Теория контрактов
Сборник задач с решениями [1]

Составители: преподаватели РЭШ Сергей Головань,
Сергей Гуриев, Алексей Макрушин.

24 ноября 2003 г.

[1]Предварительный вариант; все замечания и предложения направлять по адресу sguriev@nes.ru. Данный сборник содержит задачи для семестрового магистерского/аспирантского курса по теории контрактов. При составлении использовались задачи из курсов теории контрактов в РЭШ (профессор Гуриев), Harvard University (профессор Hart), Massachusetts Institute of Technology (профессоры Holmstrom, Wells), а также из учебников Salanie, Economics of contracts: A primer, Mascollel, Whinston, Green, Microeconomic Theory, Tirole, The Theory of Industrial Organization. Сборник дополняет конспекты лекций Сергея Гуриева и Андрея Сарычева. В связи с тем, что русская терминология еще не устоялась, в данном сборнике, а также в конспектах лекций и русском издании учебника Milgrom and Roberts имеют место различные переводы одних и тех же терминов. Так, например, adverse selection переводится и как "отрицательный отбор", и как "неблагоприятный отбор", moral hazard — как "оппортунистическое поведение" и "субъективный риск", и "моральный вред", incentive compatibility constraints — "ограничения совместимости стимулов" и "условия самоотбора", отсутствуют приемлемые варианты перевода терминов revelation principle и commitment.

Задача 1. *Рассмотрим следующую модель неблагоприятного отбора. Фирма нанимает на работу рабочих. Все агенты нейтральны по отношению к риску. Рабочие различаются производительностью. Издержки производства t единиц продукции рабочим типа θ равны $\theta c(t)$ ($c(0) = c'(0) = 0$, $c'(t)$, $c''(t) > 0$). Всего есть два типа рабочих — $\underline{\theta} > 0$ и $\overline{\theta} > \underline{\theta}$. Доля рабочих типа $\overline{\theta}$ равна π. Фирма предлагает рабочему контракт в виде (t, w), где t — количество произведенного товара, w — зарплата рабочего. Гарантированный уровень заработка рабочего равен 0.*

(a) *Предположим, что фирма знает тип рабочего θ. Найдите оптимальный контракт.*

(b) *Предположим теперь, что θ известно только рабочему. Найдите оптимальный контракт в этом случае. Может ли случиться так, что фирме выгодно нанимать рабочих только одного типа?*

Решение. (a) Задача максимизации прибыли:

$$\begin{aligned} t - w &\to \max \\ \text{s.t. } w - \theta c(t) &\geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что ограничение в оптимуме выполняется как равенство, и поэтому достаточно решить задачу $t - \theta c(t) \to \max$ и положить $w = \theta c(t)$.

Из условий первого порядка получим: $t^{FB} = (c')^{-1}(1/\theta)$, $w^{FB} = \theta c(t^{FB})$.

(b) В случае, когда тип рабочего неизвестен фирме, ее задача выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} &\pi(\overline{t} - \overline{w}) + (1-\pi)(\underline{t} - \underline{w}) \to \max \\ \text{s.t. } &\overline{w} - \overline{\theta} c(\overline{t}) \geq 0, && (1) \\ &\underline{w} - \underline{\theta} c(\underline{t}) \geq 0, && (2) \\ &\overline{w} - \overline{\theta} c(\overline{t}) \geq \underline{w} - \overline{\theta} c(\underline{t}), && (3) \\ &\underline{w} - \underline{\theta} c(\underline{t}) \geq \overline{w} - \underline{\theta} c(\overline{t}). && (4) \end{aligned}$$

Сложим (3) и (4), в результате получим, что $(\overline{\theta} - \underline{\theta})(c(\overline{t}) - c(\underline{t})) \leq 0$, откуда следует, что $\overline{t} \leq \underline{t}$, то есть менее производительные рабочие в оптимуме производят меньше.

Далее, применяя стандартную технику, получаем, что (2) и (3) не ограничивают, а (1) и (4) в оптимуме выполняются как равенства.

Из (1) и (4) (рассматриваемым как равенства) получаем:

$$\begin{aligned} \overline{w} &= \overline{\theta} c(\overline{t}), \\ \underline{w} &= \underline{\theta} c(\underline{t}) + \overline{\theta} c(\overline{t}) - \underline{\theta} c(\overline{t}). \end{aligned} \qquad (5)$$

Подставив (5) в максимизационную функцию, получим задачу:

$$\pi(\overline{t} - \overline{\theta} c(\overline{t})) + (1-\pi)(\underline{t} - \underline{\theta} c(\underline{t}) - \overline{\theta} c(\overline{t}) + \underline{\theta} c(\overline{t})) \to \max_{\underline{t}, \overline{t}}.$$

Условия первого порядка для этой задачи:

$$\begin{aligned} &1 - \underline{\theta} c'(\underline{t}) = 0 \implies \underline{t} = \underline{t}^{FB}, \\ &\pi(1 - \overline{\theta} c'(\overline{t})) + (1-\pi)(\underline{\theta} - \overline{\theta}) c'(\underline{t}) = 0 \implies \overline{t} < \overline{t}^{FB}. \end{aligned}$$

Заметим, что в оптимуме не может быть ситуации, когда нанимаются рабочие только одного типа. Действительно, меню контрактов $\overline{t} = 0$, $\overline{w} = 0$, $\underline{t} = \underline{t}^{FB}$, $\underline{w} = \underline{w}^{FB}$ удовлетворяет условиям индивидуальной рациональности и совместимости со стимулами. Значит такое меню неоптимально. В то же время невозможно нанять только непроизводительных рабочих, поскольку любой подходящий для них в смысле условия индивидуальной рациональности контракт подходит и для рабочих типа $\underline{\theta}$.

Задача 2. *[Hart] Рассмотрим группу, состоящую из n агентов. Агент i выбирает уровень усилий $a_i \geq 0$ ($i = 1, \ldots, n$). Общий уровень выпуска при этом составляет $x = \sum a_i$. Издержки агента i равны $c_i(a_i)$, где $c_i' > 0$ и $c_i'' > 0$. Уровень усилий публично ненаблюдаем и выбирается некооперативно.*

(a) Найдите безусловно оптимальный уровень усилий каждого агента.

(b) Покажите, что используя дифференцируемые неубывающие правила дележа $s_i(x)$, такие, что $\sum s_i(x) = x$, нельзя достичь оптимального уровня выпуска.

(c) Сформулируйте условия, которым должно удовлетворять решение в этом случае. Покажите, что условного оптимума можно достичь, используя линейные правила дележа.

(d) Положим $n = 2$, $c_1(a_1) = a_1^2$, $c_2(a_2) = 2a_2^2$. Найдите оптимальное правило дележа и равновесные уровни усилий. Вычислите чему равен выигрыш общества и сравните его с пунктом (a)

Решение. (a) Задача максимизации общего уровня благосостояния выглядит следующим образом:

$$(a_1 + \cdots + a_n) - (c_1(a_1) + \cdots + c_n(a_n)) \to \max_{a_1,\ldots,a_n \geq 0}.$$

Задача вогнута, поэтому рассмотрим условия первого порядка.

$$c_i'(a_i) = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Откуда следует, что $a_i^* = (c_i')^{-1}(1)$, $i = 1, \ldots, n$.

(b) Если агенту i достается доля $s_i(x)$, то его задача такова:

$$s_i(a_1 + \cdots + a_n) - c_i(a_i) \to \max_{a_i \geq 0}.$$

Условие первого порядка: $s_i'(x) = c_i'(a_i)$.

Сложим условия первого порядка для всех агентов, получим:

$$\sum_{i+1}^{n} s_i'(x) = \sum_{i+1}^{n} c_i'(a_i).$$

Но так как $\sum s_i(x) = x$, то $\sum c_i'(a_i) = \sum s_i'(x) = 1$, в то время, как в безусловном оптимуме $\sum c_i'(a_i) = n$.

(c) Пусть $s_i^*(x)$, $i = 1, \ldots, n$, являются оптимальными правилами дележа. Рассмотрим решение a_i^{**} и x^{**}, полученное при таких правилах. Определим новые правила $s_i(x)$ следующим образом:

$$s_i(x) = s_i^{*\prime}(x^{**})x.$$

Новые правила линейны. Их сумма равна x по построению. Кроме того, нетрудно проверить, что решение при новых правилах не изменится.

(в) Сначала рассмотрим задачу безусловной оптимизации.

$$a_1 + a_2 - (a_1^2 + 2a_2^2) \to \max_{a_1, a_2}.$$

Решение: $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/4$, уровень благосостояния равен $3/8 = 9/24$.

Задача условной оптимизации: Рассмотрим правила дележа $s_1(x) = \alpha x$, $s_2(x) = (1-\alpha)x$.

Задача 1-го агента: $\alpha(a_1 + a_2) - a_1^2 \to \max_{a_1}$, откуда $a_1 = \alpha/2$.

Задача 2-го агента: $(1-\alpha)(a_1 + a_2) - 2a_2^2 \to \max_{a_2}$, откуда $a_2 = (1-\alpha)/4$.

Общий уровень богатства равен

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{(1-\alpha)}{4} - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{(1-\alpha)}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}(1 + 4\alpha - 3\alpha^2).$$

Максимизируя по α, получаем, что $\alpha = 2/3$, и уровень богатства равен $7/24$, что меньше, чем в пункте (а).

Задача 3. *[based on Hart] Рассмотрим группу, состоящую из N агентов. Агент i производит выпуск x_i, при этом он терпит издержки $a_i x_i^2/2$. $a_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Общий уровень выпуска при этом составляет $x = \sum_{i=1}^N x_i$.*

(a) Найдите безусловно оптимальный уровень усилий каждого агента.

(b) Предположим, что индивидуальный выпуск ненаблюдаем, и платежи агентам зависят только от общего выпуска x. Предположим также, что агенты согласились делить общий выигрыш согласно линейному механизму, который дает агенту i $f_i(x) = \alpha_i x + \beta_i$, где все $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ и $\sum_{i=1}^N \beta_i = 0$. Найдите оптимальный линейный контракт α_i и β_i и сравните общественное благосостояние с безусловным оптимумом.

Решение. (а) Социально оптимальный уровень производства находится из следующей задачи максимизации

$$\sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \frac{a_i x_i^2}{2} \to \max_{x_1 \ldots x_n}.$$

Задача вогнута, поэтому для поиска решения достаточно воспользоваться условиями первого порядка. Они имеют вид

$$1 - a_i x_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Следовательно решением задачи будет

$$x_i^* = \frac{1}{a_i}, \quad i = 1, \ldots, N, \qquad x^* = \sum_{i=1}^N \frac{1}{a_i}.$$

Общественное благосостояние равно

$$W = x^* - \sum_{i=1}^N \frac{a_i x_i^{*2}}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2a_i}.$$

(b) Каждый из агентов решает задачу оптимизации

$$f_i - \frac{a_i x_i^2}{2} \to \max_{x_i}.$$

Аналогично пункту (a) из условия первого порядка следует, что

$$f_i'(x) = a_i x_i.$$

По условию, мы будем искать решение в виде $f_i(x) = \alpha_i x + \beta_i$. Тогда $x_i^* = \alpha_i / a_i$. Задача максимизации общественного благосостояния принимает вид

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{a_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i^2}{2a_i} \to \max_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \\ \text{s.t. } &\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \\ &\alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Решим эту задачу в предположении, что все агенты работают ($\alpha_i > 0$).

Выпишем условия первого порядка

$$\alpha_i = 1 - \lambda a_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad \alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, N.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{N-1}{\sum_{j=1}^N a_j}, \qquad \alpha_i^* = 1 - \frac{(N-1)a_i}{\sum_{j=1}^N a_j}.$$

При этом должно выполняться условие $\alpha_i^* > 0$

Теперь будем учитывать, что все $\alpha_i \geq 0$. Упорядочим их по возрастанию. Приведенная выше формула верна до тех пор, пока

$$\sum_{i=1}^K a_i \geq (K-1)a_K, \quad \text{то есть,} \quad a_1 + \ldots + a_{K-1} \geq (K-2)a_K.$$

Пусть

$$N^* = \arg\max\nolimits_K \left\{ K : a_K \leq \frac{a_1 + \ldots + a_{K-1}}{K-2} \right\},$$

тогда

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 - \frac{(N^*-1)}{\sum_{i=1}^{N^*} a_i} a_k, & \text{если } k \leq N^*, \\ 0, & \text{если } k > N^*. \end{cases}$$

Как видно из решения, трансферты β_i не играют никакой роли при определении оптимального выпуска, поэтому единственным условием, которому должны удовлетворять β_i^*, является $\sum \beta_i^* = 0$. Выбор β_i может повлиять только на решение участника, принимать участие в игре или нет. Так как $\alpha_i > 0$, то можно положить все β_i равными нулю.

Общественное благосостояние в этом случае равно

$$W^{SB} = x^* - \sum_{i=1}^{N^*} \frac{a_i x_i^{*2}}{2} = \sum_{i=1}^{N^*} \frac{1}{a_i} \left(\alpha_i - \frac{\alpha_i^2}{2} \right) < \sum_{i=1}^{N^*} \frac{1}{2a_i},$$

при $N^* > 1$.

Задача 4. *[MWG] Предположим, что существует всего два типа потребителей продукта некоей фирмы, θ_H и θ_L. Доля потребителей типа θ_L равна λ. Уровень полезности потребителя типа θ, получившего x единиц товара и заплатившего T, равна $u(x, T) = \theta v(x) - T$, где*

$$v(x) = \frac{1 - (1-x)^2}{2}.$$

Фирма является монополистом на рынке. Ее издержки при производстве единицы продукции равны $c > 0$.

(a) Рассмотрите задачу недискриминирующего монополиста. Выведите его оптимальную ценовую политику. Покажите, что он обслуживает всех потребителей, если либо θ_L либо λ «достаточно велики».

(b) Рассмотрите монополиста, который может различить потребителей разных типов, но может только предложить простую цену p_i каждому типу θ_i. Найдите оптимальные цены.

(c) Пусть монополист не может различить потребителей разных типов. Предполагая, что монополист обслуживает оба типа потребителей, найдите оптимальный двухчастный тариф (F, p), где F — паушальная часть тарифа, которая взимается независимо от количества приобретенного товара, p — цена единицы товара. Объясните полученный результат. При каких условиях монополист обслуживает оба типа потребителей?

(d) Найдите полностью оптимальный нелинейный тариф. Сравните количество потребляемого товара с уровнем, полученным в пунктах (a)—(c).

Решение. (a) Случай недискриминирующего монополиста. Спрос потребителя типа θ определяется из решения задачи $\theta v(x) - px \to \max_x$, откуда получаем условие первого порядка $\theta v'(x) = p$ (в условиях задачи $\theta(1-x) = p$ или $x = 1 - p/\theta$).

Общий спрос на товар (в случае двух типов потребителей) выглядит следующим образом (см рис. 1):

$$D(p) = \begin{cases} 1 - p\left(\frac{\lambda}{\theta_L} + \frac{1-\lambda}{\theta_H}\right), & \text{при } 0 \le p \le \theta_L, \\ (1-\lambda)\left(1 - \frac{p}{\theta_H}\right), & \text{при } \theta_L \le p \le \theta_H, \\ 0, & \text{при } p \ge \theta_H. \end{cases}$$

Задача монополиста $(p - c)D(p) \to \max_p$. Пусть обслуживаются оба рынка. Тогда задача превращается в следующую:

$$(p-c)\left(1 - p\left(\frac{\lambda}{\theta_L} + \frac{1-\lambda}{\theta_H}\right)\right) \to \max_p$$
$$\text{s.t. } 0 \le p \le \theta_L.$$

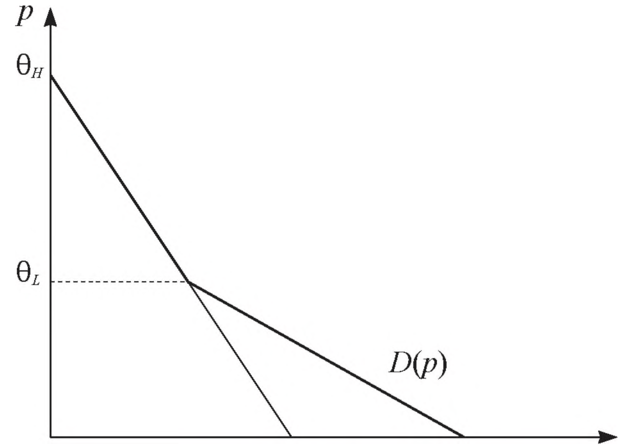

Рис. 1:

Из условий первого порядка находим

$$p = \frac{1}{2\left(\frac{\lambda}{\theta_L} + \frac{1-\lambda}{\theta_H}\right)} + \frac{c}{2}.$$

Если обслуживается только один рынок, то задача выглядит следующим образом:

$$(p-c)\left(1-\frac{p}{\theta_H}\right) \to \max_p$$
$$\text{s.t. } \theta_L \le p \le \theta_H.$$

Откуда получаем, что $p = \frac{\theta_H + c}{2}$. Если при этом $\frac{\theta_H+c}{2} < \theta_L$, то обслуживаются оба рынка. То есть, если θ_L «достаточно большое», то обслуживаются оба рынка.

