата равна 250 000 руб. Как и раньше, мы предполагаем, что договор заключается на один год и поэтому компания не платит ничего, если застрахованный не умрет в течение года. Для численных расчетов предположим, что вероятность смерти от несчастного случая равна 0.0005, а вероятность естественной смерти равна 0.0020.

Следовательно, совместное распределение величин I и β есть:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(I=1,\beta=500\ 000)\\&=\mathbf{P}(\text{смерть наступила от несчастного случая})\\&=0.0005,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(I=1,\beta=250\ 000)\\&=\mathbf{P}(\text{смерть наступила от естественных причин})\\&=0.0020.\end{aligned}$$

Условное распределение величины ущерба при условии, что страховой случай действительно наступил, есть:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\beta=250\ 000|I=1)&=\mathbf{P}(\beta=250\ 000,I=1)/\mathbf{P}(I=1)\\&=\frac{0.0020}{0.0025}=0.8,\\\mathbf{P}(\beta=500\ 000|I=1)&=\mathbf{P}(\beta=500\ 000,I=1)/\mathbf{P}(I=1)\\&=\frac{0.0005}{0.0025}=0.2.\end{aligned}$$

Собственно убыток (т.е. случайная величина ξ) может принимать три значения: 0, 250 000 и 500 000 с вероятностями

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(I=0)&=0.9975,\\\mathbf{P}(I=1,\beta=250\ 000)&=0.0020,\\\mathbf{P}(I=1,\beta=500\ 000)&=0.0005\end{aligned}$$

соответственно. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\xi&=0\cdot0.9975+250\ 000\cdot0.0020+500\ 000\cdot0.0005\\&=500+250=750\ (\text{руб.}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\xi^2&=0^2\cdot0.9975+250\ 000^2\cdot0.0020+500\ 000^2\cdot0.0005\\&=125\ 000\ 000+125\ 000\ 000=250\ 000\ 000\ (\text{руб.}^2),\end{aligned}$$

$$\mathbf{Var}\xi=\mathbf{E}\xi^2-(\mathbf{E}\xi)^2=249\ 437\ 500,$$

$$\sqrt{\mathbf{Var}\xi}\approx 15\ 794\ (\text{руб}).$$

6.3 Точный расчет характеристик суммарного ущерба

Для страховой компании интерес представляет не конкретный страховой случай и связанная с ним выплата страховой суммы, а общая сумма выплат по всем договорам. Если эта сумма S меньше или равна, чем активы компании u, то компания успешно выполнит свои обязательства. Если же $S > u$, то компания не сможет выплатить все страховые возмещения; в этом случае мы говорим о разорении компании. Таким образом, вероятность разорения компании – это $\mathbf{P}(S > u)$, т.е. дополнительная функция распределения суммарного ущерба. Соответственно функция распределения суммарного ущерба $\mathbf{P}(S \le u)$ – это вероятность неразорения. Расчет этих вероятностей представляет фундаментальный интерес для компании и служит основой для принятия важнейших решений.

Для их расчета прежде всего отметим, что для случаев краткосрочного страхования жизни

$$S = \xi_1 + ... + \xi_N, \tag{6.3.1}$$

и поэтому вероятность разорения компании равна

$$R = \mathbf{P}(\xi_1 + ... + \xi_N > u) \tag{6.3.2}$$

где N – общее число застрахованных, а ξ_i – размер индивидуального ущерба по i-му договору. Мы предположим, что в модели (6.3.1) число N – неслучайно, а случайные величины $\xi_1, ..., \xi_N$ – независимы (таким образом, мы исключаем катастрофические несчастные случаи, влекущие смерть сразу нескольких человек, застрахованных в нашей компании). Поскольку суммарный ущерб представляет собой сумму независимых случайных величин, его распределение может быть подсчитано с помощью классических теорем и методов теории вероятностей.

Прежде всего это использование сверток. Напомним, что если η_1 и η_2 – две неотрицательные случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция распределения их суммы $\eta_1 + \eta_2$ может быть подсчитана по формуле:

$$F(x) = \int_0^x F_1(x-y)dF_2(y). \tag{6.3.3}$$

Применяя формулу (6.3.3) несколько раз, мы можем подсчитать функцию распределения суммы любого числа слагаемых.

Если случайные величины η_1 и η_2 – непрерывны, то обычно работают с плотностями $f_1(x)$, $f_2(x)$. Плотность суммы может быть подсчитана по формуле

$$f(x) = \int_0^x f_1(x-y)f_2(y)dy.$$

Если случайные величины η_1 и η_2 – целочисленны, то вместо функций распределения обычно работают с распределениями

$$p_1(n) = \mathbf{P}(\eta_1 = n),\ p_2(n) = \mathbf{P}(\eta_2 = n).$$

Распределение суммы $p(n) = \mathbf{P}(\eta_1 + \eta_2 = n)$ может быть определено по формуле:

$$p(n) = \sum_{k=0}^{n} p_1(k) \cdot p_2(n-k).$$

Последний случай представляет для нас наибольший интерес, т.к. при краткосрочном страховании жизни обычно появляются целочисленные величины.

Для подсчета свертки последовательностей $p_1(n)$ и $p_2(n)$ удобно образовать матрицу вида

$$\begin{pmatrix} p_1(0)p_2(0) & p_1(0)p_2(1) & p_1(0)p_2(2) & ... \\ p_1(1)p_2(0) & p_1(1)p_2(1) & p_1(1)p_2(2) & ... \\ p_1(2)p_2(0) & p_1(2)p_2(1) & p_1(2)p_2(2) & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

Таким образом, элемент (i, j) этой матрицы равен произведению $p_1(i) \cdot p_2(j)$ (для формирования этой матрицы удобно написать слева столбец из вероятностей $p_1(i)$, а сверху – строку из вероятностей $p_2(j)$, а затем перемножить их поэлементно).

Суммируя по линии $i + j = k$, параллельной диагонали, мы получим

$$p_1(k)p_2(0) + p_1(k-1)p_2(1) + ... + p_1(0)p_2(k)$$

т.е. в точности $p(k)$.

Рассмотрим, например, портфель из четырех одинаковых договоров страхования жизни, учитывающих смерть от несчастного случая: если смерть застрахованного наступила от несчастного случая, то его наследникам выплачивается 500000 руб.; в случае смерти от "естественных" причин страховая выплата равна 250000 руб.

Для простоты расчетов примем, что для каждого из застрахованных вероятность смерти от несчастного случая равна 0.1, вероятность смерти от естественных причин равна 0.1 и, следовательно, вероятность дожития равна 0.8. Для расчетов удобно принять 250000 руб. в качестве единицы измерения денежных сумм. Тогда каждая из случайных величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ имеет распределение, задаваемое таблицей

n	0	1	2
$p(n)$	0.8	0.1	0.1

Для подсчета распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$ образуем матрицу из трех строк и трех столбцов с элементами $p_1(i)p_2(j)$:

$$\begin{pmatrix} 0.64 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.01 & 0.01 \\ 0.08 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}$$

Поэтому для $q(n) = \mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 = n)$ имеем таблицу:

n	0	1	2	3	4
$q(n)$	0.64	0.16	0.17	0.02	0.01

(поскольку $\xi_1, \xi_2 \le 2$, их сумма не превосходит 4).

Для подсчета $r(n) = \mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = n) = \mathbf{P}((\xi_1 + \xi_2) + \xi_3 = n)$ образуем матрицу из трех строк и пяти столбцов с элементами $p_3(i) \cdot q(j)$:

$$\begin{pmatrix} 0.512 & 0.128 & 0.136 & 0.016 & 0.008 \\ 0.064 & 0.016 & 0.017 & 0.002 & 0.001 \\ 0.064 & 0.016 & 0.017 & 0.002 & 0.001 \end{pmatrix}$$

Поэтому для распределения $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ имеем таблицу:

n	0	1	2	3	4	5	6
$r(n)$	0.512	0.192	0.216	0.049	0.027	0.003	0.001

Наконец, для подсчета $p(n) = \mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = n)$ образуем матрицу из 3 строк и 7 столбцов с элементами $p_4(i)r(j)$:

$$\begin{pmatrix} 0.4096 & 0.1536 & 0.1728 & 0.0392 & 0.0216 & 0.0024 & 0.0008 \\ 0.0512 & 0.0192 & 0.0216 & 0.0049 & 0.0027 & 0.0003 & 0.0001 \\ 0.0512 & 0.0192 & 0.0216 & 0.0049 & 0.0027 & 0.0003 & 0.0001 \end{pmatrix}$$

Поэтому для распределения суммарного ущерба мы имеем следующую таблицу:

n	$p(n)$
0	0.4096
1	0.2048
2	0.2432
3	0.0800
4	0.0481
5	0.0100
6	0.0038
7	0.0004
8	0.0001

Соответственно для функции распределения

$$\mathbf{P}(S \leq n) = \mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \leq n)$$

получим таблицу:

n	$\mathbf{P}(S \leq n)$
0	0.4096
1	0.6144
2	0.8576
3	0.9376
4	0.9857
5	0.9957
6	0.9995
7	0.9999
8	1.0000

Уже этот пример позволяет сделать поучительный вывод о величине премии. Допустим, что мы подсчитали нетто-премию в соответствии с рекомендациями п.6.2 как $p_0 = \mathbf{E}\xi = 0 \cdot 0.8 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.1 = 0.3$ и приняли ее в качестве минимальной платы за полис. Тогда капитал компании будет 1.2 и, значит, вероятность неразорения $\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \leq 1.2)$ будет равна 0.6144, т.е. недопустима мала. Из таблицы видно, что для того, чтобы вероятность разорения не превосходила 10%, мы должны иметь капитал в 3 единицы, т.е. стоимость одного полиса должна быть 0.75. Конечно, это слишком большая плата (напомним, что мы взяли в качестве единицы измерения денежных сумм 250000 руб.) – это связано со слишком малым объемом портфеля. Тем не менее, этот пример показывает, что реальная плата за страховку должна превосходить нетто-премию.

Подсчет распределения суммы с помощью сверток – крайне кропотливое и утомительное занятие, если делать это вручную. Однако при использовании компьютеров никаких проблем не возникает. Для аналитических же расчетов удобнее использовать производящие функции.

Напомним, что производящей функцией $\varphi(z)$ неотрицательной случайной величины η с распределением $p(n) = \mathbf{P}(\eta = n)$ называется сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n).$$

Нетрудно понять, что эквивалентным образом мы могли бы определить производящую функцию как $\mathbf{E}z^\eta$. Следующие свойства производящих функций используются чаще всего:

1. Если производящие функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ двух случайных величин η_1 и η_2 совпадают, то совпадают и распределения этих величин: $p_1(n) = p_2(n)$. Иными словами, распределение однозначно восстанавливается по своей производящей функции.

Действительно, для того, чтобы определить $p(n)$ по его производящей функции $\varphi(z)$, можно разложить $\varphi(z)$ в ряд Тейлора:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi^{(n)}(0)/n!.$$

Коэффициент при z^n и будет вероятностью $p(n)$.

2. $\varphi'(1) = \mathbf{E}\eta$, $\varphi''(1) = \mathbf{E}\eta^2 - \mathbf{E}\eta$ и поэтому

$$\mathbf{Var}\eta = \varphi''(1) + \varphi'(1) - [\varphi'(1)]^2.$$

Для доказательства этих формул достаточно продифференцировать равенство $\varphi(z) = \mathbf{E}z^\eta$ по z в точке $z = 1$.

3. Если случайные величины η_1 и η_2 независимы, то производящая функция их суммы, $\varphi(z)$, равна произведению производящих функций слагаемых:

$$\varphi(z) = \varphi_1(z)\varphi_2(z).$$

Действительно,

$$\varphi(z) = \mathbf{E}z^{\eta_1+\eta_2} = \mathbf{E}(z^{\eta_1} \cdot z^{\eta_2}) = \mathbf{E}z^{\eta_1} \cdot \mathbf{E}z^{\eta_2} = \varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z).$$

Применим теперь метод производящих функций для расчета распределения суммарного ущерба $S = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$ в только что рассмотренном примере страхования. Каждое слагаемое имеет одну и ту же производящую функцию:

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) = \varphi_2(z) &= \varphi_3(z) = \varphi_4(z)\\ &= 0.8 \cdot z^0 + 0.1 \cdot z^1 + 0.1 \cdot z^2\\ &= 0.1(8 + z + z^2).\end{aligned}$$

Соответственно их сумма имеет производящую функцию

$$\begin{aligned}&\varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z) \cdot \varphi_3(z) \cdot \varphi_4(z) = 0.1^4(8 + z + z^2)^4\\ &= 10^{-4} \cdot (64 + z^2 + z^4 + 16z + 16z^2 + 2z^3)^2\\ &= 10^{-4}(64 + 16z + 17z^2 + 2z^3 + z^4)^2\\ &= 10^{-4} \cdot (4096 + 256z^2 + 289z^4 + 4z^6 + z^8 + 2048z + 2176z^2\\ &+ 256z^3 + 128z^4 + 544z^3 + 64z^4 + 32z^5 + 68z^5 + 34z^6 + 4z^7)\\ &= 10^{-4} \cdot (4096 + 2048z + 2432z^2 + 800z^3\\ &+ 481z^4 + 100z^5 + 38z^6 + 4z^7 + z^8).\end{aligned}$$

Отбирая коэффициенты при степенях z, мы немедленно получим таблицу для вероятностей $p(n)$:

n	$p(n)$
0	0.4096
1	0.2048
2	0.2432
3	0.0800
4	0.0481
5	0.0100
6	0.0038
7	0.0004
8	0.0001

Точно такую же таблицу мы получили выше с помощью сверток.

6.4 Приближенный расчет вероятности разорения

Обычно число застрахованных в страховой компании очень велико. Поэтому подсчет вероятности разорения предполагает расчет функции распределения суммы *большого* числа слагаемых. В этом случае применение ЭВМ может привести к проблемам, связанным с малостью вероятностей. Однако обстоятельство, затрудняющее точный расчет, открывает возможность быстрого и простого приближенного расчета. Это связано с тем, что при росте N вероятность $\mathbf{P}(\xi_1 + ... + \xi_N \leq x)$ часто имеет определенный предел (обычно нужно, чтобы x определенным образом менялось вместе с N), который можно принять в качестве приближенного значения искомой вероятности. Точность подобных приближений обычно очень велика и удовлетворяет практические потребности. Основным является нормальное (или гауссовское) приближение.

Гауссовское приближение основано на центральной предельной теореме теории вероятностей. В простейшей формулировке эта теорема выглядит следующим образом:

если случайные величины $\xi_1, ..., \xi_N$ независимы и одинаково распределены со средним a и дисперсией σ^2, то при $N \to \infty$ функция распределения центрированной и нормированной суммы

$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_N - Na}{\sigma\sqrt{N}} = \frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}$$

имеет предел, равный

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Поэтому если число слагаемых велико, то можно написать приближенное равенство:

$$\mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} \leq x\right) \approx \Phi(x), \tag{6.4.1}$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{P}(S \leq u) \approx \Phi\left(\frac{u - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}\right). \tag{6.4.2}$$

Существуют многочисленные обобщения центральной предельной теоремы на случаи, когда слагаемые ξ_i имеют разные распределения, являются зависимыми и т.д. Детальное обсуждение этого вопроса увело бы нас слишком далеко в сторону от изучаемого предмета. Поэтому мы ограничимся утверждением, что если число слагаемых велико (обычно достаточно, чтобы N имело бы порядок нескольких десятков), а слагаемые не очень малы, то применимо гауссовское приближение для

$$\mathbf{P}\left(\frac{S-\mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}<x\right).$$

Конечно, это утверждение очень неопределенно, но и классическая центральная предельная теорема без точных оценок погрешности не дает ясного указания на сферу применения.

Функция $\Phi(x)$ при росте x от $-\infty$ до $+\infty$ возрастает от 0 до 1 и непрерывна. Поэтому она может рассматриваться как функция распределения некоторой случайной величины η. Это распределение называется гауссовским, или нормальным. Оно не зависит от каких-либо параметров и детально изучено в теории вероятностей. Существуют подробные таблицы как для функции распределения $\Phi(x)$, так и для плотности

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

Значения $1-\Phi(x)$ в наиболее интересном диапазоне $1<x<4$ приведены в следующей таблице:

x	$1-\Phi(x)$	x	$1-\Phi(x)$	x	$1-\Phi(x)$
1.0	15.87%	2.0	2.28%	3.0	0.135%
1.1	13.57%	2.1	1.79%	3.1	0.097%
1.2	11.51%	2.2	1.39%	3.2	0.069%
1.3	9.68%	2.3	1.07%	3.3	0.048%
1.4	8.08%	2.4	0.82%	3.4	0.034%
1.5	6.68%	2.5	0.62%	3.5	0.023%
1.6	5.48%	2.6	0.47%	3.6	0.020%
1.7	4.46%	2.7	0.35%	3.7	0.011%
1.8	3.59%	2.8	0.26%	3.8	0.007%
1.9	2.87%	2.9	0.19%	3.9	0.005%

Полезно также иметь таблицу квантилей x_α, отвечающих достаточно малой вероятности разорения $1-\alpha$:

$1-\alpha$	1%	2%	3%	4%	5%
x_α	2.33	2.05	1.88	1.75	1.645

В качестве иллюстрации применим гауссовское приближение для решения следующей задачи.

Задача 1. Предположим, что в компании застраховано $N = 3000$ человек с вероятностью смерти в течение года $q = 0.3\%$. Компания выплачивает сумму $b = 250000$ руб. в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если этот человек доживет до конца года.

Определите величину активов, достаточную, чтобы обеспечить вероятность разорения порядка 5%.

Решение.

Как обычно, примем размер страховой суммы в качестве новой денежной единицы.

Прежде всего мы должны подсчитать среднее значение и дисперсию суммарного ущерба S. Применяя формулы (6.2.1) и (6.2.2), мы получим:

$$\mathbf{E}S = N\mathbf{E}\xi = 3000 \cdot 0.3\% = 9,$$

$$\mathbf{Var}S = N\mathbf{Var}\xi = 3000 \cdot 99.7\% \cdot 0.3\% \approx 9.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S \le u) &= \mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} \le \frac{u - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} \le \frac{u - 9}{3}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{u-9}{3}\right).\end{aligned}$$

Если мы хотим, чтобы вероятность разорения была 5%, величина $\dfrac{u-9}{3}$ должна быть равной $x_{95\%} = 1.645$, т.е. $u = 3 \cdot 1.645 + 9 \approx 13.935$ (от величины страхового пособия) или в абсолютных цифрах около 3 483 750 руб.

6.5 Принципы назначения страховых премий

Вопрос о том, какую плату страховая компания должна назначать за то, что принимает на себя тот или иной риск, крайне сложен. При его решении учитывается большое число разнородных факторов: вероятность наступления страхового случая, его ожидаемая величина и возможные флуктуации, связь с другими рисками, которые уже приняты компанией, организационные расходы компании на ведение дела, соотношение между спросом и предложением по данному виду рисков на рынке страховых услуг и т.д. Однако основным обычно является принцип эквивалентности финансовых обязательств страховой компании и застрахованного. В рассматриваемых нами простейших видах страхования, когда плата за страховку полность вносится в момент заключения договора, обязательство застрахованного выражается в уплате премии p. Обязательство компании заключается в оплате убытка ξ. Однако мы не можем выразить принцип эквивалентности обязательств равенством $p = \xi$, поскольку премия p – детерминированная величина, а убыток ξ – случайная.

Чтобы решить эту проблему, попробуем заменить случайную величину ξ ее средним значением $\mathbf{E}\xi$, т.е. назначим в качестве платы за страховку ожидаемую величину убытка.

Оценим теперь последствия этого решения для возможности выполнения компанией своих обязательств, т.е. подсчитаем вероятность разорения (в рамках рассматриваемой модели).

Пусть, как мы определили ранее, N – число договоров в портфеле компании, случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ выражают убытки по этим договорам, $S = \xi_1 + \ldots + \xi_N$ – величина суммарного убытка. Поскольку мы решили в качестве платы p_i за i-й договор взять $\mathbf{E}\xi_i$, резервный фонд компании равен

$$u = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}\xi_i = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i\right) = \mathbf{E}S.$$

Поэтому вероятность разорения есть

$$R = \mathbf{P}(S > \mathbf{E}S).$$

Применяя гауссовское приближение, мы получим:

$$R = \mathbf{P}(S - \mathbf{E}S > 0) = \mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} > 0\right) \approx 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Конечно, это совершенно неприемлемая величина вероятности разорения. Это и не удивительно, т.к. равенство $p = \mathbf{E}\xi$ на самом деле не выражает эквивалентности обязательств компании и застрахованного. Хотя в среднем и компания, и застрахованный платят одну и ту же сумму, компания имеет риск, связанный с тем, что в силу случайных обстоятельств ей, может быть, придется выплатить гораздо большую сумму, чем $\mathbf{E}\xi$. Застрахованный же такого риска не имеет. Поэтому было бы справедливо, чтобы плата за страховку включала некоторую надбавку l, которая служила бы эквивалентом случайности, влияющей на компанию. Итак, назначим в качестве платы за i-ю страховку сумму $p_i = \mathbf{E}\xi_i + l_i$, где l_i – некоторая добавочная сумма. Теперь резервы компании есть

$$u = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{E}\xi_i + l_i) = \mathbf{E}S + l,$$

где

$$l = \sum_{i=1}^{N} l_i.$$

Соответственно вероятность разорения компании равна

$$R = \mathbf{P}(S > u) = \mathbf{P}(S > \mathbf{E}S + l).$$

Применяя гауссовское приближение, мы получим:

$$R = \mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} > \frac{l}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{l}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}\right).$$

Если мы хотим, чтобы вероятность неразорения компании была α (α – некоторое число, близкое к 1), то $l/\sqrt{\mathbf{Var}S}$ должно равняться квантилю x_α, т.е.

$$l = x_\alpha \cdot \sqrt{\mathbf{Var}S} \tag{6.5.1}$$

Поскольку $\mathbf{Var}S$ описывает величину случайных флуктуаций суммарного ущерба вокруг его среднего значения, добавочная сумма действительно в некотором смысле является компенсацией страховой компании за то, что она взяла на себя опасности, связанные с непредсказуемостью убытков.

Уравнение (6.5.1) дает величину *общей* добавочной суммы l. Теперь мы должны решить, как справедливым образом разделить ее между всеми договорами.

Обычно сумму l делят пропорционально ожидаемому убытку $\mathbf{E}\xi_i$, т.е. полагают

$$l_i = k \cdot \mathbf{E}\xi_i. \tag{6.5.2}$$

Поскольку известны $\sum l_i = l$ и $\sum \mathbf{E}\xi_i = \mathbf{E}S$, коэффициент пропорциональности k дается формулой:

$$k = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathbf{Var}S}}{\mathbf{E}S}. \tag{6.5.3}$$

Соответственно для премии мы имеем:

$$p_i = (1+k)\cdot \mathbf{E}\xi_i = \mathbf{E}\xi_i \cdot \left(1 + x_\alpha \frac{\sqrt{\mathbf{Var}S}}{\mathbf{E}S}\right). \tag{6.5.4}$$

Основной вклад в величину p_i обычно дает $\mathbf{E}\xi_i$. Эту сумму называют *нетто-премией* (net premium). Добавочную сумму $l_i = k\cdot\mathbf{E}\xi_i$ называют *страховой* (или *защитной) надбавкой* (security loading), а $\theta_i = l_i/\mathbf{E}X_i$ – *относительной страховой надбавкой* (relative security loading). В рассматриваемом случае (6.5.2) относительная страховая надбавка одна и та же для всех договоров.

Однако назначение индивидуальных премий по правилу (6.5.4) несправедливо по отношению к договорам с малыми флуктуациями возможного ущерба, т.е. с малыми дисперсиями $\mathbf{Var}\xi_i$ (если нетто-премия $\mathbf{E}\xi_i$ велика). Эти договоры оплачивают случайности, связанные с другими договорами. Имея в виду то, что суммарная надбавка l связана именно с суммарной дисперсией $\mathbf{Var}S = \sum_{i=1}^N \mathbf{Var}\xi_i$, было бы справедливо делить l на части l_i, пропорциональные дисперсиям $\mathbf{Var}\xi_i$ или средним квадратическим отклонениям $\sqrt{\mathbf{Var}\xi_i}$, т.е. требовать, чтобы

$$l_i = k\cdot\mathbf{Var}\xi_i \tag{6.5.5}$$

или

$$l_i = k\cdot\sqrt{\mathbf{Var}\xi_i} \tag{6.5.6}$$

Суммируя по $i = 1,\dots,N$ и принимая во внимание (6.5.1), мы получим:

$$k = \frac{x_\alpha}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} \tag{6.5.7}$$

в первом случае и

$$k = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathbf{Var}S}}{\sum_{j=1}^N \sqrt{\mathbf{Var}\xi_j}} \tag{6.5.8}$$

во втором.

Соответственно для индивидуальных премий мы получим:

$$p_i = \mathbf{E}\xi_i + \frac{x_\alpha}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}\cdot\mathbf{Var}\xi_i \tag{6.5.9}$$

в первом случае и

$$p_i = \mathbf{E}\xi_i + x_\alpha \frac{\sqrt{\mathbf{Var}S}}{\sum_{j=1}^N \sqrt{\mathbf{Var}\xi_j}}\cdot\sqrt{\mathbf{Var}\xi_i} \tag{6.5.10}$$

во втором.

Относительные страховые надбавки в этих случаях зависят от договоров и равны

$$\theta_i = \frac{x_\alpha}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} \cdot \frac{\mathbf{Var}\xi_i}{\mathbf{E}\xi_i} \tag{6.5.11}$$

и

$$\theta_i = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathbf{Var}S}}{\sum_{j=1}^{N} \sqrt{\mathbf{Var}\xi_j}} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{Var}\xi_i}}{\mathbf{E}\xi_i} \tag{6.5.12}$$

соответственно.

Напомним, что величина $\mathbf{Var}\xi/\mathbf{E}\xi - 1$ называется коэффициентом рассеяния случайной величины ξ, а величина $\sqrt{\mathbf{Var}\xi}/\mathbf{E}\xi$ – коэффициентом вариации. Используя формулу (6.5.11), мы можем сказать, что правило (6.5.5) назначает относительные страховые надбавки в соответствии с величиной коэффициента рассеяния (в отличие от правила (6.5.2), которое назначает относительные страховые надбавки одними и теми же для всех договоров). Соответственно формула (6.5.12) говорит, что правило (6.5.6) назначает относительные страховые надбавки пропорционально коэффициентам вариации. Поэтому различие между правилами (6.5.5) и (6.5.6) связано с тем, что считать количественной мерой "случайности" – коэффициент рассеяния или коэффициент вариации. Вопрос о том, какое из этих правил является более справедливым (конечно, с точки зрения застрахованных; компания в любом случае получит одну и ту же требуемую сумму $l = x_\alpha \cdot \sqrt{\mathbf{Var}S}$), в актуарной математике однозначно не решен. Конечно, если все договоры статистически однородны, то правила (6.5.2), (6.5.5) и (6.5.6) дают один и тот же результат:

$$l_i = x_\alpha \sqrt{\frac{\mathbf{Var}\xi_i}{N}}$$

Отметим, кроме того, что при переходе от простейшего правила (6.5.2) к правилу (6.5.5) страховая надбавка для i-го договора уменьшается, если

$$\frac{\mathbf{Var}\xi_i}{\mathbf{E}\xi_i} < \frac{\mathbf{Var}S}{\mathbf{E}S},$$

т.е. если коэффициент рассеяния убытка, связанного с этим договором, меньше, чем коэффициент рассеяния суммарного иска.

Переход от простейшего правила (6.5.2) к правилу (6.5.6) приводит к уменьшению страховой надбавки для i-го договора, если

$$\frac{\sqrt{\mathbf{Var}\xi_i}}{\mathbf{E}\xi_i} < \sum_{j=1}^{N} \frac{\sqrt{\mathbf{Var}\xi_j}}{\mathbf{E}\xi_j} \cdot \frac{\mathbf{E}\xi_j}{\mathbf{E}S},$$

т.е. если коэффициент вариации величины индивидуального убытка от i-го договора меньше, чем средний коэффициент вариации, усредненный по всему портфелю с весами $\mathbf{E}\xi_j/\mathbf{E}S$.

6.6 Примеры расчетов

Пример 1. Предположим, что страховая компания заключила $N = 10000$ договоров страхования жизни сроком на один год на следующих условиях: в случае смерти застрахованного в течение года от несчастного случая компания выплачивает наследникам 1000000 руб., а в случае смерти в течение года от естественных причин компания выплачивает наследникам 250000 руб. Компания не платит ничего, если застрахованный не умрет в течение года. Вероятность смерти от несчастного случая одна и та же для всех застрахованных и равна 0.0005. Вероятность смерти от естественных причин зависит от возраста. В первом приближении можно разбить N застрахованных на две возрастные группы, содержащие $N_1 = 4000$ и $N_2 = 6000$ человек с вероятностью смерти в течение года $q_1 = 0.0040$ и $q_2 = 0.0020$ соответственно.

Подсчитайте величину премии, гарантирующую вероятность выполнения компанией своих обязательств, равную 95%.

Решение. Примем сумму 250000 руб. в качестве единицы измерения денежных сумм. Тогда для первой группы договоров индивидуальный убыток принимает три значения: 0, 1 и 4 с вероятностями 0.9955, 0.0040 и 0.0005 соответственно. Среднее значение и дисперсия величины индивидуального убытка есть

$$m_1 = 1 \cdot 0.0040 + 4 \cdot 0.0005 = 0.0060,$$

$$\sigma_1^2 = 1^2 \cdot 0.0040 + 4^2 \cdot 0.0005 - m_1^2 \approx 0.0120.$$

Для второй группы договоров индивидуальный убыток принимает те же три значения 0, 1 и 4, но с другими вероятностями: 0.9975, 0.0020 и 0.0005. В этой группе среднее значение и дисперсия индивидуального убытка есть

$$m_2 = 1 \cdot 0.0020 + 4 \cdot 0.0005 = 0.0040,$$

$$\sigma_2^2 = 1^2 \cdot 0.0020 + 4^2 \cdot 0.0005 - m_2^2 \approx 0.0100.$$

Среднее значение и дисперсия суммарного убытка равны:

$$\mathbf{E}S = N_1 \cdot m_1 + N_2 \cdot m_2 = 4000 \cdot 0.006 + 6000 \cdot 0.004 = 48,$$

$$\mathbf{Var}S = N_1 \cdot \sigma_1^2 + N_2 \cdot \sigma_2^2 \approx 4000 \cdot 0.012 + 6000 \cdot 0.010 = 108.$$

Для того, чтобы гарантировать 95% вероятность неразорения, резервный фонд компании должен быть $\mathbf{E}S + l = 48 + l$, где добавочная сумма l в соответствии с формулой (6.5.1) равна

$$l = x_{95\%} \cdot \sqrt{\mathbf{Var}S} \approx 1.645 \cdot \sqrt{108} \approx 17.095.$$

Рассмотрим теперь вопрос о назначении индивидуальных премий.

А. Если добавочная сумма l делится пропорционально нетто-премиям, то в соответствии с (6.5.3) относительная страховая надбавка θ одна и та же для всех договоров и равна

$$\theta = \frac{l}{\mathbf{E}S} \approx 35.6\%.$$

Поэтому для договоров из первой группы премия равна

$$p_1 = m_1 \cdot (1 + \theta) \approx 0.00814 = 2034\text{руб.}$$

Для договоров из второй группы премия равна

$$p_2 = m_2 \cdot (1 + \theta) \approx 0.00542 = 1356\text{руб.}$$

Б. Если добавочная сумма l делится пропорционально дисперсиям, то в соответствии с (6.5.7) коэффициент пропорциональности k есть

$$k = \frac{l}{\mathbf{Var}S} \approx 15.8\%.$$

Поэтому для договоров из первой группы страховая надбавка равна

$$l_1 = k \cdot \sigma_1^2 \approx 0.001899,$$

так что премия есть

$$p_1 = m_1 + l_1 \approx 0.007899 = 1975\text{руб.},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 31.7\%.$$

Для договоров из второй группы страховая надбавка равна

$$l_2 = k \cdot \sigma_2^2 \approx 0.001583,$$

так что премия есть

$$p_2 = m_2 + l_2 \approx 0.005583 = 1396\text{руб.},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 39.6\%.$$

B. Если добавочная сумма l делится пропорционально средним квадратическим отклонениям (они равны $\sigma_1 \approx 0.1095$ для договоров первой группы и $\sigma_2 = 0.1$ для договоров второй группы), то в соответствии с (6.5.8) коэффициент пропорциональности k есть

$$k = \frac{l}{N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2} \approx 0.0165.$$

Поэтому для договоров из первой группы страховая надбавка равна

$$l_1 = k \cdot \sigma_1 \approx 0.001804,$$

так что премия есть

$$p_1 = m_1 + l_1 \approx 0.007804 = 1951\text{руб.},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 30\%.$$

Для договоров из второй группы страховая надбавка равна

$$l_2 = k \cdot \sigma_2 \approx 0.001647,$$

так что премия есть

$$p_2 = m_2 + l_2 \approx 0.005647 = 1412\text{руб.},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 41\%.$$

Итак, изменение принципа назначения индивидуальных премий приводит к уменьшению относительной страховой надбавки для договоров первой группы: $\theta_1 = 35.6\%,\ 31.7\%,\ 30\%$.

Соответственно для договоров второй группы относительная защитная надбавка увеличивается: $\theta_2 = 35.6\%,\ 39.6\%,\ 41\%$. Это связано с тем, что коэффициент рассеяния суммарного ущерба есть

$$\frac{\mathbf{Var}S}{\mathbf{E}S} - 1 = 1.25,$$

в то время как для договоров первой (второй) группы он равен $\sigma_1^2/m_1 - 1 = 1$ (соответственно $\sigma_2^2/m_2 - 1 = 1.5$). Коэффициент вариации величины индивидуального убытка для договоров первой группы есть

$$c_1 = \sigma_1/m_1 \approx 18.26,$$

а для договоров второй группы он равен

$$c_2 = \sigma_2/m_2 = 25.$$

Средний коэффициент вариации, усредненный по всему портфелю с весами $\mathbf{E}\xi_j/\mathbf{E}S$, есть

$$\begin{aligned} c &= c_1 \cdot \frac{N_1 m_1}{\mathbf{E}S} + c_2 \cdot \frac{N_2 m_2}{\mathbf{E}S} \\ &= c_1 \cdot \frac{24}{48} + c_2 \cdot \frac{24}{48} = \frac{c_1 + c_2}{2} \approx 21.63. \end{aligned}$$

Итак, хотя дисперсия величины индивидуального убытка для договоров второй группы меньше, чем для договоров первой группы, флуктуации индивидуальных убытков для договоров второй группы (измеренные как коэффициентом рассеяния, так и коэффициентом вариации) превышают средние флуктуации по всему портфелю. Поэтому было бы оправдано принять один из принципов (6.5.5), (6.5.6) в качестве основы для назначения индивидуальных премий. Тем не менее, ниже для упрощения наших иллюстративных расчетов мы будем назначать страховую надбавку в соответствии с правилом (6.5.2).

Задача 2[14]. Страховая компания предлагает договоры страхования жизни на один год. Информация относительно структуры покрытия приведена в следующей таблице:

Страховая сумма	Причина смерти	Вероятность
500 000	обычная	0.10
1 000 000	несчастный случай	0.01

Относительная защитная надбавка равна 20%.

Предположим, что отдельные полисы независимы и страховщик использует нормальное приближение для распределения суммарных выплат.

Сколько договоров должен продать страховщик, чтобы собранная премия с вероятностью 95% покрывала суммарные выплаты?

Решение. Пусть N – общее число проданных договоров, X_k – выплаты по k–му договору, $S = X_1 + \cdots + X_N$ – суммарные выплаты по всему портфелю, θ – относительная защитная надбавка, так что премия по одному договору равна $p = (1+\theta)EX_k$.

По условию, $P(S < Np) = 0.95$. С другой стороны,

$$\mathbf{P}(S < Np) = \mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} < \frac{Np - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{Np - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}\right)$$
$$= \Phi\left(\sqrt{N}\frac{\theta \mathbf{E}X_k}{\sqrt{\mathbf{Var}X_k}}\right).$$

Поэтому

$$\sqrt{N}\frac{\theta \mathbf{E}X_k}{\sqrt{\mathbf{Var}X_k}} = x_{0.95} = 1.645,$$

где $x_{0.95}$ – корень уравнения $\Phi(x) = 0.95$ (квантиль порядка 0.95 стандартного гауссовского распределения).

Отсюда для искомого числа договоров имеем:

$$N = \frac{x_{0.95}^2 \cdot \mathbf{Var}X_k}{\theta^2 \cdot (\mathbf{E}X_k)^2}.$$

---

[14] *Exam 151 – Risk Theory,* Society of Actuaries, May 1999, Problem 8.

Поскольку для индивидуального договора

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= 500\ 000 \cdot 0.10 + 1\ 000\ 000 \cdot 0.01 = 60\ 000,\\
\mathbf{E}X^2 &= 500\ 000^2 \cdot 0.10 + 1\ 000\ 000^2 \cdot 0.01 = 35 \cdot 10^9,\\
\mathbf{Var}X &= 314 \cdot 10^8,
\end{aligned}
$$

искомое число договоров равно 590.

Задача 3[15]**.** Компания ABC предполагает организовать групповое страхование жизни для своих сотрудников. Структура персонала приведена в следующей таблице:

профессиональный класс	число сотрудников	страховая сумма	вероятность смерти
1	100	1	0.1
2	100	1	0.2
3	200	2	0.1
4	200	2	0.2

ABC предполагает внести в страховой фонд сумму, равную ожидаемым выплатам страховых возмещений.

Каждый сотрудник, в свою очередь, должен будет внести сумму, равную определенной доле p от размера ожидаемой выплаты. Размер этой доли определяется таким образом, чтобы с вероятностью 95% средств страхового фонда хватило для выплаты страховых возмещений.

Определите размер взноса для работников четвертого профессионального класса.

Решение. Пусть q – вероятность смерти сотрудника, SA – размер страховой суммы. Поскольку индивидуальные потери по договору принимают только два значения: 0 с вероятностью $1-q$ и SA с вероятностью q, среднее значение индивидульных потерь есть $\mathbf{E}X = q \cdot SA$, а дисперсия – $\mathbf{Var}X = q(1-q) \cdot SA^2$.

Далее, предполагая, как обычно, независимость времен жизни сотрудников компании, можно подсчитать среднее и дисперсию суммарных выплат для каждого профессионального класса. Для этого

[15] *Exam 151 – Risk Theory,* Society of Actuaries, May 1994, Problem 6.

нужно среднее (соответственно дисперсию) индивидуальных потерь умножить на число работников в классе:

$$\mathbf{E}S' = N \cdot \mathbf{E}X$$
$$\mathbf{Var}S' = N \cdot \mathbf{Var}X.$$

Результаты расчетов приведены в следующей таблице:

проф. класс	число сотрудников	SA	q	$\mathbf{E}X$	$\mathbf{Var}X$	$\mathbf{E}S'$	$\mathbf{Var}S'$
1	100	1	0.1	0.1	0.09	10	9
2	100	1	0.2	0.2	0.16	20	16
3	200	2	0.1	0.2	0.36	40	72
4	200	2	0.2	0.4	0.64	80	128

Чтобы получить среднее значение (дисперсию) суммарных выплат S для всего портфеля, нужно сложить средние (дисперсии) суммарных потерь для всех четырех профессиональных классов, так что

$$\mathbf{E}S = 150, \ \mathbf{Var}S = 225.$$

Размер страхового фонда равен $u = \mathbf{E}S + p \cdot \mathbf{E}S$. По условию, должно быть верно равенство

$$\mathbf{P}(S \le u) = 0.95,$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} \le \frac{u - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}\right) = 0.95.$$

Применяя гауссовское приближение для центрированной и нормированной величины общих выплат, мы имеем:

$$\frac{u - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} = x_{0.95}.$$

В рассматриваемой ситуации это равенство примет вид:

$$p = 0.1 x_{0.95} \approx 0.1645.$$

Соответственно защитная надбавка для работников четвертого профессионального класса равна $0.1645 \cdot 0.4 = 0.0658$. Иначе говоря, $p = 6.58\%$.

7. АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ДОЛГОСРОЧНОГО СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ

7.1 Общая модель долгосрочного страхования жизни

Как мы отмечали в п.6.1, *долгосрочное страхование* (long-term insurance) характеризуется тем, что при расчетах принимается во внимание изменение ценности денег с течением времени. Поэтому теория долгосрочного страхования существенно опирается на теорию сложных процентов, изложенную в разделе 1.

Ниже мы будем предполагать, что интенсивность процентов δ не меняется с течением времени. Как было определено в разделе 1, $i = e^{\delta} - 1$ будет обозначать эффективную годовую процентную ставку, $v = 1/(1+i)$ – коэффициент дисконтирования и т.д.

Страховое возмещение (benefit) обычно выплачивается в виде одиночной суммы (lump sum) в момент смерти застрахованного (конечно, в реальности как выгодоприобретателю, так и компании требуется определенное время для подготовки документов) – такие виды страхования часто называют непрерывными. Однако возможны выплаты и в другие моменты времени. Наиболее важен (с теоретической точки зрения) случай, когда выплата производится не в момент смерти, а в следующий за ним день рождения застрахованного – такие виды страхования часто называют дискретными. Если считать (как это обычно делается при актуарных расчетах), что возраст застрахованного в момент заключения договоры – целое число, то дискретные договора можно описать как договоры с выплатой страхой суммы в очередную, после момента смерти, годовщину заключения договора. Возможны и более сложные варианты. Например, для так называемого чисто накопительного страхования выплата производится в фиксированный момент n в будущем, если застрахованный дожил до этого момента.

В самом общем случае момент выплаты страховой суммы является некоторой функцией $\tau(T_x)$ от остаточного времени жизни застрахованного. Для страхования с выплатой страхового возмещения в момент смерти $\tau(T_x) = T_x$; для страхования с выплатой страхового возмещения в конце года смерти $\tau(T_x) = K(x) + 1 \equiv [T_x] + 1$; для чисто накопительного страхования $\tau(T_x) = n$.

Величина страхового возмещения, как правило, фиксирована и мы будем принимать ее в качестве единицы измерения денежных сумм. Однако в ряде случаев возмещение может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от момента выплаты. С этой целью мы введем функцию b_t, которая определяет величину страховой выплаты в случае смерти в момент t.

Две функции, $\tau(t)$ и b_t, определяют общую модель страхования жизни. С ее помощью можно единообразно описать различные конкретные виды страхования.

пожизненное страхование (whole life insurance).

Простейшим примером долгосрочного страхования является пожизненное страхование. При этом виде страхования фиксированная страховая сумма $b = 1$ выплачивается в момент смерти и поэтому

$$\tau(t) = t, \; b_t = 1. \tag{7.1.1}$$

***n*-летнее чисто накопительное страхование (n-year pure endowment insurance).**

При этом виде страхования выплата страховой суммы фиксированной величины $b = 1$ производится в момент n, если застрахованный дожил до этого момента. В случае смерти до момента n компания не платит ничего. Этот вид страхования описывается следующими функциями $\tau(t)$ и b_τ:

$$\tau(t) = n, \; b_t = \begin{cases} 1 & \text{, если } \; t > n \\ 0 & \text{, если } \; t \le n. \end{cases} \tag{7.1.2}$$

***n*-летнее временное страхование жизни (*n*-year term life insurance).**

При этом виде страхования выплата фиксированной страховой суммы $b = 1$ производится в момент смерти, если застрахованный умер в течение срока действия договора, т.е. на протяжении n лет с момента заключения договора. Если же застрахованный прожил эти n лет, то компания не платит нечего. Этот вид страхования при $n = 1$ дает простейшую схему, изученную в разделе 6, а при

$n = \infty$ – пожизненное страхование. Его можно описать следующими функциями $\tau(t)$ и b_t:

$$\tau(t) = t, \; b_t = \begin{cases} 1 & , \text{если} \;\; t \le n \\ 0 & , \text{если} \;\; t > n. \end{cases} \tag{7.1.3}$$

n-летнее смешанное страхование (n-year endowment insurance).

При этом виде страхования выплата фиксированной страховой суммы $b = 1$ производится на следующих условиях. Если смерть застрахованного наступит до истечения срока действия договора, то страховая сумма выплачивается в момент смерти. Если же застрахованный дожил до окончания срока действия договора, то страховая сумма выплачивается в момент n окончания срока действия договора. Нетрудно понять, что этот вид страхования выполняет функции как собственно страхования, так и накопления средств. Его можно описать следующими функциями $\tau(t)$ и b_t:

$$\tau(t) = \min(t, n), \; b_t = 1. \tag{7.1.4}$$

Пожизненное страхование, отсроченное на m лет (m-year deferred whole life insurance).

При этом виде страхования выплата фиксированной страховой суммы $b = 1$ производится в момент смерти застрахованного, но только если она произошла по истечении m-летнего срока с момента заключения договора. Если застрахованный умрет раньше, чем через m лет после заключения договора, страховое возмещение не выплачивается вовсе. Этот вид страхования описывается следующими функциями $\tau(t)$ и b_t:

$$\tau(t) = t, \; b_t = \begin{cases} 0 & , \text{если} \;\; t \le m \\ 1 & , \text{если} \;\; t > m. \end{cases} \tag{7.1.5}$$

По аналогии с пожизненным страхованием, отсроченным на m лет, можно ввести и другие виды отсроченного страхования, обобщающие ранее введенные виды обычного страхования. Например, для n-летнего временного страхования, отсроченного на m лет,

$$\tau(t) = t, \; b_t = \begin{cases} 0 & , \text{если} \;\; t \le m, \\ 1 & , \text{если} \;\; m < t \le m + n, \\ 0 & , \text{если} \; t > m + n. \end{cases} \tag{7.1.6}$$

Страхование с переменной страховой выплатой (varying benefit insurance).

Во всех рассмотренных выше примерах величина страховой выплаты была фиксирована и не зависела от момента выплаты. Существуют многочисленные виды страхования, когда страховое возмещение может меняться. В качестве примера мы рассмотрим простейшее из них – пожизненное страхование с непрерывно увеличивающимся страховым возмещением (continuously increasing whole life insurance). При этом виде страхования компания выплачивает в момент смерти сумму, равную T_x (напомним, что денежные суммы измеряются у нас некоторой условной единицей). Этот случай описывается общей моделью при

$$\tau(t) = t, \ b_t = t. \tag{7.1.7}$$

Страхование с выплатой страховой суммы в конце года смерти (insurance payable at the end of the year of death).

При страховании с выплатой страховой суммы в конце года смерти страховое возмещение выплачивается в момент

$$[T_x] + 1 = K(x) + 1,$$

где $K(x)$ – округленное время жизни, введенное в разделе 4. Для каждого из рассмотренных ранее непрерывных видов страхования (исключая чисто накопительное страхование) существует дискретный аналог с выплатой страховой суммы в конце года смерти:

для дискретного пожизненного страхования

$$\tau(t) = [t] + 1, \ b_t = 1, \tag{7.1.8}$$

для n-летнего дискретного страхования жизни

$$\tau(t) = [t] + 1, \ b_t = \begin{cases} 1 & \text{, если } \ t < n, \\ 0 & \text{, если } \ t \geq n, \end{cases} \tag{7.1.9}$$

для дискретного n-летнего смешанного страхования

$$\tau(t) = \min([t] + 1, n), \ b_t = 1, \tag{7.1.10}$$

для дискретного пожизненного страхования, отсроченного на m лет

$$\tau(t) = [t] + 1, \quad b_t = \begin{cases} 0 & \text{, если } \ t \leq m \\ 1 & \text{, если } \ t > m. \end{cases} \tag{7.1.11}$$

для дискретного пожизненного страхования с ежегодно возрастающей страховой суммой

$$\tau(t) = [t] + 1, \ b_t = [t] + 1, \tag{7.1.12}$$

7.2 Вероятность разорения в одной простой модели

В этом пункте мы проведем анализ простейшей модели финансовой деятельности страховой компании, учитывая всю совокупность имеющихся договоров. Именно, предположим, что в момент $t_0 = 0$ портфель компании включает N договоров страхования жизни (не обязательно однородных). Обозначим через τ_k момент выплаты страхового возмещения по k-му договору, а через b_k – величину этого возмещения. Основное предположение нашей модели заключается в том, что премии полностью внесены в момент $t_0 = 0$.

Наша цель заключается в описании динамики активов компании $u(t)$ с течением времени.

Для этого образуем вариационный ряд $0 < \tau_{(1)} \leq \ldots \leq \tau_{(N)}$; он получается, если величины τ_k расположить в порядке возрастания. Например, $\tau_{(1)} = \min\{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$, $\tau_{(N)} = \max\{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$. На промежутках $[\tau_{(k)}, \tau_{(k+1)})$ процесс $u(t)$ возрастает по закону

$$u(\tau_{(k)} + t) = u(\tau_{(k)}) \cdot (1+i)^t,$$

а в момент $\tau_{(k+1)}$ процесс $u(t)$ уменьшается на величину страховой выплаты:

$$u(\tau_{(k+1)} + 0) = u(\tau_{(k+1)} - 0) - b_{(k+1)}.$$

Если в какой-то момент $\tau_{(k)}$ величина $u(\tau_{(k)} - 0) < b_{(k)}$, то компания не сможет выплатить требуемую сумму; в этом случае мы говорим о “разорении”.

Опишем поведение процесса $u(t)$, которое соответствует неразорению компании.

В момент $\tau_{(1)} - 0$ компания располагает активами $u_0 \cdot (1+i)^{\tau_{(1)}}$. Они должны быть не меньше, чем $b_{(1)}$:

$$u_0 \cdot (1+i)^{\tau_{(1)}} \geq b_{(1)}.$$

В этом случае в момент $\tau_{(1)}$ компания выплатит $b_{(1)}$ рублей и к моменту $\tau_{(1)} + 0$ будет иметь активы $u_0 \cdot (1+i)^{\tau_{(1)}} - b_{(1)}$.

В момент $\tau_{(2)} - 0$ компания располагает активами

$$\left(u_0 \cdot (1+i)^{\tau_{(1)}} - b_{(1)}\right)(1+i)^{\tau_{(2)} - \tau_{(1)}} = u_0 \cdot (1+i)^{\tau_{(2)}} - b_{(1)}(1+i)^{\tau_{(2)} - \tau_{(1)}}.$$

Они должны быть не меньше, чем $b_{(2)}$, т.е.

$$u_0 \cdot (1+i)^{\tau_{(2)}} \geq b_{(1)}(1+i)^{\tau_{(2)} - \tau_{(1)}} + b_{(2)}.$$

В этом случае в момент $\tau_{(2)}$ компания выплатит $b_{(2)}$ рублей и к моменту $\tau_{(2)}+0$ будет иметь активы

$$u_0\cdot(1+i)^{\tau_{(2)}}-b_{(1)}(1+i)^{\tau_{(2)}-\tau_{(1)}}-b_{(2)}.$$

В момент $\tau_{(3)}-0$ компания располагает активами

$$\begin{aligned}&(u_0\cdot(1+i)^{\tau_{(2)}}-b_{(1)}(1+i)^{\tau_{(2)}-\tau_{(1)}}-b_{(2)})(1+i)^{\tau_{(3)}-\tau_{(2)}}\\ &=u_0\cdot(1+i)^{\tau_{(3)}}-b_{(1)}(1+i)^{\tau_{(3)}-\tau_{(1)}}-b_{(2)}(1+i)^{\tau_{(3)}-\tau_{(2)}}.\end{aligned}$$

Они должны быть не меньше, чем $b_{(3)}$, т.е.

$$u_0\cdot(1+i)^{\tau_{(3)}}\geq b_{(1)}(1+i)^{\tau_{(3)}-\tau_{(1)}}+b_{(2)}(1+i)^{\tau_{(3)}-\tau_{(2)}}+b_{(3)}.$$

В этом случае в момент $\tau_{(3)}$ компания выплатит $b_{(3)}$ рублей и к моменту $\tau_{(3)}+0$ будет иметь активы

$$u_0\cdot(1+i)^{\tau_{(3)}}-b_{(1)}(1+i)^{\tau_{(3)}-\tau_{(1)}}-b_{(2)}(1+i)^{\tau_{(3)}-\tau_{(2)}}-b_{(3)}.$$

....

В момент $\tau_{(N-1)}-0$ компания располагает активами

$$u_0\cdot(1+i)^{\tau_{(N-1)}}-b_{(1)}(1+i)^{\tau_{(N-1)}-\tau_{(1)}}-\ldots-b_{(N-2)}(1+i)^{\tau_{(N-1)}-\tau_{(N-2)}}.$$

Они должны быть не меньше, чем $b_{(N-1)}$, т.е.

$$u_0\cdot(1+i)^{\tau_{(N-1)}}\geq\sum_{l=1}^{N-1}b_{(l)}(1+i)^{\tau_{(N-1)}-\tau_{(l)}}.$$

В этом случае к моменту $\tau_{(N-1)}+0$ компания будет иметь активы

$$u_0\cdot(1+i)^{\tau_{(N-1)}}-\sum_{l=1}^{N-1}b_{(l)}(1+i)^{\tau_{(N-1)}-\tau_{(l)}}.$$

В момент $\tau_{(N)}-0$ компания располагает активами

$$u_0\cdot(1+i)^{\tau_{(N)}}-b_{(1)}(1+i)^{\tau_{(N)}-\tau_{(1)}}-\ldots-b_{(N-1)}(1+i)^{\tau_{(N)}-\tau_{(N-1)}}.$$

Они должны быть не меньше, чем $b_{(N)}$, т.е.

$$u_0 \cdot (1+i)^{\tau(N)} \geq b_{(1)}(1+i)^{\tau(N)-\tau(1)} + \ldots + b_{(N-1)}(1+i)^{\tau(N)-\tau(N-1)} + b_{(N)}.$$

В этом случае компания сможет произвести последний платеж.

Таким образом, компания не разорится, если выполнены N неравенств

$$u_0 \cdot (1+i)^{\tau(k)} \geq \sum_{l=1}^{k} b_{(l)}(1+i)^{\tau(k)-\tau(l)}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Разделив почленно на $(1+i)^{\tau(k)}$, перепишем эти неравенства в виде:

$$\sum_{l=1}^{k} b_{(l)} v^{\tau(l)} \leq u_0, \;\; k = 1, \ldots, N.$$

Ясно, что для справедливости всех этих неравенств достаточно потребовать выполнения только одного неравенства, соответствующего случаю $k = N$:

$$\sum_{k=1}^{N} b_{(k)} v^{\tau(k)} \leq u_0.$$

Поскольку сумма не зависит от порядка слагаемых,

$$\sum_{k=1}^{N} b_{(k)} v^{\tau(k)} = \sum_{k=1}^{N} b_k v^{\tau_k} = \sum_{k=1}^{N} Z_k,$$

где $Z_k = b_k v^{\tau_k}$ – величина выплаты по k-му договору, приведенная к моменту $t_0 = 0$.

Таким образом, компания не разорится, если верно неравенство:

$$\sum_{k=1}^{N} Z_k \leq u_0,$$

т.е. вероятность разорения дается формулой

$$R = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{N} Z_k > u_0\right). \tag{7.2.1}$$

Эта формула совершенно аналогична формуле (6.3.2) для вероятности разорения компании при краткосрочном страховании. Величина u_0 играет роль суммарных активов страховщика, а Z_k – убытка по k-му договору. Таким образом, при расчете вероятности разорения при долгосрочном страховании жизни все происходит так, как будто речь идет о краткосрочном страховании с величинами убытков Z_k. В частности, как следует из результатов п.6.5, нетто-премия для k-го договора есть

$$p_k^{(\mathrm{n})} = \mathbf{E} Z_k, \tag{7.2.2}$$

т.е. определяется на основе принципа эквивалентности финансовых обязательств компании и застрахованного в момент заключения договора, а относительная страховая надбавка может в простейшем случае определяться по формуле

$$\frac{p_k^{(\mathrm{s})}}{p_k^{(\mathrm{n})}} = x_\alpha \cdot \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N \mathbf{Var} Z_k}}{\sum_{k=1}^N \mathbf{E} Z_k}. \tag{7.2.3}$$

Для более сложных моделей функционирования страховой компании (с выплатой премий или страховых сумм в виде серии платежей, возможностью заключения новых договоров и т.д.) премия p также рассчитывается как сумма нетто-премии $p^{(\mathrm{n})}$ и страховой надбавки $p^{(\mathrm{s})}$: $p = p^{(\mathrm{n})} + p^{(\mathrm{s})}$. Нетто-премия $p^{(\mathrm{n})}$ определяется из принципа эквивалентности финансовых обязательств страховой компании и застрахованного и поэтому выражается через среднее значение приведенной стоимости потока страховых выплат в момент заключения договора (а в случае периодических премий и через среднее значение приведенной стоимости потока премий в момент заключения договора). Страховая надбавка $p^{(\mathrm{s})}$ служит для защиты от случайных флуктуаций процессов выплат пособий и получения премий и связана с дисперсиями приведенных ценностей соответствующих платежей. Следует отметить, что для усложненных моделей не удается выразить вероятность разорения в виде простой формулы, подобной (7.2.1) и получить для нетто-премии и страховой надбавки простые формулы, аналогичные (7.2.2) и (7.2.3). Тем не менее проведенные выше рассуждения показывают, что в любом случае для расчета премий необходимо уметь находить приведенную стоимость будущих выплат на момент заключения договора (present value random variable) (как сделанных самой компанией, так и сделанных в адрес компании), ее среднее значение (actuarial present value) и дисперсию.

Как мы покажем в следующем пункте, расчет дисперсии современной стоимости будущих страховых выплат часто можно свести к расчету среднего значения этой случайной величины (но при измененной процентной ставке). Поэтому центральное место в теории долгосрочного страхования жизни занимает расчет актуарных, т.е. средних, приведенных стоимостей случайных платежей. Имея в виду (7.2.2), актуарные приведенные ценности называют разовыми нетто-премиями (single net-premium).

7.3 Теорема о дисперсии приведенной ценности

Рассмотрим некоторый договор страхования, описываемый с помощью функций $\tau(t)$ и b_t. Пусть

$$Z = b_{T_x} \cdot v^{\tau(T_x)} \equiv b_{T_x} \cdot e^{-\delta\tau(T_x)} \tag{7.3.1}$$

приведенная стоимость страхового пособия на момент заключения договора с человеком в возрасте x. Чтобы подчеркнуть зависимость случайной величины Z от процентной ставки, мы будем писать $Z_{@\delta}$ (обратим внимание на то, что мы указываем интенсивность процентов δ, а не эффективную годовую процентную ставку i или коэффициент дисконтирования v). Обозначим также через

$$A_{@\delta} = \mathrm{E}Z_{@\delta} = \mathrm{E}b_{T_x} \cdot v^{\tau(T_x)} = \mathrm{E}b_{T_x} \cdot e^{-\delta\tau(T_x)} \tag{7.3.2}$$

актуарную приведенную стоимость будущей страховой выплаты, если интенсивность процентов равна δ.

Предположим теперь, что в нашей общей модели страхования функция b_t принимает только значения 0 и 1, т.е. если в соответствии с условиями договора в некоторый момент t выплачивается страховое возмещение, то его величина не зависит от момента выплаты. Все описанные в п.7.1 виды страхования, кроме страхования с переменной страховой выплатой, удовлетворяют этому условию. Тогда $b_t^j = b_t$ и поэтому

$$Z^j_{@\delta} = b_{T_x} \cdot e^{-(j\delta)\tau(T_x)} = Z_{@j\delta}, \tag{7.3.3}$$

т.е. j-я степень современной величины будущей страховой выплаты, подсчитанной для интенсивности процентов δ, совпадает с современной величиной будущей страховой выплаты, но подсчитанной для интенсивности процентов $j\delta$. Тем более равенство верно для средних значений, т.е.

$$\mathbf{E}Z^{j}_{@\delta} = A_{@j\delta}.$$

В частности,

$$\mathbf{Var}Z_{@\delta} = \mathbf{E}Z^{2}_{@\delta} - \left(\mathbf{E}Z_{@\delta}\right)^2 = A_{@2\delta} - \left(A_{@\delta}\right)^2. \qquad (7.3.4)$$

Обычно фиксирована некоторая основная процентная ставка. В этом случае $Z_{@\delta}$ и $A_{@\delta}$ обозначают просто Z и A соответственно (но оставляют все другие дополнительные индексы, включенные в их обозначения), а величину $A_{@j\delta}$ обозначают ${}^{j}A$. С учетом этих соглашений формулу (7.3.4) можно переписать в виде:

$$\mathbf{Var}Z = {}^{2}A - (A)^2. \qquad (7.3.5)$$

7.4 Разовые нетто-премии для основных непрерывных видов страхования

Как следует из изложенного выше, разовая нетто-премия для любого договора страхования, описываемого функциями $\tau(t)$ и b_t? есть

$$A = \mathbf{E}Z, \qquad (7.4.1)$$

где

$$Z = b_{T_x} \cdot v^{\tau(T_x)} = b_{T_x} \cdot e^{-\delta\tau(T_x)} \qquad (7.4.2)$$

величина страхового возмещения, приведенная на момент заключения договора, а x – возраст застрахованного в этот момент.

Для конкретных видов страхования общая формула (7.4.2) может быть упрощена и конретизирована. Соответственно, актуарная современная стоимость страховой выплаты, даваемая формулой (7.4.1), может быть выражена через характеристики остаточного времени жизни, введенные в разделах 2 — 4. Для того, чтобы подчеркнуть, что речь идет о конкретных договорах, переменные Z и A снабжаются различными индексами (строго говоря, в актуарной математике обязательно снабжается индексами только A, но мы будем делать это и для Z; позже это позволит сделать более понятными формулы, связывающие пожизненные ренты и страхования). Основные правила, регулирующие эти индексы, следующие:

1. справа внизу во всех случаях ставится возраст x застрахованного на момент заключения договора: A_x;

2. если договор страхования непрерывный, т.е. страховое пособие выплачивается в момент смерти, то сверху ставится черта: $\overline{A}$;

3. если договор действует ограниченный период времени n, то после возраста x через двоеточие ставится дополнительный индекс n, обрамленный уголком: $A_{x:\overline{n}|}$;

4. если договор отсрочен на m лет, то внизу слева ставится индекс $m|$: ${}_{m|}A$;

5. если величина страховой суммы регулярно возрастает, то добавляется буква I : IA.

Рассмотрим теперь конкретные договора страхования.

пожизненное страхование (whole life insurance).

Современная стоимость страховой суммы в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается $\overline{Z}_x$; в силу (7.1.1) и (7.4.2) она дается формулой

$$\overline{Z}_x = v^{T_x} = e^{-\delta T_x}. \tag{7.4.3}$$

Актуарная современная стоимость страховой суммы в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается $\overline{A}_x$:

$$\overline{A}_x \equiv \mathbf{E}\overline{Z}_x = \mathbf{E}v^{T_x} = \mathbf{E}e^{-\delta T_x}.$$

Читатель, знакомый с аналитическими методами теории вероятностей, конечно, отметит, что $\overline{A}_x$ является преобразованием Лапласа остаточного времени жизни T_x в точке δ. В силу общих теорем теории вероятностей $\overline{A}_x$ можно следующим образом выразить через характеристики времени жизни, введенные в разделах 2 и 3:

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty v^t f_x(t)\,dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^\infty v^t f(t)\,dt. \tag{7.4.4}$$

Интегрируя по частям, мы можем переписать эту формулу в виде (напомним, что $v = e^{-\delta}$) :

$$\begin{aligned}
\overline{A}_x &= -\frac{1}{v^x s(x)} \int_x^\infty v^t\,ds(t) \\
&= -\frac{1}{v^x s(x)} \cdot \left(e^{-\delta t} s(t)\Big|_x^\infty + \delta \int_x^\infty v^t s(t)\,dt \right) \\
&= 1 - \delta \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^\infty v^t s(t)\,dt \\
&= 1 - \delta \frac{1}{v^x l_x} \int_x^\infty v^t l_t\,dt.
\end{aligned} \tag{7.4.5}$$

Произведение $v^t l_t$, которое появилось в этой формуле, обозначается D_t :

$$D_t = v^t l_t. \tag{7.4.6}$$

С помощью этого обозначения формулу (7.4.5) можно записать проще:

$$\overline{A}_x = 1 - \delta \frac{1}{D_x} \int_x^\infty D_t \, dt. \tag{7.4.7}$$

Поэтому функцию D_t называют *заменяющей* или *упрощающей* (commutation) *функцией*; в отечественной актуарной литературе обычно используют термин *коммутационная функция.*

Позже мы увидим, что во многих формулах появляется интеграл $\int_x^\infty D_t \, dt$. Чтобы упростить записи, его обозначают $\overline{N}_x$:

$$\overline{N}_x = \int_x^\infty D_t \, dt. \tag{7.4.8}$$

С учетом обозначения (7.4.8) формулу (7.4.7) можно записать проще:

$$\overline{A}_x = 1 - \delta \frac{\overline{N}_x}{D_x}. \tag{7.4.9}$$

На самом деле обычно величина $\overline{N}_x$ появляется в виде немного более сложного выражения $D_x - \delta \overline{N}_x$; это выражение обозначают $\overline{M}_x$:

$$\overline{M}_x = D_x - \delta \overline{N}_x = \int_x^\infty D_t \mu_t \, dt. \tag{7.4.10}$$

С учетом обозначения (7.4.10) формулу (7.4.7) можно записать еще проще:

$$\overline{A}_x = \frac{\overline{M}_x}{D_x}. \tag{7.4.11}$$

Величины $\overline{N}_x$, $\overline{M}_x$ также называются заменяющими (упрощающими) функциями.

Обычно различные заменяющие функции включаются в таблицы продолжительности жизни (для целочисленных значений возраста x); это позволяет проще производить расчеты. Впрочем, следует отметить, что с появлением персональных компьютеров практически никакой пользы от введения упрощающих функций нет. Однако раньше они позволяли существенно ускорять вычисления. В настоящее время они в основном важны для решения учебных задач и примеров.

n-летнее чисто накопительное страхование (n-year pure endowment insurance).

Современная стоимость страховой суммы в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается $Z_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$; в силу (7.1.2) и (7.4.2) она дается формулой

$$Z_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \begin{cases} 0, & \text{если } T_x \le n \\ v^n, & \text{если } T_x > n. \end{cases} \tag{7.4.12}$$

Актуарная приведенная стоимость страховой суммы обозначается $A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$:

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} &\equiv \mathbf{E} Z_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \\ &= v^n \cdot \mathbf{P}(T_x > n) = v^n \frac{s(x+n)}{s(x)} \\ &= v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x}. \end{aligned} \tag{7.4.13}$$

С учетом обозначения (7.4.6) мы можем переписать эту формулу в терминах первой упрощающей функции D_t :

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{7.4.14}$$

n-летнее страхование жизни (n-year term life insurance).

Современная стоимость страховой выплаты в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается $\overline{Z}_{x:\overline{n}|}^{1}$; в силу (7.1.3) и (7.4.2) она дается формулой

$$\overline{Z}_{x:\overline{n}|}^{1} = \begin{cases} v^{T_x}, & \text{если } T_x \le n \\ 0, & \text{если } T_x > n. \end{cases} \tag{7.4.15}$$

Актуарная современная стоимость страховой выплаты в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается $\overline{A}_{x:\overline{n}|}^{1}$:

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|}^{1} \equiv \mathbf{E}\overline{Z}_{x:\overline{n}|}^{1} == \mathbf{E}\left(v^{T_x}; T_x \le n\right) = \mathbf{E}\left(e^{-\delta T_x}; T_x \le n\right).$$

Таким образом, $\overline{A}_{x:\overline{n}|}^{1}$ является неполным преобразованием Лапласа остаточного времени жизни T_x в точке δ. В силу общих теорем теории вероятностей $\overline{A}_{x:\overline{n}|}^{1}$ можно следующим образом выразить через характеристики времени жизни, введенные в разделах 2 и 3:

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|}^{1} = \int_0^n v^t f_x(t)\,dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^{x+n} v^t f(t)\,dt. \tag{7.4.16}$$

Интегрируя по частям, мы можем переписать эту формулу в виде (напомним, что $v = e^{-\delta}$) :

$$
\begin{aligned}
\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} &= -\frac{1}{v^x\, s(x)} \int_x^{x+n} v^t\, ds(t) \\
&= -\frac{1}{v^x\, s(x)} \cdot \left(e^{-\delta t} s(t) \Big|_x^{x+n} + \delta \int_x^{x+n} v^t s(t)\, dt \right) \\
&= 1 - \frac{v^{x+n} s(x+n)}{v^x\, s(x)} - \delta \frac{1}{v^x\, s(x)} \int_x^{\infty} v^t s(t)\, dt \\
&= 1 - \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x} \delta \frac{1}{v^x l_x} \int_x^{\infty} v^t l_t\, dt.
\end{aligned} \tag{7.4.17}
$$

С учетом обозначений (7.4.6), (7.4.8), (7.4.10) мы можем переписать эту формулу в терминах функций D_t, $\overline{N}_t$, $\overline{M}_t$:

$$
\begin{aligned}
\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} &= 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - \delta \frac{1}{D_x} \int_x^{x+n} D_t\, dt \\
&= 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - \delta \frac{\overline{N}_x - \overline{N}_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{D_x}.
\end{aligned} \tag{7.4.18}
$$

Обратим особое внимание читателя на место индекса 1 в обозначениях $A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ и $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ для разовой нетто-премии в случае чисто накопительного страхования и временного страхования. Для того, чтобы объяснить, почему появляется этот индекс, отметим, что для этих видов страхования мы имеем дело с двумя событиями:

(1) смертью застрахованного в момент T_x (это событие обозначается индексом x);

(2) окончанием срока действия договора в момент n (это событие обозначается индексом $\overline{n}|$).

Разница в условиях выплаты пособия между чисто накопительным и временным страхованием связана с тем, какое событие наступает первым. Если первым истекает срок действия договора (так что застрахованный еще жив), то мы имеем дело с чисто накопительным страхованием. Если первой наступает смерть (так что срок действия договора еще не истек), то мы имеем дело с временным страхованием. Индекс 1 вверху справа как раз и указывает, какое событие наступает первым.

n-летнее смешанное страхование (n-year endowment insurance).

Современная стоимость страховой суммы в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается $\overline{Z}_{x:\overline{n}|}$; в силу (7.1.4) и (7.4.2) она дается формулой

$$\overline{Z}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} v^{T_x}, & \text{если } T_x \le n \\ v^n, & \text{если } T_x > n. \end{cases} \tag{7.4.19}$$

Используя соотношения (7.4.15) и (7.4.12), можно связать современные стоимости страховых выплат для n-летнего страхования, n-летнего смешанного страхования и n-летнего чисто накопительного страхования:

$$\overline{Z}_{x:\overline{n}|} = Z_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} + \overline{Z}^{1}_{x:\overline{n}|}. \tag{7.4.19}$$

Тем более соответствующая формула верна для средних значений:

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} + \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}. \tag{7.4.20}$$

Используя (7.4.13) и (7.4.16), мы можем выразить $\overline{A}_{x:\overline{n}|}$ через характеристики остаточного времени жизни:

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t f_x(t)\,dt + v^n \cdot \mathbf{P}(T_x > n), \tag{7.4.21}$$

а с помощью (7.4.14) и (7.4.18) – через упрощающие функции D_t, $\overline{N}_t$, $\overline{M}_t$:

$$\begin{aligned} \overline{A}_{x:\overline{n}|} &= 1 - \delta \frac{1}{D_x} \int_x^{x+n} D_t\,dt \\ &= 1 - \delta \frac{\overline{N}_x - \overline{N}_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \end{aligned} \tag{7.4.22}$$

Пожизненное страхование, отсроченное на m лет (m-year deferred whole life insurance).

Современная стоимость страхового возмещения в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается ${}_{m|}\overline{Z}_x$; в силу (7.1.5) и (7.4.2) она дается формулой

$${}_{m|}\overline{Z}_x = \begin{cases} v^{T_x}, & \text{если } T_x > m \\ 0, & \text{если } T_x \le m. \end{cases} \tag{7.4.23}$$

Используя соотношения (7.4.3), (7.4.15), можно связать современные стоимости страховых возмещений для пожизненного страхования, отсроченного на m лет, m-летнего страхования и пожизненного страхования:

$$ {}_{m|}\overline{Z}_x = \overline{Z}_x - \overline{Z}^{\,1}_{x:\overline{m}|}. \tag{7.4.24} $$

Тем более соответствующая формула верна для средних значений:

$$ {}_{m|}\overline{A}_x = \overline{A}_x - \overline{A}^{\,1}_{x:\overline{m}|}. \tag{7.4.25} $$

Используя (7.4.4) и (7.4.16), мы можем выразить ${}_{m|}\overline{A}_x$ через характеристики остаточного времени жизни:

$$ {}_{m|}\overline{A}_x = \int_m^\infty v^t f_x(t)\,dt), \tag{7.4.26} $$

а с помощью (7.4.11) и (7.4.18) – через упрощающие функции D_t, $\overline{N}_t$, $\overline{M}_t$:

$$ \begin{aligned} {}_{m|}\overline{A}_x &= \frac{D_{x+m}}{D_x} - \delta\frac{1}{D_x}\int_{x+m}^\infty D_t\,dt \\ &= \frac{D_{x+m}}{D_x} - \delta\frac{\overline{N}_{x+m}}{D_x} \\ &= \frac{\overline{M}_{x+m}}{D_x}. \end{aligned} \tag{7.4.27} $$

***n*-летнее временное страхование жизни, отсроченное на *m* лет (*m*-year deferred *n*-year term life insurance).**

Размер страхового возмещения, приведенный на момент заключения договора с человеком в возрасте x лет, обозначается ${}_{m|}\overline{Z}^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ или ${}_{m|n}\overline{Z}_x$; в силу (7.1.5) и (7.4.2) она дается формулой

$$ {}_{m|}\overline{Z}^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} 0, & \text{если } T_x \le m \\ v^{T_x}, & \text{если } m < T_x \le m+n \\ 0, & \text{если } T_x > m+n. \end{cases} \tag{7.4.28} $$

Используя соотношения (7.4.3), (7.4.15), можно связать современные стоимости страховых выплат для пожизненного страхования, отсроченного на m лет, m-летнего страхования и $(m+n)$-летнего страхования:

$$ {}_{m|}\overline{Z}^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \overline{Z}^{\,1}_{x:\overline{m+n}|} - \overline{Z}^{\,1}_{x:\overline{m}|}. \tag{7.4.29} $$

Тем более соответствующая формула верна для средних значений:

$$ {}_{m|}\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}^{\,1}_{x:\overline{m+n}|} - \overline{A}^{\,1}_{x:\overline{m}|}. \tag{7.4.30} $$

Используя (7.4.4) и (7.4.16), мы можем выразить ${}_{m|}\overline{A}_{x:\overline{n}|}$ через характеристики остаточного времени жизни:

$$ {}_{m|}\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \int_m^{m+n} v^t f_x(t)\,dt, \tag{7.4.31} $$

а с помощью (7.4.18) – через упрощающие функции D_t, $\overline{N}_t$, $\overline{M}_t$:

$$ \begin{aligned} {}_{m|}\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} &= \frac{D_{x+m} - D_{x+m+n}}{D_x} - \delta\frac{1}{D_x}\int_{x+m}^{x+m+n} D_t\,dt \\ &= \frac{D_{x+m} - D_{x+m+n}}{D_x} - \delta\frac{\overline{N}_{x+m} - \overline{N}_{x+m+n}}{D_x} \\ &= \frac{\overline{M}_{x+m} - \overline{M}_{x+m+n}}{D_x}. \end{aligned} \tag{7.4.32} $$

Пожизненое страхование с непрерывно возрастающей страховой суммой (continuously increasing whole life insurance).