Таким образом, оптимальная ценовая политика такова:

Если $\frac{\theta_H+c}{2} \le \theta_L$, то $p = \frac{c}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{\lambda}{\theta_L}+\frac{1-\lambda}{\theta_H}\right)}$.

Если $\frac{c}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{\lambda}{\theta_L}+\frac{1-\lambda}{\theta_H}\right)} \ge \theta_L$, то $p = \frac{\theta_H+c}{2}$ (обслуживается только один рынок).

Если $\frac{c}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{\lambda}{\theta_L}+\frac{1-\lambda}{\theta_H}\right)} < \theta_L < \frac{\theta_H+c}{2}$, то нужно сравнить значения прибылей в точках $p_1 = \frac{\theta_H+c}{2}$ и $p_2 = \frac{c}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{\lambda}{\theta_L}+\frac{1-\lambda}{\theta_H}\right)}$ (это два локальных максимума). В которой прибыль больше, ту цену и следует назначить.

$$p = p_1 \implies \pi_1 = (p_1 - c)(1-\lambda)\left(1 - \frac{p_1}{\theta_H}\right) = \frac{1-\lambda}{4\theta_H}(\theta_H - c)^2,$$

$$p = p_2 \implies \pi_2 = (p_2 - c)\left(1 - p_2\left(\frac{\lambda}{\theta_L} + \frac{1-\lambda}{\theta_H}\right)\right) = \left(\frac{\lambda}{\theta_L} + \frac{1-\lambda}{\theta_H}\right)\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{\lambda}{\theta_L}+\frac{1-\lambda}{\theta_H}} - c\right)^2.$$

Заметим, что с ростом λ величина $\frac{c}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{\lambda}{\theta_L}+\frac{1-\lambda}{\theta_H}\right)}$ становится меньше θ_L, и $\pi_1 \to 0$, $\pi_2 \to \frac{1}{4\theta_L}(\theta_L - c)^2 > 0$. Следовательно, если λ «достаточно велико», обслуживаются оба рынка.

(b) Случай монополиста, различающего потребителей. Монополист сталкивается с двумя различными кривыми спроса:

$$D_L = \begin{cases} 1 - \frac{p}{\theta_L}, & \text{при } 0 \le p \le \theta_L, \\ 0, & \text{при } p > \theta_L. \end{cases}$$

$$D_H = \begin{cases} 1 - \frac{p}{\theta_H}, & \text{при } 0 \le p \le \theta_H, \\ 0, & \text{при } p > \theta_H. \end{cases}$$

Решив задачу монополиста для каждого типа, получаем, что $p_L = \frac{\theta_L + c}{2}$, $p_H = \frac{\theta_H + c}{2}$, и общая прибыль равна $\pi = \frac{\lambda}{4\theta_L}(\theta_L - c)^2 + \frac{1-\lambda}{4\theta_H}(\theta_H - c)^2$.

(c) Задача монополиста в случае двухчастного тарифа при условии обслуживания обоих рынков:

$$\begin{aligned} & F + (p-c)(\lambda D_L(p) + (1-\lambda) D_H(p)) \to \max_{F,p} \\ \text{s.t. } & \theta_L v(D_L(p)) - (F + pD_L(p)) \ge 0, \\ & \theta_H v(D_H(p)) - (F + pD_H(p)) \ge 0. \end{aligned}$$

Подставив в условия участия функцию спроса, получим $F \le \frac{1}{2\theta_i}(p - \theta_i)^2$, где $i \in \{L, H\}$.

Заметим, что $\left(\frac{1}{2\theta}(p-\theta)^2\right)'_\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p^2}{\theta^2}\right) > 0$, то есть условие участия на самом деле можно оставить одно: $F \le \frac{1}{2\theta_L}(p - \theta_L)^2$, причем ясно, что в оптимуме оно выполняется как равенство.

Таким образом, задача монополиста приведена к такому виду:

$$\frac{1}{2\theta_L}(p-\theta_L)^2 + (p-c)\left(1 - p\left(\frac{\lambda}{\theta_L} + \frac{1-\lambda}{\theta_H}\right)\right) \to \max_p$$

Условия первого порядка:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\theta_L} 2(p-\theta_L) + 1 - (2p - c)\left(\frac{\lambda}{\theta_L} + \frac{1-\lambda}{\theta_H}\right) = 0, \\ p\left(\frac{2\lambda - 1}{\theta_L} + \frac{2 - 2\lambda}{\theta_H}\right) = c\left(\frac{\lambda}{\theta_L} + \frac{1-\lambda}{\theta_H}\right). \end{gathered}$$

Откуда находим цену:

$$\widehat{p} = \frac{\lambda\theta_H + (1-\lambda)\theta_L}{(2\lambda - 1)\theta_H + (2 - 2\lambda)\theta_L} c.$$

Если $\widehat{p} < \theta_L$, то оба рынка обслуживаются. $\widehat{F} = \frac{1}{2\theta_L}(\widehat{p} - \theta_L)^2$ — оптимальная «плата за вход». Она выбирается таким образом, чтобы отобрать весь потребительский избыток у покупателей типа θ_L.

Если обслуживается только один рынок, то оптимальный тариф таков:

$$p^* = c, \quad F^* = \frac{1}{2\theta_H}(\theta_H - c)^2.$$

Прибыль монополиста при этом равна F^*.

Если цена $\widehat{p} \ge \theta_L$, то выгоднее обслуживать один рынок.

Если $\widehat{p} \geq \theta_L$, то нужно сравнить прибыль при обслуживании двух рынков и одного, и выбрать наибольшую.

В этом случае тоже при росте θ_L и λ начиная с некоторого момента становится выгодно обслуживать оба рынка.

(d) Случай полностью нелинейного тарифа. Контракт, предлагаемый монополистом: (x_L, T_L), (x_H, T_H).

Задача:

$$\begin{aligned} & \lambda(T_L - cx_L) + (1-\lambda)(T_H - cx_H) \to \max_{x_L, x_H, T_L, T_H}, \\ \text{s.t. } & \theta_L v(x_L) - T_L \geq 0, \\ & \theta_H v(x_H) - T_H \geq 0, \\ & \theta_L v(x_L) - T_L \geq \theta_L v(x_H) - T_H, \\ & \theta_H v(x_H) - T_H \geq \theta_H v(x_L) - T_L. \end{aligned}$$

(Первая пара условий — условия участия, вторая пара условий — условия совместимости со стимулами.)

Применяя стандартную технику, получаем, что условие $\theta_H v(x_H) - T_H \geq 0$ выполняется автоматически. При этом условие $\theta_H v(x_H) - T_H \geq \theta_H v(x_L) - T_L$ в оптимуме превращается в равенство, откуда следует, что условие $\theta_L v(x_L) - T_L \geq \theta_L v(x_H) - T_H$ выполнено автоматически.

Поэтому достаточно рассматривать следующую задачу:

$$\begin{aligned} & \lambda(T_L - cx_L) + (1-\lambda)(T_H - cx_H) \to \max_{x_L, x_H, T_L, T_H}, \\ & \text{s. t.} \quad \theta_L v(x_L) - T_L \geq 0, \\ & \theta_H v(x_H) - T_H \geq \theta_H v(x_L) - T_L, \\ & x_H \geq x_L. \end{aligned}$$

Решая эту задачу методом Лагранжа, получаем:

$$\begin{aligned} & x_H = 1 - \frac{c}{\theta_H}, \\ & x_L = 1 - \frac{\lambda c}{\theta_L - (1-\lambda)\theta_H} = 1 - \frac{\lambda c}{\lambda\theta_L - (1-\lambda)(\theta_H - \theta_L)} < x_L^* = 1 - \frac{c}{\theta_L}, \end{aligned}$$

где x_L^* — общественно оптимальный уровень потребления.

Таким образом, потребители типа θ_H получают в последнем случае больше, чем в остальных случаях, так как в пунктах (a), (b), (c) линейная цена $p > c$.

Что касается потребления агентов типа θ_L, то нельзя с уверенностью сказать, когда они получают больше товара — в пункте (d) или в других случаях.

Задача 5. *[MWG] «Air Shangri-la» является единственной авиакомпанией, которой разрешены перевозки между островами Шангри-ла и Нирвана. Существует только два типа пассажиров: туристы и бизнесмены. Бизнесмены готовы платить за билет больше, чем туристы. Авиакомпания не может в точности сказать, кто покупает*

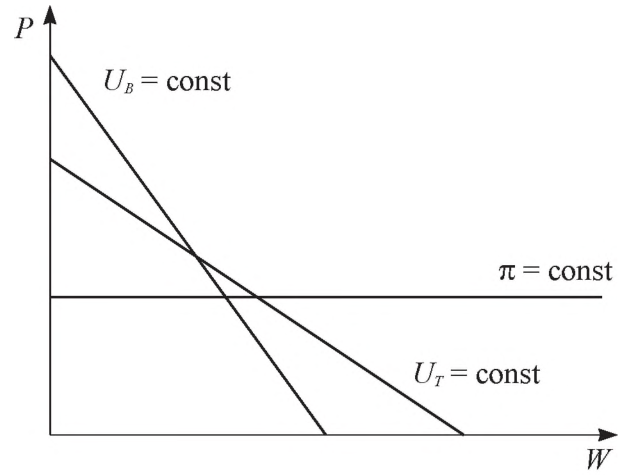

Рис. 2:

билет — турист или бизнесмен. Все пассажиры не любят покупать билеты на самолет заранее.

Уровень полезности пассажира, купившего билет по цене P за W дней до полета равна

$$\textit{Для бизнесменов:} \quad v - \theta_B P - W,$$
$$\textit{Для туристов:} \quad v - \theta_T P - W,$$

где $0 < \theta_B < \theta_T$. (Заметим, что при любом фиксированном W бизнесмены готовы заплатить за билет больше, чем туристы.)

Доля туристов среди пассажиров равна λ. Издержки по перевозке одного пассажира равны c.

(a) *Нарисуйте кривые безразличия обоих типов пассажиров в пространстве (P, W). Нарисуйте кривые постоянной прибыли авиакомпании. Сформулируйте математически задачу оптимальной ценовой дискриминации. [Указание: Используйте неотрицательность цен как ограничение, так как если компания назначит отрицательную цену билета, то спрос на билеты будет бесконечным.]*

(b) *Покажите, что в оптимуме бизнесмены никогда не покупают билеты заранее, и им безразлично, каким тарифом (своим или туристическим) пользоваться.*

(c) *Покажите, что в оптимуме туристам безразлично, покупать билет или не лететь совсем.*

(d) *Опишите дискриминационную схему, предположив, что обслуживаются пассажиры обоих типов. Как она зависит от параметров задачи (λ, θ_B, θ_T, c)?*

(e) *При каких условиях авиакомпания будет обслуживать только бизнесменов?*

Решение. (a) В пространстве (P, W) кривые безразличия бизнесменов и туристов — прямые $v - \theta_i P - W = \text{const}$, соответственно, наклон кривых безразличия меньше у туристов. Кривые постоянной прибыли авиакомпании — прямые, параллельные оси W, так как прибыль от W не зависит, а зависит только от P (см. рис. 2).

Пусть компания предлагает контракты (P_T, W_T) и (P_B, W_B). Сформулируем задачу авиакомпании:

$$\begin{aligned} & \lambda(P_T - c) + (1-\lambda)(P_B - c) \to \max_{P_T, P_B, W_T, W_B \geq 0} \\ \text{s.t. } & v - \theta_T P_T - W_T \geq 0, && (6) \\ & v - \theta_B P_B - W_B \geq 0, && (7) \\ & v - \theta_T P_T - W_T \geq v - \theta_T P_B - W_B, && (8) \\ & v - \theta_B P_B - W_B \geq v - \theta_B P_T - W_T. && (9) \end{aligned}$$

Заметим, что мы потребовали неотрицательность цен P_T и P_B. Непосредственно в задаче не такие ограничения не накладываются, но разумно предположить, что авиакомпания не будет приплачивать за полет (формально это ниоткуда не следует, но предположим, что при отрицательной цене спрос на полеты будет бесконечным).

(b) Разобьем доказательство на несколько шагов:

1. Условие $v - \theta_B P_B - W_B \geq 0$ выполняется автоматически.

Действительно, в силу неотрицательности P_T и условий (6) и (9),

$$v - \theta_B P_B - W_B \geq v - \theta_B P_T - W_T \geq v - \theta_T P_T - W_T \geq 0.$$

2. Выполняется условие $P_B \geq P_T$.

Действительно, сложив (8) и (9), получаем:

$$\theta_T(P_B - P_T) \geq \theta_B(P_B - P_T) \implies (\theta_T - \theta_B)(P_B - P_T) \geq 0.$$

3. Условие (9) в точке оптимума выполняется как равенство.

Действительно, если это не так, то можно слегка увеличить P_B. При этом (8) только усилится, а (9) выполняется в силу пункта 1. Прибыль при этом возрастает.

Следовательно, в оптимуме бизнесменам безразлично, какие билеты покупать, свои или туристические.

4. W_B в точке оптимума равно нулю.

Действительно, предположим противное, то есть (P_B^*, W_B^*) — точка оптимума, и $W_B^* > 0$. Положим $W_B = 0$, $P_B = \frac{1}{\theta_B}(\theta_B P_B^* + W_B^*) = P_B^* + \frac{W_B^*}{\theta_B}$. Легко проверить, что при переходе к точке (P_B, W_B) все граничные условия выполняются, и прибыль авиакомпании возрастает. Значит $W_B^* = 0$.

Следовательно, бизнесмены не покупают билетов заранее.

5. В оптимальной точке условие (6) выполняется как равенство.

Действительно, предположим, что $(P_T^*, P_B^*, W_T^*, W_B^*)$ оптимальны, но $v - \theta_T P_T^* - W_T^* > 0$. Перейдем к новой точке (P_T, P_B^*, W_T, W_B^*), так чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} & v - \theta_B P_T^* - W_T^* = v - \theta_T P_T - W_T, \\ & v - \theta_T P_T^* - W_T^* > v - \theta_T P_T - W_T > 0. \end{aligned}$$

Этого можно достичь, положив, например, $P_T = P_T^* + \varepsilon$, $W_T = W_T^* + \theta_B \varepsilon > 0$. Выбором ε, можно добиться того, что будут выполняться все граничные условия. Прибыль при этом возрастает. (Заметим, что если $W_T^* = 0$, то $p_T * = P_B^*$ и можно просто увеличить P_T и P_B, увеличив прибыль.

Полученное противоречие доказывает пункт (c).