Современная стоимость страховой суммы в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается $(\overline{I}\overline{Z})_x$; в силу (7.1.7) и (7.4.2) она дается формулой

$$ (\bar{I}\bar{Z})_x = T_x \cdot v^{T_x}. \tag{7.4.33} $$

Актуарная современная стоимость страховой суммы обозначается $(\bar{I}\bar{A})_x$:

$$ (\bar{I}\bar{A})_x \equiv \mathbf{E}(\bar{I}\bar{Z})_x = \mathbf{E}\left(T_x v^{T_x}\right) = \mathbf{E}\left(T_x e^{-\delta T_x}\right). $$

Ее можно следующим образом выразить через характеристики времени жизни:

$$ (\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^\infty t v^t f_x(t)dt. \tag{7.4.34} $$

Этот вид страхования определенным образом связан с пожизненым страхованием, отсроченным на m лет (которое было рассмотрено в предыдущем пункте). Именно, справедлива формула

$$ (\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^\infty {}_{m|}\overline{A}_x dm. \tag{7.4.35} $$

Для ее доказательства заменим в (7.4.34) переменную t под знаком интеграла на интеграл

$$t = \int_0^t 1 \cdot dm,$$

где m – вспомогательная переменная:

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^\infty v^t f_x(t) \left(\int_0^t 1 \cdot dm \right) dt.$$

Меняя порядок интегрирования, имеем:

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^\infty dm \cdot \left(\int_m^\infty v^t f_x(t) dt \right).$$

Вспоминая (7.4.26), мы получим (7.4.35).

С помощью (7.4.27) формулу (7.4.35) можно записать в виде:

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{1}{D_x} \int_x^\infty \overline{M}_t dt. \tag{7.4.36}$$

7.5 Разовые нетто-премии для основных дискретных видов страхования

Пожизненное страхование с выплатой страховой суммы в конце последнего года жизни.

Современная стоимость страховой суммы в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается Z_x; в силу (7.1.8) и (7.4.2) она дается формулой

$$Z_x = v^{[T_x]+1} \equiv v^{K(x)+1} = e^{-\delta(K(x)+1)}. \tag{7.5.1}$$

Актуарная современная стоимость страховой суммы в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается A_x :

$$A_x \equiv \mathbf{E}Z_x = \mathbf{E}v^{K(x)+1} = \mathbf{E}e^{-\delta(K(x)+1)}. \tag{7.5.2}$$

Как нетрудно видеть, с точностью до множителя v разовая нетто-премия A_x совпадает с производящей функцией $\mathbf{E}v^{K(x)}$ округленного остаточного времени жизни $K(x)$ в точке v. В силу общих теорем теории вероятностей A_x можно следующим образом выразить через характеристики времени жизни, введенные в разделе 4:

$$A_x = \sum_{k=0}^\infty v^{k+1}\mathbf{P}(K(x) = k) = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x}^\infty v^{k+1} d_k. \tag{7.5.3}$$

Сумма в правой части этого равенства обозначается M_x :

$$M_x = \sum_{k=x}^{\infty} v^{k+1} d_k, \tag{7.5.4}$$

что позволяет записать (7.5.3) в виде, аналогичном (7.4.11):

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}. \tag{7.5.5}$$

Дискретная упрощающая функция M_x является аналогом непрерывной упрощающей функции $\overline{M}_x$, введенной в п.7.4 с помощью формулы (7.4.10) (отметим, что использованные термины *дискретная* и *непрерывная* функция относятся лишь к видам страхования, связанным с этими функциями, и не имеют ничего общего с соответствующими терминами из классического анализа).

Поскольку $d_k = l_k - l_{k+1}$,

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{k=x}^{\infty} v^{k+1}(l_k - l_{k+1}) \\ &= \sum_{k=x}^{\infty} v^{k+1} l_k - \sum_{k=x}^{\infty} v^{k+1} l_{k+1} \\ &= v\sum_{k=x}^{\infty} D_k - \sum_{k=x+1}^{\infty} D_k \\ &= (v-1)N_x + D_x \\ &= -dN_x + D_x, \end{aligned} \tag{7.5.6}$$

где дискретная упрощающая функция N_x определяется формулой:

$$N_x = \sum_{k=x}^{\infty} D_k. \tag{7.5.7}$$

С учетом обозначения (7.5.7) и соотношения (7.6.5) формулу (7.5.5) можно записать в виде, аналогичном (7.4.9):

$$A_x = 1 - d\frac{N_x}{D_x}. \tag{7.5.8}$$

Величину A_x очень удобно рассчитывать с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1},$$

которая легко следует, например, из (7.5.3):

$$\begin{aligned}
A_x &= \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{\infty} v^{k+1} d_k = \frac{1}{v^x l_x} \left(v^{x+1} d_x + \sum_{k=x+1}^{\infty} v^{k+1} d_k \right) \\
&= \frac{1}{v^x l_x} (v^{x+1} d_x + v^{k+1} l_{x+1} A_{x+1}) = v \frac{d_x}{l_x} + v \frac{l_{x+1}}{l_x} A_{x+1} \\
&= vq_x + vp_x A_{x+1}.
\end{aligned}$$

Впрочем, это рекуррентное соотношение непосредственно очевидно:

(1) с вероятностью q_x застрахованный умрет в течение первого года действия договора, и страховая сумма выплачивается в момент $t = 1$ (приведенная стоимость этого платежа равна v);

(2) с вероятностью p_x застрахованный проживет год. При этом условии компания фактически имеет обязательства по пожизненному страхованию человека в возрасте $x + 1$ лет. Стоимость этих обязательств на момент 1 равна A_{x+1}. Чтобы привести их к моменту 0, нужно добавить множитель v.

В качестве начального условия удобно взять следующее соотношение:

$$A_{\omega-1} = v,$$

или, что эквивалентно,

$$A_\omega = 1$$

(ω – предельный возраст).

***n*-летнее временное страхование жизни с выплатой страховой суммы в конце года смерти.**

Современная стоимость страховой суммы в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается $Z^1_{x:\overline{n}|}$; в силу (7.1.9) и (7.4.2) с вероятностью 1 верна следующая формула:

$$Z^1_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} v^{K(x)+1}, & \text{если } K(x) < n \\ 0, & \text{если } K(x) \geq n. \end{cases} \tag{7.5.9}$$

Актуарная современная стоимость страховой суммы обозначается $A^1_{x:\overline{n}|}$:

$$\begin{aligned} A^1_{x:\overline{n}|} &\equiv \mathbf{E} Z^1_{x:\overline{n}|} \\ &= \mathbf{E}\left(v^{K(x)+1}; K(x) < n\right) \\ &= \mathbf{E}\left(e^{-\delta(K(x)+1)}; T_x \le n\right). \end{aligned}$$

В силу общих теорем теории вероятностей величину $A^1_{x:\overline{n}|}$ можно следующим образом выразить через характеристики времени жизни, введенные в разделе 4:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\mathbf{P}(K(x) = k) = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} v^{k+1} d_k. \tag{7.5.10}$$

С учетом обозначений (7.4.6), (7.5.4), (7.5.7) мы можем переписать эту формулу в терминах функций D_t, N_t, M_t :

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - d\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}. \tag{7.5.11}$$

Поскольку $M_x = A_x \cdot D_x$, величину $A^1_{x:\overline{n}|}$ можно выразить через A_x :

$$A^1_{x:\overline{n}|} = A_x - A_{x+n} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{7.5.12}$$

Величину $A^1_{x:\overline{n}|}$ очень удобно рассчитывать с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$A_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_x A^1_{x+1:\overline{n-1}|},$$

которая легко получается, например, из (7.5.10):

$$\begin{aligned} A^1_{x:\overline{n}|} &= \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} v^{k+1} d_k \\ &= \frac{1}{v^x l_x}\left(v^{x+1} d_x + \sum_{k=x+1}^{(x+1)+(n-1)-1} v^{k+1} d_k\right) \\ &= \frac{1}{v^x l_x}\left(v^{x+1} d_x + v^{x+1} l_{x+1} \cdot A^1_{x+1:\overline{n-1}|}\right) \\ &= v\frac{d_x}{l_x} + v\frac{l_{x+1}}{l_x} A^1_{x+1:\overline{n-1}|} \\ &= vq_x + vp_x A^1_{x+1:\overline{n-1}|}. \end{aligned}$$

Отметим, что рассуждения, аналогичные тем, которые мы провели в конце предыдущего пункта, позволяют получить этот результат гораздо быстрее.

В качестве начального условия удобно взять соотношение

$$A^{1}_{x+n:\overline{0}|} = 0$$

(в сущности, оно равносильно формуле $A^{1}_{x+n-1:\overline{1}|} = vq_{x+n-1}$).

***n*-летнее смешанное страхование с выплатой страховой суммы в конце года смерти.**

Современная стоимость страховой суммы в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается $Z_{x:\overline{n}|}$; в силу (7.1.10) и (7.4.2) она дается формулой

$$Z_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} v^{K(x)+1}, & \text{если } K(x) < n \\ v^{n}, & \text{если } K(x) \geq n. \end{cases} \tag{7.5.13}$$

С помощью соотношений (7.5.9), (7.4.12), можно связать современные стоимости страховых возмещений для n-летнего чисто накопительного страхования, n-летнего дискретного временного страхования и n-летнего дискретного смешанного страхования; с вероятностью 1 верна следующая формула:

$$Z_{x:\overline{n}|} = Z_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} + Z^{1}_{x:\overline{n}|}. \tag{7.5.14}$$

Тем более соответствующая формула верна для средних значений:

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} + A^{1}_{x:\overline{n}|}. \tag{7.5.15}$$

Используя (7.4.13) и (7.5.10), мы можем выразить $A_{x:\overline{n}|}$ через характеристики остаточного времени жизни:

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\mathbf{P}(K(x) = k) + v^{n} \cdot \mathbf{P}(K(x) \geq n), \tag{7.5.16}$$

а с помощью (7.4.14) и (7.5.11) – через упрощающие функции D_t, N_t, M_t:

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} = 1 - d\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \\ &= 1 - \frac{d}{v^x l_x}\sum_{k=x}^{x+n-1} v^k l_k. \end{aligned} \tag{7.5.17}$$

Поскольку $M_x = A_x \cdot D_x$, величину $A_{x:\overline{n}|}$ можно выразить через A_x :

$$A_{x:\overline{n}|} = A_x + (1 - A_{x+n}) \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{7.5.18}$$

Величину $A_{x:\overline{n}|}$ очень удобно рассчитывать с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$A_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_x A_{x+1:\overline{n-1}|},$$

которая легко получается, например, из (7.5.17):

$$\begin{aligned}
A_{x:\overline{n}|} &= 1 - \frac{d}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} v^k l_k \\
&= 1 - \frac{d}{v^x l_x} \left(v^x l_x + \sum_{k=x+1}^{(x+1)+(n-1)-1} v^k l_k \right) \\
&= 1 - d - \frac{d}{v^x l_x} \left(1 - A_{x+1:\overline{n-1}|}\right) \cdot \frac{v^{x+1} l_{x+1}}{d} \\
&= v - \frac{v l_{x+1}}{l_x} \cdot \left(1 - A_{x+1:\overline{n-1}|}\right) \\
&= v - vp_x + vp_x A_{x+1:\overline{n-1}|} = vq_x + vp_x A_{x+1:\overline{n-1}|}.
\end{aligned}$$

В качестве начального условия удобно взять следующее соотношение:

$$A_{x+n:\overline{0}|} = 1.$$

(или, что равносильно, $A_{x+n-1:\overline{1}|} = v$).

Пожизненное страхование с выплатой страховой суммы в конце последнего года жизни, отсроченное на m лет.

Современная стоимость страховой выплаты в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается ${}_{m|}Z_x$; в силу (7.1.11) и (7.4.2) с вероятностью 1 она дается формулой

$${}_{m|}Z_x = \begin{cases} v^{K(x)+1}, & \text{если } K(x) \geq m \\ 0, & \text{если } K(x) < m. \end{cases} \tag{7.5.19}$$

С помощью соотношениий (7.5.1) и (7.5.9) можно связать современные ценности страховых возмещений для пожизненного дискретного страхования, отсроченного на m лет, пожизненного дискретного страхования и m-летнего временного дискретного страхования:

$${}_{m|}Z_x = Z_x - Z^1_{x:\overline{m}|}. \tag{7.5.20}$$

Тем более соответствующая формула верна для средних значений:

$$ {}_{m|}A_x = A_x - A^1_{x:\overline{m}|}. \tag{7.5.21} $$

Используя (7.5.3) и (7.5.10), мы можем выразить ${}_{m|}A_x$ через характеристики остаточного времени жизни:

$$ {}_{m|}A_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1}\mathbf{P}(K(x) = k), \tag{7.5.22} $$

а с помощью (7.5.6), (7.5.8), (7.5.11) – через упрощающие функции D_t, N_t, M_t:

$$ {}_{m|}A_x = \frac{D_{x+m}}{D_x} - d\frac{N_{x+m}}{D_x} = \frac{M_{x+m}}{D_x}. \tag{7.5.23} $$

Поскольку $M_{x+m} = A_{x+m}D_{x+m}$, величину ${}_{m|}A_x$ можно выразить через A_x :

$$ {}_{m|}A_x = A_{x+m} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x}. \tag{7.5.24} $$

Как и для других дискретных видов страхования, без труда можно получить рекуррентную формулу для ${}_{m|}A_x$:

$$ \begin{aligned} {}_{m|}A_x &= A_{x+m} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} = A_{(x+1)+(m-1)} \cdot \frac{D_{(x+1)+(m-1)}}{D_{x+1}} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x} \\ &= {}_{m-1|}A_{x+1} \cdot \frac{v^{x+1}l_{x+1}}{v^x l_x} = vp_x \cdot {}_{m-1|}A_{x+1}. \end{aligned} $$

Пожизненное страхование с выплатой страхового возмещения в конце последнего года жизни и ежегодно возрастающей страховой суммой.

Современная стоимость страховой выплаты в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается $(IZ)_x$; в силу (7.1.12) и (7.4.2) она дается формулой

$$ (IZ)_x = (K(x) + 1) \cdot v^{K(x)+1}. \tag{7.5.25} $$

Актуарная современная стоимость страхового возмещения в момент заключения договора с человеком в возрасте x лет обозначается $(IA)_x$:

$$ (IA)_x \equiv \mathbf{E}(IZ)_x = \mathbf{E}\left((K(x) + 1)v^{K(x)+1}\right). $$

Ее можно следующим образом выразить через характеристики времени жизни:

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\mathbf{P}(K(x)=k). \qquad (7.5.26)$$

Этот вид страхования определенным образом связан с пожизненным дискретным страхованием, отсроченным на m лет (которое было рассмотрено в предыдущем пункте). Именно, справедлива формула

$$(IA)_x = \sum_{m=0}^{\infty} {}_{m|}A_x. \qquad (7.5.27)$$

Для ее доказательства заменим в (7.5.26) переменную $(k+1)$ под знаком суммы на сумму

$$k+1 = \sum_{m=0}^{k} 1,$$

где m – вспомогательная переменная:

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} kv^{k+1}\mathbf{P}(K(x)=k).$$

Меняя порядок суммирования, имеем:

$$(IA)_x = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1}\mathbf{P}(K(x)=k).$$

Вспоминая (7.5.22), мы получим (7.5.27).

С помощью (7.5.23) формулу (7.5.27) можно записать в виде:

$$(IA)_x = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{M_{x+m}}{D_x} = \frac{1}{D_x}\sum_{k=x}^{\infty} M_k = \frac{R_x}{D_x}, \qquad (7.5.28)$$

где R_x – дискретная упрощающая функция, определяемая формулой

$$R_x = \sum_{k=x}^{\infty} M_k. \qquad (7.5.29)$$

7.6 Связь между непрерывными и дискретными видами страхования

Хотя различные виды страхования с выплатой страховой суммы в конце года смерти представляют ограниченный интерес для собственно страхования, они играют исключительно важную теоретическую роль. Прежде всего, именно с дискретными видами страхования связаны различные пожизненные ренты (см. ниже раздел 8). Кроме того, как мы сейчас покажем, при определенных предположениях относительно смертности для дробных возрастов непрерывные виды страхования очень просто связаны с соответствующими дискретными видами страхования. Поскольку характеристики дискретных видов страхования выражаются через характеристики, включенные в таблицы продолжительности жизни, это позволяет рассчитать характеристики непрерывных видов страхования с помощью тех же таблиц.

Для того, чтобы связать между собой непрерывные и дискретные виды страхования, мы должны сделать определенные предположения относительно распределения времени жизни для дробных возрастов. Обычно в этой ситуации предполагают равномерное распределение момента смерти внутри последнего года жизни (см. п.4.3.1).

Как мы установили в разделе 4, при этом предположении случайные величины K_x и $\tau_x = T_x - K_x$ независимы, причем величина τ_x равномерно распределена на промежутке $[0,1)$. Тогда, конечно, и величина $1 - \tau_x$ равномерно распределена на промежутке $(0,1]$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\overline{A}_x &= \mathbf{E}\left(v^{K_x+1} \cdot v^{\tau_x - 1}\right) \\
&= \mathbf{E}v^{K_x+1} \cdot \mathbf{E}e^{\delta(1-\tau_x)} \\
&= A_x \cdot \int_0^1 e^{\delta t} dt \\
&= \frac{i}{\delta} A_x.
\end{aligned} \tag{7.6.1}$$

Используя (7.4.11) и (7.5.5), а также (7.4.9) и (7.5.7), мы получим:

$$\overline{M}_x = \frac{i}{\delta} M_x. \tag{7.6.2}$$

$$\overline{N}_x = \frac{d}{\delta} N_x. \tag{7.6.3}$$

Теперь из (7.4.18) и (7.5.11), (7.4.22) и (7.5.17), (7.4.27) и (7.5.23) мы имеем:

$$\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|}, \tag{7.6.4}$$

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|} + \frac{\delta - i}{\delta} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}, \tag{7.6.5}$$

$$_{m|}\overline{A}_x = \frac{i}{\delta} \cdot {}_{m|}A_x. \tag{7.6.6}$$

Для страхований с возрастающей страховой суммой лучше всего применить прием, использованный при выводе (7.6.1):

$$\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{A})_x &= \mathbf{E}\left((K_x + \tau_x) v^{K_x+\tau_x}\right) \\
&= \mathbf{E}\left((K_x + 1 + \tau_x - 1) v^{K_x+1+\tau_x-1}\right) \\
&= \mathbf{E}\left((K_x + 1 - \tau_x) v^{K_x+1} v^{-\tau_x}\right) \\
&= \mathbf{E}\left((K_x + 1) v^{K_x+1}\right) \cdot \mathbf{E} e^{\delta\tau_x} - \mathbf{E} v^{K_x+1} \cdot \mathbf{E}\left(\tau_x e^{\delta\tau_x}\right) \\
&= \frac{i}{\delta} \cdot (IA)_x - \frac{i\delta + \delta - i}{\delta^2} \cdot A_x.
\end{aligned}$$

Сходство формул (7.6.1), (7.6.4), (7.6.6) не случайно и имеет более глубокие корни, связанные со следующим общим результатом.

Предположим, что во введенной в п.7.1 общей модели страхования величина b_t сохраняет постоянные значения на промежутках $n < t \le n+1$, т.е. $b_t = b_{n+1}$ для $n < t \le n+1$, а момент смерти равномерно распределен внутри последнего года жизни. Тогда разовая нетто-премия $\overline{A}$ по любому договору страхования с выплатой страховой суммы в момент смерти связана с разовой нетто-премией A по аналогичному виду страхования, но с выплатой страховой суммы в конце года смерти, следующей формулой:

$$\overline{A} = \frac{i}{\delta} A.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= \mathbf{E}\left(b_{T_x} v^{T_x}\right) = \mathbf{E}\left(b_{K_x+\tau_x} v^{K_x+1} \cdot v^{\tau_x - 1}\right) \\
&= \mathbf{E}\left(b_{K_x+1} v^{K_x+1}\right) \cdot \mathbf{E} e^{\delta(1-\tau_x)} = A \cdot \int_0^1 e^{\delta t}\, dt \\
&= \frac{i}{\delta} A.
\end{aligned}$$

Используя связь между непрерывными и дискретными видами страхования и рекуррентные формулы для дискретных видов страхования, мы немедленно получим рекуррентные формулы для непрерывных видов страхования (в предположении о линейной интерполяции функции выживания):

$$\begin{aligned}\overline{A}_x &= \frac{i}{\delta}A_x = \frac{i}{\delta}(vq_x + vp_x A_{x+1})\\ &= \frac{iv}{\delta}q_x + vp_x\overline{A}_{x+1} = \frac{d}{\delta}q_x + vp_x\overline{A}_{x+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta}A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}\left(vq_x + vp_x A^1_{x+1:\overline{n-1}|}\right)\\ &= \frac{d}{\delta}q_x + vp_x\cdot\overline{A}^1_{x+1:\overline{n-1}|},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{A}_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta}A_{x:\overline{n}|} + \frac{\delta-i}{\delta}\cdot\frac{v^{x+n}l_{x+n}}{v^x l_x}\\ &= \frac{i}{\delta}\left(vq_x + vp_x A_{x+1:\overline{n-1}|}\right) + \frac{\delta-i}{\delta}\cdot\frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\\ &= \frac{iv}{\delta}q_x + vp_x\left(\overline{A}_{x+1:\overline{n-1}|} - \frac{\delta-i}{\delta}\frac{v^{x+1+n-1}l_{x+1+n-1}}{v^{x+1}l_{x+1}}\right)\\ &+ \frac{\delta-i}{\delta}v^n\frac{l_{x+n}}{l_x}\\ &= \frac{iv}{\delta}q_x + vp_x\cdot\overline{A}_{x+1:\overline{n-1}|} = \frac{d}{\delta}q_x + vp_x\cdot\overline{A}_{x+1:\overline{n-1}|},\end{aligned}$$

$$_{m|}\overline{A}_x = \frac{i}{\delta}\cdot{}_{m|}A_x = \frac{i}{\delta}vp_x\cdot{}_{m-1|}A_{x+1} = vp_x\cdot{}_{m-1|}\overline{A}_{x+1}.$$

Отметим, что все эти формулы могут быть доказаны непосредственно, с помощью вероятностных рассуждений, подобных тем, которые проводились для дискретных видов страхования. Единственное отличие заключается в том, что в случае смерти застрахованного в течение первого года действия договора (вероятность этого события – q_x) момент смерти равномерно распределен на $(0,1)$, и поэтому приведенная стоимость страховой выплаты есть

$$\int_0^1 e^{-\delta t}dt = \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} = \frac{1-v}{\delta} = \frac{d}{\delta}.$$

7.7 Учет андеррайтинга

Выше мы предполагали, что вероятность смерти застрахованного q_y зависит только от его возраста y.

Однако, как мы уже отмечали, заключение договора страхования жизни или пенсии означает определенный андеррайтинг. Поэтому вероятность смерти застрахованного зависит не только от его возраста y, но и от времени t, прошедшего с момента заключения договора:

$$q_y = q_{[y-t]+t}.$$

Иначе говоря, если возраст застрахованного на момент заключения договора был x лет, то вероятность его смерти на протяжении k-го года действия договора есть

$$q_{[x]+k-1},\ k \geq 1.$$

Развитая выше теория без труда обобщается на этот случай; более того, полученные ранее результаты используются и в модифицированной теории. Мы продемонстрируем это на примере пожизненного страхования.

В случае дискретного пожизненного страхования актуарная современная стоимость обязательств страховщика дается формулой:

$$A_{[x]} \equiv Ev^{K_{[x]}+1} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K_{[x]} = k).$$

Как и ранее, символ $[x]$ означает, что речь идет о человеке в возрасте x лет, который только что прошел отбор.

Эту общую формулу легко преобразовать к виду, включающему характеристики смертности из таблицы отбора риска.

Если таблица отбора риска содержит вероятности смерти в течение года, $q_{[x]+k}$, то распределение округленного времени жизни удобно записать в виде

$$P(K_{[x]} = k) = p_{[x]} \cdot p_{[x]+1} \cdot \ldots \cdot p_{[x]+k-1} \cdot q_{[x]+k}.$$

Если таблица содержит величины $l_{[x]+k}$, удобно использовать формулу

$$P(K_{[x]} = k) = \frac{l_{[x]+k} - l_{[x]+k+1}}{l_{[x]}}.$$

В этом случае формула для разовой нетто-премии значительно упрощается:

$$\begin{aligned}
A_{[x]} &= \frac{1}{l_{[x]}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} l_{[x]+k} - \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} l_{[x]+k+1}\right) \\
&= \frac{1}{l_{[x]}}\left(v\sum_{k=0}^{\infty} v^{k} l_{[x]+k} - \sum_{k=0}^{\infty} v^{k} l_{[x]+k} + l_{[x]}\right) \\
&= 1 - \frac{d}{l_{[x]}}\sum_{k=0}^{\infty} v^{k} l_{[x]+k}.
\end{aligned}$$

Как мы уже отмечали, обычно предполагают, что период действия отбора ограничен некоторым конечным числом лет r.

Если $r = 1$ (этот случай особенно прост), то для $k \geq 1$ $q_{[x]+k} = q_{x+k}, l_{[x]+k} = l_{x+k}$, и поэтому

$$\begin{aligned}
A_{[x]} &= vq_{[x]} + \sum_{k=1}^{\infty} v^{k+1} p_{[x]} p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+k-1} q_{x+k} = \\
&= vq_{[x]} + \frac{p_{[x]}}{p_x}\sum_{k=1}^{\infty} v^{k+1} p_x p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+k-1} q_{x+k} = \\
&= vq_{[x]} + \frac{p_{[x]}}{p_x}(A_x - vq_x) = \frac{p_{[x]}}{p_x} \cdot A_x - v \cdot \frac{p_{[x]}q_x - q_{[x]}p_x}{p_x}.
\end{aligned}$$

Здесь A_x обозначает разовую нетто-премию в случае, когда смертность описывается предельной таблицей; эта величина может быть рассчитана с помощью развитой ранее теории.

Другой вариант этой формулы включает величины l_x:

$$\begin{aligned}
A_{[x]} &= 1 - \frac{d}{l_{[x]}}\left(l_{[x]} + \sum_{k=1}^{\infty} v^{k} l_{x+k}\right) = \\
&= 1 - d - \frac{d}{l_{[x]}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} v^{k} l_{x+k} - l_x\right) = \\
&= v - \frac{l_x}{l_{[x]}}\frac{d}{l_x}\sum_{k=0}^{\infty} v^{k} l_{x+k} + \frac{dl_x}{l_{[x]}} = \\
&= v - \frac{l_x}{l_{[x]}}(1 - A_x) + \frac{dl_x}{l_{[x]}} = \frac{l_x}{l_{[x]}}A_x + v\frac{l_{[x]} - l_x}{l_{[x]}}.
\end{aligned}$$

Еще одна интересная формула связывает $A_{[x]}$ с A_{x+1}:

$$\begin{aligned}
A_{[x]} &= vq_{[x]} + vp_{[x]} \sum_{k=1}^{\infty} p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+k-1} q_{x+k} v^k \\
&= vq_{[x]} + vp_{[x]} \sum_{k=0}^{\infty} p_{x+1} \cdot \ldots \cdot q_{x+k+1} v^{k+1} \\
&= vq_{[x]} + vp_{[x]} \sum_{k=0}^{\infty} p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{(x+1)+k-1} q_{(x+1)+k} v^{k+1} \\
&= vq_{[x]} + vp_{[x]} A_{x+1}.
\end{aligned}$$

Еще раз подчеркнем, что все три формулы, связывающие разовые нетто-премии $A_{[x]}$ и A_x (или A_{x+1}), получены в предположении, что отбор действует только один год.

В приложениях часто предполагают, что период отбора $r = 1$, а $q_{[x]} = 0.5q_x$. В этом случае

$$p_{[x]} = 1 - q_{[x]} = 1 - 0.5q_x = 0.5(2 - q_x) = 0.5(1 + p_x),$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
A_{[x]} &= 0.5vq_x + 0.5v(1 + p_x)A_{x+1} = 0.5(vq_x + vA_{x+1} + vp_x A_{x+1}) \\
&= 0.5(A_x + vA_{x+1}) = A_x - 0.5(A_x - vA_{x+1}) \\
&= A_x - 0.5(vq_x + vp_x A_{x+1} - vA_{x+1}) = A_x - 0.5(vq_x - vq_x A_{x+1}) \\
&= A_x - 0.5vq_x(1 - A_{x+1}).
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь пожизненное страхование с выплатой страховой суммы в момент смерти. В этом случае актуарная стоимость обязательств страховщика на момент заключения договора с человеком в возрасте x лет есть

$$\overline{A}_{[x]} = Ev^{T_{[x]}}.$$

Пусть $\tau_{[x]} = T_{[x]} - K_{[x]}$ – момент смерти внутри года смерти. Предполагая, что случайная величина $\tau_{[x]}$ не зависит от $K_{[x]}$ и равномерно распределена на (0,1), мы (как и в основной теории) имеем:

$$\overline{A}_{[x]} = Ev^{K_{[x]}+1} \cdot Ev^{1-\tau_{[x]}} = \frac{i}{\delta} \cdot A_{[x]}.$$

7.8 Примеры расчетов

Пример 1. Предположим, что смертность описывается законом де Муавра:

$$f(x) = \frac{1}{\omega}, \quad 0 < x < \omega.$$

Определите $\overline{A}_x$ и $\mathbf{Var}\overline{Z}_x$.

Решение. Как показано в п.3.1, остаточное время жизни T_x равномерно распределено на промежутке $0 < t < \omega - x$. Поэтому из формулы (7.4.4) мы имеем:

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty v^t f_x(t)dt = \int_0^{\omega-x} e^{\delta t}\frac{1}{\omega - x}dt = \frac{1 - v^{\omega-x}}{\delta(\omega - x)}.$$

Как и следовало ожидать, нетто-премия монотонно возрастает при росте x и становится равной страховой выплате, если возраст на момент заключения договора, x, близок к предельному возрасту ω.

Заменяя процентную ставку δ на 2δ, мы получим $\mathbf{E}\overline{Z}_x^2$:

$$\mathbf{E}\overline{Z}_x^2 = {}^2\overline{A}_x = \frac{1 - e^{-2\delta(\omega-x)}}{2\delta(\omega - x)}$$

и, значит, сможем подсчитать $\mathbf{Var}\overline{Z}_x$:

$$\mathbf{Var}\overline{Z}_x = \frac{1 - v^{\omega-x}}{2\delta^2(\omega - x)^2} \cdot \left[\delta(\omega - x)(1 + v^{\omega-x}) - 2(1 - v^{\omega-x})\right].$$

Пример 2. Предположим, что кривая смертей задается формулой

$$f(x) = \frac{x}{a^2}e^{-x/a}, \quad x \geq 0.$$

Определите $\overline{A}_x$.

Решение. $\overline{A}_x$ – это преобразование Лапласа величины T_x, которая, как было показано в п.3.1, имеет распределение, являющееся взвешенной суммой с весами $x/(x+a)$ и $a/(x+a)$ экспоненциального и эрланговского распределений со средними a и $2a$ соответственно (см. (3.1.3)). Поскольку преобразования Лапласа последних хорошо известны (в точке δ они равны $1/(1+a\delta)$ и $1/(1+a\delta)^2$ соответственно), мы немедленно имеем:

$$\overline{A}_x = \frac{x}{x+a}\cdot\frac{1}{1+a\delta} + \frac{a}{x+a}\cdot\frac{1}{(1+a\delta)^2} = \frac{x + a + ax\delta}{(x+a)(1+a\delta)^2}.$$

Пример 3. Используя таблицу продолжительности жизни из раздела 5, подсчитайте разовую нетто-премию при заключении договора о 3-летнем смешанном страховании человека в возрасте $x = 25$ лет с выплатой страховой суммы в конце года смерти. Эффективная годовая процентная ставка $i = 5\%$. Как изменится премия, если страховая сумма выплачивается в момент смерти? При расчетах используйте предположение о равномерном распределении смертей для дробных возрастов.

Решение. Искомая величина была обозначена в п.7.5 как $A_{25:\overline{3}|}$. Используя формулу (7.5.17), мы имеем:

$$A_{25:\overline{3}|} = 1 - d \cdot \frac{l_{25} + vl_{26} + v^2 l_{27}}{l_{25}}.$$

Поскольку $v = \frac{1}{1+i} \approx 0.952381$, $d = 1 - v \approx 0.047619$, $l_{25} = 97\ 140$, $l_{26} = 96\ 988$, $l_{27} = 96\ 829$, мы окончательно получим:

$$A_{\overline{25:\overline{3}|}} \approx 86.40468\% \text{ (от величины страховой суммы)}$$

Если страховая сумма равна, например, 1000 руб., то разовая нетто-премия будет равна 864 руб. 05 коп.

Если бы мы допустили, что страховая сумма выплачивается в момент смерти, то в силу (7.6.5) разовая нетто-премия есть:

$$\begin{aligned}\overline{A}_{25:\overline{3}|} &= \frac{i}{\delta} A_{25:\overline{3}|} + \frac{(\delta - i) \cdot v^3 l_{28}}{\delta \cdot l_{25}} \\ &\approx 86.4157\% \text{ (от величины страховой суммы).}\end{aligned}$$

Пример 4. Предположим, что продолжительность жизни описывается моделью де Муавра с предельным возрастом $\omega = 120$ лет, а эффективная годовая процентная ставка $i = 15\%$. Подсчитайте нетто-премии для человека в возрасте 40 лет, если заключается договор:

(а) пожизненного страхования;

(б) 5-летнего страхования жизни;

(в) 5-летнего смешанного страхования жизни;

(г) пожизненного страхования, отсроченного на 2 года;

(д) пожизненного страхования с непрерывно увеличивающейся страховой суммой.

Решение. Как мы знаем, остаточное время жизни застрахованного имеет равномерное распределение на промежутке $(0, \omega - x) = (0, 80)$:

$$f_{40}(t) = \frac{1}{80}, \quad 0 < t < 80.$$

Интенсивность процентов $\delta = \ln(1+i) \approx 13.9762\%$, коэффициент дисконтирования $v = 1/(1+i) \approx 86.9565\%$. После этих предварительных замечаний приступим к расчетам:

(а) по формуле (7.4.4)

$$\bar{A}_{40} = \int_0^{80} v^t \frac{1}{80} dt = -\frac{1}{80\delta} v^t \Big|_0^{80} = \frac{1 - v^{80}}{80\delta} = 8.944\%;$$

(б) по формуле (7.4.16)

$$\bar{A}^{1}_{40:\overline{5}|} = \int_0^{5} v^t \frac{1}{80} dt = -\frac{1}{80\delta} v^t \Big|_0^{5} = \frac{1 - v^{5}}{80\delta} = 4.497\%;$$

(в) по формуле (7.4.21)

$$\bar{A}_{40:\overline{5}|} = \int_0^{5} v^t \frac{1}{80} dt + v^5 \cdot \int_5^{80} \frac{1}{80} dt = \bar{A}^{1}_{40:\overline{5}|} + \frac{75}{80} v^5 = 51.107\%;$$

(г) по формуле (7.4.26)

$$_{2|}\bar{A}_{40} = \int_2^{80} v^t \frac{1}{80} dt = -\frac{1}{80\delta} v^t \Big|_2^{80} = \frac{v^2 - v^{80}}{80\delta} = 6.763\%;$$

(д) по формуле (7.4.34)

$$\begin{aligned}(\bar{I}\bar{A})_{40} &= \int_0^{80} t v^t \frac{1}{80} dt = -\int_0^{80} \frac{t}{80\delta} dv^t \\ &= -\frac{t}{80\delta} v^t \Big|_0^{80} + \int_0^{80} v^t \frac{1}{80\delta} dt = -\frac{e^{-80\delta}}{\delta} - \frac{1}{80\delta^2} v^t \Big|_0^{80} \\ &= -\frac{v^{80}}{\delta} + \frac{1 - v^{80}}{80\delta^2} = \frac{1 - (1 + 80\delta) v^{80}}{80\delta^2} = 63.982\%.\end{aligned}$$

Пример 5. Страховая компания заключила $N = 10000$ договоров пожизненного страхования. Предположим, что остаточное время жизни каждого из застрахованных характеризуется интенсивностью смертности $\mu \equiv 0.04$, которая не меняется с течением времени, а интенсивность процентов $\delta = 6\%$.