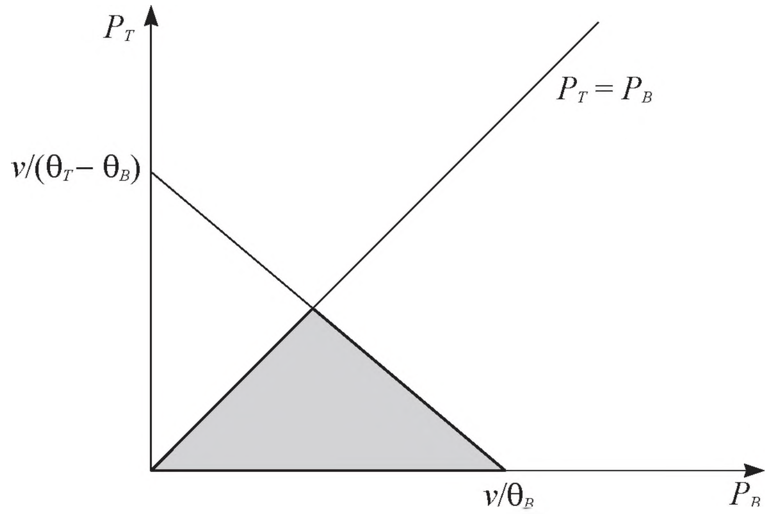

Рис. 3:

(d) Воспользовавшись результатами предыдущих пунктов ($W_B = 0$, $W_T = v - \theta_T P_T$), перепишем задачу авиакомпании в виде:

$$\lambda P_T + (1-\lambda)P_B - c \to \max_{0 \leq P_T \leq \frac{v}{\theta_T}, P_T \leq P_B \leq \frac{v}{t_B}}$$
$$\text{s.t. } v - \theta_B P_B \geq (\theta_T - \theta_B)P_T.$$

(Множество, на котором максимизируется линейная функция, изображено на рисунке 3.)

Решение данной задачи таково:
При $\frac{\lambda}{1-\lambda} > \frac{\theta_T - \theta_B}{\theta_B}$ $P_B^* = P_T^* = \frac{v}{\theta_T}$, $W_B^* = W_T^* = 0$.
При $\frac{\lambda}{1-\lambda} < \frac{\theta_T - \theta_B}{\theta_B}$ $P_B^* = \frac{v}{\theta_B}$, $P_T^* = 0$, $W_B^* = 0$, $W_T^* = v$.
При $\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{\theta_T - \theta_B}{\theta_B}$ все такие $P_T \geq 0$, $P_B \geq 0$, что $\theta_B P_B + (\theta_T - \theta_B)P_T = v$ (и соответствующие им W_T, W_B) являются решениями.

Заметим, что все это справедливо только в том случае, когда компания обслуживает оба рынка. Если $\frac{\lambda}{1-\lambda} < \frac{\theta_T - \theta_B}{\theta_B}$, то на перевозке туристов компания получает убытки.

В этом случае компания может начать обслуживать только бизнесменов, предлагая контракт $P^* = \frac{v}{\theta_B}$, $W^* = 0$. Прибыль при этом составит $\pi_1 = (1-\lambda)\left(\frac{v}{\theta_B} - c\right)$. В случае двух рынков прибыль составит $\pi_2 = \left(\frac{v}{\theta_T} - c\right)$.

Если $\pi_1 > \pi_2$, то выгоднее обслуживать только бизнесменов, иначе — обе категории пассажиров.

Задача 6. *[based on Holmström] Рассмотрим задачу начальник—подчиненный с двумя возможными уровнями усилий. Выигрыш начальника x распределен равномерно на $[0, 2]$, если агент прикладывает высокий уровень усилий, и распределен равномерно на $[0, 1]$, если агент прикладывает низкий уровень усилий. Издержки высокого уровня усилий равны c, в то время, как низкий уровень усилий не стоит ничего. Функция полезности агента аддитивна по зарплате и издержкам ($U(w, c) = u(w) - c$). Полезность зарплаты такова:*

$$u(w) = 1 - e^{-w},$$

гарантированный уровень полезности равен 0.

(a) *Найдите оптимальный уровень усилий в случае, когда уровень усилий подчиненного верифицируем.*

(b) *Решите задачу начальника, найдите оптимальный контракт и сравните уровень усилий с пунктом (a)*

Решение. (a) Если уровень усилий верифицируем, то подчиненный будет всегда работать на оптимальном уровне и начальник максимизирует функцию общественного благосостояния. При низком уровне усилий выигрыш начальника равен

$$E_L x = \int_0^1 x\, dF_L(x) = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

При высоком уровне усилий выигрыш начальника равен

$$E_H x - w = \int_0^2 x\, dF_H(x) - w = \frac{x^2}{4}\Big|_0^2 - w = 1 - w,$$

где $u(w) \geq c$. Отсюда легко видеть, что высокий уровень усилий оптимален, если $w < 1$ или $c < 1 - e^{-1/2}$.

(b) Если уровень усилий подчиненного не верифицируем, то начальник должен предложить ему зарплату $w(x)$, зависящую от выигрыша. В случае, если оптимальный уровень усилий — низкий, заработная плата, очевидно, должна равняться нулю. Если уровень усилий, которого хочет добиться начальник — высокий, то он решает следующую задачу

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 (x - w(x))\, dF_H(x) \to \max_{w(\cdot)} \\
\text{s.t.}\quad &\int_0^2 (1 - e^{-w(x)})\, dF_H(x) - c \geq \int_0^1 (1 - e^{-w(x)})\, dF_L(x), \\
&\int_0^2 (1 - e^{-w(x)})\, dF_H(x) - c \geq 0.
\end{aligned}$$

Выпишем Лагранжиан задачи

$$L = \int_0^2 (x - w(x)) f_H(x) + \lambda(e^{-w(x)}(f_L(x) - f_H(x)) - c) + \mu(1 - e^{-w(x)}) f_H(x)\, dx.$$

Условия первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned}
&- f_H(x) - \lambda e^{-w(x)}(f_L(x) - f_H(x)) + \mu e^{-w(x)} f_H(x) = 0, \\
&\int_0^2 (1 - e^{-w(x)}) f_H(x)\, dx - \int_0^1 (1 - e^{-w(x)}) f_L(x)\, dx = c, \\
&\int_0^1 (1 - e^{-w(x)}) f_H(x)\, dx = c.
\end{aligned}$$

Ограничения выполняются как равенства, иначе зарплата могла бы быть понижена (то есть, $\lambda > 0, \mu > 0$). Так как $f_L = 1, f_H = 1/2, x \in [0,1]$ и $f_L = 0, f_H = 1/2, x \in (1,2]$

$$e^{-w(x)} = \frac{1}{\mu - \lambda}, \qquad x \in [0,1], \tag{10}$$

$$e^{-w(x)} = \frac{1}{\mu + \lambda}, \qquad x \in (1,2]. \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

Подставим эту функции в ограничения, чтобы найти значения λ, μ. Для этого посчитаем значения интегралов

$$\int_0^2 e^{-w(x)}\, dF_H = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{\mu-\lambda}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{2}\frac{1}{\mu+\lambda}\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu-\lambda}+\frac{1}{\mu+\lambda}\right),$$

$$\int_0^1 e^{-w(x)}\, dF_L = \int_0^1 \frac{1}{\mu+\lambda}\, dx = \frac{1}{\mu+\lambda}.$$

Ограничения принимают вид

$$\frac{1}{\mu-\lambda} = 1,$$
$$\frac{1}{\mu-\lambda} + \frac{1}{\mu+\lambda} = 2-2c.$$

В результате,

$$e^{-w(x)} = \frac{1}{\mu-\lambda} = 1, \qquad x \in [0,1],$$
$$e^{-w(x)} = \frac{1}{\mu+\lambda} = 1-2c, \qquad x \in (1,2].$$

Начальник должен положить зарплату

$$w(x) = 0, \qquad x \in [0,1],$$
$$w(x) = -\ln(1-2c) > 0, \qquad x \in (1,2].$$

Выигрыш начальника равен

$$\int_0^1 (x-w(x))\, dF_H(x) = 1 + \frac{1}{2}\ln(1-2c).$$

Начальник должен выбрать контракт для высокого уровня усилий, если

$$c \le \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{e}}.$$

Задача 7. *Рассмотрим задачу начальник—подчиненный в которой обе стороны нейтральны по отношению к риску. Агент реализует проект, который приносит начальнику выигрыш x, принимающий одно из двух значений $x_1 > x_0 = 0$. Ненаблюдаемые усилия агента влияют на вероятность выпадения x_1. Эта вероятность принимает одно из двух значений p_H или p_L, где $0 < p_L < p_H < 1$. Если агент выбирает высокий уровень усилий, то он терпит издержки c, распределенные на отрезке $[0, x_1]$ с функцией распределения $F(c)$. Агент ограничен в средствах, то есть его зарплата должна быть неотрицательной ($w \ge 0$).*

(a) *Предположим, что агент не знает величину c до момента принятия предложения начальника и до момента выбора уровня усилий p. Найдите оптимальный контракт.*

(b) *Пусть теперь агент наблюдает c перед выбором действия p, но после подписания контракта. Переформулируйте и решите задачу начальника в этом случае, предположив, что подчиненный обязан остаться в фирме независимо от уровня c.*

(c) *Предположим, что в пункте (b) начальник может включить в контракт условие, согласно которому агент может уйти после того, как он узнает c. Переформулируйте и решите задачу начальника.*

Решение. (a) Если начальник хочет, чтобы подчиненный прикладывал мало усилий, то оптимальным будет положить зарплату равной 0. Выигрыш начальника в этом случае равен $p_L x_1$. Если начальник хочет, чтобы подчиненный прикладывал много усилий, то задача оптимизации имеет следующий вид

$$\begin{aligned} & p_H(x_1 - w_1) + (1 - p_H)(x_0 - w_0) \to \max_{w_0, w_1} \\ \text{s.t. } & p_H w_1 + (1 - p_H) w_0 - \overline{c} \geq p_L w_1 + (1 - p_L) w_0, \\ & w_1, w_0 \geq 0, \end{aligned}$$

где

$$\overline{c} = Ec = \int_0^{x_1} x \, dF(x).$$

Преобразуем задачу

$$\begin{aligned} & p_H w_1 + (1 - p_H) w_0 \to \min_{w_0, w_1} \\ \text{s.t. } & (w_1 - w_0)(p_H - p_L) \geq \overline{c}, \\ & w_1, w_0 \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $w_1 > w_0$ и $w_0 = 0$, так как иначе мы могли бы уменьшить w_1 и w_0 на одну и ту же малую величину, снизив тем самым расходы не нарушив ограничений. Поэтому,

$$w_0 = 0, \qquad w_1 = \frac{\overline{c}}{p_H - p_L}.$$

Благосостояние начальника равно

$$p_H(x_1 - w_1) = p_H x_1 - \frac{p_H \overline{c}}{p_H - p_L}.$$

Начальник должен выбрать контракт для высокого уровня усилий тогда и только тогда, когда

$$x_1 \geq \frac{p_H \overline{c}}{(p_H - p_L)^2}.$$

(b) Начальник предлагает подчиненному контракт w_0, w_1. Как и ранее, начальнику нет никакого смысла делать $w_0 > 0$. Подчиненный выберет высокий уровень усилий, если наблюдаемое c удовлетворяет неравенству $c \leq w_1(p_H - p_L)$. В противном случае будет выбран низкий уровень усилий. Вероятность того, что подчиненный выберет высокий уровень усилий равна $F(w_1(p_H - p_L))$. Задача начальника принимает вид

$$F(w_1(p_H - p_L)) p_H (x_1 - w_1) + \big(1 - F(w_1(p_H - p_L))\big) p_L (x_1 - w_1) \to \max_{w_1}.$$

Условие первого порядка дает уравнение

$$f(w_1(p_H-p_L))(p_H-p_L)^2(x_1-w_1)=p_L+F(w_1(p_H-p_L))(p_H-p_L).$$

К примеру, для равномерного распределения

$$(p_H-p_L)^2(x_1-w_1)=p_L+w_1(p_H-p_L)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad w_1=\frac{x_1}{2}-\frac{p_L}{2(p_H-p_L)^2}.$$

(c) Подчиненный всегда может выбрать низкий уровень усилий и ничем не рискуя заработать деньги, поэтому он всегда принимает участие в игре и задача ничем не отличается от пункта (b).

Задача 8. *Начальник, нейтральный по отношению к риску нанимает нейтрального по отношению к риску подчиненного. Начальник предлагает контракт, основанный на выпуске x, который является функцией, зависящей от типа агента и его усилий: $x=\theta a$. Ни тип $\theta\in[0,1]$, ни уровень усилий $a\geq 0$, не наблюдаемы начальником. Априори начальнику известно, что тип агента равномерно распределен на $[0,1]$. Издержки агента от приложения усилий равны $c(a)=a^2/2$.*

(a) Найдите оптимальный уровень усилий (и участия) для каждого типа.

(b) Начальник предлагает подчиненному контакт $w(x)$ — зарплата как функция выпуска. Запишите условия самоотбора и условия индивидуальной рациональности агентов. Какой контракт позволяет реализовать оптимальный уровень усилий (и участия) для каждого типа.

(c) Сформулируйте максимизационную задачу начальника. Является ли контракт из пункта (b) оптимальным для начальника? Докажите оптимальность или приведите контрпример, если это не так.

Решение. (a) Если известно, что агент имеет тип θ, то социально оптимальным уровнем усилий будет решение следующей задачи оптимизации

$$\theta a-c(a)=\theta a-\frac{a^2}{2}\to\max_a.$$

Из условий певого порядка следует, что

$$a^*(\theta)=\theta.$$

(b) Условие самоотбора для агента типа θ и имеет вид

$$w(\theta a)-\frac{a^2}{2}\geq w(\theta a')-\frac{a'^2}{2},\quad a\neq a'.$$

Условие индивидуальной рациональности

$$w(\theta a)-\frac{a^2}{2}\geq 0.$$

Социально оптимальное значение усилий может быть достигнуто, если положить подчиненному зарплату, раную $x=\theta a$. В этом случае, агент решает задачу из пункта (a).

Очевидно, данный контракт не является оптимальным для начальника, так как весь выигрыш получает подчиненный.

(c) Выпишем задачу начальника

$$\begin{aligned} & E\{x - w(x)\} \to \max_{w(x)} \\ \text{s.t.} \ & a = i \arg\max_{a'} \{w(\theta a') - c(a')\}, \\ & w(x) - c(a) \geq 0, \\ & x = \theta a. \end{aligned}$$

Рассмотрим пример, когда контракт имеет линейный вид $w(x) = \alpha x$. Оптимальный уровень усилий подчиненного равен $a^* = \alpha\theta$. Следовательно, $x^* = \alpha\theta^2$, $w(x^*) = \alpha^2\theta^2$. Начальник решает проблему

$$\int_0^1 \alpha\theta^2 - \alpha^2\theta^2 d\theta \to \max_\alpha .$$

В результате получаем, что $\alpha^* = 0.5, w^*(x) = 0.5x$ и начальник получает выигрыш

$$x^*(\theta) - w^*(x^*(\theta)) = \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{4} > 0.$$

Следовательно, контракт из пункта (b) действительно не является оптимальным.

Задача 9. *[Hart] Нейтральный по отношению к риску начальник нанимает на работу не склонного к риску подчиненного с функцией полезности* $\sqrt{w} - a$, *где* w *— доход, и* a *— уровень усилий. Агент может работать честно* ($a = 2$) *или лениться* ($a = 1$). *Есть только два возможных уровня дохода начальника:* $q_1 = 40$ *или* $q_2 = 100$, *причем если агент работает честно, то вероятность* q_2 *равна* $3/4$, *в то время, как если агент ленив, то вероятность* q_2 *равна* $1/2$. *Гарантированный уровень полезности агента равен* 4.