Подсчитайте величину премии, которая гарантировала бы 95% вероятность выполнения компанией своих обязательств.

Решение. Подсчитаем вначале нетто-премию. В соответствии с (7.4.4)

$$p_0 = \overline{A}_x = \int_0^\infty v^t f_x(t)dt,$$

где $f_x(t)$ – плотность остаточного времени жизни. Поскольку нам известна интенсивность смертности, используя формулу (2.4.4), мы можем найти функцию выживания:

$$s_x(t) = e^{-\mu t},$$

что, в свою очередь, дает следующую формулу для $f_x(t)$:

$$f_x(t) = \mu e^{-\mu t}.$$

Теперь мы можем подсчитать нетто-премию:

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty \mu e^{-(\mu+\delta)t} dt = \frac{\mu}{\mu+\delta} = \frac{0.04}{0.04+0.06} = 0.4.$$

В силу (7.3.4) второй момент современной величины страхового возмещения может быть получен из этой формулы заменой δ на 2δ:

$$\mathbf{E}\overline{Z}_x^2 = {}^2\overline{A}_x = \frac{\mu}{\mu+2\delta} = \frac{0.04}{0.04+0.12} = \frac{0.04}{0.16} = 0.25.$$

Следовательно, $\mathbf{Var}\overline{Z}_x = \mathbf{E}\overline{Z}_x^2 - (\mathbf{E}\overline{Z}_x)^2 = 0.25 - 0.16 = 0.09$.

Теперь в силу (7.2.3) относительная страховая надбавка равна:

$$\theta = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathbf{Var}\overline{Z}_x}}{\overline{A}_x\sqrt{N}} = 1.645 \cdot \frac{\sqrt{0.09}}{0.4\sqrt{10000}} = 1.23375\%$$

Соответственно премия есть

$$p = \overline{A}_x \cdot (1+\theta) = 40.4935\%.$$

Напомним, что величина страховой суммы b используется нами в качестве единицы измерения денежных сумм, так что, если, например, $b = 100\ 000$ рублей, то $p = 40493.5$ рубля.

8. ПОЖИЗНЕННЫЕ РЕНТЫ

8.1 Пожизненные ренты, выплачиваемые раз в год

Полная пожизненная рента. Простейшая *пожизненная рента* (life annuity) может быть описана следующим образом. Начиная с момента $t_0 = 0$ человек раз в год начинает получать определенную сумму, которую мы примем в качестве единицы измерения денежных сумм. Выплаты производятся только во время жизни человека. Вспоминая терминологию раздела 1, мы должны были бы назвать эту ренту упреждающей. Однако поскольку теория запаздывающих рент аналогична теории упреждающих рент (более того, имеются простые формулы, которые связывают приведенные стоимости обеих видов рент), а практический интерес представляют в основном упреждающие ренты, ниже мы будем рассматривать только упреждающие ренты.

Обозначим через x возраст человека в момент $t_0 = 0$ начала платежей, T_x – остаточную продолжительность жизни, $K_x = [T_x]$ – округленную остаточную продолжительность жизни. Поскольку выплаты производятся в моменты $0, 1, ..., K_x$, пожизненная рента может рассматриваться как упреждающая ежегодная рента со случайным числом выплат $n = K_x + 1$. Соответственно приведенная стоимость ренты в момент $t_0 = 0$ также будет случайной величиной, которую мы обозначим $\ddot{Y}_x$. Взгляд на пожизненную ренту как на упреждающую ренту со случайным числом выплат позволяет записать $\ddot{Y}_x$ в виде:

$$\ddot{Y}_x = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = \frac{1 - v^{K_x+1}}{d}. \tag{8.1.1}$$

Величина v^{K_x+1} появлялась ранее в разделе 7 как современная стоимость единичной страховой суммы при пожизненном страховании с выплатой страховой суммы в конце последнего года жизни. С учетом введенного в п.7.5 обозначения $Z_x = v^{K_x+1}$ (см. (7.5.1)) мы можем переписать формулу (8.1.1) следующим образом:

$$\ddot{Y}_x = \frac{1 - Z_x}{d}. \tag{8.1.2}$$

Поэтому расчет характеристик пожизненной ренты сводится к расчету характеристик соответствующего вида страхования. Это, впрочем, и не удивительно, т.к. рента и страховка в определенном смысле дополняют друг друга: рента выплачивается во время жизни, страховка – после смерти.

В частности, среднее значение $\mathbf{E}\ddot{Y}_x$ современной стоимости пожизненной ренты, которое обозначается $\ddot{a}_x$ и называется *актуарной современной стоимостью* (actuarial present value), дается формулой:

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}, \tag{8.1.3}$$

где, как было определено в п.7.5, формула (7.5.2), $A_x = \mathbf{E}Z_x$ – среднее значение современной стоимости единичной страховой суммы при пожизненном страховании с выплатой страховой суммы в конце года жизни.

Вспоминая (7.5.7) и (7.5.6), мы можем выразить $\ddot{a}_x$ через характеристики остаточного времени жизни и упрощающие функции:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \equiv \frac{1}{D_x}\sum_{n=x}^{\infty} D_n = \frac{1}{v^x l_x}\sum_{n=x}^{\infty} v^n l_n. \tag{8.1.4}$$

Для оценки вероятности разорения и расчета защитной надбавки важно определить значение дисперсии случайной величины $\ddot{Y}_x$. В силу (8.1.2) , (7.3.21) и общих свойств дисперсии любой случайной величины мы имеем:

$$\mathbf{Var}\ddot{Y}_x = \frac{1}{d^2}\mathbf{Var}Z_x = \frac{1}{d^2}\cdot({}^2A_x - A_x^2). \tag{8.1.5}$$

Способ подсчета актуарной стоимости ренты, приведенный выше, называется *методом суммарной выплаты* (aggregate payment technique). Формула (8.1.4) может быть получена и другим методом – так называемым *методом текущего платежа* (current payment technique). В отличие от метода суммарной выплаты, который рассматривает пожизненную ренту как сумму случайного числа детерминированных слагаемых, метод текущей выплаты рассматривает пожизненную ренту как сумму детерминированного (возможно, бесконечного) числа случайных слагаемых. Для изучаемой простейшей ренты это означает следующее.

В принципе выплаты возможны в любой момент времени $k = 0, 1, \ldots$. Выплата в момент k производится, если человек еще жив, т.е. если $T_x > k$. Поэтому величина выплаты в момент k – это индикатор события $\{T_x > k\}$. Соответственно приведенная ценность этой выплаты в момент $t_0 = 0$ – это случайная величина $v^k \cdot I\{T_x > k\}$ и, значит,

$$\ddot{Y}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot I\{T_x > k\}.$$

Поэтому

$$\ddot{a}_x = \mathbf{E}\ddot{Y}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot \mathbf{E}I\{T_x > k\}.$$

Поскольку индикаторная величина $I(T_x > k)$ принимает только значения 0 и 1, ее среднее значение есть $\mathbf{P}(I(T_x > k) = 1) = \mathbf{P}(T_x > k) = \frac{l_{x+k}}{l_x}$, так что эта формула сводится к (8.1.4).

Временная пожизненная рента. Пусть, как и ранее, $t_0 = 0$ – настоящий момент, а возраст человека, которому выплачивается рента – x лет. *n-летняя временная пожизненная рента* (n-year temporary life annuity) определяется как серия выплат единичной суммы, производимых раз в год пожизненно начиная с момента $t_0 = 0$, но не более, чем n лет. Таким образом, если человек проживет еще n лет (т.е. если $T_x \geq n$), то производится ровно n выплат с упреждением; если же $T_x < n$, то производится $K_x + 1$ выплат. Современная стоимость такой ренты обозначается $\ddot{Y}_{x:\overline{n}|}$. В силу сделанного выше замечания метод суммарной выплаты дает:

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{если } T_x \geq n \\ \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}, & \text{если } T_x < n. \end{cases}$$

В силу (5.3.4) мы можем переписать это равенство в виде:

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \frac{1-v^n}{d}, & \text{если } T_x \geq n \\ \frac{1-v^{K_x+1}}{d}, & \text{если } T_x < n, \end{cases} \tag{8.1.6}$$

или, что то же самое,

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - Z_{x:\overline{n}|}}{d}, \tag{8.1.7}$$

где величина

$$Z_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} v^n, & \text{если } T_x \geq n \\ v^{K_x+1}, & \text{если } T_x < n \end{cases}$$

дает современную ценность единичной страховой суммы при n-летнем смешанном страховании с выплатой страховой суммы в конце года смерти.

Поэтому среднее значение $\mathbf{E}\ddot{Y}_{x:\overline{n}|}$ современной стоимости временной пожизненной ренты, которое обозначается $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ и называется актуарной приведенной современной стоимостью временной пожизненной ренты, дается формулой:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}, \tag{8.1.8}$$

где $A_{x:\overline{n}|} = \mathbf{E}Z_{x:\overline{n}|}$ – нетто-премия при смешанном страховании жизни с выплатой страховой суммы в конце последнего года жизни.

Вспоминая формулы (7.5.16) и (7.5.6), мы можем выразить $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ через характеристики продолжительности жизни:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = \frac{1}{D_x}\sum_{k=x}^{x+n-1} D_k = \frac{1}{v^x l_x}\sum_{k=x}^{x+n-1} v^k l_k. \tag{8.1.9}$$

Кроме того, для $\mathbf{Var}\ddot{Y}_{x:\overline{n}|}$ из (8.1.7) мы имеем:

$$\mathbf{Var}\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d^2}\cdot \mathbf{Var}Z_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d^2}\cdot\left({}^2A_{x:\overline{n}|} - A^2_{x:\overline{n}|}\right). \tag{8.1.10}$$

Формула (8.1.9) может быть получена и методом текущей выплаты. Для этого отметим, что в принципе выплаты возможны в любой момент времени $k = 0, 1, ..., n-1$. Выплата в момент k производится, если человек еще жив, т.е. если $T_x > k$. Поэтому

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot I(T_x > k)$$

и, значит,

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \mathbf{E}\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbf{P}(T_x > k) \\ &= \frac{1}{l_x}\sum_{k=0}^{n-1} v^k l_{x+k} \\ &= \frac{1}{v^x l_x}\sum_{k=x}^{x+n-1} v^k l_k.\end{aligned}$$

Отсроченная пожизненная рента. Пусть, как и ранее, $t_0 = 0$ – настоящий момент, а возраст человека, которому выплачивается рента, – x лет. *Отсроченная на m лет пожизненная рента* (deferred life annuity) определяется как серия выплат единичной суммы, производимых раз в год, начиная с момента $t_0 + m = m$, до тех пор, пока человек жив. Подчеркнем, что если человек умрет до момента m, то ни одной выплаты не производится. Обозначим через ${}_{m|}\ddot{Y}_x$ современную стоимость такой ренты. Метод суммарной выплаты дает:

$$
{}_{m|}\ddot{Y}_x = \begin{cases} 0, & \text{если } T_x \leq m \\ v^m + \ldots + v^{K_x} = \dfrac{v^m - v^{K_x+1}}{d}, & \text{если } T_x > m. \end{cases} \tag{8.1.11}
$$

Поскольку событие $T_x = m$ имеет нулевую вероятность, отсюда следует, что с вероятностью 1

$$
{}_{m|}\ddot{Y}_x = \ddot{Y}_x - \ddot{Y}_{x:\overline{m}|}. \tag{8.1.12}
$$

Поэтому для актуарной современной стоимости отсроченной ренты мы имеем следующее выражение:

$$
{}_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}. \tag{8.1.13}
$$

С помощью формул (8.1.3), (8.1.8) его можно переписать в терминах нетто-премий:

$$
{}_{m|}\ddot{a}_x = \frac{A_{x:\overline{m}|} - A_x}{d}, \tag{8.1.14}
$$

а с помощью (8.1.4), (8.1.9) – в терминах функции выживания и упрощающих функций:

$$
{}_{m|}\ddot{a}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=m}^{\infty} v^k l_{x+k} = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x+m}^{\infty} v^k l_k = \frac{N_{x+m}}{D_x}. \tag{8.1.15}
$$

Основная с точки зрения приложений формула (8.1.15) очень легко может быть получена методом текущей выплаты. Для этого отметим, что выплаты возможны только в моменты $k = m, m+1, \ldots$. Выплата в момент k производится, если человек еще жив, т.е. если $T_x > k$. Поэтому

$$
{}_{m|}\ddot{Y}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k \cdot I(T_x > k)
$$

и, значит,

$$
\begin{aligned}
{}_{m|}\ddot{a}_x &= \mathbf{E}_{m|}\ddot{Y}_x \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} v^k \cdot \mathbf{E}I(T_x > k) \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} v^k \cdot \mathbf{P}(T_x > k) \\
&= \frac{1}{l_x} \sum_{k=m}^{\infty} v^k l_{x+k}.
\end{aligned}
$$

Отметим также следующую формулу, связывающую отсроченную пожизненную ренту с отсроченным страхованием с выплатой страховой суммы в конце года смерти (она вытекает из (8.1.11), (7.5.18), (7.4.12)):

$$
{}_{m|}\ddot{Y}_x = \frac{Z_{x:\overset{1}{\overline{m|}}} - {}_{m|}Z_x}{d}.
$$

Полезно сопоставить это соотношение с (8.1.2) и (8.1.7).

8.2 Актуарная приведенная ценность и актуарное накопление

Еще одна интересная формула может быть получена из (8.1.15), если вынести за знак суммы член v^m и ввести новый индекс суммирования $j = k - m$:

$$
\begin{aligned}
{}_{m|}\ddot{a}_x &= v^m \frac{1}{l_x} \sum_{k=m}^{\infty} v^{k-m} l_{x+k} \\
&= v^m \frac{1}{l_x} \sum_{j=0}^{\infty} v^j l_{x+m+j} \\
&= v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} \frac{1}{l_{x+m}} \sum_{j=0}^{\infty} v^j l_{x+m+j} \\
&= v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \ddot{a}_{x+m}.
\end{aligned}
\tag{8.2.1}
$$

Эта формула аналогична формулам (5.3.8), (5.4.6), (5.5.9) для детерминированных отсроченных рент. Она говорит, что для определения современной стоимости ренты, отсроченной на m единиц времени, можно определить ее стоимость на момент m (в этот момент человек имеет возраст $m + x$, а отсроченная рента может рассматриваться как обычная, так что ее стоимость на момент m равна $\ddot{a}_{x+m}$), а затем привести эту стоимость на m единиц времени раньше. Однако в отличие от классического детерминистического случая коэффициент дисконтирования для периода $(0, m)$ равен не v^m, а ${}_mE_x = v^m \cdot l_{x+m}/l_x$, т.е. меньше.

Для объяснения этого обстоятельства рассмотрим пенсионный фонд, в который в момент $t_0 = 0$ N человек в возрасте x лет каждый внесли по единичной сумме. К моменту t эта сумма вырастет до $N \cdot (1+i)^t$. Одновременно сократится и число участников фонда – в живых останется в среднем $N \cdot \mathbf{P}(T_x > t) = N \cdot l_{x+t}/l_x$ человек. Поэтому на каждого из них будет приходиться сумма

$$A(x;t) = \frac{N \cdot (1+i)^t}{N \cdot l_{x+t}/l_x} = \frac{l_x}{l_{x+t}} \cdot (1+i)^t. \qquad (8.2.2)$$

Это *актуарное накопление* больше, чем обычное накопление $(1+i)^t$ в теории сложных процентов, т.к. наряду с ростом объединенного пенсионного фонда за счет доходов от процентов уменьшается число живых участников фонда, претендующих на долю средств фонда.

Соответственно для получения единичной суммы в момент t (если будет жив) каждый из N человек должен внести в момент $t_0 = 0$ сумму

$${}_tE_x = \frac{1}{A(x;t)} = v^t \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} = v^t \cdot \mathbf{P}(T_x > t). \qquad (8.2.3)$$

Это и будет *актуарный коэффициент дисконтирования на отрезке* $[0, t]$ *для человека в возрасте* x *лет в момент* $t_0 = 0$.

Актуарный коэффициент дисконтирования ${}_tE_x$ и актуарный коэффициент накопления $A(x;t)$ можно выразить через упрощающую функцию D_x :

$$A(x;t) = \frac{D_x}{D_{x+t}}, \qquad (8.2.4)$$

$${}_tE_x = \frac{D_{x+t}}{D_x}. \qquad (8.2.5)$$

Используя понятие актуарной приведенной ценности, можно записать новые версии формул для введенных выше актуарных стоимостей рент:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_x, \tag{8.2.6}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x, \tag{8.2.7}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} {}_kE_x. \tag{8.2.8}$$

Имея в виду интуитивную интерпретацию величины ${}_tE_x$, эти формулы совершенно очевидны: ${}_kE_x$ – это средняя сумма, которую нужно внести в момент $t_0 = 0$, чтобы получить (если жив) сумму 1 в момент k. Поэтому

$$\sum_{k=a}^{b} {}_kE_x$$

это средняя сумма, которую нужно внести в момент $t_0 = 0$, чтобы получать (если жив) сумму 1 в каждый мз моментов $k = a, a+1, ..., b$.

По аналогии с актуарным накоплением $A(x;n) = 1/{}_nE_x$ при внесении суммы 1 в момент $t_0 = 0$ можно определить актуарное накопление для рент.

Предположим, что начиная с момента $t_0 = 0$ в начале каждого года каждый член большой группы из N человек вносит в фонд сумму 1. Эти средства накапливаются в соответствии с эффективной годовой процентной ставкой i. Рассмотрим некоторый момент времени n и подсчитаем накопленные средства к этому моменту.

Для этого отметим, что из N живых представителей исходной группы в момент $t_0 = 0$ примерно $N{\cdot}\mathbf{P}(K_x = k)$ умрет на промежутке $[k, k+1)$. Если $k \le n-1$, они произведут $k+1$ платежей в моменты $0, 1, ..., k$. Приведенная ценность этих платежей в момент n есть

$$(1+i)^n + ... + (1+i)^{n-k} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-k-1}}{d}.$$

Примерно $N \cdot \mathbf{P}(K_x \ge n)$ человек проживет n лет. Они произведут n платежей в моменты $0, 1, ..., n-1$. Приведенная ценность этих платежей в момент n есть

$$(1+i)^n + ... + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.$$

Поэтому общая сумма, накопленная к моменту $n-0$, есть:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} N\mathbf{P}(K_x = k)\frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-k-1}}{d} \\
&+ N\mathbf{P}(K_x \geq n)\frac{(1+i)^n - 1}{d} \\
&= N\frac{(1+i)^n}{d}\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\mathbf{P}(K_x = k) - v^n\mathbf{P}(K_x \geq n)\right) \\
&= N\frac{(1+i)^n}{d}\left(1 - A_{x:\overline{n}|}\right).
\end{aligned}$$

В силу (8.1.8), как и следовало ожидать, эта сумма равна $N \cdot (1+i)^n \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Однако в живых к моменту n будет только $N \cdot \mathbf{P}(T_x > n)$ человек. Поэтому на каждого из них будет приходиться сумма

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{N \cdot (1+i)^n \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{N \cdot \mathbf{P}(T_x > n)} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}}. \tag{8.2.9}$$

Это и есть актуарное накопление к моменту n для пожизненной ренты. Рост суммы $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$ с течением времени n связан как с доходами от процентов, так и с уменьшением числа живых участников фонда, претендующих на средства фонда.

Используя (8.2.7), (8.2.4) и (8.2.5), можно получить еще одну формулу для $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$:

$$\begin{aligned}
\ddot{s}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_kE_x}{{}_nE_x} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_{x+n}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_{x+k+n-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A(x+k; n-k).
\end{aligned} \tag{8.2.9}$$

Эта формула совершенно очевидна интуитивно. Средняя сумма, которую накопит к моменту n человек в возрасте x лет при внесении суммы 1 в начале каждого года, складывается из актуарных накоплений при внесении суммы 1 в моменты $k = 0, 1, ..., n-1$; при этом надо учесть, что в момент k возраст человека равен $x + k$.

8.3 Пожизненные ренты, выплачиваемые с частотой p

Полная пожизненная рента. Предположим, что начиная с момента $t_0 = 0$ человек в возрасте x лет начинает p раз в год получать сумму $1/p$ (таким образом, алгебраическая сумма всех выплат на протяжении года принята в качестве единицы измерения денежных сумм). Выплаты производятся только во время жизни человека в начале каждой из p-х долей года, т.е. в моменты

$$0, 1/p, ..., K_x, K_x + 1/p, ..., K_x + m(x)/p,$$

где $m(x)$ – целое число из промежутка $[0, p-1]$ такое, что

$$K_x + m(x)/p < T_x \leq K_x + (m(x)+1)/p.$$

Приведенную стоимость такой ренты в момент $t_0 = 0$ обозначим $\ddot{Y}_x^{(p)}$, а ее среднее значение (т.е. актуарную приведенную стоимость) обозначим $\ddot{a}_x^{(p)}$.

Временная пожизненная рента. Предположим, в отличие от полной пожизненной ренты, что период выплат ограничен некоторым числом n (лет). Таким образом, если человек проживет еще n лет (т.е. если $T_x \geq n$), то будет произведено np выплат, величиной $1/p$ каждая, в моменты $0, 1/p, ..., n - 1/p$. Если же человек умрет до момента n (т.е. если $T_x < n$), то будет произведено $(K_x - 1) \cdot p + m(x) + 1$ выплат, величиной $1/p$ каждая, в моменты $0, 1/p, ..., K_x, K_x+1/p, ..., K_x+m(x)/p$. Приведенную стоимость такой ренты в момент $t_0 = 0$ обозначим $\ddot{Y}_{x:\overline{n}|}^{(p)}$, а ее среднее значение (т.е. актуарную приведенную стоимость) обозначим $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(p)}$.

Поскольку при $n \to \infty$ временная пожизненная рента переходит в полную пожизненную ренту, можно ограничиться рассмотрением временной ренты.

Проще всего получить формулу для $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(p)}$ методом текущей выплаты.

В момент $t = l/p$, $0 \leq l \leq np - 1$, выплачивается сумма $1/p$, если $T_x > t$, и сумма 0, если $T_x \leq t$. Поэтому

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{np-1} v^{l/p} \cdot I(T_x > l/p)$$

и, значит,

$$\ddot{a}^{(p)}_{x:\overline{n}|} \equiv \mathbf{E}\ddot{Y}^{(p)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{p}\sum_{l=0}^{np-1} v^{l/p}\cdot \mathbf{P}(T_x > l/p).$$

Представим индекс суммирования l в виде $l = kp + j$, где $k = 0, 1, ..., n-1$, а $j = 0, 1, ..., p-1$. Это позволит переписать последнюю формулу в виде:

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{(p)}_{x:\overline{n}|} &\equiv \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{p-1} v^{k+j/p}\cdot \mathbf{P}(T_x > k + j/p)\\ &= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1} v^k \sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p}\cdot \mathbf{P}(T_x > k + j/p).\end{aligned}$$

Поскольку появились дробные значения возраста, для дальнейших преобразований нам необходимо принять определенные предположения относительно распределения времени жизни для дробных возрастов. Как правило, рассматривают простейшее из них – предположение о равномерном распределении смертей внутри последнего года жизни. Используя результаты раздела (3.3) и, в частности, формулу (3.3.2), при целом x мы имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T_x > k + j/p) &= \frac{s(x + k + \frac{j}{p})}{s(x)}\\ &= \frac{(1 - \frac{j}{p})\cdot s(x+k) + \frac{j}{p}\cdot s(x+k+1)}{s(x)}\\ &= (1 - \frac{j}{p})\cdot \mathbf{P}(T_x > k) + \frac{j}{p}\cdot \mathbf{P}(T_x > k+1)\\ &= \mathbf{P}(T_x > k)\\ &\quad - \frac{j}{p}\cdot (\mathbf{P}(T_x > k) - \mathbf{P}(T_x > k+1)).\end{aligned}$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}^{(p)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot \mathbf{P}(T_x > k)\sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p} \\
- \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot (\mathbf{P}(T_x > k) \\
- \mathbf{P}(T_x > k+1))\sum_{j=0}^{p-1} \frac{j}{p} v^{j/p}.
\end{aligned}
\tag{8.3.1}
$$

Все четыре суммы, входящие в эту формулу, могут быть упрощены. Прежде всего в силу (8.1.9),

$$
\sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot \mathbf{P}(T_x > k) = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{8.3.2}
$$

Кроме того,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot (\mathbf{P}(T_x > k) - \mathbf{P}(T_x > k+1)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot \mathbf{P}(T_x > k) - \frac{1}{v}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot \mathbf{P}(T_x > k+1) \\
&= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{v}(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + v^n \cdot \mathbf{P}(T_x > n)) \\
&= \frac{1 - (1-v)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x}{v} \\
&= \frac{1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x}{1-d},
\end{aligned}
\tag{8.3.3}
$$

где d – годовая учетная ставка, а ${}_nE_x$ – актуарный коэффициент дисконтирования.

Далее, сумма

$$
\sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p}
$$

представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $v^{1/p}$ и поэтому

$$
\sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p} = \frac{1-v}{1-v^{1/p}} = \frac{d}{1-(1-d)^{1/p}} = \frac{dp}{d^{(p)}}, \tag{8.3.4}
$$

где $d^{(p)}$ – номинальная учетная ставка, начисляемая с частотой p.

И наконец, для упрощения последней суммы в правой части равенства (8.3.1) продифференцируем соотношение (8.3.4) по v :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \frac{j}{p} v^{j/p-1} = \frac{-(1-v^{1/p}) + (1-v)\frac{1}{p}v^{1/p-1}}{(1-v^{1/p})^2},$$

так что

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{j}{p} v^{j/p} &= \frac{-vp(1-v^{1/p}) + (1-v)v^{1/p}}{p(1-v^{1/p})^2} \\ &= \frac{-(1-d)pd^{(p)} + d(p-d^{(p)})}{(d^{(p)})^2} \qquad (8.3.5) \\ &= \frac{-pd^{(p)} + pdd^{(p)} + pd - dd^{(p)}}{(d^{(p)})^2}. \end{aligned}$$

Подставляя (8.3.2), (8.3.3), (8.3.4) и (8.3.5) в правую часть (8.3.1), мы получим следующую формулу для $\ddot{a}^{(p)}_{x:\overline{n}|}$:

$$\ddot{a}^{(p)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(p) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(p) \cdot (1 - {}_nE_x),$$

где

$$\beta(p) = \frac{pd - pd^{(p)} + pdd^{(p)} - dd^{(p)}}{p(1-d)(d^{(p)})^2},$$

$$\alpha(p) = \frac{d}{d^{(p)}} + d\beta(p).$$

Формулы для $\beta(p)$ и $\alpha(p)$ можно записать в более компактной форме. Именно, поскольку $d/(1-d) = i$, $1/(1-d) = 1+i$, $1/d^{(p)} = 1/i^{(p)} + 1/p$, мы имеем:

$$\begin{aligned} \beta(p) &= \frac{d(p-d^{(p)}) - pd^{(p)}(1-d)}{p(1-d)(d^{(p)})^2} \\ &= \frac{\frac{d}{1-d}\left(\frac{1}{d^{(p)}} - \frac{1}{p}\right) - 1}{d^{(p)}} \\ &= \frac{i - i^{(p)}}{i^{(p)} d^{(p)}}, \end{aligned}$$

$$\alpha(p) = \frac{d}{d^{(p)}} + \frac{d(i - i^{(p)})}{i^{(p)}d^{(p)}} = \frac{id}{i^{(p)}d^{(p)}}.$$

Итак, окончательно мы получим следующую формулу, связывающую актуарную современную ценность временной пожизненной ренты, выплачиваемой p раз в год, с актуарной современной стоимостью временной пожизненной ренты, выплачиваемой один раз в год:

$$\ddot{a}^{(p)}_{x:\overline{n}|} = \frac{id}{i^{(p)}d^{(p)}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{i - i^{(p)}}{i^{(p)}d^{(p)}} \cdot (1 - {}_nE_x), \tag{8.3.6}$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, мы получим аналогичную формулу для полной пожизненной ренты:

$$\ddot{a}^{(p)}_x = \frac{id}{i^{(p)}d^{(p)}} \cdot \ddot{a}_x - \frac{i - i^{(p)}}{i^{(p)}d^{(p)}}. \tag{8.3.7}$$

В заключение еще раз напомним, что обе формулы получены в предположении, что возраст x на момент заключения договора является целым числом, а момент смерти равномерно распределен внутри последнего года жизни.

8.4 Непрерывные пожизненные ренты

Рассмотрим полную пожизненную ренту, выплачиваемую с частотой p. Если $p \to \infty$, то мы имеем дело с большим числом малых платежей (величиной $1/p$ каждый), совершаемых через малые промежутки времени длиной $1/p$. В пределе при $p = \infty$ можно рассматривать поступление средств как непрерывный процесс, подобный течению жидкости. Скорость поступления средств постоянна и равна 1, т.е. за малый промежуток времени поступит сумма $1 \cdot \Delta$.

Единственное отличие полной непрерывной пожизненной ренты от непрерывной ренты, введенной в п.1.7, связано с тем, что период платежей T_x является случайной величиной. Поэтому приведенная стоимость непрерывной пожизненной ренты в момент $t_0 = 0$ есть

$$\overline{Y}_x = \overline{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{1 - v^{T_x}}{\delta}. \tag{8.4.1}$$

Величина v^{T_x} появлялась ранее в п.7.4 как современная стоимость единичной страховой суммы при пожизненном страховании. С учетом введенного в п.7.4 обозначения $\overline{Z}_x = v^{T_x}$ (см. (7.4.3)), мы можем переписать формулу (8.4.1) следующим образом:

$$\overline{Y}_x = \frac{1 - \overline{Z}_x}{\delta}. \tag{8.4.2}$$

Таким образом, непрерывные ренты соответствуют непрерывным видам страхования, подобно тому, как дискретные ренты соответствуют дискретным видам страхования.

Из (8.4.2) следует, что актуарная приведенная стоимость полной непрерывной пожизненной ренты $\overline{a}_x \equiv \mathbf{E}\overline{Y}_x$ дается формулой:

$$\overline{a}_x = \frac{1 - \overline{A}_x}{\delta}, \tag{8.4.3}$$

где, как было определено в п.7.4, $\overline{A}_x \equiv \mathbf{E}\overline{Z}_x$ – среднее значение современной стоимости единичной страховой суммы при пожизненном страховании.

Вспоминая (7.4.5) и (7.4.9), мы можем выразить $\overline{a}_x$ через характеристики времени жизни и упрощающие функции:

$$\overline{a}_x = \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^\infty v^t s(t)dt = \frac{\overline{N}_x}{D_x}. \tag{8.4.4}$$

Формула (8.4.3) может быть легко получена и методом текущего платежа. Именно на интервале $(t, t + dt)$ выплачивается сумма $1 \cdot dt$, если человек еще жив в момент t; вероятность этого события равна $\mathbf{P}(T_x > t)$. Приведенное среднее значение этого платежа есть $v^t\mathbf{P}(T_x > t)dt$. Интегрируя по t, мы получим:

$$\begin{aligned}\overline{a}_x &= \int_0^\infty v^t\mathbf{P}(T_x > t)dt \\ &= \frac{1}{s(x)} \int_0^\infty v^t s(x+t)dt \\ &= \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^\infty v^t s(t)dt.\end{aligned}$$

По аналогии с дискретными рентами можно рассмотреть временную непрерывную пожизненную ренту как непрерывный поток платежей, производимых со скоростью 1 пожизненно, но не более, чем время t. Если x – возраст человека, которому платится эта сумма (или который платит эту сумму), на момент заключения договора, то период платежей есть $\min(T_x, t)$. Приведенная стоимость этой ренты в момент $t_0 = 0$ обозначается $\overline{Y}_{x:\overline{t}|}$. Метод суммарной выплаты дает:

$$\overline{Y}_{x:\overline{t}|} = \overline{a}_{\overline{\min(T_x,t)}|}.$$

Вспоминая (1.7.11) и (7.4.19), мы получим:

$$\overline{Y}_{x:\overline{t}|} = \frac{1 - v^{\min(T_x, t)}}{\delta} = \frac{1 - \overline{Z}_{x:\overline{t}|}}{\delta}.$$

Поэтому для актуарной современной стоимости временной непрерывной пожизненной ренты мы имеем (см. (7.4.22)):

$$\overline{a}_{x:\overline{t}|} \equiv \overline{Y}_{x:\overline{t}|} = \frac{1 - \overline{A}_{x:\overline{t}|}}{\delta} = \frac{\overline{N}_x - \overline{N}_{x+t}}{\delta}.$$

Эту же формулу можно получить методом текущей выплаты:

$$\begin{aligned}
\overline{a}_{x:\overline{t}|} &= \int_0^t v^u \mathbf{P}(T_x > u) du \\
&= \frac{1}{s(x)} \int_0^t v^u s(x+u) du \\
&= \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^{x+t} v^u s(u) du \\
&= \frac{1}{D_x} \int_x^{x+t} D_u du \\
&= \frac{\overline{N}_x - \overline{N}_{x+t}}{D_x}.
\end{aligned}$$

Актуарное накопление для непрерывных рент удобно изучать с помощью дифференциальных уравнений.

Рассмотрим большую группу из N человек в возрасте x лет каждый. Предположим, что начиная с момента $t_0 = 0$ каждый член этой группы непрерывно со скоростью $\rho(t) = 1$ вносит в фонд деньги. Эти средства накапливаются в соответствии с эффективной годовой процентной ставкой i. Доля накопленных средств к моменту t, приходящаяся на одного живого представителя исходной группы, называется актуарным накоплением к моменту t и обозначается $\overline{s}_{x:\overline{t}|}$.

Для подсчета актуарного накопления определим вначале динамику общей накопленной суммы $x(t)$. Рассматривая прирост $x(t)$ за малый промежуток времени $(t, t + dt)$, мы имеем:

$$x(t + dt) = x(t) \cdot e^{\delta dt} + N \cdot \mathbf{P}(T_x > t) \cdot dt. \qquad (8.4.5)$$

Действительно, средства фонда к моменту $t + dt$ складываются из уже собранных средств, т.е. $x(t)$, с учетом процентов, заработанных на промежутке $(t, t + dt)$ (множитель $e^{\delta dt}$), и из новых поступлений на промежутке $(t, t + dt)$ от $N \cdot \mathbf{P}(T_x > t)$ живых участников фонда.

Теперь вычтем из обеих частей член $x(t)$, разделим почленно на dt и перейдем к пределу при $dt \to 0$. Это даст следующее дифференциальное уравнение для $x(t)$:

$$x'(t) = \delta x(t) + N \cdot \mathbf{P}(T_x > t).$$

С учетом начального условия $x(0) = 0$ его решение дается формулой:

$$x(t) = Ne^{\delta t} \int_0^t e^{-\delta u} \mathbf{P}(T_x > u) du = Ne^{\delta t} \overline{a}_{x:\overline{t}|}.$$

Поэтому

$$\overline{s}_{x:\overline{t}|} \equiv \frac{x(t)}{N \cdot \mathbf{P}(T_x > t)} = \frac{\overline{a}_{x:\overline{t}|}}{v^t \cdot \mathbf{P}(T_x > t)} = \frac{\overline{a}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x}.$$

8.5 Ренты с пропорциональной компенсацией

Рассмотрим запаздывающую пожизненную ренту, выплачиваемую с частотой p. Она заключается в выплате суммы $1/p$ в моменты

$$1/p, 2/p, \ldots, K_x + m(x)/p,$$

где $m(x)$ – целое число из промежутка $[0, p - 1]$ такое, что

$$K_x + m(x)/p < T_x \leq K_x + (m(x) + 1)/p.$$

Предполагается, что сумма, выплачиваемая в момент k/p, идет на оплату расходов человека, получающего эту ренту, на промежутке времени $((k - 1)/p, k/p)$. Например, пенсия, выплачиваемая в конце каждого месяца, компенсирует расходы по проживанию в течение этого месяца. Предположим , что человек умирает 29 числа, так что пенсия за прошедший месяц, которая поступит 30 числа, не будет выплачена. В этой ситуации было бы справедливо произвести определенную компенсационную выплату наследникам.

Подобная проблема обсуждалась нами в разделе 1.7 в детерминистическом случае в контексте увольнения работника до момента получения заработной платы. Мы установили (см. (1.1.17)), что если интервал между моментами получения заработной платы величиной C равен T, отработанное, но не оплаченное, время равно t, то справедливая компенсация s в момент увольнения должна подсчитываться по формуле

$$s = C\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^T - 1}.$$

В нашем случае роль заработной платы C играет пенсия величиной $1/p$, интервал T между пенсиями равен $1/p$, увольнению соответствует смерть пенсионера, момент t – это $T_x - K_x - m(x)/p$. Поэтому величина компенсации есть

$$s = \frac{1}{p} \cdot \frac{(1+i)^{T_x - K_x - m(x)/p} - 1}{(1+i)^{1/p} - 1}. \qquad (8.5.1)$$

Отметим, что при малой величине годовой процентной ставки i можно пользоваться приближенной формулой $s = Ct/T$, т.е. определять размер компенсации пропорционально прожитому, но неоплаченному, времени.

Мы назовем пожизненную ренту с компенсационной выплатой наследникам в момент смерти получателя ренты, подсчитываемой по формуле (8.5.1), *запаздывающей пожизненной рентой (выплачиваемой с частотой p) с пропорциональной компенсацией.* Хотя в западной актуарной литературе используется технический термин *совершенная запаздывающая рента* (complete immediate annuity), наш термин лучше передает суть дела и согласуется с общепринятым термином для аналогичных упреждающих рент. Приведенная стоимость в момент $t_0 = 0$ такой ренты обозначается $\mathring{Y}_x^{(p)}$. Она складывается из приведенной стоимости запаздывающей пожизненной ренты, выплачиваемой с частотой p, и приведенной стоимости компенсационной выплаты (8.5.1):

$$\mathring{Y}_x^{(p)} = Y_x^{(p)} + s \cdot v^{T_x}. \qquad (8.5.2)$$

Актуарная приведенная стоимость запаздывающей пожизненной ренты (выплачиваемой с частотой p) с пропорциональной компенсацией обозначается $\mathring{a}_x^{(p)}$:

$$\mathring{a}_x^{(p)} \equiv \mathbf{E}\mathring{Y}_x^{(p)}.$$

Чтобы подсчитать $\overset{\circ}{a}{}_x^{(p)}$, попробуем получить по возможности простую формулу для случайной величины $\overset{\circ}{Y}{}_x^{(p)}$. Для этого отдельно подсчитаем $Y_x^{(p)}$ и $s \cdot v^{T_x}$:

$$\begin{aligned} Y_x^{(p)} &= \frac{1}{p}\left(v^{1/p} + \ldots + v^{K_x+m(x)/p}\right) \\ &= \frac{v^{1/p} - v^{K_x+(m(x)+1)/p}}{p(1-v^{1/p})} \\ &= \frac{1 - v^{K_x+m(x)/p}}{p(v^{-1/p}-1)} \\ &= \frac{1 - v^{K_x+m(x)/p}}{i^{(p)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sv^{T_x} &= \frac{(1+i)^{-K_x-m(x)/p} - v^{T_x}}{p((1+i)^{1/p}-1)} \\ &= \frac{v^{K_x+m(x)/p} - v^{T_x}}{i^{(p)}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\overset{\circ}{Y}{}_x^{(p)} = \frac{1 - v^{T_x}}{i^{(p)}}. \tag{8.5.3}$$

С помощью (8.4.1) эту формулу можно переписать в виде:

$$\overset{\circ}{Y}{}_x^{(p)} = \frac{\delta}{i^{(p)}}\overline{Y}_x. \tag{8.5.4}$$

Это соотношение означает, что запаздывающую пожизненную ренту (выплачиваемую с частотой p) с пропорциональной компенсацией можно рассматривать как непрерывную пожизненную ренту со скоростью выплат $\rho = \delta/i^{(p)}$. Если вспомнить рассуждения, проводившиеся в п.1.7 при выводе формулы (1.7.17), то этот результат будет совершенно очевиден интуитивно.

Теперь для актуарной приведенной стоимости запаздывающей пожизненной ренты (выплачиваемой с частотой p) с пропорциональной компенсацией мы имеем:

$$\overset{\circ}{a}{}_x^{(p)} = \frac{\delta}{i^{(p)}} \cdot \overline{a}_x. \tag{8.5.5}$$

С помощью (8.4.3) (или непосредственно из (8.5.3)) мы можем свести дело к разовой нетто-премии при полном страховании жизни:

$$\overset{\circ}{a}{}_x^{(p)} = \frac{1-\overline{A}_x}{i^{(p)}}. \tag{8.5.6}$$

Рассмотрим теперь упреждающую пожизненную ренту, выплачиваемую с частотой p. Она заключается в выплате суммы $1/p$ в моменты

$$0, 1/p, 2/p, \ldots, K_x + m(x)/p.$$

Сумму, выплачиваемую в момент $t = k/p$, можно рассматривать как плату за услуги, которые будут оказаны на промежутке $(k/p, (k+1)/p)$. Например, плата за пожизненное страхование может вноситься застрахованным пожизненно в начале каждого месяца. Предполагается, что она обеспечивает страховое покрытие со стороны страховой компании в течение всего месяца. Однако если застрахованный умирает в какой-то момент в середине месяца, то было бы справедливо выплатить его наследникам определенную компенсацию за оплаченную, но уже ненужную страховую защиту в течение оставшейся части месяца.

Подобная проблема обсуждалась нами в разделе 1.7 в контексте отказа от услуги, оплаченной авансом. Мы установили (см. (1.7.18)), что если оплаченный период равен T, величина аванса – C, оплаченное, но не использованное, время равно t, то справедливая компенсация s в момент отказа от дальнейших услуг должна подсчитываться по формуле:

$$s = C\frac{1-v^t}{1-v^T}.$$

В нашем случае роль аванса C играет упреждающая выплата величиной $1/p$, оплаченный период T – это интервал между выплатами, отказу от услуг соответствует смерть застрахованного, оплаченное, но не использованное время t – это $K_x + (m(x)+1)/p - T_x$. Поэтому величина компенсации есть:

$$s = \frac{1}{p} \cdot \frac{1 - v^{K_x+(m(x)+1)/p-T_x}}{1-v^{1/p}}. \tag{8.5.7}$$

Пожизненная рента с выплатой плательщику ренты в момент смерти застрахованного суммы, которая подсчитывается по формуле (8.5.7), называется *упреждающей пожизненной рентой с пропорциональной компенсацией* (apportionable annuity-due). Ее приведенная стоимость в момент $t_0 = 0$ обозначается $\ddot{Y}_x^{\{p\}}$ (здесь, как обычно, x – возраст застрахованного в рассматриваемый момент времени, а p – частота выплат в течение года). Она складывается из приведенной стоимости упреждающей пожизненной ренты, выплачиваемой с частотой p, *минус* приведенная стоимость компенсационной выплаты (8.5.7):

$$\ddot{Y}_x^{\{p\}} = \ddot{Y}_x^{(p)} - s \cdot v^{T_x}.$$

Актуарная приведенная стоимость упреждающей пожизненной ренты с пропорциональной компенсацией, выплачиваемой с частотой p человеку в возрасте x лет, обозначается $\ddot{a}_x^{\{p\}}$:

$$\ddot{a}_x^{\{p\}} \equiv \mathbf{E}\ddot{Y}_x^{\{p\}}.$$

Чтобы подсчитать величину $\ddot{a}_x^{\{p\}}$, попробуем получить по возможности простую формулу для случайной величины $\ddot{Y}_x^{\{p\}}$. Для этого отдельно подсчитаем $\ddot{Y}_x^{(p)}$ и $s \cdot v^{T_x}$:

$$\begin{aligned}
\ddot{Y}_x^{(p)} &= \frac{1}{p}\left(1 + v^{1/p} + \ldots + v^{K_x + m(x)/p}\right) \\
&= \frac{1 - v^{K_x + (m(x)+1)/p}}{p(1 - v^{1/p})} \\
&= \frac{1 - v^{K_x + (m(x)+1)/p}}{d^{(p)}},
\end{aligned}$$

$$s v^{T_x} = \frac{v^{T_x} - v^{K_x + (m(x)+1)/p}}{d^{(p)}}.$$

Поэтому

$$\ddot{Y}_x^{\{p\}} = \frac{1 - v^{T_x}}{d^{(p)}}. \tag{8.5.8}$$

С помощью (8.4.1) эту формулу можно переписать в виде:

$$\ddot{Y}_x^{\{p\}} = \frac{\delta}{d^{(p)}} \overline{Y}_x. \tag{8.5.9}$$

Это соотношение означает, что упреждающую пожизненную ренту (выплачиваемую с частотой p) с пропорциональной компенсацией можно рассматривать как непрерывную пожизненную ренту со скоростью выплат $\rho = \delta / d^{(p)}$. Если вспомнить рассуждения, проводившиеся в в п.1.7 при выводе формулы (1.7.18), то этот результат будет совершенно очевиден интуитивно.

Теперь для актуарной приведенной стоимости упреждающей пожизненной ренты (выплачиваемой с частотой p) с пропорциональной компенсацией мы имеем:

$$\ddot{a}_x^{\{p\}} = \frac{\delta}{d^{(p)}} \cdot \overline{a}_x. \tag{8.5.10}$$

С помощью (8.4.3) (или непосредственно из (8.5.8)) мы можем свести дело к разовой нетто-премии при полном страховании жизни:

$$\ddot{a}_x^{\{p\}} = \frac{1 - \overline{A}_x}{d^{(p)}}. \tag{8.5.11}$$

8.6 Примеры расчетов

Пример 1. Используя таблицу продолжительности жизни из раздела 5, подсчитайте актуарную современную стоимость 3-летней временной пожизненной ренты, выплачиваемой раз в год в начале года в размере 1000 рублей. Возраст человека на момент заключения договора – 30 лет. Эффективная годовая процентная ставка $i = 25\%$.

Решение. Искомая величина равна $1000 \cdot \ddot{a}_{30:\overline{3}|}$. В силу формулы (8.1.9)

$$\ddot{a}_{30:\overline{3}|} = \frac{1}{l_{30}} \cdot (l_{30} + vl_{31} + v^2 l_{32}).$$

Поскольку $v = 1/(1+i) = 0.8$, $l_{30} = 96307$, $l_{31} = 96117$, $l_{32} = 95918$, мы получим:

$$\ddot{a}_{30:\overline{3}|} = \frac{96307 + 0.8 \cdot 96117 + 0.64 \cdot 95918}{96307} \approx 2.4358,$$

так что искомая величина есть 24358 руб.

Пример 2. Предположим, что продолжительность жизни описывается моделью де Муавра с предельным возрастом $\omega = 100$ лет, а эффективная годовая процентная ставка $i = 10\%$. Подсчитайте актуарную современную стоимость полной пожизненной ренты, которая будет выплачиваться ежемесячно человеку в возрасте $x = 45$ лет в размере 1000 руб. в месяц.

Решение. Искомая величина равна

$$12000 \cdot \ddot{a}_{45}^{(12)}.$$

Используя (8.3.7), можно свести дело к современной стоимости пожизненной ренты, выплачиваемой раз в год:

$$\ddot{a}_{45}^{(12)} = \alpha(12) \cdot \ddot{a}_{45} - \beta(12),$$

где

$$\alpha(12) = \frac{id}{i^{(12)}d^{(12)}} \approx 1.00752$$
$$\beta(12) = \frac{i - i^{(12)}}{i^{(12)}d^{(12)}} \approx 0.4744916$$

Для модели де Муавра $l_x = l_0 \cdot s(x) = l_0 \cdot (1 - x/\omega)$. Поэтому формула (8.1.4) для величины $\ddot{a}_x$ примет вид:

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{v^x(\omega - x)} \sum_{n=x}^{\omega-1} v^n(\omega - n).$$

Поскольку

$$\sum_{n=x}^{\omega-1} v^n = \frac{v^x - v^\omega}{1 - v},$$
$$\sum_{n=x}^{\omega-1} nv^{n-1} = \left(\frac{v^x - v^\omega}{1 - v}\right)' = \frac{(xv^{x-1} - \omega v^{\omega-1})(1 - v) + v^x - v^\omega}{(1 - v)^2},$$

мы имеем:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= \frac{1}{v^x(\omega - x)} \cdot \left[\omega\frac{v^x - v^\omega}{1 - v} - \frac{(xv^x - \omega v^\omega)(1 - v) + v(v^x - v^\omega)}{(1 - v)^2}\right] \\ &= \frac{1}{v^x(\omega - x)} \cdot \left[\frac{(\omega - x)v^x}{1 - v} - \frac{v}{(1 - v)^2}(v^x - v^\omega)\right] \\ &= \frac{1}{1 - v} - \frac{v}{(\omega - x)(1 - v)^2} \cdot (1 - v^{\omega - x}),\end{aligned}$$

так что

$$\ddot{a}_{45} \approx 9.01$$

и, значит,

$$12000 \cdot a_{45}^{(12)} \approx 102514 \text{ руб.}$$

Пример 3. После несчастного случая, который привел к временной нетрудоспособности застрахованного, страховщик должен выплачивать застрахованному возмещение в размере B в год. Допустим, что выплаты происходят непрерывно, а время до выздоровления имеет гамма-распределение со средним M и дисперсией V.

Подсчитайте актуарную приведенную стоимость обязательств страховщика на момент начала выплат.

Решение. Пусть T – период нетрудоспособности; плотность этой случайной величины есть:

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \ t > 0,$$

где

$$M = \frac{\alpha}{\lambda}, \ V = \frac{\alpha}{\lambda^2},$$

так что

$$\lambda = \frac{M}{V}, \ \alpha = \frac{M^2}{V}.$$

Тогда искомая актуарная приведенная стоимость есть

$$\mathbf{E}\bar{a}_{\overline{T}|} = \mathbf{E}\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} = \frac{1 - Ee^{-\delta T}}{\delta}.$$

Величина $\mathbf{E}e^{-\delta T}$ – это преобразование Лапласа случайной величины T. Как известно

$$\mathbf{E}e^{-\delta T} = \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda}\right)^\alpha,$$

что в терминах параметров M и V дает следующий результат:

$$\mathbf{E}e^{-\delta T} = \left(\frac{M}{M + \delta V}\right)^{\frac{M^2}{V}}.$$

Итак, искомая величина равна

$$\frac{1 - \left(\frac{M}{M+\delta V}\right)^{\frac{M^2}{V}}}{\delta}.$$

Пример 4[16]**.** Страховщик принял на себя обязательство выплачивать ежегодно 150 000 рабочему в возрасте x лет, который получил производственную травму.

Выплаты начинаются немедленно и производятся раз в год до тех пор, пока работник жив. После того, как страховщик выплатит 500 000, оставшиеся платежи производит перестраховочная компания. Относительно смертности рабочего после получения травмы известно, что

$$ {}_tp_x = \begin{cases} (0.7)^t, & \text{если } 0 < t < 5.5, \\ 0, & \text{если } t > 5.5. \end{cases} $$

Подсчитайте актуарную современную стоимость обязательств перестраховочной компании, если $i = 5\%$.

Решение. Воспользуемся методом текущего платежа.

Перестраховщик должен выплатить:

(1) сумму 100 000 в момент $t = 3$, если рабочий доживет до этого момента (вероятность этого события равна ${}_3p_x$);

(2) сумму 150 000 в момент $t = 4$, если рабочий доживет до этого момента (вероятность этого события равна ${}_4p_x$);

(3) сумму 150 000 в момент $t = 5$, если рабочий доживет до этого момента (вероятность этого события равна ${}_5p_x$).

Поскольку по условию задачи рабочий проживет не более 5.5 лет, больше ничего перестраховщику платить не придется.

Поэтому актуарная современная стоимость обязательств перестраховщика есть

$$ 100\,000 \cdot {}_3p_x v^3 + 150\,000 \cdot {}_4p_x v^4 + 150\,000 \cdot {}_5p_x v^5 \approx 79\,012. $$

[16] *Course/Exam 3 – Actuarial Models,* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, May 2000, Problem 5.

9. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРЕМИИ

9.1 Периодические нетто-премии

До сих пор мы предполагали, что покупка страховки или пожизненной пенсии производится в виде одиночной премии в момент заключения договора. Однако обычно премия выплачивается в виде серии платежей в течение некоторого оговоренного срока.

Как и в простейших случаях, обсуждавшихся ранее, полная периодическая премия складывается из нескольких частей. Важнейшая составная часть премии – это нетто-премия, которая определяется из принципа эквивалентности финансовых обязательств страховой компании (пенсионного фонда) и страхователя (участника фонда).

Если символ A (или a, в случае пожизненных рент), возможно, с некоторыми индексами, используется для обозначения разовой нетто-премии, то символ $P(A)$ используется для обозначения периодической нетто-премии, вносимой все время действия договора. Кроме того, буква P может снабжаться своими индексами, которые характеризуют процесс поступления премий. Например, если премии вносятся с частотой m, то вверху справа ставится индекс (m); если премии платятся непрерывно, то над буквой P ставится черта и т.д. Если, кроме того, период платежей ограничен сроком t, то соответствующая периодическая премия обозначается ${}_tP(A)$. Для дискретных видов страхования часто букву A опускают и используют только символ P, но со всеми индексами, которые были у символа A.

Как мы видели в детерминированном случае (раздел 1), величина такой периодической премии определяется в терминах рент. Подобным же образом для страховок и пожизненных пенсий величина периодических премий определяется в терминах соответствующих пожизненных рент и может быть подсчитана с помощью формул разделов 8.1 — 8.5.

В общем виде схема расчета нетто-премий может быть представлена следующим образом.

Пусть $p^{(\mathrm{n})}$ – искомая нетто-премия.

Определим современную актуарную стоимость финансовых обязательств страхователя a_{C}. Эта величина, очевидно, является функцией от искомой премии $p^{(\mathrm{n})}$: $a_{\mathrm{C}} = a_{\mathrm{C}}(p^{(\mathrm{n})})$.

Затем подсчитаем современную актуарную стоимость финансовых обязательств компании a_{B}.

Величина a_{B}, вообще говоря, также зависит от искомой премии $p^{(\mathrm{n})}$: $a_{\mathrm{B}} = a_{\mathrm{B}}(p^{(\mathrm{n})})$.

Принцип эквивалентности финансовых обязательств страховой компании (пенсионного фонда) и страхователя (участника фонда) означает, что

$$a_{\mathrm{B}}(p^{(\mathrm{n})}) = a_{\mathrm{C}}(p^{(\mathrm{n})}). \tag{9.1.1}$$

Корень этого уравнения и является искомой нетто-премией. Как правило, уравнение (9.1.1) является линейным и поэтому его решение не составляет никакой проблемы.

Применим теперь эту общую схему к различным вариантам пожизненного страхования.

Пожизненное дискретное страхование.

Рассмотрим дискретный договор пожизненного страхования (в случае смерти застрахованного страховая сумма выплачивается в конце последнего года жизни), при котором плата за покрытие вносится в каждую годовщину заключения договора. Пусть x – возраст застрахованного в момент заключения договора. Примем величину страховой суммы в качестве единицы и (в соответствии с правилом, изложенным выше) обозначим величину периодической нетто-премии $P(A_x) \equiv P_x$.

Обязательство страховой компании по этому договору заключается в выплате единичной суммы в конце года смерти застрахованного. Актуарная приведенная ценность на момент заключения договора этого обязательства есть A_x.

Обязательство страхователя заключается в ежегодной выплате в течение всей жизни суммы P_x. Выплаты премии могут рассматриваться как пожизненная рента, выплачиваемая страховой компании. Поэтому актуарная приведенная ценность потока премий на момент заключения договора есть $P_x \cdot \ddot{a}_x$.

Принцип эквивалентности обязательств дает следующее уравнение:

$$A_x = P_x \cdot \ddot{a}_x, \tag{9.1.2}$$

откуда для периодической нетто-премии мы имеем:

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}. \tag{9.1.3}$$

С помощью полученных ранее формул для A_x и $\ddot{a}_x$ можно записать целый ряд вариантов этого основного соотношения.

Прежде всего, используя (8.1.3), можно выразить периодическую нетто-премию через разовую нетто-премию для пожизненного страхования с выплатой страховой суммы в конце года смерти или через актуарную современную стоимость пожизненной ренты:

$$P_x = d\frac{A_x}{1 - A_x}, \tag{9.1.4}$$

$$P_x = \frac{1 - d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}. \tag{9.1.5}$$

Используя (7.5.5) и (8.1.4), мы можем выразить P_x через дискретные упрощающие функции:

$$P_x = \frac{M_x}{N_x}. \tag{9.1.6}$$

Пожизненное непрерывное страхование.

Рассмотрим теперь договор пожизненного страхования с выплатой страховой суммы в момент смерти. Как и раньше, будем предполагать, что плата за страховку вносится в каждую годовщину заключения договора. Пусть x – возраст застрахованного. Примем величину страховой суммы в качестве единицы и (в соответствии с правилом, изложенным выше) обозначим величину периодической нетто-премии $P(\overline{A}_x)$.

Обязательство страховой компании по этому договору заключается в выплате единичной суммы в момент смерти застрахованного. Актуарная приведенная ценность на момент заключения договора этого обязательства есть $\bar{A}_x$.

Обязательство страхователя заключается в ежегодной выплате в течение всей жизни застрахованного суммы $P(\overline{A}_x)$. Выплаты премии могут рассматриваться как пожизненная рента, выплачиваемая страховой компании. Поэтому актуарная приведенная ценность потока премий на момент заключения договора есть $P(\overline{A}_x) \cdot \ddot{a}_x$.

Принцип эквивалентности обязательств дает следующее уравнение:

$$\overline{A}_x = P(\overline{A}_x) \cdot \ddot{a}_x, \tag{9.1.7}$$

откуда для периодической нетто-премии мы имеем:

$$P(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x}. \tag{9.1.8}$$

С помощью полученных ранее формул для $\overline{A}_x$ и $\ddot{a}_x$ можно записать целый ряд вариантов этого основного соотношения.

Прежде всего, используя (8.1.3), можно выразить периодическую нетто-премию через разовые нетто-премии для пожизненного страхования с выплатой страховой суммы в момент смерти и в конце года смерти:

$$P(\overline{A}_x) = d\frac{\overline{A}_x}{1 - A_x}. \tag{9.1.9}$$

Если предположить, что момент смерти равномерно распределен внутри последнего года жизни, то с помощью (7.6.1) и (8.1.3) можно свести дело к разовой нетто-премии для дискретного пожизненного страхования или к актуарной современной стоимости пожизненной ренты:

$$P(\overline{A}_x) = \frac{id}{\delta} \cdot \frac{A_x}{1 - A_x}, \tag{9.1.10}$$

$$P(\overline{A}_x) = \frac{i}{\delta} \cdot \frac{1 - d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}. \tag{9.1.11}$$

Используя (7.5.5), мы можем выразить $P(\overline{A}_x)$ через дискретные упрощающие функции:

$$P(\overline{A}_x) = \frac{i}{\delta} \cdot \frac{M_x}{N_x}. \tag{9.1.12}$$

Сравнивая (9.1.6) и (9.1.12), мы имеем:

$$P(\overline{A}_x) = \frac{i}{\delta} \cdot P_x. \tag{9.1.13}$$

Пожизненное непрерывное страхование с выплатой премий m раз в год.

Предположим, что в договоре о пожизненном страховании предусмотрено внесение премий не раз в год, а m раз в год (например, ежемесячно). Обозначим соответствующую суммарную годовую нетто-премию через $P^{(m)}(\overline{A}_x)$ (так что величина каждой премии, выплачиваемой через промежутки $1/m$, равна $P^{(m)}(\overline{A}_x)/m$). В этом случае обязательство застрахованного заключается в выплате страховой компании пожизненной ренты с частотой m. Поэтому актуарная приведенная ценность потока премий на момент заключения договора есть $P^{(m)}(\overline{A}_x) \cdot \ddot{a}_x^{(m)}$.

Обязательство страховой компании осталось неизменным; оно заключается в выплате единичной страховой суммы в момент смерти застрахованного. Актуарная приведенная ценность этого обязательства на момент заключения договора есть $\overline{A}_x$.

Принцип эквивалентности финансовых обязательств дает следующее уравнение:

$$\overline{A}_x = P^{(m)}(\overline{A}_x) \cdot \ddot{a}_x^{(m)},$$

откуда

$$P^{(m)}(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}. \tag{9.1.14}$$

С помощью формулы (9.1.3) можно выразить премию, выплачиваемую с частотой m, через ежегодную премию:

$$P^{(m)}(\overline{A}_x) = P(\overline{A}_x)\frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}.$$

Принцип эквивалентности финансовых обязательств позволяет определить величину разовой или периодической нетто-премии для широкого круга договоров страхования и пенсионных схем, содержащих специфические условия. Поскольку число возможных вариантов безгранично и они не обладают регулярной структурой, нет смысла развивать общую теорию. Важно понять принципы расчета и тогда без труда можно проанализировать любую конкретную ситуацию. При этом обычно широко используются формулы, полученные в разделах 7 и 8 для регулярных видов страхования и пожизненных рент.

9.2 Премии, учитывающие расходы

Заключение и поддержание договоров страхования и договоров пенсионного обеспечения связаны с определенными расходами: комиссионные агентам, подготовка документации, уплата налогов, анализ страховых случаев перед выплатой страховых возмещений, оплата судебных издержек в спорных случаях и т.д. Некоторые из этих расходов фиксированы (например, оформление документации), некоторые составляют определенный процент от величины премии (например, комиссионные агентам или налоги), некоторые составляют определенный процент от величины страхового возмещения (например, судебные издержки в спорных случаях). Кроме того, часть расходов связана только с моментом заключения договора, а часть появляется периодически при получении очередных премий. Некоторые расходы возникают только при наступлении страховых случаев.

Все эти расходы в конечном счете оплачиваются страхователями за счет определенного увеличения нетто-премий. Очень важно, чтобы это увеличение не было произвольным, а рассчитывалось надлежащим образом. Слишком большое увеличение премий ущемляет интересы страхователей и неприемлемо с точки зрения общества; слишком малые надбавки к премии могут вызвать финансовые проблемы у компании (что также не в интересах ее клиентов).

Расходы на ведение дела можно рассматривать как специфическую форму финансовых обязательств компании. Поэтому премии, учитывающие расходы, определяются из принципа эквивалентности финансовых обязательств страховой компании или пенсионного фонда и застрахованного (участника фонда). Основные особенности расчета премий, учитывающих расходы, будут ясны из следующего иллюстративного примера.

Пример. Страховая компания заключила договор 3-летнего временного страхования жизни с человеком в возрасте $x = 25$ лет на сумму 1000 руб. с выплатой премии в начале каждого года в течение всего срока действия договора. Заключение и поддержание договора связаны со следующими расходами, которые производятся в начале каждого года действия договора:

1. Комиссионные агенту, заключившему договор: 20% от премии в момент получения первой премии и 5% от премии при получении последующих премий.

2. Подготовка документов: 15 рублей в момент заключения договора (т.е. при получении первой премии), 5 рублей при получении

последующих премий.

3. Налоги: 5% от премии.

4. Общие административные расходы: 2% от величины страховой суммы.

Кроме того, выплата страхового возмещения требует от страховой компании дополнительных расходов в размере 50 рублей.

Предполагая, что смертность описывается таблицей из раздела 5 с равномерным распределением момента смерти внутри последнего года жизни, а эффективная годовая процентная ставка $i = 25\%$, подсчитайте величину премии, учитывающей перечисленные выше расходы.

Решение. Обозначим через P искомую премию, учитывающую расходы.

Обязательства компании прежде всего заключаются в выплате 1000 рублей по договору о 3-летнем временном страховании; актуарная приведенная стоимость этого обязательства есть $1000 \cdot \overline{A}^{1}_{25:\overline{3}|}$.

Выплату комиссионных агенту можно представить как комбинацию разовой выплаты суммы $0.15P$ в момент заключения договора и 3-летней временной упреждающей пожизненной ренты с величиной ежегодных выплат $0.05P$. Поэтому актуарная приведенная стоимость этих обязательств есть $0.15P + 0.05P \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|}$.

Расходы по подготовке документов можно рассматривать как комбинацию разовой выплаты суммы 10 рублей в момент заключения договора, 3-летней временной упреждающей пожизненной ренты с величиной ежегодных выплат 5 рублей и 3-летнего временного страхования жизни с величиной страховой суммы – 50 рублей. Поэтому актуарная приведенная стоимость этих обязательств есть $10 + 5 \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|} + 50 \cdot \overline{A}^{1}_{25:\overline{3}|}$.

Выплату налогов и 2% административных расходов можно рассматривать как 3-летнюю временную упреждающую пожизненную ренту с величиной ежегодной выплаты $0.05P + 0.02 \cdot 1000 = 20 + 0.05P$. Актуарная приведенная стоимость этих обязательств есть

$$(20 + 0.05P) \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|}.$$

Итак, актуарная приведенная стоимость на момент заключения договора всех обязательств компании есть:

$$10 + 0.15P + 1050 \cdot \overline{A}^{1}_{25:\overline{3}|} + (25 + 0.1P) \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|}.$$

Обязательство застрахованного заключается в выплате 3-летней упреждающей временной пожизненной ренты величиной P; его актуарная приведенная стоимость на момент заключения договора есть

$$P \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|}.$$

Принцип эквивалентности обязательств дает:

$$P \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|} = 10 + 0.15P + 1050 \cdot \overline{A}^{1}_{25:\overline{3}|} + (25 + 0.1P) \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|},$$

откуда

$$P = \frac{10 + 1050 \cdot \overline{A}^{1}_{25:\overline{3}|} + 25 \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|}}{0.9 \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|} - 0.15}.$$

Для того, чтобы получить числовой результат, подсчитаем вначале $\ddot{a}_{25:\overline{3}|}$; в силу формулы (8.1.9) мы имеем:

$$\ddot{a}_{25:\overline{3}|} = \frac{1}{l_{25}} \left(l_{25} + v l_{26} + v^2 l_{27} \right) = 2.43670.$$

Теперь из (8.1.8),

$$A_{25:\overline{3}|} = 1 - d\ddot{a}_{25:\overline{3}|} = 0.51266.$$

Поскольку

$$A_{25:\overset{1}{\overline{3}|}} = \frac{v^3 l_{28}}{l_{25}} = 0.50949,$$

мы можем определить $A^{1}_{25:\overline{3}|}$:

$$A^{1}_{25:\overline{3}|} = A_{25:\overline{3}|} - A_{25:\overset{1}{\overline{3}|}} = 0.00317,$$

а значит, из (7.6.4) и $\overline{A}^{1}_{25:\overline{3}|}$:

$$\overline{A}^{1}_{25:\overline{3}|} = \frac{i}{\delta} A^{1}_{25:\overline{3}|} = 0.003556.$$

Теперь

$$P \approx 36 \text{ руб. } 54 \text{ коп.}$$

9.3 Расчет защитной надбавки

Как мы знаем, для защиты от случайных флуктуаций продолжительности жизни нетто-премия $p^{(n)}$ должна быть определенным образом "нагружена", т.е. полная премия $p = p^{(n)} + p^{(s)} = p^{(n)}(1+\theta)$, где $p^{(s)}$ – защитная (страховая) надбавка, а $\theta = p^{(s)}/p^{(n)}$ – относительная страховая надбавка.

Простейший метод расчета страховой надбавки к нетто-премии в случае периодических выплат премий заключается в следующем. Введем в рассмотрение современную величину убытка L, связанную с одним договором. Этот убыток определяется как разность между современной величиной v_{B} страхового возмещения или пенсии и современной величиной v_{C} потока премий. В общем случае как v_{B}, так и v_{C} зависят от нагруженной премии $p = p^{\text{n}}(1+\theta)$: $v_{\text{B}} = v_{\text{B}}(p)$, $v_{\text{C}} = v_{\text{C}}(p)$. Соответственно убыток L также зависит от p:

$$L = L(p) = v_{\text{B}}(p) - v_{\text{C}}(p).$$

Для каждого конкретного договора убыток L может быть как положителен, так и отрицателен. Нам хотелось бы, чтобы весь портфель договоров, рассматриваемый как единое целое, не приносил бы убытков (однако в отдельные моменты времени возможен отрицательный баланс). Иными словами, мы бы хотели, чтобы с большой вероятностью α суммарный убыток $S = L_1 + \ldots + L_N$, где N – число договоров, а L_i – убыток от i-го договора, был бы неположителен:

$$\mathbf{P}(S \leq 0) = \alpha.$$

Переписывая это условие в виде (мы считаем риски, связанные с различными договорами независимыми)

$$\mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} \leq -\frac{\mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}\right) = \alpha$$

и применяя гауссовское приближение, мы получим:

$$-\frac{\mathbf{E}L_1 + \ldots + \mathbf{E}L_N}{\sqrt{\mathbf{Var}L_1 + \ldots + \mathbf{Var}L_N}} = x_\alpha. \tag{9.3.1}$$

Для основных принципов назначения страховых надбавок, изученных в п.6.5, возможно введение единственного параметра k. Поэтому на самом деле уравнение (9.3.1) является уравнением относительно одной неизвестной величины k и обычно может быть легко решено.

Для того, чтобы проиллюстрировать эти общие соображения, рассмотрим, например, пожизненное страхование с выплатой страховой суммы в конце последнего года жизни и пожизненной выплатой премий в каждую годовщину заключения договора. В этом случае современная величина страхового возмещения есть $v_{\mathrm{B}} = v^{K(x)+1}$, а современная величина потока премий есть $v_{\mathrm{C}} = p(1 - v^{K(x)+1})/d$. Поэтому

$$\begin{aligned} L &= v^{K(x)+1} - p\frac{1 - v^{K(x)+1}}{d} \\ &= v^{K(x)+1}\left(1 + \frac{p}{d}\right) - \frac{p}{d} \\ &= Z_x\left(1 + \frac{p}{d}\right) - \frac{p}{d}. \end{aligned}$$

Отсюда мы имеем:

$$\mathbf{E}L = A_x - p\ddot{a}_x, \tag{9.3.2}$$

$$\mathbf{Var}L = ({}^2A_x - A_x^2)\cdot\left(1 + \frac{p}{d}\right)^2. \tag{9.3.3}$$

Предположим, что мы решили назначать страховую надбавку пропорционально нетто-премии, так что $p = (1+\theta)p^{(\mathrm{n})}$. Используя соотношения (9.1.3) и (9.1.4), формулы (9.3.2) и (9.3.3) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{E}L = A_x - (1+\theta)\cdot P(A_x)\cdot\ddot{a}_x = -\theta\cdot A_x, \tag{9.3.4}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}L &= ({}^2A_x - A_x^2)\cdot\left(1 + (1+\theta)\frac{P(A_x)}{d}\right)^2 \\ &= ({}^2A_x - A_x^2)\cdot\left(1 + (1+\theta)\frac{A_x}{1 - A_x}\right)^2 \\ &= ({}^2A_x - A_x^2)\cdot\frac{(1+\theta A_x)^2}{(1 - A_x)^2} \\ &= \mathbf{Var}L^{(0)}\cdot(1+\theta A_x)^2, \end{aligned} \tag{9.3.5}$$

где $L^{(0)}$ – потери в случае, когда нетто-премия не нагружена, так что

$$\mathbf{Var}L^{(0)} = ({}^2A_x - A_x^2)/(1 - A_x)^2.$$

Предположим, что портфель компании состоит только из договоров описанного выше вида, заключенных в начальный момент времени; пусть $x(i)$ – возраст i-го застрахованного на момент заключения договора. Тогда с помощью (9.3.4) и (9.3.5) уравнение (9.3.1) можно переписать в виде:

$$\theta\frac{\beta}{\sqrt{\lambda+2\mu\theta+\nu\theta^2}}=x_\alpha, \tag{9.3.6}$$

где

$$\lambda=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{Var}L_i^{(0)},$$

$$\mu=\sum_{i=1}^{N}A_{x(i)}\cdot\mathbf{Var}L_i^{(0)},$$

$$\nu=\sum_{i=1}^{N}A_{x(i)}^2\cdot\mathbf{Var}L_i^{(0)},$$

$$\beta=\sum_{i=1}^{N}A_{x(i)}.$$

Уравнение (9.3.6) решается без труда:

$$\theta=\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-\lambda\nu+\lambda\beta^2/x_\alpha^2}}{\beta^2/x_\alpha^2-\nu}.$$

При больших N все величины λ, μ, ν, β имеют порядок N. Поэтому приближенно можно считать, что

$$\theta=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{Var}L_i^{(0)}}}{\sum_{i=1}^{N}A_{x(i)}}\cdot x_\alpha.$$

9.4 Примеры расчетов

Пример 1. Человек в возрасте $x=35$ лет покупает пожизненную пенсию, начиная с возраста 65 лет. Пенсия величиной 1000 рублей должна выплачиваться раз в год. Плата за пенсию R вносится в виде разовой премии в момент заключения договора. При этом в случае смерти до наступления пенсионного возраста плата за пенсию R возвращается наследникам в конце года смерти. Определите R.

Решение. Обязательство участника пенсионного фонда заключается в выплате суммы R в момент заключения договора.

Обязательства пенсионного фонда заключаются в выплате отсроченной на $m = 30$ лет пожизненной ренты (ее приведенная стоимость на момент заключения договора есть $1000 \cdot {}_{30|}\ddot{a}_{35}$) и выплате возмещения R по договору дискретного временного (не более $m = 30$ лет) страхования жизни (его приведенная стоимость на момент заключения договора есть $R \cdot A^1_{35:\overline{30}|}$).