(a) *Сформулируйте задачу в случае, когда действия агента наблюдаемы, и найдите оптимальный уровень усилий.*

(b) *Сформулируйте задачу в случае, когда начальник не может наблюдать действие подчиненного, и найдите оптимальный уровень усилий и оптимальный контракт.*

Решение. (a) Если действия агента верифицируемы, то при оптимальных усилиях максимизируется функция

$$E_a q - w(a) \to \max_a,$$

где $\sqrt{w(a)} = a$. Так как $10 + 75 - 4 = 81 > 69 = 20 + 50 - 1$, оптимальным уровнем усилий будет $a = 2$. (b) Если начальник не может наблюдать уровень усилий подчиненного, то он должен установить заработную плату как функцию от q. Если начальник хочет добиться высокого уровня усилий, то он должен предложить контракт, при котором будут выполняться условия индивидуальной рациональности и совместимости со стимулами. Начальник решает задачу

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(q_1 - w_1) + \frac{3}{4}(q_2 - w_2) \to \max_{w_1,\, w_2} \\ \text{s.t.} \ & \frac{1}{4}\sqrt{w_1} + \frac{3}{4}\sqrt{w_2} - 2 \geq \frac{1}{2}\sqrt{w_1} + \frac{1}{2}\sqrt{w_2} - 1, \\ & \frac{1}{4}\sqrt{w_1} + \frac{3}{4}\sqrt{w_2} - 2 \geq 4. \end{aligned}$$

Эта задача эквивалентна следующей

$$\begin{aligned} & w_1 + 3w_2 \to \min_{w_1,\, w_2} \\ \text{s.t. } & \sqrt{w_2} - \sqrt{w_1} \geq 4, \\ & \sqrt{w_1} + 3\sqrt{w_2} \geq 24. \end{aligned}$$

Заметим, что последнее неравенство не может быть строгим, так как иначе мы могли бы уменьшить $\sqrt{w_1}$ и $\sqrt{w_2}$ на одинаковую малую величину, тем самым не изменив первое неравенство и уменьшив заработную плату. Поэтому $\sqrt{w_1} = 24 - 3\sqrt{w_2}$ и $w_1 = 9w_2 - 144\sqrt{w_2} + 576$. Задача оптимизации принимает вид

$$\begin{aligned} & w_2 - 12\sqrt{w_2} \to \min_{w_1,\, w_2} \\ \text{s.t. } & \sqrt{w_2} \geq 7. \end{aligned}$$

Условия первого порядка имеют вид

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{6}{\sqrt{w_2}} - \frac{\lambda}{2\sqrt{w_2}} = 0, \\ & \lambda \geq 0, \quad \sqrt{w_2} - 7 \geq 0, \quad \lambda(\sqrt{w_2} - 7) = 0. \end{aligned}$$

Если $\lambda = 0$, то $\sqrt{w_2} = 6$ и мы получаем противоречие. Следовательно, $\sqrt{w_2} = 7$ и $\lambda = 2$. Если начальник хочет, чтобы подчиненный прикладывал много усилий, ему надо положить зарплату, равную $w_1 = 9, w_2 = 49$. При такой зарплате ожидаемый выигрыш начальника равен

$$W = \frac{1}{4}(40 - 9) + \frac{3}{4}(100 - 49) = \frac{31 + 153}{4} = 46.$$

Если владелец расчитывает, что подчиненный будет прикладывать мало усилий, задача принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(q_1 - w_1) + \frac{1}{2}(q_2 - w_2) \to \max_{w_1,\, w_2} \\ \text{s.t. } & \frac{1}{4}\sqrt{w_1} + \frac{3}{4}\sqrt{w_2} - 2 \leq \frac{1}{2}\sqrt{w_1} + \frac{1}{2}\sqrt{w_2} - 1, \\ & \frac{1}{2}\sqrt{w_1} + \frac{1}{2}\sqrt{w_2} - 2 \geq 4. \end{aligned}$$

Преобразуем задачу. Заметим, что, как и в раньше, последнее ограничение жесткое, то есть выполняется как равенство.

$$\begin{aligned} & w_1 + w_2 \to \min_{w_1,\, w_2} \\ \text{s.t. } & \sqrt{w_2} - \sqrt{w_1} \leq 4, \\ & \sqrt{w_1} + \sqrt{w_2} = 10. \end{aligned}$$

Перепишем задачу так, чтобы осталась только одна переменная

$$\begin{aligned} & w_2 - 10\sqrt{w_2} \to \min_{w_2} \\ \text{s.t. } & \sqrt{w_2} \leq 7. \end{aligned}$$

Безусловная оптимизация дает значение $\sqrt{w_2} = 5$, и это значение удовлетворяет ограничению. Следовательно, $w_2 = w_1 = 25$ и ожидаемое благосостояние начальника равно $W = 20 + 50 - 25 = 45 < 46$. Поэтому начальнику следует предложить контракт, при котором подчиненный прикладывает много усилий.

Задача 10. *Рассмотрим задачу начальник-подчиненный, в которой подчиненный может прикладывать двумерные усилия a_1, a_2. Издержки выпуклы и квадратичны $C = \frac{1}{2}(c_{11}a_1^2 + c_{22}a_2^2 + 2c_{12}a_2a_2)$. Начальник может предлагать линейные контракты, зависящие от двух переменных: $x_1 = a_1 + \gamma a_2 + \varepsilon_1$ и $x_2 = a_2 + \varepsilon_2$. Здесь ε_1 и ε_2 независимые нормальные величины с нулевым средним и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно. Функция полезности агента является CARA функцией, т. е. максимизирует $CE = \mu - \frac{r}{2}\sigma^2$, где μ и σ^2 — среднее и дисперсия разности его зарплаты и издержек усилий соответственно. Условие индивидуальной рациональности агента выглядит следующим образом: $CE \geq \bar{u}$. Выигрыш начальника равен $x_1 + x_2$. Начальник нейтрален по отношению к риску.*

(a) *Найдите безусловный оптимум.*

(b) *Охарактеризуйте условно оптимальный линейный контракт.*

(c) *Предположим, что $c_{12} = \gamma = 0$. Найдите условно оптимальный линейный контракт.*

(d) *Предположим, что ε_1 ненаблюдаемо ($\sigma_1^2 = \infty$). Найдите условно оптимальный линейный контракт. Как он изменяется в зависимости от c_{12} and γ?*

(e) *Предположим теперь, что ε_2 ненаблюдаемо ($\sigma_2^2 = \infty$). Найдите условно оптимальный линейный контракт. Как он изменяется в зависимости от c_{12} and γ?*

Решение. (a) Начальник предлагает подчиненному контракт вида

$$w = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta = \alpha_1(a_1 + \gamma a_2 + \varepsilon_1) + \alpha_2(a_2 + \varepsilon_2) + \beta.$$

Полезность агента при этом составляет $u = w - C$. Поэтому, $\mu \equiv \mathrm{E}[u] = \mathrm{E}[w] - C(a_1, a_2)$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}[u] = \alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2$.

Задача поиска безусловного оптимума выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} &\max_{a_1,a_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta} \mathrm{E}[x_1 + x_2 - w] = \max_{a_1,a_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta} (a_1 + (1+\gamma)a_2 - \mathrm{E}[w]), \\ &\text{s.t. } \mu - \frac{r}{2}\sigma^2 \geq \underline{u}. \end{aligned}$$

Условие можно преобразовать к виду $\mathrm{E}[w] \geq \frac{r}{2}(\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2) + C(a_1, a_2) + \underline{u}$. Заметим, что в безусловно оптимальном контракте $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, и значит $w^{\text{opt}} = \beta^{\text{opt}} = C(a_1^{\text{opt}}, a_2^{\text{opt}}) + \underline{u}$. Весь риск берет на себя нейтральная по отношению к риску сторона.

Задача сводится к следующей:

$$(a_1^{\text{opt}}, a_2^{\text{opt}}) = \arg\max_{a_1,a_2}[a_1 + (1+\gamma)a_2 - C(a_1, a_2)].$$

В силу выпуклости функции издержек для нахождения максимума достаточно рассмотреть условия первого порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\gamma \end{pmatrix} = \mathbf{C}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{opt}} \\ a_2^{\mathrm{opt}} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\gamma \end{pmatrix}.$$

(b) Рассмотрим задачу агента: при заданной заработной плате он выбирает уровень усилий.

$$(a_1^*, a_2^*) = \arg\max_{a_1, a_2} \left[\alpha_1 a_1 + (\alpha_1 \gamma + \alpha_2) a_2 + \beta - \frac{r}{2} (\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2) - C(a_1, a_2) \right].$$

Условия первого порядка для этой задачи выглядят следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} \mathbf{C} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Используя условие индивидуальной рациональности, начальник установит следующий уровень β:

$$\beta = \frac{r}{2} (\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2) + C(a_1^*, a_2^*) - \alpha_1 a_1^* - (\alpha_1 \gamma + \alpha_2) a_2^* + \underline{u}, \tag{14}$$

так как выигрыш начальника убывает с ростом β. Таким образом, начальник получает

$$\begin{aligned} \Pi &= a_1^* + (1+\gamma) a_2^* - \frac{r}{2} (\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2) - C(a_1^*, a_2^*) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\gamma \end{pmatrix}' \mathbf{a}^* - \frac{r}{2} \boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^{*\prime} \mathbf{C} \mathbf{a}^* \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\gamma \end{pmatrix}' \mathbf{a}^* - \frac{\mathbf{a}^{*\prime}}{2} \left\{ r \mathbf{C}' \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{I} \right\} \mathbf{C} \mathbf{a}^* \to \max_{\mathbf{a}^*}, \end{aligned} \tag{15}$$

где $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Условия первого порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\gamma \end{pmatrix} = \{ r \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{I} \} \mathbf{C} \mathbf{a}^*,$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \gamma \sigma_2^2 & -\gamma \sigma_2^2 \\ -\gamma \sigma_2^2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$.

Откуда получаем

$$\mathbf{a}^* \equiv \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \{ r \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{I} \}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\gamma \end{pmatrix}. \tag{16}$$

(c) Пусть $c_{12} = \gamma = 0$. В этом случае $\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_{22}} \end{pmatrix}$. Подставив в решение предыдущего пункта, получаем:

$$\begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_{11}(1 + r c_{11} \sigma_1^2)} \\ \frac{1}{c_{22}(1 + r c_{22} \sigma_2^2)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + r c_{11} \sigma_1^2} \\ \frac{1}{1 + r c_{22} \sigma_2^2} \end{pmatrix}.$$

β находим из (14).

(d) Из (13) и (16) получаем

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} \{r\mathbf{C\Omega} + \mathbf{I}\}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\gamma \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\mathbf{C\Omega} = \begin{pmatrix} c_{11}(\sigma_1^2 + \gamma^2\sigma_2^2) - c_{12}\gamma\sigma_2^2 & \sigma_2^2(c_{12} - \gamma c_{11}) \\ c_{12}(\sigma_1^2 + \gamma^2\sigma_2^2) - c_{22}\gamma\sigma_2^2 & \sigma_2^2(c_{22} - \gamma c_{12}) \end{pmatrix} \tag{18}$$

$\det\{r\mathbf{C\Omega}+\mathbf{I}\} = (r\sigma_1\sigma_2)^2 \det\mathbf{C} + r\sigma_2^2(\gamma^2 c_{11} + c_{22} - 2\gamma c_{12}) + rc_{11}\sigma_1^2 \to r\sigma_1^2(c_{11} + r\sigma_2^2 \det\mathbf{C})$ при $\sigma_1^2 \to \infty$.

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} \{r\mathbf{C\Omega} + \mathbf{I}\}^{-1} \to \frac{1}{c_{11} + r\sigma_2^2 \det\mathbf{C}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c_{12} & c_{11} \end{pmatrix}.$$

Подставим в (17) и получим

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{(1+\gamma)c_{11} - c_{12}}{c_{11} + r\sigma_2^2 \det\mathbf{C}}.$$

(e) Пусть теперь $\sigma_2^2 \to \infty$. Тогда $\det\{r\mathbf{C\Omega}+\mathbf{I}\} \to r\sigma_2^2(B + r\sigma_1^2 \det\mathbf{C})$, где $B \equiv \gamma^2 c_{11} + c_{22} - 2\gamma c_{12}$.

Отсюда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} \{r\mathbf{C\Omega} + \mathbf{I}\}^{-1} \to \frac{1}{B + r\sigma_1^2 \det\mathbf{C}} \begin{pmatrix} c_{22} - \gamma c_{12} & \gamma c_{11} - c_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставим в (17) и получим

$$\alpha_1 = \frac{B + \gamma c_{11} - c_{12}}{B + r\sigma_1^2 \det\mathbf{C}}, \quad \alpha_2 = 0.$$

Задача 11. *Рассмотрим ситуацию, в которой оценки товара θ_a и θ_b двумя агентами (A и B), нейтральными по отношению к риску, являются случайными величинами, равномерно распределенными на $[0,1]$. Изначально каждый агент обладает одной единицей товара. Встретившись, агенты решают заключить сделку: каждый агент может остаться с 0, 1 или 2 единицами товара (другой агент соответственно остается с 2, 1 или 0 единицами).*

(a) *Охарактеризуйте правило торговли, эффективное ex post (т. е. распределение товара и множество цен как функцию от оценок товара).*

(b) *Рассмотрим механизм, в котором оба агента подают заявки одновременно, и сделавший более высокую заявку покупает товар у другого агента по цене наиболее высокой заявки. Найдите симметричное равновесие Байеса-Нэша в котором заявки линейны по оценкам товара $b_i = \alpha_i + \beta_i\theta_i$, $i = a, b$. Выведите условия первого порядка в задаче каждого агента. (Симметрия означает, что равновесные заявки одинаковы для обоих агентов как функции.)*

(c) *Какое распределение товаров реализуется с помощью этого механизма? Является ли оно совместимым со стимулами по Байесу? Является ли оно эффективным ex post? Является ли оно индивидуально рациональным? Как соотносятся полученные результаты с теоремой Майерсона—Саттертуэйта?*

Решение. Плотность $f(\theta_i)$ распределния оценки товара агентом i равна 1 при $\theta_i \in [0,1]$ и 0 в противном случае ($i = a, b$).

(a) Правило торговли, эффективное ex post, выглядит следующим образом:

Если $\theta_a > \theta_b$, то $y_a = 2$, $y_b = 0$ (y_i — количество товара, которое остается у агента i после окончания торговли).

Если $\theta_b > \theta_a$, то $y_b = 2$, $y_a = 0$.

Если $\theta_b = \theta_a$, то любое распределение товара является эффективным ex post.

Заметим, что цена товара никак не влияет на эффективность. Стоит отметить только, что агенту невыгодно продавать товар по цене ниже, чем его оценка и покупать по цене выше, чем его оценка.

(b) Пусть стратегии агентов линейны $b_i(\theta_i) = \alpha_i + \beta_i\theta_i$, $i = a, b$.

Задача агента i — максимизировать ожидаемую полезность. В случае, когда $b_j(\theta_j) < b_i(\theta_i)$, агент i в результате получает $y_i = 2$ и платит b_i, а в случае, когда $b_j(\theta_j) > b_i(\theta_i)$, агент i получает $y_i = 0$ и ему платят b_j. Случай равенства заявок можно не рассматривать, так как его вероятность равна нулю. Таким образом, получилась следующая задача:

$$\left\{\int_{b_j(\theta_j)<b_i(\theta_i)} (2\theta_i - b_i(\theta_i))f(\theta_j)d\theta_j + \int_{b_j(\theta_j)>b_i(\theta_i)} (b_j(\theta_j))f(\theta_j)d\theta_j\right\} \to \max_{\alpha_i,\beta_i}.$$

Опишем множество $b_j(\theta_j) < b_i(\theta_i)$.

$$b_j(\theta_j) < b_i(\theta_i) \iff \theta_j < \frac{b_i(\theta_i) - \alpha_j}{\beta_j} = \frac{\alpha_i - \alpha_j + \beta_i\theta_i}{\beta_j}.$$

Предположив, что $\frac{b_i(\theta_i)-\alpha_j}{\beta_j} \in [0,1]$ при всех $\theta_i \in [0,1]$, получим следующее:

$$\int_{b_j(\theta_j)>b_i(\theta_i)} (b_j(\theta_j))f(\theta_j)d\theta_j = \int_{\frac{b_i(\theta_i)-\alpha_j}{\beta_j}}^1 (\alpha_j + \beta_j\theta_j)d\theta_j = \frac{1}{2\beta_j}[(\alpha_j+\beta_j)^2 - b_i^2(\theta_i)],$$

$$\int_{b_j(\theta_j)<b_i(\theta_i)} (2\theta_i - b_i(\theta_i))f(\theta_j)d\theta_j = (2\theta_i - b_i(\theta_i))\frac{b_i(\theta_i)-\alpha_j}{\beta_j}.$$

Таким образом, задачу агента можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{\beta_j}\left\{2\theta_i b_i(\theta_i) - \frac{3}{2}b_i^2(\theta_i)\right\} \to \max_{\alpha_i,\beta_i}.$$

Максимизируя по $b_i(\theta_i)$, получим $b_i^*(\theta_i) = \frac{2}{3}\theta_i$, $i = a, b$. Таким образом, $\alpha_i^* = 0$, $\beta_i^* = \frac{2}{3}$.

(c) Правило, реализуемое с помощью этого механизма таково: $y_a = 0$, $y_b = 2$ при $\theta_a < \theta_b$, $y_a = 2$, $y_b = 0$ при $\theta_a > \theta_b$. Таким образом, оно является эффективным ex post.

По построению, механизм является совместимым со стимулами по Байесу.

Ожидаемая полезность агента типа θ_i равна

$$\overline{U}_i(\theta_i) = \int_0^{\theta_i}\left(2\theta_i - \frac{2}{3}\theta_i\right)d\theta_j + \int_{\theta_i}^1 \frac{2}{3}\theta_j d\theta_j = \frac{1}{3} + \theta_i^2 > \theta_i \quad \text{при любом } \theta_i \in [0,1].$$

Следовательно, механизм является индивидуально рациональным.

Результат не противоречит теореме Майерсона—Саттертуэйта, потому что в нашем случае торговля *всегда* приносит выигрыш, в то время, как в теореме есть область изменения значений параметров, при которых торговля не приносит выигрыша.

Задача 12. *Аукцион наименьшей цены устроен следующим образом. Продавец продает единицу товара одному из J покупателей. Покупатели подают заявки, и продавец отдает товар агенту с наибольшей заявкой, который платит наименьшую из указанных в заявках сумм. Оценки покупателями товара θ_i независимы и распределены равномерно на $[0,1]$.*

(a) Охарактеризуйте симметричное равновесие Байеса-Нэша.

(b) Найдите ожидаемый доход продавца.

(c) Сравните (a) и (b) со случаем аукциона второй цены. Как полученные результаты соотносятся с теоремой о равенстве дохода.

(d) Если (a)—(c) кажутся слишком сложными в общем случае, решите для $J = 3$.

Решение. (a) Будем предполагать, что все игроки используют стратегии вида $b_i = \alpha_i\theta_i$, $i = 1,\ldots,n$. Рассмотрим стратегию одного из игроков. Пусть этот игрок имеет номер n. Так как все соперники ничем не отличаются друг от друга, считаем, что все они используют одну и ту же стратегию $\alpha\theta$. Введем обозначения

$$b_{(n-1)} = \max_{1\le j\le n-1} b_j, \qquad b_{(1)} = \min_{1\le j\le n-1} b_j.$$

Легко видеть, что

$$F_{(n-1)}(x) = P\{b_{(n-1)} \le x\} = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-1}, \qquad f_{(n-1)}(x) = \frac{n-1}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-2},$$

где $f_{(n-1)}$ — плотность распределения случайной величины $b_{(n-1)}$. Аналогично,

$$F_{(1)}(y) = P\{b_{(1)} \le y\} = 1 - \left(1-\frac{y}{\alpha}\right)^{n-1}, \qquad f_{(1)}(y) = \frac{n-1}{\alpha}\left(1-\frac{y}{\alpha}\right)^{n-2}.$$

Игрок рассуждает следующим образом: если максимальная ставка других участников игры равна x, то цена лота распределена следующим образом

$$P\{b_{(1)} \le y\} = 1 - \left(1-\frac{y}{x}\right)^{n-2}, \qquad f_{(1)}(y) = \frac{n-2}{x}\left(1-\frac{y}{x}\right)^{n-3},$$

так как одна из заявок максимальная и равна x, а другие, по свойствам условной вероятности, равномерно распределены на $[0,x]$. Следовательно, ожидаемое значение цены, в данном случае, равно $x/(n-1)$. Заметим, что в равновесии α_n будет таким, что событие $\alpha_n\theta_n > x$ имеет ненулевую вероятность. Поэтому средний выигрыш n - того участника ненулевой и равен

$$\int_{x/\alpha_n}^{1}\left(\theta - \frac{x}{n-1}\right)d\theta = \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta x}{n-1}\bigg|_{x/\alpha_n}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{x}{n-1} - \frac{x^2}{2\alpha_n^2} + \frac{x^2}{(n-1)\alpha_n}.$$

Максимизируя ожидаемый выигрыш по α_n, легко видеть, что $\alpha_n^* = n-1$. Из симметрии следует, что все игроки будут применять стратегию $b^*(\theta) = (n-1)\theta$.

(b) Так как продавец получает n заявок, равномерно распределенных на $[0, n-1]$, то его ожидаемый выигрыш будет равен $(n-1)/(n+1)$.

(c) Легко видеть, что в каждом из аукционов победителем будет игрок с наибольшим θ и ожидаемая прибыль продавца одинаковая, в независимости от типа аукциона. Этот результат совпадает с выводами теоремы о равенстве доходов.

Задача 13. Рационирование кредитов. *Банк обладает единицей капитала и рассматривает возможность одолжить ее фирме под банковский процент r. Фирма использует эту единицу для финансирования неделимого инвестиционного проекта. Доход от проекта R наблюдаем ex post, но неизвестен ex ante и равномерно распределен на интервале $[\bar{R}-\theta, \bar{R}+\theta]$ ($\bar{R}>1$). Уровень рискованности θ является частной информацией фирмы. Предварительно фирма оставляет в банке залог C, который банк оставляет себе, если дохода недостаточно, чтобы выплатить заем вместе с процентами. (Указание: фирма получает $\max\{R-r,-C\}$, банк получает $\min\{r,R+C\}$). Тип фирмы θ принимает значение θ_1 с вероятностью π и θ_2 с вероятностью $1-\pi$. И банк и фирма нейтральны по отношению к риску. Величины $\bar{R}$, C, и π заданы экзогенно.*

(a) *Найдите безусловный оптимум, то есть вычислите процент, который банк предложил бы фирме, если бы θ была известна. Найдите выигрыш банка.*

(b) *Для данного r найдите, какие фирмы будут занимать у банка.*

(c) *Найдите шкалу банковских процентов, которая является оптимальной для банка в случае асимметричной информации. (Указание: рассмотрите ситуацию, в которой допускается кредитное рационирование, то есть предлагая несколько вариантов банковского процента, банк ограничивает количество фирм, занимающих под некоторые из них, так что некоторые фирмы, которые хотели бы занять под низкий процент, оказываются рационированными.*

Решение. Обозначим через $u_F(r,R)=\max\{R-r,-C\}$ функцию прибыли фирмы и через $u_B(r,R)=\min\{r,R+C\}$ функцию прибыли банка. При этом u_F выпукла по R, u_B вогнута по R. Заметим, что $u_F+u_b\equiv R$.

Задача банка такова:

$$\int_R u_B(r,R)dF_\theta(R)\to\max_r$$
$$\text{s.t.}\quad \int_R u_F(r,R)dF_\theta(R)\geq 0.$$

Так как сумма прибылей банка и фирмы тождественно равна R, то достаточно решить уравнение $\int_R u_F(r,R)dF_\theta(R)=0$.

Рассмотрим три случая:

1) $\bar{R}-\theta\geq r-C$ (фирма не будет банкротом ни при каких R)

$$\int_R u_F(r,R)dF_\theta(R)=\frac{1}{2\theta}\int_{\bar{R}-\theta}^{\bar{R}+\theta}(R-r)dR=\bar{R}-r.$$

2) $\bar{R}+\theta\leq r-C$ (фирма будет банкротом при любом R)

$$\int_R u_F(r,R)dF_\theta(R)=-C.$$

3) $\bar{R}-\theta < r - C < \bar{R}+\theta$

$$\int_R u_F(r,R)dF_\theta(R) = \frac{1}{2\theta}\left[\int_{\bar{R}-\theta}^{r-C}(-C)dR + \int_{r-C}^{\bar{R}+\theta}(R-r)dR\right] = \frac{1}{4\theta}(C+\bar{R}+\theta-r)^2 - C.$$

Решив уравнение $\mathrm{E}_{uF}=0$, получим:

$$r = \begin{cases} \bar{R}, & \text{при } \theta \le C, \\ \bar{R} + (\sqrt{\theta}-\sqrt{C})^2, & \text{при } \theta > C. \end{cases}$$

Выигрыш фирмы при таком банковском проценте равен нулю, поэтому банк в среднем получит $\bar{R}$.

(b) Воспользовавшись результатом пункта (a), получим, что выигрыш фирмы типа θ при банковском проценте r равен

$$\overline{u}_F = \begin{cases} -C, & \text{при } \theta \le r - C - \bar{R}, \\ \bar{R} - r, & \text{при } \bar{R}-\theta \ge r - C, \\ \frac{1}{4\theta}(C-\bar{R}+\theta-r)^2 - C, & \text{при } \bar{R}-\theta < r-C < \bar{R}+\theta. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что при $r \le \bar{R}$ фирма любого типа θ возьмет ссуду в банке. Пусть $r > \bar{R}$. В этом случае только достаточно рискованные фирмы возьмут ссуду (Если θ мало, то либо $\overline{u}_F = -C$, либо $\overline{u}_F = \bar{R}-r$, что меньше нуля). Решив неравенство $\overline{u}_F \ge 0$ получаем $\theta \ge (\sqrt{C}+\sqrt{r-\bar{R}})^2$.

(c) Пусть теперь есть два типа фирм $\theta_1 > \theta_2$. Рассмотрим меню контрактов вида (r_1,p_1), (r_2,p_2), где r_1 и r_2 — ставка процента, а p_1 и p_2 — вероятность предоставления кредита.

В соответствии с принципом выявления задача банка может быть представлена как задача максимизации прибыли при условиях участия и совместимости со стимулами.

$$\pi p_1 \,\mathrm{E}_1\, u_B(r_1) + (1-\pi)p_2 \,\mathrm{E}_2\, u_B(r_2) \to \max_{r_1,r_2,p_1,p_2} \tag{19}$$
$$\text{s.t. } p_1 \,\mathrm{E}_1\, u_F(r_1) \ge 0, \tag{20}$$
$$p_2 \,\mathrm{E}_2\, u_F(r_2) \ge 0, \tag{21}$$
$$p_1 \,\mathrm{E}_1\, u_F(r_1) \ge p_2 \,\mathrm{E}_1\, u_F(r_2), \tag{22}$$
$$p_2 \,\mathrm{E}_2\, u_F(r_2) \ge p_1 \,\mathrm{E}_2\, u_F(r_1), \tag{23}$$

где E_1 и E_2 — усреднения по доходам первого и второго типа фирм соответственно. Несложные рассуждения показывают, что из этих четырех ограничений в оптимуме два выполняются как строгие неравенства, и два выполняются как равенства. Кроме того, p_1 можно положить равным единице. Поэтому Задачу банка можно переписать в виде:

$$\pi p_1 \,\mathrm{E}_1\, u_B(r_1) + (1-\pi)p_2 \,\mathrm{E}_2\, u_B(r_2) \to \max_{r_1,r_2,p_1,p_2} \tag{24}$$
$$\text{s.t. } p_2 \,\mathrm{E}_2\, u_F(r_2) = 0, \tag{25}$$
$$\mathrm{E}_1\, u_F(r_1) = p_2 \,\mathrm{E}_1\, u_F(r_2). \tag{26}$$

Обозначим через $\widehat{r}_i$, $i=1,2$, решения уравнений $\mathrm{E}_i\, u_F(r_i) = 0$. Рассмотрим два случая: $p_2 = 0$ и $p_2 > 0$. В первом случае обслуживаются только фирмы типа θ_1.

1. Задача банка для этого случая решена в пункте (a).

2. Запишем задачу банка в случае, когда $p_2 > 0$. При преобразованиях воспользуемся равенством $u_F + u_B \equiv R$. В результате получим:

$$\pi\bar{R} + p_2((1-\pi)\bar{R} - \pi\,\mathrm{E}_1\,u_F(\widehat{r}_2)) \to \max_{p_2\in(0,1]}.$$

Если при этом $(1-\pi)\bar{R} > \pi\,\mathrm{E}_1\,u_F(\widehat{r}_2)$, то решение $p_2 = 1$ и $r_1 = r_2 = \widehat{r}_2$.

Если при этом $(1-\pi)\bar{R} < \pi\,\mathrm{E}_1\,u_F(\widehat{r}_2)$, то решение $p_2 = 0$ и $r_1 = \widehat{r}_1$ (то есть фактически это случай 1).

Если $(1-\pi)\bar{R} = \pi\,\mathrm{E}_1\,u_F(\widehat{r}_2)$, то p_2 может быть любым и r_1 определяется из уравнения $\mathrm{E}_1\,u_F(r_1) = p_2\,\mathrm{E}_1\,u_F(\widehat{r}_2)$.

Задача 14. *Есть два агента — продавец (1) и покупатель (2). Изначально продавец владеет единицей товара, которая ценится агентами как θ_1 и θ_2 соответственно. Ex ante θ_1 равномерно распределено на $[0,1]$, в то время, как θ_2 равномерно распределено на $[a, 1+a]$, где $a \in (0, 1/3)$.*

(a) Предполагая, что оценки агентов известны общественности, найдите ожидаемый уровень богатства.

(b) Теперь предположим, что оценки агентов являются их частной информацией. Найдите условно оптимальный механизм, то есть механизм, который максимизирует ожидаемый уровень богатства при выполнении условий самоотбора и индивидуальной рациональности. Сравните с (a).

Решение. (a) Задача для вычисления безусловно оптимального уровня богатства:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[u_1(\theta_1,\theta_2) + u_2(\theta_1,\theta_2)] \to \max \\ \text{s.t.}\ &y_1(\theta_1,\theta_2) + y_2(\theta_1,\theta_2) \le 1, \\ &t_1(\theta_1,\theta_2) + t_2(\theta_1,\theta_2) \le 0, \end{aligned}$$

где $u_1(\theta_1,\theta_2) = \theta_1 y_1(\theta_1,\theta_2) + t_1(\theta_1,\theta_2)$ и $u_2(\theta_1,\theta_2) = \theta_2 y_2(\theta_1,\theta_2) + t_2(\theta_1,\theta_2)$.