Принцип эквивалентности обязательств дает:

$$R = 1000 \cdot {}_{30|}\ddot{a}_{35} + R \cdot A^1_{35:\overline{30}|},$$

откуда

$$R = 1000 \cdot \frac{{}_{30|}\ddot{a}_{35}}{1 - A^1_{35:\overline{30}|}}.$$

Пример 2. Предположим, в дополнение к примеру 1, что в случае смерти до наступления пенсионного возраста плата за пенсию возвращается с накопленными процентами. Определите R.

Решение. Обязательства пенсионного фонда по выплате суммы R в случае смерти до 65 лет уже нельзя рассматривать как временное страхование жизни. Если человек умрет в возрасте $35 + k$ лет, $k = 0, 1, \ldots, 29$, (вероятность этого события есть $\mathbf{P}(K(35) = k)$), то пенсионный фонд выплачивает сумму $R \cdot (1+i)^{k+1}$ в момент $35+k+1$. Поэтому приведенная стоимость этой выплаты есть

$$\sum_{k=0}^{29} R(1+i)^{k+1} v^{k+1} \mathbf{P}(K(35) = k) = R \sum_{k=0}^{29} \mathbf{P}(K(35) = k)$$
$$= R \cdot \mathbf{P}(K(35) \le 29) = R \cdot \mathbf{P}(T(35) < 30).$$

Принцип эквивалентности дает:

$$R = 1000 \cdot {}_{30|}\ddot{a}_{35} + R \cdot \mathbf{P}(T(35) < 30),$$

откуда в силу (8.2.1)

$$R = 1000 \cdot \frac{{}_{30|}\ddot{a}_{35}}{1 - \mathbf{P}(T(35) < 30)}$$
$$= 1000 \cdot \frac{v^{30} \mathbf{P}(T(35) \ge 30) \ddot{a}_{65}}{\mathbf{P}(T(35) \ge 30)}$$
$$= 1000 v^{30} \ddot{a}_{65}.$$

Пример 3. Человек в возрасте x лет заключает договор пожизненного страхования с выплатой страхового возмещения в конце года смерти. Плата за страховку вносится в виде периодической премии P в каждую годовщину заключения договора. Страховое возмещение состоит из заранее оговоренной суммы C и возврата всех ранее внесенных премий без накопленных процентов. Подсчитайте величину периодической нетто-премии.

Решение. Обязательство застрахованного заключается в выплате пожизненной ренты величиной P в год. Ее актуарная стоимость в момент заключения договора есть $P \cdot \ddot{a}_x$. Обязательство страховой компании заключается в выплате суммы $C + P \cdot (K(x) + 1)$ в конце года смерти. Его можно рассматривать как комбинацию пожизненного дискретного страхования со страховой суммой C (актуарная приведенная стоимость равна $C \cdot A_x$) и дискретного возрастающего страхования с ежегодной выплатой, пропорциональной P (актуарная приведенная стоимость равна $P \cdot (IA)_x$).

Принцип эквивалентности дает:

$$P \cdot \ddot{a}_x = C \cdot A_x + P \cdot (IA)_x,$$

откуда

$$P = C \cdot \frac{A_x}{\ddot{a}_x - (IA)_x}.$$

Пример 4. Специальный договор пожизненного страхования, заключенный с человеком в возрасте x лет, гарантирует выплату суммы C, если смерть наступит в течение n ближайших лет, и суммы $C/2$, если смерть наступит позже. Плата за страховку вносится в виде ежегодных премий. Премия должна быть постоянной первые n лет и уменьшенной вдвое позже. Определите величину премии.

Решение. Обязательства компании можно рассматривать как комбинацию пожизненного страхования со страховой суммой $C/2$ и n-летнего временного страхования со страховой суммой $C/2$. Их актуарная стоимость в момент заключения договора есть

$$\frac{C}{2}\overline{A}_x + \frac{C}{2}\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}.$$

Обязательства застрахованного можно рассматривать как выплату ежегодной пожизненной ренты величиной $P/2$ и n-летней временной пожизненной ренты с ежегодной выплатой $P/2$. Их актуарная стоимость в момент заключения договора есть

$$\frac{P}{2}\ddot{a}_x + \frac{P}{2}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}.$$

Принцип эквивалентности обязательств дает:

$$\frac{P}{2}\ddot{a}_x + \frac{P}{2}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{C}{2}\overline{A}_x + \frac{C}{2}\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|},$$

откуда

$$P = C\frac{\overline{A}_x + \overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_x + \ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = C\frac{2\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{2N_x - N_{x+n}}.$$

Пример 5. Рассмотрим $N = 2500$ договоров 3-летнего смешанного дискретного страхования жизни со страховой суммой $b = 1\ 000$ рублей. Премии вносятся в каждую годовщину заключения договора в течение всего срока его действия. Считая, что смертность описывается таблицей продолжительности жизни из раздела 5, возраст всех застрахованных – 30 лет, а эффективная годовая процентная ставка $i = 25\%$, определите величину периодической премии P, которая гарантировала бы отсутствие потерь по всему портфелю с вероятностью $\alpha = 99\%$.

Решение. Обязательство застрахованного заключается в выплате 3-летней временной пожизненной ренты. Приведенная стоимость этого обязательства в момент заключения договора есть $P \cdot \ddot{Y}_{30:\overline{3}|}$ со средним значением $P \cdot \ddot{a}_{30:\overline{3}|}$. Величина $\ddot{a}_{30:\overline{3}|}$ была подсчитана в п.8.6 (пример 1):

$$\ddot{a}_{30:\overline{3}|} = \frac{1}{l_{30}}\left(l_{30} + vl_{31} + v^2 l_{32}\right) = 2.4358.$$

Отметим, кроме того, что для удвоенной интенсивности процентов

$${}^2\ddot{a}_{30:\overline{3}|} = \frac{1}{l_{30}}\left(l_{30} + v^2 l_{31} + v^4 l_{32}\right) = 2.0467.$$

Обязательство страховщика заключается в выплате страховой суммы $b = 1\ 000$ рублей в конце года смерти, если она наступит не позже, чем через 3 года после заключения договора, или в момент окончания срока действия договора, если застрахованный проживет эти 3 года. Приведенная стоимость этого обязательства в момент заключения договора есть $1000 \cdot Z_{30:\overline{3}|}$ со средним значением $1000 \cdot A_{30:\overline{3}|}$. В силу (8.1.8),

$$A_{30:\overline{3}|} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{30:\overline{3}|} = 0.51284.$$

Отметим, кроме того, что

$$^2A_{30:\overline{3}|} = 1 - (1 - v^2)^2 a_{30:\overline{3}|} = 0.2632,$$

и поэтому

$$\mathbf{Var} Z_{30:\overline{3}|} = {}^2A_{30:\overline{3}|} - \left(A_{30:\overline{3}|}\right)^2 = 0.00018928.$$

Современная величина убытка, связанного с одним договором, может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} L &= 1000 \cdot Z_{30:\overline{3}|} - P \cdot \ddot{Y}_{30:\overline{3}|} \\ &= 1000 \cdot Z_{30:\overline{3}|} - P \cdot \frac{1 - Z_{30:\overline{3}|}}{d} \\ &= \left(1000 + \frac{P}{d}\right) \cdot Z_{30:\overline{3}|} - \frac{P}{d} \\ &= (1000 + 5P) \cdot Z_{30:\overline{3}|} - 5P. \end{aligned} \tag{9.4.1}$$

Мы бы хотели, чтобы

$$\mathbf{P}(L_1 + \ldots + L_N \leq 0) = \alpha.$$

Переписывая это условие в виде

$$\mathbf{P}\left(\frac{L_1 + \ldots + L_N - N \cdot \mathbf{E}L}{\sqrt{N \cdot \mathbf{Var}L}} \leq -\frac{\sqrt{N} \cdot \mathbf{E}L}{\sqrt{\mathbf{Var}L}}\right) = \alpha$$

и используя гауссовское приближение, мы получим:

$$-\frac{\sqrt{N} \cdot \mathbf{E}L}{\sqrt{\mathbf{Var}L}} = x_\alpha. \tag{9.4.2}$$

Но в силу (9.4.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}L &= (1000 + 5P) \cdot A_{30:\overline{3}|} - 5P \\ &= 1000 \cdot A_{30:\overline{3}|} - 5P \cdot (1 - A_{30:\overline{3}|}), \\ \mathbf{Var}L &= (1000 + 5P)^2 \cdot \mathbf{Var}Z_{30:\overline{3}|}. \end{aligned}$$

Поэтому условие (9.4.2) примет вид:

$$\frac{5P\cdot(1-A_{30:\overline{3}|})-1000\cdot A_{30:\overline{3}|}}{(1000+5P)\cdot\sqrt{\mathbf{Var}Z_{30:\overline{3}|}}}=\frac{x_\alpha}{\sqrt{N}},$$

откуда

$$P=200\frac{A_{30:\overline{3}|}+x_\alpha\sqrt{\mathbf{Var}Z_{30:\overline{3}|}}\Big/\sqrt{N}}{1-A_{30:\overline{3}|}-x_\alpha\sqrt{\mathbf{Var}Z_{30:\overline{3}|}}\Big/\sqrt{N}}\approx 211 \text{ руб. } 08 \text{ коп.}$$

Поскольку нетто-премия есть

$$P_{30:\overline{3}|}=1000\frac{A_{30:\overline{3}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{3}|}}=200\frac{A_{30:\overline{3}|}}{1-A_{30:\overline{3}|}}\approx 210 \text{ руб. } 54 \text{ коп.},$$

относительная страховая надбавка есть $\theta\approx 0.26\%$.

Столь малая величина относительной страховой надбавки связана с тем, что при смешанном страховании с вероятностью крайне близкой к 1 выплата производится по окончании срока действия договора. Соответственно флуктуации, связанные со смертностью, крайне малы.

10. РАСЧЕТ ПРЕМИЙ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ

10.1 Метод денежных потоков

Рассмотрим договор страхования, заключенный в момент $t = 0$ на срок n лет. Пусть x – возраст застрахованного в момент заключения договора.

Предположим, что премия вносится в каждую годовщину заключения договора и на k-й год, $k = 1, \ldots, n$, равна P_k. Если $P_1 = P$, $P_2 = P_3 = \cdots = P_n = 0$, то мы имеем дело с разовой премией. Если $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = P$, то мы имеем дело с обычной периодической премией.

Обязательства страховщика на k-й год действия договора заключаются в выплате в конце года страховой суммы S_k, если застрахованный умер в течение этого года, и суммы M_k, если застрахованный дожил до конца этого года. Эта схема позволяет описать как частные случаи договора смешанного страхования и ренты.

Заключение и поддержание рассматриваемого договора страхования связаны с определенными расходами, которые мы учтем соответствующим уменьшением премий P_k и/или увеличением страховых выплат S_k и M_k.

Общая стоимость обязательств страхователя, приведенная на момент заключения договора, есть

$$Y_C = \sum_{k=1}^{n} P_k \cdot v^{k-1} \cdot I(T_x > k-1). \tag{10.1.1}$$

Среднее значение случайной величины Y_C, актуарная приведенная стоимость обязательств страхователя a_C, есть

$$a_C = \sum_{k=1}^{n} P_k \cdot v^{k-1} \cdot \mathbf{P}(T_x > k-1). \tag{10.1.2}$$

Общая стоимость обязательств страховщика, приведенная на момент заключения договора, есть

$$Y_{\text{B}} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ S_k \cdot v^k \cdot I(k-1 < T_x < k) + M_k \cdot v^k \cdot I(T_x > k) \right\}. \quad (10.1.3)$$

Среднее значение случайной величины Y_{B}, актуарная приведенная стоимость обязательств страховщика a_{B}, есть

$$a_{\text{B}} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ S_k \cdot v^k \cdot \mathbf{P}(k-1 < T_x < k) + M_k \cdot v^k \cdot \mathbf{P}(T_x > k) \right\}. \quad (10.1.4)$$

Теперь принцип эквивалентности обязательств

$$a_{\text{C}} - a_{\text{B}} = 0,$$

можно записать в развернутом виде:

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ P_k v^{k-1} \mathbf{P}(T_x > k-1) - S_k v^k \mathbf{P}(k-1 < T_x < k) - M_k v^k \mathbf{P}(T_x > k) \right\} = 0.$$

Поскольку

$$\mathbf{P}(k-1 < T_x < k) = \mathbf{P}(T_x > k-1) \cdot q_{x+k-1},$$
$$\mathbf{P}(T_x > k) = \mathbf{P}(T_x > k-1) \cdot p_{x+k-1},$$

это равенство можно переписать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(T_x > k-1) \cdot v^k \left\{ P_k \cdot (1+i) - S_k \cdot q_{x+k-1} - M_k \cdot p_{x+k-1} \right\} = 0. \quad (10.1.5)$$

Множитель

$$P_k \cdot (1+i) - S_k \cdot q_{x+k-1} - M_k \cdot p_{x+k-1} \equiv F_k \quad (10.1.6)$$

дает средний чистый доход страховщика за k-й год действия договора (т.е. к концу этого года), при условии, что договор действовал в начале этого года.

Соответственно $v^k F_k$ – это средний чистый доход страховщика за k-й год действия договора (т.е. к концу этого года), приведенный к моменту заключения договора, при условии, что договор действовал в начале этого года.

Поскольку $\mathbf{P}(T_x > k-1)$ можно рассматривать как вероятность того, что договор действовал в начале k-го года, принцип эквивалентности обязательств в виде (10.1.5) означает, что общий средний приведенный доход страховщика за все время действия договора равен 0.

Еще одна интерпретация формулы (10.1.5) заключается в следующем.

Введем величины

$$F_k^{(0)} = F_k \cdot \mathbf{P}(T_x > k-1). \tag{10.1.7}$$

Они дают средний чистый доход страховщика за k-й год действия договора (т.е. к концу этого года), на каждый *заключенный* договор.

Тогда равенство (10.1.5), выражающее принцип эквивалентности обязательств, можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} v^k \cdot F_k^{(0)} = 0. \tag{10.1.8}$$

Оно в другой форме выражает тот же факт, что и (10.1.5): общий средний приведенный доход страховщика за все время действия договора равен 0.

Чтобы лучше понять суть проведенных выше общих рассуждений, рассмотрим еще раз пример 3 из раздела 7.8.

В этой задаче требовалось подсчитать разовую нетто-премию P по договору 3-летнего смешанного страхования с выплатой страховой суммы $S = 1\ 000$ руб. в конце года смерти. Возраст застрахованного – $x = 25$ лет, смертность описывается таблицей продолжительности жизни из раздела 5, а эффективная годовая процентная ставка $i =$ 5%.

В разделе 7.8 мы установили, что эта премия составляет примерно 864 руб. 05 коп.

Подсчитаем для этого договора введенные выше величины; результаты расчетов удобно оформить в виде следующей таблицы:[17]

	A	B	C	D	E
1	проц.	годовая	страховая		
2	ставка	премия	сумма		
3	0.05	864.05	1000		
4					
5	год	вероятность	вероятность	годовая	проценты
6	действия	смерти	дожития	премия	
7	договора	в течение	до начала		
8		года	года		
9	k	q_{x+k-1}	${}_{k-1}p_x$	P_k	$P_k \cdot i$
10					
11	1	$1.565E-3$	1	864.05	43.20
12	2	$1.639E-3$	0.998435	0	0
13	3	$1.714E-3$	0.996799	0	0

	F	G	H	I	J
5	средние	средние	средний	средний	приведенный
6	страх.	выплаты	чистый доход	чистый доход	чистый доход
7	выплаты	по дожитию	(на действ.	(на заключ.	на заключ.
8			договор)	договор)	договор
9	$S_k q_{x+k-1}$	$M_k p_{x+k-1}$	F_k	$F_k^{(0)}$	$v^k F_k^{(0)}$
10					
11	1.565	0	905.688	905.688	862.560
12	1.639	0	−1.639	−1.636	−1.484
13	1.714	998.286	−1000.00	−996.799	−861.072
14					------
15				СУММА	0.00315

Вычисления, необходимые для заполнения этой таблицы, можно производить с помощью простого калькулятора, но обычно это делают с помощью Microsoft Excel (имея это в виду, мы перенумеровали строки таблицы числами от 1 до 15, а столбцы – буквами от A до J). Данные, содержащиеся в столбцах A,B,C,D, являются исходными данными для расчетов (впрочем, значения C12 и C13 можно подсчитать как C11*(1-B11) и C12*(1-B12) соответственно, а в D11 ввести формулу =$B$3).

Для подсчета процентов, заработанных за первый год, в ячейку E11 нужно ввести формулу =D11*$A$3. Для подсчета процентов,

[17]Чтобы разместить таблицу на листе, мы разрезали ее на две части, но фактически мы имеем дело с одной длинной таблицей.

заработанных за второй год, в ячейку E12 нужно ввести формулу =D12*$A$3. Это можно сделать и проще, просто скопировав формулу из ячейки E11; нужное изменение ссылок произойдет автоматически. Скопировав формулу из ячейки E11 в ячейку E13, мы получим формулу для подсчета процентов, заработанных за третий год.

Для подсчета размера ожидаемых страховых выплат за один год действия договора, $S_k \cdot q_{x+k-1}$, в ячейку F11 нужно ввести формулу =$C$3*B11, а затем скопировать ее в ячейки F12 и F13.

Для подсчета размера ожидаемых страховых выплат по дожитию за один год действия договора, $M_k \cdot p_{x+k-1}$, в ячейки G11 и G12 нужно ввести значения 0, а в ячейку G13 – формулу =$C$3*(1-B13).

Для подсчета среднего чистого дохода за год (на один договор, действующий в начале этого года), F_k, в ячейку H11 нужно ввести формулу =D11+E11-F11-G11, а затем скопировать ее в ячейки H12 и H13.

Для подсчета среднего чистого дохода за год (на один заключенный договор), $F_k^{(0)}$, в ячейку I11 нужно ввести формулу =H11*C11, а затем скопировать ее в ячейки I12 и I13.

Для подсчета среднего чистого дохода за год (на один заключенный договор), приведенного к моменту заключения договора, $v^k F_k^{(0)}$, в ячейку J11 нужно ввести формулу =I11/(1+$A$3)^A11, а затем скопировать ее в ячейки J12 и J13.

И наконец, для подсчета общего среднего приведенного дохода страховщика за все время действия договора в ячейку J15 нужно ввести формулу =SUM(J11:J13).

Подсчитанное значение (0.00315) практически равно 0; небольшое отклонение от нуля этой суммы вызвано тем, что мы округлили точное значение нетто-премии $P = 864.0468\ldots$ до целых копеек. Равенство общего среднего приведенного дохода страховщика нулю означает, что выполнен принцип эквивалентности обязательств.

Электронная таблица, созданная с помощью Microsoft Excel, может использоваться для подсчета нетто-премии. Поскольку принцип эквивалентности обязательств означает, что общий средний приведенный доход страховщика за все время действия договора равен 0, для определения нетто-премии нужно:

1. В меню Tools (Сервис) выбрать команду Goal Seek (Подбор параметра);

2. В появившемся окне установить:

2.1 Set cell (Установить в ячейке): $J$15 (можно просто щелкнуть мышкой по этой ячейке);

2.2 To value (Значение): 0

2.3 By changing cell (Изменяя значение ячейки): $B$3 (можно просто щелкнуть мышкой по этой ячейке);

3. Нажать OK.

Программа автоматически подсчитает искомое значение нетто-премии (864.0468...) и внесет это значение в ячейку $B$3. Если формат ячейки $B$3 описан как числовой с двумя знаками после запятой, то мы увидим округленное значение 864.05. Однако, поскольку реально значение ячейки $B$3 будет равно точному значению нетто-премии, приведенная выше таблица немного изменится и будет выглядеть следующим образом:

	A	B	C	D	E
1	проц.	годовая	страховая		
2	ставка	премия	сумма		
3	0.05	864.05	1000		
4					
5	год	вероятность	вероятность	годовая	проценты
6	действия	смерти	дожития	премия	
7	договора	в течение	до начала		
8		года	года		
9	k	q_{x+k-1}	$_{k-1}p_x$	P_k	$P_k \cdot i$
10					
11	1	$1.565E-3$	1	864.05	43.20
12	2	$1.639E-3$	0.998435	0	0
13	3	$1.714E-3$	0.996799	0	0

	F	G	H	I	J
5	средние	средние	средний	средний	приведенный
6	страх.	выплаты	чистый доход	чистый доход	чистый доход
7	выплаты	по дожитию	(на действ.	(на заключ.	на заключ.
8			договор)	договор)	договор
9	$S_k q_{x+k-1}$	$M_k p_{x+k-1}$	F_k	$F_k^{(0)}$	$v^k F_k^{(0)}$
10					
11	1.565	0	905.684	905.684	862.556
12	1.639	0	−1.639	−1.636	−1.484
13	1.714	998.286	−1000.00	−996.799	−861.072
14					------
15				СУММА	0

Поскольку в описанном выше методе центральную роль играли средние денежные потоки за k-й год действия договора, этот метод расчета премий называют методом денежных потоков (cash flow method).

10.2 Метод динамики активов

Рассмотрим еще раз общую схему страхования из предыдущего раздела. В рамках этой схемы мы записали принцип эквивалентности обязательств в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \{P_k v^{k-1} \mathbf{P}(T_x > k-1)$$
$$-S_k v^k \mathbf{P}(k-1 < T_x < k) - M_k v^k \mathbf{P}(T_x > k)\} = 0.$$

Поскольку

$$\mathbf{P}(T_x > k-1) = \frac{l_{x+k-1}}{l_x},$$
$$\mathbf{P}(k-1 < T_x < k) = \frac{d_{x+k-1}}{l_x},$$
$$\mathbf{P}(T_x > k) = \frac{l_{x+k}}{l_x},$$

это равенство можно переписать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} v^k \{P_k l_{x+k-1}(1+i) - S_k d_{x+k-1} - M_k l_{x+k}\} = 0. \qquad (10.2.1)$$

Введем частичные суммы

$$A_m^* \equiv \sum_{k=1}^{m} v^k \{P_k l_{x+k-1}(1+i) - S_k d_{x+k-1} - M_k l_{x+k}\}.$$

Они удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$A_0^* = 0,$$
$$A_k^* = A_{k-1}^* + v^k \{P_k l_{x+k-1}(1+i) - S_k d_{x+k-1} - M_k l_{x+k}\}.$$

Соответственно для величин

$$A_k \equiv (1+i)^k A_k^* \qquad (10.2.2)$$

справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &A_0 = 0, \\ &A_k = A_{k-1}(1+i) + P_k l_{x+k-1}(1+i) - S_k d_{x+k-1} - M_k l_{x+k}. \end{aligned} \qquad (10.2.3)$$

Принцип эквивалентности обязательств означает, что

$$A_n = 0.$$

Частичные суммы A_k можно интерпретировать следующим образом. Предположим, что в момент $t = 0$ страховая компания заключила l_x однотипных договоров описанного выше вида. Тогда A_k – это ожидаемые общие активы страховщика по этому портфелю в момент $t = k$ (т.е. в конце k-го года действия договора), а принцип эквивалентности обязательств означает, что общие активы страховщика по этому портфелю в момент $t = n$ равны нулю.

Чтобы лучше понять суть проведенных выше общих рассуждений, рассмотрим еще раз пример 3 из раздела 7.8.

В этой задаче требовалось подсчитать разовую нетто-премию P по договору 3-летнего смешанного страхования с выплатой страховой суммы $S = 1000$ руб. в конце года смерти. Возраст застрахованного – $x = 25$ лет, смертность описывается таблицей продолжительности жизни из раздела 5, а эффективная годовая процентная ставка $i = 5\%$.

В разделе 7.8 мы установили, что эта премия составляет примерно 864 руб. 05 коп.

Предположим, что компания заключила одновременно $N = l_{25} = 97\ 140$ однотипных договоров описанного вида.[18]

Тогда:

1. В момент $t = 0$ заключения договоров компания соберет сумму $NP = 83\ 933\ 817$ руб. К концу первого года (момент $t = 1 - 0$) эта сумма за счет процентов увеличится до $NP \cdot (1+i) = 88\ 130\ 507$ руб. 85 коп. В течение первого года умрет в среднем $Nq_{25} = l_{25}q_{25} = d_{25} = 152$ человека (так что в живых останется $N - d_{25} = l_{25} - d_{25} = l_{26} = 96\ 988$ человек), и каждому из них нужно будет выплатить 1000 руб. Общие выплаты составят 152 000 руб., и поэтому активы компании уменьшатся в момент $t = 1$ до величины 88 130 507,85-152 000=87 978 507 руб. 85 коп.

2. К концу второго года эта сумма за счет процентов увеличится до 92 377 433,24 руб. В течение второго года умрет в среднем $l_{26}q_{26} = d_{26} = 159$ человек (так что в живых к моменту $t = 2$ останется $l_{26} - d_{26} = l_{27} = 96\ 829$ человек), и каждому из них нужно будет выплатить 1000 руб. Общие выплаты составят 159 000 руб., и

[18] Отметим, что число N можно брать совершенно произвольным

поэтому активы компании уменьшатся в момент $t = 2$ до величины 92 377 433.24-159 000=92 218 433.24 руб.

3. К концу третьего года эта сумма за счет процентов увеличится до 96 829 354 руб. 90 коп. В течение третьего года умрет в среднем $l_{27}q_{27} = d_{27} = 166$ человек (так что в живых останется $l_{27} - d_{27} = l_{28} = 96\ 663$ человека) и каждому из них нужно будет выплатить 1000 руб. Общие выплаты составят 166 000 руб., и поэтому активы компании уменьшатся в момент $t = 3$ до величины 96 829 354.90-166 000=96 663 354 руб.90 коп.

Из этой суммы компания должна теперь выплатить по 1000 руб. каждому из оставшихся в живых (их число равно $l_{28} = 96\ 663$ чел.), так что активы компании уменьшатся до величины 96 663 354.9-96 663 000=354.9, т.е. практически до нуля (небольшое отклонение от нуля этой суммы вызвано тем, что мы округлили точное значение нетто-премии $P = 864.0468...$ до целых копеек).

Равенство этих активов нулю означает, что выполнен принцип эквивалентности обязательств.

Описанную выше процедуру обычно оформляют в виде таблицы следующего вида.

	A	B	C	D	E
1	проц.	годовая	страховая		
2	ставка	премия	сумма		
3	0.05	864.05	1000		
4					
5	год	число	число	активы	активы
6	действия	договоров	смертей	в начале	в
7	договора	в начале	за год	года	конце
8		года		(до премий)	года
9					
10	1	97 140	152	0	87 978 507.85
11	2	96 988	159	87 978 507.85	92 218 433.24
12	3	96 829	166	92 218 433.24	354.90

Вычисления, необходимые для заполнения этой таблицы, можно производить с помощью простого калькулятора, но (как и в методе денежных потоков) обычно это делают с помощью Microsoft Excel (имея это в виду, мы перенумеровали строки таблицы числами от 1 до 12, а столбцы – буквами от A до E). Данные, содержащиеся в столбцах A,B,C и в ячейке D10, являются исходными данными для расчетов (впрочем, значения B11 и B12 можно подсчитать как B10-C10 и B11-C11 соответственно).

Для подсчета активов в конце первого года действия договора в ячейку E10 нужно ввести формулу =(D10+$B$3*B10)*(1+$A$3)-C10*$C$3.

Для подсчета активов в конце второго года действия договора в ячейку E11 нужно ввести формулу =D11*(1+$A$3)-C11*$C$3.

Для подсчета активов в конце третьего года действия договора в ячейку E12 нужно ввести формулу =D12*(1+$A$3)-C12*$C$3-(B12-C12)*$C$3.

В ячейки D11 и D12 нужно ввести формулы =E10 и =E11 соответственно.

Электронная таблица, созданная с помощью Microsoft Excel, может использоваться для подсчета нетто-премии. Поскольку принцип эквивалентности обязательств означает, что активы в конце договора равны нулю, для определения нетто-премии нужно:

1. В меню Tools выбрать Goal Seek;
2. В появившемся окне установить:
   - 2.1 Set cell: $E$12 (можно просто щелкнуть мышкой по этой ячейке);
   - 2.2 To value: 0
   - 2.3 By changing cell: $B$3 (можно просто щелкнуть мышкой по этой ячейке);
3. Нажать OK.

Программа автоматически подсчитает искомое значение нетто-премии (864.0468...) и внесет это значение в ячейку $B$3.

Теперь приведенная выше таблица будет выглядеть следующим образом.

	A	B	C	D	E
1	проц.	годовая	страховая		
2	ставка	премия	сумма		
3	0.05	864.05	1000		
4					
5	год	число	число	активы	активы
6	действия	договоров	смертей	в начале	в
7	договора	в начале	за год	года	конце
8		года		(до премий)	года
9					
10	1	97 140	152	0	87 978 185.94
11	2	96 988	159	87 978 185.94	92 218 095.24
12	3	96 829	166	92 218 095.24	0.00

Описанный метод расчета премий базируется на анализе динамики средних активов (assets) компании по большому портфелю однотипных договоров. Поскольку при этом обычно подсчитывается доля активов (share of assets или asset-share), приходящаяся на один действующий договор, этот метод называется asset-share calculation.

10.3 Непрерывные договоры страхования

Для договора с выплатой страховой суммы в момент смерти обе описанные выше процедуры (и метод денежных потоков, и метод динамики активов) модифицируют следующим образом.

Будем считать, что момент смерти застрахованного равномерно распределен в течение последнего года жизни. Тогда стоимость единичной страховой выплаты, приведенная на конец года, будет

$$\int_0^1 e^{\delta t} dt = \frac{e^\delta - 1}{\delta} = \frac{i}{\delta}.$$

Поэтому при подсчете активов в конце года (в методе динамики активов) и баланса поступлений и выплат (в методе денежных потоков) нужно вычитать общий размер страховых выплат за год, умноженный на $\frac{i}{\delta}$.

Метод динамики активов. Чтобы проиллюстрировать эти соображения для метода динамики активов, рассмотрим еще раз пример 3 из раздела 7.8, но предположим, что страховая сумма выплачивается в момент смерти застрахованного (а не в конце последнего года жизни).

Если численные расчеты проводятся с помощью Microsoft Excel, то можно использовать таблицу из раздела 10.2, изменив формулы в ячейках E10, E11, E12: в вычитаемых C10*$C$3, C11*$C$3, C12*$C$3 нужно множитель $C$3 заменить на множитель $C$3*$A$3/LN(1+$A$3). После этого с помощью Goal Seek можно определить нетто-премию: как и в примере 3 раздела 7.8 она равна 864.1572... $\approx$ 864.16.

Соответствующая таблица выглядит следующим образом.

	A	B	C	D	E
1	проц.	годовая	страховая		
2	ставка	премия	сумма		
3	0.05	864.16	1000		
4					
5	год	число	число	активы	активы
6	действия	договоров	смертей	в начале	в
7	договора	в начале	за год	года	конце
8		года		(до премий)	года
9					
10	1	97 140	152	0	87 985 674.44
11	2	96 988	159	87 985 674.44	92 222 015.48
12	3	96 829	166	92 222 015.48	0.00

Поскольку обычно техническая процентная ставка i является величиной порядка нескольких процентов, введенный выше поправочный коэффициент $\frac{i}{\delta} \equiv \frac{i}{\ln(1+i)}$ равен $1+\frac{i}{2}+o(i)$. Поэтому на практике часто используют коэффициент $1+\frac{i}{2}$. Как нетрудно видеть, это означает уменьшение активов в конце года (по сравнению со случаем, когда страховая сумма выплачивается в конце года смерти застрахованного) на величину $S \cdot \frac{i}{2}$ (S – общая сумма страховых выплат).

На практике это приближение обычно обосновывается следующими рассуждениями. В среднем страховые суммы выплачиваются в середине года. Соответственно они зарабатывают проценты только половину года. В дискретном же случае предполагается, что страховые суммы (как часть активов компании в начале года) зарабатывают проценты весь год. Поэтому активы в конце года нужно уменьшить на величину незаработанных процентов, которая приближенно равна $S \cdot \frac{i}{2}$.

Возможна и другая аргументация. Равномерную выплату страховых сумм на протяжении года можно заменить выплатой половины суммы в начале года и половины – в конце года. Вторая половина заработает обычные проценты $\frac{S}{2} \cdot i$, а такие же проценты на первую половину нужно исключить из активов в конце года (подсчитанных для случая, когда все страховые суммы выплачиваются в конце года смерти).

Если расчеты проводятся с помощью Microsoft Excel, то можно использовать таблицу для дискретного случая, изменив формулы в ячейках E10, E11, E12 (нужно дополнительно вычесть C10*$C$3*$A$3/2, C11*$C$3*$A$3/2, C12*$C$3*$A$3/2 соответственно). После этого с помощью Goal Seek можно определить нетто-премию: она равна 864.15812..., т.е. практически совпадает с точным значением.

Соответствующая таблица выглядит следующим образом.

	A	B	C	D	E
1	проц.	годовая	страховая		
2	ставка	премия	сумма		
3	0.05	864.16	1000		
4					
5	год	число	число	активы	активы
6	действия	договоров	смертей	в начале	в
7	договора	в начале	за год	года	конце
8		года		(до премий)	года
9					
10	1	97 140	152	0	87 985 735.83
11	2	96 988	159	87 985 735.83	92 222 047.62
12	3	96 829	166	92 222 047.62	0.00

Метод денежных потоков. Чтобы проиллюстрировать расчет непрерывных договоров с помощью метода денежных потоков, рассмотрим все тот же пример 3 из раздела 7.8 (предположив, что страховая сумма выплачивается в момент смерти застрахованного, а не в конце последнего года жизни).

Для численных расчетов с помощью Microsoft Excel можно использовать таблицу из раздела 10.1, изменив формулы в ячейках H11, H12, H13: в вычитаемых F11, F12, F13 нужно добавить множитель \$A\$3/LN(1+\$A\$3). После этого с помощью Goal Seek можно определить нетто-премию: как и в примере 3 раздела 7.8 она равна 864.1572... $\approx$ 864.16.

Соответствующая таблица выглядит следующим образом.

	A	B	C	D	E
1	проц.	годовая	страховая		
2	ставка	премия	сумма		
3	0.05	864.16	1000		
4					
5	год	вероятность	вероятность	годовая	проценты
6	действия	смерти	дожития	премия	
7	договора	в течение	до начала		
8		года	года		
9	k	q_{x+k-1}	${}_{k-1}p_x$	P_k	$P_k \cdot i$
10					
11	1	$1.565E-3$	1	864.16	43.21
12	2	$1.639E-3$	0.998435	0	0
13	3	$1.714E-3$	0.996799	0	0

	F	G	H	I	J
5	средние	средние	средний	средний	приведенный
6	страх.	выплаты	чистый доход	чистый доход	чистый доход
7	выплаты	по дожитию	(на действ.	(на заключ.	на заключ.
8			договор)	договор)	договор
9	$S_k q_{x+k-1}$	$M_k p_{x+k-1}$	F_k	$F_k^{(0)}$	$v^k F_k^{(0)}$
10					
11	1.565	0	905.761	905.761	862.630
12	1.639	0	−1.680	−1.677	−1.521
13	1.714	998.286	−1000.043	−996.841	−861.109
14					– – – – – –
15				СУММА	0.00

10.4 Примеры расчетов

Пример 1. Рассмотрим договор 3-летнего смешанного дискретного страхования жизни со страховой суммой $b = 1000$ рублей.[19] Премии вносятся в каждую годовщину заключения договора в течение всего срока его действия. Считая, что смертность описывается таблицей продолжительности жизни из раздела 5, возраст застрахованного – 30 лет, а эффективная годовая процентная ставка $i = 25\%$, определите величину периодической нетто-премии P с помощью метода динамики активов.

Решение. Электронная таблица для договора с периодически выплачиваемой премией отличается от таблицы для аналогичного договора с разовой премией только тем, что при подсчете активов в конце года к активам в начале года премию нужно прибавлять каждый год.

[19] Этот продукт рассматривался в примере 5 раздела 9.4.

Поэтому для расчетов создадим следующую таблицу.

	A	B	C	D	E
1	проц.	годовая	страховая		
2	ставка	премия	сумма		
3	0.25	210.54	1 000		
4					
5	год	число	число	активы	активы
6	действия	договоров	смертей	в начале	в
7	договора	в начале	за год	года	конце
8		года		(до премий)	года
9					
10	1	96 307	190	0	25 155 180.71
11	2	96 117	199	25 155 180.71	56 540 154.16
12	3	95 918	209	56 540 154.16	0.00

Данные, содержащиеся в ячейках A3, C3, D10 и столбцах A10 – A12, B10 – B12, C10 – C12 являются исходными данными для расчетов.

Для подсчета активов в конце первого года действия договора в ячейку E10 нужно ввести формулу =(D10+$B$3*B10)*(1+$A$3)-C10*$C$3.

Для подсчета активов в начале второго года действия договора в ячейку D11 нужно ввести формулу =E10.

Для подсчета активов в конце второго года действия договора в ячейку E11 нужно ввести формулу =(D11+$B$3*B11)*(1+$A$3)-C11*$C$3 (вместо этого можно просто скопировать формулу из ячейки E10; нужное изменение ссылок произойдет автоматически).

Для подсчета активов в начале третьего года действия договора в ячейку D12 нужно ввести формулу =E11 (можно просто скопировать формулу из ячейки D11; нужное изменение ссылок произойдет автоматически).

Для подсчета активов в конце третьего года действия договора в ячейку E12 нужно ввести формулу =(D12+$B$3*B12)*(1+$A$3)-C12*$C$3 -(B12-C12)*$C$3 (последний член описывает выплаты по дожитию).