Максимизировав поточечно подинтегральное выражение, получим решение

$$t_1 + t_2 = 0, \quad y_1 = \begin{cases} 0, & \text{при } \theta_1 \le \theta_2, \\ 1, & \text{при } \theta_1 > \theta_2, \end{cases}, \quad y_2 = \begin{cases} 1, & \text{при } \theta_1 \le \theta_2, \\ 0, & \text{при } \theta_1 > \theta_2. \end{cases}$$

При этом $u_1(\theta_1,\theta_2) + u_2(\theta_1,\theta_2) = \max\{\theta_1,\theta_2\}$. Функция распределения $F_{\max\{\theta_1,\theta_2\}}(x) = F_{\theta_1}(x)F_{\theta_2}(x)$. В нашем случае

$$F_{\max\{\theta_1,\theta_2\}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a, \\ x(x-a), & \text{при } a \le x < 1, \\ x - a, & \text{при } 1 \le x < a+1, \\ 1, & \text{при } x \ge a+1, \end{cases}$$

плотность равна

$$F_{\max\{\theta_1,\theta_2\}}(x) = \begin{cases} 2x - a, & \text{при } a \le x < 1, \\ 1, & \text{при } 1 \le x \le a+1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

и ожидаемый уровень богатства равен

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\max\{\theta_1,\theta_2\}] &= \int_a^1 x(2x-a)\,dx + \int_1^{1+a} xdx \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right]\Big|_a^1 = \frac{2}{3} + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6}.\end{aligned}$$

(b) Запишем необходимое (почти достаточное) условие выполнения условий индивидуальной рациональности и самоотбора:

$$\int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\overline{\theta}_2} y_2(\theta_1,\theta_2)\left[\left(\theta_2 - \frac{1-\Phi_2(\theta_2)}{\varphi_2(\theta_2)}\right) - \left(\theta_1 + \frac{\Phi_1(\theta_1)}{\varphi_1(\theta_1)}\right)\right]\varphi_1(\theta_1)\varphi_2(\theta_2)\,d\theta_1 d\theta_2, \tag{27}$$

и решим задачу

$$\begin{aligned}&\int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\overline{\theta}_2}[\theta_1 + (\theta_2-\theta_1)y_2(\theta_1,\theta_2)]\varphi_1(\theta_1)\varphi_2(\theta_2)\,d\theta_1 d\theta_2 \to \max \\ &\text{s.t. } (27), \quad y_2 \in [0,1].\end{aligned}$$

Подставим выражения функций $\varphi_1(\theta_1) = \mathbf{I}_{[0,1]}$, $\varphi_2(\theta_2) = \mathbf{I}_{[a,1+a]}$, $\Phi_1(\theta_1) = \theta_1$, $\Phi_2(\theta_2) = \theta_2 - a$. При этом условие (27) приобретает вид

$$\int_0^1 d\theta_1 \int_a^{1+a} d\theta_2[y_2(\theta_1,\theta_2)(2\theta_2 - a - 1 - 2\theta_1)] \geq 0,$$

а сама максимизируемая функция — такова:

$$\int_0^1 d\theta_1 \int_a^{1+a} d\theta_2[\theta_1 + (\theta_2-\theta_1)y_2(\theta_1,\theta_2)] \to \max$$

Так как

$$\int_0^1\int_a^{1+a}\theta_1 d\theta_1 d\theta_2 = \text{const},$$

то достаточно решить следующую задачу:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 d\theta_1 \int_a^{1+a} d\theta_2[(\theta_2-\theta_1)y_2(\theta_1,\theta_2)] \to \max \\ \text{s.t. } &\int_0^1 d\theta_1 \int_a^{1+a} d\theta_2[y_2(\theta_1,\theta_2)(2\theta_2 - a - 1 - 2\theta_1)] \geq 0.\end{aligned}$$

Запишем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = (\theta_2-\theta_1)y_2 + \lambda y_2(2(\theta_2-\theta_1) - (1+a)) \to \max_{y_2\in[0,1]}$$

откуда немедленно получаем:

$$y_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } (1+2\lambda)(\theta_2-\theta_1) - \lambda((1+a)) < 0, \\ 1, & \text{если } (1+2\lambda)(\theta_2-\theta_1) - \lambda((1+a)) \geq 0. \end{cases}$$

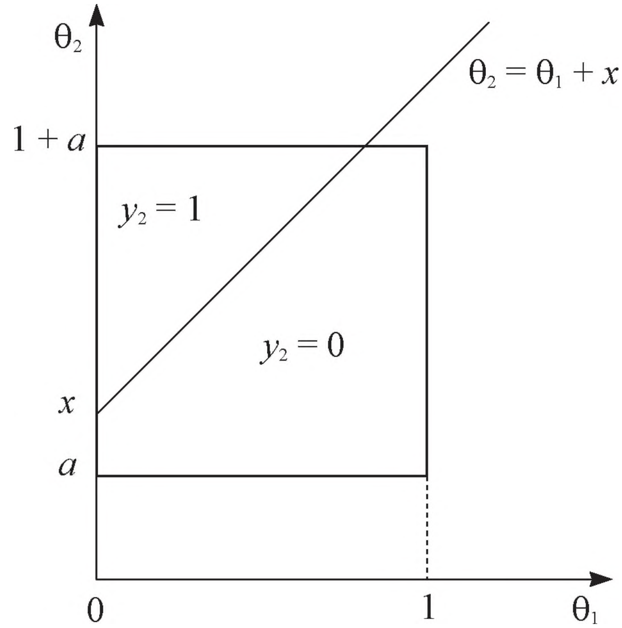

Рис. 4:

Если при этом $\lambda = 0$, то получится безусловный оптимум, который, как известно, не удовлетворяет условиям индивидуальной рациональности и совместимости со стимулами. Следовательно, $\lambda > 0$.

Таким образом, решение этой задачи выглядит так:

$$y_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta_2 - \theta_1 < x = x(a), \\ 1, & \text{если } \theta_2 - \theta_1 \geq x, \end{cases}$$

где $x > 0$ — минимальное такое, что

$$\int_0^1 d\theta_1 \int_a^{1+a} d\theta_2 [y_2(\theta_1, \theta_2)(2(\theta_2 - \theta_1) - (a+1))] = 0.$$

Вычислим этот интеграл в двух случаях: когда $x \geq a$ и когда $x < a$.

1. $x \geq a$.

$$\begin{aligned}
&\int_x^{1+a} d\theta_2 \int_0^{\theta_2 - x} d\theta_1 [2(\theta_2 - \theta_1) - (a+1)] \\
&= \int_x^{1+a} d\theta_2 \left[(2\theta_2\theta_1 - \theta_1^2)\Big|_0^{\theta_2 - x} \right] - \frac{1}{2}(1+a)(1+a-x)^2 \\
&= \int_x^{1+a} d\theta_2 [2\theta_2(\theta_2 - x) - (\theta_2 - x)^2] - \frac{1}{2}(1+a)(1+a-x)^2 \\
&= \left(2\frac{\theta_2^3}{3} - x\theta_2^2 - \frac{(\theta - x)^3}{3} \right) \Big|_x^{1+a} - \frac{1}{2}(1+a)(1+a-x)^2 \\
&= \frac{2}{3}(1+a)^3 - x(1+a)^2 - \frac{(1+a-x)^3}{3} - \frac{2}{3}x^3 + x^3 - \frac{1}{2}(1+a)(1+a-x)^2 \\
&= \frac{2}{3}x^3 - x^2\frac{3}{2}(1+a) + (1+a)^2 x - \frac{1}{6}(1+a)^3 \\
&= \frac{1}{6}(x - (1+a))^2(4x - (1+a)).
\end{aligned}$$

У уравнения $(x-(1+a))^2(4x-(1+a))=0$ два корня — $x=1+a$ и $x=(1+a)/4$. Причем поскольку $a \leq 1/3$, то $(1+a)/4 \geq a$.

Покажем теперь, что при $a \leq 1/3$ корней $x < a$ не существует.

2. $x < a$.

Для начала сосчитаем интеграл по всему квадрату:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 d\theta_1 \int_a^{1+a} d\theta_2 [2(\theta_2-\theta_1)-(a+1)] \\
&= \int_a^{1+a} d\theta_2 \left[(2\theta_2\theta_1 - \theta_1^2)\Big|_0^1 \right] - (1+a) \\
&= \int_a^{1+a} d\theta_2 \left[2\theta_2 - 1\right] - (1+a) = (\theta_2^2-\theta_2)\Big|_a^{1+a} = a-1.
\end{aligned}$$

Теперь по ненужному треугольнику:

$$\begin{aligned}
&\int_{a-x}^1 d\theta_1 \int_a^{x+\theta_1} d\theta_2 [2(\theta_2-\theta_1)-(a+1)] \\
&= \int_{a-x}^1 d\theta_1 \left[(\theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2)\Big|_a^{x+\theta_1} \right] - (1+a)\frac{1}{2}(1+a-x)^2 \\
&= \int_{a-x}^1 d\theta_1 \left[(x+\theta_1)^2 - 2\theta_1(x+\theta_1) - a^2 + 2\theta_1 a \right] - (1+a)\frac{1}{2}(1+a-x)^2 \\
&= \left(\frac{(x+\theta_1)^3}{3} - x\theta_1^2 - \frac{2}{3}\theta_1^3 - a^2\theta_1 + a\theta 1^2 \right)\Bigg|_{a-x}^1 - (1+a)\frac{1}{2}(1+a-x)^2 \\
&= \frac{2}{3}x^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}a\right)x^2 + (a^2-1)x + \left(-\frac{a^3}{6} - \frac{a^2}{2} + \frac{3}{2}a - \frac{5}{6}\right),
\end{aligned}$$

а значит, нужный нам интеграл, равен

$$\begin{aligned}
&-(1-a) - \frac{2}{3}x^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}a\right)x^2 + (a^2-1)x + \left(-\frac{a^3}{6} - \frac{a^2}{2} + \frac{3}{2}a - \frac{5}{6}\right) \\
&= -\frac{2}{3}x^3 + \left(\frac{3a}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + (1-a^2)x + \left(\frac{a^3}{6} + \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} - \frac{1}{6}\right).
\end{aligned}$$

Обозначим этот многочлен через $P(x,a)$, и исследуем его.

Заметим (см. рис. 5), что при $x=0$ этот многочлен принимает отрицательные значения при всех $a \in [0, 1/3]$.

Рассмотрим теперь производную

$$\begin{aligned}
P'_x(x,a) &= -2x^2 + (3a-1)x + (1-a^2) \\
&= -(2x-(a+1))(x-(a-1)).
\end{aligned}$$

При фиксированном a $P(x,a)$ является многочленом третьей степени, причем локальные экстремумы у него таковы: $a-1$ — минимум, $(a+1)/2$ — максимум (см. рис. 6). Таким образом, чтобы доказать, что этот многочлен не имеет корней на интервале $[0,a)$, достаточно проверить его значение в точке a.

Подставим $x=a$ в $P(x,a)$ и получим следующее:

$$\begin{aligned}
P(a,a) &= -\frac{2}{3}a^3 + \left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}\right)a^2 + (1-a^2)a + \left(\frac{a^3}{6} + \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} - \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{a}{2} - \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

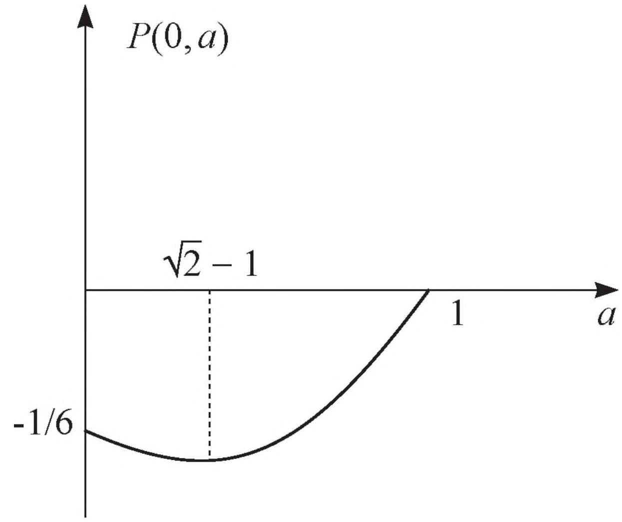

Рис. 5:

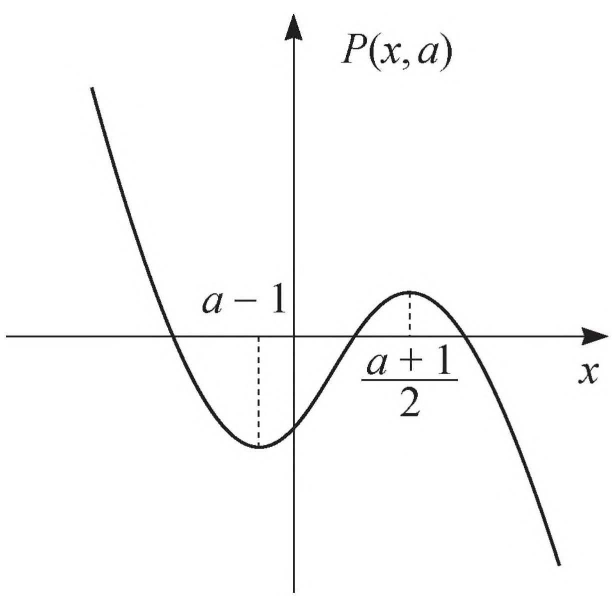

Рис. 6:

Отсюда получаем, что при $a \in [1, 1/3]$ у этого многочлена не существует корня, меньшего a. Значит выполняется случай 1 и $x(a) \geq a$ $(x(a) = (1+a)/4)$. Следовательно, решение исходной задачи максимизации ожидаемого богатства таково:

$$y_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta_2 - \theta_1 < (1+a)/4, \\ 1, & \text{если } \theta_2 - \theta_1 \geq (1+a)/4, \end{cases}$$

и можно сосчитать ожидаемый уровень благосостояния:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}W &= \mathrm{E}\theta_1 + \mathrm{E}(\theta_2 - \theta_1)y_2 = \frac{1}{2} + \int_x^{1+a} d\theta_2 \int_0^{\theta_2 - x} d\theta_1 [\theta_2 - \theta_1] \\ &= \frac{1}{3}(1+a)^3 - \frac{1}{2}x(1+a)^2 - \frac{1}{6}(1+a-x)^3 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}(1+a)^3 - \frac{1}{2}x(1+a)^2 - \frac{1}{6}\left(1+a-\frac{1+a}{4}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{1+a}{4}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1+a}{4}\right)^3 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{9(1+a)^3}{64}. \end{aligned}$$

Задача 15. *Рассмотрим следующую модель начальник-подчиненный, в которой оба агента нейтральны по отношению к риску. Начальник максимизирует $E\{x - w(x)\}$, подчиненный максимизирует $E\{w(x) - C(a)\}$, где $C(a)$ — издержки усилий агента, $a \in [0, 1]$, $C'(a) > 0$, $C''(a) > 0$, $C'(0) = 0$, $C'(1) = \infty$. Доход начальника x принимает одно из двух значений: X с вероятностью a и 0 с вероятностью $1 - a$. Гарантированный уровень полезности агента равен нулю.*

(a) Найдите безусловно оптимальный уровень усилий a^*, то есть уровень усилий, максимизирующий общественное богатство.

(b) Предположим, что начальник не наблюдает усилия агента a и может предлагать контракт только вида $w(x)$. Найдите оптимальный контракт. Сравните уровень усилий с безусловно оптимальным a^*.

(c) Предположим, что агент не имеет изначально никаких денег, то есть контракт должен удовлетворять условию $w(x) \geq 0$. Найдите оптимальный контракт и сравните уровень усилий с безусловно оптимальным a^*.

Решение. (a) Суммарный ожидаемый выигрыш агентов равен

$$E\{x - C(a)\}$$

Максимизируя ожидаемый выигрыш по a

$$\begin{aligned} & aX + (1-a)0 - C(a) \longrightarrow \max_a \\ \text{s.t. } & a \in [0, 1], \end{aligned}$$

получим условие первого порядка

$$X = C'(a).$$

Оптимальным значением a будет a^* — решение этого уравнения.

(b) В случае ненаблюдаемости усилий подчиненный максимизирует следующую функцию

$$\begin{aligned} &aw(X) + (1-a)w(0) - C(a) \longrightarrow \max_a \\ \text{s.t.}\ \ &a \in [0,1]. \end{aligned}$$

В результате, получим условие первого порядка

$$w(X) - w(0) = C^{'}(a).$$

Таким образом, задача начальника имеет вид

$$\begin{aligned} &aX - aw(X) - (1-a)w(0) \longrightarrow \max_{w(X),w(0)} \\ \text{s.t.}\ \ &w(X) - w(0) = C^{'}(a), \\ &aw(X) + (1-a)w(0) - C(a) \geq 0. \end{aligned}$$

Очевидно, в оптимуме, последнее неравенство выполняется как равенство (иначе $w(X)$ и $w(0)$ могли бы быть уменьшены на одну и ту же малую величину). Следовательно, ожидаемая заработная плата подчиненного равна издержкам и начальник максимизирует ту же функцию, что и в предыдущем пункте. Контракт для оптимального уровня усилий находится из условий

$$\begin{cases} w(X) - w(0) = C^{'}(a^*) = X, \\ a^*w(X) + (1-a^*)w(0) = C(a^*). \end{cases}$$

В итоге, социально оптимальные усилия могут быть получены при следующем контракте

$$\begin{aligned} &w(X) = C(a^*) + (1-a^*)X > 0, \\ &w(0) = C(a^*) - a^*X < 0. \end{aligned}$$

(c) Выпишем задачу начальника

$$\begin{aligned} &aX - aw(X) - (1-a)w(0) \longrightarrow \max_{w(X),w(0)} \\ \text{s.t.}\ \ &w(X) - w(0) = C^{'}(a), &(28) \\ &aw(X) + (1-a)w(0) - C(a) \geq 0, &(29) \\ &w(X,), w(0) \geq 0. &(30) \end{aligned}$$

Из (28) следует, что $w(X) > w(0)$. Неравенство (29) не может быть строгим, иначе, как и в предыдущем пункте, $w(0) < 0$. Далее, в оптимуме, $w(0)$ должно быть равным нулю, иначе и $w(X)$, и $w(0)$ могли бы быть уменьшены на одну и ту же малую величину. Следовательно, задача принимает вид

$$aX - aC^{'}(a) \longrightarrow \max_a$$

Оптимальное a^{**} определяется из уравнения

$$X - aC^{''}(a^{**}) - C^{'}(a^{**}) = 0.$$

Легко видеть, что так как $C'(a)$ - строго возрастающая функция, то

$$C'(a^{**}) = X - a^{**}C''(a^{**}) < X = C'(a^*).$$

Следовательно, $a^* > a^{**}$. Если агент имеет ограниченную ответственность, то уровень усилий ниже социально оптимального.

Задача 16. *Рассмотрим двухпериодную задачу отрицательного отбора. Полезность агента от q единиц товара равна $\theta q - t$, где t — сумма, уплаченная за товар, и $\theta = \{\underline{\theta}, \overline{\theta}\}$. Вероятность того, что $\theta = \underline{\theta}$ равна π. $\overline{\theta}$ больше, чем $\underline{\theta}$: $\overline{\theta}/\underline{\theta} < 1/(1-\pi)$. Издержки производства равны $q^2/2$. Дисконт равен нулю.*

(a) *Найдите безусловный оптимум.*

(b) *Найдите условный оптимум в однопериодной модели.*

(c) *Предположим, что объявив в первом периоде стратегию, начальник не может от нее отклониться во втором периоде (Salanie, Ch.6). Охарактеризуйте условно оптимальный контракт в двухпериодной модели.*

(d) *Охарактеризуйте оптимальный контракт, устойчивый по отношению к взаимному пересмотру (достаточно найти условия первого порядка).*

Решение. (a) Выпишем задачу безусловной оптимизации

$$\theta q - \frac{q^2}{2} \longrightarrow \max_q$$

Оптимальным значением q будет $q^*(\theta) = \theta$.

(b) Начальник предлагает два контракта $(\underline{p}, \underline{q})$ и $(\overline{p}, \overline{q})$для разных типов агентов. Выпишем задачу начальника

$$\pi\left(\underline{p} - \frac{\underline{q}^2}{2}\right) + (1-\pi)\left(\overline{p} - \frac{\overline{q}^2}{2}\right) \longrightarrow \max_{p,q}$$

$$\text{s.t. } \underline{\theta}\underline{q} - \underline{p} \geq 0, \tag{31}$$

$$\overline{\theta}\overline{q} - \overline{p} \geq 0, \tag{32}$$

$$\underline{\theta}\underline{q} - \underline{p} \geq \overline{q}\underline{\theta} - \overline{p}, \tag{33}$$

$$\overline{\theta}\overline{q} - \overline{p} \geq \underline{q}\overline{\theta} - \underline{p}. \tag{34}$$

Воспользуеыся известным результатом, гласящим что ограничения (31) и (34) - строгие, а (32) и (33) - нет (из неравенства (34) и $\overline{\theta} > \underline{\theta}$ следует (32), поэтому стого выполняются (31) и (34), из чего следует, что (33) — нестрогое). Оптимальные цены определяются по формулам

$$p_* = \underline{\theta}\underline{q}, \qquad p^* = \overline{\theta}\overline{q} - \overline{\theta}\underline{q} + \underline{\theta}\underline{q}.$$

Теперь задача максимизации принимает вид

$$\pi\left(\underline{\theta}\underline{q} - \frac{\underline{q}^2}{2}\right) + (1-\pi)\left(\overline{\theta}\overline{q} - \overline{\theta}\underline{q} + \underline{\theta}\underline{q} - \frac{\overline{q}^2}{2}\right) \longrightarrow \max_{\underline{q},\overline{q}}.$$

Выпишем условия первого порядка

$$\pi(\underline{\theta}-\underline{q})+(1-\pi)(\underline{\theta}-\overline{\theta})=0,$$
$$(1-\pi)(\overline{\theta}-\overline{q})=0.$$

Отсюда,

$$q^*=\overline{\theta},\qquad q_*=\underline{\theta}+\frac{1-\pi}{\pi}(\underline{\theta}-\overline{\theta}).$$

(c) Воспользуемся известным результатом (Salanie, Ch 6), что при невозможности пересмотреть конракт оптимальный многопериодный механизм эквивалентен стохастическому одноопериодному механизму. Следовательно, в двухпериодной модели начальник должен действовать в соответствии с second-best решением из одноопериодной модели.

(d) Во втором периоде начальник будет действовать в соответствии с second-best решением, хотя, быть может, и с другими пропорциями агентов разных типов. Поэтому агент $\underline{\theta}$ никогда в первый период не выберет контракт для другого типа агентов, так как в первый период он потеряет полезность, не приобретя ничего во втором. Поэтому если агент выбирает в первый период q^*, тем самым он выявляет свой тип. Также мы можем заключить, что агент $\underline{\theta}$ никогда не выбирает контракта q^*. Если агент выбрал в первом периоде q^*, то во втором периоде он не получит ничего, так как начальник знает его тип. Обозначим контракты, которые выбирает $\underline{\theta}$в каждый из периодов q_1 и q_2. Так как во второй период начальник действует в соответствии с second-best решением, альтернативой q_2 будет q^*. В каждый момент времени агент $\overline{\theta}$ безразличен между альтернативами. Будем предполагать, что в первый момент времени часть x агентов $\overline{\theta}$ предпочтет обнаружить себя и выбирает q^*. Тогда доля агентов $\underline{\theta}$ среди тех, кто выбрал q_1 равна

$$\pi_2=\frac{\pi}{\pi+(1-\pi)(1-x)}.$$

Оптимальное решение (p_2, q_2, q^*, p_2^*) ищется так же как и в пункте (b), только с новой вероятностью π_2. Зная решение, мы получаем выигрыш участника $\overline{\theta}$ во втором периоде от применения стратегии q_1 в первом. Так как этот участник безразличен в первый период, то ограничения (34) и (31) будет иметь вид

$$(q_1\overline{\theta}-p_1)+\delta(q_2\overline{\theta}-p_2)=q^*\overline{\theta}-p_1^*,\qquad \overline{\theta}q_1=p_1.$$

Далее, из условия первого порядка определяются оптимальные q_1 и x. Заметим, что при этом используется следующая функция Лагранжа

$$(1-\pi)x\left(p_1^*-\frac{\overline{\theta}^2}{2}+\delta\frac{\overline{\theta}^2}{2}\right)+(1-\pi)(1-x)\left(p_1-\frac{q_1^2}{2}+\delta(p_2^*-\frac{\overline{\theta}^2}{2})\right)+$$

$$+\pi\left(p_1-\frac{q_1^2}{2}+\delta(p_2-\frac{q_2^2}{2})\right)\longrightarrow\max_{q_1,\,x}$$

Задача 17. *Рассмотрим торговлю между двумя агентами: покупателем B и продавцом S. Оценка покупателем товара θ^b принимает значение $1+\alpha+\beta$ с вероятностью x и α с вероятностью $1-x$. Оценка продавцом товара принимает значение 0 с вероятностью y и $1+\alpha$ с вероятностью $1-y$. При $t=0$ агенты подписывают контракт. При $t=1$ каждый агент может вложить инвестиции: B инвестирует в x, S инвестирует в y. Издержки инвестиций равны x^2 и y^2 соответственно. при $t=2$ агенты наблюдают оценки друг друга и могут торговать.*

(a) *Охарактеризуйте безусловно оптимальные уровни x и y и полученное общественное богатство.*

(b) *Предположим, что переговоры ex post происходят согласно тóрговому решению Нэша. Найдите x и y и сосчитайте богатство.*

(c) *Предположим, что участники могут написать долгосрочный контракт торговать по цене p, который не может быть нарушен односторонним образом, но может быть пересмотрен обеими сторонами. Найдите x и y и сосчитайте богатство в зависимости от p. Найдите p, максимизирующее богатство.*

(d) *Предположим, что B покупает S и, следовательно, присваивает себе весь ex post выигрыш. Найдите x и y и сосчитайте богатство.*

(e) *Предположим, что S покупает B и, следовательно, присваивает себе весь ex post выигрыш. Найдите x и y и сосчитайте богатство.*

(f) *Для всех значений $\alpha \in [0,1]$ и $\beta \in [0,1]$ сравните богатство в пунктах (b)—(d) и охарактеризуйте значения параметров α и β, при которых выгодна интеграция.*

Решение. (a) Торговля между агентами происходит всегда, за исключением случая, когда $\theta^b = \alpha$ и $\theta^s = 1+\alpha$. Поэтому, чтобы найти социально оптимальные уровни инвестиций, надо оптимизировать следующую функцию

$$xy[1+\alpha+\beta] + x(1-y)\beta + (1-x)y\alpha - x^2 - y^2 \longrightarrow \max_{x,y}.$$

Выпишем условия первого порядка

$$\begin{cases} y[1+\alpha+\beta] + (1-y)\beta - y\alpha - 2x = 0, \\ x[1+\alpha+\beta] - x\beta + (1-x)\alpha - 2y = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y+\beta = 2x, \\ x+\alpha = 2y. \end{cases}$$

Отсюда легко получить оптимальные значения инвестиций

$$y^* = \frac{\beta+2\alpha}{3}, \qquad x^* = \frac{2\beta+\alpha}{3}.$$

Рассчитаем общественное благосостояние

$$W^* = xy + \beta x + \alpha y - x^2 - y^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}{3}.$$

(b) Если в переговорах используется торговое решение Нэша, то мы будем используем при торговле цену $p = (v+c)/2$. Участники максимизируют функции

$$U^B = E\left(\frac{v-c}{2}\right)_+ - x^2 \longrightarrow \max_x,$$
$$U^S = E\left(\frac{v-c}{2}\right)_+ - y^2 \longrightarrow \max_y.$$

Следовательно, задача принимает вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[xy+\beta x+\alpha y] - x^2 \longrightarrow \max_x, \\ \\ \frac{1}{2}[xy+\beta x+\alpha y] - y^2 \longrightarrow \max_y. \end{cases}$$

Условия первого порядка имеют вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[y+\beta] = 2x, \\ \\ \frac{1}{2}[x+\alpha] = 2y, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x^* = \frac{4\alpha+\beta}{15}, \quad y^* = \frac{\alpha+4\beta}{15}.$$

Рассчитаем благосостояние

$$W = \frac{(4\alpha+\beta)(\alpha+4\beta)}{225} + \frac{(4\alpha+\beta)\beta}{225} + \frac{(\alpha+4\beta)\alpha}{225} - \frac{(\alpha+4\beta)^2}{225} - \frac{(\alpha+4\beta)^2}{225} =$$
$$= \frac{47\alpha^2+47\beta^2+31\alpha\beta}{225}.$$

(c) Предположим, что агенты договорились торговать по цене p. Пусть $p \in (1+\alpha, 1+\alpha+\beta]$. Тороговля происходит всегда, так как выгодна продавцу. Выпишем задачу оптимизации

$$U^B = x(1+\alpha+\beta-p) + (1-x)(\alpha-p) - x^2 \longrightarrow \max_x,$$
$$U^S = yp + (1-y)(p-1-\alpha) - y^2 \longrightarrow \max_y.$$

Оптимальные значения инвестиций и благосотояние равны

$$x^* = \frac{1+\beta}{2}, \qquad y^* = \frac{1+\alpha}{2}, \qquad W = \frac{(1+\alpha)^2+(1+\beta)^2}{4} - 1.$$

Точно такой же результат мы получим при $p \in [0, \alpha)$. Если $p \in [\alpha, 1+\alpha]$, то торговля всегда происходит по цене p и может быть отклонена только если $v = \alpha, c = 1+\alpha$. Выпишем задачу оптимизации

$$U^B = x(1+\alpha+\beta-p) + (1-x)y(\alpha-p) - x^2 \longrightarrow \max_x,$$
$$U^S = yp + x(1-y)(p-1-\alpha) - y^2 \longrightarrow \max_y.$$

Условия первого порядка принимают вид

$$\begin{cases} x(1+\alpha-p) - 2y + p = 0, \\ -2x + y(p-\alpha) + (1+\alpha+\beta-p) = 0. \end{cases}$$

Оптимальные значения инвестиций равны

$$x^* = \frac{2(1+\alpha+\beta-p) + p(p-\alpha)}{4-(1+\alpha-p)(p-\alpha)}, \qquad y^* = \frac{(1+\alpha+\beta-p)(1+\alpha-p)+2p}{4-(1+\alpha-p)(p-\alpha)}.$$

Расчет функции благосостояния не приведен в силу чрезвычайной громоздкости.

(d) В случае, когда покупатель приобретает продавца, инвестиции со стороны продавца равны нулю. Задача оптимизации имеет вид

$$\beta x - x^2 \longrightarrow \max_x.$$

В результате,

$$x = \frac{\beta}{2}, \qquad W = \frac{\beta^2}{4}.$$

(e) Аналогично, $x = 0$.

$$\alpha y - y^2 \longrightarrow \max_y.$$

Продавец должен инвестировать

$$y = \frac{\alpha}{2}, \qquad W = \frac{\alpha^2}{4}.$$

(f) Сравнивая благосостояние в различных пунктах, нетрудно заметить, что в первом пункте оно максимальное, а следующим по величине может идти любое из них, в зависимости от значения параметров.

Задача 18. *Рассмотрим торговлю между двумя агентами, как в статье Харта и Мура (1988). Оценки покупателем и продавцом товара равны $v = 2+18x\beta$ и $c = 20-18y\sigma$ соответственно. Здесь β и σ — ненаблюдаемые инвестиции B и S, вложенные при $t = 1/2$, v и c симметрически наблюдаемы, x и y являются случайными переменными, равномерно и независимо распределенными на $[0, 1]$. Инвестиции дискретны: $\beta, \sigma = \{0, 1\}$. Издержки инвестиций равны β и σ. Торговля бинарна, то есть $q = \{0, 1\}$.*

(a) Найдите безусловно оптимальный уровень торговли для всех β, σ, x, y.

(b) Найдите безусловно оптимальный уровень инвестиций.

(c) Предположим, что участники заключили контракт фиксированной цены p^0, p^1. Найдите условно оптимальный контракт фиксированной цены.

(d) Предположим, что поставка товара верифицируема. Найдите option контракт, который реализует безусловный оптимум. (Предположите, что покупателю принадлежит вся то́рговая сила.)

Решение. (a) Торговля осуществляется тогда и только тогда, когда

$$2 + 18x\beta > 20 - 18y\sigma \qquad \Longleftrightarrow \qquad x\beta + y\sigma > 1.$$

(b) Введем обозначение

$$\Omega(\beta, \sigma) = \{(x, y) : \ x\beta + y\sigma > 1\}.$$

чтобы найти безусловно оптимальный уровень инвестиций, необходимо найти максимум функции

$$W = \iint\limits_{\Omega(\beta,\,\sigma)} 18x\beta + 18y\sigma - 18dxdy - \beta - \sigma \longrightarrow \max_{\beta,\,\sigma}.$$

Легко видеть, что если один из участников отказывается от инвестиций, то инвестиции второго участника не дадут никакого эффекта. Поэтому нам необходимо сравнить только те ситуации, когда либо все инвестируют ($\beta = \sigma = 1$), либо не инвестирует никто ($\beta = \sigma = 0$). В первам случае общественное благосостояние равно

$$W = \int\limits_0^1 \int\limits_{1-x}^1 18x\beta + 18y\sigma - 18dydx - 2 = 1.$$

Если инвестиций нет, то благосостояние равно нулю, то есть оптимальным является инвестирование с обеих сторон.