После этого с помощью Goal Seek (значение ячейки E12 должно быть равно 0) можно определить разовую нетто-премию (ячейка B3): как и в примере 5 раздела 9.4 она равна 210.53656... $\approx$ 210.54.

Пример 2. С помощью метода динамики активов подсчитайте актуарную современную стоимость 3-х летней временной пожизненной ренты, выплачиваемой раз в год в начале года в размере 1000 рублей Возраст застрахованного на момент заключения договора – 30 лет, техническая процентная ставка $i = 25\%$, а смертность описывается таблицей продолжительности жизни из раздела 5.[20]

Решение. Создадим в Microsoft Excel следующую таблицу.

	A	B	C	D	E
1	проц.	разовая	годовая		
2	ставка	премия	выплата		
3	0.25	24 358.37	10 000		
4					
5	год	число	активы	выплаты	активы
6	действия	договоров	в начале	(в начале	в
7	договора	в начале	года	года)	конце
8		года	(до выплат)		года
9					
10	1	96 307	2 345 881 200	963 070 000	1 728 514 000
11	2	96 117	1 728 514 000	961 170 000	959 180 000
12	3	95 918	959 180 000	959 180 000	0

Данные, содержащиеся в ячейках A3, C3 и столбцах A10 – A12, B10 – B12, являются исходными данными для расчетов.

Для подсчета активов в начале первого года действия договора в ячейку C10 нужно ввести формулу =\$B\$3*B10.

Для подсчета выплат (в начале первого года действия договора) в ячейку D10 нужно ввести формулу =\$C\$3*B10.

Для подсчета активов в конце первого года действия договора в ячейку E10 нужно ввести формулу =(C10-D10)*(1+\$A\$3).

Для подсчета активов в начале второго года действия договора в ячейку C11 нужно ввести формулу =E10.

Для подсчета выплат (в начале второго года действия договора) в ячейку D11 нужно ввести формулу =\$C\$3*B11 (можно просто скопировать формулу из ячейки D10; нужное изменение ссылок произойдет автоматически).

Для подсчета активов в конце второго года действия договора в ячейку E11 нужно ввести формулу =(C11-D11)*(1+\$A\$3) (можно просто скопировать формулу из ячейки E10; нужное изменение ссылок произойдет автоматически).

Для подсчета активов в начале третьего года действия договора в ячейку C12 нужно ввести формулу =E11 (можно просто скопировать формулу из ячейки C11; нужное изменение ссылок произойдет автоматически).

[20]Этот продукт рассматривался в примере 1 раздела 8.6.

Для подсчета выплат (в начале третьего года действия договора) в ячейку D12 нужно ввести формулу =$C$3*B12 (можно просто скопировать формулу из ячейки D10; нужное изменение ссылок произойдет автоматически).

Для подсчета активов в конце третьего года действия договора в ячейку E12 нужно ввести формулу =(C12-D12)*(1+$A$3) (можно просто скопировать формулу из ячейки E10; нужное изменение ссылок произойдет автоматически).

После этого с помощью Goal Seek (значение ячейки E12 должно быть равно 0) можно определить разовую нетто-премию (ячейка B3): как и в примере 1 раздела 8.6 она равна 24 358.36647... ≈ 24 358.

Пример 3. Рассмотрим договор 3-летнего временного страхования жизни с выплатой премии в начале каждого года в течение всего срока действия договора.

Заключение и поддержание договора связаны со следующими расходами, которые производятся в начале каждого года действия договора:

1. Комиссионные агенту, заключившему договор: 20% от премии в момент получения первой премии и 5% от премии при получении последующих премий.

2. Подготовка документов: 15 рублей в момент заключения договора (т.е. при получении первой премии), 5 рублей при получении последующих премий.

3. Налоги: 5% от премии.

4. Общие административные расходы: 2% от величины страховой суммы.

Кроме того, при выплате страхового возмещения компания несет расходы по подготовке документов в размере 50 рублей.

Страховая сумма – 1000 руб., возраст застрахованного – $x = 25$ лет, смертность описывается таблицей из раздела 5 с равномерным распределением момента смерти внутри последнего года жизни, а эффективная годовая процентная ставка $i = 25\%$.[21]

С помощью метода динамики активов подсчитайте величину премии, учитывающей перечисленные выше расходы.

Решение. Создадим следующую таблицу.[22]

[21] Этот продукт рассматривался в разделе 9.2.

[22] Чтобы разместить таблицу на листе, мы разрезали ее на три части, но фактически мы имеем дело с одной длинной таблицей.

	A	B	C	D	E
1	проц.	годовая	страховая		
2	ставка	премия	сумма		
3	0.25	36.54	1000		
4					
5	год	число	число	активы	общая
6		договоров	смертей	в начале	премия
7		в начале	за год	года	
8		года		(до премий)	
9					
10	1	97 140	152	0	3 549 464.99
11	2	96 988	159	−1 101 060.23	3 543 910.96
12	3	96 829	166	−607 343.73	3 538 101.15

	F	G	H	I
5	админ.	комисс.	подготовка	налоги
6	расходы	агентам	документов	
7			при получении	
8			премии	
9				
10	1 942 800	709 893.00	1 457 100	177 473.25
11	1 939 760	177 195.55	484 940	177 195.55
12	1 936 580	176 905.06	484 145	176 905.06

	J	K	L
5	подготовка	страховые	активы
6	документов	выплаты	в конце
7	при выплате		года
8	страх.сумм		
9			
10	8 514.70	170 293.96	−1 101 060.23
11	8 906.82	178 136.45	−607 343.73
12	9 298.95	185 978.93	0

Данные, содержащиеся в ячейках A3, C3, D10 и столбцах A10 – A12, B10 – B12, C10 – C12, являются исходными данными для расчетов.

Для подсчета премии, собранной в начале первого года действия договора в ячейку E10 нужно ввести формулу =B10*$B$3.

Для подсчета величины административных расходов в начале первого года действия договора в ячейку F10 нужно ввести формулу =0.02*$C$3*B10.

Для подсчета размера комиссионных агенту в начале первого года действия договора в ячейку G10 нужно ввести формулу =0.2*E10.

Для подсчета расходов по подготовке документов при получении премии в начале первого года действия договора в ячейку H10 нужно ввести формулу =15*B10.

Для подсчета размера налогов, выплачиваемых компанией в начале первого года действия договора, в ячейку I10 нужно ввести формулу =0.05*E10.

Для подсчета приведенных расходов по подготовке документов при выплате страховых возмещений по договорам, которые привели к страховому случаю в течение первого года действия, в ячейку J10 нужно ввести формулу =50*C10*$A$3/LN(1+$A$3).[23]

Для подсчета размера страховых выплат (приведенного к концу года) по договорам, которые привели к страховому случаю в течение первого года действия, в ячейку K10 нужно ввести формулу =C10*$C$3*$A$3/LN(1+$A$3).

И наконец, для подсчета активов в конце первого года действия договора в ячейку L10 нужно ввести формулу =(D10+E10-F10-G10-H10-I10)*(1+$A$3)-J10-K10.

Строки 11 и 12, соответствующие второму и третьему годам действия договора, программируются аналогично (можно просто скопировать формулы из строки 10 с очевидными изменениями для ячеек D11, D12, G11, G12 H11, H12).

После этого с помощью Goal Seek (значение ячейки L12 должно быть равно 0) можно определить искомую премию (ячейка B3): как и в разделе 9.2, она равна 36.53968... ≈ 36.54.

[23]Множитель $A$3/LN(1+$A$3) учитывает тот факт, что эти расходы производятся в случайный момент времени внутри года, а не в конце года.

11. РЕЗЕРВЫ

11.1 Понятие резерва

Рассмотрим некоторый договор страхования и примем момент его заключения за начальный момент времени. Предположим, что спустя время t договор все еще сохраняет силу (так что застрахованный еще жив) и обозначим актуарную приведенную стоимость обязательств компании (застрахованного) в этот момент через ${}_ta_{\mathrm{B}}$ (соответственно ${}_ta_{\mathrm{C}}$). Величина ${}_ta_{\mathrm{B}}$ определяет среднюю сумму, которую предстоит выплатить в будущем страховой компании по рассматриваемому договору. Только часть средств (в среднем ${}_ta_{\mathrm{C}}$) поступит от застрахованного. Недостающую сумму (в среднем ${}_ta_{\mathrm{B}} - {}_ta_{\mathrm{C}}$) компания должна покрыть из других источников. Однако, поскольку необходимость этой дополнительной суммы ясна уже в момент t, компания должна предусмотреть *резерв* (reserve) ${}_tV$ величиной ${}_ta_{\mathrm{B}} - {}_ta_{\mathrm{C}}$ в этот момент:

$$ {}_tV = {}_ta_{\mathrm{B}} - {}_ta_{\mathrm{C}} \tag{11.1.1} $$

Подчеркнем, что резерв, который определяется формулой (11.1.1), не учитывает случайных флуктуаций выплат и поступлений, связанных со случайностью времени жизни.

Определение резерва, данное выше, связано с анализом будущего (перспективного) развития событий. Поэтому метод расчета резерва непосредственно по определению называют *перспективным методом* (prospective method).

Для конкретного договора страхования с разовой нетто-премией, которая обозначена буквой A (или, в случае пожизненных рент, буквой a) с соответствующими индексами, резерв спустя время t после заключения договора обозначается ${}_tV(A)$. Кроме того, буква V может снабжаться своими индексами, которые характеризуют процесс поступления премий. Эти индексы аналогичны индексам, которые используются для обозначения периодических нетто-премий. Например, если премии вносятся с частотой m, то вверху справа ставится индекс (m); если премии платятся непрерывно, то над буквой V ставится черта и т.д. Если период выплат премий ограничен некоторым числом h, то его ставят слева вверху (а не слева внизу как при обозначении нетто-премий, т.к. это место уже занято для указания момента t). Для дискретных видов страхования букву A часто опускают и используют только символ V, но со всеми индексами, которые были у символа A.

Особо обратим внимание на следующее обстоятельство. Обычно термин "резерв" употребляется для обозначения каких-то запасов. Например, тепловая электростанция создает резервный запас угля для того, чтобы обеспечить бесперебойное функционирование агрегатов в случае сбоев в регулярных поставках топлива с шахт. Страховщик (как и любая другая компания или физическое лицо) может иметь определенный резерв финансовых средств для того, чтобы без задержек финансировать какие-нибудь непредвиденные расходы. Однако мы употребляем термин "резерв" совсем в другом смысле. *Резерв в страховании* – это измеренная в денежных единицах стоимость будущих обязательств компании. Поскольку величина этих обязательств зависит от случайных факторов, относящихся к далекому будущему, строго говоря, измерить их в настоящем вообще невозможно. Поэтому резерв – это некоторая разумная и, как правило, консервативная оценка баланса будущих расходов и доходов. Соответственно нет и не может быть однозначного определения резерва. Определение, данное выше, является одним из самых простых и наиболее распространенных.[24]

Имея в виду эти обстоятельства, было бы разумно использовать при оценке резерва завышенную смертность (в страховании и заниженную смертность – при оценке рент и пенсий), заниженную процентную ставку и т.д. Иначе говоря, оценивая будущее развитие событий, нужно быть немного пессимистом (уровень этого пессимизма обычно предписывается страховым компаниям регулирующими органами).

Если при оценке резерва используется нетто-премия и та же таблица смертности и техническая процентная ставка, что и при расчете нетто-премии, то резерв называют *нетто-резервом*, или *резервом нетто-премий* (net premium reserve).

---

[24]Подчеркнем, кроме того, что при оценке соответствия активов и обязательств следует принимать во внимание не только их денежное выражение, но и многие другие обстоятельства (например, распределение обязательств во времени и возможность реализации активов в соответствующие промежутки времени).

Если же

(1) премия, используемая при расчете резерва, учитывает расходы,

и/или

(2) при расчете резерва используется особая таблица смертности (valuation table) и/или измененная техническая процентная ставка,

то резерв называется специальным, или модифицированным.

11.2 Основные методы расчета резервов

Для простоты изложения мы будем рассматривать далее только нетто-резервы. Кроме того, мы не будем развивать теорию для максимально общей структуры договора страхования, а ограничимся той степенью общности, которая представляется нам разумной с точки зрения интересующих нас приложений и оправданной методически, так что многие из приводимых ниже результатов имеют аналоги для других типов договоров.

Численный расчет резервов с помощью метода денежных потоков. Рассмотрим общую схему страхования из раздела 10.1:

(1) договор страхования заключен в момент $t = 0$ на срок n лет;

(2) возраст застрахованного в момент заключения договора – x лет;

(3) премия вносится в каждую годовщину заключения договора и на k-й год, $k = 1, \dots, n$, равна P_k.

(4) обязательства страховщика на k-й год действия договора заключаются в выплате в конце года страховой суммы S_k, если застрахованный умер в течение этого года, и суммы M_k, если застрахованный дожил до конца этого года.

Допустим, что в конце k-го года (т.е. в момент $t = k$) договор все еще сохраняет силу (так что застрахованный еще жив и его возраст равен $x + k$).

Общая стоимость обязательств страхователя, приведенная на этот момент, есть

$$
{}_kY_{\mathrm{C}} = \sum_{j=k+1}^{n} P_j v^{j-1-k} I(T_{x+k} > j - 1 - k). \qquad (11.2.1)
$$

Среднее значение случайной величины ${}_kY_{\mathrm{C}}$, актуарная приведенная стоимость обязательств страхователя ${}_ka_{\mathrm{C}}$, есть

$$ {}_ka_{\mathrm{C}} = \sum_{j=k+1}^{n} P_j v^{j-1-k} \mathbf{P}(T_{x+k} > j-1-k). \qquad (11.2.2) $$

Общая стоимость обязательств страховщика, приведенная на момент k, есть

$$ \begin{aligned} {}_kY_{\mathrm{B}} = \sum_{j=k+1}^{n} &\left\{ S_j v^{j-k} I(j-1-k < T_{x+k} < j-k) \right. \\ &\left. + M_j v^{j-k} I(T_{x+k} > j-k) \right\}. \end{aligned} \qquad (11.2.3) $$

Среднее значение случайной величины ${}_kY_{\mathrm{B}}$, актуарная приведенная стоимость обязательств страховщика ${}_ka_{\mathrm{B}}$, есть

$$ \begin{aligned} {}_ka_{\mathrm{B}} = \sum_{j=k+1}^{n} &\left\{ S_j v^{j-k} \mathbf{P}(j-1-k < T_{x+k} < j-k) \right. \\ &\left. + M_j v^{j-k} \mathbf{P}(T_{x+k} > j-k) \right\}. \end{aligned} \qquad (11.2.4) $$

Теперь для резерва в конце k-го года действия договора мы имеем:

$$ \begin{aligned} {}_kV &\equiv {}_ka_{\mathrm{B}} - {}_ka_{\mathrm{C}} \\ &= \sum_{j=k+1}^{n} \left\{ S_j v^{j-k} \mathbf{P}(j-1-k < T_{x+k} < j-k) \right. \\ &\left. + M_j v^{j-k} \mathbf{P}(T_{x+k} > j-k) - P_j v^{j-k-1} \mathbf{P}(T_{x+k} > j-1-k) \right\}. \end{aligned} \qquad (11.2.5) $$

Поскольку

$$ \begin{aligned} \mathbf{P}(j-1-k < T_{x+k} < j-k) &= \mathbf{P}(T_{x+j} > j-1-k) \cdot q_{x+j-1}, \\ \mathbf{P}(T_{x+k} > j-k) &= \mathbf{P}(T_{x+k} > j-1-k) \cdot p_{x+j-1}, \\ \mathbf{P}(T_{x+k} > j-1-k) &= \frac{\mathbf{P}(T_x > j-1)}{\mathbf{P}(T_x > k)} \end{aligned} $$

это равенство можно переписать в виде:

$$ \begin{aligned} {}_kV &= -\sum_{j=k+1}^{n} v^{j-k} \mathbf{P}(T_{x+k} > j-1-k) F_j \\ &= -\frac{1}{v^k \mathbf{P}(T_x > k)} \sum_{j=k+1}^{n} v^j \mathbf{P}(T_x > j-1) F_j. \end{aligned} \qquad (11.2.6) $$

где, как мы определили в разделе 10.1,

$$F_j \equiv P_j \cdot (1+i) - S_j \cdot q_{x+j-1} - M_j \cdot p_{x+j-1}$$

является средним чистым доходом страховщика за j-й год действия договора (т.е. к концу этого года), при условии, что договор действовал в начале этого года. Соответственно, $-F_j$ – это ожидаемые чистые выплаты, т.е. средние обязательства за этот год.

Формула (11.2.6) имеет простую интерпретацию. Именно, для договора, заключенного в момент $t = 0$, величина

$$-v^j \mathbf{P}(T_x > j-1) F_j$$

равна средним чистым выплатам в течение j-го года действия договора, приведенным к моменту его заключения. Поэтому

$$- \sum_{j=k+1}^{n} v^j \mathbf{P}(T_x > j-1) F_j \tag{11.2.7}$$

равна ожидаемым чистым выплатам после момента k, приведенным к моменту заключения договора (в расчете на один заключенный договор). Умножая эту величину на коэффициент накопления

$$A(x,k) \equiv \frac{1}{v^k \mathbf{P}(T_x > k)},$$

мы получим средние выплаты после момента k, приведенные к моменту k, в расчете на один договор, действующий в этот момент, т.е. резерв.

Поскольку величины (11.2.7) эффективно подсчитываются с помощью электронных таблиц, используя (11.2.6) можно с помощью метода денежных потоков численно подсчитывать и нетто-резервы.

Рекуррентная формула для резервов. Перепишем (11.2.6) в виде

$${}_kV \cdot v^k \mathbf{P}(T_x > k) = - \sum_{j=k+1}^{n} v^j \mathbf{P}(T_x > j-1) F_j.$$

Используя эту формулу, мы последовательно имеем:

$$\begin{aligned} {}_kV \cdot v^k \mathbf{P}(T_x > k) &= -v^{k+1} \mathbf{P}(T_x > k) F_{k+1} \\ &\quad - \sum_{j=k+2}^{n} v^j \mathbf{P}(T_x > j-1) F_j \\ &= -v^{k+1} \mathbf{P}(T_x > k) F_{k+1} \\ &\quad + {}_{k+1}V \cdot v^{k+1} \mathbf{P}(T_x > k+1). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathbf{P}(T_x > k+1) = \mathbf{P}(T_x > k) \cdot p_{x+k},$$

это соотношение можно привести к виду:

$$\begin{aligned} {}_kV = -P_{k+1} + vS_{k+1}q_{x+k} + vM_{k+1}p_{x+k} \\ + p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V \cdot v. \end{aligned} \tag{11.2.8}$$

Эта рекуррентная формула для резервов в конце последовательных лет действия договора имеет простое интуитивное объяснение. Каждый договор, действующий в момент k,

1. немедленно принесет в виде премии сумму P_{k+1} (индекс $k+1$ указывает, что начался $k+1$-й год действия договора)

и, кроме того,

2. с вероятностью q_{x+k} приведет к выплате страховой суммы S_{k+1} в момент $k+1$ (ее приведенная стоимость в момент k равна v),

3. а с вероятностью p_{x+k} будет действовать и в момент $k+1$, что потребует

3.1 выплаты суммы M_{k+1} (ее приведенная стоимость в момент k равна vM_{k+1}).

и

3.2 (в среднем) наличия суммы ${}_{k+1}V$ для выполнения страховщиком своих обязательств после момента $k+1$ (ее приведенная стоимость в момент k равна $v \cdot {}_{k+1}V$).

Поэтому средняя сумма, необходимая страховщику в момент k для выполнения своих обязательств по договору, равна

$$-P_{k+1} + vS_{k+1}q_{x+k} + vM_{k+1}p_{x+k} + p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V \cdot v.$$

Это и есть резерв ${}_kV$ в момент k.

Численный расчет резервов с помощью метода динамики активов. Рассмотрим рекуррентную формулу (11.2.8) для резервов в конце последовательных лет действия договора. Заменяя k на $k-1$, умножая почленно на l_{x+k-1} и перегруппировывая члены, мы можем переписать ее в виде:

$$\begin{aligned} l_{x+k} \cdot {}_kV = l_{x+k-1} \cdot {}_{k-1}V \cdot (1+i) \\ + P_k \cdot l_{x+k-1} \cdot (1+i) - d_{x+k-1}S_k - l_{x+k}M_k. \end{aligned} \tag{11.2.9}$$

Сопоставим это соотношение с рекуррентной формулой (10.2.3) для средних чистых активов страховщика в момент k по портфелю из

l_x однотипных договоров, заключенных в момент $t = 0$. Нетрудно видеть, что при замене $l_{x+k} \cdot {}_kV = A_k$, уравнение (11.2.9) превратится в (10.2.3). Кроме того, $l_x \cdot {}_0V_x = 0 = A_0$.

Таким образом, можно гарантировать, что нетто-резерв в конце k-го года действия договора, ${}_kV$, дается формулой

$${}_kV = \frac{A_k}{l_{x+k}},$$

т.е. может рассматриваться как средняя сумма, накопленная к моменту k на один действующий договор.

Отсюда, в частности, следует, что резервы можно численно подсчитывать и с помощью метода динамики активов. Поэтому, если таблицу для расчета нетто-премии методом динамики средних активов дополнить еще одним столбцом, дающим долю активов в конце года в расчете на один действующий договор, то этот столбец фактически будет содержать нетто-резерв для конца соответствующего года.

Ретроспективная формула для нетто-резерва. Если премия по некоторому виду страхования или пенсионной схеме определена из принципа эквивалентности, то в среднем компания не должна привлекать собственные средства для выполнения финансовых обязательств перед клиентами. Это означает, что резерв в момент t, необходимый для выполнения будущих финансовых обязательств по каждому еще действующему договору, должен быть равен сумме, накопленной к моменту t на каждый действующий договор.

Фактически мы уже установили этот факт как следствие рекуррентной формулы (11.2.9). Сейчас мы дадим еще один вывод этого результата.

Из формулы (11.2.6) имеем:

$$\begin{aligned}
{}_kV &= -\frac{1}{v^k \mathbf{P}(T_x > k)} \sum_{j=k+1}^{n} v^j \mathbf{P}(T_x > j-1) F_j \\
&= -\frac{1}{v^k \mathbf{P}(T_x > k)} \left(\sum_{j=1}^{n} v^j \mathbf{P}(T_x > j-1) F_j \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^{k} v^j \mathbf{P}(T_x > j-1) F_j \right).
\end{aligned}$$

В силу принципа эквивалентности

$$\sum_{j=1}^{n} v^j \mathbf{P}(T_x > j-1) F_j = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} {}_kV &= \frac{1}{v^k \mathbf{P}(T_x > k)} \sum_{j=1}^{k} v^j \mathbf{P}(T_x > j-1) F_j \\ &= A(x,k) \sum_{j=1}^{k} v^{j-1} \mathbf{P}(T_x > j-1) P_j \\ &- A(x,k) \sum_{j=1}^{k} v^j \mathbf{P}(T_x > j-1) \left(S_j \cdot q_{x+j-1} + M_j \cdot p_{x+j-1}\right) \end{aligned} \tag{11.2.10}$$

Сумма

$$\sum_{j=1}^{k} v^{j-1} \mathbf{P}(T_x > j-1) P_j$$

равна ожидаемым поступлениям от премий за k первых лет действия договора, приведенным к моменту заключения договора (в расчете на один заключенный договор). Умножая эту величину на коэффициент накопления

$$A(x,k) \equiv \frac{1}{v^k \mathbf{P}(T_x > k)},$$

мы получим средние поступления от премий за k первых лет действия договора, приведенные к моменту k, в расчете на один договор, действующий в этот момент, т.е. актуарное накопление к моменту k за счет премий.

Сумма

$$\sum_{j=1}^{k} v^j \mathbf{P}(T_x > j-1) \left(S_j \cdot q_{x+j-1} + M_j \cdot p_{x+j-1}\right)$$

равна ожидаемым выплатам по договору за k первых лет действия, приведенным к моменту заключения договора (в расчете на один заключенный договор). Умножая эту величину на коэффициент накопления

$$A(x,k) \equiv \frac{1}{v^k \mathbf{P}(T_x > k)},$$

мы получим средние выплаты за k первых лет действия договора, приведенные к моменту k, в расчете на один договор, действующий в этот момент, т.е. актуарную накопленную стоимость всех выплат к моменту k.[25]

Итак, мы можем оценивать резервы, исходя из прошлого (ретроспективного) развития событий:

$$_kV = {}_ks_{\mathrm{C}} - {}_ks_{\mathrm{B}}, \tag{11.2.11}$$

где

$$_ks_{\mathrm{C}} = A(x,k)\sum_{j=1}^{k} v^{j-1}\mathbf{P}(T_x > j-1)P_j \tag{11.2.12}$$

актуарное накопление к моменту k за счет премий, а

$$_ks_{\mathrm{B}} = A(x,k)\sum_{j=1}^{k} v^{j}\mathbf{P}(T_x > j-1)\left(S_j \cdot q_{x+j-1} + M_j \cdot p_{x+j-1}\right) \tag{11.2.13}$$

актуарная накопленная стоимость в момент k всех выплат на промежутке $(0,k)$.[26]

Описанный метод расчета резервов и формула (11.2.10) называются *ретроспективными* (retrospective).

Ретроспективная формула удобна при расчете резервов для отсроченных видов страхования и рент до наступления периода страховых выплат. В этом случае резерв – это просто актуарная накопленная стоимость всех предыдущих премий.

Ретроспективный взгляд на резерв позволяет дать еще один вывод рекуррентной формулы для резервов.

Предположим, что в момент $t = 0$ страховщик заключил большое число l_x однотипных договоров описанного вида страхования и возраст всех застрахованных – x лет. К моменту k будет действовать l_{x+k} договоров, а возраст застрахованных будет равен $x + k$ лет.

---

[25]Эту величину называют также *накопленной стоимостью страхования* (accumulated cost of insurance).

[26]Еще раз подчеркнем, что термин "актуарное накопление", который используется для величин $_ks_{\mathrm{C}}$ и $_ks_{\mathrm{B}}$, означает, что эти величины дают накопления за счет процентов в расчете на один *действующий* договор.

Поскольку величина ${}_kV$ дает среднюю сумму, накопленную к моменту k на один действующий договор, общие активы страховщика к этому моменту будут равны $l_{x+k} \cdot {}_kV$. В момент k по каждому из l_{x+k} действующих договоров поступит премия в размере P_{k+1}, так что суммарные активы страховщика увеличатся до

$$l_{x+k} \cdot {}_kV + l_{x+k} \cdot P_{k+1}.$$

Учитывая инвестиционный доход, к концу года (т.е. к моменту $k+1$) общие активы вырастут до

$$l_{x+k} \cdot ({}_kV + P_{k+1}) \cdot (1+i).$$

В момент $k+1$ по договорам, которые приведут к страховому случаю на промежутке $(k, k+1)$ (среднее число таких договоров равно d_{x+k}), эти средства должны дать возможность выплатить страховую сумму S_{k+1}, а по договорам, которые будут действовать и в момент $k+1$ (среднее число таких договоров равно $l_{x+k} - d_{x+k} = l_{x+k+1}$), эти средства должны дать возможность выплатить страховую сумму M_{k+1} и сформировать необходимые накопления в размере $l_{x+k+1} \cdot {}_{k+1}V$. Баланс этих денежных потоков дает равенство

$$l_{x+k} \cdot ({}_kV + P_{k+1}) \cdot (1+i) = d_{x+k}S_{k+1} + l_{x+k+1} \cdot (M_{k+1} + {}_{k+1}V),$$

которое равносильно полученной ранее формуле (11.2.9).

11.3 Резервы для регулярных видов страхования

Для регулярных видов страхования полученные выше общие соотношения для резервов принимают более конкретный вид и могут быть записаны в нескольких вариантах (которые допускают содержательную интерпретацию).

Мы продемонстрируем это на примере пожизненного страхования. Однако полученные формулы легко модифицировать для других видов страхования, а некоторые из них являются общими.

Итак, рассмотрим договор пожизненного страхования с выплатой страховой суммы в конце последнего года жизни, при котором плата за страховку вносится в каждую годовщину заключения договора. Пусть x – возраст застрахованного, а величина страховой выплаты принята в качестве единицы измерения денежных сумм. Ежегодная нетто-премия P_x по этому договору была подсчитана в п.9.1 (формула (9.1.3)):

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}. \tag{11.3.1}$$

Допустим, что спустя время t после заключения договора застрахованный еще жив и подсчитаем средние обязательства сторон. При этом будем предполагать, что число t – целое: $t = k$.

Страховая компания все еще обязана выплатить сумму 1 в конце года смерти застрахованного. Поскольку в момент k возраст застрахованного равен $x + k$, его остаточное время жизни – это T_{x+k} и поэтому обязательство компании – это выплата суммы 1 по договору дискретного пожизненного страхования человека в возрасте $x + k$ лет. Актуарная приведенная ценность этого обязательства в момент k есть A_{x+k}. Итак,

$${}_k a_{\text{В}} = A_{x+k}$$

Застрахованный все еще обязан ежегодно выплачивать сумму P_x в каждую годовщину заключения договора. Поскольку $t = k$ – целое число, первая из оставшихся выплат будет произведена в момент k. Поэтому поток премий после момента k представляет собой упреждающую пожизненную ренту с ежегодным взносом P_x, которую застрахованный платит страховой компании. Значит, актуарная приведенная стоимость в момент k пожизненного потока премий есть $P_x \cdot \ddot{a}_{x+k}$. Итак,

$${}_k a_{\text{С}} = P_x \cdot \ddot{a}_{x+k}.$$

Разность актуарной современной стоимости обязательства страховщика и актуарной современной стоимости обязательства страхователя дает величину нетто-резерва в момент k:

$${}_k V_x = A_{x+k} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+k}. \tag{11.3.2}$$

С помощью полученных ранее формул для A_x, $\ddot{a}_x$, P_x можно записать несколько вариантов основной перспективной формулы (11.3.2).

Прежде всего, используя (11.3.1), заменим в (11.3.2) величину A_{x+k} на $P_{x+k} \cdot \ddot{a}_{x+k}$ и вынесем за скобку $\ddot{a}_{x+k}$:

$${}_k V_x = (P_{x+k} - P_x) \cdot \ddot{a}_{x+k}. \tag{11.3.3}$$

Интуитивно эти преобразования имеют следующий смысл. Заменим обязательство компании выплатить сумму 1 в момент $K_{x+k} + 1$ выплатой пожизненной ренты величиной P_{x+k}. Тогда компания будет до смерти застрахованного ежегодно выплачивать сумму P_{x+k} (как эквивалент страхового возмещения) и ежегодно получать сумму P_x (как плату за страховку). Ясно, что это эквивалентно выплате застрахованному пожизненной ренты с величиной ежегодных выплат $P_{x+k} - P_x$. Поскольку в формуле (11.3.3) фигурирует разность премий, ее называют *формулой разности премий* (premium difference formula).

Из проведенных выше рассуждений, которые объясняют интуитивный смысл формулы (11.3.3), ясно, что актуарная стоимость в момент k обязательства застрахованного составляет P_x/P_{x+k} от актуарной стоимости в момент k обязательства компании (после умножения на этот коэффициент поток выплат величиной P_{x+k}, представляющий обязательство компании, превращается в поток выплат величиной P_x, который представляет обязательство застрахованного). Иными словами, будущие премии застрахованного покроют лишь эту долю обязательства компании. Оставшаяся доля, $1 - P_x/P_{x+k}$, обязательства компании не будет покрыта будущими премиями и именно она представляет собой резерв. Поскольку актуарная стоимость обязательства компании есть A_{x+k} (при непосредственном его описании как выплаты страховой суммы в конце года смерти), мы получаем еще одну формулу для резерва:

$$ {}_kV_x = \left(1 - \frac{P_x}{P_{x+k}}\right) \cdot A_{x+k}. \tag{11.3.4} $$

Так как в проведенном выше рассуждении фигурировала оплаченная доля обязательства страховой компании, формулу (11.3.4) называют *формулой оплаченного страхования* (paid-up insurance formula).

Формальное доказательство формулы оплаченного страхования элементарно: заменим в (11.3.2) величину $\ddot{a}_{x+k}$ на A_{x+k}/P_{x+k} (см. (11.3.1)) и вынесем за скобку A_{x+k}.

Рекуррентная формула для резервов в рассматриваемом случае выглядит следующим образом:

$$ {}_kV_x = vq_{x+k} - P_x + vp_{x+k} \cdot {}_{k+1}V_x. \tag{11.3.5} $$

Выше мы предполагали, что момент t, для которого подсчитывается резерв, – целое число. Рассмотрим теперь случай, когда t не является целым числом. Пусть $k = [t]$ – целая часть t, а $s = \{t\} = t - [t]$ – дробная часть t, $0 < s < 1$. Как и раньше, мы принимаем момент заключения договора в качестве начального.

Обязательства страховой компании заключаются в выплате единичной страховой суммы в конце года смерти. Однако при этом надо иметь в виду, что года отсчитываются от момента заключения договора. Таким образом, страховая сумма выплачивается в момент $k+1 = t+1-s$, если $T_{x+t} \le 1-s$; в момент $k+2 = t+2-s$, если $1-s < T_{x+t} \le 2-s$, и т.д. Поэтому актуарная стоимость обязательств компании в момент t есть

$$
\begin{aligned}
{}_t a_{\text{В}} = & v^{1-s} \mathbf{P}(T_{x+t} \le 1-s) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} v^{n+1-s} \mathbf{P}(n-s < T_{x+t} \le n+1-s).
\end{aligned}
$$

Но

$$
\mathbf{P}(n-s < T_{x+t} \le n+1-s) = {}_{1-s}p_{x+t} \cdot \mathbf{P}(K_{x+k+1} = n-1).
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
{}_t a_{\text{В}} &= v^{1-s} \cdot {}_{1-s}q_{x+t} + v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v^n \mathbf{P}(K_{x+k+1} = n-1) \\
&= v^{1-s} \cdot {}_{1-s}q_{x+t} + v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+t} \cdot A_{x+k+1}.
\end{aligned} \tag{11.3.6}
$$

Эта формула может быть получена и непосредственно, из следующих соображений.

С вероятностью ${}_{1-s}q_{x+t}$ застрахованный умрет до момента $k+1$ и поэтому в момент $k+1$ компания выплатит единичную страховую сумму. Чтобы привести эту сумму к моменту t, ее нужно умножить на $v^{k+1-t} = v^{1-s}$.

С вероятностью ${}_{1-s}p_{x+t}$ застрахованный доживет до возраста $x + t + 1 - s = x + k + 1$ лет. Актуарная приведенная стоимость в момент $k+1$ обязательств компании по этому договору есть A_{x+k+1}. Чтобы привести эту сумму к моменту t, ее нужно умножить на $v^{k+1-t} = v^{1-s}$.

Теперь соотношение (11.3.6) следует из формулы полной вероятности.

Актуарную приведенную стоимость обязательств страхователя в момент t проще всего подсчитать методом текущей выплаты.

Страхователь платит сумму P_x в момент $k+1+n$, $n = 0, 1, \dots$, если он еще жив в этот момент. Вероятность этого события есть

$$
\mathbf{P}(T_x \ge k+1+n | T_x \ge t) = \mathbf{P}(T_{x+k+1} \ge n) \cdot \mathbf{P}(T_{x+t} \ge 1-s),
$$

а сумма P_x в момент $k+1+n$ после приведения к моменту $t = k+s$ имеет ценность $P_x v^{n+1-s}$. Поэтому актуарная стоимость обязательств страхователя в момент t есть

$$\begin{aligned} {}_t a_C &= \sum_{n=0}^{\infty} P_x \cdot v^{n+1-s} \cdot \mathbf{P}(T_{x+k+1} \geq n) \cdot \mathbf{P}(T_{x+t} \geq 1-s) \\ &= v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+t} \cdot P_x \cdot \ddot{a}_{x+k+1}. \end{aligned} \tag{11.3.7}$$

Эта формула может быть получена и непосредственно, из следующих соображений.

Ближайшее поступление премии возможно в момент $k+1$, когда застрахованному исполнится $x+k+1$ лет.

С вероятностью ${}_{1-s}q_{x+t}$ застрахованный умрет до момента $k+1$ и поэтому никаких премий вносить не будет.

С вероятностью ${}_{1-s}p_{x+t}$ застрахованный доживет до возраста $x+t+1-s = x+k+1$ лет. Актуарная приведенная стоимость в момент $k+1$ обязательств страхователя по выплате премий есть $P_x \cdot \ddot{a}_{x+k+1}$. Чтобы привести эту сумму к моменту t, ее нужно умножить на $v^{k+1-t} = v^{1-s}$.

Теперь (11.3.7) следует из формулы полной вероятности.

Уравнения (11.3.6) и (11.3.7) немедленно дают следующую формулу для резерва в момент $t = k+s$, где $0 < s < 1$:

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= v^{1-s} \cdot {}_{1-s}q_{x+t} + v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+t} \cdot A_{x+k+1} \\ &\quad - v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+t} \cdot P_x \cdot \ddot{a}_{x+k+1} \\ &= v^{1-s} \cdot {}_{1-s}q_{x+t} + v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+t} \cdot {}_{k+1}V_x. \end{aligned} \tag{11.3.8}$$

Эта формула может быть получена и непосредственно, из следующих соображений.