(c) Предположим, что стороны заключили контракт (p_0, p_1). Здесь p_q - величина трансферта от покупателя к продавцу при величине торговли q. Обозначим $k = p_1 - p_0$. Таким образом,

$$\begin{cases} v > k > c & \Rightarrow \quad q = 1,\ p = p_1, \\ \text{иначе} & \Rightarrow \quad q = 0,\ p = p_0. \end{cases}$$

Выпишем полезности продавца и покупателя

$$U^B = -p_0 + \iint\limits_{v>k>c} v - k\, dx\, dy - \beta,$$

$$U^S = p_0 + \iint\limits_{v>k>c} k - c\, dx\, dy - \sigma.$$

Заметим, что $v > c$ только при положительных инвестициях, поэтому точки $(0, 1), (1, 0)$ не могут быть равновесиями по Нэшу. Напротив, точка $(0, 0)$ является равновесием. Осталось только проверить, будет ли равновесием точка $(1, 1)$. Пусть $\beta = 1, \sigma = 1$.

$$U^B = -p_0 - 1 + \iint\limits_{2+18x>k>20-18y} 2 + 18x - k\, dx\, dy =$$

$$= -p_0 - 1 + \int\limits_{\frac{k-2}{18}}^{1} \int\limits_{\frac{20-k}{18}}^{1} 2 + 18x - k\, dx\, dy = \frac{(k-2)(k-20)^2}{648} - p_0 - 1.$$

Аналогично,

$$U^S = p_0 - 1 + \iint\limits_{2+18x>k>20-18y} k - 20 + 18y\, dx\, dy =$$

$$= -p_0 - 1 + \int\limits_{\frac{k-2}{18}}^{1} \int\limits_{\frac{20-k}{18}}^{1} k - 20 + 18y\, dx\, dy = \frac{(k-2)^2(20-k)}{648} + p_0 - 1.$$

Точка $(1, 1)$ является равновесием тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \frac{(k-2)(k-20)^2}{648} - p_0 - 1 \geq -p_0, \\ \\ \frac{(k-2)^2(20-k)}{648} + p_0 - 1 \geq p_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-2)(k-20)^2 \geq 648, \\ \\ (k-2)^2(20-k) \geq 648. \end{cases}$$

Допустимое k ищется как решение неравенства

$$(k-2)(20-k) \geq 648^{\frac{2}{3}} = 36\sqrt[3]{9}.$$

Следовательно, при

$$k \in \left[11 - \sqrt{81 - 36\sqrt[3]{9}}, 11 + \sqrt{81 - 36\sqrt[3]{9}}\,\right],$$

точка точка $(1,1)$ является равновесием по Нэшу.

(d) В случае, когда заключается опционный контракт и вся переговорная сила принадлежит покупателю, полезности игроков выглядят следующим образом:

$$U^S = p_0 + \iint\limits_{k>c} k - c\,dx\,dy - \sigma,$$
$$U^B = -p_0 - 1 + \iint\limits_{v>c} v - c\,dx\,dy - \iint\limits_{k>c} k - c\,dx\,dy - \beta.$$

Преобразуеим эти выражения

$$U^S = p_0 + \int\limits_0^1 \int\limits_{\frac{20-k}{18}} 1k - 20 + 18y\sigma\,dx\,dy - \sigma,$$
$$U^B = 18 \iint\limits_{\Omega(\beta,\sigma)} x\beta + y\sigma - 1\,dx\,dy - U^S - \sigma - \beta.$$

Найдем значения полезностей в точках $(1,1),(1,0),(0,1)$

$$U^S\Big|_{(1,1)} = p_0 + \int\limits_{\frac{20-k}{18}} 1k - 20 + 18y\,dx\,dy - 1 = p_0 - 1 + \frac{(k-2)^2}{36},$$
$$U^B\Big|_{(1,1)} = 3 - p_0 - 1 - \frac{(k-2)^2}{36},$$
$$U^S\Big|_{(1,0)} = p_0,$$
$$U^B\Big|_{(0,1)} = -p_0 - \frac{(k-2)^2}{36}.$$

Заметим, что

$$U^B\Big|_{(1,1)} > U^B\Big|_{(0,1)} \text{ и } U^S\Big|_{(1,1)} > U^S\Big|_{(1,0)} \quad \Leftrightarrow \frac{(k-2)^2}{36} \geq 1,\ k \in [2,20],$$

то есть, при
$$k \in [8,20].$$

Следовательно опционный контракт реализует безусловный оптимум при $k \in [8,20]$.

Задача 19. Оптимальная стартовая цена. *Продавец хочет продать единицу товара. Его оценка товара равна $c > 0$. Есть n покупателей, чьи оценки θ_i являются их частной информацией. Ex ante оценки покупателей независимы и распределены на $[0,\infty)$ с функцией распределения $F(\theta)$. Продавец может назначить стартовую цену p, то есть если все заявки ниже p, продавец оставляет товар себе.*

(a) Найдите стартовую цену p^*, оптимальную для продавца.

(b) Является ли аукцион первой цены со стартовой ценой p^* оптимальным аукционом? Является ли он ex post эффективным?

(c) *Ответьте на те же вопросы для аукциона второй цены.*

(d) *Решите (a) для равномерного и экспоненциального распределения.*

Решение. В условиях задачи ожидаемый выигрыш продавца при стартовой цене $p \geq 0$ равен

$$cF^n(p) + n\int_p^\infty (\theta F'(\theta) + F(\theta) - 1)F^{n-1}(\theta)d\theta. \tag{35}$$

Докажем это утверждение в предположении, что у всех покупателей есть общая равновесная стратегия $b(\theta)$ (т. е. существует симметричное равновесие), причем она является возрастающей по θ функцией.

Не ограничивая общности, рассмотрим только первого покупателя (в силу симметрии, этого достаточно). Пусть правило $q = q(b_1, \ldots, b_n)$ указывает, сколько платить первому покупателю, если сделаны заявки b_1, …, b_n. Следовательно, ожидаемый платеж 1-го игрока равен

$$Q(b_1) = \mathrm{E}_{-1}[q(b_1, b(\theta_2), \ldots, b(\theta_n)] \equiv \mathrm{E}_{\theta_2,\ldots,\theta_n}[q(b_1, b(\theta_2), \ldots, b(\theta_n)].$$

Предположим, что b_1 выбирается из области значений функции b (Если b — равновесная стратегия, то $b(\theta_1)$ — наилучший выбор среди всех b_1, а значит, и среди $b_1 \in b(\mathbb{R})$). Тогда

$$Q(x) = \mathrm{E}_{-1}[q(b(x), b(\theta_2), \ldots, b(\theta_n)].$$

Так как b возрастает по x, то товар достанется 1-му агенту, если и только если $b(x) > b(\theta_i)$ при $i = 2, \ldots, n$, или $\theta_2, \ldots, \theta_n < x$. Вероятность этого события равна

$$P\{\theta_2, \ldots, \theta_n < x\} = \prod_{i=2}^n P\{\theta_i < x\} = F^{n-1}(x).$$

Следовательно, выигрыш первого покупателя равен

$$\Pi(x, \theta_1) = \theta_1 P\{b(\theta_2), \ldots, b(\theta_n) < b(x)\} - Q(x) = \theta_1 F^{n-1}(x) - Q(x).$$

(Здесь x — «выявленная» оценка товара, θ_1 — «истинная» оценка.)

Поскольку b является рвновесной стратегией, то $\arg\max_x \Pi(x, \theta_1) = \theta_1$.

Рассмотрим условия первого порядка:

$$\theta_1[F^{n-1}(x)]' - Q'(x) = 0 \quad \text{при } x = \theta_1.$$

Это выполнено при $\theta_1 \geq p$. При $\theta_1 = p$ должно выполняться условие оптимальности для аукциониста $\theta_1 F^{n-1}(\theta_1) - Q(\theta_1) = 0$.

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение. Получим

$$\begin{aligned} Q(\theta_1) - Q(p) &= \int_p^{\theta^1} \theta[F^{n-1}(\theta)]'d\theta \\ &= \theta F^{n-1(\theta)}\Big|_p^{\theta_1} - \int_p^{\theta^1} F^{n-1}(\theta)d\theta \\ &= \theta_1 F^{n-1}(\theta_1) - pF^{n-1}(p) - \int_p^{\theta_1} F^{n-1}(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Из начального условия ($Q(p) = pF^{n-1}(p)$) получаем, что

$$Q(\theta_1) = \theta_1 F^{n-1}(\theta_1) - \int_p^{\theta_1} F^{n-1}(\theta) d\theta.$$

Ожидаемый доход продавца от 1-го агента равен

$$q_1 = \int_p^{\infty} Q(\theta_1) dF(\theta_1).$$

Подставим сюда $Q(\theta_1)$. Получим

$$\begin{aligned}
q_1 &= \int_p^{\infty} \left[\theta_1 F^{n-1}(\theta_1) - \int_p^{\theta_1} F^{n-1}(\theta) d\theta\right] F'(\theta_1) d\theta_1 \\
&= \int_p^{\infty} \theta_1 F^{n-1}(\theta_1) F'(\theta_1) d\theta_1 - \int_p^{\infty} \left[\int_p^{\theta_1} F^{n-1}(\theta) d\theta\right] F'(\theta_1) d\theta_1 \\
&= \int_p^{\infty} \theta_1 F^{n-1}(\theta_1) F'(\theta_1) d\theta_1 - \int_p^{\infty} d\theta \int_\theta^{\infty} F^{n-1}(\theta) F'(\theta_1) d\theta_1 \\
&= \int_p^{\infty} \theta_1 F^{n-1}(\theta_1) F'(\theta_1) d\theta_1 - \int_p^{\infty} F^{n-1}(\theta)(1 - F(\theta)) d\theta \\
&= \int_p^{\infty} (\theta_1 F'(\theta_1) + F(\theta_1) - 1) F^{n-1}(\theta_1) d\theta_1.
\end{aligned}$$

Если продавец не продал товар, то ему достается его персональная оценка c. Это происходит с вероятностью $F^n(p)$. Поэтому общий ожидаемый выигрыш продавца равен $cF^n(p) + q_1 + \cdots + q_n$. Это равно

$$cF^n(p) + n \int_p^{\infty} (\theta F'(\theta) + F(\theta) - 1) F^{n-1}(\theta) d\theta.$$

Утверждение доказано.

Определим оптимальную стартовую цену p^*. Для этого максимизируем (35). Дифференцируя по p получаем:

$$cnF^{n-1}(p)F'(p) - n(pF'(p) + F(p) - 1)F^{n-1}(p) = 0, \tag{36}$$

$$nF^{n-1}(p)((c - p)F'(p) + F(p) - 1) = 0. \tag{37}$$

Отсюда получаем условие на p^*: $p^* = c + (1 - F(p^*))/F'(p^*)$. Заметим, что $p^* > c$.

(b) и (c) Оптимальная стартовая цена вычисляется для всех аукционов, удовлетворяющих следующим свойствам:

- Если все заявки ниже, чем стартовая цена, — товар не продается.
- Товар достается агенту, сделавшему самую высокую заявку.
- Все агенты равны.
- Существует симметричное равновесие с возрастающими стратегиями.

Аукционы первой и второй цены удовлетворяют этим условиям.

Таким образом, эти аукционы оптимальны. Ни один из них не является ex post эффективным, так как $p^* > c$ (если $c < \max \theta_i < p^*$, товар останется у продавца и не достанется агенту с наиболее высокой оценкой.

(d) Для равномерного распределения

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{при } \theta < 0, \\ \theta/\overline{\theta}, & \text{при } 0 \leq \theta \leq \overline{\theta}, \\ 1, & \text{при } \theta > \overline{\theta}. \end{cases}$$

Решая уравнение для стартовой цены, получаем:

$$p = c + \frac{1 - p/\overline{\theta}}{1/\overline{\theta}} = c + \overline{\theta} - p,$$

откуда находим $p^* = (c + \overline{\theta})/2$, при $0 < c < \overline{\theta}$. Если $c \geq \overline{\theta}$, то p^* можно выбрать любое, такое, что $p^* \geq c$.

Для показательного распределения

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{при } \theta < 0, \\ 1 - e^{-\lambda\theta}, & \text{при } \theta \geq 0. \end{cases}$$

В этом случае $p = c + (1 - F(p))/F'(p) = c + (1 - (1 - e^{-\lambda\theta}))/(\leq^{-\lambda\theta}) = c + 1/\lambda$. Таким образом, для показательного распределения $p^* = c + 1/\lambda$.

Задача 20. *Покупатель B хочет приобрести единицу товара у продавца S в момент $t = 1$. В момент $t = 1/2$, S делает инвестиции $\sigma \in [0, 1]$ в качество товара, которые не могут быть включены в контракт. Стоимость производства товара в момент $t = 1$ постоянна и равна $c = 1/2$. В момент $t = 1$ B получает полезность от потребления товара, распределенную в соответствии со следующей функцией распределения $F(v) = v + \sigma(v^2 - v)$. Стоимость инвестиций равна $\sigma/24$.*

(a) Найдите безусловный оптимум: оптимальную торговлю ex-post и оптимальные инвестиции ex-ante.

(b) Предположим, что стороны заключили контракт в момент $t = 0$, но договариваются о цене в момент $t = 1$. Что произойдет, если вся переговорная сила принадлежит B? Если B и S обладают равной переговорной силой? Если распределение переговорной силы $(1 - \gamma) : \gamma$?

(c) Предположим, что переговорная сила распределена как $(1 - \gamma) : \gamma$. Может ли улучшить ситуацию опцион?

Решение. (a) Торговля происходит тогда и только тогда, когда $v \geq c = 1/2$. Чтобы добиться оптимума, необходимо максимизировать ожидаемый выигрыш от торговли

$$E(v - c) - c(\sigma) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} v \, dF(v) - c \int_{\frac{1}{2}}^{1} dF(v) - \frac{\sigma^2}{24} \longrightarrow \max_{\sigma}.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} v\,dF(v) - c\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dF(v) = \left(\frac{2}{3}v^3\sigma + \frac{1}{2}v^2(1-\sigma) - cF(v)\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\sigma}{12} + \frac{1}{8}.$$

Следовательно, необходимо максимизировать функцию

$$\frac{\sigma}{12} + \frac{1}{8} - \frac{\sigma^2}{24} \longrightarrow \max_{\sigma}.$$

Из условия первого порядка получаем $\sigma^* = 1$.

(b) Если в момент $t = 1/2$ были сделаны инвестиции σ, то ожидаемая прибыль от торговли составит $\sigma/12 + 1/8$. Если продавец S получит только часть γ от нее, то оптимальный уровень инвестиций находится из задачи

$$\gamma\left(\frac{\sigma}{12} + \frac{1}{8}\right) - \frac{\sigma^2}{24} \longrightarrow \max_{\sigma}.$$

Следовательно, $\sigma = \gamma$. Совместное благосостояние равно

$$W = \frac{\gamma}{12} + \frac{1}{8} - \frac{\gamma^2}{24}.$$

Если всей переговорной силой обладает продавец, то будет достигнут безусловный оптимум. Если всей переговорной силой обладает покупатель, то не будет сделано некаких инвестиций: $\sigma = 0$. В этом случае, $W = 1/8$. Если переговорная сила поделена поровну между агентами, то $\sigma = 1/2$ и $W = 1/6$.

(c) Предположим, что в момент $t = 0$ стороны заключили опционный контракт. То есть, покупатель получает право купить товар по цене p_1, а в случае отказа от покупки должен заплатить цену p_0. Введем обозначение $k = p_1 - p_0$. Очевидно, покупатель совершит покупку если $v \geq k$. Рассмотрим ситуацию, когда $k \geq c$. Если $v \geq k$, то торговля происходит. Если $k > v \geq c$, то торговля не происходит, хотя она и выгодна всем. В этом случае происходит пересмотр контракта и стороны делят выигрыш в пропорции $1-\gamma : \gamma$. S, выбирая инвестиции, максимизирует функцию

$$(k-c)(1-F(k)) + \gamma\int\limits_{\frac{1}{2}}^{k}(v-c)\,dF - \frac{\sigma^2}{24} \longrightarrow \max_{\sigma}.$$

Очевидно, что максимизируя эту функцию, нельзя добиться безусловного оптимума. В самой лучшей для S ситуации, при $k = 1$, S максимизирует функцию из пункта (b) и, в результате, при $\gamma < 1$, не инвестирует. Несмотря на то, что общий платеж продавцу может увеличиться (за счет p_0), опцион негативно влияет на стимулы продавца инвестировать.