С вероятностью ${}_{1-s}q_{x+t}$ застрахованный умрет до момента $k+1$. В этом случае в момент $k+1$ компания выплатит единичную страховую сумму, но никаких премий после момента t застрахованный вносить не будет. Поэтому необходимо предусмотреть резерв величиной v^{1-s}, который будет достаточен для выплаты суммы 1 в момент $k+1$.

С вероятностью ${}_{1-s}p_{x+t}$ застрахованный доживет до возраста $x+t+1-s = x+k+1$ лет. До этого момента не может быть никаких выплат. Поэтому абсолютные значения необходимых резервов в момент t и в момент $k+1$ одинаковы. Чтобы привести резерв ${}_{k+1}V_x$ к моменту t, его нужно умножить на v^{1-s}.

Прменяя формулу полной вероятности, мы получим (11.3.8).

Посмотрим теперь, как будет выглядеть ретроспективная формула для резерва ${}_kV_x$ (число k – целое).

Актуарное накопление за счет премий в силу результатов п.8.2 есть

$$ {}_ks_{\text{C}} = P_x \cdot \ddot{s}_{x:\overline{k}|}. $$

Выплата страховой суммы на промежутке $(0, k)$ возможна, если застрахованный умрет до момента k. Актуарная приведенная стоимость этого платежа в момент $t_0 = 0$ есть $A^{\;1}_{x:\overline{k}|}$. Чтобы определить актуарную стоимость этой выплаты в момент k, ее нужно умножить на актуарный коэффициент накопления $A(x;k) = \dfrac{1}{{}_kE_x}$:

$$ {}_ks_{\text{B}} = \frac{A^{\;1}_{x:\overline{k}|}}{{}_kE_x}. $$

Таким образом,

$$ {}_kV_x = P_x \cdot \ddot{s}_{x:\overline{k}|} - \frac{A^{\;1}_{x:\overline{k}|}}{{}_kE_x}. \tag{11.3.9} $$

Рассмотрим теперь договор пожизненного страхования с выплатой страховой суммы в момент смерти. Как и раньше, будем предполагать, что плата за страховку вносится в каждую годовщину заключения договора, а величина страховой выплаты принята в качестве единицы измерения денежных сумм. Ежегодная нетто-премия $P(\overline{A}_x)$ по этому договору была подсчитана в п.9.1 (формула (9.1.8)):

$$ P(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x}. \tag{11.3.10} $$

Допустим, что спустя время t после заключения договора застрахованный еще жив. Предполагая, что число t – целое, т.е. $t = [t] \equiv k$, подсчитаем средние обязательства сторон.

Обязательства страховой компании в момент k заключаются в выплате суммы 1 в момент смерти человека в возрасте $x + k$. Поэтому их актуарная приведенная ценность в этот момент равна $\overline{A}_{x+k}$.

Застрахованный все еще обязан ежегодно выплачивать сумму $P(\overline{A}_x)$ в каждую годовщину заключения договора. Поскольку $t =$

k – целое число, первая из оставшихся выплат будет произведена в момент k. Поэтому поток премий после момента k представляет собой упреждающую пожизненную ренту с ежегодным взносом $P(\overline{A}_x)$, которую застрахованный платит страховой компании. Значит, актуарная приведенная стоимость в момент k пожизненного потока премий есть $P(\overline{A}_x) \cdot \ddot{a}_{x+k}$.

Разность ожидаемой современной стоимости обязательств страховщика и ожидаемой современной стоимости обязательств страхователя дает величину нетто-резерва в момент k:

$$_kV(\overline{A}_x) = \overline{A}_{x+k} - P(\overline{A}_x) \cdot \ddot{a}_{x+k}. \tag{11.3.11}$$

Используя (11.3.10), из перспективной формулы (11.3.11) мы немедленно получим формулу разности резервов:

$$\begin{aligned} _kV(\overline{A}_x) &= P(\overline{A}_{x+k}) \cdot \ddot{a}_{x+k} - P(\overline{A}_x) \cdot \ddot{a}_{x+k} \\ &= \big(P(\overline{A}_{x+k}) - P(\overline{A}_x)\big) \cdot \ddot{a}_{x+k}, \end{aligned}$$

и формулу оплаченного страхования:

$$\begin{aligned} _kV(\overline{A}_x) &= \overline{A}_{x+k} - P(\overline{A}_x) \cdot \frac{\overline{A}_{x+k}}{P(\overline{A}_{x+k})} \\ &= \left(1 - \frac{P(\overline{A}_x)}{P(\overline{A}_{x+k})}\right) \cdot \overline{A}_{x+k}. \end{aligned}$$

Предположим, что момент смерти равномерно распределен внутри последнего года жизни. Тогда в силу (7.6.1) и (9.1.13) мы можем преобразовать формулу (11.3.11) следующим образом:

$$\begin{aligned} _kV(\overline{A}_x) &= \frac{i}{\delta} A_{x+k} - \frac{i}{\delta} P_x \cdot \ddot{a}_{x+k} \\ &= \frac{i}{\delta} \cdot {}_kV_x, \end{aligned} \tag{11.3.12}$$

т.е. свести дело к резерву для соответствующего дискретного страхования.

Рассмотрим теперь случай, когда число t не является целым, т.е. $t = k + s$, где $k = [t]$ – целая часть t, а $s = t - [t] = \{t\} \in (0, 1)$ – дробная часть t.

Обязательства застрахованного в момент t не отличаются от обязательств застрахованного в момент t в случае дискретного страхования жизни, с той только разницей, что вместо премии P_x платится премия $P(\overline{A}_x)$. Поэтому из формулы (11.3.7) мы имеем:

$$ {}_t a_{\mathrm{C}} = v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+t} \cdot P(\overline{A}_x) \cdot \ddot{a}_{x+k+1}. \tag{11.3.13} $$

Обязательства страховой компании в момент t заключаются в выплате в момент смерти застрахованного единичной страховой суммы. Поэтому их актуарная приведенная стоимость в момент t есть $\overline{A}_{x+t}$ (отметим, что в случае страхования с выплатой страховой суммы в момент смерти ситуация проще, чем в случае страхования с выплатой страховой суммы в конце года смерти):

$$ {}_t a_{\mathrm{B}} = \overline{A}_{x+t}. $$

Следовательно,

$$ \begin{aligned} {}_tV(\overline{A}_x) &= \overline{A}_{x+t} - v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+t} \cdot P(\overline{A}_x) \cdot \ddot{a}_{x+k+1} \\ &= \overline{A}_{x+t} - v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+t} \cdot \overline{A}_{x+k+1} \\ &+ v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+t} \cdot {}_{k+1}V(\overline{A}_x). \end{aligned} \tag{11.3.14} $$

Но

$$ \begin{aligned} \overline{A}_{x+t} &= \int_0^\infty v^a f_{x+t}(a)da \\ &= \int_0^{1-s} v^a f_{x+t}(a)da + \int_{1-s}^\infty v^a f_{x+t}(a)da \\ &= \int_0^{1-s} v^a f_{x+t}(a)da + v^{1-s} \int_0^\infty v^b f_{x+t}(1-s+b)db \\ &= \int_0^{1-s} v^a f_{x+t}(a)da + v^{1-s}\,{}_{1-s}p_{x+t} \int_0^\infty v^b f_{x+k+1}(b)db \\ &= \int_0^{1-s} v^a f_{x+t}(a)da + v^{1-s}\,{}_{1-s}p_{x+t}\overline{A}_{x+k+1}. \end{aligned} $$

Поэтому (11.3.14) можно переписать в виде:

$$ {}_tV(\overline{A}_x) = \int_0^{1-s} v^a f_{x+t}(a)da + v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+t} \cdot {}_{k+1}V(\overline{A}_x). \tag{11.3.15} $$

Это равенство допускает простую интерпретацию, подобную данной ранее интерпретации формулы (11.3.8). Она заключается в следующем. С вероятностью ${}_{1-s}p_{x+t}$ застрахованный умрет до момента $k+1$. При этом с вероятностью $f_{x+t}(a)da$ застрахованный умрет на интервале $(t+a, t+a+da)$, $0 < a < 1-s$. В этом случае в момент $t+a$ компания выплатит единичную страховую сумму, но никаких премий после момента t застрахованный вносить не будет. Поэтому в момент t необходимо предусмотреть резерв величиной v^a, который будет достаточен для выплаты суммы 1 в момент $t+a$.

С вероятностью ${}_{1-s}p_{x+t}$ застрахованный доживет до возраста $x+t+1-s = x+k+1$ лет. До этого момента не может быть никаких выплат. Поэтому абсолютные значения необходимых резервов в момент t и в момент $k+1$ одинаковы. Чтобы привести резерв ${}_{k+1}V_x$ к моменту t, его нужно умножить на v^{1-s}.

Теперь (11.3.15) следует из формулы полной вероятности.

11.4 Расчет страхового резерва

Предположим, что в некоторый момент времени t_0 портфель компании включает N независимых договоров страхования, которые были заключены соответственно $t_1, \ldots, t_N$ единиц времени тому назад. Предположим также, что премии по этим договорам определены из принципа эквивалентности, т.е. не включают страховые надбавки.

Обозначим через ${}_tV^{(n)}$ нетто-резерв по n-му договору спустя время t после его заключения. Тогда сумма $V = {}_{t_1}V^{(1)} + \ldots + {}_{t_N}V^{(N)}$ является суммарным нетто-резервом по рассматриваемому портфелю договоров в момент t_0. Эта сумма является минимальным резервом, который нужно предусмотреть в момент t_0. Однако в силу случайных флуктуаций продолжительности жизни сумма V может оказаться недостаточной для выполнения компанией своих финансовых обязательств. Таким образом, необходимо предусмотреть еще и определенный страховой резерв $V^{(S)}$. Оценить величину $V^{(S)}$ можно с помощью понятия потерь.

Рассмотрим некоторый договор страхования и допустим, что спустя время t после его заключения он все еще сохраняет силу. Обозначим приведенную современную стоимость будущих финансовых обязательств компании (страхователя) через ${}_tv_{\text{B}}$ (соответственно ${}_tv_{\text{C}}$). Разность ${}_tL = {}_tv_{\text{B}} - {}_tv_{\text{C}}$ определяет суммарную современную стоимость будущих потерь по этому договору. В отличие от потерь, введенных в п.9.3, случайная величина ${}_tL$ определяет *условные* потери, при условии, что договор еще действителен спустя время t после заключения. Поскольку $\mathbf{E}\left[{}_t v_{\mathrm{C}}\right] = {}_t a_{\mathrm{C}}$, $\mathbf{E}\left[{}_t v_{\mathrm{B}}\right] = {}_t a_{\mathrm{B}}$, верна формула:

$$\mathbf{E}\left[{}_t L\right] = {}_t V.$$

Для каждого конкретного договора убыток ${}_t L$ может быть как положителен, так и отрицателен. Нам хотелось бы, чтобы весь портфель договоров, рассматриваемый как единое целое, не приносил бы убытков (однако в отдельные моменты времени возможен отрицательный баланс). Иными словами, мы бы хотели определить резервную сумму C настолько большую, чтобы с большой вероятностью α суммарный убыток ${}_{t_1}L^{(1)} + \ldots + {}_{t_N}L^{(N)}$, был бы меньше, чем C:

$$\mathbf{P}\left({}_{t_1}L^{(1)} + \ldots + {}_{t_N}L^{(N)} \le C\right) = \alpha.$$

Перепишем это условие в виде (мы считаем риски, связанные с различными договорами независимыми):

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{N} {}_{t_k}L^{(k)} - \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}\left[{}_{t_k}L^{(k)}\right]}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{Var}\left[{}_{t_k}L^{(k)}\right]}} \le \frac{C - \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}\left[{}_{t_k}L^{(k)}\right]}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{Var}\left[{}_{t_k}L^{(k)}\right]}}\right) = \alpha.$$

Применяя гауссовское приближение для распределения центрированной и нормированной суммы, мы получим:

$$C = {}_t V + x_\alpha \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{Var}\left[{}_{t_k}L^{(k)}\right]}.$$

11.5 Доходность страхования

После того как страховщик рассчитал резервы (т.е. обязательства) по своему портфелю, он обязан иметь активы (assets), соответствующие этим обязательствам. Как правило, эти активы формируются за счет премий. Но обычно в первые года действия договоров из-за больших расходов на заключение договора, очень жестких требованияй регулирующих органов, при большей, чем ожидалось, смертности и т.д. страховщик должен привлекать дополнительные средства (использовать акционерный капитал, брать кредит в банке, пользоваться услугами перестраховочной компании и т.д.). Эти средства страховщик может вернуть в будущем, когда расходы, связанные с обслуживанием обязательств, меньше, чем чистые поступления от премий.

Чтобы проиллюстрировать эти соображения, рассмотрим общую схему страхования из раздела 10.1:

(1) договор страхования заключен в момент $t = 0$ на срок n лет;

(2) возраст застрахованного в момент заключения договора – x лет;

(3) премия вносится в каждую годовщину заключения договора и на k-й год, $k = 1, \ldots, n$, равна P_k.[27]

(4) обязательства страховщика на k-й год действия договора заключаются в выплате в конце года страховой суммы S_k, если застрахованный умер в течение этого года, и суммы M_k, если застрахованный дожил до конца этого года.

Обозначим через ${}_kV$ резерв в конце k-го года действия договора, требуемый регулирующими органами, $k = 1, \ldots, n-1$ (${}_0V = 0$, ${}_nV = 0$).[28]

Допустим, что в конце $(k-1)$-го года (т.е. в момент $t = k-1$) договор все еще сохраняет силу (так что застрахованный еще жив и его возраст равен $x+k-1$). В этот момент страховщик имеет активы, равные ${}_{k-1}V$. За k-й год действия договора (к моменту k) эти активы заработают проценты в размере ${}_{k-1}V \cdot i$.[29] Поэтому, чтобы в конце года k для действующих договоров иметь активы, соответствующие резерву ${}_kV$, необходимо (в среднем) привлечь сумму

$$\Delta V^{(k)} = p_{x+k-1} \cdot {}_kV - {}_{k-1}V \cdot (1+i).$$

Это означает, что средний чистый доход страховщика за k-й год, F_k, уменьшится до величины $F_k - \Delta V^{(k)}$ – это средний реальный доход страховщика за k-й год действия договора. Соответственно средний реальный доход страховщика за k-й год действия договора на каждый заключенный договор будет даваться формулой:

$$\sigma_k \equiv \left(F_k - \Delta V^{(k)}\right) \cdot \mathbf{P}(T_x > k-1).$$

[27] Эти премии включают все нагрузки и не обязательно подсчитаны на основе принципа эквивалентности обязательств.

[28] Процентная ставка, используемая при оценке резервов, $i_{\text{рез}}$, обычно меньше, чем процентная ставка $i_{\text{пр}}$, используемая при определении премий: $i_{\text{рез}}$ может быть величиной порядка 3%, а $i_{\text{пр}}$ – 5%.

[29] Процентная ставка i определяется инвестиционной политикой страховой компании (которая, тем не менее, регулируется органами надзора за страховой деятельностью). Величина i существенно больше, чем $i_{\text{пр}}$ и $i_{\text{рез}}$ и может быть величиной порядка 10%.

Если величина σ_k отрицательна, страховая компания должна привлечь средства в размере $-\sigma_k$ для того, чтобы иметь активы, соответствующие ее обязательствам. Если величина σ_k положительна, страховщик может рассматривать сумму σ_k как реальный доход и использовать ее на другие цели. Набор $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ называется *сигнатурой* (profit signature) рассматриваемого договора. В типичных случаях величины σ_k отрицательны для нескольких первых лет действия договора, а затем – положительны.

Таким образом, заключение и поддержание договора страхования жизни можно рассматривать как своеобразный инвестиционный проект, что, в свою очередь, предполагает оценку его доходности.

Как мы видели в разделе 1.8, доходность инвестиционного проекта можно оценивать несколькими способами.

Простейшая мера эффективности – это внутренняя ставка доходности, IRR, т.е. корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{n}(1+IRR)^{-k} \cdot \sigma_k = 0.$$

Поскольку в типичных случаях величины σ_k сначала отрицательны, а затем положительны, величина IRR однозначно определена.

Внутренняя ставка доходности, IRR, описывает доходность от вложения средств на организацию страхового бизнеса. Эта доходность должна быть больше, чем доходность i от простого инвестирования активов страховой компании (иначе не имело бы смысла организовывать страховую компанию, а можно было бы просто сразу инвестировать имеющиеся средства в те же проекты, куда предполагается вкладывать активы страховщика). Считается, что капитал, используемый для финансирования страховой деятельности должен приносить около 15% годовых. Эта ставка называется рисковой ставкой, $i_{\text{риск}}$. Если $IRR < i_{\text{риск}}$, то договор не обеспечивает требуемой доходности и поэтому нужно увеличить премию, уменьшить расходы и т.д., т.е. предпринять какие-то шаги для увеличения IRR.

11.6 Примеры расчетов

Пример 1. Докажите, что для n-летнего смешанного страхования с выплатой страховой суммы в конце года смерти резерв в момент $t = k$, $k = 0, 1, ..., n$,, может быть подсчитан по формуле

$${}_kV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Решение. Перспективный метод непосредственно дает:

$$_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|},$$

где периодическая нетто-премия $P_{x:\overline{n}|}$ определяется из соотношения:

$$0 = A_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}.$$

Поэтому

$$_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot A_{x:\overline{n}|}.$$

Используя (8.1.8), мы можем исключить из этой формулы разовые нетто-премии $A_{x+k:\overline{n-k}|}$ и $A_{x:\overline{n}|}$, что и дает искомый результат.

Пример 2. Рассмотрим договор 10-летнего временного страхования жизни, заключенный в момент $t_0 = 0$ с человеком в возрасте $x = 20$ лет. Предполагая, что премии платятся непрерывно в течение всего срока действия договора, а смертность описывается законом де Муавра с предельным возрастом $\omega = 100$, определите величину резерва нетто-премий в момент $t = 4$. Эффективная годовая процентная ставка есть $i = 9\%$.

Решение. Прежде всего подсчитаем нетто-премию $\overline{P}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})$. Используя принцип эквивалентности, мы имеем:

$$\overline{P}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\overline{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Поскольку остаточное время жизни T_x равномерно распределено на промежутке $(0, \omega - x)$,

$$\begin{aligned}
\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n e^{-\delta u} f_x(u)du \\
&= \frac{1 - v^n}{\delta(\omega - x)}, \\
\overline{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n e^{-\delta u} \mathbf{P}(T_x > u)du \\
&= \frac{(\omega - x) - (\omega - x - n)v^n - (1 - v^n)/\delta}{\delta(\omega - x)}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\overline{P}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1 - v^n}{(\omega - x) - (\omega - x - n)v^n - (1 - v^n)/\delta}.$$

Используя полученные выше формулы для $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ и $\overline{a}_{x:\overline{n}|}$, мы получим следующую формулу для нетто-резерва в момент t:

$$\begin{aligned} {}_t\overline{V}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) &= \overline{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} - \overline{P}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) \cdot \overline{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= \frac{t(1 - v^n) + nv^n(1 - v^{-t})}{\delta(\omega - x - t)[(\omega - x) - (\omega - x - n)v^n - (1 - v^n)/\delta]}. \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу числовые данные задачи ($x = 20$, $n = 10$, $t = 4$, $\omega = 100$, $i = 0.09$), мы получим:

$${}_4\overline{V}(\overline{A}^{1}_{20:\overline{10}|}) = 0.2\%.$$

Пример 3. В соответствии с договором страхования жизни 60-летнего мужчины на три года:

(1) премия, размер которой не меняется, вносится в начале каждого года действия договора,

(2) в случае смерти застрахованного в течении k–го года действия договора ($k = 1, 2, 3$), страховая сумма выплачивается в конце текущего года действия договора и составляет $b_k = 4 - k$.

При актуарных расчетах страховщик использует техническую процентную ставку $i = 5\%$ и таблицу смертности, фрагмент которой приведен ниже:

$$l_{60} = 70000,\ l_{61} = 66500,\ l_{62} = 59850,\ l_{63} = 52668.$$

Определите нетто-резерв сразу после поступления второй премии.

Решение. Прежде всего подсчитаем нетто-премию P по рассматриваемому договору.

Актуарная стоимость обязательств страховщика на момент заключения договора есть:

$$a_B = 3 \cdot q_{60}v + 2 \cdot p_{60}q_{61}v^2 + 1 \cdot p_{60}p_{61}q_{62}v^3.$$

Поскольку

$$p_{60} = \frac{l_{61}}{l_{60}} = 0.95,\ q_{60} = 1 - p_{60} = 0.05,$$

$$p_{61} = \frac{l_{62}}{l_{61}} = 0.9,\ q_{61} = 1 - p_{61} = 0.1,$$

$$p_{62} = \frac{l_{63}}{l_{62}} = 0.88,\ q_{62} = 1 - p_{62} = 0.12,$$

нетрудно подсчитать, что $a_B \approx 0.4038$.

Актуарная стоимость обязательств страхователя на момент заключения договора есть:

$$a_c = P\ddot{a}_{60:\overline{3}|}.$$

Поскольку

$$\ddot{a}_{60:\overline{3}|} = \frac{l_{60} + vl_{61} + v^2 l_{62}}{l_{60}} \approx 2.6803,$$

из принципа эквивалентности обязательств мы имеем:

$$P \approx 0.1507.$$

После уплаты второй премии приведенные обязательства страховщика составляют

$$a_B = 2 \cdot q_{61}v + 1 \cdot p_{61}q_{62}v^2 \approx 0.2884,$$

а обязательства страхователя –

$$a_C = Pp_{61}v \approx 0.1291.$$

Поэтому искомый резерв равен

$$a_B - a_C \approx 0.1593.$$

Это же значение можно получить и с помощью рекуррентной формулы для последовательных резервов:

$${}_0V = 3vq_x - P + vp_x \cdot {}_1V.$$

Так как ${}_0V = 0$,

$${}_1V = \frac{P(1+i) - 3q_x}{p_x}.$$

С другой стороны, поскольку уплата второй премии уменьшает на величину P обязательства страхователя (по сравнению с концом первого года), на эту же величину увеличиваются чистые обязательства страховщика, т.е. резерв. Таким образом, искомый резерв равен

$${}_1V + P = \frac{P(1+i+p_x) - 3q_x}{p_x} \approx 0.1593.$$

Пример 4[30]**.** Страховая компания "Наша жизнь – игра" заключила следующий специальный договор страхования жизни с человеком в возрасте 25 лет:

(1) В конце года смерти производится случайный выбор: с вероятностью 0.2 страховое возмещение равно 1000, а с вероятностью 0.8 страховое возмещение равно 0.
(2) В начале каждого года действия договора производится случайный выбор: с выроятностью 0.8 платится премия π, а с вероятностью 0.2 на текущий год страхователь освобождается от уплаты премии.
(3) Все описанные выше случайные испытания – независимы.
(4) $A_{25} = 0.0816496$, $A_{35} = 0.1287194$.
(5) $i = 0.06$.
(6) π определяется с использованием принципа эквивалентности.

Подсчитайте нетто-резерв в конце десятого года действия договора.

Решение. Пусть Z_x – стоимость страховой выплаты, приведенная на момент заключения договора. По условию,

$$Z_x = 1000 \cdot v^{K_x} J_0,$$

где случайная величина J_0 принимает значения 0 и 1 с вероятностями 0.2 и 0.8 соответственно. Поэтому актуарная приведенная стоимость обязательств страховщика есть

$$EZ_x = 1000 \cdot E\left(v^{K_x} \cdot J_0\right) = 1000 \cdot P(J_0 = 1) \cdot E\left(v^{K_x}\right) = 200 \cdot A_x.$$

Далее, пусть Y_x – общая стоимость потока премий, приведенная на момент заключения договора. По условию,

$$Y_x = \pi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot I_k \cdot I\left(T_x > k\right),$$

где случайные величины I_k независимы в совокупности и одинаково распределены по закону

$$P(I_k = 0) = 0.2, \;\; P(I_k = 1) = 0.8.$$

[30] *Course/Exam 3 – Actuarial Models,* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, May 2001, Problem 38.

Поэтому актуарная современная стоимость обязательств страховщика есть

$$\begin{aligned} EY_x &= \pi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot P(I_k = 1) \cdot P(T_x > k) \\ &= \pi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot 0.8 \cdot {}_k p_x \\ &= 0.8\pi \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = 0.8\pi \ddot{a}_x. \end{aligned}$$

Принцип эквивалентости обязательств означает, что $EZ_{25} = EY_{25}$, откуда

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{200 \cdot A_{25}}{0.8 \cdot \ddot{a}_{25}} \\ &= 250 \frac{A_{25}}{1 - A_{25}} \cdot d \approx 1.258145984. \end{aligned}$$

В конце десятого года действия договора приведенные потери по договору равны $Z_{35} - Y_{35}$. Поэтому искомый резерв есть

$$\begin{aligned} {}_{10}V &\equiv EZ_{35} - EY_{35} = 200 \cdot A_{35} - 0.8 \cdot \pi \ddot{a}_{35} \\ &= 200 \cdot A_{35} - 0.8 \cdot \pi \frac{1 - A_{35}}{d} \approx 25.74 - 15.49 = 10.25. \end{aligned}$$

Пример 5[31]**.** Человек в возрасте $x = 35$ лет покупает отложенную на 10 лет пожизненную ренту, которая будет выплачиваться непрерывно со скоростью $\rho = 1$.

Премии также платятся непрерывно; период оплаты ограничен 10 годами.

Считая, что смертность описывается законом де Муавра с предельным возрастом $\omega = 85$ лет, а $i = 0$, определите нетто-резерв к концу пятого года.

Решение. Прежде всего посчитаем скорость π, с которой платятся нетто-премии.

Так как остаточное время жизни застрахованного в момент заключения договора равномерно распределено на интервале $(0, 50)$, акту-

---

[31] *Course/Exam 3 – Actuarial Models,* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, May 2000, Problem 9.

арная современная стоимость обязательств застрахованного (страхователя) равна

$$a_C = \pi \int_0^{10} P(T_{35} > t)dt = \pi \int_0^{10} \left(1 - \frac{t}{50}\right) dt$$
$$= \pi \left(10 - \frac{t^2}{100}\Big|_0^{10}\right) = \pi \cdot (10 - 1) = 9\pi.$$

Актуарная современная стоимость обязательств страховщика есть

$$a_B = \int_{10}^{50} P(T_{35} > t)dt = \int_{10}^{50} \left(1 - \frac{t}{50}\right) dt$$
$$= 40 - \frac{t^2}{100}\Big|_{10}^{50} = 40 - 25 + 1 = 16.$$

Поэтому

$$\pi = \frac{16}{9}.$$

Поскольку до момента $t = 5$ страховщик не обязан производить страховые выплаты, искомый резерв удобно рассчитывать с помощью ретроспективной формулы:

$${}_5V = {}_5s_C,$$

где

$${}_5s_C = \pi \cdot \ddot{s}_{35:\overline{5}|} = \pi \frac{\ddot{a}_{35:\overline{5}|}}{{}_5E_{35}}$$

актуарное накопление за счет премий.

Эта величина, в свою очередь, может быть легко определена: так как $i = 0$,

$$\ddot{a}_{35:\overline{5}|} = E\min(T_{35}, 5) \equiv \mathring{e}_{35:\overline{5}|}$$
$$= \int_0^5 P(T_{35} > t)dt = \frac{19}{4},$$

а актуарный коэффициент дисконтирования

$${}_5E_{35} = P(T_{35} > 5) = 1 - \frac{5}{50} = 0.9.$$

Таким образом,

$$_5V = \frac{760}{81} \approx 9.38.$$

С равным успехом можно использовать и перспективную формулу. Преимущество этого подхода заключается в том, что мы фактически повторяем рассуждения, использовавшиеся при выводе нетто-премии.

Если застрахованный еще жив в момент $t = 5$, то его возраст равен 40 лет. Поэтому его остаточное время жизни равномерно распределено на промежутке $(0, 45)$. С другой стороны, период выплаты премий ограничен уже 5 годами. Значит, актуарная приведенная стоимость обязательств застрахованного (страхователя) равна

$$\begin{aligned}{}_5a_C &= \pi \int_0^5 P(T_{40} > t)dt = \pi \int_0^5 \left(1 - \frac{t}{45}\right) dt \\ &= \pi \left(5 - \left.\frac{t^2}{90}\right|_0^5\right) = \pi \left(5 - \frac{5}{18}\right) = \pi \cdot \frac{85}{18} \approx 8.3951.\end{aligned}$$

Актуарная приведенная стоимость обязательств страховщика равна

$$\begin{aligned}{}_5a_B &= \int_5^{45} P(T_{40} > t)dt = \int_5^{45} \left(1 - \frac{t}{45}\right) dt \\ &= 40 - \left.\frac{t^2}{90}\right|_5^{45} = 40 - \frac{45^2 - 5^2}{90} \\ &= 40 - \frac{50 \cdot 40}{90} = \frac{360 - 200}{9} = \frac{160}{9} \approx 17.7778.\end{aligned}$$

Поэтому искомый резерв равен

$$_5V \equiv {}_5a_B - {}_5a_C \approx 9.38.$$

Пример 6[32]**.** На сколько увеличится резерв за второй год действия договора по чисто дискретному договору смешанного страхования жизни на сумму $SA = 1000$ на срок $n = 3$ года с ежегодными премиями, если $q_x = q_{x+1} = 0.2$, $i = 0.06$.

---

[32] *Course/Exam 3 – Actuarial Models,* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, May 2000, Problem 26.

Решение. Прежде всего найдем ежегодные премии P.

Актуарная приведенная стоимость обязательств страховщика в момент заключения договора есть

$$a_B = SA\left(vq_x + v^2 p_x q_{x+1} + v^3 p_x p_{x+1}\right).$$

Актуарная приведенная стоимость обязательств страхователя в момент заключения договора есть

$$a_C = P\left(1 + vp_x + v^2 p_x p_{x+1}\right).$$

В силу принципа эквивалентности обязательств,

$$a_B = a_C,$$

откуда

$$P \approx 373.63.$$

Для резерва в конце первого года:

$${}_1V \cdot p_x = P \cdot (1+i) - SA \cdot q_x,$$

откуда

$${}_1V \approx 245.06.$$

Для резерва в конце второго года:

$${}_2V \cdot p_{x+1} = ({}_1V + P) \cdot (1+i) - SA \cdot q_{x+1},$$

откуда

$${}_2V \approx 569.76$$

Поэтому увеличение резерва равно 324.70.

Пример 7[33]**.** Договор смешанного страхования жизни с выплатой страховой суммы $SA = 1000$ в конце года смерти заключен на срок $n = 3$ года. Премии платятся раз в год в годовщину заключения договора. Пусть возраст застрахованного $x = 40$, $q_{40} = 0,2$, $q_{41} = 0,2$, $q_{42} = 0,25$, $i = 0,06$. Найдите нетто-резервы в конце всех лет действия договора с помощью метода динамики активов.

[33] *Course/Exam 3 – Actuarial Models*, The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, May 2000, Problem 26.

Решение. Динамику суммарных активов страховщика можно описать следующей таблицей.[34]

	A	B	C	D	E
1	проц.	годовая	страховая		
2	ставка	премия	сумма		
3	0.06	373.63	1 000		
4					
5	год	вер.	число	число	число
6	действия	смерти	договоров	смертей	договоров
7	договора		в начале	за год	в конце
8			года		года
9					
10	1	0.2	100 000	20 000	80 000
11	2	0.2	80 000	16 000	64 000
12	3	0.25	64 000	16 000	48 000

	F	G	H	I	J
5	активы	общая	страховые	активы	доля
6	в начале	премия	выплаты	в конце	активов
7	года		(в конце	года	на один
8			года)		договор
9					
10	0.00	37 363 056.55	20 000 000	19 604 839.94	245.06
11	19 604 839.94	29 890 445.24	16 000 000	36 465 002.30	569.77
12	36 465 002.30	23 912 356.19	64 000 000	0	0

С помощью Goal Seek (значение ячейки I12 должно быть равно 0) можно определить искомую премию (ячейка B3): $P \approx 373,63$. Одновременно для конца каждого года мы найдем долю активов, приходящуюся на один действующий договор, т.е. нетто-резерв:

$$ {}_1V \approx 245,06,\ {}_2V \approx 569,77,\ {}_3V = 0. $$

Поскольку $p_{x+k} = 1 - q_{x+k}$, формулу (11.2.8) можно записать в виде:

$$ ({}_kV + P_{k+1}) \cdot (1+i) = {}_{k+1}V_x + p_{x+k} \cdot M_{k+1} + q_{x+k} \cdot (S_{k+1} - {}_{k+1}V) \,. \tag{11.2.14} $$

[34] Мы предполагаем, что в начальный момент портфель компании включает 100 000 договоров этого типа. Для наших целей это значение можно выбирать произвольно.

Для интерпретации этого соотношения отметим, что в случае смерти застрахованного на протяжении промежутка $(k, k+1)$ (вероятность этого события равна q_{x+k}) договор прекращает свое действие и обязательства страховщика прекращаются. Поэтому активы страховщика, соответствующие резерву ${}_{k+1}V$, могут быть направлены на выплату страховой суммы S_{k+1}, так что необходимо дополнительно изыскать лишь сумму $S_{k+1} - {}_{k+1}V$ – именно этой суммой рискует страховщик.

Величина $S_{k+1} - {}_{k+1}V$ называется суммой под риском (sum at risk) в течение $(k+1)$-го года действия договора. Этот термин связан со следующей интерпретацией резервов. Сумма ${}_{k+1}V$ в момент $k+1$ обеспечена активами компании. Поэтому в случае смерти застрахованного на протяжении $(k+1)$-го года действия договора для выплаты страховой суммы S_{k+1} необходимо дополнительно изыскать сумму $S_{k+1} - {}_{k+1}V$ – именно этой суммой рискует страховщик.

Потери и доход от смертности. Проведенный выше анализ исходил из "среднего" варианта развития событий для страховой компании и никак не связан с фактической историей ее деятельности. В реальности, число смертей на промежутке $(k, k+1)$ может отклоняться от ожидаемого как в большую, так и в меньшую сторону. Рассмотрим последствия этого для страховой компании.

Итак, пусть к моменту k число действующих договоров равно N_k. Это означает, что страховщик должен иметь активы в размере $N_k \cdot {}_kV$. Принимая в расчет поступление новых премий в момент k и инвестиционный доход, к моменту $k+1$ страховщик будет иметь активы

$$N_k \cdot ({}_kV + P_{k+1}) \cdot (1+i) = N_k \cdot (q_{x+k}S_{k+1} + p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V) .$$

Пусть реальное число смертей на промежутке $(k, k+1)$ равно D_k. Это означает, что в момент $k+1$ страховщик должен иметь сумму $D_k \cdot S_{k+1}$ для выплаты страховых возмещений и сумму $(N_k - D_k) \cdot {}_{k+1}V$ для обеспечения обязательств по договорам, которые продолжают действовать. Если

$$N_k \cdot (q_{x+k}S_{k+1} + p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V) < D_k \cdot S_{k+1} + (N_k - D_k) \cdot {}_{k+1}V,$$

или, что то же самое,

$$D_k > N_k q_{x+k},$$

то страховщик будет вынужден привлечь дополнительные средства в размере

$$\begin{aligned} L &= D_k \cdot S_{k+1} + (N_k - D_k) \cdot {}_{k+1}V \\ &\quad - N_k \cdot \left(q_{x+k} S_{k+1} + p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V\right) \\ &= \left(D_k - N_k q_{x+k}\right)\left(S_{k+1} - {}_{k+1}V\right). \end{aligned}$$

В этом случае компания будет иметь потери от смертности. Полученная формула для потерь

$$L = \left(D_k - N_k q_{x+k}\right)\left(S_{k+1} - {}_{k+1}V\right)$$

имеет простое интуитивное объяснение.

$N_k q_{x+k}$ – это ожидаемое число смертей. Разность $D_k - N_k q_{x+k}$ дает "избыточное" число смертей. По каждой "лишней" смерти компании нужно найти сумму $S_{k+1} - {}_{k+1}V$, чтобы выплатить страховую сумму S_{k+1} (сумма ${}_{k+1}V$ имеется).

Подобным же образом, если

$$D_k < N_k q_{x+k},$$

то у страховщика высвобождаются средства в размере

$$\left(N_k q_{x+k} - D_k\right)\left(S_{k+1} - {}_{k+1}V\right).$$

В этом случае мы говорим о "доходе от смертности" на протяжении рассматриваемого периода времени.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ФАЛИН Г.И.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ И ПЕНСИОННЫХ СХЕМ

издание второе,
переработанное и дополненное

Ответственный за выпуск Юлдашев А.Р.
Корректор Старостина И.А.
Художник Юлдашев А.Р.
Оригинал-макет подготовлен в авторской редакции
в русифицированном пакете AmSLaTex версии 1.2b

Подписано к печати 15.06.2002. Формат 60x90/16
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Объем 13 усл. печ. л. Тираж 1000 экз.

Отпечатано в типографии
ЗАО «Московский издательский дом»

Квалификационный экзамен 150
Общества актуариев (США)

ISBN 586476194-X
9 785864 761946